C. R. Acad. Sci. Paris, t. 324, Série I, p. 1137-1142, 1997
Probabilités/*Probability*

Comment détecter le délit d'initiés ?

Axel GRORUD et Monique PONTIER

A. G. : U.R.A. CNRS 225, C.M.I., Université de Provence,
39, rue Joliot-Curie, 13453 Marseille CEDEX 13, France ;
E-mail: agrorud@abel.univ-mrs.fr

M. P. : U.R.A. CNRS 1803, Bâtiment de Mathématiques,
Université d'Orléans, BP 6759, 45067 Orléans CEDEX 02, France.
E-mail: pontier@labomath.univ-orleans.fr

Résumé. Cette Note utilise la technique de grossissement de filtrations browniennes pour modéliser l'observation obtenue par un agent économique « initié ». Les politiques admissibles optimales sont caractérisées et, sous des hypothèses gaussiennes, un test statistique est proposé pour détecter si l'agent a effectivement bénéficié d'informations anticipant le marché.

How to detect insider trading?

Abstract. *This Note uses the enlargement of filtrations for modelling the observation of a financial market by an insider trader. A characterization of admissible strategies and a criterium for optimization are given. Then a statistical test is proposed to test the unknown of the future against its knowledge.*

Abridged English Version

This work is motivated by the question of modelling the fact that some people are informed before others about the state of the financial market. A financial market model can be considered on a filtered probability space $(\Omega, (\mathcal{F}_t, t \in [0,T]), \mathbb{P})$; the prices evolve according to the linear stochastic differential equation:

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_s b_s ds + \int_0^t S_s \sigma_s dW_s, 0 \leq t \leq T, S_0 \in \mathbb{R}^d,$$

the process W is a d-dimensional Brownian motion. One of the investors trading on the market knows the information normaly available at time t, $\mathcal{F}_t$, and also a random variable L in $L^1(\mathcal{F}_T)$. Using the method of the enlargement of a Brownian filtration (*see* Yor [9], and Chaleyat-Maurel and Jeulin [2]), with some convenient hypotheses, a $\mathcal{Y}$-Brownian motion exists, where $\mathcal{Y}$ is the filtration defined as $\mathcal{Y}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(L)$.

Note présentée par Paul MALLIAVIN.

Then, on the probabilisable space $(\Omega, \mathcal{Y})$, there exists an equilibrium price measure Q (*i.e.* all the prices are $(Q, \mathcal{Y})$-local martingales). On the space $(\Omega, \mathcal{Y}, Q)$, the admissible pair portfolio-consumption processes can be characterized using standard martingale methods.

Finally, a statistical inference test is given for the hypothesis H_0, "the investor knows only $\mathcal{F}_t$", against H_1, "the investor knows $\mathcal{Y}_t$".

1. Introduction

On suppose qu'un investisseur a accès dès le début de son investissement à des informations sur le futur : sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t\ ; t \in [0,T], \mathbb{P})$, il connait une variable aléatoire $L \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T)$. Par exemple, pour deux actifs de prix S^1 et S^2, il connait leur rapport au temps $T\ :\ L = \ln S_T^1 - \ln S_T^2$.

On note alors $\mathcal{Y}$ la filtration « naturelle » de l'initié obtenue par grossissement initial de $\mathcal{F}$, lui adjoignant la variable aléatoire $L : \mathcal{Y}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(L)$, $t \in [0,T]$. En utilisant le calcul stochastique des variations, nous étendons les résultats de I. Karatzas et I. Pikovsky (*voir* [6] et [7]) au cas où L est une intégrale stochastique de processus non déterministes.

L'initié optimise sa stratégie sur l'intervalle de temps $[0,A], A \le T$. Si $A < T$, on montre, sous certaines hypothèses, l'existence d'une probabilité Q « neutre au risque » sur $(\Omega, \mathcal{Y}_t\ ; t \in [0,A], \mathbb{P})$, puis on donne un théorème de représentation des $(\mathcal{Y}, Q)$-martingales, ce qui permet de caractériser les stratégies admissibles pour l'initié et d'exhiber une politique optimale sur $[0,A]$. Il reste alors à l'initié une incertitude sur le cours des actifs sur l'intervalle de temps $]A,T]$. Si $A = T$, on peut exhiber une stratégie d'arbitrage.

