



Les équations du second degré et discriminant

Les équations du second de gré avec le discriminant dans un cours de maths en 1ère S avec les différentes formules pour résoudre l'équation.

I. Fonction polynôme du second degré

1. Généralités

Définition :

Toute fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c trois nombres réels tel que a soit non nul est appelée **fonction polynôme du second degré** ou, simplement, **trinôme**.

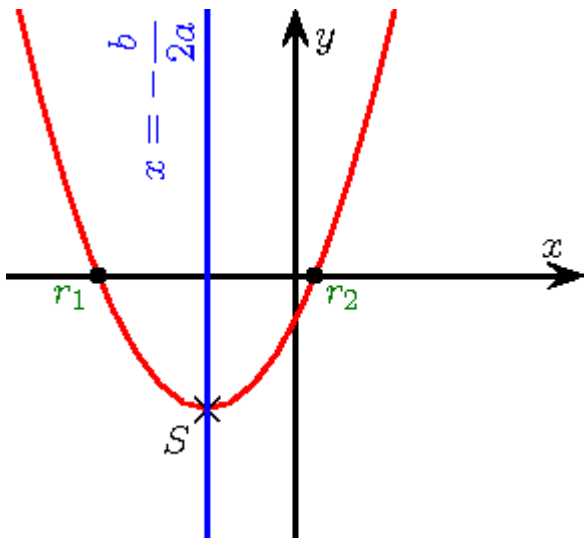
2. Forme canonique

Théorème :

Tout fonction f du second degré définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c trois nombres réels tel que a soit non nul peut s'écrire de **façon unique** sous la forme $f(x) = a(x - \alpha_1)^2 + \beta$.

Cette forme est appelée la **forme canonique** du trinôme.

La courbe représentative de f est appelée la **parabole et son équation est** $y = ax^2 + bx + c$.



Exemple :

Déterminer la forme canonique de la fonction suivante :

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 8$$

$$f(x) = 2(x^2 - 2x + 4)$$

$$f(x) = 2[(x-1)^2 - 1 + 4]$$

$$f(x) = 2[(x-1)^2 + 3]$$

$$f(x) = 2(x-1)^2 + 6$$

Propriété :

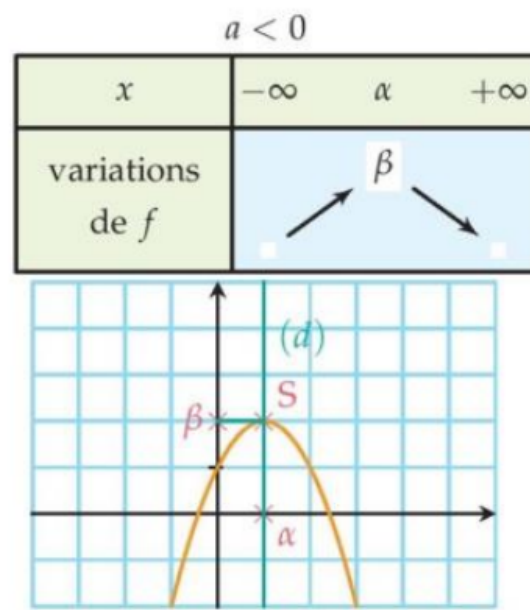
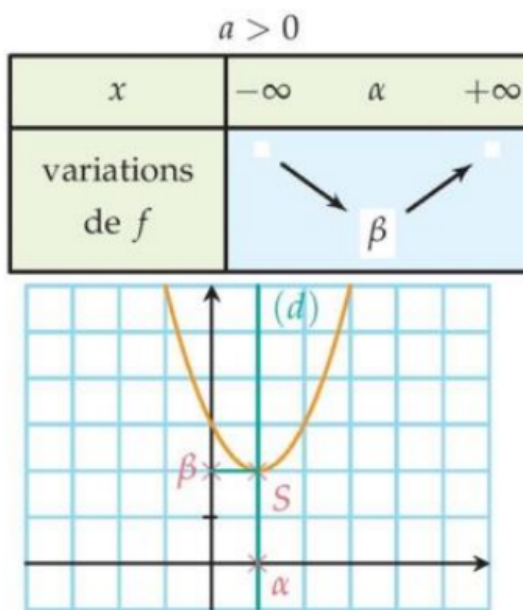
Une parabole de sommet $S(\alpha, \beta)$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \alpha$.

