Cinématique du point

La cinématique consiste à analyser de façon purement mathématique le mouvement des corps en les assimilant à des points matériels sans se préoccuper des causes de ce mouvement. Les grandeurs physiques de la cinématique sont le temps, la position, la vitesse et l'accélération.

I. Notion de système

Dans ce qui suit, ou plus généralement en physique, on s'intéresse aux propriétés d'un objet ou d'un ensemble d'objets: par exemple on s'intéressera au mouvement d'un véhicule, aux interactions entre la Terre et la Lune, etc…., le véhicule, l'ensemble Terre-Lune, etc…., constitue le système étudié.

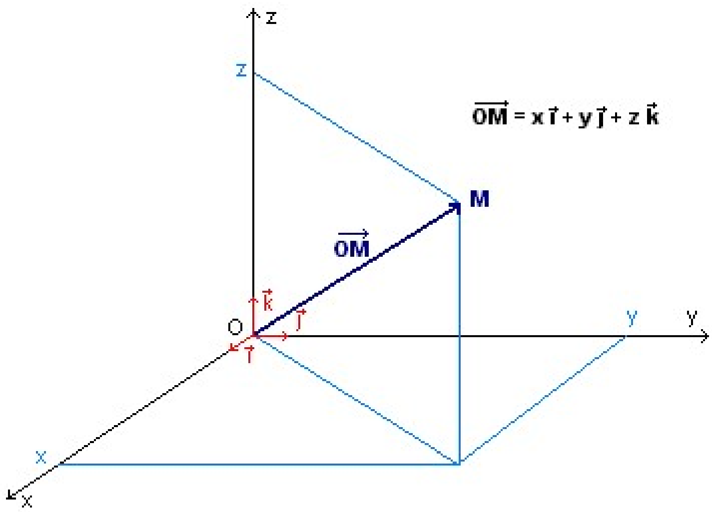
Le système étudié peut être **indéformable**: si la distance de deux points quelconques de ses points demeure invariable au cours de son évolution: les solides constituent un exemple de tels systèmes. Dans le cas contraire, le système est **déformable**: cas de la pâte à modeler par exemple.

Pour ce qui nous concerne, en cinématique et ultérieurement en dynamique, les systèmes que nous considérerons seront ponctuels ou encore des points matériels, c'est-à-dire des solides dont les dimensions sont suffisamment petites pour qu'on puisse les assimilé à un point. En général, on assimilera un solide à un point matériel qui est confondu avec le centre d'inertie du solide et dont la masse est égale à la masse du solide considéré.

II. Vecteur position

1. Coordonnées cartésiennes

La position d'un mobile M, à un instant t est définie dans un repère $\mathscr{R}\,(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$.



La position du point M est repérée par son vecteur position $\overrightarrow{OM}$: $\overrightarrow{OM}=x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$;

$$OM = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

- Si le repère est orthonormé x, y, z sont appelés coordonnées cartésiennes du point M.
- Si le mobile M est immobile dans le repère $\mathscr{R}$ $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, ses coordonnées sont indépendantes du temps.
- Si M est en mouvement dans le repère $\mathscr{R}$, ses coordonnées sont en fonction du temps. Ainsi x(t), y(t) et z(t) sont appelées **équations horaires** ou **équations paramétriques** du mouvement.
- Pour déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire, on élimine la variable temps *t* entre les paramètres x, y et z.

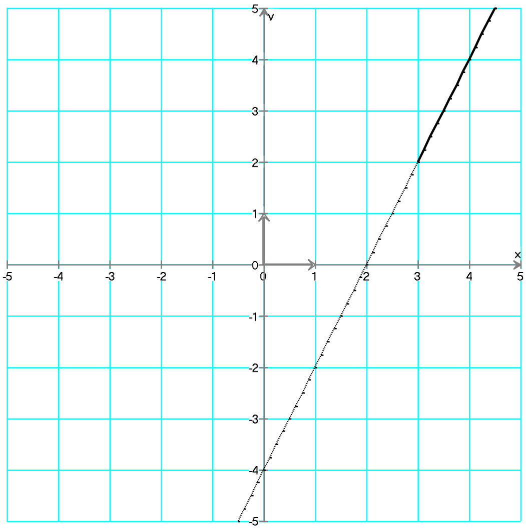
<u>Exemple a)</u>

On donne les équations horaires d'un mouvement d'un point M sous la forme: $\begin{cases} x(t) = 2t+3 \\ y(t) = 4t+2 \end{cases}$.

Déterminer l'équation de la trajectoire décrite par le point M.

De l'équation $x = 2t+3$ on en déduit la valeur de t en fonction de x: $t = \dfrac{x-3}{2}$ valeur que l'on porte dans l'équation $y = 4t+2$, $y = 4\dfrac{x-3}{2}+2 = 2x-4$, l'équation de la trajectoire s'écrit donc:

$$\boxed{y = 2x-4}$$



Ceci est l'équation d'une droite, mais la trajectoire n'est pas la droite dans sa totalité, c'est en fait la demi-droite correspondant à t $\geqslant$ 0 (physiquement, le temps est une grandeur positive ou nulle) c'est-à-dire: x $\geqslant$ 3; y $\geqslant$ 2.

Cette trajectoire est **rectiligne** et est représentée en traits épais sur la figure ci-dessus.

<u>Exemple b)</u>

On donne les équations horaires d'un mouvement d'un point M sous la forme: $\begin{cases} x(t) = t+1 \\ y(t) = t^2+2t \end{cases}$.

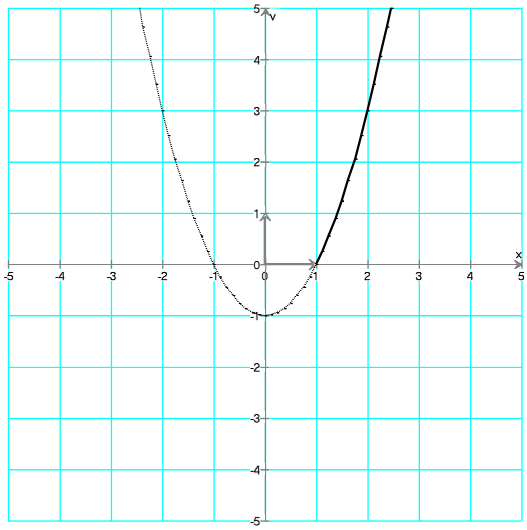
Déterminer l'équation de la trajectoire décrite par le point M.

De l'équation $x = t+1$ on déduit la valeur de t en fonction de x: $t = x-1$ valeur que l'on porte dans l'équation $y = t^2+2t \Rightarrow y = (x-1)^2+2(x-1)$. L'équation de la trajectoire s'écrit donc:

$$\boxed{y = x^2-1}$$

Ceci est l'équation d'une parabole à concavité tournée vers le haut, mais la trajectoire n'est pas la parabole dans sa totalité, c'est en fait la branche de parabole correspondant à t $\geqslant$ 0 (physiquement le temps est une grandeur positive ou nulle) c'est-à-dire x $\geqslant$ 1.

Cette trajectoire dans ce cas est curviligne et est représentée en trait épais sur la courbe ci-dessous.



Exemple c)

On donne les équations horaires d'un mouvement d'un point M sous la forme: $\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) + 2 \\ y(t) = 2\sin(t) - 1 \end{cases}$.

Déterminer l'équation de la trajectoire d'écrite par le point M

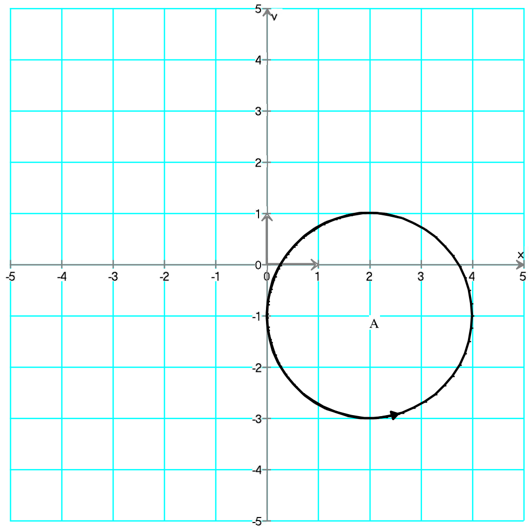
Ici le problème est un peut plus délicat à cause de la présence des fonctions trigonométriques, la technique consiste à isoler le cosinus et le sinus et à utiliser la relation: $sin^2 a + \cos^2 a = 1$.

$$x = 2\cos t + 2 \Rightarrow \cos t = \frac{x-2}{2} \text{ et } y = 2\sin t - 1 \Rightarrow$$

$$\sin t = \frac{y+1}{2}$$

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \Rightarrow \left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{2}\right)^2 = 1$, soit encore

$\boxed{(x-2)^2 + (y+1)^2 = 2^2}$ qui est l'équation d'un cercle de centre A de coordonnées $x_A = 2$ et $y_A = -1$ et de rayon $R = 2$ (voir figure), la trajectoire est dans ce cas dite circulaire, le sens de parcours du cercle est indiqué par une flèche.

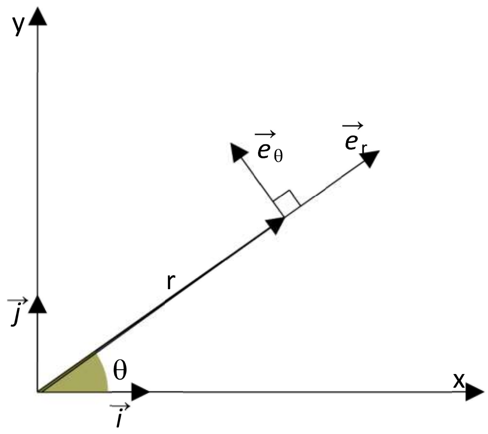


2. Coordonnées polaires

Un mobile est repéré par coordonnées polaires (r, θ) dans la base ($\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{e_\theta}$) par le vecteur position: $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$.

On notera les relations suivantes entre les coordonnées cartésiennes et polaires :

$x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. En plus $x/y = \tan\theta$

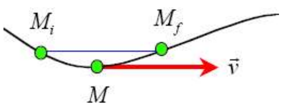


III. Vecteur vitesse instantanée:

1. Definition

La vitesse instantanée à un instant t est:

$$\vec{v} = \lim_{t_i \to t_f} \frac{\overrightarrow{M_iM_f}}{t_f - t_i} = \lim_{ti \to tf} \frac{\overrightarrow{OM_f} - \overrightarrow{OM_i}}{tf - ti} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$



$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}}$$

Le vecteur vitesse est défini comme la dérivée première du vecteur position par rapport au temps. Les caractéristiques du vecteur vitesse sont:

- **Point d'application:** point M où l'on veut définir la vitesse.
- **Direction**: la tangente en la trajectoire en ce point M
- **Sens**: celui du mouvement
- **Norme**: l'intensité du vecteur vitesse. Elle s'exprime en mètre par seconde ms^{-1}.

2. Vecteur vitesse et coordonnees cartesiennes

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM} \text{ avec } \overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

On pose: $v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$; $v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$ et $v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$

$$\boxed{\vec{V} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}}$$

Nous allons maintenant reprendre les exemples vus plus haut et donner dans chacun des cas, le vecteur vitesse.

<u>Exemple a)</u>

On travaille dans ce cas là dans un repère (Ox, Oy). Dans ces conditions:

$$\begin{cases} x(t) = 2t+3 \\ y(t) = 4t+2 \end{cases} \Rightarrow V_x = \frac{dx(t)}{dt} = 2;\ V_y = \frac{dy(t)}{dt} = 4$$

Les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}$ sont indépendante du temps, la norme de ce vecteur est:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20} \approx 4{,}47 \text{ ms}^{-1}.$$

La norme est indépendante du temps: le mouvement est rectiligne uniforme. On peut aussi remarquer que $\vec{V}$ peut être considéré comme le vecteur directeur de la droite d'équation: $y = 2x - 4$, c'est-à-dire qu'il est tangente à cette droite donc tangent à la trajectoire du mouvement.

<u>Exemple b)</u>

$$\begin{cases} x = t+1 \\ y = t^2+2t \end{cases} \Rightarrow V_x = \frac{dx(t)}{dt} = 1;\ V_y = \frac{dy(t)}{dt} = 2t+2$$

$$V = \sqrt{1^2+(2t+2)^2}$$

Dans ce cas la vitesse n'est pas une constante, elle est une fonction du temps.

<u>Exemple c)</u>

$$\begin{cases} x = 2\cos t + 2 \\ y = 2\sin t - 1 \end{cases} \Rightarrow V_x = \frac{dx(t)}{dt} = -2.\sin t\ ;\ V_y = \frac{dy(t)}{dt} = 2.\cos t$$

$$V = \sqrt{(-2\sin t)^2+(2\cos t)^2} = \sqrt{4(\sin^2 t+\cos^2 t)} = 2 \text{ ms}^{-1}$$

Ici, la direction du vecteur $\vec{V}$(t) n'est pas constante: V_x et V_y sont des fonctions du temps, par contre le vecteur vitesse a une norme constante: le mouvement est circulaire uniforme.

<u>Exercice à faire à la maison:</u>

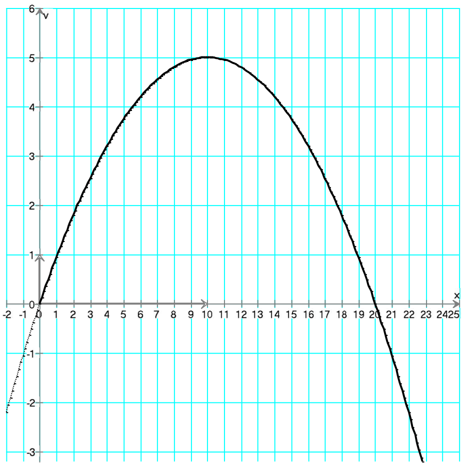
Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ le vecteur position d'un mobile M est défini par:

$$\overrightarrow{OM} = 10t\,\vec{i} + (-5t^2 + 10t)\,\vec{j}.$$

Les coordonnées sont en mètres et le temps en secondes.

1) Déterminer l'équation de la trajectoire. La représenter.
2) Donner l'expression du vecteur vitesse du mobile de M.
3) En déduire :

- La valeur de la vitesse à la date $t = 2s$
- La valeur de la vitesse lorsque le mobile passe au sommet de sa trajectoire.



Solution

1) $\begin{cases} x = 10t \\ y = -5t^2 + 10t \end{cases} \Rightarrow y = -\dfrac{x^2}{20} + x$ (parabole)

2) $\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x = 10t \\ y = -5t^2 + 10t \end{cases} \Rightarrow$

$\vec{v} = \begin{cases} v_x = 10 \\ v_y = -10t + 10 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = 10\,\vec{i} + (-10t + 10)\,\vec{j}$

3) - A $t = 2s$ $\vec{v} = \begin{cases} 10 \\ -10 \times (2) + 10 = -10 \end{cases} \Rightarrow$

$v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} = \sqrt{10^2 + (-10)^2} = 14{,}1$ m/s.

- La vitesse lorsqu'il passe au sommet de sa trajectoire : il s'agit avant tout de déterminer la date à laquelle le mobile atteint le sommet de la trajectoire.

L'équation de la trajectoire est : $y = -\dfrac{x^2}{20} + x$.

Au sommet $y' = 0 = -\dfrac{2x}{20} + 1 = -\dfrac{x}{10} + 1 \Rightarrow x_m = 10$ m et $y_m = -\dfrac{10^2}{20} + 10 = 5$ m.

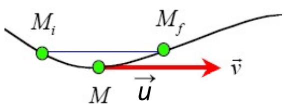
Au sommet $x = 10t = 10 \Rightarrow t = 1s$.

A $t = 1s \Rightarrow v_m = \begin{cases} 10 \\ -10(1) + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_m = 10$ m/s

Autre méthode : au sommet de la trajectoire $v_y = 0$: $v_y = -10t + 10 = 0 \Rightarrow t = 1s$

3. Vecteur vitesse et abscisse curviligne

$$v = \lim_{t_i \to t_f} \frac{\overset{\frown}{M_iM_f}}{t_f - t_i} = \lim_{ti \to tf} \frac{\overset{\frown}{OM_f} - \overset{\frown}{OM_i}}{tf - ti} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overset{\frown}{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overset{\frown}{OM}}{dt} = \frac{ds}{dt}$$



$$\boxed{\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{u} = v\vec{u}}$$

$\vec{u}$ est un vecteur unitaire tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement.

IV. Accélération

1. Definition

On appelle vecteur accélération d'un point mobile à la date t, le vecteur dérivé par rapport au temps du vecteur vitesse. Elle s'exprime ms^{-2}.

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\overrightarrow{OM}\right) = \frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OM} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OM}}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}}$$

2. Vecteur acceleration et coordonnees cartesiennes

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d^2}{dt^2}\overrightarrow{OM} = \vec{i}\frac{d^2x}{dt^2} + \vec{j}\frac{d^2y}{dt^2} + \vec{k}\frac{d^2z}{dt^2} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}}$$

Nous allons maintenant reprendre les exemples vus plus haut et donner dans chacun des cas, le vecteur accélération ainsi que sa norme.

Exemple a)

$$V_x = \frac{dx(t)}{dt} = 2 \Rightarrow a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \text{ et } V_y = \frac{dy(t)}{dt} = 4 \Rightarrow a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

Le vecteur accélération est donc le vecteur nul ($\vec{a}=\vec{0}$).

Exemple b)

$$V_x = \frac{dx(t)}{dt} = 1 \Rightarrow a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \text{ et } V_y = \frac{dy(t)}{dt} = 2t+2 \Rightarrow a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = 2$$

Le vecteur accélération est un vecteur constant: sens constant et norme constante: $\vec{a}=2\,\vec{j}$ (ms^{-2})

$$a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = 2$$

Exemple c)

$$V_x = \frac{dx(t)}{dt} = -2.\sin t \; ; \; V_y = \frac{dy(t)}{dt} = 2.\cos t$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -2.\cos t \text{ et } a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -2.\sin t$$

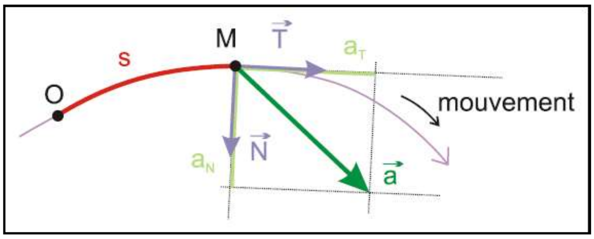
$$\vec{a} = -2\left(\cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}\right)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-2\cos t)^2 + (-2\sin t)^2} = \sqrt{4\cos^2 t + 4\sin^2 t} = 2 \text{ ms}^{-2}$$

Le vecteur accélération a une norme constante et un sens non constant: ce n'est pas un vecteur constant.

