

Suites numériques

Objectifs

J'ai dans un coin de ma tête un petit projet de vulgarisation des mathématiques. Le but est de faire comprendre que les mathématiques ne sont pas une obscure science réservée à une élite, mais un langage utilisé pour décrire le monde. La mauvaise réputation des mathématiques est en partie due à la manière dont elles sont enseignées.

J'ai compris que si l'on explique en termes simples les notions mathématiques avec des exemples d'application à l'appui, on peut faire comprendre aux gens leur importance.

J'avais déjà publié il y a plus d'un an un premier document sur les suites, mais avec le recul, je me suis aperçu que le document pouvait être amélioré. Voici donc une nouvelle version plus accessible et détaillée.

Dans leur forme la plus simple, les suites numériques sont simplement des séquences de nombres.

Définition intuitive

Suite numérique = liste de nombres

Exemples de suites

Par exemple, la séquence de nombres

4, 2, 7, 13, 12, 45

peut être considérée comme une suite numérique. On peut en créer à volonté avec les nombres que l'on souhaite.

Exemples de suites II

En voici une autre.

34.8, 34.2, 34.9, 34.0, 33.7, 34.2, 38.4, 82.6, 33.9

Exemples de suites III

Et encore une.

116, 416, 728, 1061, 1561, 2081, 3141, 3642, 4163

Éléments constitutifs d'une suite

Les nombres qui forment une suite peuvent être choisis au hasard et n'avoir aucune signification particulière. Ainsi pour créer la suite

4, 2, 7, 13, 12, 45

les nombres ont été choisis au hasard.

Mais plus généralement, les nombres qui constituent une suite représentent des faits, des informations importantes ou proviennent de l'observation de phénomènes naturels.

Éléments constitutifs d'une suite II

Ainsi, les nombres de la suite

116, 416, 728, 1061, 1561, 2081, 3141, 3642, 4163

sont issus de la grille tarifaire appliquée par le service MTN MoMo pour les opérations de retrait.

Éléments constitutifs d'une suite III

Les nombres

34.8, 34.2, 34.9, 34.0, 33.7, 34.2, 38.4, 82.6, 33.9

représentent quant à eux les températures maximales enregistrées par année de 2010 à 2018 dans la ville de Cotonou.

Éléments constitutifs d'une suite IV

Ainsi, une suite numérique peut être créée de façon arbitraire en fonction de la fantaisie du créateur ou résulter de l'observation d'un phénomène :

- chiffre d'affaires d'une entreprise sur plusieurs années ;
- les moyennes de classe d'un élève durant ses études secondaires ;
- l'évolution du poids d'un bébé ;
- etc.

Généralement, on s'intéresse aux suites de la seconde catégorie. Souvent parce que l'on veut étudier un phénomène et faire des prévisions en fonction des observations passées.

Convention de représentation des suites

Les mathématiciens aiment bien la concision. Ils représentent souvent les choses avec des symboles, pour ne pas trop écrire et gagner du temps¹.

Tout comme on donne un prénom à un enfant, on désigne généralement une suite par une lettre de l'alphabet. Les lettres utilisées couramment à cet effet sont U, V ou encore F².

1. Ce sont de gros paresseux.

2. Parfois, la lettre choisie est la première lettre du nom de famille du créateur de la suite, s'il advient que la suite est célèbre.

Convention de représentation des suites II

Au sein d'une suite, les éléments sont désignés un indice, qui n'est rien d'autre que leur rang au sein de la suite.

Le premier élément prend l'indice 1, le deuxième élément l'indice 2, le troisième élément l'indice 3, ainsi de suite.

Convention de représentation des suites III

Donc, si nous avons choisi de nommer une suite u :

- le premier élément de la suite sera u_1 ,
- le deuxième élément sera u_2 ,
- le troisième élément sera u_3 ,
- \dots ,
- le n -ième élément sera u_n .

Convention de représentation des suites III

Pour notre suite

34.8, 34.2, 34.9, 34.0, 33.7, 34.2, 38.4, 82.6, 33.9

qui représente les températures maximales par année, nous avons :

- $u_1 = 34.8,$
- $u_2 = 34.2,$
- $u_3 = 34.0,$
- $\dots,$
- $u_9 = 33.9.$

Les éléments d'une suite sont appelés **termes**³ de la suite.

3. Ha ha ha ! Vous avez compris le jeu de mots ? Terminologie, termes... Vous voyez qu'on peut s'amuser en faisant les maths.

