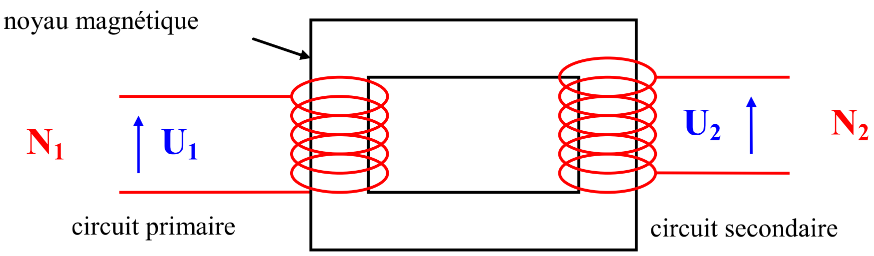


Petite explication !

U_1 est une ddp sinusoïdale, donc le flux magnétique créé par N_1 varie, et donc le flux magnétique à travers N_2 varie, et il produit, d'après la loi de Faraday, une f.é.m. induite U_2 sinusoïdale.

On appelle rapport de transformation : $m = \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{I_1}{I_2}$ (pour un transformateur idéal)

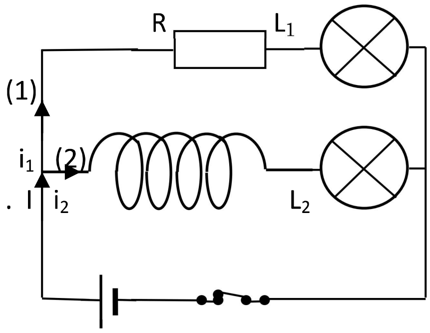
Si $N_2 > N_1$: le transformateur est survolteur (élévateur de tension)

Si $N_2 < N_1$: le transformateur est sous-volteur (abaisseur de tension)

Auto-induction électromagnétique

I. Phénomène d'auto induction

1. Influence d'une bobine dans un circuit

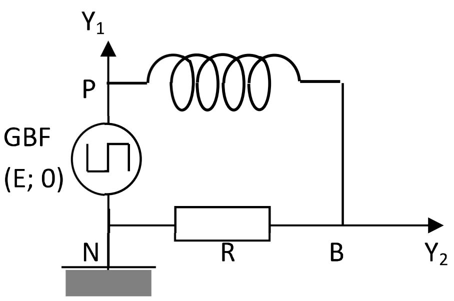


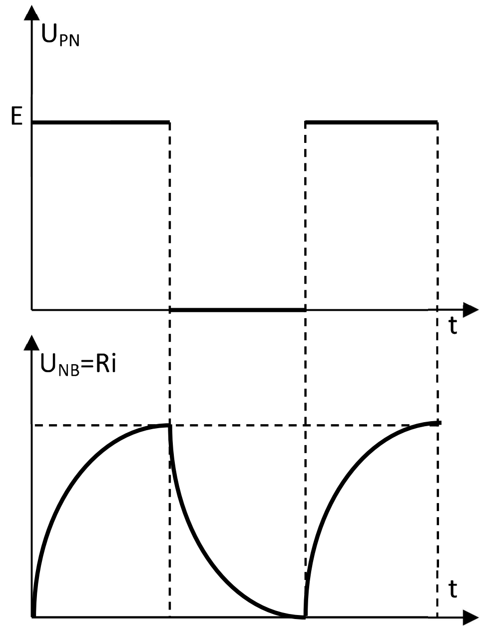
Les lampes L_1 et L_2 sont des lampes identiques.

- Si on ferme K, L_1 s'allume instantanément mais L_2 s'allume progressivement.
- Si on ouvre K, L_1 s'éteint très tôt alors que L_2 s'éteint progressivement.

La bobine est donc la cause du retard à l'établissement ou l'annulation du courant dans la branche 2.

2. Visualisation a l'oscilloscope



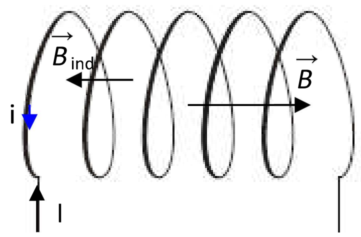


Lorsque la tension aux bornes du générateur est maximale, l'intensité du courant n'atteint pas immédiatement sa valeur maximale. De même si la tension est nulle, le courant i diminue progressivement avant de s'annuler.

<u>Définition:</u>
Une bobine placée dans un circuit s'oppose à l'établissement et à l'annulation du courant : c'est le phénomène d'auto induction.

3. Interpretation

Lorsque i varie, le champ magnétique créé par le courant varie dans le circuit, donc le flux propre à travers le circuit varie, ce qui engendre une f.é.m. induite qui par ses effets va s'opposer à la cause qui lui a donné naissance (loi de Lenz): c'est le phénomène d'auto induction.



II. Force électromotrice d'auto induction

1. Inductance d'une bobine

Lorsque le circuit est parcouru par un courant, il crée un champ proportionnel à l'intensité du courant. Le flux propre qui traverse ce circuit étant proportionnel à B et donc proportionnel à i.

On pose: $\boxed{\Phi = Li}$ où L est le coefficient de proportionnalité: c'est une constante positive (car i et Φ varie toujours dans le même sens).

L est appelé auto induction ou inductance ou coefficient de self inductance ou self. Elle s'exprime en Henry (H). L ne dépend que de la géométrie du circuit.

Considérons un solénoïde de rayon R et de longueur ℓ comportant N spires et parcouru par un courant variable i.

$$\Phi = Li = NBS \Rightarrow L = \frac{NBS}{i} \text{ or } B = \mu_0 n i = \mu_0 \frac{N}{\ell} i$$

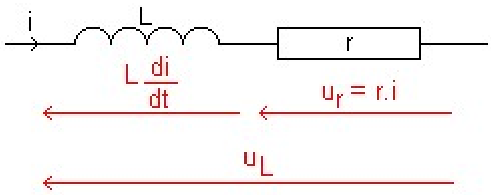
$$L = N^2 \mu_0 \frac{S}{\ell} \Rightarrow \boxed{L = \frac{N^2 \mu_0 \pi R^2}{\ell}}$$

2. F.E.M. d'auto induction

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(Li) = -L\frac{di}{dt} \Rightarrow \boxed{e = -L\frac{di}{dt}}$$

3. Tension aux bornes d'une bobine

Si la résistance de la bobine n'est pas négligeable, celle-ci peut-être considérée comme l'association en série d'un conducteur ohmique et d'une bobine de résistance nulle.



$U_L = ri - e = ri + \frac{Ldi}{dt} \Rightarrow \boxed{U_L = ri + \frac{Ldi}{dt}}$ équation différentielle en i du 1[e] ordre.

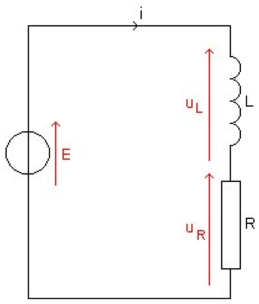
<u>Remarques</u>

- Dans le cas où la bobine est une inductance pure, sa résistance est nulle et la tension à ses bornes s'écrit $u_L = L\frac{di}{dt}$.
- En régime permanent, le courant est constant (i=cte), la tension aux bornes de la bobine s'écrit u_L=ri: la bobine se comporte comme un conducteur ohmique.

III. Réponse d'un dipôle RL

1. Équation differentielle

La loi d'additivité des tensions: $U_L+U_R=E \Rightarrow \boxed{L\frac{di}{dt} + Ri = E}$ équation différentielle.



2. Loi d'etablissement du courant

<u>Remarque préalable:</u> en régime permanent, le courant est constant. I=cte $\Rightarrow \frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow i = \frac{E}{R}$

Vérifions que $i = A + Be^{-\frac{t}{\tau}}$ est solution de l'équation différentielle.

$\frac{di}{dt} = -\frac{B}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}}$. L'équation différentielle s'écrit alors:

$$A+Be^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{L}{R}\left(-\frac{B}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}}\right) = \frac{E}{R} \quad \Rightarrow \quad A + B\left(1 - \frac{L}{R\tau}\right).e^{\frac{-t}{\tau}} = \frac{E}{R}$$

Cette équation est vérifiée quelque soit le paramètre t, d'où le système:

$$\begin{cases} A = \frac{E}{R} \\ 1 - \frac{L}{R\tau} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{E}{R} \\ \tau = \frac{L}{R} \end{cases}$$

On en déduit que l'intensité du courant s'écrit $i = \frac{E}{R} + Be^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{L}{R}$.

D'autre part, à t = 0, i = 0 => $0 = \frac{E}{R} + B.e^0$

=> $B = -\frac{E}{R}$

=> $i = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}.e^{-\frac{t}{\tau}}$

=> $\boxed{i = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$

<u>Par la méthode de résolution de l'équation différentielle</u>: $Ri + \frac{Ldi}{dt} = E$

Soit i_1 la solution de l'équation différentielle sans second membre:

$$Ri + L\frac{di}{dt} = 0 \Rightarrow Ldi = -Ridt \Rightarrow \frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt.\ \text{Posons } \tau = \frac{L}{R}$$

En intégrant: $\ln i = -\frac{R}{L}t + k \Rightarrow i_1 = e^{-\frac{t}{\tau}+k} = e^{-\frac{t}{\tau}} \times e^k \Rightarrow \boxed{i_1 = Ke^{-\frac{t}{\tau}}}$ avec $K = e^k$

Soit i_2 une solution particulière de l'équation avec second membre:

$$i_2 = \text{cte} \Rightarrow \frac{di_2}{dt} = 0 \Rightarrow Ri_2 = E \Rightarrow \boxed{i_2 = \frac{E}{R}}$$

La solution de l'équation différentielle est: $i = i_1 + i_2 = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R}$

K est déterminé par les conditions initiales: à t=0; $i = 0 = K + \frac{E}{R} \Rightarrow K = -\frac{E}{R}$ d'où $\boxed{i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

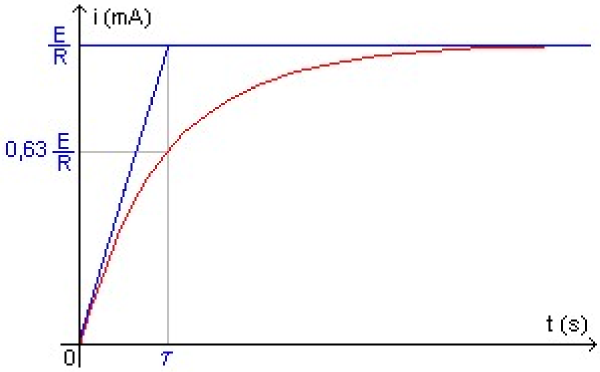
3. Loi d'annulation du courant

A t'=0, E=0 $\Rightarrow L\frac{di}{dt} + Ri = 0$. L'équation a pour solution: $\boxed{i = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}}$

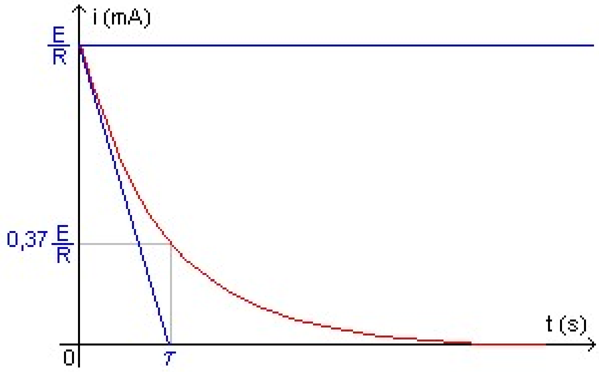
4. Constante de temps

La grandeur $\tau = \frac{L}{R}$ est appelée constante de temps du circuit. Son unité est la seconde (s). La constante de temps fournit un ordre de grandeur de la durée de la réponse d'un circuit RL

- Après une durée τ, l'intensité est égale à 63% de sa valeur maximale.
- Après une durée 5τ, l'intensité est égale à 99% de sa valeur maximale.
- τ est généralement très faible: le régime transitoire s'étient très rapidement.

