Exponentielle

I.La fonction exponentielle

Lemme :

Si il existe une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'=f$ et f(0)=1 alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Théorème :

Il existe une unique fonction f dérivable sur telle que $f'=f$ et f(0)=1.

Définition :

On appelle **fonction exponentielle**, notée exp, l'unique fonction dérivable sur R et telle que $f'=f$ et f(0)=1.

Nous noterons cette fonction définie par $f(x)=e^x$ et $e^0=1$.

II.Les propriétés de la fonction exponentielle

Théorème :

On considère deux nombres réels x et y.

Nous avons $e^{x+y}=e^x e^y$.

Exemple :

$e^{5+2}=e^5 e^2$

Propriétés :

On considère deux nombres réels x et y et n un entier naturel.

Nous avons les propriétés suivantes :

- $e^{-x}=\frac{1}{e^{x}}$;
- $e^{x-y}=\frac{e^{x}}{e^{y}}$;
- $e^{nx}=\left(e^{x}\right)^{n}$

Exemple :

$e^{-2}=\frac{1}{e^{2}}$

$\frac{e^{7}}{e^{5}}=e^{7-5}=e^{2}$

III.Etude de la fonction exponentielle

1.Le signe et ses variations

Propriété :

On considère la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{x}$.

- f est continue sur $\mathbb{R}$;
- f est strictement positive sur $\mathbb{R}$;
- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2.Les limites en l'infini

Propriété :

On considère la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{x}$.

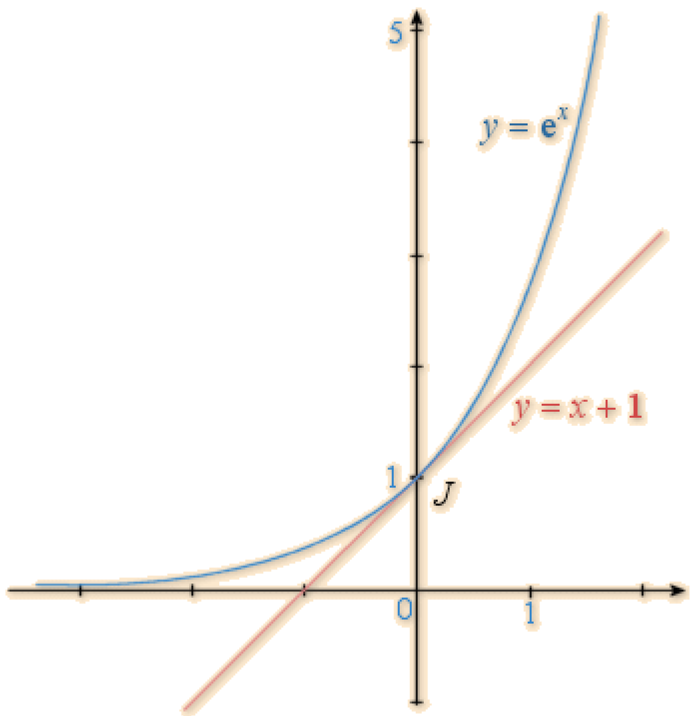
Nous avons $\lim_{x\rightarrow +\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\rightarrow -\infty} f(x)=0^{+}$.

3.Tableau de variation et courbe représentative

Propriété :

On considère la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x$.

x	$-\infty$	$+\infty$
f'	$+$	
f	0 ↗	$+\infty$



Remarques :

La droite d'équation y=0 est une asymptote horizontale à la courbe de la fonction exponentielle en $-\infty$.

La droite d'équation y=x+1st une asymptote oblique à la courbe de la fonction exponentielle en 0.

3.Equations et inéquations

Propriété :

On considère deux nombres réels x et y.

$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$

$x < y \Leftrightarrow e^x < e^y$