# Заочное, 6005, Вычислительная техника, Алгебра, Контрольная работа №1, Комплексные числа и многочлены, 1 вариант

Пыхалов Олег Витальевич*

## Содержание



*opykhalov@yandex.ru

# 1 Выполнить действия

$$\frac{3-i}{2+i} + i^{11}(-2+3i)$$

## 1.1 Деление комплексных чисел (Complex numbers division)

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{3-i}{2+i} &= \\
&= \frac{3-1i}{2+1i} \\
&= \frac{3\cdot 2+(-1)\cdot 1}{2^2+1^2} + \frac{(-1)\cdot 2-3\cdot 1}{2^2+1^2}i \\
&= \frac{6+(-1)}{4+1} + \frac{-2-3}{4+1}i \\
&= \frac{5}{5} + \frac{-5}{5}i \\
&= 1-1i \\
&= 1-i
\end{aligned} \tag{2}$$

$$1-1i+i^{11}(-2+3i)$$

## 1.2 Мнимая единица (Imaginary unit)

$$\begin{aligned}
-i &= \sqrt{-1} \\
i &= \sqrt{-1} \\
i^2 &= -1 \\
i^3 &= i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i \\
i^4 &= i^3 \cdot i = -i^2 = 1 \\
i^5 &= i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i \\
i^6 &= i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1 \\
i^7 &= i^6 \cdot i = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -1 \\
i^8 &= i^7 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = 1 \\
i^9 &= i^8 \cdot i = 1 \cdot i = i \\
i^{10} &= i^9 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1 \\
i^{11} &= i^{10} \cdot i = -1 \cdot i = -i
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
1 - i + i^{11}(-2+3i) = & \\
&= 1 - i + (-i)(-2+3i) \\
&= 1 - i - i(-2+3i) \\
&= 1 - i + 2i - 3i^2 \\
&= 1 + i - 3i^2 \\
&= 1 + i - 3 \cdot (-1) \\
&= 1 + i + 3 \\
&= 4 + i
\end{aligned} \tag{4}$$

## 1.3 Ответ

$$4 + i$$

# 2 Найти решения уравнения и нарисовать их на комплексной прямой

$$2z^2 + (5-4i)z - 5i = 0$$

## 2.1 Формула нахождения дескриминанта (Discriminant)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (5-4i)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5i)$$

### 2.1.1 Представить квадрат в виде умножения

$$\begin{aligned}
(5-4)^2 = & \\
&= (5-4i)(5-4i)
\end{aligned} \tag{5}$$

#### 2.1.2 Умножение комплексных чисел (Complex numbers multiplication)

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (bc+ad)i$$

$$\begin{aligned}(5-4i)(5-4i) = &\\ &= (5\cdot 5-(-4)\cdot(-4)) + ((-4)\cdot 5+5\cdot(-4))i \\ &= (25-16) + ((-20)+(-20))i \\ &= 9+(-40)i \\ &= 9-40i\end{aligned} \tag{6}$$

#### 2.1.3 Дескриминант (Discriminant)

$$\begin{aligned}\Delta = &\\ &= (5-4i)(5-4i) - 4\cdot 2\cdot(-5i) \\ &= 9-40i-4\cdot 2\cdot(-5i) \\ &= 9-40i-8\cdot(-5i) \\ &= 9-40i-(-40i) \\ &= 9-40i+40i\end{aligned} \tag{7}$$

#### 2.1.4 Сложение комплексных чисел (Complex number addition)

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$$

$$\begin{aligned}9-40i+40i = &\\ &= 9-40i+0+40i \\ &= (9+0)+(-40+40)i \\ &= 9+0i \\ &= 9\end{aligned} \tag{8}$$

#### 2.1.5 Дескриминант (Discriminant)

$$\Delta = 9$$

### 2.2 Формула нахождения корней квадратного уравнения (Quadratic formula)

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(5-4i)\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2}$$

#### 2.2.1 (Factoring)

$$\begin{aligned}-(5-4i) = &\\ &= -1(5-4i) \\ &= -1\cdot 5-1\cdot(-4i) \\ &= -5+4i\end{aligned} \tag{9}$$