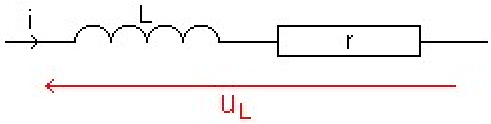


Apparition du courant lors de la fermeture du circuit



Disparition du courant lors de l'ouverture du circuit

IV. Énergie emmagasinée dans une bobine



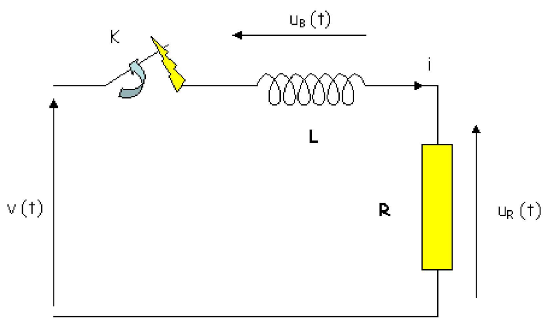
$$\mathscr{P} = ui = (\mathrm{ri} + L\frac{di}{dt})i = ri^2 + Li\frac{di}{dt} \Rightarrow \mathscr{P} = \mathscr{P}_j + \mathscr{P}_m$$

$$\mathscr{P}_m = Li\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = \frac{dE}{dt}\text{, par analogie: } \boxed{E = \frac{1}{2}Li^2}$$

- Lorsque le courant s'établi, la bobine emmagasine de l'énergie $E = \frac{1}{2}Li^2$: ceci crée un retard à l'établissement du courant.
- Quand il y a rupture du courant, la bobine restitue l'énergie emmagasinée: ceci entraine un retard à l'annulation du courant.

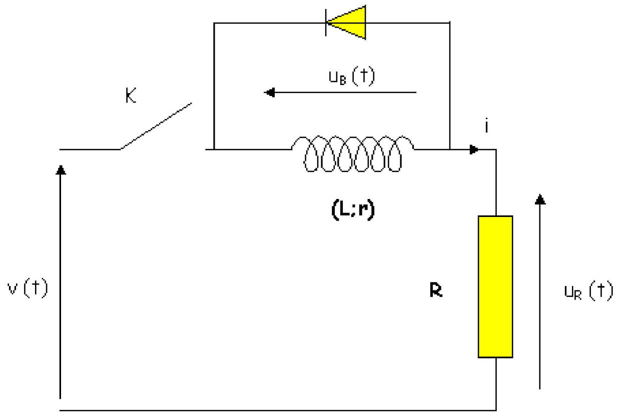
V. Suppression d'un courant dans un circuit inductif :

La tension v (t) est constante et égale à E, un courant d'intensité constante circule dans le circuit. A l'instant t = 0, l'interrupteur K s'ouvre instantannément. Le courant d'intensité i , qui circulait dans une bobine B et une résistance R est interrompu comme l'indique le schéma suivant. La résistance interne de la bobine est négligée, seule l'inductance L est prise en compte.



L'ouverture de l'interupteur provoque un arc électrique car il ne il ne peut y avoir de discontinuités de l'intensité d'un courant traversant un circuit fortement inductif. L'intensité du courant ne pouvant subir de brusques variations, pendant un court instant, le courant circule entre les deux lames de l'interrupteur. Une surtension apparaît, elle est proportionnelle à la valeur de $L\frac{di}{dt}$.

Pour ouvrir un circuit inductif il faut permettre au courant de s'annuler de façon continue, une diode est placée sur les bornes de la bobine permettant ainsi au courant de continuer à circuler jusqu'à son annulation, comme sur le schéma suivant.

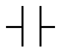


La diode utilisée est appelée diode de roue libre. Ce terme est employé lorsque la bobine restitue l'énergie emmagasinée sur elle même. Alors que l'interrupteur était fermé la bobine a stocké de l'énergie, le circuit s'ouvrant cette énergie doit être restituée, la diode de roue libre permet cette opération.

Condensateurs: dipôle RC

I. Le condensateur

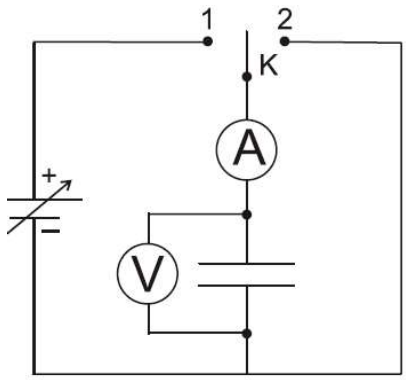
1. Definition et symbole

Un condensateur est constitué de deux conducteurs métalliques (les armatures) en influence mutuelle, séparés par un isolant (le diélectrique). Le symbole est: 

On notera qu'un circuit série comportant un condensateur est un circuit ouvert. Il ne laisse donc pas passer un courant permanent. Un condensateur ne peut s'utiliser qu'en courant variable ou en régime transitoire.

2. Charge et decharge d'un condensateur

a) Dispositif expérimental



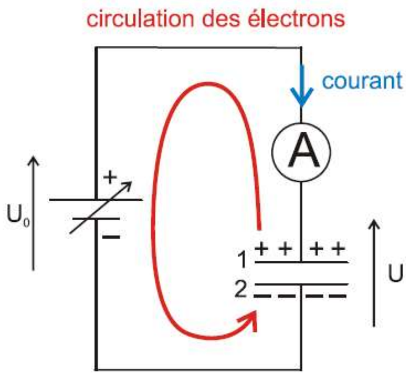
L'interrupteur K peut être fermé soit en position 1 soit en position 2.

A est un ampèremètre très sensible, présentant une caractéristique intéressante: lorsqu'il est parcouru par une impulsion de courant (courant de brève durée), **la déviation maximale de l'aiguille est proportionnelle à la charge totale Q qui l'a traversé**.

b) Charge du condensateur

Fermons K en 1 : l'aiguille de A dévie brièvement.

Le pôle + du générateur attire quelques électrons de l'armature 1, les propulse vers le pôle – d'où ils sont repoussés vers l'armature 2.



Cette circulation d'électrons donne lieu à une impulsion de courant indiquée par l'ampèremètre. Cette impulsion de courant amène une charge $Q_1 > 0$ sur l'armature 1 et $Q_2 < 0$ sur l'armature 2 du condensateur. On a évidemment: $Q_1 = -Q_2$.

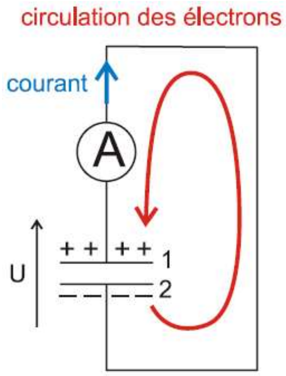
La présence des charges est indiquée par l'existence d'une tension U aux bornes du condensateur.

L'impulsion de courant s'arrête dès que $U=U_0$: aucun courant ne circule plus dans le circuit. On dit alors que l'on a chargé le condensateur, sa charge vaut $Q = |Q_1| = |Q_2|$

Remarque : La charge Q du condensateur est la valeur absolue de la charge qui s'accumule sur l'une de ses armatures. (La charge totale des 2 armatures est évidemment nulle !)

Ouvrons K : l'aiguille de A ne dévie pas. Aucun courant ne circule. Le condensateur reste chargé. Sa tension est toujours $U=U_0$ et sa charge Q.