3. Vecteur acceleration et coordonnees curvilignes

Soit $\vec{T}$ le vecteur unitaire tangent en M à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement.



$$\vec{v} = v\vec{T} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d}{dt}(v\vec{T}) = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{d\vec{T}}{dt}v$$

Le vecteur accélération peut se décomposer en deux vecteurs :

- L'accélération tangentielle : $\boxed{\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\vec{T}}$
- L'accélération normale : $\vec{a}_n = v\frac{d\vec{T}}{dt}$

Soit $\vec{N}$ le vecteur unitaire orthogonal à $\vec{T}$ et orienté vers l'intérieur de la trajectoire. On démontre que :

$$\vec{a}_n = v\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{v^2}{R}\vec{N}$$ avec R le rayon de courbure de la trajectoire.

$$= a_t\vec{T} + a_n\vec{N} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}}$$

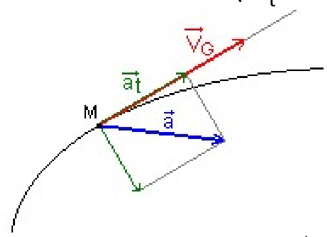
La base $(\vec{T}, \vec{N})$ constitue la base de Frenet. $(M, \vec{T}, \vec{N})$ est le repère de Frenet.

4. Mouvement accelere, retarde ou uniforme

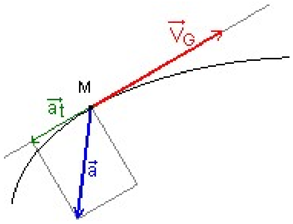
Un mouvement est dit accéléré si la mesure $\|\vec{v}\|$ de la vitesse augmente, retardé si elle diminue, uniforme si elle est constante.

Lorsque v^2 augmente $\frac{d\vec{v}^2}{dt} = 2\vec{v}\frac{d}{dt}\vec{v} = 2\vec{v}\vec{a} > 0$

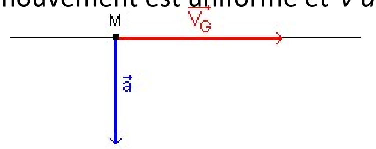
- Si v augmente le mouvement est accéléré et $\vec{v}\,\vec{a} > 0$ ($\vec{a}_t$ et $\vec{V}_G$ sont de même sens)
-



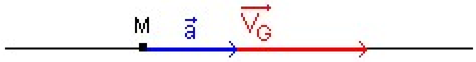
- Si v diminue le mouvement est décéléré et $\vec{v}\,\vec{a} < 0$ ($\vec{a}_t$ et $\vec{V}_G$ sont de sens opposés)



- Si v est une constante le mouvement est uniforme et $\vec{v}\,\vec{a} = 0$ ($\vec{a}_t=\vec{0}$)



- Si $\vec{a}$ et $\vec{V}_G$ont même direction, le mouvement est rectiligne. (determinant($\vec{a}$ $\vec{v}$)=0)

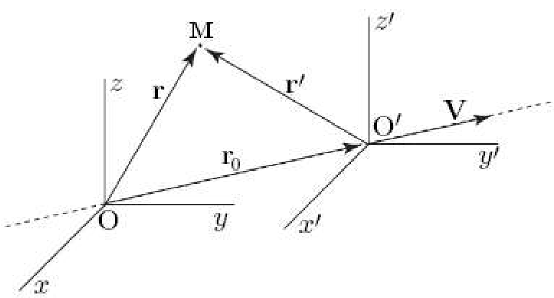


V. Changement de référentiel

1. Position du probleme

Rappelons, à nouveau, que la trajectoire d'un mobile dépend de l'observateur. Par exemple, pour le passager d'un train, la vitre est immobile et le paysage défile. Il n'en est pas de même pour un promeneur qui s'est arrêté pour regarder passer le train.
Dans cette partie, nous nous proposons d'étudier comment se modifie la vitesse d'un point matériel M quand on change d'observateur. Concrètement, il va s'agir de déterminer les caractéristiques de la vitesse du mouvement de M par rapport à un référentiel mobile $\mathscr{R}'$ lorsqu'on les connaît dans un autre référentiel fixe $\mathscr{R}$.

2. Loi de composition des vitesses



Deux repères $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$ dont les origines O et O' et les axes coïncident a t = 0, alors que O' est animé d'une vitesse V par rapport à O.

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \text{ et } \overrightarrow{O'M} = x'\,\vec{i'} + y'\,\vec{j'} + z'\,\vec{k'} \text{ et aussi: } \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{v}(M/\mathscr{R}) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OM} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}\right) = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OO'} + \frac{d}{dt}\overrightarrow{O'M} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OO'} + \frac{d}{dt}\left(x'\,\vec{i'} + y'\,\vec{j'} + z'\,\vec{k'}\right)$$

$$\vec{v}(M/\mathscr{R}) = \underbrace{\frac{d}{dt}\overrightarrow{OO'} + x'\frac{d}{dt}(\vec{i'}) + y'\frac{d}{dt}(\vec{j'}) + z'\frac{d}{dt}(\vec{k'})}_{\vec{v}(\mathscr{R}'/\mathscr{R})} + \underbrace{\vec{i'}\frac{dx'}{dt} + \vec{j'}\frac{dy'}{dt} + \vec{k'}\frac{dz'}{dt}}_{\vec{v}(M/\mathscr{R}')}$$

$$\boxed{\vec{v}(M/\mathscr{R}) = \vec{v}(M/\mathscr{R}') + \vec{v}(\mathscr{R}'/\mathscr{R})}$$

$\vec{v}(M/\mathscr{R}) = \vec{v}_a$: vitesse absolue

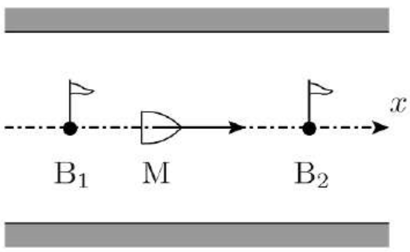
$\vec{v}(M/\mathscr{R}') = \vec{v}_r$: vitesse relative

$\vec{v}(\mathscr{R}'/\mathscr{R}) = \vec{v}_e$: vitesse d'entrainement de $\mathscr{R}'$ par rapport à $\mathscr{R}$, c'est-à-dire la vitesse que le mobile aurait, par rapport au référentiel absolu, s'il était fixe dans le référentiel relatif.

$$\boxed{\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e}$$

Aplication:

Deux bouées B_1 et B_2, distantes de l, sont situées sur un canal, dont le courant a pour vitesse uniforme $\vec{u}$ par rapport aux berges et s'écoule de B_1 vers B_2. Ces bouées sont fixes par rapport aux berges. Un rameur, assimilé à un point matériel M, effectue un aller-retour entre les deux bouées, sa vitesse par rapport au courant (à l'eau) gardant toujours la même norme égale à v telle que $v > u$.



1) Exprimer les vitesses $\vec{v_+}$ et $\vec{v_-}$ du rameur par rapport aux berges, respectivement au cours des trajets B_1 vers B_2 et B_2 vers B_1.

2) En déduire la durée τ de l'aller-retour du rameur entre les bouées.

3) Quelle est la durée τ' mise par un personne marchant sur les berges avec la même vitesse v que celle du rameur par rapport au courant, et qui effectue le même aller-retour entre les bouées ? Comparer les durées τ et τ' (on pourra faire le rapport).

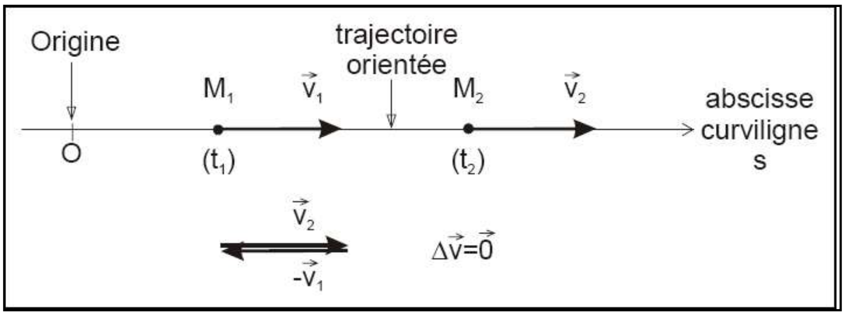
Rép : 1) $\vec{v_+} = (u+v)\,\vec{e_x}$; $\vec{v_-} = (u-v)\,\vec{e_x}$ **2)** $\tau = \frac{2lv}{v^2-u^2}$; **3)** $\tau' = \frac{2l}{v} < \tau$

VI. Étude de quelques mouvements

1. Mouvement rectiligne uniforme

a. Définition

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne uniforme lorsque sa trajectoire est une droite et le vecteur vitesse constant ($\vec{v}$=$v_0\,\vec{i}$). C'est un mouvement à vecteur accélération nul.



b. Équation horaire

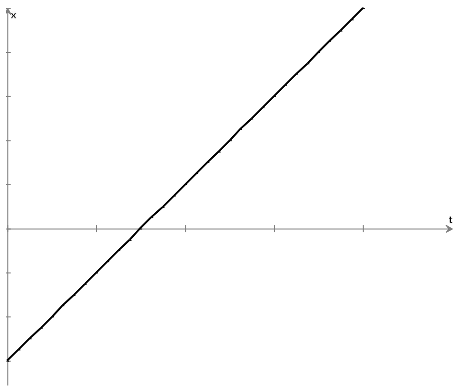
* Conditions initiales: A t = 0 ⇒ $x = x_0$ et $v = v_0$

$v = v_0 = cte \Rightarrow a = \dfrac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0}$ et $v = v_0 \Rightarrow x = v_0 t + C$ (C constante d'intégration déterminée par les conditions initiales). A t=0, x=x_0 ⇒ $x_0 = v_0 \times 0 + C \Rightarrow C = x_0$ d'où $\boxed{x = v_0 t + x_0}$

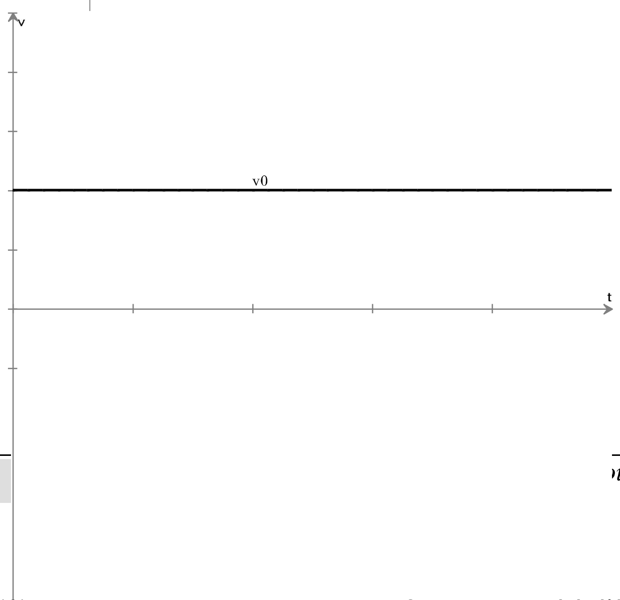
$$\begin{cases} a = 0 \\ v = v_0 \\ x = v_0 t + x_0 \end{cases} \Rightarrow \text{ équations horaires d'un mouvement rectiligne uniforme}$$

Remarque: toutes les grandeurs qui apparaissent dans les équations horaires sont algébriques.

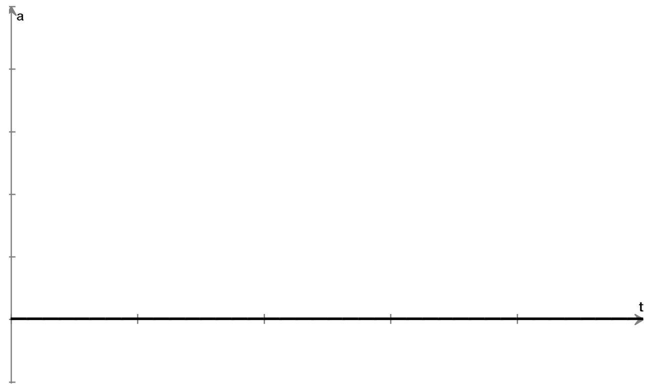
On donne ici les graphes des fonctions x, v et *a* en fonction du temps



La pente de la droite donne la vitesse V_0 du mouvement, son ordonnée à l'origine donne l'abscisse x_0 à l'origine des temps



Le diagramme des vitesses est la droite parallèle à l'axe des temps d'ordonnée à l'origine V_0



Le diagramme des accélérations se réduit à l'axe des temps

c. Application

Les équations paramétriques du mouvement donnant le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sont: $\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = t \\ y = 2t+4 \\ z = 0 \end{cases}$

Montrer que ce point est animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

- Montrons que le mouvement est rectiligne

$$x = t \text{ et } y = 2t+4 \Rightarrow \boxed{y = 2x+4} \text{ la trajectoire est une droite.}$$

- Montrons que la vitesse est constante.

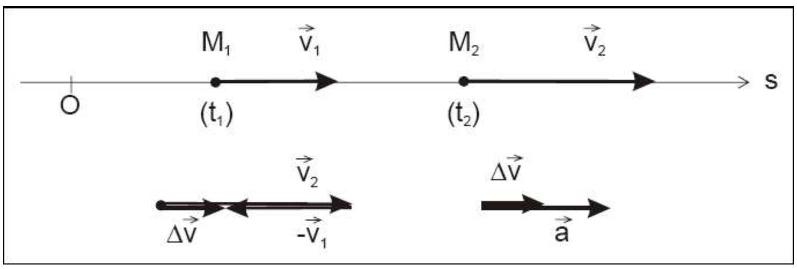
$$\vec{v}\begin{cases} 1 \\ 2 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow v = \sqrt{1^2+2^2+0^2} = 2{,}23 \text{ m/s d'où v est une constante}$$

- Conclusion: le mouvement est rectiligne uniforme

2. Mouvement rectiligne uniformement varie

a. Définition

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié si sa trajectoire est une droite et son vecteur accélération constant $(\vec{a} = a_0\vec{i})$



b. Équations horaires

$$a = a_0 = cte \Rightarrow v = at + v_0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}a\frac{v - v_0}{a} + v_0\frac{v - v_0}{a} = \frac{v^2 - {v_0}^2}{2a} \Rightarrow x - x_0 = \frac{v^2 - {v_0}^2}{2a} \text{ (formule de Torricelli)}$$

$$\begin{cases} a = cte \\ v = at + v_0 \\ x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \\ v^2 - {v_0}^2 = 2a(x - x_0) \end{cases} \Rightarrow \text{équations horaires d'un mouvement rectiligne uniformément varié.}$$

- Autre propriété: les espaces parcourus en des intervalles de temps égaux sont en progression arithmétique. Pour démontrer cela, considérons la loi horaire écrite sous la forme la plus simple, obtenue en choisissant $x_0 = 0$ et $v_0 = 0$.

On a donc: $x = \frac{1}{2}at^2$

Considérons des dates en progression arithmétique, à partir d'une date origine t_0 quelconque:

$$t_1 = t_0 + \tau,\ t_2 = t_0 + 2\tau,\ \ldots..\ ,\ t_n = t_0 + n\tau,\ \ldots.$$

Considérons les espaces parcourus dans les intervales de temps (t_{n-1}, t_n) et (t_n, t_{n+1}):

$$\Delta x_n = x_n - x_{n-1} = \frac{1}{2}a\left[(t_0 + n\tau)^2 - (t_0 + (n-1)\tau)^2\right] = \frac{1}{2}a\tau\left[2t_0 + 2n\tau - \tau\right]$$

$$\Delta x_{n+1} = x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}a\tau\left[2t_0 + 2(n+1)\tau - \tau\right]$$

Par suite: $\Delta x_{n+1} - \Delta x_n = a\tau^2$.

Les espaces parcourus sont bien en progression arithmétique:

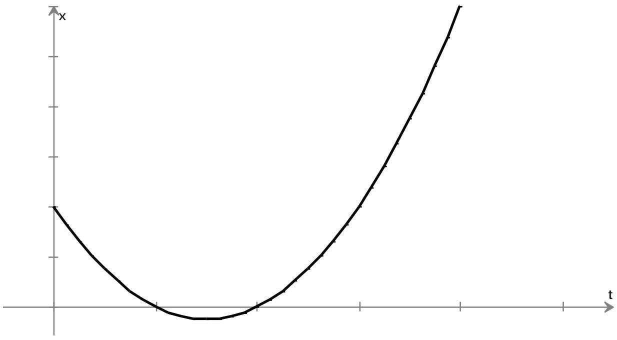
$$\Delta x_2 = \Delta x_1 + a\tau^2$$

$$\Delta x_3 = \Delta x_2 + a\tau^2 = \Delta x_1 + 2a\tau^2,\ \ldots.,$$

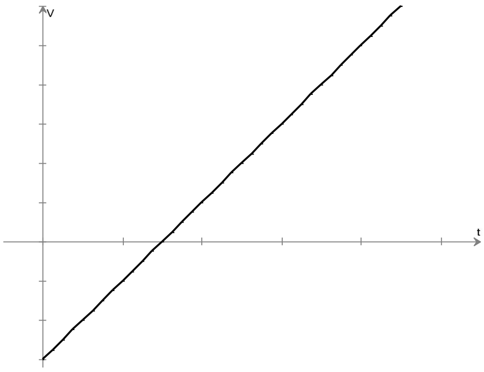
$$\Delta x_n = \Delta x_{n-1} + a\tau^2 = \Delta x_1 + (n-1)a\tau^2, \text{ la raison de cette progression est } a\tau^2$$

- Au cours d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré, les espaces parcourus en des intervalles de temps égaux sont en progression arithmétique.