Considérons un marché où les prix des d actions sont donnés par :

$$S_t^i = S_0^i + \int_0^t S_s^i b_s^i ds + \int_0^t S_s^i \sigma_s^i dW_s, \quad 0 \le t \le T, \quad i = 1, \ldots, d, \tag{1}$$

et où le placement sans risque suit la dynamique : $S_t^0 = 1 + \int_0^t S_s^0 r_s ds$.

Le processus W est un mouvement brownien de dimension d sur $(\Omega, \mathcal{F}_t\ ; t \in [0,T], \mathbb{P})$ et $\mathcal{F}$ est la filtration naturelle qu'il engendre. On suppose les paramètres b, σ et r $\mathcal{F}$-adaptés et bornés sur $[0,T]$, à valeurs respectivement dans $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}^{d\times d}$ et $\mathbb{R}$. On note $\mathbf{H_1}$ les hypothèses :

$\mathbf{H_1}$: La matrice σ est inversible, $dt \otimes d\mathbb{P}$-presque sûrement,

$$\eta_t = \sigma_t^{-1}(b_t - r_t\mathbf{1}) \text{ vérifie } \exists C, \exists k > 0, \forall s \in [0,A], E[\exp k\|\eta_s\|^2] \le C.$$

L'initié dispose d'un capital $h(L)$ à l'instant $t = 0$, h étant une fonction intégrable par la loi de L, il veut optimiser sa stratégie de consommation et de placement sur le marché. Il consomme à une vitesse c qui est un processus positif adapté à la filtration $\mathcal{Y}$, vérifiant $\int_0^T c_s ds < \infty$ p.s. Il place par ailleurs sur l'actif i la quantité θ^i. Sa richesse au temps t s'exprime par $X_t = \sum_{i=0}^d \theta_t^i(t) S_t^i$ et sa consommation est $\int_0^t c_s ds$. On note $\pi_t^i = \theta_t^i S_t^i$ la somme investie sur la i-ième action pour $i = 1, \ldots, d$.

Une stratégie de consommation-placement (π, c) $\mathcal{Y}$-**admissible** *est un couple de processus* $\mathcal{Y}$*-adaptés tels que* $c \ge 0$, $\int_0^T c_s ds < \infty$ *p.s.,* $\sigma^*\pi$ *appartient presque sûrement à* $L^2[0;T]$, *et la richesse* $X^{\pi,c}$ *obtenue par cette stratégie est à valeurs positives ou nulles* $dt \otimes d\mathbb{P}$*-presque sûrement.*

Par la technique du grossissement de filtration (voir section 2), on donnera un sens à l'hypothèse d'« autofinancement » et à l'équation (2)

$$\mathbf{H_2} : dX_t = \sum_{i=0}^{d} \theta_t^i dS_t^i - c_t dt.$$

Notant $R_t = (S_t^0)^{-1}$ le facteur d'actualisation, la richesse X actualisée vérifie, sous la probabilité $\mathbb{P}$, l'équation :

$$X_t R_t + \int_0^t R_s c_s ds = h(L) + \int_0^t \langle R_s \pi_s, b_s - r_s \mathbf{1} \rangle ds + \int_0^t \langle R_s \pi_s, \sigma_s dW_s \rangle. \tag{2}$$

2. Grossissement de filtration et stratégies optimales

Nous construisons sur la filtration $\mathcal{Y}$ un $(\mathcal{Y}, \mathbb{P})$-mouvement brownien en utilisant une extension des résultats de Chaleyat-Jeulin (*voir* [2]) : notons D le gradient stochastique usuel associé à W et, pour $p > 1$ et $q \in \mathbb{N}$, $\mathbb{D}^{p,q}$ l'espace de Sobolev construit à l'aide de D (*voir* [8]). Soit $\mathbf{H_C}$ l'hypothèse :

$$L \in \mathbb{D}^{2,1} \text{ est tel que } \int_t^T \|D_u L\|^2 du > 0, \ \mathbb{P}\text{-p.s. pour tout } t \in [0, T[. \tag{3}$$