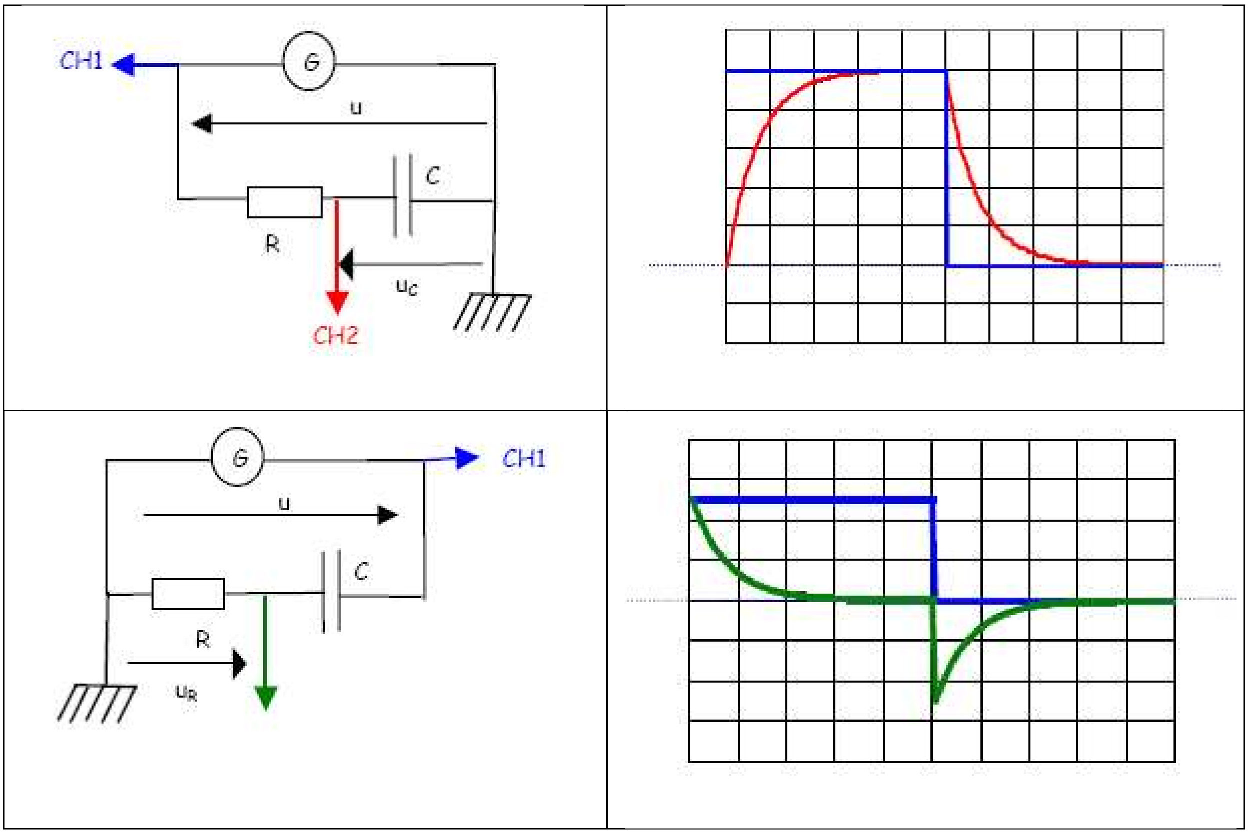
c) *Décharge du condensateur*



Fermons K en 2 : l'aiguille de A dévie brièvement dans l'autre sens.
Le condensateur chargé est court-circuité. Les électrons de l'armature 2 circulent à travers le circuit pour compenser le défaut d'électrons sur l'armature 1.
La circulation d'électrons s'arrête si les deux armatures sont neutres, c.-à-d. si U = 0 et Q = 0.
Lorsqu'on relie les armatures d'un condensateur chargé par un conducteur, on décharge le condensateur. La tension à ses bornes ainsi que sa charge s'annulent.

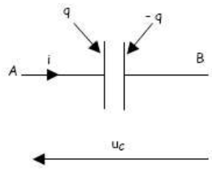
3. Visualisation a l'oscilloscope

Le générateur délivre une tension à échelon de valeur E et 0



4. Relation entre la charge et l'intensite du courant

Conventions de signe- Relation entre i et q



On oriente le dipôle de A vers B: On place u_C sur le schéma. Soit q la charge de l'armature A (à l'instant considéré) par laquelle entre le sens positif.

On a toujours : $i_{AB} = \dfrac{dq_A}{dt} = \dfrac{dq}{dt}$ ou $i_{BA} = \dfrac{dq_B}{dt} = -\dfrac{dq}{dt}$

<u>Remarque</u> : Si i est constant i = I et on a alors $I = \frac{q}{t}$. q étant la charge à l'instant t.

5. CAPACITE D'UN CONDENSATEUR

L'expérience montre qu'un condensateur soumis à une tension u_C prend une charge q proportionnelle à u_C telle que:

$\boxed{q = C\,u_C}$ avec
- q: charge prise par le condensateur en coulomb (C)
- u_C: tension électrique régnant aux bornes du condensateur en volt (V)
- C: capacité du condensateur en farad (F)

<u>Remarque:</u> le farad est une unité représentant une très grande capacité, rarement rencontrée en électronique ou au laboratoire. On utilise couramment les sous multiples: 1mF=10^{-3}F, 1µF=10^{-6}F, 1nF=10^{-9}F (nanofarad) et 1pF=10^{-12}F (picofarad).

Pour un condensateur plan $C = \frac{\varepsilon.S}{d}$ où ε est une constante dépendant du diélectrique.

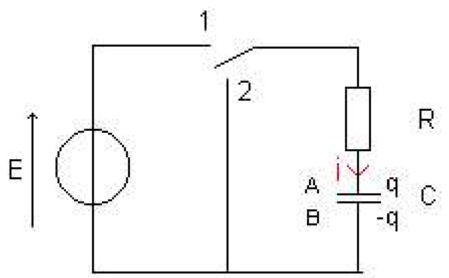
Si le diélectrique est le vide: $C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$ · ε_0 est **la permittivité du vide** = $8{,}54 \cdot 10^{-12}$ u.S.I.

Pour un autre diélectrique : $C = \varepsilon \frac{S}{d}$. ε est **la permittivité du diélectrique** > ε_0

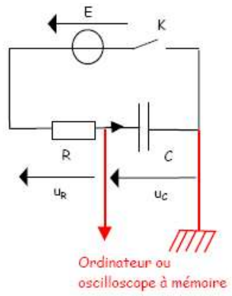
Très souvent, on exprime la permittivité d'un diélectrique à l'aide de celle du vide. On définit **la permittivité relative du diélectrique** ε_r à l'aide de : $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$

Finalement : $\boxed{C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d} = \varepsilon_r C_{vide}}$

II. Réponse d'un dipôle RC à un échelon de tension



1. ÉQUATIONS DIFFERENTIELLES VERIFIEES PAR LA TENSION U_C.



a) *la phase de charge du condensateur*.

Le courant circule dans le sens positif (convention récepteur).

La loi d'additivité des tensions appliquée aux bornes du dipôle RC permet d'écrire: $u_R+u_C=E$

La loi d'Ohm appliquée au dipôle ohmique permet d'écrire: $u_R=R\,i$.

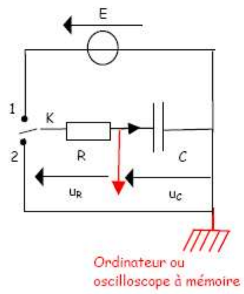
Selon la convention récepteur: $i=\frac{dq}{dt}$ mais $q=Cu_C$ => $i=C\frac{du_C}{dt}$ et $u_R=RC\frac{du_C}{dt}$.

Finalement l'équation différentielle cherchée s'écrit: $\boxed{RC\frac{du_C}{dt}+u_C=E}$

b) *la phase de décharge du condensateur*.

Le courant circule dans le sens négatif mais la convention récepteur est toujours en vigueur. La tension imposée par le générateur est alors 0.

L'équation différentielle est alors: $\boxed{RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0}$.



2. Solutions des equations differentielles precedentes.

La fonction numérique $u_C=Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ + B (où A, B et τ sont des constantes) est bien solution des équations différentielles.

a) *Cas de la charge du condensateur.*

La fonction numérique $u_C=Ae^{-t/\tau}+B$ est solution de l'équation différentielle $RC\frac{du_C}{dt}+u_C=E$ si cette équation est vérifiée par la fonction numérique proposée et par sa dérivée.

Or: $\frac{du_C}{dt}=-\frac{A}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$. En reportant cette expression de $\frac{du_C}{dt}$ et de u_C dans l'équation différentielle on a: $-\frac{RCA}{\tau}e^{-t/\tau}+Ae^{-\frac{t}{\tau}}+B=E$ ou encore: $Ae^{-\frac{t}{\tau}}(1-\frac{RC}{\tau})+B=E$

Cette équation devant être vérifiée quelque soit la date t. On a donc les deux conditions suivantes:

B=E et $1-\frac{RC}{\tau}=0 \Rightarrow \boxed{\tau=RC}$: la fonction numérique u_C s'écrit donc provisoirement $u_C=Ae^{-t/RC}+E$:

Il est possible de donner un sens physique à la constante mathématique A en examinant la valeur de u_C à l'instant t=0 (conditions aux limites). A cette date $u_C=0$ alors 0=A+E => A=-E d'où la solution de l'équation différentielle lors de la charge:

$$\boxed{u_C=E(1-e^{-t/RC})}$$

b) *Cas de la décharge du condensateur.*

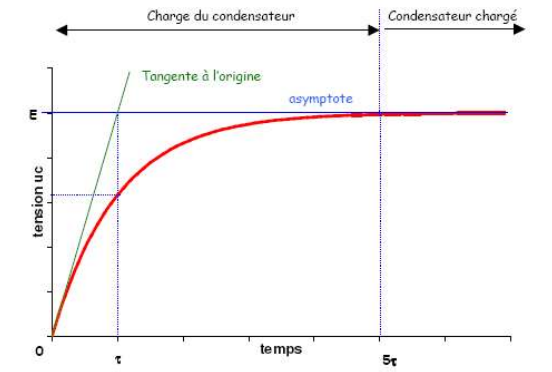
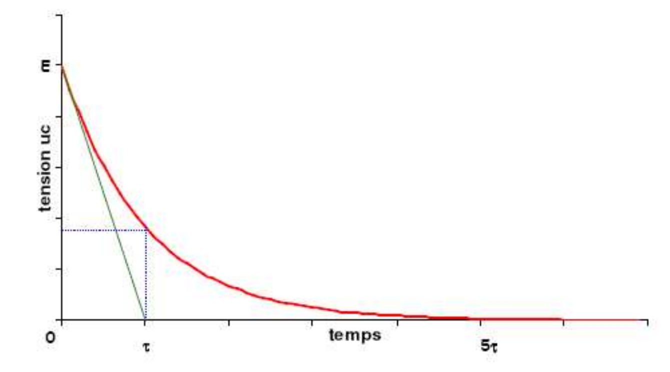
En introduisant les expressions de u_C et de $\frac{du_C}{dt}$ dans l'équation différentielle de la décharge on a:

$Ae^{-\frac{t}{\tau}}(1-\frac{RC}{\tau}) + B = 0$ cette équation devant être vérifiée quelque soit la date t. On a donc les deux conditions suivantes: B=0 et $1-\frac{RC}{t}=0$ => $\boxed{\tau=RC}$

La fonction numérique u_C s'écrit donc provisoirement: $u_C=Ae^{-t/RC}$

Il est possible de donner un sens physique à la constante mathématique A en examinant la valeur de u_C à l'instant t=0 (début de la décharge). A cette date u_C=E alors A=E et la solution de l'équation différentielle de la décharge s'écrit $\boxed{u_C=Ee^{-t/RC}}$.

Les résultats précédents sont résumés ci-contre.

<table>
<tr><th>Phase de charge</th><th>Phase de décharge</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

3. Reponse en intensite.

Dans la partie précédente, nous nous sommes intéressés à la réponse du dipôle RC en tension. C'est-à-dire que nous avons examiné l'évolution de la tension aux bornes du condensateur.
Il est intéressant d'examiner la réponse en intensité. C'est-à-dire d'étudier l'évolution de l'intensité i du courant dans le dipôle RC au cours du temps lors du cycle charge-décharge.