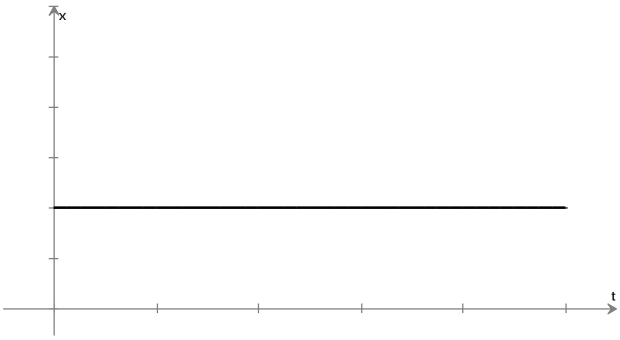
On donne ici les représentations graphiques de x, v et a en fonction du temps



Le diagramme des espaces, est une parabole à concavité tournée vers le haut ou le bas selon que l'accélération *a* est positive ou négative; l'ordonnée à l'origine de cette courbe donne x_0 , position du mobile à l'origine des temps à l'origine des temps



Le diagramme des vitesses, est une droite dont la pente est égale à l'accélération et dont l'ordonnée à l'origine est la vitesse initiale (à l'instant t = 0) V_0 du mobile.



Le diagramme des accélérations, est la droite parallèle à l'axe des temps dont l'ordonnée à l'origine est l'accélération du mouvement *a*.

c. Application

Un point mobile M décrit sur un axe $O\vec{i}$ un mouvement rectiligne uniformément varié d'accélération $\vec{a} = 4\vec{i}$. A l'instant $t = 0$, le vecteur vitesse est $\vec{v}_0 = -8\vec{i}$ et le vecteur position de M est $\overrightarrow{OM_0} = 2\,\vec{i}$.

1) Établir les équations horaires x(t) et v(t)
2) Déterminer la date et la position pour lesquelles la vitesse s'annule.
3) Entre quelles dates le mouvement est-il accéléré? retardé?

Réponse:

1) équations horaires:

$$a = 4 \Rightarrow v = 4t + v_0 \Rightarrow \boxed{v = 4t - 8}\,;\, x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 = 2t^2 - 8t + 2 \Rightarrow \boxed{x = 2t^2 - 8t + 2}$$

2) date et position où $v = 0$

$$v = 4t - 8 = 0 \Rightarrow \boxed{t = 2s}\,; x = 2(2)^2 - 8(2) + 2 = -6 \Rightarrow \boxed{x = -6m}$$

3) nature du mouvement

$$\vec{a}.\vec{v} = 4(4t - 8)$$

t	0	2	+∞
a	+		+
v	-	0	+
$\vec{a}.\vec{v}$	-	0	+
	Décéléré		Accéléré

3. Mouvement rectiligne sinusoïdal

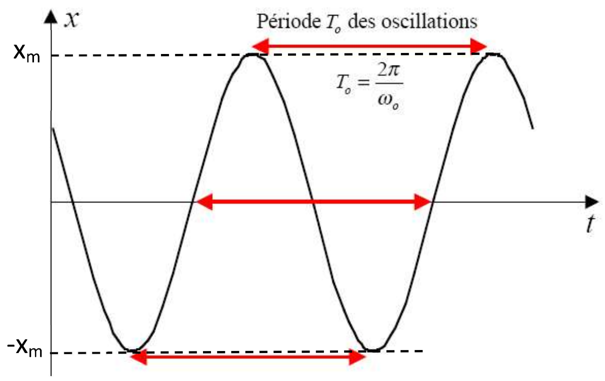
a. Définition

Un mobile M est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal si son équation horaire peut s'écrire sous la forme: $x = x_m \sin(\omega t + \varphi)$

x: élongation ou abscisse ; x_m: amplitude maximale (toujours positive); ω(rad/s): pulsation; (ωt+φ): phase à l'instant de date t; φ: phase à l'origine.

b. Position du mobile

sin(ωt+φ) ∈ [-1;1] donc x ∈ [-x_m; x_m]: le mobile se déplace sur un segment de droite [AA']. M est animé d'un mouvement de va et vient de part et d'autre de O centre du mouvement.



Les expressions de la période (T) et la fréquence (N ou f) sont: $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$ et $\boxed{f = \frac{1}{T}}$

c. Vitesse et accélération

$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = x_m \omega \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = -x_m \omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a=-\omega^2\big(x_m\sin(\omega t+\varphi)\big)=-\omega^2 x \Rightarrow \boxed{\ddot{x}+\omega_0^2 x=0}$$

C'est une équation différentielle caractéristique d'un mouvement rectiligne sinusoïdal.

d. Application

Un mobile est animé d'un mouvement rectiligne sinusoïdal d'axe x'Ox support de la trajectoire. Le point O est le centre du mouvement de période temporelle **T = 1, 00 s**. A l'instant initial **t_0 = 0** pris comme origine des dates, la position du mobile est **x_0 = 1,41 cm** et sa vitesse **V_0 = 8,88 cm/s**.

1) Déterminer la loi horaire de l'élongation du mobile.
2) A quelles dates le mobile passe-t-il à l'élongation $x=-1$ cm en se déplaçant dans le sens négatif?

Réponse:

1) loi horaire

$$x(t)=x_m\cos(\omega t+\varphi)\text{: à t=0} \rightarrow x=x_0=1{,}41 \Rightarrow 1{,}41=x_m\cos\varphi \ (1)$$

$$v=-x_m\omega\sin(\omega t+\varphi)\text{: à t=0} \rightarrow v=v_0=8{,}88 \Rightarrow 8{,}88=-x_m\omega\sin\varphi \ (2)$$

Sachant que ω=2π rad/s les expressions (1) et (2) donnent: $x_m=\dfrac{1{,}41}{\cos\varphi}$ et tanφ=-1,0028

$$\tan\varphi=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

Noter la relation mathématique $\boxed{\tan a=\tan b \Rightarrow \begin{cases} a=b+2k\pi \\ a=\pi+b+2k\pi \end{cases}}$

$$\tan\varphi=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} \varphi=-\dfrac{\pi}{4} \\ \varphi=-\dfrac{\pi}{4}+\pi=\dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

A $t=0$, $v=8{,}88$ cm/s>0 $\Rightarrow -x_m\omega\sin\varphi>0 \Rightarrow \sin\varphi<0$ d'où $\varphi=-\dfrac{\pi}{4}$ donc $x_m=\dfrac{1{,}41}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=2$ cm.

$$x(t)=2.\cos\left(2\pi t-\frac{\pi}{4}\right)\text{ en cm}$$

2) dates où le mobile passe par l'élongation $x=-1$ cm en se déplaçant dans le sens négatif?

On résout pour cela l'équation: $2\cos\left(2\pi t-\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$

On note les relations trigonométriques suivantes:

$$\boxed{\sin a=\sin b \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+2k\pi \\ a=\pi-b+2k\pi \end{cases} \text{ et } \cos a=\cos b \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+2k\pi \\ a=-b+2k\pi \end{cases}}$$

$$\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} 2\pi t - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ 2\pi t - \frac{\pi}{4} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

Aux dates t, $v = -4\pi \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{4}\right) < 0 \Rightarrow \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{4}\right) > 0$ donc les solutions sont données par la relation: $2\pi t - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow \boxed{t = \frac{11}{24} + k}$

Pour $k = 0 \Rightarrow t = 0{,}45$ s $\Rightarrow$ 1^{e} passage

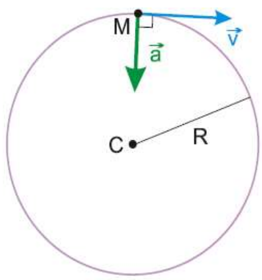
Pour $k = 1 \Rightarrow t = 1{,}45$ s $\Rightarrow$ 2eme passage ainsi de suite

4. Mouvement circulaire uniforme

a. Définition

Un mobile décrit un mouvement circulaire uniforme si sa trajectoire est un cercle et la norme de son vecteur vitesse constante.

b. Accélération



s = $\overset{\frown}{AM}$ et $\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{T} = v\,\vec{T}$;

$\vec{a} = \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_n} \Leftrightarrow \vec{a}_T = \frac{dv}{dt}\vec{T} = \vec{0}$ car v est une constante et $\vec{a}_N = \frac{v^2}{R}\vec{N}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{a}_N = \frac{v^2}{R}\vec{N}}$$

Le vecteur accélération d'un mouvement circulaire uniforme est dirigé vers le centre de la trajectoire: on dit que l'accélération est centripète.

c. Équations horaires

La position du mobile peut être repérée par l'abscisse angulaire α. Par définition la vitesse angulaire ω est l'angle balayé pendant l'unité de temps.

$$\boxed{\omega = \frac{d\alpha}{dt}} \text{ (rad/s)}$$

Pour un mouvement circulaire uniforme $\omega = \frac{d\alpha}{dt} = cte$; $v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(R\alpha) = R\frac{d\alpha}{dt} = R\omega$

$$\Rightarrow \boxed{v = R\omega}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_N = \frac{v^2}{R}\vec{N} = R\omega^2\vec{N}$$

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = cte \Rightarrow \boxed{\alpha = \omega t + \alpha_0}$$

$$\begin{cases} \vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{N} = R\omega^2\vec{N} \\ v = R\omega \\ \alpha = \omega t + \alpha_0 \end{cases} \Rightarrow \text{équations horaires d'un mouvement circulaire uniforme.}$$

d. Application

Un mobile M est animé dans le plan rapporté au repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'un mouvement circulaire. Ces coordonnées s'expriment par :

$$\begin{cases} x = 2\cos\omega t \\ y = 2\sin\omega t \end{cases} \Rightarrow \text{x et y en mètre.}$$

1) Montrer que le mouvement est circulaire uniforme.
2) Déterminer les coordonnées du vecteur accélération.
3) Quelle est l'expression de l'abscisse curviligne s? L'origine des abscisses curvilignes est prise au point A de coordonnées cartésienne (2,0).

Réponse:

1) mouvement circulaire uniforme
- Montrons que la trajectoire est un cercle

$$\begin{cases} x = 2\cos\omega t \\ y = 2\sin\omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\omega t = \frac{x}{2} \\ \sin\omega t = \frac{y}{2} \end{cases} \Rightarrow \sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4:$$

La trajectoire est un cercle de centre O et de rayon 2: $\mathscr{C}$(O, 2).

- montrons que $\left\|\vec{v}\right\|$ est constante

$\vec{v} = \begin{cases} -2\omega\sin\omega t \\ 2\omega\cos\omega t \end{cases} \Rightarrow v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} = \sqrt{4\omega^2} = 2\omega$: la vitesse est constante d'où le mobile est animé d'un mouvement circulaire uniforme.

2) coordonnées de $\vec{a}$: $\vec{a}\begin{cases} -2\omega^2\cos\omega t \\ -2\omega^2\sin\omega t \end{cases}$

3) abscisse s: $v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow s = vt + s_0 = 2\omega t$ car $s_0 = 0$

5. Mouvement circulaire uniformement varie

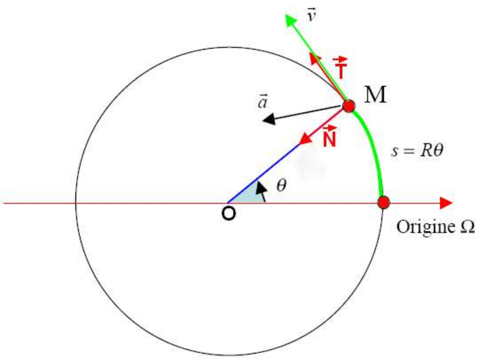
a. Définition

Un mobile est animé d'un mouvement circulaire uniformément varié si la trajectoire est un cercle et que son accélération angulaire constante.

b. Accélération

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d(R\omega)}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N} \Rightarrow \vec{a} = R\frac{d\omega}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N} \Rightarrow \vec{a} = R\frac{d^2\alpha}{dt^2}\vec{T} + R\omega^2\vec{N}$$

$$\boxed{\vec{a} = R\ddot{\alpha}\vec{N} + R\omega^2\vec{N}}$$



$\ddot{\alpha} = \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} = \dfrac{d\omega}{dt}$: accélération angulaire (rad/s)

$$\ddot{\alpha} = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \dot{\alpha} = \ddot{\alpha}t + \dot{\alpha}_0 \Rightarrow \dot{\alpha} = \frac{1}{2}\ddot{\alpha}t^2 + \dot{\alpha}_0 t + \alpha_0$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = R\ddot{\alpha}\vec{N} + R\omega^2\vec{N} \\ \dot{\alpha} = \ddot{\alpha}t + \dot{\alpha}_0 \\ \alpha = \dfrac{1}{2}\ddot{\alpha}t^2 + \dot{\alpha}_0 t + \alpha_0 \\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 2\ddot{\alpha}(\alpha_1 - \alpha_2) \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ équations horaires d'un mouvement circulaire uniformément

c. application

Les équations horaires d'un mouvement plan sont:

$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = \sqrt{4 - t^2} \end{cases}$$

1) Quelle est la nature de la trajectoire
2) Déterminer le vecteur vitesse et sa valeur.
3) En déduire les composantes normales et tangentielles de l'accélération dans la base de Frenet.
4) En déduire les composantes cartésiennes du vecteur accélération.
5) En déduire que le module de l'accélération est indépendant du repère d'étude.

<u>Réponse</u>

1) $x^2 + y^2 = 4$; $\mathscr{C}(O; 2)$: la trajectoire est un cercle
2) $\vec{v} = \vec{i} - \dfrac{t}{\sqrt{4-t^2}}\vec{j}$ et $v = \sqrt{1^2 + \left(-\dfrac{t}{\sqrt{4-t^2}}\right)^2} = \dfrac{2}{\sqrt{4-t^2}}$ $\quad a = \dfrac{4}{(4-t^2)^{\frac{3}{2}}}$
3) $a_t = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{2t}{(4-t^2)^{\frac{3}{2}}}$ et $a_n = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{2}{4-t^2} \Rightarrow \vec{a} = \dfrac{2t}{(4-t^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{T} + \dfrac{2}{4-t^2}\vec{N}$

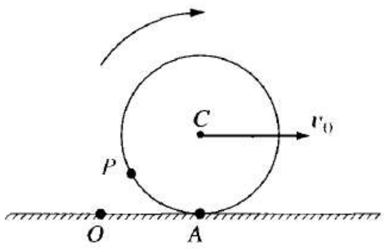
4) $a_x = 0$; $a_y = -\dfrac{4}{(4-t^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \vec{a} = -\dfrac{4}{(4-t^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{j}$

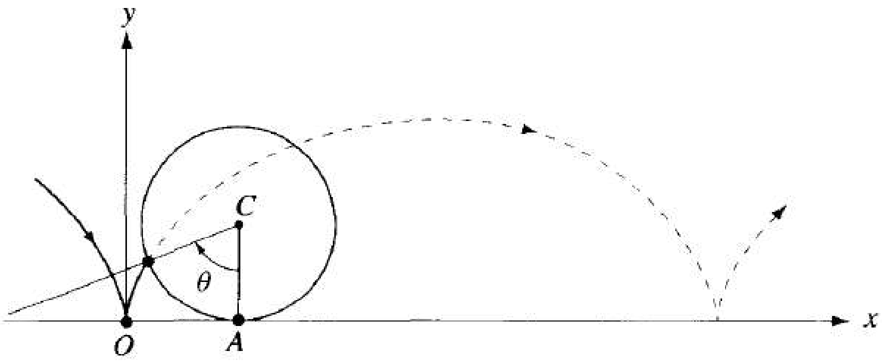
5) Dans le repère cartésien: $a = \dfrac{4}{(4-t^2)^{\frac{3}{2}}}$

Dans la base de Frenet: $a = \sqrt{a_t^{\,2} + a_n^{\,2}} = \dfrac{4}{(4-t^2)^{\frac{3}{2}}}$

6. Mouvement cycloidal

Cherchons la trajectoire, la vitesse et l'accélération d'un point P sur la circonférence d'une roue de rayon R roulant à vitesse v_0 constante. On admet que la roue roule sans glisser





Prenons comme temps initial l'instant où P quitte le sol et soit $\theta(t)$ l'angle dont a tourné le rayon CP à l'instant t. Nous avons: $\overrightarrow{OC}(t) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = v_0 t\,\vec{i} + R\,\vec{j}$ et $\|\overrightarrow{OA}\| = v_0 t$ =nor($\overset{\frown}{AP}$)= $R\theta(t)$ car la roue ne roule pas.

$\overrightarrow{OP}(t) = \overrightarrow{OC}(t) + \overrightarrow{CP}(t)$ avec $v_0 t = R\theta(t)$

En projetant sur les axes x et y

$$\begin{cases} x(t) = R(\omega t - \sin(\omega t)) \\ y(t) = R(1 - \cos(\omega t)) \end{cases} \text{ où } \omega = \frac{v_0}{R} \text{ et } \theta(t) = \omega t$$

Par dérivation on obtient les vecteurs vitesse et accélération;

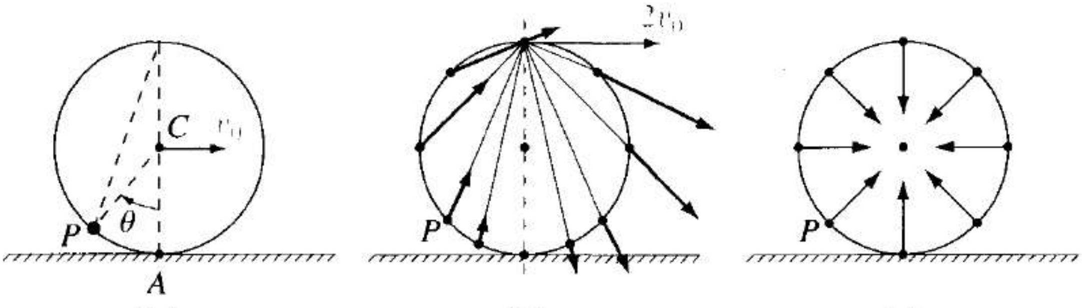
$$\begin{cases} v_x = R\omega(1 - \sin\omega t) \\ v_y = R\omega\sin\omega t \end{cases} \text{ d'où } \|\vec{v}\| = 2R\omega\left|\sin\left(\frac{1}{2}\omega t\right)\right|$$

Pour terminer, on remarquera que le mouvement du point P *sur la circonférence* est toujours dirigé dans le sens du mouvement de la roue et que sa vitesse varie entre 0 et $2v_0$.