PROPOSITION 2.1. – *Sous $\mathbf{H_C}$, la loi conditionnelle de L sachant $\mathcal{F}_t$ est absolument continue et il existe une version mesurable de la densité conditionnelle $(\omega, t, x) \mapsto p(\omega, t, x)$ qui est une $\mathcal{F}$-martingale et se représente par $p(\omega, t, x) = p(0, x) + \int_0^t \alpha(\omega, s, x) dW_s$. Si M est une $\mathcal{F}$-martingale locale continue égale à $M_0 + \int_0^t \beta_s dW_s$, alors le crochet $d\langle M, p\rangle_t$ est égal à $\langle \alpha, \beta \rangle_t dt$ et le processus $\tilde{M}_t = M_t - \int_0^t \frac{\langle \alpha(.,x), \beta_. \rangle_u |_{x=L}}{p(u,L)} du$ est une $\mathcal{Y}$-martingale locale continue.*

Démonstration. – L'hypothèse $\int_t^T \|D_u L\|^2 du > 0$, $\mathbb{P}$, p.s. et le théorème 5.2.7 a) de Bouleau-Hirsch (*voir* [1]) montrent que la loi conditionnelle de L sachant $\mathcal{F}_t$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Puis, on utilise l'article de Jacod (*voir* [4]) dont les résultats ne dépendent pas de la dimension du mouvement brownien considéré et donnent les propriétés requises sur p. En particulier, en notant $T_a^x = \inf\{t > 0 : p(., t, x) \leq a\}$, on obtient $T_0^L = +\infty$ p.s. et par conséquent, pour tout t, $p(., t, L) > 0$ p.s.

On obtient en corollaire que le processus vectoriel $(B_t = W_t - \int_0^t \frac{\alpha(u,L)}{p(u,L)} du, \ t \in [0; T[)$ est un mouvement brownien sur l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{Y}, \mathbb{P})$.

L'exemple proposé en introduction, $L = \ln S_T^1 - \ln S_T^2$, vérifie cet ensemble d'hypothèses dans le cas d'un marché à coefficients continus et déterministes. On retrouve dans ce cas le $(\mathcal{Y}, \mathbb{P})$-mouvement brownien explicité par Chaleyat-Maurel et Jeulin (*voir* [2]).

Pour l'initié, la consommation et le portefeuille admissibles sont $\mathcal{Y}$-prévisibles, ce qui doit améliorer son gain dans la mesure où il peut l'optimiser sur un ensemble *a priori* plus grand ($\mathcal{F} \subset \mathcal{Y}$). On doit donc récrire le modèle relativement à ce nouveau mouvement brownien et à cette nouvelle filtration. Ayant noté $l_s = \frac{\alpha(s,L)}{p(s,L)}$, le marché actualisé $\tilde{S} = RS$ s'écrit : $d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t[(b_t - r_t \mathbf{1} + \sigma_t l_t)dt + \sigma_t dB_t], 0 \leq t < T$.

On effectue alors un changement de probabilité pour se ramener à une mesure « neutre au risque ». Mais la forme du processus l ne permet cette transformation que sur $[0, A]$, $A < T$, car au delà, il n'est pas sûr que la martingale locale de changement de probabilité soit une vraie martingale jusqu'en T :

PROPOSITION 2.2. – *Soit $A < T$, $\eta_t = \sigma_t^{-1}(b_t - r_t \mathbf{1})$ et $\xi_t = -l_t - \eta_t$ vérifiant l'une des conditions suivantes :*

$$\mathbf{H_N} : E\left[\exp \frac{1}{2} \int_0^A \|\xi_s\|^2 ds\right] < +\infty, \ \text{ou } \mathbf{H_P} : \exists C, \exists k > 0, \forall s \in [0, A], E[\exp k \|\xi_s\|^2] \leq C.$$

On pose $M_t = \exp[\int_0^t \xi_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|\xi_s\|^2 ds], t \in [0, A]$.