Dans les deux cas (charge ou décharge) on a d'après la loi d'Ohm: $i=\frac{u_R}{R}$

a) Étude de la charge

La loi d'additivité des tensions s'écrit: $E=u_C+u_R$ => $u_R=E-u_C$, on en déduit: $i=\frac{E-u_C}{R}$

Pendant la charge l'expression de u_C est: $u_C=E-Ee^{-t/RC}$ alors $i=\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$

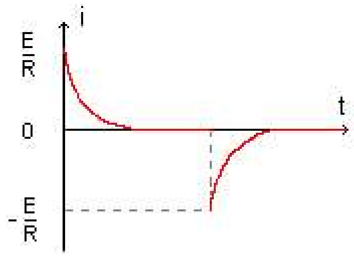
Cette expression de i montre que l'intensité du courant de charge décroît aux cours de la charge, de la valeur $i_0=\frac{E}{R}$ à la valeur voisine de 0 (le condensateur est chargé). Cela signifie que plus la phase de charge avance plus il est difficile de charger le condensateur.

b) Étude de la décharge.

La loi d'additivité des tensions s'écrit: $0=u_C+u_R$ => $u_R= - u_C$ on en déduit: $i=-\dfrac{u_C}{R}$

Pendant la décharge l'expression de u_C est: $u_C=Ee^{-t/RC}$ alors $i=-\dfrac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$

Cette expression montre que le courant circule dans le sens négatif et croît de la valeur $i_0=-\dfrac{E}{R}$ (valeur à l'instant t=0 correspondant au début de la décharge) à une valeur proche de 0.
Entre la fin de la phase de charge et le début de la phase de décharge il apparaît une discontinuité dans la fonction i=f(t) qui correspond à l'inversion du sens du courant.



Cette évolution de l'intensité est résumée sur le schéma ci-contre.

4. Constante de temps du dipole RC.

Le facteur τ=RC apparaît aussi bien dans les équations différentielles de charge et de décharge que dans les expressions de u_C et i.

τ=RC, homogène à une durée, est appelé constante de temps du dipôle RC et s'exprime en seconde (si R est en ohm (Ω) et C en farad (F)). C'est une durée caractéristique du dipôle RC qui nous donne un ordre de grandeur de la durée de la charge ou de la décharge du condensateur.

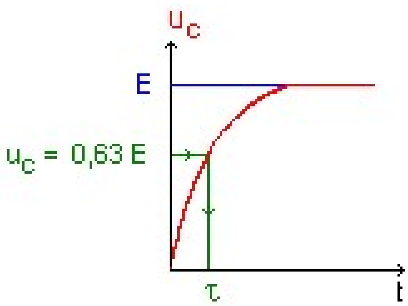
Détermination expérimentale de la constante de temps.

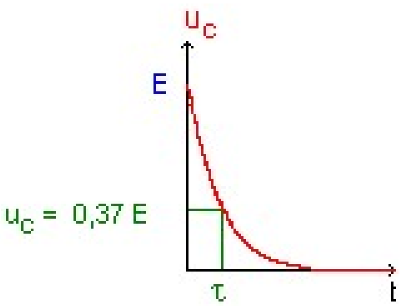
- **Méthode des 63%**

Examinons la valeur que prend u_C lors de la charge du condensateur lorsque $t=\tau$. en reprenant l'expression $u_C=E(1-e^{-t/RC})$, à la date $t=\tau$: on a:

$$u_C(\tau) = E(1 - e^{-1}) \Rightarrow \quad u_C(\tau) = 0,63\ E$$

Il suffit alors de lire sur le graphe u_C=f(t) la valeur de t (voir ci-dessous). Le même raisonnement appliqué à la décharge du condensateur donne $t=\tau$ pour u_C=0,37E.

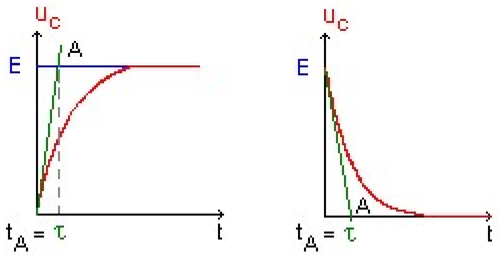




- **<u>Méthode de la tangente à l'origine.</u>**

$$U_c = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \Rightarrow \frac{d(u_c)}{dt} = \frac{E}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow \left(\frac{du_c}{dt}\right)_{t=0} = \frac{E}{\tau} = a$$

Si l'on note A le point d'intersection de la tangente à l'origine et de la droite u_C=E, alors l'abscisse de A est t_A. Avec ces notations, le coefficient directeur de la tangente à l'origine est: a=E/t_A. En comparant les deux expressions du coefficient directeur de la tangente à l'origine on a: $\tau = t_A$. Le même raisonnement appliqué à la décharge conduit aux deux constructions présentées ci-contre:



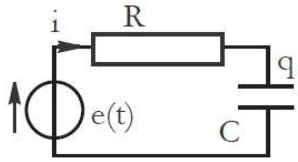
III. <u>Énergie emmagasinée dans un condensateur.</u>

1. <u>Relation donnant cette energie.</u>

La puissance fournie au circuit par le générateur, de résistance interne négligeable, vaut :

$$\mathcal{P}_f(t) = e(t)i(t) = \left(Ri + \frac{q}{C}\right) i$$

avec $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, il vient : $qi = q\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}q^2\right)$.



$\longrightarrow$ d'où : $\boxed{\mathcal{P}_f = \underbrace{Ri^2}_{\text{dissipée par effet Joule ds R}} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}\right)}_{\text{emmagasinée dans C à la date t}}}$

L'énergie emmagasinée dans un condensateur de capacité C aux bornes duquel règne une tension u_C est:

$\boxed{E_C = \frac{1}{2} C u_C^2}$

- E: énergie électrique en joule (J)
- C: capacité du condensateur en farad (F)
- u_C: tension entre les armatures du condensateur en volt (V)

$$\boxed{E = \frac{QU}{2} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}$$

Cette énergie E_c est emmagasinée par le condensateur : elle n'est pas dissipée (perdue), mais stockée tant que le régime est continu.

2. <u>Ordre de grandeur de la duree du transfert d'energie.</u>

L'énergie est transférée du générateur vers le condensateur lors de la phase de charge et du condensateur vers le circuit de décharge lors de la phase de décharge.

L'évolution de la tension aux bornes du condensateur se fait de façon continue en une durée dont l'ordre de grandeur est t. Ces transferts d'énergie ne sont donc pas instantanés (même s'ils peuvent être très brefs comme dans le cas d'un flash). L'ordre de grandeur de la durée de ces transferts est τ.

3. Association de condensateurs (rappel 1e S)

- En série: $\frac{1}{C_{éq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ soit $\boxed{\frac{1}{C_{éq}} = \sum_i^n \frac{1}{C_i}}$
- En parallèle: $C_{éq} = C_1 + C_2$ soit $\boxed{C_{éq} = \sum_i^n C_i}$

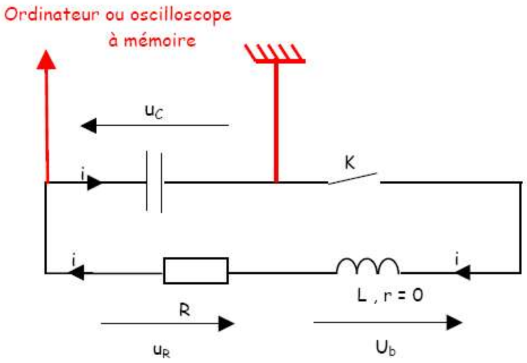
Oscillations électriques libres: circuit LC

Un oscillateur électrique libre est constitué d'un condensateur de capacité C initialement chargé et d'une bobine (L, r).

I. Décharge d'un condensateur dans une bobine : étude expérimentale

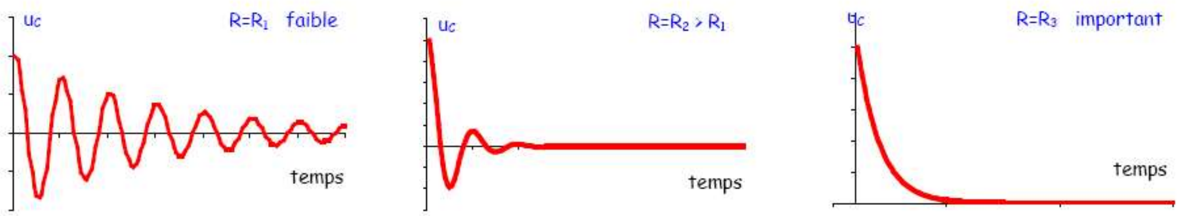
1. Montage (avec oscilloscope a memoire)

A t = 0 on ferme l'interrupteur K, le condensateur est chargé : $u_C(0) = U > 0$



On enregistre la tension u_C aux bornes du condensateur, pour différentes valeurs de la résistance R. (R_1, R_2, R_3)
Les courbes obtenues sont représentées ci-dessous

2. Courbes, pour plusieurs resistances

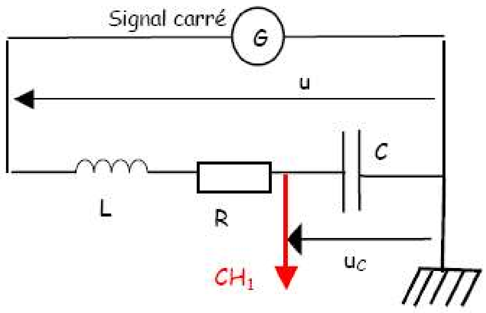


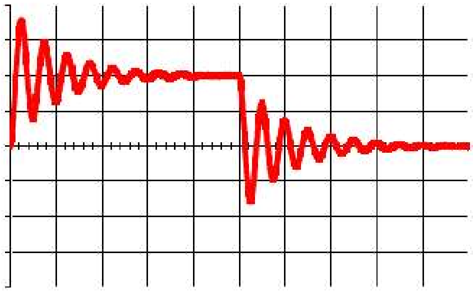
<u>Observations</u>:

- faible résistance : oscillations amorties
- Plus la résistance est grande et plus l'amortissement est important.
- Si la résistance dépasse une certaine valeur, il n'y a plus d'oscillations

3. Remarque : montage avec oscilloscope classique

Il faut utiliser un GBF délivrant une tension en créneaux (u = E ou 0)
La décharge du condensateur correspond à la demi-période du GBF pour laquelle la tension u est nulle.



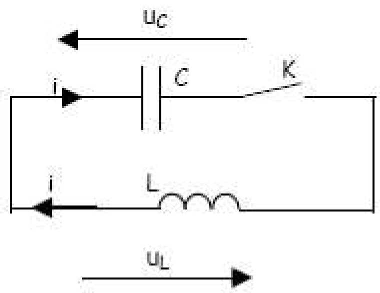


4. CONCLUSION

Selon la valeur de la résistance on observe des oscillations amorties, ou pas d'oscillations.
Plus la résistance est faible et moins les oscillations sont amorties.
Que verrait-on dans un circuit LC sans résistance ?