La relation $\frac{v_x}{v_y} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ montre que le vecteur vitesse $\vec{v}$ est dirigé vers le sommet de la roue (fig.b)

$$\begin{cases} a_x = R\omega^2 \sin\omega t \\ a_y = R\omega^2 \cos\omega t \end{cases} \text{ d'où } \|\vec{a}\| = R\omega^2$$

On remarquera que l'accélération est constante en norme ; la relation $\frac{a_x}{a_y} = \tan\theta$ montre que le vecteur $\vec{a}$ est dirigé vers le centre de la roue (fig.c)



(a) (b) (c)

Bases de la dynamique

I. Mouvement du centre d'inertie

Le centre d'inertie d'un système matériel est le barycentre des points du système affecté de leur masse respective. Il est donné par la relation barycentrique.

Soit S un solide de masse M constitué des points matériels A_1, A_2, ……., A_i de masses respectives m_1, m_2,………, m_i. Si G est le centre d'inertie du solide, la relation barycentrique donne:

$$m_1\overrightarrow{GA_1}+m_2\overrightarrow{GA_2}+.....+m_i\overrightarrow{GA_i}=\vec{0}$$

Soit O un point quelconque de l'espace: $\overrightarrow{GA_i}=\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA_i}$

$$\overrightarrow{GO}(m_1+m_2+...+m_i)+m_1\overrightarrow{OA_1}+....+m_i\overrightarrow{OA_i}=\vec{O}\Rightarrow\sum_i m_i\overrightarrow{OG}=\sum_i m_i\overrightarrow{OA_i}$$

$$\Rightarrow\boxed{M\,\overrightarrow{OG}=\sum_i m_i\overrightarrow{OA_i}}$$

Exemple:

Une tige AB homogène et de section constante a pour longueur 2ℓ=72 cm et pour masse m. On place en A une masselotte de masse 2m et en B une autre de masse 3m. Déterminer la position du centre d'inertie G du solide ainsi constitué.

II. QUANTITE DE MOUVEMENT

1. QUANTITE DE MOUVEMENT D'UN POINT MATERIEL

Soit un point matériel A de masse m animé d'une vitesse $\vec{v}$. La quantité de mouvement du point A, notée $\vec{p}$ est donnée par la relation: $\vec{p}=m\vec{v}$. Elle s'exprime en kgm/s.

2. QUANTITE DE MOUVEMENT D'UN SOLIDE

Un solide de masse M peut être décomposé en plusieurs points matériels A_i de masse m_i et de vecteur vitesse $\vec{v}_i$.

$$\vec{p}=\sum_i\overrightarrow{p_i}=\sum_i m_i\overrightarrow{v_i}=\sum_i m_i\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA_i}=\frac{d}{dt}\sum_i m_i\overrightarrow{OA_i}=\frac{d}{dt}M\,\overrightarrow{OG}\Rightarrow\vec{p}=M\frac{d}{dt}\overrightarrow{OG}=M\vec{v}_G$$

$$\boxed{\vec{p}=M\vec{V}_G}$$

où $\vec{v}_G$ est la vitesse du centre d'inertie du solide.

III. Relation fondamentale de la dynamique

1. Énonce

Si un ensemble de forces de somme $\sum \vec{F}$ agissant sur un solide provoque une variation de sa quantité de mouvement $\vec{p}$; il existe une classe de référentiels dits galiléens dans lesquels est vérifiée la relation suivante:

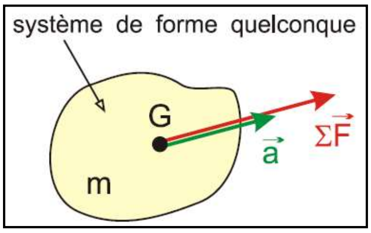
$$\boxed{\sum \vec{F}_{appliquée} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

2. Consequences

a. Théorème du centre d'inertie (2ème loi de Newton)

$$\sum \vec{F} = \vec{v}_G \frac{dm}{dt} + m\frac{d\vec{v}_G}{dt} = m\frac{d\vec{v}_G}{dt}$$ car la masse est invariable (pas toujours le cas)

Si un système de masse totale m est soumis à plusieurs forces extérieures dont la résultante $\sum \vec{F}$ n'est pas nulle, alors le centre d'inertie G du système prend une accélération $\vec{a}$ liée à la résultante $\sum \vec{F}$ et à la masse m d'après la relation : $\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a}_G}$



b. Principe d'inertie (1ère loi de Newton)

$$\text{Si } \sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_G = \vec{0} \text{ alors } \begin{cases} \vec{v} = \overrightarrow{cte} \Rightarrow MRU \\ \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow immobilité \end{cases}$$

Si un système de masse m n'est soumis à aucune force, ou s'il est soumis à un ensemble de forces dont la résultante est nulle, alors le centre d'inertie G du système décrit un mouvement rectiligne et uniforme. En particulier, si un tel corps est au repos il restera au repos.

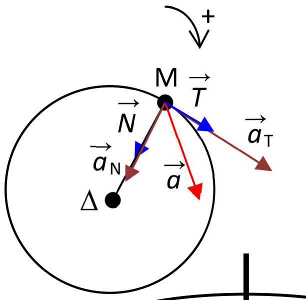
c. principe des actions réciproques (3ème loi de Newton)

Si un corps A exerce une force $\vec{F}_{B/A}$ sur un corps B, alors le corps B exerce également une force $\vec{F}_{A/B}$ sur le corps A tel que : $\vec{F}_{B/A} = -\vec{F}_{A/B}$

IV. Relation fondamentale de la dynamique de rotation (S1)

1. Cas d'un point materiel

Soit un point matériel de masse m animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe Δ.

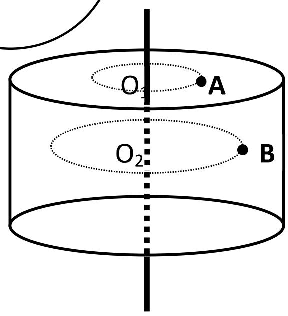


$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

RFD: $\sum \vec{f} = \vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}_T + m\vec{a}_N \Rightarrow \vec{F} = mR\ddot{\theta}\vec{T} + mR\theta'^2\vec{N}$

$$\Rightarrow \mathcal{M}\left(\vec{F}\right) = mR^2\ddot{\theta} \text{ avec } \ddot{\theta} = \theta''$$

2. Cas d'un solide

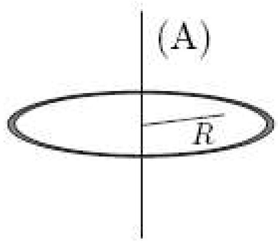
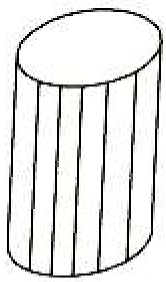


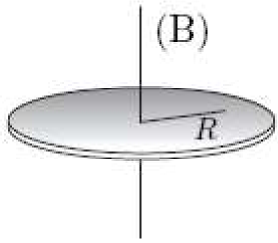
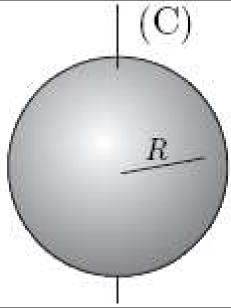
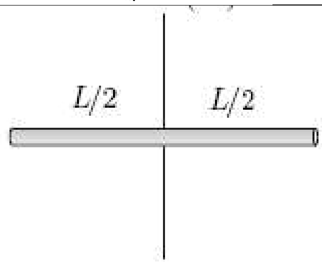
$$\sum \mathcal{M} = \sum_i m_i R_i^2 \theta'' = \ddot{\theta} \sum_i m_i R_i^2 = J\ddot{\theta} \Rightarrow \boxed{\sum \mathcal{M} = J\theta''}$$

Avec J(ms²): moment d'inertie du solide par rapport à Δ

Cette relation constitue le théorème de l'accélération angulaire: si un solide est animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe, la somme algébrique des moments des forces extérieures qui s'exercent sur le solide est proportionnelle à l'accélération angulaire.

3. Moment d'inertie de quelques solides

Système	Schéma	formule
Anneau de masse m et de rayon R		$J = mR^2$
Manchon ou cylindre creux		$J = mR^2$

Disque homogène ou cylindre homogène		$J=\frac{1}{2}Rr^2$
Sphère homogène par rapport à son diamètre		$J=\frac{2}{5}Rr^2$
Moment d'inertie d'une tige		$J=\frac{1}{12}mL^2$

4. THEOREME DE HUYGENS (S1)

Le théorème de Huygens (aussi appelé théorème de l'axe parallèle) facilite grandement le calcul du moment d'inertie par rapport à un axe quelconque. Soit J_0 le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de masse et J le moment d'inertie par rapport à un autre axe, parallèle au premier et à une distance d de celui-ci. Alors ce théorème stipule que:

$$\boxed{J=J_0+Md^2}$$

Comme exemple d'application du théorème de l'axe parallèle, calculons le moment d'inertie d'une tige de longueur L par rapport à un axe perpendiculaire à la tige et passant par l'une de ses extrémités. On trouve alors:

$$J=M\left(\frac{L}{2}\right)^2+\frac{1}{12}ML^2$$

V. Théorèmes relatifs aux énergies

1. ENERGIE CINETIQUE

$\delta W=\sum\vec{F}_i\,\overrightarrow{d\ell}$ or d'après la relation fondamentale de la dynamique, $\sum\vec{F}_i=m\frac{d\vec{v}}{dt}$. Le travail élémentaire est par conséquent: $\delta W=m\frac{d\vec{v}}{dt}\,\overrightarrow{d\ell}$. Dans cette expression, $\frac{\overrightarrow{d\ell}}{dt}$ n'est autre que le vecteur $\vec{v}$. D'où l'expression finale $\delta W = m\vec{v}d\vec{v}$ qui s'écrit encore $\delta W = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$. Le travail total des forces effectué entre les instant t_1 et t_2 est donc $W_{1\to 2} = \int_{v_1}^{v_2} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2$

La variation d'énergie cinétique d'un solide entre deux instants est égale au travail des forces appliquées à ce solide entre ces deux instants.

	Translation	**Rotation**
Expression de Ec	$Ec = \frac{1}{2}mV^2$	$Ec = \frac{1}{2}J\omega^2$
Théorème	$\frac{1}{2}m(v_f)^2 - \frac{1}{2}m(v_i)^2 = \sum W(\vec{F})$	$\frac{1}{2}J(\omega_f)^2 - \frac{1}{2}J(\omega_i)^2 = \sum W(\vec{F})$
Expression du travail	$W(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$	$W(\vec{F}) = \mathcal{M}(\vec{F}/\Delta)\times\theta$

2. ENERGIE POTENTIELLE

Pesanteur	**Élastique**	**Torsion**
$Ep_p = mgh + C$	$Ep_e = \frac{1}{2}kx^2 + C$	$Ep_{\mathscr{C}} = \frac{1}{2}C\alpha^2 + C_1$
$\Delta Ep = -W(\vec{f}_{intérieures})$		

3. ENERGIE MECANIQUE

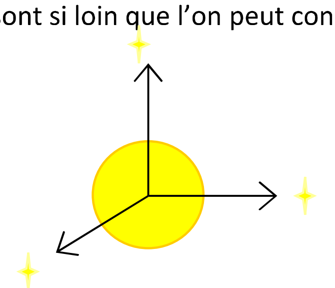
Expression	$Em = Ec + Ep$ avec $Ep = Ep_p + Ep_e + Ep_{\mathscr{C}}$
Loi de conservation	$\Delta E = 0$
Loi de non conservation	$\Delta E = W(\vec{f}_{\text{non conservative}})$

VI. Référentiels et repères galiléens

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le principe d'inertie et la relation fondamentale de la dynamique sont applicables.

1. REFERENTIEL DE COPERNIC (HELIOCENTRIQUE)

Il est constitué du centre du soleil comme origine et de trois directions fixes allant du centre du soleil vers trois étoiles lointaines (elles sont si loin que l'on peut considérer leur position fixe).



On utilise ce référentiel pour décrire le mouvement des planètes autour du Soleil. Dans ce référentiel la Terre décrit son orbite en 365,25 jours

2. REFERENTIEL GEOCENTRIQUE

Il est constitué du centre de la Terre comme origine et de trois axes dirigés vers les trois étoiles fixes du repère de Copernic.

On utilise ce référentiel pour décrire les mouvements des satellites artificiels ou naturels. Ce référentiel est galiléen. On pourrait définir le même référentiel pour n'importe quelle autre planète. Dans ce référentiel la Terre tourne autour d'elle-même en un jour sidéral (23h 56min 04s) suivant l'axe des pôles.

3. REFERENTIEL TERRESTRE

Un repère du référentiel terrestre ou du laboratoire est lié à la Terre. Si les mesures ne demandent pas une très grande précision et si leur durée est très courte on peut considérer ce référentiel comme galiléen.

VII. Référentiels et repères non galiléens

1. POSITION DU PROBLEME

- lorsqu'une voiture freine les passagers sont projetés à l'avant,
- lorsqu'elle accélère, ils sont projetés vers l'arrière,
- lorsqu'elle effectue un virage, ils sont projetés vers le côté.

Pour expliquer la perte d'équilibre des passagers on fait intervenir une force fictive appelée force d'inertie: $\vec{F}_i$.

2. REFERENTIELS NON GALILEENS

Considérons un référentiel $\mathscr{R}$ et un référentiel $\mathscr{R}'$ animé d'un mouvement de vitesse $\vec{V}_e = \vec{V}_{\mathscr{R}'/\mathscr{R}}$ (vitesse d'entrainement)

$$\vec{V}_{/\mathscr{R}} = \vec{V}_{\mathscr{R}'/\mathscr{R}} + \vec{V}_{/\mathscr{R}'} \Rightarrow \vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r \Rightarrow \frac{d}{dt}\vec{V}_a = \frac{d}{dt}\vec{V}_e + \frac{d}{dt}\vec{V}_r \Rightarrow \boxed{\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r}$$

$\mathscr{R}$ étant galiléen: $\sum \vec{F} = m\vec{a}_a = m\left(\vec{a}_e + \vec{a}_r\right)$. Si $a_e \neq 0 \Rightarrow \sum \vec{F} \neq m\vec{a}_r$ ($\mathscr{R}'$ n'est pas galiléen)

- $\mathscr{R}'$ n'est galiléen que si $\vec{a}_e = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}_e = cte \Rightarrow \mathscr{R}'$ est animé d'un mouvement rectiligne uniforme par rapport à $\mathscr{R}$
- Si $\mathscr{R}'$ est accéléré ou retardé par rapport à $\mathscr{R}$: $\vec{a}_e \neq \vec{0} \Rightarrow \mathscr{R}'$ n'est pas galiléen.
- Si $\mathscr{R}'$ est animé d'un mouvement de rotation par rapport à $\mathscr{R}$: $\vec{a}_e \neq \vec{0} \Rightarrow \mathscr{R}'$ n'est pas galiléen.

3. MOUVEMENT DE TRANSLATION ACCELERE OU RETARDE

Soit un mobile M de masse m animé d'un mouvement rectiligne uniformément varié d'accélération *a* par rapport au référentiel $\mathscr{R}$.

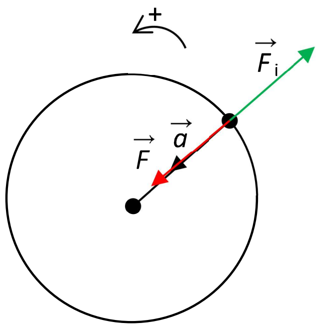
Le TCI dans $\mathscr{R}$: $\vec{F} = \sum \vec{F} = m\,\vec{a}$

Par rapport au référentiel $\mathscr{R}$' lié au mobile: $\mathscr{R}$' n'est pas galiléen, le TCI ne s'applique pas mais le mobile est au repos par rapport à ce référentiel donc $\vec{F} + \vec{F}_i = \vec{0}$ d'où $\boxed{\vec{F}_i = -\,m\vec{a}}$

4. Mouvement de rotation uniforme

Considérons le mobile M animé d'un mouvement circulaire uniforme par rapport à un référentiel galiléen $\mathscr{R}$ le TCI s'écrit: $\vec{F} = \sum \vec{F} = mR\omega^2\vec{N}$ ($\vec{F}$ est centripète)

Par rapport à $\mathscr{R}$' lié au mobile: $\vec{F} + \vec{F}_i = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_i = -\vec{F} \Rightarrow$ $\boxed{\vec{F}_i = -mR\omega^2\vec{N}}$ ($\vec{F}_i$ est centrifuge)



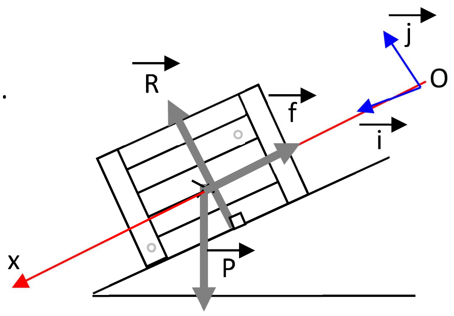
Applications des bases de la dynamique

I. Mouvements rectilignes

1. Solide glissant sur un plan incline

a. Exercice

Un solide de masse m glisse sans vitesse initiale sur un plan incliné non lisse d'un angle α sur l'horizontale. En supposant que le solide est animé d'un mouvement de translation et que les forces qui lui sont appliquées sont constantes.