3. Sens de variation d'une fonction

Propriété :

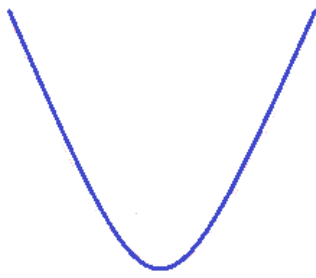
Soit f une fonction du second degré dont la forme canonique est $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Le sens de variation de f dépend du signe du nombre a .

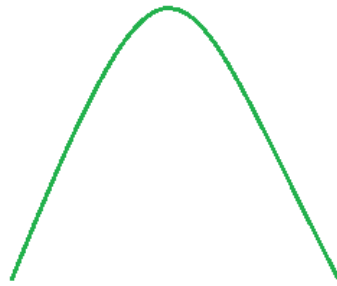


Vocabulaire :

- Si $a > 0$, f admet un **minimum** en $x = \alpha$ égal à β que l'on peut traduire par "le sommet de la parabole est en bas" ou par "**f est convexe**".
- Si $a < 0$, f admet un **maximum** en $x = \alpha$ égal à β que l'on peut traduire par "le sommet de la parabole est en haut" ou par "**f est concave**".



Parabole tournée vers le haut



Parabole tournée vers le bas

II. les équation du second degré et trinôme

1. Résolution d'équations du second degré

Définition : équation du second degré.

Une **équation du second degré** est une équation du type $ax^2+bx+c=0$ avec a, b, c trois nombres réels tel que a soit non nul.

Définition : discriminant.

$\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant du trinôme du second degré ax^2+bx+c .

Vocabulaire :

On appelle **racine** du trinôme du second degré ax^2+bx+c les solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$.

Les solutions de l'équation $f(x)=ax^2+bx+c=0$ sont appelées **racines ou zéros** de la fonction f .

Théorème :

Le nombre de solutions de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ dépend du signe de Δ .

Résolution d'une équation du second degré

Calcul de Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Déduction de l'ensemble des solutions de l'équation :

En fonction de la valeur de Δ , nous avons 3 cas distincts :

Si $\Delta > 0$:

L'équation admet **deux solutions dans \mathbb{R}** :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta = 0$:

L'équation admet **une unique solution dans \mathbb{R}** :

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Si $\Delta < 0$:

L'équation admet **deux solutions dans \mathbb{C}** :

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

2.Le signe du trinôme

	Solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$	Signe de $P(x) = ax^2 + bx + c$	Factorisation de $P(x) = ax^2 + bx + c$											
$\Delta > 0$	Deux solutions distinctes $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>signe de a</td><td>0</td><td>signe de $-a$</td><td>0</td><td>signe de a</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$P(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$										
$P(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a									
$\Delta = 0$	Une solution double $x_3 = -\frac{b}{2a}$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_3</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>signe de a</td><td>0</td><td>signe de a</td></tr></table>	x	$-\infty$	x_3	$+\infty$	$P(x)$	signe de a	0	signe de a	$P(x) = a(x - x_3)^2$			
x	$-\infty$	x_3	$+\infty$											
$P(x)$	signe de a	0	signe de a											
$\Delta < 0$	Pas de solution	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td colspan="2">signe de a</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$P(x)$	signe de a		Pas de factorisation possible					
x	$-\infty$	$+\infty$												
$P(x)$	signe de a													