II. Décharge d'un condensateur dans une bobine idéale (LC)

1. ÉQUATION DIFFERENTIELLE



Condition initiale : A t = 0 , on ferme K

- l'énergie est stockée dans le condensateur $u_C(0) = U_O$ (>0)
- il n'y a pas d'énergie dans la bobine i(0) =0

On choisit un sens positif (i). La loi des mailles donne : $u_C + u_L = 0$

Avec $i = \dfrac{dq}{dt}$, $u_L = L\dfrac{di}{dt}$ et $q = Cu_c$ on obtient: $\boxed{\dfrac{d^2u_c}{dt^2} + \dfrac{1}{LC}u_c = 0}$ (équation différentielle du second ordre sans terme du premier)

2. SOLUTION

La solution est de la forme: $\boxed{u_c = U_0\cos(\omega_0 t + \varphi)}$: on a des oscillations sinusoïdales avec:

- $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$ pulsation propre du circuit
- T_0: période des oscillations
- U_0: amplitude
- φ: phase initiale, dépend des conditions initiales.

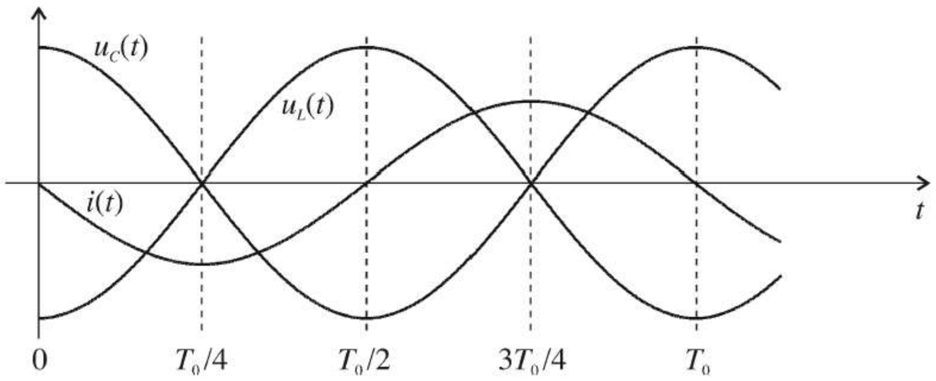
Si on dérive deux fois on obtient: $\frac{d^2u_c}{dt^2} = -U_0\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 u_c$. D'après l'équation différentielle on obtient: $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{LC}}$

D'après la condition initiale on obtient $\varphi = 0$

3. Variation de l'intensite , des tension U_C et U_L en fonction du temps

$$u_c = U_0\cos\omega_0 t \text{ et } i = C\frac{du_c}{dt} = -CU_0\omega_0\sin\omega_0 t.$$

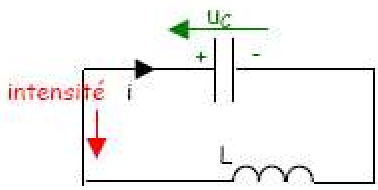
Les courbes sont:



La décharge d'un condensateur dans une bobine non résistive produit un courant sinusoïdal de même période propre $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$ et de même fréquence propre $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ que la tension aux bornes du condensateur.

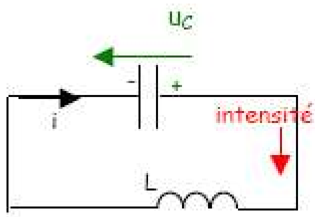
Interprétation

- A t = 0 $u_C = U_0 > 0$ et i = 0
- ensuite le condensateur se décharge u_C diminue, le courant circule dans le sens négatif avec $|i|$ croissant.
- A t = $\frac{T_0}{4}$ le condensateur est déchargé u_C = 0 et i = - Imax



- ensuite la bobine donne son énergie en s'opposant à la diminution de l'intensité : le condensateur se charge alors, mais avec les signes des armatures inverses des précédents.

- A t = $\frac{T_0}{2}$ la bobine a libéré toute son énergie et le condensateur est chargé u_C= - U_0 < 0 et i =0
- ensuite le condensateur se décharge, le courant circulant dans le sens positif avec $|i|$ croissant.
- Etc.

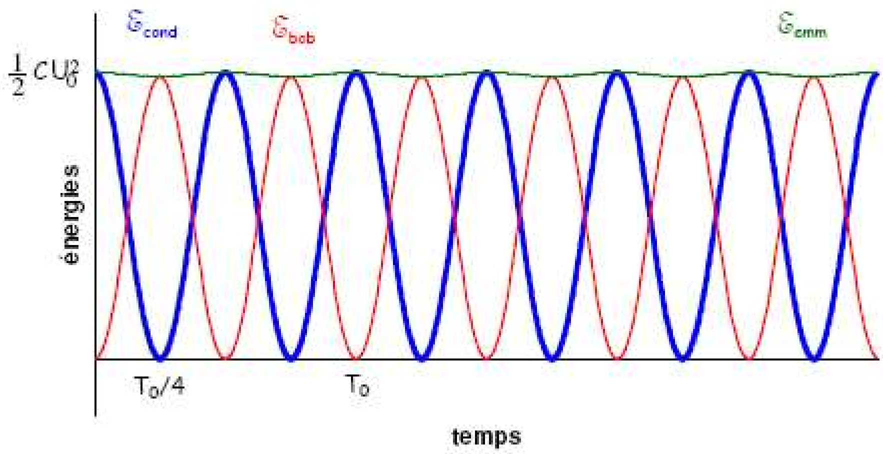


4. ÉTUDE ENERGETIQUE

A un instant quelconque t , l'énergie emmagasinée

- dans le condensateur est: $\mathcal{E}_{cond} = \frac{1}{2}Cu_c^2 = \frac{1}{2}CU_0^2\cos^2\omega_0 t$
- dans la bobine est : $\mathcal{E}_{bob} = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}LC^2U_0^2\omega_0^2\sin^2\omega_0 t = \frac{1}{2}CU_0^2\sin^2\omega_0 t$

Donc l'énergie totale emmagasinée est: $\boxed{\mathcal{E}_{emm} = \frac{1}{2}CU_0^2}$. Indépendante du temps elle est donc constante.



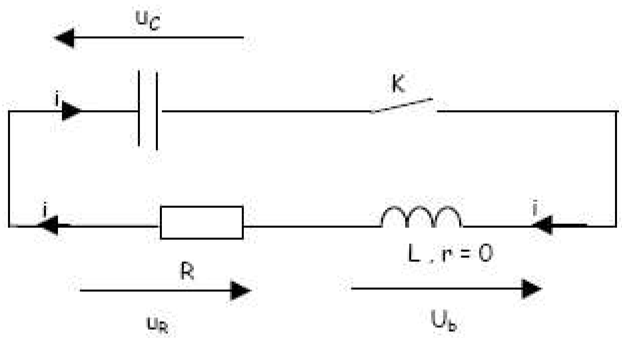
Remarque : les courbes ont pour période $\frac{T_0}{2}$

Au cours des oscillations l'énergie totale se conserve. Il y a transfert d'énergie du condensateur vers la bobine et inversement.

Lorsque l'énergie dans la bobine est maximale, celle dans le condensateur est nulle et inversement.

III. Influence de la résistance du circuit sur les oscillations (RLC libre)

1. ÉQUATION DIFFERENTIELLE



La loi des mailles donne: $u_c + u_R + u_L = 0$. Avec $i = \frac{dq}{dt}$, $u_L = L\frac{di}{dt}$, $u_R = Ri$ et $q = Cu_c$ on obtient:

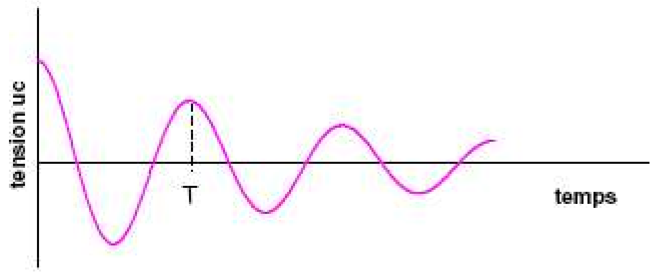
$$\boxed{\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{LC}u_c = 0}$$ (équation différentielle du second ordre sans second membre)

2. Les differents regimes

Il existe une valeur limite ($R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ résistance critique) en dessous de laquelle on observe des oscillations amorties.

R	R < Rc	R = Rc	R > Rc
régime	Pseudo-périodique	critique	apériodique

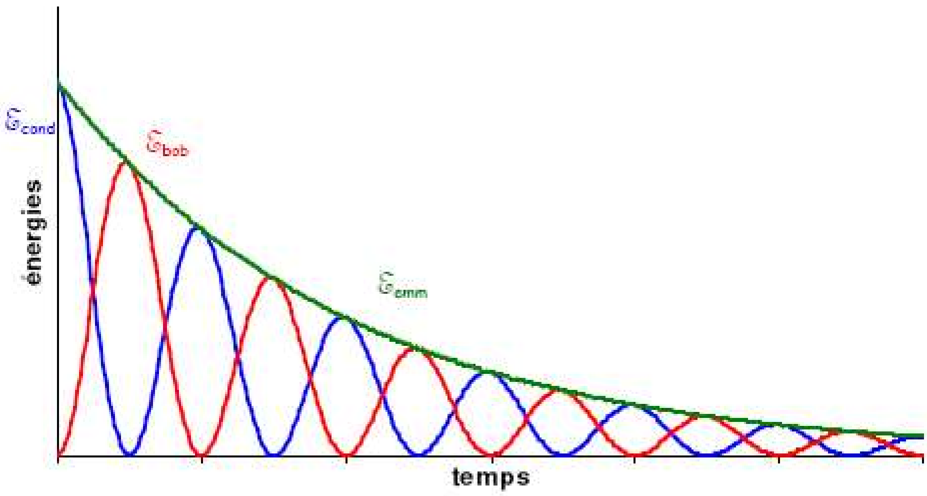
Régime pseudo-périodique : on a une pseudo-période T



Si l'amortissement n'est pas trop important, T $\approx$ $T_0 = 2.\pi.\sqrt{LC}$

3. Étude energetique du regime pseudoperiodique

L'amortissement des oscillations diminue. L'énergie totale emmagasinée diminue : il y a perte d'énergie par effet Joule



$$E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} + \frac{1}{2}Li^2 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = i\left(\frac{q}{C} + L\frac{di}{dt}\right) = -Ri^2 \Rightarrow \boxed{\frac{dE}{dt} = -Ri^2}$$