1) Établir l'expression de l'accélération
   - en appliquant le théorème du centre d'inertie
   - en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.
2) Donner les équations horaires sachant qu'à t=0, $x_0=0$.

b. Résolution

Système: le solide de masse m

Référentiel: référentiel terrestre

Bilan des forces: $\vec{P}$, $\vec{R}$ et $\vec{f}$

1) Détermination de l'accélération
   - avec le théorème du centre d'inertie: $\vec{P}+\vec{f}+\vec{R}=m\,\vec{a}$

Sur (ox): $P\sin\alpha - f = ma \;\Rightarrow\; \boxed{a=g\sin\alpha-\frac{f}{m}}$

   - avec le théorème de l'énergie cinétique

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre t_0 et t. Soit x la distance parcourue à l'instant t:

$$E_C(t)-E_C(t_0)=W(\vec{P})+W(\vec{R})+W(\vec{f}) \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgx\sin\alpha - fx \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\frac{d}{dt}\left[(mg\sin\alpha-f)x\right] \Rightarrow$$

$$mv\frac{dv}{dt}=(mg.\sin\alpha-f)\frac{dx}{dt} \Rightarrow mva=(mg.\sin\alpha-f)v \Rightarrow \boxed{a=g\sin\alpha-\frac{f}{m}}$$ obtenu en simplifiant par v.

2) Équation horaire du mouvement

$a=g.\sin\alpha-\frac{f}{m}=cte \Rightarrow v=at+v_0$ or à t=0, $v=v_0=0 \Rightarrow v=\left(g\sin\alpha-\frac{f}{m}\right)t$

$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ avec $v_0=0$ et $x_0=0$ d'où la relation: $\boxed{x=\frac{1}{2}\left(g\sin\alpha-\frac{f}{m}\right)t^2}$

Remarque: lorsque le mouvement s'effectue sans frottement (f=0), on peut remarquer que $a=g\sin\alpha$.

2. SYSTEMES ARTICULES

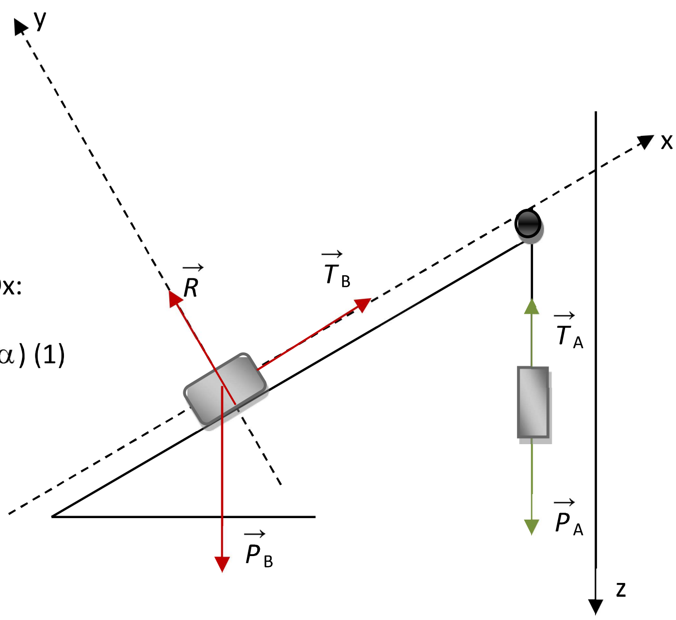
a. Exercice

Un corps A de masse m_A=70 g entraine dans sa chute un corps B de masse m_B = 80g qui glisse sur un plan incliné d'un angle α=30°. A et B sont reliés par l'intermédiaire d'un fil inextensible qui passe par la gorge d'une poulie dont-on néglige la masse.

Calculer en négligeant tous les frottements, l'accélération et la tension du fil (g=10 m/s²)

b. Résolution

*système: corps B



*référentiel: terrestre

* Bilan des forces: $\vec{P}_B$, $\vec{R}$ et $\vec{T}_B$;

*TCI: $\vec{P}_B + \vec{R} + \vec{T}_B = m_B\,\vec{a}$

Projetons la relation vectorielle sur l'axe Ox:

$-P_B\sin\alpha + T_B = m_B a \Rightarrow T_B = m_B(a + g\sin\alpha)$ (1)

*système: corps A

*référentiel: terrestre

* Bilan des forces: $\vec{P}_A$, et $\vec{T}_A$

*TCI: $\vec{P}_A + \vec{T}_A = m_A\,\vec{a}$

(Oz): $P_A - T_A = m_A a \Rightarrow T_A = m_A(g-a)$ (2)

La tension du fil inextensible est partout la même: $T_A = T_B$

$m_A(g-a)$=$m_B(a+g\sin\alpha) \Rightarrow \boxed{a = g\dfrac{m_A - m_B\sin\alpha}{m_A + m_B}} \Rightarrow$ AN: a=2 m/s²

la tension des fils: $T_B = T_A = m_A(g-a) = 0{,}56$ N

3. MOUVEMENT D'UNE PARTICULE DANS LE CHAMP DE PESANTEUR: CAS OU $\vec{G} /\!/ \vec{V}_0$

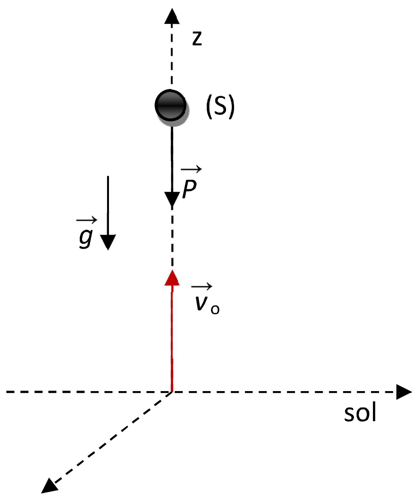
a. Étude dynamique

Un projectile de masse m est lancé à partir d'un point O verticalement vers le haut avec une vitesse $\vec{v}_o$ à l'instant de date t=0.

*système: projectile de masse m

*Référentiel: terrestre supposé galiléen *bilan des forces: $\vec{P}$ et $\vec{R}$(résistance de l'air négligeable)

*TCI: $\vec{P}$=m $\vec{a}$ $\Rightarrow$ m $\vec{g}$=m $\vec{g}$ $\Rightarrow$ $\vec{a}$=$\vec{g}$



$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g \end{cases} \Rightarrow \vec{v}\begin{cases} v_x = v_{0x} = 0 \\ v_y = v_{0y} = 0 \\ v_z = -gt + v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 = 0 \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \end{cases}$$

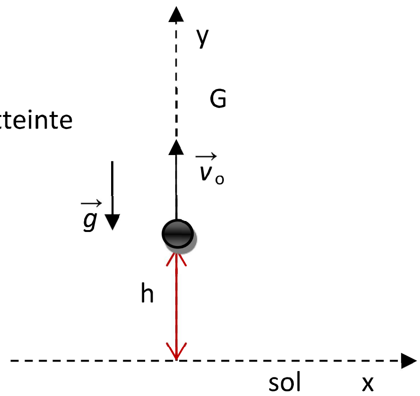
$\boxed{v = -gt + v_0}$ et $\boxed{z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t}$

Remarque:

Si v_0 est initialement dirigé vers le haut, le mouvement est d'abord rectiligne uniformément décéléré. Au point le plus élevé $v = 0$, ensuite le mouvement est rectiligne uniformément accéléré vers le bas.

b. Application

Un gymnaste quitte la surface élastique d'un trampoline avec une vitesse verticale de 30 km/h. Son centre d'inertie est à 2m du sol. Le gymnaste est assimilé à un solide. On suppose que la chute est libre.



1) Établir les équations horaires dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
2) Calculer la durée de la montée et la hauteur maximale atteinte par le centre d'inertie du sauteur.

*système: gymnaste

*Référentiel: terrestre

*BF: $\vec{P}$; TCI: $\vec{P}$= m $\vec{a}$

1) équations horaires: x=0; $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h = -4{,}9t^2 + 8{,}33t + 2$

2) durée montée: v_y=0 $\Rightarrow$ $t_1 = \frac{v_0}{g} = 0{,}85\,s$; hauteur max H=y($t_1$)=5,5m

4. MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGEE DANS UN CHAMP $\vec{E}$ UNIFORME: CAS OU $\vec{E} /\!/ \vec{V_0}$

*système: particule chargée

*référentiel: terrestre

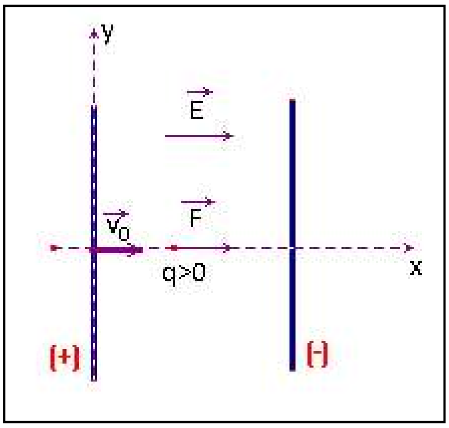
*BF: $\vec{F}$ et $\vec{P}$(négligeable devant $\vec{F}$); TCI: $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$

$$\vec{a}\begin{cases}a_x=\dfrac{q}{m}E\\ a_y=0\end{cases}\Rightarrow \vec{v}\begin{cases}v_x=\dfrac{qE}{m}t+v_0\\ v_y=0\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{OM}\begin{cases}x=\dfrac{qE}{m}t^2+v_0t\\ y=0\end{cases}$$

C'est un mouvement rectiligne uniformément varié

$$\Delta Ec=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=qU\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2qU}{m}+v_0^2}$$

L a particule n'est pas déviée, le mouvement est accéléré si q>0 et décéléré (voire freiné) si q<0.



5. Mouvement d'une bille dans un fluide

Abandonnons, à vitesse nulle, une bille dans un fluide.

a) bilan des forces

- Le poids $\vec{P}$=m $\vec{g}$ de la bille (il est vertical et dirigé vers le bas)
- Les forces de frottement fluide

Pour des objets petits, dont la vitesse par rapport au fluide est faible, on parle d'écoulement laminaire du fluide autour de l'objet et de force de frottement laminaire (absence de turbulence). La valeur de la force de frottement est proportionnelle à la valeur de la vitesse de l'objet.

$$\vec{f}=-h\,\vec{v} \text{ ou } \vec{f}=-6\pi\eta r\,\vec{v} \text{ avec } h=6\pi\eta r$$

$\vec{f}$: force de frottement laminaire;

h: coefficient de frottement fluide laminaire (kg/s) qui dépend à priori de la viscosité du fluide et de ses dimensions.

$\vec{v}$: vitesse de l'objet.

- La poussée d'Archimède.

Elle correspond à l'ensemble des forces de pression exercées par le fluide sur l'objet qui y est immergé. On peut énoncer le principe d'Archimède:

Tout corps plongé dans un liquide subit de la part de celui-ci une force opposée au poids du liquide déplacé par ce corps.

On notera $\vec{\Pi}$ la poussée d'Archimède, son expression est: $\boxed{\vec{\Pi}=-\rho_{fluide}V_{déplacé}\vec{g}}$, où ρ_{fluide} représente la masse volumique du fluide (kg/m^3) et $V_{déplacé}$ le volume de la partie de l'objet immergé dans le liquide.

Remarque: la poussée d'Archimède existe dans tout fluide. Par conséquent, elle existe également dans l'air (souvent négligeable).

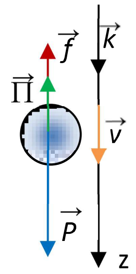
b) Équation différentielle du mouvement de chute

On connait à présent toutes les forces qui s'exercent sur l'objet en chute verticale:

- Son poids $\vec{p}$=m $\vec{g}$,
- La poussée d'Archimède: $\vec{\Pi}$=-ρ_{fluide} V_{bille} $\vec{g}$ = =-m' $\vec{g}$, où m' est la masse de fluide de même volume que l'objet réel.
- La force de frottement fluide, supposée ici laminaire $\vec{f}$=-h $\vec{v}$

Appliquons la deuxième loi de Newton: m $\vec{a}$ = m $\vec{g}$ - m' $\vec{g}$ - h $\vec{v}$ $\Rightarrow$ $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = (m-m')\vec{g} - h\vec{v}$

Si on note α la quantité $\dfrac{m-m'}{m}$, alors on obtient: $\boxed{\dfrac{d\vec{v}}{dt} + \dfrac{h}{m}\vec{v} = \alpha\vec{g}}$ (1): cette équation est l'équation différentielle du mouvement.



Suivant $\vec{k}$: $\boxed{\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{h}{m}v = \alpha g}$ (2)

c) vitesse limite

Lorsque la vitesse limite est atteinte, l'accélération est nulle puisque la vitesse reste constante. En imposant $\dfrac{dv}{dt} = 0$ dans l'équation différentielle (2), on obtient:

$$\boxed{v_{\lim} = \alpha g\frac{m}{h}}$$

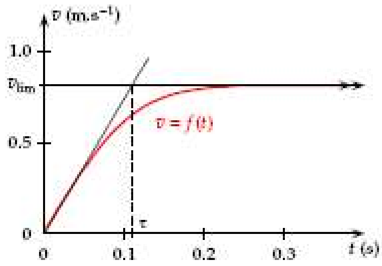
Par une méthode d'intégration on pourra monter que: $\boxed{v = v_{\lim}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$ avec $\tau = \dfrac{m}{h}$

d) durée du régime initiale (avant le régime permanent)

On définit le temps caractéristique τ associé à une chute verticale comme étant la date qui correspond, pour la courbe v=f(t), au point d'intersection de la tangente à l'origine (v=0) et à l'asymptote (v_{lim})

On lâche l'objet sans vitesse, soit v=0. Pour v=0 à t=0, l'équation différentielle (2) donne: $\dfrac{dv}{dt} = \alpha g$. Cela signifie que l'équation de la tangente à l'origine est $w(t) = \alpha g t$. La droite tangente à l'origine prend la valeur v_{lim} pour $t = \dfrac{m}{h}$. On a donc $\boxed{\tau = \dfrac{m}{h}}$, temps caractéristique de la chute.

La durée du régime initial est voisine de τ.



II. Mouvement paraboliques

1. Mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur: cas ou $\vec{v}_0 \not\parallel \vec{g}$

Un projectile, de masse m est lancé dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ avec une vitesse initiale de lancement $\vec{v}_o$. Ce vecteur fait avec l'horizontale un angle aigu α appelé angle de tir.

a. *Étude dynamique*

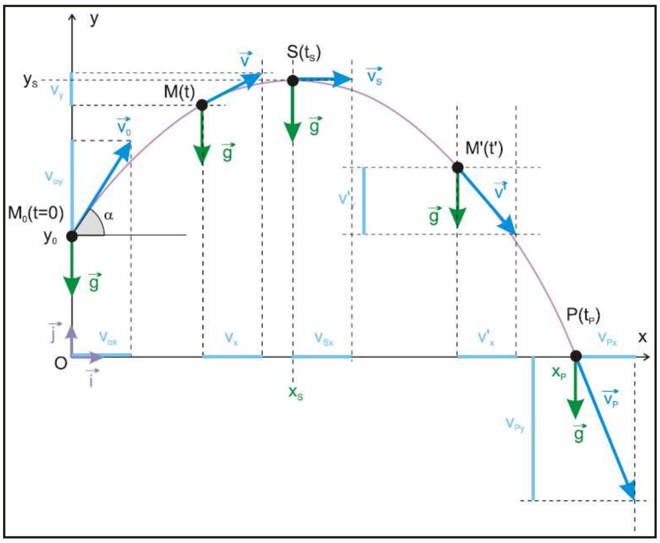
Le système est le projectile de masse m.

Le référentiel est celui de la Terre.

L'origine du repère cartésien ne coïncide pas forcément avec le point de lancement du projectile.

Bilan des forces: $\vec{p}$; TCI: $\vec{P} = m\vec{g} \Rightarrow m\vec{a} = m\vec{g}$ $\boxed{\Rightarrow \vec{a} = \vec{g}}$

Conclusion: L'accélération est un vecteur constant dont la norme est indépendante de la masse du projectile. Sa norme est égale à l'intensité de la pesanteur.



$$\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \\ a_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}\begin{cases} v_x = v_0\cos\alpha \\ v_y = -gt + v_0\sin\alpha \\ v_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM}\begin{cases} x = v_0\cos\alpha.t \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha.t + y_0 \\ 0 \end{cases}$$

Remarque

z=0, le mouvement est plan et s'effectue dans le plan XOY. La projection du mouvement sur l'axe Ox est un mouvement uniforme alors que la projection du mouvement sur l'axe Oy est un mouvement uniformément varié.

b. Équation de la trajectoire

$$x = v_0\cos\alpha . t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + x.\tan\alpha + y_0}$$ équation d'une parabole

c. Portée horizontale

La portée est l'abscisse d'un point P d'ordonnée y=0 (si y_0=0, P est le point d'impact). Pour déterminer x_p, on résout l'équation y=0. On traitera pour simplifier le cas où y_0=0.

$$-\frac{1}{2}g\frac{x_p^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + x_p\tan\alpha + y_0 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}g\frac{x_p}{v_0^2\cos^2\alpha} + \tan\alpha + y_0 = 0$$

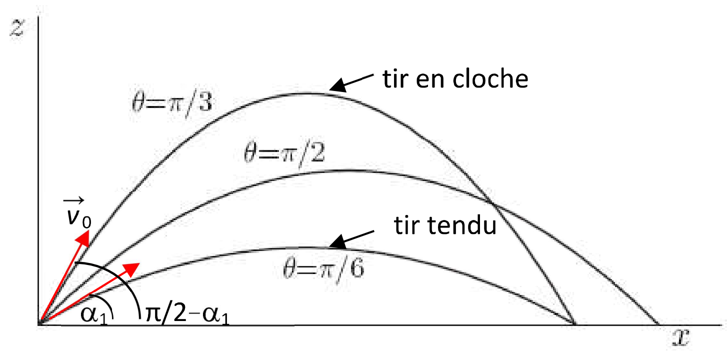
$$\Rightarrow x_p = 2v_0^2\cos^2\alpha\frac{\sin\alpha}{g\cos\alpha} = v_0^2\frac{2\cos\alpha.\sin\alpha}{g} \Rightarrow x_p = \frac{v_0^2\sin2\alpha}{g}$$

*Pour une vitesse $\vec{v}_0$ donnée, la portée est maximale lorsque sin2α=1 c'est-à-dire $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ soit

$\alpha = \frac{\pi}{4}$(45°) d'où $\boxed{d_{max} = \frac{v_0^2}{g}}$

*pour $x_p < d_{max}$, l'équation $x_p = \frac{v_0^2\sin2\alpha}{g}$ admet deux solutions α_1 et α_2 telles que:

$$2\alpha_1 = \alpha \text{ ou } 2\alpha_2 = \pi - 2\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = \alpha \text{ et } \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha}$$



Conclusion : Pour une valeur donnée de v_0, une même portée x_P est atteinte pour deux angles de tir différents (si α est différent de 0°, 45° et 90°). Ces deux angles sont complémentaires.

d. Flèche

La flèche est la hauteur maximale atteinte par le projectile. Au sommet de la trajectoire $v_y = 0$

$$-gt + v_0\sin\alpha = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0\sin\alpha}{g}$$

$$y_F = y(t) = -\frac{1}{2} - g\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right)^2 + v_0\sin\alpha\,\frac{\left(v_0\sin\alpha\right)}{g} \Rightarrow \boxed{y_F = \frac{{v_0}^2\sin^2\alpha}{2g}}$$

$$x_F = v_0\cos\alpha\, t = v_0\cos\alpha \times \frac{v_0\sin\alpha}{g} \Rightarrow \boxed{x_F = \frac{{v_0}^2\sin2\alpha}{2g}}$$

e. Parabole de sûreté

Comme $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\tan^2\alpha$ on obtient aussi l'équation de la trajectoire:

$$y = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{{v_0}^2}(1+\tan^2\alpha) + x\tan\alpha$$

La trajectoire devant contenir le point P de coordonnées x_p et y_P, la valeur de α sera obtenu en résolvant l'équation: $-\frac{1}{2}g\frac{x_{P^2}}{{v_0}^2}\tan^2\alpha + x_P\tan\alpha - \left(\frac{1}{2}g\frac{{x_P}^2}{{v_0}^2} + y_P\right) = 0$ (1)

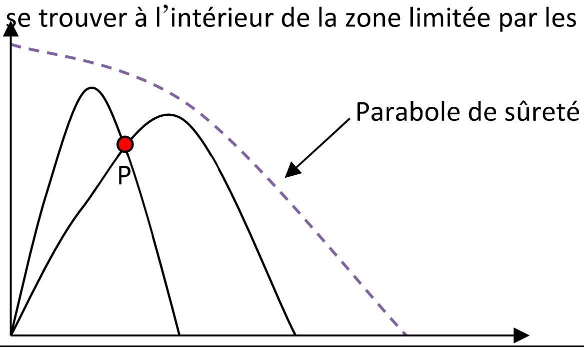
Cette équation du second degré en $\tan\alpha$ a deux solutions si son discriminant est positif. A ces deux solutions correspondent deux réglages possibles du tir.