Donc, à partir de cet instant, nous utiliserons l'expression **terme** pour désigner les éléments d'une suite.

Calcul des termes d'une suite à l'aide d'une formule

Nous avons dit que l'on peut créer une suite soit en choisissant les termes de façon aléatoire, soit en étudiant un phénomène et en notant les valeurs observées.

Il existe une troisième façon de définir une suite, située à mi-chemin entre les deux précédentes. Elle consiste à établir une formule pour calculer les termes de la suite.

Calcul des termes d'une suite à l'aide d'une formule

Nous disons que cette méthode est à mi-chemin entre les deux autres parce que nous pouvons définir une formule de calcul tout à fait au hasard juste pour nous amuser (ce qui rejoint la situation où nous choisissons de façon aléatoire les termes de notre suite), mais nous pouvons aussi définir une formule qui permette de faire des estimations exactes ou approchées des valeurs prises par un phénomène que nous étudions.

Illustration : étude du solde d'un compte à intérêts simples

Supposons que vous ouvrez un compte à intérêts simples dans une banque.

Pour ce type de compte, les intérêts sont calculés uniquement sur le montant du capital, sans prendre en compte les intérêts antérieurs. Ainsi à la fin de chaque année, le solde de votre compte augmente d'un montant fixe que l'on peut calculer en appliquant le taux d'intérêt au capital.

Montant des intérêts

$$\text{Intérêts} = \text{Capital} * \text{Taux} / 100$$

Formule pour le calcul du solde I

Supposons que le capital de départ est de 1 000 000 et que le taux appliqué est de 5%.

On peut donc calculer le solde du compte d'année en année. Puisque le montant des intérêts ne change pas et dépend uniquement du capital de départ, on peut calculer :

Montant des intérêts

$$\text{Intérêts} = 1\,000\,000 * 5 / 100 = 5000$$

Formule pour le calcul du solde II

Ainsi :

- À la fin de la première année, nous aurons

$$\text{Solde} = 1\,000\,000 + 5\,000$$

$$\text{Solde} = 1\,005\,000$$

- À la fin de la 2^{ième} année,

$$\text{Solde} = 1\,000\,000 + 5\,000 + 5\,000$$

$$\text{Solde} = 1\,000\,000 + 5\,000 * 2$$

$$\text{Solde} = 1\,010\,000$$

- À la fin de la 3^{ième} année,

$$\text{Solde} = 1\,000\,000 + 5\,000 + 5\,000 + 5\,000$$

$$\text{Solde} = 1\,000\,000 + 5\,000 * 3$$

$$\text{Solde} = 1\,015\,000$$

Formule pour le calcul du solde III

Si on observe comment se calcule le solde du compte à la fin d'une année, on peut constater que ce solde est obtenu en ajoutant au capital initial le montant des intérêts multiplié par le nombre d'années.

On peut donc calculer le solde à la fin d'une année pour un compte à intérêts simples. Si on nomme

- C le capital de départ,
- I le montant des intérêts,
- N le nombre d'années,

$$\text{Solde} = C + N * I$$

On peut donc prédire avec exactitude le solde du compte chaque année grâce à une formule.

On a donc les deux éléments permettant de définir une suite :

- Un phénomène qui est d'un grand intérêt pour nous (l'évolution du solde de notre compte),
- une formule qui permet de prédire le comportement du phénomène (les valeurs futures du solde).

Et voilà. On peut créer une suite numérique dont les termes représentent le solde de notre compte pour une année donnée.

La formule de notre suite, que nous appellerons S^4 (pour solde) est la suivante :

$$S_n = C + n * I$$

En fonction de notre capital (C) de départ et de l'intérêt (I), cette formule nous permet de calculer le solde après un certain nombre d'années (n).

-
4. Rappelez-vous, les mathématiciens aiment l'efficacité. Utiliser une lettre ou un symbole pour représenter une idée ou faire référence à quelque chose. C'est un principe utilisé couramment dans la vie de tous les jours. Par exemple, si vous voyez un sac avec VL, vous savez immédiatement que c'est fait par Louis Vuitton.

Notre formule,

$$S_n = C + n * I$$

traduit l'idée suivante : le solde du compte après un nombre donné d'année(s) est obtenu en ajoutant au capital de départ, le montant des intérêts multiplié par le nombre d'années.

C'est un principe important des mathématiques : résumer en une formule (utilisant 7 symboles) un principe qui s'explique avec bien plus de mots (dans le cas présent, 28 mots).

Et voilà.

Nous sommes à la fin de la première présentation.