IV. Analogie électromécanique

$$x'' = \frac{d^2x}{dt^2} \text{ et } q'' = \frac{d^2q}{dt^2}$$

SYSTEME		OSCILLATEUR MECANIQUE	CIRCUIT OSCILLANT
Non amorti	Équation différentielle	$x'' + \frac{k}{m}x = 0$	$q'' + \frac{1}{LC}q = 0$
	Pulsation propre	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$
	Équation de l'oscillation	$x = x_m\sin(\omega_0 t + \varphi)$	$q = Q_m\sin(\omega_0 t + \varphi)$
	Énergie à l'instant t	$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ $E = cte$	$E = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$ $E = cte$
	Autres expressions de l'énergie d'oscillation	Énergie cinétique maximale: $E = \frac{1}{2}mv_m^2$ Énergie potentielle d'élasticité maximale: $E = \frac{1}{2}kx_m^2$	Énergie potentielle magnétique maximale: $E = \frac{1}{2}Li_m^2$ Énergie potentielle électrostatique maximale: $E = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C}$
Amorti	Équation différentielle*	$\sum \vec{F} = m\vec{a}$ $-kx - \alpha v = mx''$ $mx'' + \alpha x' + kx = 0$	$\sum u = u_B$ $\frac{q}{C} + Ri = -L\frac{di}{dt}$ $Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = 0$
	*Les équations données ici à titre indicatif ne donnent pas lieu à une étude détaillée en S_2. Aucun exercice ne portera donc sur l'amortissement.		

Analogie entre les grandeurs mécaniques et électriques	**m** masse	$\Leftrightarrow$	**L** inductance
	k coefficient de raideur du ressort	$\Leftrightarrow$	$\frac{1}{C}$, C capacité du condensateur
	x élongation	$\Leftrightarrow$	**q** charge électrique
	v vitesse	$\Leftrightarrow$	**i** intensité
	F force	$\Leftrightarrow$	**u** tension

Oscillations électriques forcées en régime sinusoïdal: circuit RLC série

Un circuit RLC en série initialement chargé est le siège d'oscillations électriques libres mais amorties car le circuit dissipe de l'énergie par effet joule. Pour compenser ces pertes d'énergie on peut appliquer une tension sinusoïdale au circuit RLC: on a ainsi des oscillations électriques forcées.

I. Généralités sur le courant alternatif

1. DEFINITION

Un courant alternatif sinusoïdal est un courant dont l'intensité est une fonction sinusoïdale du temps: $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$ avec:

- I_m intensité maximale
- ω la pulsation imposée par le générateur
- $\omega t + \varphi$ phase à l'instant t
- φ phase à l'origine

2. INTENSITE ET TENSION EFFICACES

a) Intensité efficace

- l'intensité efficace d'un courant alternatif I_{eff} est égale à l'intensité I d'un courant continu qui passant dans un même conducteur de résistance R y produirait durant chaque période les mêmes effets caloriques: $W = RI^2T = RI_{eff}\,T$
- considérons un dipôle AB de Résistance R parcouru par un courant alternatif sinusoïdal de période T; si $\mathscr{P}$ est la puissance reçue par le conducteur pendant l'intervalle de temps dt, l'énergie reçue sera égale à $dw = \mathscr{P}dt = RI^2dt$. Durant une période T:

  $W = \int_0^T \mathscr{P}\mathrm{d}t = \int_0^T RI^2\mathrm{d}t$.

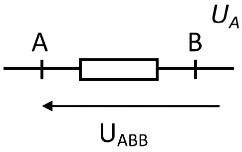
En prenant $\varphi = 0$ on obtient $i = I_m \sin(\omega t) \Rightarrow i^2 = I_m^2 \sin(\omega t)^2$ or $\sin^2(\alpha) = \dfrac{1-\cos(2\alpha)}{2}$

$$\Rightarrow W = \int_0^T RI_m^2 \sin^2(\omega t)\mathrm{d}t = \int_0^T R\frac{I_m^2}{2}(1-\cos(2\omega t))\mathrm{d}t$$

$\Rightarrow W = R\dfrac{I_m^2}{2}\displaystyle\int_0^T \mathrm{d}t - R\dfrac{I_m^2}{2}\int_0^T \cos(2\omega t)\mathrm{d}t \Rightarrow W = RI_m^2\dfrac{T}{2}$ or d'après la définition de I_{eff} on a

$$W = RI_{eff}^2T \Rightarrow W = RI_{eff}^2T = RI_m^2\frac{T}{2} \Rightarrow \frac{I_m^2}{2} = I_{eff}^2 \Rightarrow \boxed{I_{eff} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}}$$

b) tension efficace



$$U_{AB} = RI \Rightarrow U_{max} = RI_m = RI_{eff}\sqrt{2} \Rightarrow U_{max} = U_{eff}\sqrt{2}$$

$$\boxed{U_{eff} = \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}}$$

Remarque: en courant alternatif l'ampèremètre et le voltmètre mesurent les valeurs efficaces, les valeurs maximales sont mesurées par l'oscilloscope.

3. Impedance d'un dipole

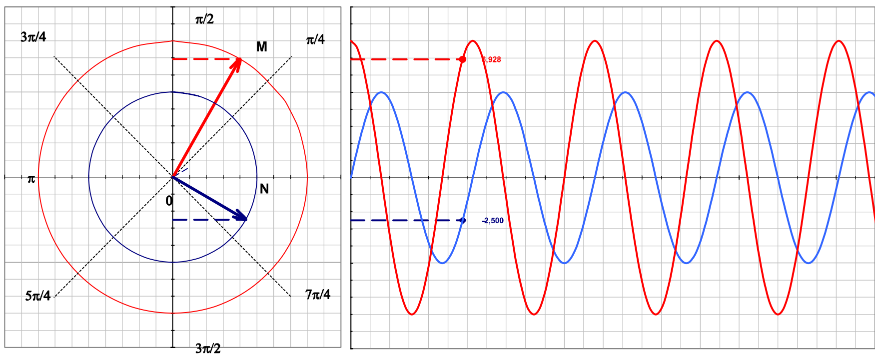
On définit l'impédance d'un dipôle Z le rapport: $\boxed{Z = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{U_{max}}{I_{max}}}$ Z s'exprime en ohm(Ω) et dépend de la fréquence du courant alternatif.

L'inverse de l'impédance $\boxed{y = \frac{1}{Z}}$ est appelé admittance, elle s'exprime en siemens (symbole S)

II. Représentation de Fresnel d'une valeur sinusoïdale

1. Principe

- Considérons un vecteur $\overrightarrow{OM}$ de module a qui tourne dans le plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ autour de son origine O avec une vitesse angulaire ω constante. Si à $t = 0$ l'angle $(\overrightarrow{OM}, \vec{i}) = \varphi$ est la phase à l'origine et à un instant t quelconque la phase est l'angle $\omega t + \varphi = \left(\overrightarrow{OM}, \vec{i}\right)$. Projetons l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe $\vec{j}$, la valeur algébrique de la projection est à l'instant t $y = a\sin(\omega t + \varphi)$



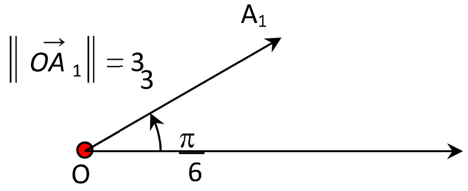
Dans l'exemple: $\overline{OM} = 8\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ et $\overline{ON} = 5.\sin(\omega t)$

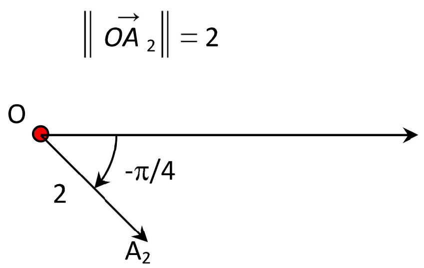
- Le mouvement de la projection du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe Oy est en mouvement sinusoïdal d'amplitude $a = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ de pulsation ω (vitesse angulaire du vecteur tournant $\overrightarrow{OM}$) et de phase à l'origine $\varphi = (\overrightarrow{OM}, \vec{i})$ à $t = 0$.

- Réciproquement on peut faire correspondre un vecteur tournant à toute fonction sinusoïdale $y = a.\sin(\omega t + \varphi)$. Par convention on représente la fonction y par un vecteur tournant $\overrightarrow{OM}$ dans sa position initiale.

<u>Exemples</u>: représentons les vecteurs tournant associés aux fonctions sinusoïdales:

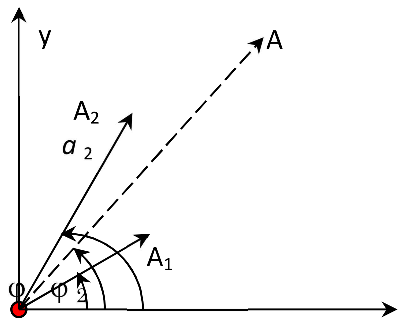
$$y_1 = 3\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ et } y_2 = 2\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OA_1} = \left(3\,;\,\frac{\pi}{6}\right) \text{ et } \overrightarrow{OA_2} = \left(2\,;\,-\frac{\pi}{4}\right)$$

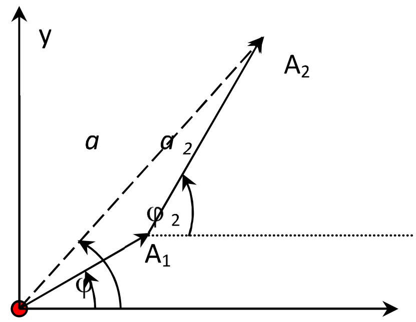




2. SOMME DE DEUX GRANDEURS SINUSOÏDALES DE MEME PULSATION

Soient $y_1 = a_1\sin(\omega t + \varphi_1)$ et $y_2 = a_2\sin(\omega t + \varphi_2)$. Déterminons la somme $y = y_1 + y_2$





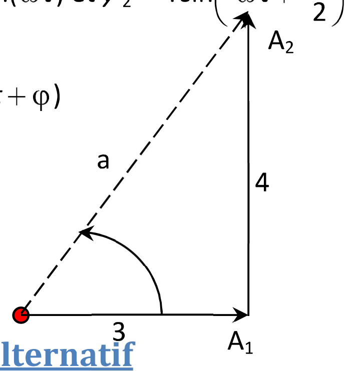
$y = y_1 + y_2 = a.\sin(\omega t + \varphi)$ où a et φ sont des constantes déterminées par le calcul ou graphiquement.