Alors, M *est une* $(\mathcal{Y}, \mathbb{P})$*-martingale uniformément intégrable et, sous* $Q = M.\mathbb{P}$*, le processus* $\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t \xi_s ds$ *est un* $(\mathcal{Y}, Q)$*-mouvement brownien et les prix actualisés sont des* $(\mathcal{Y}, Q)$*-martingales locales.*

$\mathbf{H_N}$ est l'hypothèse classique de Novikov. L'hypothèse $\mathbf{H_P}$ figure dans le cours de E. Pardoux (*voir* [8]). L'une et l'autre sont évidemment vraies dans le cas simple où le vecteur ξ est $d\mathbb{P} \otimes dt$-presque sûrement borné. La seconde est plus facile à vérifier, comme dans l'exemple donné lorsque les coefficients sont déterministes et bornés, puisqu'alors le vecteur ξ_s suit une loi gaussienne de moyenne $-\eta_s$ et de variance $\frac{\|\sigma_s\|^2}{\int_s^T \|\sigma_u\|^2 du}$.

PROPOSITION 2.3. – *On suppose* $\mathbf{H_C}$*, et* $\mathbf{H_N}$ *ou* $\mathbf{H_P}$*. Soient* $A < T$ *et une variable aléatoire* $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{Y}_A, Q)$ *; alors il existe un unique vecteur* $\mathcal{Y}$*-prévisible* ψ *tel que*

$$Z = E_Q[Z/\mathcal{Y}_0] + \int_0^A \psi(s) d\tilde{B}_s.$$

Démonstration. – Puisque $\tilde{B}$ est un $(\mathcal{Y}, Q)$-mouvement brownien, sous la probabilité Q, il y a indépendance entre $\tilde{B}_t$, pour tout $t \in [0, A]$, et $\mathcal{Y}_0 = \sigma(L)$. On peut suivre le raisonnement de [6] et écrire $Z = \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(L) N_i$ avec $N_i \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_A, Q)$.

Par ailleurs, la définition de $\tilde{B}$ et celle de B montrent que $\tilde{B} = W + \int_0^{\cdot} \eta_s ds$. $\tilde{B}$ est donc un $(\mathcal{Y}, Q)$-mouvement brownien qui est de plus $\mathcal{F}$-adapté, or $\mathcal{F} \subset \mathcal{Y}$, donc c'est aussi un $(\mathcal{F}, Q)$-mouvement brownien.

Soit Y la densité de Girsanov telle que $W = \tilde{B} - \int_0^{\cdot} \eta_s ds$ soit un $(\mathcal{F}, Y.Q)$-mouvement brownien ; son existence est assurée par l'hypothèse $\mathbf{H_1}$. De plus, $\mathcal{F}$ étant la filtration naturelle de W, on a la propriété de représentation prévisible pour W sous $(\mathcal{F}, Y.Q)$, en particulier N_i vérifie :

$$N_i = E_{Z.Q}(N_i) + \int_0^A \phi_i(s) dW_s.$$

Une simple manipulation entre les $(\mathcal{F}, Q)$ et les $(\mathcal{F}, Y.Q)$-martingales, comme cela est fait dans [5], amène à : $N_i = E_{Y.Q}(N_i) + \int_0^A \phi_i(s) d\tilde{B}_s$. L'indépendance, sous Q, de $\mathcal{F}_t$ et $\sigma(L)$ permet d'écrire $f_i(L)N_i = f_i(L)E_{Y.Q}(N_i) + \int_0^A f_i(L)\phi_i(s)d\tilde{B}_s$. Il reste ensuite à justifier la permutation entre la somme infinie et l'intégrale stochastique, comme cela est fait dans [7], pour obtenir le résultat avec $\psi(s) = \sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(L)\phi_i(s)$ et $\sum_{i \in \mathbb{N}} f_i(L)E_{Y.Q}(N_i) = E_Q[Z/L]$, en conditionnant les deux membres de l'égalité par $\sigma(L) = \mathcal{Y}_0$.