### 2.2.2 Квадратный корень (Square root)

$$x_{1,2} = \frac{-5+4i \pm 3}{2 \cdot 2}$$

### 2.2.3 Знаменатель (Denominator)

$$x_{1,2} = \frac{-5+4i \pm 3}{4}$$

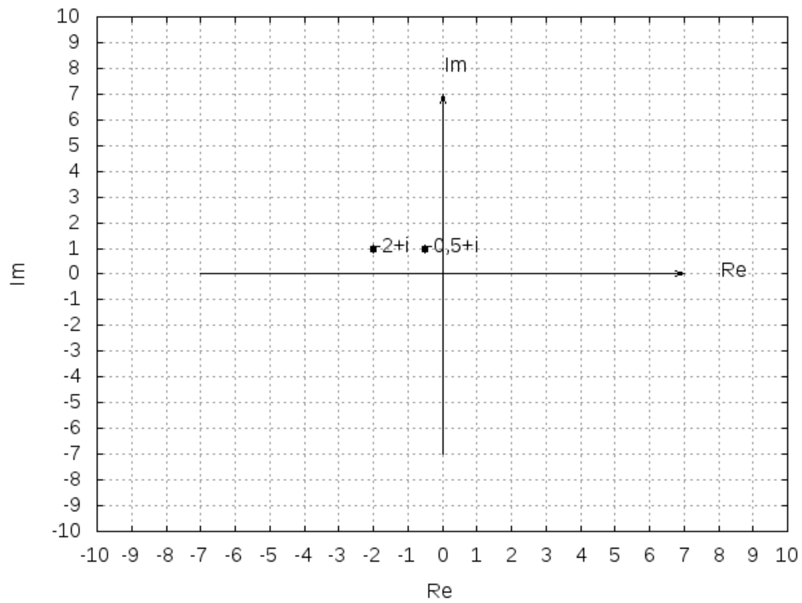
### 2.2.4 Корни $x1$ и $x2$

$$x_{1,2} = \frac{-5+4i \pm 3}{4}$$

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{-5+4i+3}{4} = \\ &= \frac{-2+4i}{4} \\ &= \frac{-1+2i}{2} = \\ &= -0,5+i \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{-5+4i-3}{4} = \\ &= \frac{-8+4i}{4} \\ &= -2+i \end{aligned} \tag{11}$$

## 2.3 График



### 2.4 Ответ

$$\begin{aligned} -0,5+i \\ -2+i \end{aligned} \tag{12}$$

## 3 Найти все значения и записать ответ в показательной форме

$$\sqrt[4]{16i}$$

### 3.1 Polar form

#### 3.1.1 Абсолютная величина (Absolute value)

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{0^2 + 16^2} = 16 \tag{13}$$

#### 3.1.2 Угол

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \tag{14}$$

### 3.2 Формула Муавра и извлечение корней из комплексных чисел (De Moivre's formula)

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}) = \sqrt[n]{r}^{i\varphi} \tag{15}$$

$$k = 0, 1, 2, 3$$

$$\sqrt[4]{16} = 2$$

### 3.3 Корни

$$\omega_0 = 2(\cos\frac{\varphi + 2\pi \cdot 0}{4} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi \cdot 0}{4}) = 2(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}) = 2e^{\frac{i\pi}{8}} \tag{16}$$

$$\omega_1 = 2(\cos\frac{\varphi + 2\pi \cdot 1}{4} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi \cdot 1}{4}) = 2(\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}) = 2e^{\frac{5i\pi}{8}} \tag{17}$$

$$\omega_2 = 2(\cos\frac{\varphi + 2\pi 2}{4} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi 2}{4}) = 2(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}) = 2(\cos\frac{-7\pi}{8} + i\sin\frac{-7\pi}{8}) = 2e^{-\frac{7i\pi}{8}} \tag{18}$$

$$\omega_3 = 2(\cos\frac{\varphi + 2\pi 3}{4} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi 3}{4}) = 2(\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}) = 2(\cos\frac{-3\pi}{8} + i\sin\frac{-3\pi}{8}) = 2e^{-\frac{3i\pi}{8}} \tag{19}$$

## 3.4 Ответ

$$
\begin{aligned}
&2e^{\frac{i\pi}{8}} &(20)\\
&2e^{\frac{5i\pi}{8}} &(21)\\
&2e^{-\frac{7i\pi}{8}} &(22)\\
&2e^{-\frac{3i\pi}{8}} &(23)
\end{aligned}
$$

# 4 Разложить на множители многочлен

$$f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$$

## 4.1 Теорема Безу (Polynomial remainder theorem)

$$
\begin{aligned}
f(1) = 1^4 + 1^3 - 1^2 + 1 - 2 = \\
&= 1^4 + 1^3 - (1)^2 + 1^2 - 2 \\
&= 1 + 1 - 1 + 1 - 2 \\
&= 2 - 2 \\
&= 0
\end{aligned} \tag{24}
$$

$$\Rightarrow x - 1$$

## 4.2 (Polynomial synthetic division)

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 1 & -1 & 1 & -2 \\
1 & & 1 & 2 & 1 & 2 \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0
\end{array}
$$