<u>Application</u>: déterminer la somme $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 = 3\sin(\omega t)$ et $y_2 = 4\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

On pose: $\left\| \overrightarrow{OA}_1 \right\| = 3; \left\| \overrightarrow{OA}_2 \right\| = 4$ et $y = y_1 + y_2 = a \times \sin(\omega t + \varphi)$

$a = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

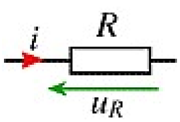
$\tan\varphi = \frac{4}{3} \Rightarrow \varphi = 0{,}93$ rad d'où $y = 5 \times \sin(\omega t + 0{,}93)$



III. Étude de quelques dipôles en courant alternatif

1. RESISTOR

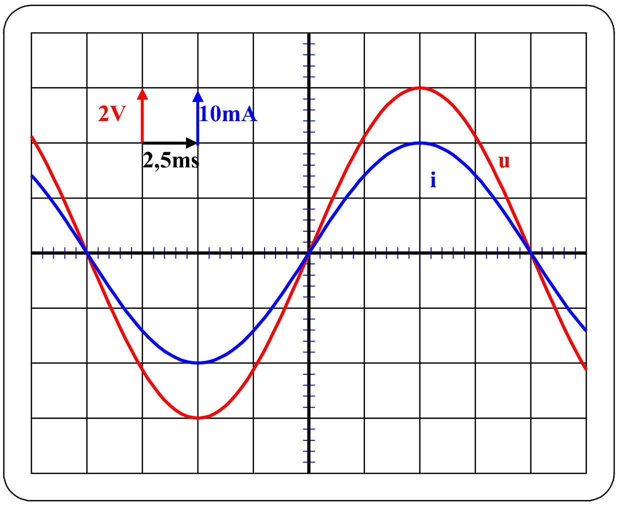
On pose $i = I_m \sin\omega t$ donc $u = Ri = RI_m \sin\omega t = U_m \sin\omega t$ avec



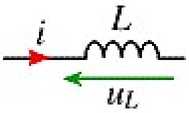
$U_m = RI_m \Rightarrow \boxed{Z = \frac{U_m}{I_m} = R}$

i et *u* sont en phase, le déphase $\boxed{\varphi = 0}$

Résistor de Résistance R = 300Ω

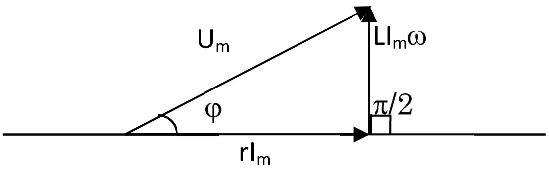


2. BOBINE(R; L)



$i = I_m \sin\omega t \Rightarrow u_L = ri - e = ri + L\dfrac{di}{dt}$

$$u_L = rI_m \sin\omega t + LI_m\omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$



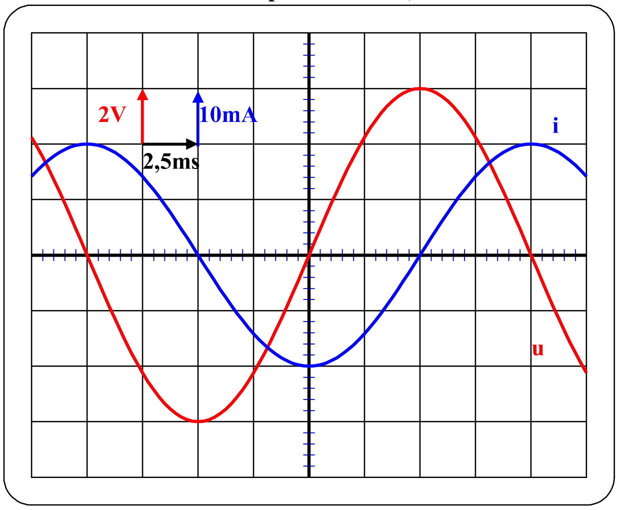
Théorème de Pythagore: $U_m^2 = r^2 I_m^2 + L^2 I_m^2 \omega^2$ d'où l'impédance: $\boxed{Z = \dfrac{U_m}{I_m} = \sqrt{r^2 + L^2\omega^2}}$ et

$$\tan\varphi = \frac{L\omega I_m}{rI_m} = \frac{L\omega}{r} \Rightarrow \boxed{\tan\varphi = \frac{L\omega}{r}}$$

u et i sont déphasés: u est en avance de φ sur i

<u>Remarque</u>: le terme Lω est appelé réactance d'induction. Elle s'exprime en Ω.

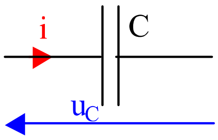
Bobine d'impédance L = 0,95H



On détermine graphiquement le déphasage par la relation: $\begin{cases} 2\pi \rightarrow T \\ \varphi \rightarrow t \end{cases} \Rightarrow \boxed{\varphi = \dfrac{2\pi t}{T}}$

<u>Exemple</u>: $\varphi = \dfrac{2\pi 2}{8} = \dfrac{\pi}{2}$ (bobine pure r=0)

3. CAPACITE

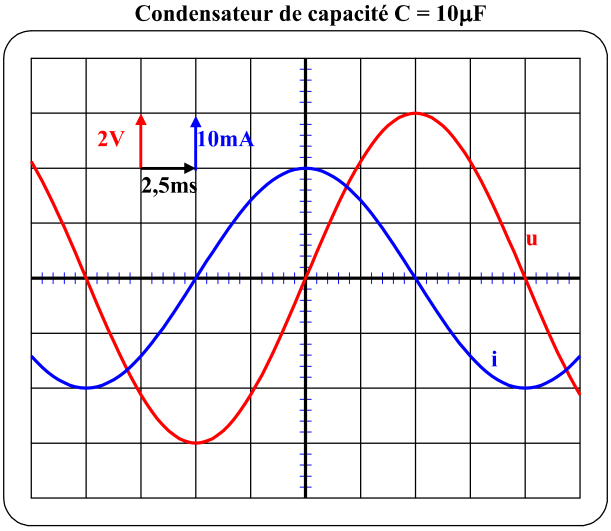


$i = I_m \sin\omega t;\ u_C = \dfrac{q}{C} = \dfrac{1}{C}\int i dt = -\dfrac{I_m}{C\omega}\cos\omega t = \dfrac{I_m}{C\omega}\sin\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right)$

on a $U_m = \dfrac{I_m}{C\omega}$ d'où $\boxed{Z = \dfrac{1}{C\omega}}$

u et i sont déphasés: u est en retard de $\dfrac{\pi}{2}$ sur i $\boxed{(\varphi = -\dfrac{\pi}{2})}$

Condensateur de capacité C = 10µF

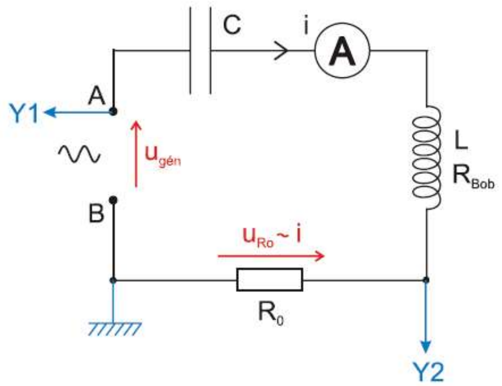


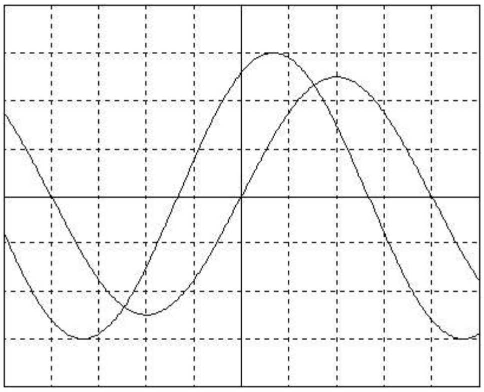
<u>Remarque</u>: la grandeur $\dfrac{1}{C\omega}$ s'exprime en Ω, elle est appelée réactance de capacité.

IV. Circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé

1. OSCILLATIONS FORCEES

- Excitation: Un générateur excite un circuit RLC avec une tension alternative sinusoïdale u_g de fréquence variable.
- Réponse: Le circuit répond à cette excitation par un courant alternatif d'intensité i, dont nous visualisons à l'aide de la courbe de u_R.
- En même temps, nous visualisons les courbes de u_g (inversée) et i en fonction du temps à l'aide d'un oscillographe.

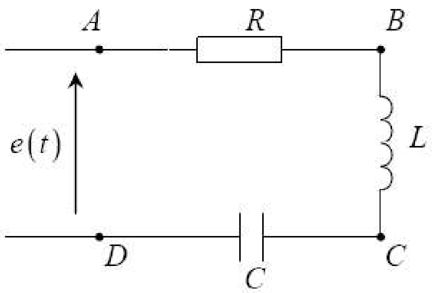




- les deux sinusoïdes ont la même période et déphasées
- l'une représente la tension imposée par le GBF et l'autre représente les variations de l'intensité du courant (u=Ri)
- le circuit oscille avec une pulsation imposée par le générateur souvent différente de la pulsation propre ω_0: les oscillations sont forcées.