La vitesse v_0 imposée, le tir ne peut atteindre un point P donné que si l'équation (1) admet des racines. Calculons son discriminant

$$\Delta = {x_P}^2 - \frac{g^2}{{v_0}^4}{x_P}^4 - 2y_P\frac{g}{{v_0}^2}{x_P}^2 \geqslant 0$$

Comme ${x_P}^2 > 0$, on obtient: $y_p \leqslant -{x_P}^2\frac{g}{2{v_0}^2} + \frac{{v_0}^2}{2g}$

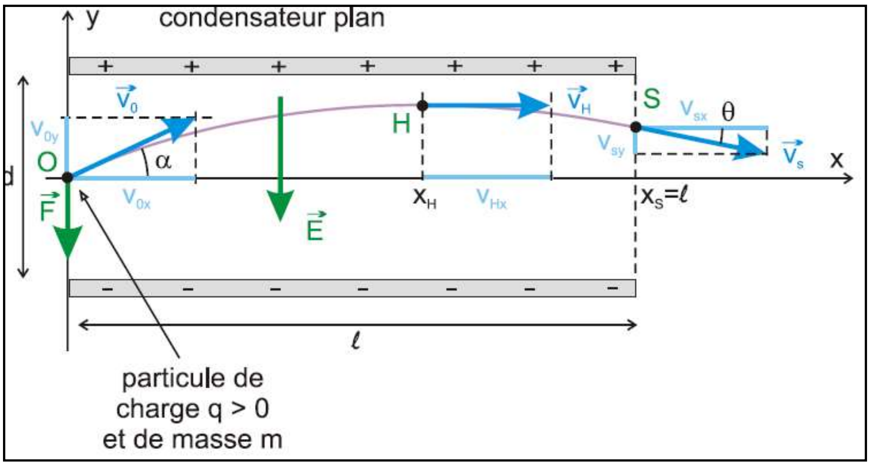
La parabole d'équation $y = -x^2\frac{g}{2{v_0}^2} + \frac{{v_0}^2}{2g}$ s'épare l'espace en deux régions. Les points susceptibles d'être atteints par le tir doivent se trouver à l'intérieur de la zone limitée par les axes et cette parabole, appelée de sûreté.



2. MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGEE DANS E UNIFORME:

a. Cas où $\vec{v}_0 \nparallel \vec{E}$

A l'instant initial, une particule de masse m et de charge électrique q > 0 pénètre avec la vitesse $\vec{v}_0$ dans l'espace compris entre les armatures d'un condensateur plan, auxquelles on a appliqué une tension constante U = $V_+ - V_- > 0$. Entre ces plaques s'établit un champ électrique uniforme $\vec{E}$ (voir schéma) :



*système: particule de masse m et de charge positive q

* référentiel: terrestre

*BF: $\vec{F}$ et $\vec{P}$(négligeable devant $\vec{F}$); TCI: $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \dfrac{q}{m}\vec{E}$

$$\vec{a}\begin{cases}0\\ -\dfrac{qE}{m}\\ 0\end{cases} \Rightarrow \vec{v}\begin{cases}v_0\cos\alpha\\ -\dfrac{qE}{m}t + v_0\sin\alpha\\ 0\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OM}\begin{cases}v_0\cos\alpha.t\\ -\dfrac{qE}{2m}t^2 + v_0\sin\alpha.t\\ 0\end{cases}$$

z = 0 le mouvement s'effectue dans le plan XOY

$x = v_0\cos\alpha.t \Rightarrow t = \dfrac{x}{v_0\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{y = -\dfrac{qE}{2mv_0^2\cos^1\alpha}x^2 + x\tan\alpha}$ avec $E = \dfrac{U}{d}$: la trajectoire est une parabole.

Particule au point de sortie S du champ : position, date, vitesse

* Abscisse du point S: $x_S = \ell \Rightarrow y_S = -\dfrac{qE\ell^2}{2mv_0^2\cos^2\alpha} + \tan\alpha.\ell$

*La date t_S de sortie du champ: $t_s = \dfrac{\ell}{v_0\cos\alpha}$

* vitesse $\vec{v}_s$ de la charge à la sortie du champ : $v_{sx} = v_0\cos\alpha$ et $v_{sy} = -\dfrac{qE\ell}{mv_0^2\cos\alpha} + v_0\sin\alpha$

La direction de $\vec{v}_s$ par rapport à l'axe Ox: $\tan\theta = \dfrac{v_{sy}}{v_{sx}}$

Position du point H le plus haut:

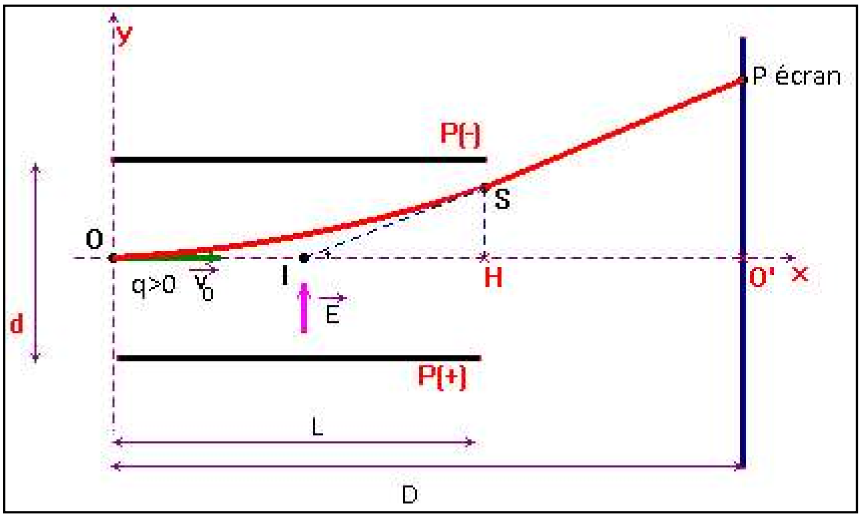
En H, point le plus haut, la coordonnée verticale du vecteur vitesse est nulle: $v_y(H) = 0$

$\Rightarrow -\dfrac{qE}{m}t_H + v_0\sin\alpha = 0 \Rightarrow t_H = v_0\dfrac{m\sin\alpha}{qE} \Rightarrow \boxed{y_H = -\dfrac{1}{2}\dfrac{qE}{m}t_H^2 + v_0\sin\alpha . t_H}$

Lorsqu'on dispose de valeurs numériques, le calcul est en général simple!

b. Cas où $\vec{v}_0 \perp \vec{E}$

Considérons une particule chargée q>0 en mouvement dans un champ électrique $\vec{E}$ uniforme vertical dirigé vers le haut (voir figure).



Si $\vec{v}_0 \perp \vec{E}$ alors α=0 $\Rightarrow$ $y = \dfrac{qEx^2}{2mv_0^2}$: parabole d'axe Oy. (Remarquer dans cet exemple le sens de $\vec{E}$)

Condition pour que la particule émerge du champ $\vec{E}$

Pour x=ℓ alors $y < \dfrac{d}{2}$. Résolvons $y(\ell) < \dfrac{d}{2} \Rightarrow \dfrac{qU\ell^2}{2mdv_0^2} < \dfrac{d}{2} \Rightarrow \boxed{U < \dfrac{md^2v_0^2}{q\ell^2}}$ ou $\boxed{v_0 > \dfrac{\ell}{d}\sqrt{\dfrac{qU}{m}}}$

Déviation électrique

La déviation électrique est l'ordonnée du point d'impact de la particule sur l'écran. $\overline{O'P}$ est la déviation électrique. A la sortie du champ électrique $\vec{F}=\vec{0}$: le mouvement est rectiligne uniforme suivant la tangente à la trajectoire (arc de parabole) au point S.

- **RAPPEL MATHEMATIQUE:**

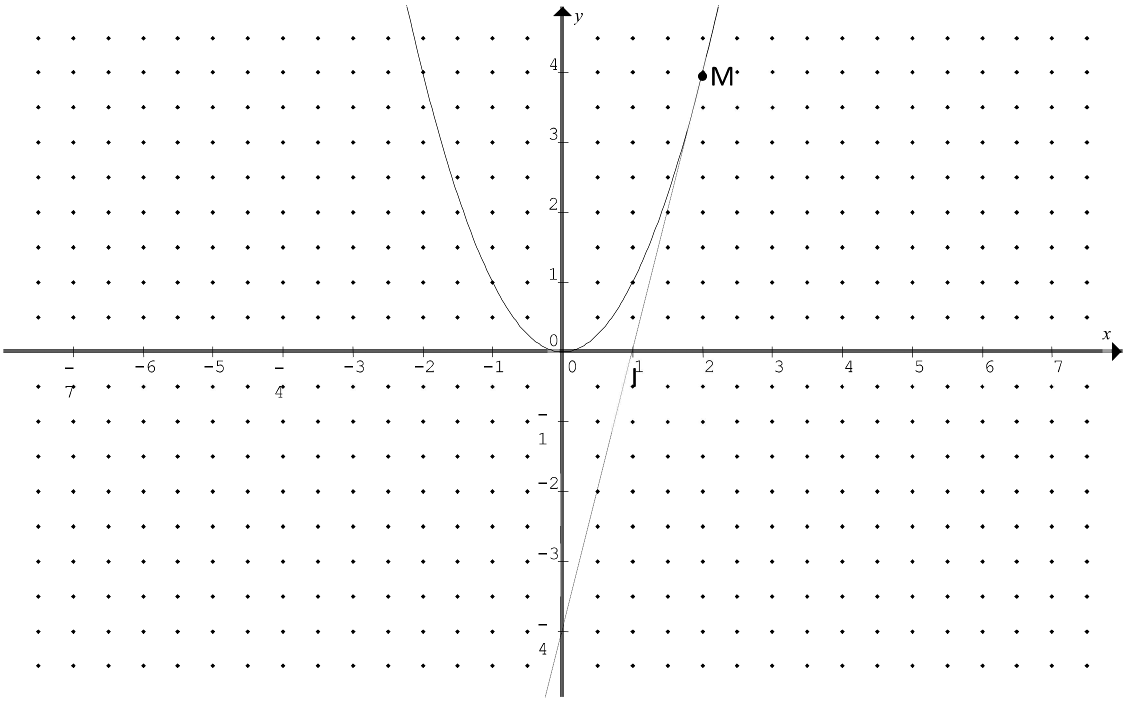
L'équation d'une parabole d'axe OY et de sommet O est de la forme: $y=ax^2$ (où a est une constante).

Déterminons l'équation de la tangente à la parabole au point $M(x_M\,;\,y_M)$: Y=Ax+B

$$A=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_M}=2ax_M \Rightarrow Y=2axx_M+B;\ y_M=Y_M \Rightarrow ax_M{}^2=2ax_M{}^2+B \Rightarrow B=-ax_M{}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{Y=2ax_Mx-ax_M{}^2}$$

$$Y=0 \Rightarrow 2ax_Mx-ax_M{}^2=0 \Rightarrow 2ax_M\left(x-\frac{x_M}{2}\right)=0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{x_M}{2}}$$



La tangente d'une parabole en un point M coupe l'axe des abscisses en un point I tel que

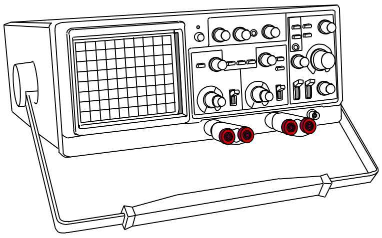
$$x_I=\frac{x_M}{2}$$

La tangente en la trajectoire au point de sortie S d'abscisse ℓ coupe l'axe des abscisses au point I milieu de OH soit $x_I=\frac{\ell}{2}$

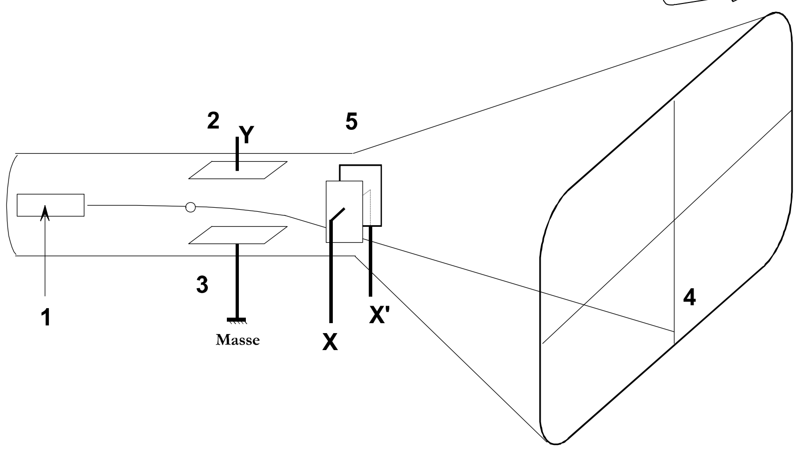
$$\tan\alpha=\frac{SH}{IH}=\frac{\overline{O'P}}{\overline{IO'}}\Rightarrow\frac{y(\ell)}{\frac{\ell}{2}}=\frac{\overline{O'P}}{D-\frac{\ell}{2}}\Rightarrow\overline{O'P}=\frac{2y(\ell)}{\ell}\left(D-\frac{\ell}{2}\right)=2qE\ell^2\frac{D-\frac{\ell}{2}}{2\ell m v_0{}^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{O'P} = \frac{q}{m} \times \frac{E\ell}{{v_0}^2}\left(D - \frac{\ell}{2}\right)}$$

Remarque: cette expression peut être retrouvée en utilisant les composantes de la vitesse au point S: $\tan\alpha = \frac{v_{ys}}{v_{xs}} = \frac{\overline{O'P}}{IO'}$). La mesure de la déflexion électrique permet aussi de déterminer la charge massique $\frac{q}{m}$.

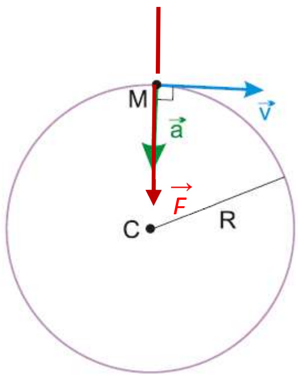


L'oscilloscope utilise le principe de la déviation des particules.



III. Mouvements circulaires uniformes

1. Étude dynamique



Considérons un mobile M qui décrit un mouvement circulaire uniforme dans un référentiel galiléen.

*système: mobile M

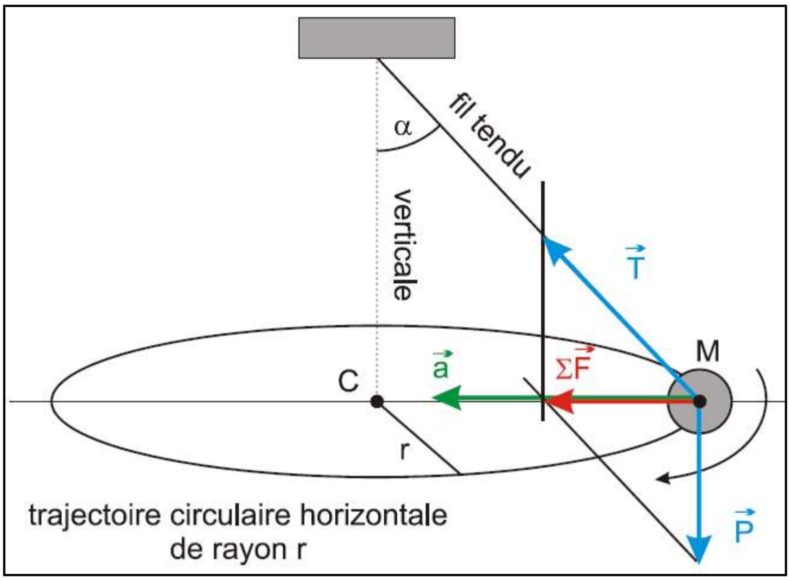
*Référentiel: terrestre

*TCI: $\vec{F} = \sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F} = m\left(\vec{a_T} + \vec{a_N}\right) = m\,\frac{dv}{dt}\,\vec{T} + m\,\frac{v^2}{R}\,\vec{N}$

$\frac{dv}{dt} = 0$ car le mouvement est uniforme: $\vec{F} = \frac{mv^2}{R}\vec{N}$ or $v = R\omega \Rightarrow \boxed{\vec{F} = mR\omega^2\vec{N}}$

2. Pendule conique

Si on fait tourner lentement un moteur fixé à l'extrémité supérieure du pendule, on observe que pour une certaine valeur de la vitesse angulaire ω, le pendule s'écarte de la tige et la sphère décrit un cercle horizontal. L'angle α que fait le fil du pendule avec la verticale dépend de ω.