## 4.3 Разложение многочлена на множители (Polynomial factoring)

$$
\begin{aligned}
x^3 + 2x^2 + x + 2 = \\
&= x^3 + x + 2(x^2 + 1) \\
&= x(x^2 + 1) + 2(x^2 + 1) \\
&= (x + 2)(x^2 + 1)
\end{aligned} \tag{25}
$$

## 4.4 Ответ

$$(x + 2)(x^2 + 1)(x - 1)$$

# 5 Выделить целую часть дроби

$$\frac{x^3 + 6x^2 + 1}{x^2 + 2}$$

### 5.1 (Polynomial long division)

$$\begin{array}{r|l} & x \quad +6 \\ x^2+2 & x^3+6x^2 \qquad +1 \\ & -x^3 \qquad -2x \\ \hline & 6x^2-2x \quad +1 \\ & -6x^2 \qquad -12 \\ \hline & -2x-11 \end{array}$$

### 5.2 Ответ

$$x+6$$

## 6 Разложить дробь на простейшие

$$\frac{2x^2-4}{x^3-4x}$$

### 6.1 Factorize denominator

$$\begin{aligned} x^3-4x &= \\ &= x^2\cdot x-4x \\ &= x(x^2-4) \\ &= x(x^2-2^2) \\ &= x((x-2)(x+2)) \\ &= x(x-2)(x+2) \end{aligned} \tag{26}$$

$$\frac{2x^2-4}{x^3-4x}=\frac{2x^2-4}{x(x-2)(x+2)} \tag{27}$$

### 6.2 Разложение дроби на простейшие, используя неопределенные коэффициенты

$$\begin{aligned} \frac{2x^2-4}{x(x-2)(x+2)} &= \\ &= \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2} \\ &= \frac{A(x-2)(x+2)}{x(x-2)(x+2)}+\frac{B(x+2)x}{x(x-2)(x+2)}+\frac{C(x-2)x}{x(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{A(x-2)(x+2)+B(x+2)x+C(x-2)x}{x(x-2)(x+2)} \end{aligned} \tag{28}$$

$$A(x-2)(x+2)+B(x+2)x+C(x-2)x$$

$$2x^2-4=A(x-2)(x+2)+B(x+2)x+C(x-2)x \tag{29}$$

### 6.3 if $x = -2$

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4 &= \\ &= 2 \cdot -2^2 - 4 \\ &= 2 \cdot 4 - 4 \\ &= 8 - 4 \\ &= 4 \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{multlined} A(-2-2)(-2+2) + B(-2+2)\cdot(-2) + C(-2-2)\cdot(-2) = \\ = C(-2-2)\cdot(-2) \end{multlined} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} 4 &= C(-4)\cdot(-2) \\ 4 &= C8 \\ 4 &= 8C \\ C &= \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

### 6.4 if $x = 2$

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4 &= \\ &= 2 \cdot 2^2 - 4 \\ &= 2 \cdot 4 - 4 \\ &= 8 - 4 \\ &= 4 \end{aligned} \tag{32}$$

$$A(2-2)(2+2) + B(2+2)\cdot(2) + C(2-2)\cdot(2) = B(2+2)\cdot(2) \tag{33}$$

$$\begin{aligned} 4 &= B(2+2)\cdot(2) \\ 4 &= B(4)\cdot(2) \\ 4 &= B(8) \\ 4 &= 8B \\ B &= \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

### 6.5 if $x = 0$

$$2x^2 - 4 = \; = 2 \cdot 0^2 - 4 = -4 \tag{34}$$

$$A(0-2)(0+2) + B(0+2)\cdot 0 + C(0-2)\cdot 0 = A(0-2)(0+2) \tag{35}$$

$$\begin{aligned} -4 &= A(0-2)(0+2) \\ -4 &= A(-2)\cdot 2 \\ -4 &= A(-4) \\ -4 &= -4A \\ A &= 1 \end{aligned}$$

### 6.6 (Simplifying)

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-2} + \frac{\frac{1}{2}}{x+2} = \\ = \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{2(x+2)}\end{aligned} \tag{36}$$

### 6.7 Ответ

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{2(x+2)}$$