



Produit scalaire dans l'espace

I.le produit scalaire dans l'espace

1.Approche géométrique du produit scalaire

Définition :

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace, et A,B,C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Il existe au moins un plan P contenant les points A, B et C.

On appelle produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} , le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan P.

Ainsi :

Si u et v sont non nuls, $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$;

Si u=0 ou v=0, le produit scalaire de u et v est nul : $\vec{u} \cdot \vec{0} = 0$ et $\vec{0} \cdot \vec{v} = 0$.

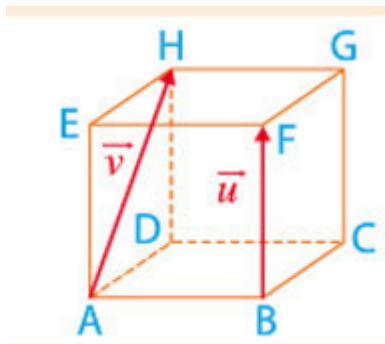
Exemple :

ABCDEFGH est un cube d'arête a.

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{BF}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{BG} = BF \times BG \times \cos(\widehat{FBG})$$

$$\text{donc } \vec{u} \cdot \vec{v} = a \times a\sqrt{2} \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = a \times a\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$$



Propriété:

Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs non nuls tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AC}$$

où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) et K est le projeté orthogonal de B sur la droite (AC) .

Si \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont trois vecteurs de l'espace et k un nombre réel alors :

- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

2.Caractérisation vectorielle de l'orthogonalité

Définition :

Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si, et seulement s'ils dirigent des droites orthogonales. Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace.

Propriété :

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

3.Expression analytique du produit scalaire

Propriété :

Dans un repère orthonormé (O, i, j, k) de l'espace, on considère les vecteurs \vec{u} et \vec{v} de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') . Nous avons $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

En particuliers, $\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$ et $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

II. Applications du produit scalaire

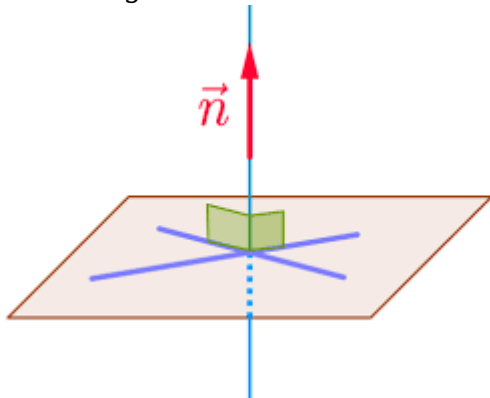
1. Vecteur normal à un plan

Définition :

Un vecteur \vec{n} non nul est dit orthogonal à un plan si ce vecteur est un vecteur directeur d'une droite orthogonale à ce plan. Ce vecteur est alors appelé **vecteur normal** au plan.

Théorème :

Une droite (d) est orthogonale à toute droite d'un plan P si, et seulement si, elle est orthogonale à deux droites sécantes (d_1) et (d_2) de ce plan.



2. Equation cartésienne d'un plan

Propriété :

Soit un vecteur \vec{n} non nul et A un point de l'espace. L'unique plan P passant par A et de vecteur normal \vec{n} est l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0.$$

Propriété :

Dans un repère orthonormé, un plan P de vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$ a une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$. Réciproquement, si a,b et c ne sont pas tous les trois nuls, l'ensemble (E) des points M(x,y,z) tels que

$ax+by+cz+d=0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$.