REMARQUE 2.4. – *Selon une observation du lecteur de cette Note, on pourrait procéder autrement et remplacer les hypothèses* $\mathbf{H_C}$*, et* $\mathbf{H_N}$ *ou* $\mathbf{H_P}$ *par l'unique hypothèse un peu moins forte (mais de façon générale plus difficile à vérifier) :*
sous P, la loi conditionnelle de L sachant $\mathcal{F}_A$ est équivalente à la loi de L : $E[f(L)/\mathcal{F}_A] = \int_R f(x)q(\omega, x)q_L(dx)$, $q(\omega, x) > 0$ $\mathbb{P} \otimes q_L$*-presque sûrement.*
Ceci est le cas, par exemple, quand L est gaussienne. La démarche consiste alors à suivre le schéma de [3] *: on introduit la probabilité* $Q = \frac{1}{q(L)}.P$ *sous laquelle* W *devient un* $(\mathcal{Y}, Q)$*-mouvement brownien, ce qui donne un sens à l'équation* (2)*. Comme ce processus est* $\mathcal{F}$*-adapté, c'est aussi un* $(\mathcal{F}, Q)$*-mouvement brownien, ce qui permet d'opérer la représentation prévisible comme ci-dessus.*
Sous les hypothèses $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_2}$, $\mathbf{H_C}$, et $\mathbf{H_N}$ ou $\mathbf{H_P}$ on obtient comme corollaire la caractérisation suivante des politiques admissibles que l'on a définies ci-dessus.

PROPOSITION 2.5. – *Soient* (π, c) *un couple « admissible » et la richesse finale associée* $X_A^{\pi,c}$. *Alors,* $E_Q[X_A^{\pi,c}R_A + \int_0^A R_t c_t dt/\mathcal{Y}_0] \leq h(L)$, *où* h *est une fonction positive telle que* $X_0^{\pi,c} = h(L)$.
Réciproquement, pour une richesse initiale strictement positive $h(L)$ *donnée, une consommation* c, *un processus* $\mathcal{Y}$*-adapté positif tel que* $\int_0^A c_s ds < \infty Q$*-p.s., et une variable aléatoire* $Z \in L^1(\mathcal{Y}_A, Q)$ *telles que :* $E_Q[ZR_A + \int_0^A R_t c_t dt/\mathcal{Y}_0] = h(L)$, *il existe alors un portefeuille* π $\mathcal{Y}$*-prévisible tel que* (π, c) *est admissible et* $X_A^{\pi,c} = Z$.

Démonstration. – La première partie est usuelle ; la réciproque utilise la proposition précédente, le théorème de représentation donnant l'existence de fonctions k et ϕ telles que

$$N_t = E_Q\left[ZR_A + \int_0^A R_s c_s ds/\mathcal{Y}_t\right] = k(L) + \int_0^t \phi^L(s) d\tilde{B}_s.$$

Pour $t = 0$, on obtient $k = h$, et $\pi_s = \sigma_s^{-1} R_s^{-1} \phi_s^L$ est une solution du problème de couverture.

On choisit comme **critère d'optimisation** de la stratégie un couple de fonctions d'utilité (U_1, U_2) croissantes, concaves et positives. Il s'agit donc de réaliser le maximum de $(\pi, c) \mapsto J(\pi, c) = E_{\mathbb{P}}[\int_0^A U_1(c_t)dt + U_2(X_A^{\pi,c})/\mathcal{Y}_0]$ dans l'ensemble des stratégies admissibles sous la contrainte $E_Q[X_A^{\pi,c}R_A + \int_0^A R_t c_t dt/\mathcal{Y}_0] \leq h(L)$.
Ce problème se résout classiquement par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Notant $I_i = (U_i')^{-1}$ et $\mathcal{X}(y) = E_{\mathbb{P}}[\int_0^A R_t M_t I_1(yR_tM_t)dt + R_A M_A I_2(yR_AM_A)/\mathcal{Y}_0]$, on obtient le résultat suivant :
Sous les hypothèses $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_2}$, $\mathbf{H_C}$, *et* $\mathbf{H_N}$ *ou* $\mathbf{H_P}$, *il existe une stratégie optimale* (π^*, c^*) *telle que* $J(\pi^*, c^*) = \sup\{J(\pi, c), (\pi, c) \text{ admissibles}\}$ *de la forme :*
$c_t^* = I_1(\lambda^* M_t R_t)$, $X_A^{\pi^*,c^*} = I_2(\lambda^* M_A R_A)$, *où* λ^* *est solution de l'équation implicite :* $\mathcal{X}(\lambda^*) = h(L)$.
On obtient la valeur optimale du problème $E_{\mathbb{P}}[U_2 \circ I_2(\lambda^* M_A R_A) + \int_0^A U_1 \circ I_1(\lambda^* M_t R_t)dt/\mathcal{Y}_0]$.