$\vec{P}+\vec{T}=m\,\vec{a}$; $\tan\alpha = \frac{F}{P} = \frac{mr\omega^2}{mg} = \frac{r\omega^2}{g}$ avec $\sin\alpha = \frac{r}{\ell} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\ell\sin\alpha\,\omega^2}{g} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{g}{\ell\omega^2}$. Lorsque ω augmente α augmente: $\cos\alpha \leqslant 1 \Rightarrow \frac{g}{\ell\omega^2} \leqslant 1 \Rightarrow \boxed{\omega \geqslant \sqrt{\frac{g}{\ell}} = \omega_0}$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ est la vitesse angulaire limite que ω doit dépasser pour que le pendule s'écarte de sa position initiale.

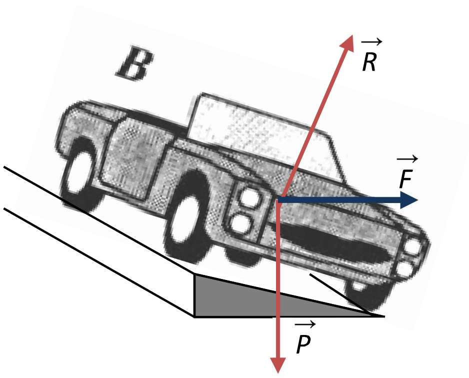
3. Relevement des virages

Considérons une voiture de masse m qui effectue un virage à la vitesse constante sur une route horizontale. Lorsque la voiture effectue le virage le mouvement est circulaire uniforme.

$$\vec{F}=\vec{P}+\vec{R}=m\,\vec{a} = \frac{mv^2}{r}\,\vec{n}$$

$\vec{F}$ est situé dans un plan horizontal et dirigé vers le centre de la trajectoire ($\vec{F}$ est centripète); $\vec{R}$ est nécessairement incliné d'un angle α par rapport à la verticale. Pour cela on doit relever la route en inclinant les parties courbes de la route de l'extérieur vers l'intérieur.

$$\tan\alpha = \frac{F}{P} = \frac{\frac{mv^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{rg} \Rightarrow \boxed{\tan\alpha = \frac{v^2}{rg}}$$



IV. Mouvement circulaire uniformément varié (S1)

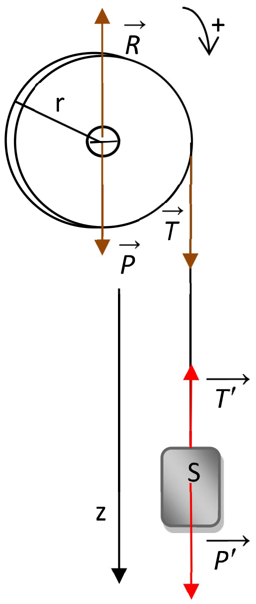
1. Étude dynamique

Soit un mobile de masse m, animé d'un mouvement de rotation autour d'un axe Δ.

Système: mobile de masse m; référentiel: référentiel terrestre; TAA: $\sum \vec{F} = J_{\Delta}\theta''$

2. Application

Une corde inextensible enroulée sur un treuil soutient un solide S de masse *m*. Le treuil assimilable à un cylindre homogène de masse *M* et de rayon *r* et maintenu en équilibre grâce à une force motrice $\vec{F}$ appliquée sur la manivelle. A un instant t=0 on enlève la manivelle ($\vec{F}=\vec{0}$); quelle est la nature du mouvement du treuil à partir de cet instant?



Système: treuil; Réf: référentiel terrestre; forces: $\vec{P}$, $\vec{R}$, $\vec{T}$

TAA: $\mathcal{M}(\vec{P}) + \mathcal{M}(\vec{R}) + \mathcal{M}(\vec{T}) = J\ddot{\theta}$

$\mathcal{M}(\vec{P})$=0; $\mathcal{M}(\vec{R})$=0; $\mathcal{M}(\vec{T})$=Tr $\Rightarrow Tr = J\ddot{\theta} \Rightarrow$ $\boxed{T = \frac{J}{r}\theta''}$ (1)

Système: solide; forces: $\vec{P}$' et $\vec{T}$'; TCI: $\vec{P'} + \vec{T'} = m\vec{a}$

Sur zz': $mg - T' = ma \Rightarrow$ $\boxed{T' = m(g-a)}$ (2)

La corde est inextensible: $T = T' \Rightarrow$ $\boxed{\frac{J\theta''}{r} = m(g-a)}$ (3)

La corde s'enroule sur le treuil. Si ω est la vitesse angulaire du treuil à un instant t alors: $v_S = r\omega$

$$a = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\theta'' \Rightarrow \boxed{a = r\theta''}$$

$$(3) \Rightarrow J\theta'' = mg - mr\theta'' \Rightarrow \theta''\left(\frac{J}{r} + mr\right) = mg \Rightarrow \boxed{\theta'' = \frac{mg}{\frac{J}{r} + mr} = \frac{mrg}{J + mr^2}}$$

θ'' est une constante: le mouvement est circulaire uniformément varié.

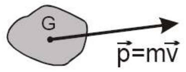
$$J = \frac{1}{2}Mr^2 \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{2mg}{r(M+2m)}$$

$\boxed{a = r\theta'' = \frac{2mg}{M+2m}}$ =cte $\Rightarrow$ le mouvement de S est rectiligne uniformément varié.

<u>Application</u>: réprendre l'application précédente en appliquant le théoreme de l'énergie cinétique appliqué au système {cylindre+solide (S)}

V. Conservation de la quantité de mouvement

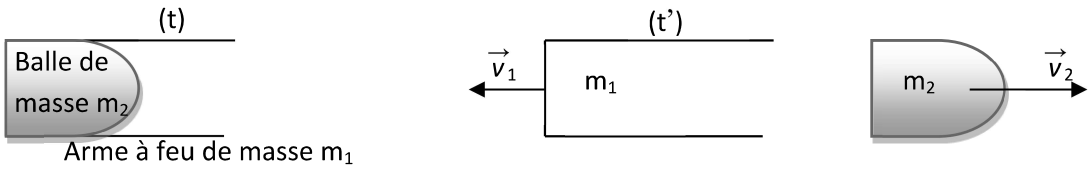
RFD: $\sum \vec{F} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$. Si $\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = \overrightarrow{cte}$



$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow$ le système est isolé ou système pseudo-isolé $\Rightarrow \vec{v}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\overrightarrow{cte}$.

1. Application au recul d'une arme a feu

Considérons le système formé par une arme à feu et un projectile.



Système: arme + balle; $\vec{P}+\vec{R}=\vec{0} \Rightarrow$ le système est pseudo-isolé $\Rightarrow \vec{P} = \overrightarrow{cte}$

Avant le tir: (t): $\vec{P}=\vec{0}$

Après le tir (t'): $\overrightarrow{P'} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$

Conservation de la quantité de mouvement: $\vec{P} = \overrightarrow{P'}$ d'où $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_1 = -\dfrac{m_2}{m_1}\vec{v}_2}$

$\vec{v}_1$ est la vitesse de recul de l'arme à feu.

2. Étude des chocs

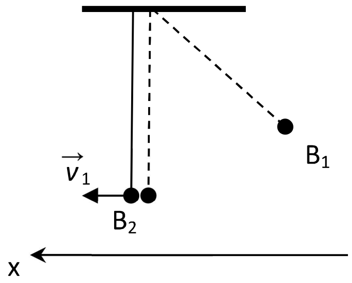
Il y a choc entre deux systèmes lorsque leurs vitesses sont brusquement modifiées par contact pendant une faible durée.

a) Choc élastique

Un choc est élastique si après le choc les corps considérés ne subissent aucune déformation. A l'issue d'un choc élastique il y a conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique.

<u>Exemple</u>

Considérons le choc entre deux boules B_1 et B_2 de deux pendules simples de même longueur et très proches. On écarte la boule B_1 d'un angle θ et on la libère sans vitesse initiale. A l'instant du choc avec B_2 sa vitesse $\vec{v}_1$ est horizontale. Déterminer en fonction de v_1 les vitesses après le choc.



Supposons que le choc est élastique.

	Quantité de mouvement		Énergie cinétique	
	B_1	B_2	B_1	B_2
Avant le choc	$\vec{P}_1 = m_1\vec{v}_1$	$\vec{P}_2=\vec{0}$	$Ec_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2$	$Ec_2 = 0$
Après le choc	$\vec{P'}_1 = m_1\vec{v'}_1$	$\vec{P'}_2 = m_2\vec{v'}_2$	$E'c_1 = \frac{1}{2}m_1v'^2_1$	$E'c_2 = \frac{1}{2}m_2v'^2_2$

Conservation de la quantité de mouvement pour le système $\{B_1; B_2\}$:

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P'}_1 + \vec{P'}_2 \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + \vec{0} = m_1\vec{v'}_1 + m_2\vec{v'}_2 \Rightarrow \boxed{m_1(\vec{v}_1 - \vec{v'}_1) = m_2\vec{v'}_2} \ (1)$$

Projetons la relation (1) sur l'axe Ox: $\boxed{m_1(v_1 - v'_1) = m_2v'_2}$ (1')

Conservation de l'énergie cinétique:

$$Ec_1 + Ec_2 = E'c_1 + E'c_2 \Rightarrow \frac{1}{2}m_1v_1^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2v'^2_2 \Rightarrow \boxed{m_1(v_1^2 - v'^2_1) = m_2v'^2_2} \ (2)$$

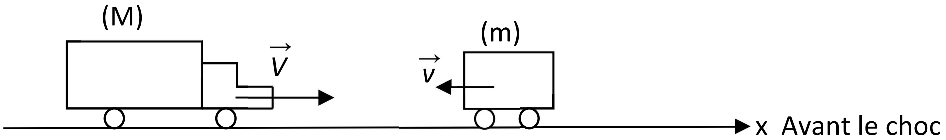
$\frac{2}{1'} \Rightarrow \boxed{v_1 + v'_1 = v'_2}$ (3). En éliminant v'_2 entre (1') et (3) $\Rightarrow$ $\boxed{v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1}$ et $\boxed{v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1}$

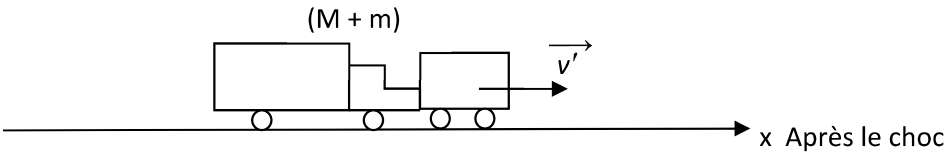
b) Choc mou

C'est un choc à l'issu duquel les corps considérés sont déformés. Il y a conservation de la quantité de mouvement et non conservation de l'énergie cinétique.

Exemple:

Une locomotive de masse M=50t se déplace sur une ligne rectiligne horizontale avec une vitesse V=72 km/h. En sens contraire vient un wagon de masse m=1t avec une vitesse v=30 km/h. La locomotive heurte le wagon et continue à rouler en poussant se dernier. Quelle est leur vitesse commune?





$$M\vec{V} + m\vec{v} = (M+m)\vec{v'}$$

$$\Rightarrow (Ox): MV - mv = (M+m)v'$$

$$\Rightarrow v' = \frac{MV - mv}{M+m} = 19{,}4 \text{ m/s}$$

3. DECOLLAGE D'UNE FUSEE

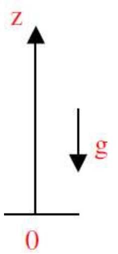
A t=0, une fusée à un étage de masse m_0 décolle.
On définit : le débit massique des gaz brûlés **μ** = dm / dt (μ est supposé constant)
la vitesse d'éjection des gaz par rapport à la fusée **u** > 0 (u est supposé constant)
On suppose que g reste uniforme lors du lancement.

1. En prenant pour système la fusée à l'instant t, exprimer sa masse et sa vitesse aux instants t et t + dt

Le système a une masse variable. On va donc utiliser la $2^{ème}$ loi de Newton sous la forme :
dp / dt = Σ forces extérieures, où p = mv est la quantité de mouvement du système.

A l'instant t, la fusée a : pour masse : $m(t) = m_0 - \mu t$
pour vitesse : v(t)
A l'instant t + dt, la fusée a : pour masse : $m(t+dt) = m(t) - dm$ où $dm = \mu dt$
pour vitesse : $v(t+dt) = v(t) + dv$

2. Exprimer la masse et la vitesse du gaz éjecté entre ces 2 instants



Le gaz éjecté entre ces 2 instants a : pour masse $dm = \mu dt$
pour vitesse $v(t) - u$ (en projection sur l'axe (Oz))

3. En utilisant la $2^{ème}$ loi de Newton pour l'ensemble fusée + gaz, montrer que la vitesse de la fusée vérifie l'équation différentielle suivante : $m\, dv / dt = \mu u - mg$

A l'instant t + dt, la quantité de mouvement du système est donc égale à :
$p + dp = (m - dm)(v + dv) + dm\,(v - u)$
$= mv - vdm + mdv - dmdv + vdm - udm$

Or $dmdv \approx 0$ donc $p + dp = mv + mdv - udm$
$p = mv$ donc $dp = mdv - udm$
En négligeant les frottements de l'air, la seule force extérieure appliquée au système est son poids, donc $dp / dt = -mgdt$
et $m\, dv/dt - u\, dm/dt = -mg$
Avec $\mu = dm/dt$, on obtient bien $m\, dv / dt = \mu u - mg$

4. Définir la force de poussée. A quelle condition la fusée décolle-t-elle ?

La force de poussée est égale à μu : c'est le produit du débit massique des gaz brûlés par la vitesse d'éjection de ces gaz par rapport à la fusée.
La fusée décolle SSI $\mu u > m_0 g$

5. Résoudre cette équation en exprimant v en fonction de t. Déterminer la vitesse maximale. A quelle condition la vitesse peut-elle atteindre des valeurs élevées pour une fusée à un étage ?

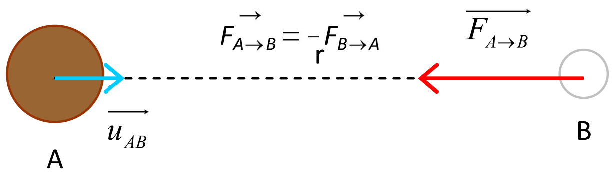
$dv / dt = \mu u / m - g$
d'où $dv = \mu u\, dt / (m_0 - \mu t) - gdt$
En intégrant entre t=0 et t, on obtient : $v = u \ln (m_0 / (m_0 - \mu t)) - gt$
La vitesse maximale est telle que $v_{max} < u \ln (m_0 / m_{vide})$
v_{max} ne peut être grand que si $m_0 / m_{vide} >> 1$.
La fusée à un étage doit emporter beaucoup de carburant pour que sa vitesse soit élevée.

Gravitation universelle

I. Interactions gravitationnelles: loi de Newton

Énoncé (Isaac Newton, 1667) : deux corps ponctuels dont la répartition de masse est sphérique, de masses m_A et m_B, séparés d'une distance r, sont soumis aux forces de gravitation universelles dont l'expression est :

$$\boxed{\vec{F}_{A\to B} = -G\frac{m_A m_B}{r^2}\vec{u}_{AB}}$$



Constante de gravitation universelle : G=6,67259.10^{-11} m^3.kg^{-1}.s^{-2}

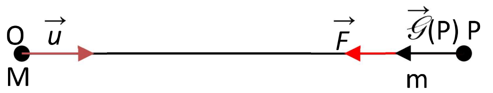
Remarque: Les forces de gravitation s'exercent aussi bien à des distances astronomiques entre les corps célestes qu'à des distances microscopiques entre des atomes, des noyaux etc.…

II. Champ de gravitation

1. Objet ponctuel

Considérons en point O de l'espace, un objet ponctuel de masse M et, en P un objet ponctuel de masse m. La force gravitationnelle exercée par la masse M sur la masse m s'écrit:

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}\vec{u} = m\left(-\frac{GM}{r^2}\right)\vec{u} = m\vec{\mathcal{G}}(P)$$



$\vec{\mathcal{G}}(P)$ est le champ de gravitation créé par la masse M au point P. Il s'exprime en m/s².

$$\boxed{\vec{\mathcal{G}}(P) = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}}$$

Remarque: le champ de gravitation existe même à l'absence de masse m au point P.

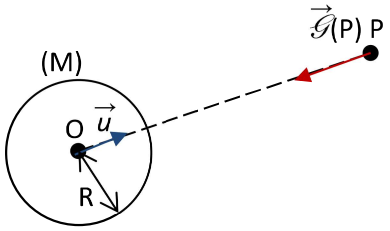
2. Objet de symetrie spherique

- On dit qu'un objet a une répartition sphérique de masse lorsque la masse volumique ρ ne dépend que de la distance r. On admettra que le soleil, les planètes et leurs satellites présentent une telle symétrie.
- Newton a montré qu'une répartition de masse de symétrie sphérique, de centre O et de masse M, crée en un point extérieur P un champ gravitationnel identique à celui d'un corps ponctuel de masse M placé en O.

$$\vec{\mathscr{G}}(P) = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}$$

- A la surface de la Terre: $r = R \Rightarrow \vec{\mathscr{G}}(P) = -\frac{GM}{R^2}\vec{u}$

- pour $r>R \Rightarrow \vec{\mathscr{G}}(P) = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}$



Remarque: cette expression n'est valable qu'à l'extérieur et sur la surface même de la répartition de masse de symétrie sphérique. Ce champ est centripète car il est dirigé vers le centre O.

