



Dérivée d'une fonction

Cours sur la dérivée d'une fonction en première S avec son signe et les variations d'une fonction en première s ainsi que les propriétés.

On considère, dans cette leçon, une fonction f définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et \mathbb{C} sa courbe représentative.

I. Nombre dérivé et tangente à une courbe

Définition : accroissement moyen.

On considère deux réels distincts x_1 et x_2 appartenant à I .

On appelle accroissement moyen de f entre x_1 et x_2 la quantité suivante :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

En notant $x_1 = a$ et $x_2 = a + h$ avec $h > 0$, on obtient :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Définition : nombre dérivé.

Si, lorsque h se rapproche de zéro, $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a)$ se rapproche d'un réel l , alors :

On dit que la fonction f est dérivable en a .

Le réel l est appelé le nombre dérivé de f en a , que l'on note $f'(a)$.

On écrit alors :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

Définition : tangente à une courbe.

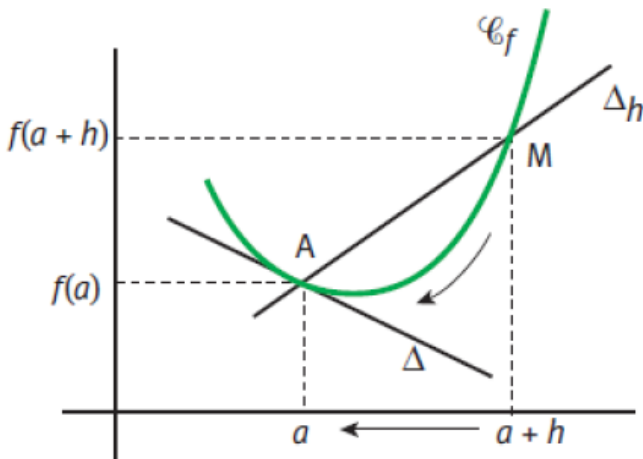
Soient A et M deux points distincts d'une courbe.

Géométriquement, la tangente à la courbe au point A est la position limite de la sécante (AM)

lorsque M se rapproche de A

Propriété : coefficient directeur de la tangente.

Le nombre dérivé $f'(a)$ est le **coefficient directeur** de la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse a .



Courbe \mathcal{C}_f et sa tangente Δ au point d'abscisse a .

Propriété : équation réduite de la tangente.

Soit f une fonction dérivable en a de courbe représentative \mathcal{C}_f .

L'équation réduite de la tangente à \mathcal{C}_f en a est donnée par la formule suivante :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

II. La dérivée d'une fonction

Définition :

Si, pour tout réel $a \in I$, $f'(a)$ existe, on dit que f est dérivable en I .

On définit alors, une nouvelle fonction f' sur I par $f': x \mapsto f'(x)$.

Propriété : dérivées des fonctions usuelles.

Fonction	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité	Fonction dérivée
$f(x) = mx + p$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = m$
$f(x) = p$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^2$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	\mathbb{R}^*	\mathbb{R}^*	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Propriété : dérivée d'une somme ou produit.

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur I un intervalle de \mathbb{R} et k un nombre réel.

- La fonction $u+v: x, \rightarrow, u(x)+v(x)$ est dérivable sur I et on a $(u+v)' = u' + v'$.
- La fonction $ku: x, \rightarrow, k \times u(x)$ est dérivable sur I et on a $(ku)' = k \times u'$.
- La fonction $uv: x, \rightarrow, u(x) \times v(x)$ est dérivable sur I et on a $(uv)' = u'v + uv'$.

Propriété : dérivée de l'inverse et d'un quotient.

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur I un intervalle de \mathbb{R} telle que v ne s'annule pas sur I .

- La fonction $\frac{1}{u}: x, \rightarrow, \frac{1}{u(x)}$ est dérivable sur I et on a $(\frac{1}{u})' = -\frac{u'}{u^2}$.
- La fonction $\frac{u}{v}: x, \rightarrow, \frac{u(x)}{v(x)}$ est dérivable sur I et on a $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.