3. Test statistique

On construit un test dans le cas où les fonctions d'utilité sont $U_i(x) = \log(x), i = 1, 2$. On trouve $\lambda^* = \frac{A+1}{h(L)}$ et la politique optimale : $R_A X_A^* = \frac{h(L)}{A+1} M_A^{-1}$, $R_t c_t^* = \frac{h(L)}{A+1} M_t^{-1}$.
Le test se présente de la manière suivante : l'hypothèse H_0 est $L = 0$, ce qui revient à (puisque $l_s = \frac{\alpha(s,L)}{p(s,L)}$) $H_0 = (l = 0)$ contre $H_1 = (l \neq 0)$.
On compare les politiques optimales obtenues dans les deux cas. Pour un non initié, la stratégie obtenue est : $R_A X_A^* = yN_A^{-1}$, $R_t c_t^* = yN_t^{-1}$, où $y = \frac{x}{A+1}$ avec $N_t = \exp \int_0^t (-\eta_s dW_s - \frac{1}{2}\|\eta_s\|^2 ds)$.
Sont donc à comparer les consommations optimales :

$$\log R_t c_t^* = \log y + \int_0^t \eta_s dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \|\eta_s\|^2 ds, \text{ sous } H_0$$

et

$$\log R_t c_t^* = \log y + \int_0^t (l_s + \eta_s)_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \|l_s + \eta_s\|^2 ds, \text{ sous } H_1.$$

Sous l'hypothèse nulle, la forme des politiques optimales est la première. On pose : $Y_i = \log R_{t_{i+1}} c_{t_{i+1}} - \log R_{t_i} c_{t_i} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \eta_s dW_s + \frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\eta_s\|^2 ds$. Si l'on suppose les coefficients b, r et σ déterministes, Y est une suite de variables aléatoires indépendantes, gaussiennes d'espérance $\frac{1}{2}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\eta_s\|^2 ds$ et de variance $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\eta_s\|^2 ds$. Sous l'hypothèse alternative $H_1, l \neq 0$, on a $l + \eta$ à la place de η et B à la place de W.

On peut donc construire un test raisonnable de région critique au niveau $0,05$:

$$RC_i = \left\{ \omega : \left| Y_i(\omega) - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_i+1} \|\eta_s\|^2 ds \right| > 1,96 \sqrt{\int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\eta_s\|^2 ds} \right\}.$$

Note remise le 2 octobre 1996, acceptée après révision le 10 février 1997.

Références bibliographiques

[1] **Bouleau N. et Hirsch F., 1991**. *Dirichlet Forms and Analysis on Wiener Space*, Walter de Gruyter, Berlin.

[2] **Chaleyat-Maurel M. et Jeulin T., 1985**. Grossissement gaussien de la filtration brownienne, Séminaire de Calcul Stochastique 1982-83, Paris, *Lecture Notes in Math.*, 1118, p. 59-109, Springer-Verlag.

[3] **Follmer H. et Imkeller P., 1993**. Anticipation cancelled by a Girsanov transformation: a paradox on Wiener space, *Ann. Inst. H.-Poincaré*, 29-4, p. 569-586.

[4] **Jacod J., 1985**. Grossissement initial, Hypothèse H' et Théorème de Girsanov, Séminaire de Calcul Stochastique 1982-83, Paris, *Lecture Notes in Math.*, 1118, p. 15-35, Springer-Verlag.

[5] **Jeanblanc-Pique M. et Pontier M., 1994**. Optimal Portfolio for a Small Investor in a Market Model with Discontinuous Prices, *Economica*, Paris.

[6] **Karatzas I. et Pikovsky I., 1995**. Anticipative portfolio optimization, *Adv. in Appl. Prob.*, (revised version, November 28).

[7] **Karatzas I. et Pikovsky I., 1994**. An extended martingale representation theorem, *preprint*.

[8] **Pardoux E., 12-30 Sep 1994**. Stochastic calculus, SDE, BSDE and PDE, CIMPA School, Beijing.

[9] **Yor M., 1985**. Grossissement de filtrations et absolue continuité de noyaux, Séminaire de Calcul Stochastique 1982-83, Paris, *Lecture Notes in Math.*, 1118, p. 6-14, Springer-Verlag.