3. Force gravitationnelle creee par un objet place dans un champ de gravitation

Un objet ponctuel de masse m placé en P dans le champ de gravitation $\vec{\mathscr{G}}(P)$ subisse l'action de la force gravitationnelle tel que:

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{\mathscr{G}}(P)}$$

4. Application

1) Calculer la valeur de la force de gravitation s'exerçant entre le proton et l'électron d'un atome d'hydrogène lorsqu'ils sont séparés de 0,053 µm.
2) Comparer la valeur de cette force au poids du proton à la surface de la Terre. Conclure.

On donne: $m_e = 9{,}1.10^{-31}$ kg et $m_p=1{,}6.10^{-27}$kg

Réponse: 1) $F = \frac{Gm_e m_p}{r^2} = 3{,}6.10^{-47} N$ 2) $P = m_p g = 16{,}79.10^{-27} N$; $\frac{P}{F} = 4{,}6.10^{20}$

$P \ll F$: la force gravitationnelle est négligeable devant le poids pour des distances astronomiques.

5. Champ de gravitation de la Terre

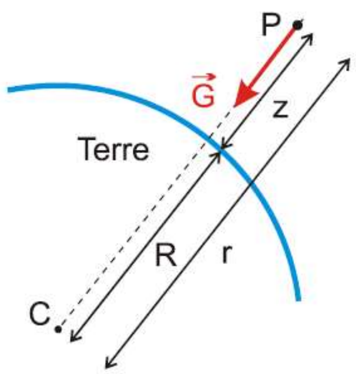
La Terre peut être considérée comme un corps de répartition sphérique de masse, de centre C, de rayon R_T et de masse M_T. En un point P tel que $r > R_T$ le champ créé par la terre est: $\vec{\mathscr{G}}(P) = -\frac{GM}{r^2}\vec{u}$

- A la surface de la Terre $r = R_T$

$\mathscr{G}(0) = g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2} = 9.8$ m/s² $\Rightarrow \boxed{g_0 R_T^2 = GM_T}$ avec

$M_T=5{,}98.10^{24}$ kg et $R_T = 6{,}38.10^6$ m

Le champ de pesanteur est le champ de gravitation créé par la Terre sur sa surface.



- A une altitude h: $r = R_T + h$: $\boxed{\mathscr{G}(P) = g_0 \frac{R_T^2}{(R_T+h)^2}}$

Application: Comparer les valeurs des champs de gravitation créés par la Terre et le Soleil à la surface de la Terre.

Réponse: $\frac{g_0}{\mathcal{G}_s} = M_T \frac{(d-R_T)^2}{MsR_T^{\;2}} = 2{,}7.10^{30} \Rightarrow$ $g_0 >> \mathcal{G}_s$

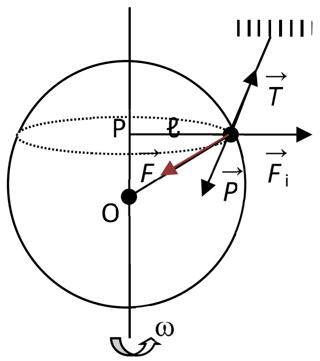
6. Champ de gravitation et champ de pesanteur

On ne fait généralement pas de distinction entre:
la force d'attraction de la Terre : $\vec{F}$ = m$\vec{\mathcal{G}}$ ($\mathcal{G}$: intensité du champ de gravitation) et le poids : $\vec{P}$ = m $\vec{g}$
(g: intensité du champ de pesanteur ou accélération de chute libre)

La détermination de *g* par la chute libre se fait dans un repère terrestre, qui, à cause de la rotation de la Terre, n'est pas galiléen ; il s'en suit qu'en toute rigueur $\vec{\mathcal{G}} \neq \vec{g}$. Mais comme la vitesse angulaire de la Terre est relativement faible, ces deux forces sont pratiquement identiques et on peut écrire en première approximation : $g \approx \mathcal{G}$

A la surface d'une Terre sphérique (masse terrestre = 5,9742 10^{24} kg, rayon terrestre moyen = 6371 km) g_0 = 9,82 N/kg.
A cause de la rotation terrestre et de l'aplatissement de la Terre (rayon polaire = 6357 km, rayon équatorial = 6378 km), g_o varie avec la latitude du lieu : équateur : g_0 = 9,78 m/s^2; Luxembourg : g_0 = 9,81 m/s^2 ; aux pôles g_0 = 9,83 m/s^2 (Unités : m/s^2 ou N/kg).

Il existe une légère différence entre $\vec{F}$ et $\vec{P}$, cette différence provient de la rotation de la Terre sur elle-même.



$\vec{F_i} = -m\ell\omega^2\vec{N}$: ω vitesse angulaire de la rotation de la Terre sur elle-même.

Système: M; référentiel: lié au point M; CE: $\vec{T} + \vec{F} + \vec{F_i} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} + \vec{F_i} = -\vec{T}$ or $\vec{P} = -\vec{T} \Rightarrow \vec{P} = \vec{F} + \vec{F}_i$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{P} = \vec{F} - m\ell\omega^2\vec{N}}$$

III. Énergie potentielle de gravitation

Soit un corps (1) de masse m_1 qui passe d'une position (1) à uneautre position (2) soumis à une force conservative $\vec{F}$, on peut écrire alors: $\Delta Ep = Ep_1 - Ep_2 = -W(\vec{F})$

Supposons que le corps (1) passe de l'orbite r_1 à r_2 ($r_1 > r_2$) entre les instants t_1 et t_2 dans le champ de gravitation:

$$\delta\omega = \vec{F}.\overrightarrow{\delta r} = F.\delta r.\cos(\vec{F}, \overrightarrow{\delta r}) = -F.\delta r \text{ avec } \vec{F} = -\frac{Gm_0m_1}{r^2}\vec{u} \Rightarrow W_{1\to 2}(\vec{F}) = -\int \frac{Gm_0m_1}{r^2}\delta r = \frac{Gm_0m_1}{r}$$

$$\Delta Ep = Ep_1 - Ep_2 = -W(\vec{F}) = -\frac{Gm_0m_1}{r}$$

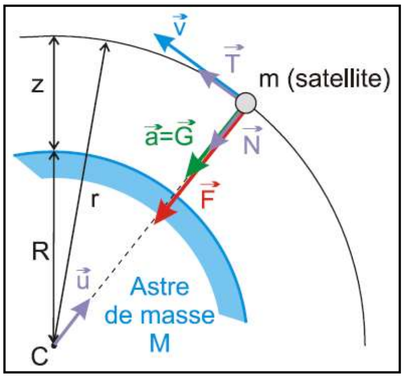
Si $r \to +\infty$, $Ep \to 0$, à l'infini l'énergie potentielle est nulle c'est la référence.

$\Delta E = E\infty - Ep = \frac{Gm_0m_1}{r} \Rightarrow \boxed{Ep = -\frac{Gm_0m_1}{r}}$ d'où l'énergie potentielle de gravitation terrestre s'écrie sous la forme: $\boxed{Ep = -\frac{GM_Tm}{R_T + h}}$

IV. Mouvement circulaire des satellites terrestres

1. Acceleration d'un satellite

Considérons un satellite de masse m qui tourne autour de la Terre à une altitude z (le rayon de son orbite est r)



Système : {un satellite de la Terre}

Référentiel : géocentrique

Forces extérieures : $\vec{F}_{T/sat}$

2ème loi de Newton :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m_{sat} \cdot \overrightarrow{a_{sat}} \quad \to \quad \overrightarrow{F_{T\to sat}} = m_{sat} \cdot \overrightarrow{a_{sat}}$$

$$-\frac{G \cdot m_T \cdot m_{sat}}{r^2} \cdot \vec{u} = m_{sat} \cdot \overrightarrow{a_{sat}} \quad \to \quad \overrightarrow{a_{sat}} = -\frac{G \cdot m_T}{r^2} \cdot \vec{u}$$

$$\boxed{\vec{a}_{sat} = \frac{G.m_T}{r^2}\vec{N}}$$

$\vec{a}$ est centripète donc le mouvement est circulaire de centre O confondu avec le centre de la Terre. L'accélération est indépendante de la masse du satellite. Elle ne dépend que du rayon de l'orbite.

2. SATELLITE A TRAJECTOIRE CIRCULAIRE

a. Expression de la vitesse

En général : $\vec{a} = \dfrac{dv}{dt} \cdot \vec{T} + \dfrac{v^2}{r} \cdot \vec{N}$

Or : $\vec{a} = \dfrac{G \cdot m_T}{r^2} \cdot \vec{N}$ donc $\dfrac{dv}{dt} \cdot \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow \dfrac{dv}{dt} = 0$

$v = constante$

Le mouvement est circulaire uniforme

$$\begin{cases} \vec{a} = \dfrac{v^2}{r} \cdot \vec{N} & (Frenet) \\ \vec{a} = \dfrac{G \cdot m_T}{r^2} \cdot \vec{N} & (Newton) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{r} \cdot \vec{N} = \frac{G \cdot m_T}{r^2} \cdot \vec{N} \Rightarrow v^2 = \frac{G \cdot m_T}{r}$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}}}$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{Gm_T}{R+z}}} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R_T + z}}} \text{ car } Gm_T = g_0 R_T^2 \text{ et } r = R_T + z$$

La vitesse dépend du rayon de l'orbite. Plus le rayon est grand, plus la vitesse est petite.

R_T : rayon de la Terre R_T=6380 km ; z : altitude du satellite

a. Première vitesse cosmique

La première vitesse cosmique représente la vitesse de satellisation minimale autour de la Terre. Vitesse minimale qu'il faut théoriquement communiquer à un corps, au départ de la Terre, pour le satelliser autour d'elle en orbite basse $r \approx R_T$. Elle est déterminée par la relation:

$$\frac{v_1^2}{r} = \frac{GM_T}{r^2}$$

où :

- r est le rayon de l'orbite, assimilé au rayon terrestre (6370 km, bien qu'en en réalité une orbite n'échappe à l'usure de l'atmosphère terrestre que si elle est à une altitude supérieure à 200 kilomètres),
- M_T est la masse de la Terre (environ 6×10^{24} kg),
- G est la constante de gravitation.

Cette relation signifie que la force de gravitation exercée par la Terre ($\frac{GMm}{R_T^2}$, m étant la masse de la fusée) est exactement compensée par la force centrifuge $\left(\frac{mv_1^2}{R_T}\right)$ de la fusée quand celle-ci est en orbite circulaire. La première vitesse cosmique vaut ainsi

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} \approx 7{,}9 \text{ km/s}$$

b. Deuxième vitesse cosmique ou vitesse de libération

La deuxième vitesse cosmique correspond à la vitesse de libération d'un corps quittant la Terre. C'est la vitesse minimale au-delà de laquelle un corps peut s'éloigner définitivement de la Terre, c'est-à-dire l'amener à l'infini avec une vitesse nulle. en tout cas tant que l'on néglige la présence du Soleil et de notre Galaxie.
Appliquons la conservation de l'énergie mécanique: $\Delta E=0$

$$E_\infty - E_{sol} = \left(Ec_\infty + Ep_\infty\right) - \left(Ec_{sol} + Ep_{sol}\right) = (0+0) - \left(\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R}\right) = 0$$

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2Rg_0} = 11{,}2 \text{ km/s}$$

Remarque: $v_2 = v_1\sqrt{2}$

Cette équation qui décrit que la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de gravitation se compensent, conférant une énergie totale nulle à la fusée, condition nécessaire à ce qu'elle puisse s'échapper de l'attraction terrestre.

Remarque:

À noter qu'ici, il n'y a pas d'ambigüité sur la quantité R qui correspond au rayon terrestre, puisque c'est de là qu'est lancée la fusée, contrairement à la première vitesse cosmique où la quantité R était censée représenter le rayon d'une orbite basse, légèrement supérieur (d'environ 3%) au rayon terrestre. La vitesse de libération augmente avec la compacité de l'astre support, c'est-à-dire son rapport M/R. Par exemple, celle de Jupiter est de 59,5 km/s.

c. Troisième vitesse cosmique

La troisième vitesse cosmique est définie comme étant la vitesse de libération d'un corps quittant le système solaire depuis l'orbite terrestre. Elle est déterminée de la même façon que la seconde vitesse cosmique, si ce n'est qu'il faut tenir compte de l'énergie potentielle de gravitation de la Terre et du Soleil, et du fait que la Terre est elle-même animée d'une certaine vitesse v_T sur son orbite.
Ainsi,

$$\frac{\left(v_3 + v_T\right)^2}{2} = \frac{GM_S}{d} + \frac{GM}{R},$$

où :

- d correspondant à la distance Terre-Soleil, soit une unité astronomique (environ 150 millions de kilomètres) et,
- M_S correspond à la masse du Soleil.

Or la vitesse de la Terre sur son orbite correspond à la première vitesse cosmique du Soleil pour une distance d'une unité astronomique, soit:

$$v_T = \sqrt{\frac{GM_S}{d}}$$

Par conséquent : $v_3 = \sqrt{\frac{2GM_S}{d} + \frac{2GM}{R}} - \sqrt{\frac{GM_S}{d}} \approx 13{,}8$ km/s

d. Étude de la période

La période de révolution d'un satellite est la durée que met le satellite pour effectuer le tour de son astre attracteur. On la note T.

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{G \cdot m_T}{r}}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{Gm_T}}}$$

La période est indépendante de la masse et dépend de l'altitude. Cette durée, mesurée dans le référentiel géocentrique est différente de celle mesurée par un observateur terrestre, car celui-ci est entrainé par le mouvement de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles.

e. loi de Kepler

En mettant au carré l'expression de la période on retrouve la 3ème loi de Kepler

$$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_T}} \text{ ou } \boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{R^2 g_0}}$$

On peut déterminer la masse d'un corps attracteur connaissant la période et le rayon de l'orbite d'un de ses satellites.

3. SATELLITES GEOSTATIONNAIRES

Un satellite géostationnaire a une position fixe par rapport à la Terre. Par rapport au référentiel géocentrique, il a un mouvement circulaire uniforme.

Il se situe dans le plan de l'équateur, évolue d'Ouest en Est, et sa période de révolution est celle de la Terre (23h 56min 04s)

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2 G m_T}{4\pi^2}}$$

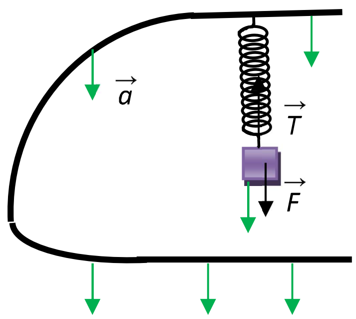
$$z = \left(G m_T \frac{T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} - R_T \approx 36000 km$$

Un satellite géostationnaire évolue en orbite circulaire à une altitude proche de 36 000 km et avec une vitesse voisine de 3,1 km/s.

4. ETAT D'IMPESANTEUR DANS UN SATELLITE

Lorsqu'un satellite est sur son orbite, tout objet situé à l'intérieur du satellite semble "flotter", comme s'il n'était plus soumis à son poids.

Un astronaute veut mesurer le poids apparent d'un objet de masse m et de centre de masse C. Pour cela il suspend cet objet à l'extrémité d'un ressort accroché au plafond du satellite.



Du point de vu de l'astronaute l'objet est soumis à son poids apparent $\vec{P}$ et à la tension $\vec{T}$ due au ressort. L'objet étant immobile: $\vec{P}+\vec{T}=\vec{0}$.

Vu du référentiel géocentrique, l'objet est soumis à la force gravitationnelle $\vec{F}$ et à la tension $\vec{T}$. On a donc: $m\vec{a}=\vec{F}+\vec{T}$; l'objet étant fixe à l'intérieur du satellite, son accélération est égale à celle du satellite. Soit $\vec{a} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}$

$$m\,\vec{a} = m\,\vec{a} + \vec{T} \Rightarrow \vec{T}=\vec{0} \text{ d'où } \vec{P}=\vec{0}$$

La tension est nulle, l'objet reste en équilibre sans être retenu par le ressort. L'astronaute en déduit que le poids apparent de l'objet est nul, d'où l'impression d'impesanteur. L'astronaute est lui-même en impesanteur.

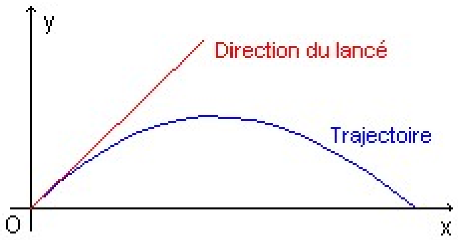
L'impesanteur est due au fait que l'astronaute subit la même accélération que le satellite: ils sont tous deux en "chute" par rapport à la Terre. L'astronaute n'a plus besoin d'aucun appui pour rester en équilibre dans la cabine, car la réaction exercée par la paroi est nulle.

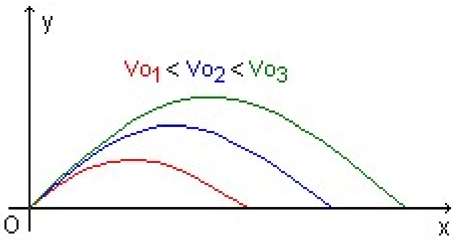
V. La satellisation

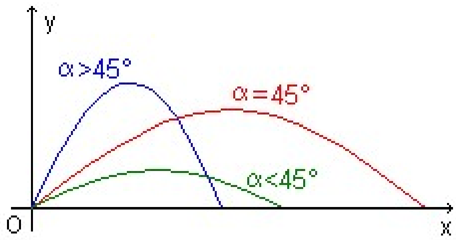
1. Chute libre parabolique

Lorsqu'on lance un objet placé au voisinage de la Terre avec une vitesse V_o, le mouvement de cet objet est parabolique (images ci-contre).

Remarque: La trajectoire dépend de la valeur de la vitesse initiale et de l'angle que fait la direction du lancé avec l'horizontale.







2. Satellisation

Lorsque qu'on lance un objet d'un point proche de la Terre avec une vitesse de direction tangente à la surface terrestre, plusieurs cas sont possibles.