2. IMPEDANCE ET DEPHASAGE DU DIPOLE RLC

a) équation différentielle



La loi d'additivité des tensions: $u_{AD} = u_{AB} + u_{BC} + u_{CD}$

$$u_{AB} = Ri = R\frac{dq}{dt}\,;\; u_{BC} = -e = L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}\,;\; u_{CD} = \frac{q}{C}$$

$\Rightarrow \boxed{e(t) = L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}}$ équation différentielle d'un circuit RLC

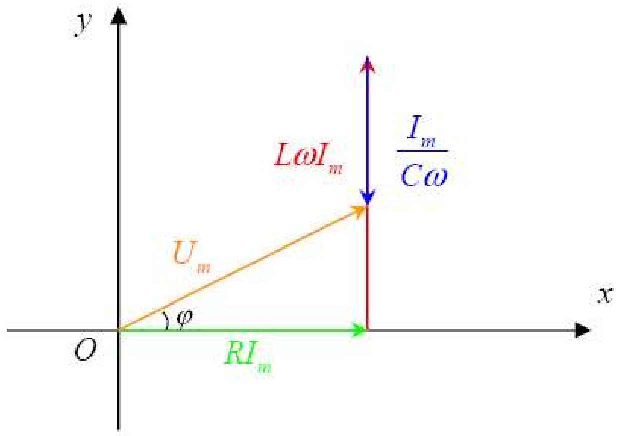
b) impédance du circuit RLC

$$e(t) = L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \Rightarrow e(t) = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i dt$$

on pose $i = I_m \sin\omega t$ et $e(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$

$$\frac{di}{dt} = I_m \omega\cos\omega t = I_m\omega\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right); \int i dt = -\frac{I_m}{\omega}\cos\omega t = \frac{I_m}{\omega}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$e(t) = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i dt \Rightarrow \boxed{U_m \sin(\omega t+\varphi) = LI_m\omega\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + RI_m\sin\omega t + \frac{I_m}{C\omega}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}$$



Théorème de Pythagore: $U_m^2 = (RI_m)^2 + \left(L\omega I_m - \frac{I_m}{C\omega}\right)^2 \Rightarrow U_m = I_m\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$ d'où

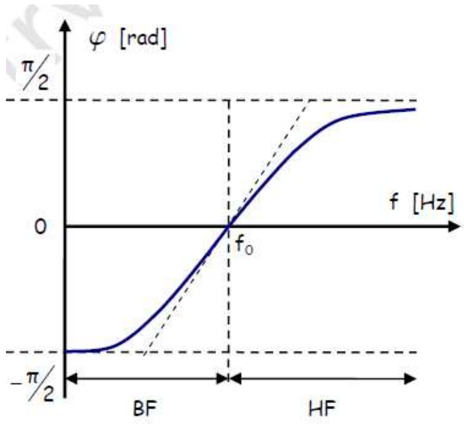
l'impédance: $\boxed{Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$

Remarque: le terme $L\omega - \frac{1}{C\omega}$ est appelé réactance du circuit RLC.

c) déphasage

$$\cos\varphi = \frac{RI_m}{U_m} = \frac{RI_m}{ZI_m} = \frac{R}{Z} \Rightarrow \boxed{\cos\varphi = \frac{R}{Z}}$$

$$\tan\varphi = \frac{L\omega I_m - \frac{I_m}{C\omega}}{RI_m} \Rightarrow \boxed{\tan\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \frac{L}{R}\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega}}$$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ pulsation propre



Remarque:

- si $L\omega > \frac{1}{C\omega}$ ($\omega > \omega_0$) l'effet d'inductance l'emporte sur l'effet de capacité: tanφ>0 $\Rightarrow$ sinφ>0

  donc $\varphi > 0$: u est en avance de φ sur i.
- si $L\omega < \frac{1}{C\omega}$ ($\omega < \omega_0$) l'effet de capacité l'emporte sur l'effet d'inductance : tanφ<0 $\Rightarrow$ sinφ<0

  donc $\varphi < 0$: u est en retard de φ sur i.
- si $L\omega = \frac{1}{C\omega}$ ($\omega = \omega_0$) tanφ=0 $\Rightarrow$ sinφ=0 donc $\varphi = 0$: u et i sont phase: c'est la résonance.

3. RESONANCE D'INTENSITE

Lorsqu'on varie la fréquence du générateur, on observe deux sinusoïdes de même fréquence mais on remarque que l'amplitude de la sinusoïde visualisant i passe par un maximum puis décroit. La fonction I=f(ω) ou I=f(N) passe par un maximum pour $\omega = \omega_0$: c'est la résonance d'intensité. On dit que le dipôle RLC est un résonateur et le générateur un excitateur.

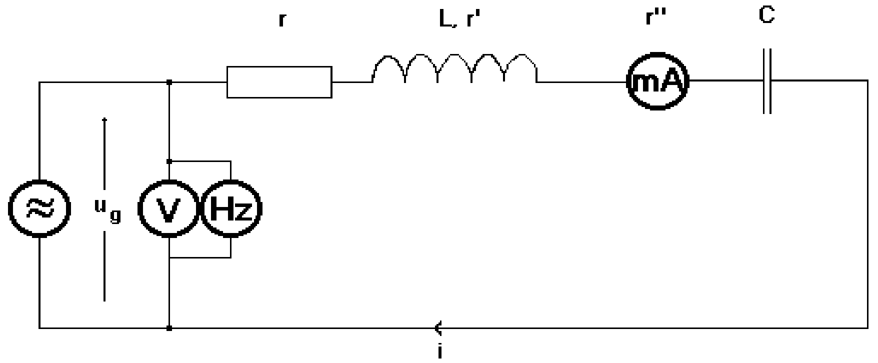
Propriétés de la résonance

A la résonance I est maximale ($I = \frac{U}{Z}$) c'est-à-dire donc Z minimale. $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$ est minimale si $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \Rightarrow LC\omega^2 = 1 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$; $\omega = \omega_0 \Rightarrow$ Z=R et tanφ=0

A la résonance:

- $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- $Z = R$: le dipôle se comporte comme un conducteur ohmique de résistance R.
- $\varphi = 0$, u et i sont en phase

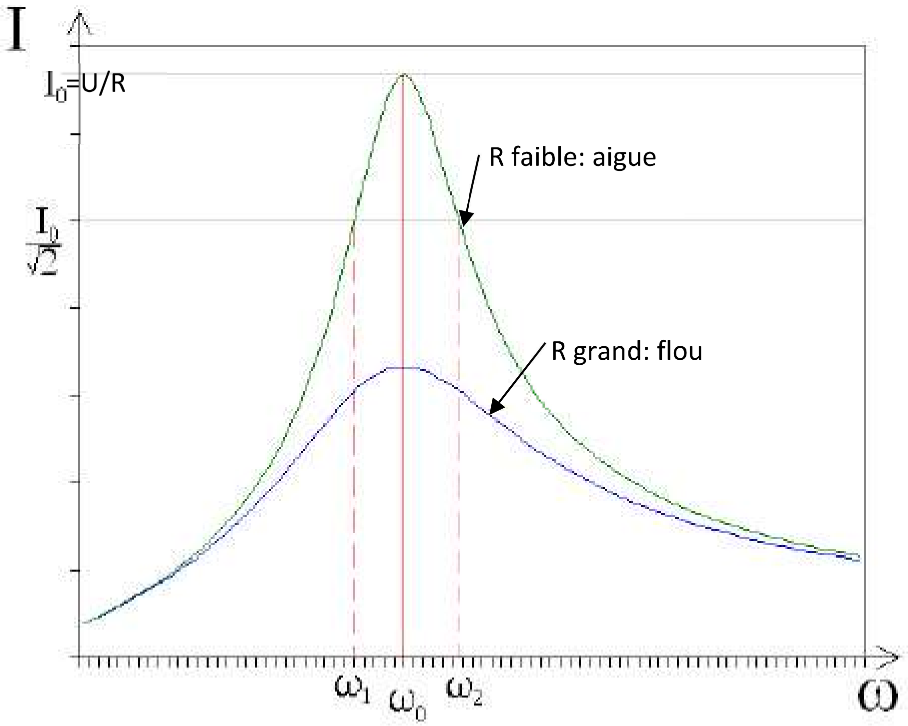
4. COURBE DE RESONANCE D'INTENSITE



On pose: $R = r + r'$

En maintenant U constante, faisons varier ω ou la fréquence N et relevons à l'aide de l'ampèremètre les différentes valeurs de I. Traçons la courbe $I=f(\omega)$

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$



Cette courbe est appelée courbe de résonance. $\omega_0=2\pi N_0$ est la fréquence de résonance, où I est à son maximum $\boxed{I_0 = \frac{U}{R}}$.

L'intensite du courant est nulle à frequence nulle (à cause du condensateur) et à fréquence infinie (à cause de l'inducteur).

5. BANDE PASSANTE

La bande passante à "trois décibels", ou encore à 3dB, du dipôle RLC est l'intervalle de fréquence pour lequel $I \geqslant \frac{I_0}{\sqrt{2}}$. Les pulsations ω_1 et ω_2, limites de la bande passante à 3dB, sont telles que: $I(\omega_1) = I(\omega_2) = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$. La largeur de la bande passante à 3 dB est égale à: $\boxed{\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1}$.

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{U}{R\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)^2}}$$

ω_1 et ω_2 sont définis par $I(\omega) = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ on a donc:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} = \pm 1$$

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = R \ (1) \qquad \text{ou} \qquad L\omega - \frac{1}{C\omega} = -R \ (2)$$

$$(1) \Rightarrow LC\omega^2 - RC\omega - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = R^2C^2 + 4LC > 0 \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{RC + \sqrt{\Delta}}{2LC} \text{ et } \omega' = \frac{RC - \sqrt{\Delta}}{2LC} \text{ (à rejeter car négatif)}$$

$$(2) \Rightarrow LC\omega^2 + RC\omega - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = R^2C^2 + 4LC > 0 \Rightarrow$$

$$\omega'' = \frac{-RC + \sqrt{\Delta}}{2LC} \text{ et } \omega''' = \frac{-RC - \sqrt{\Delta}}{2LC} \text{ (à rejeter car négatif)}$$

On a donc $\omega_1 = \frac{-RC + \sqrt{\Delta}}{2LC}$ et $\omega_2 = \frac{RC + \sqrt{\Delta}}{2LC}$ et enfin $\omega_2 - \omega_1 = \frac{2RC}{2LC} \Rightarrow \boxed{\Delta\omega = \frac{R}{L}}$

On a aussi $\Delta\omega = 2\pi\Delta N \Rightarrow \boxed{\Delta N = \frac{R}{2\pi L}}$

La largeur de la bande passante ne dépend que des caractéristiques du dipôle RLC.

6. FACTEUR DE QUALITE

L'acuité des courbes de résonances est caractérisée par le facteur de qualité Q du circuit.

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{1}{RC\omega_0}} \text{ (sans unité)}$$

Plus Q est petit, plus la courbe est large et que le circuit est moins sélectif. La valeur du facteur de qualite est d'autant plus grande que la resistance totale du circuit est petite.

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R}$$ (à ne pas confondre avec la charge du condensateur!)

7. PHENOMENE DE SURTENSION

La tension maximale du condensateur à la résonance est $U_c = \frac{I_0}{C\omega_0}$ or $I_0 = \frac{U}{R}$

$$\Rightarrow \quad U_C = \frac{U}{RC\omega_0} \quad \Rightarrow \boxed{U_C = QU}$$

La tension maximale aux bornes de la bobine à la résonance est: $U_b = L\omega_0 I_0 = L\,\frac{U}{R}\,\omega_0 \frac{\omega_0}{\omega_0}$

$$\Rightarrow \quad U_b = \frac{U}{RC\omega_0} \Rightarrow \boxed{U_b = QU}$$

On observe un phénomène de surtension aux bornes du condensateur et de la bobine à la résonance. L'amplitude U_C de la tension aux bornes du condensateur est très supérieure à celle délivrée par le générateur.
Les amplitudes de tension efficace en fonction de la frequence sont representées qualitativement ci-dessous:

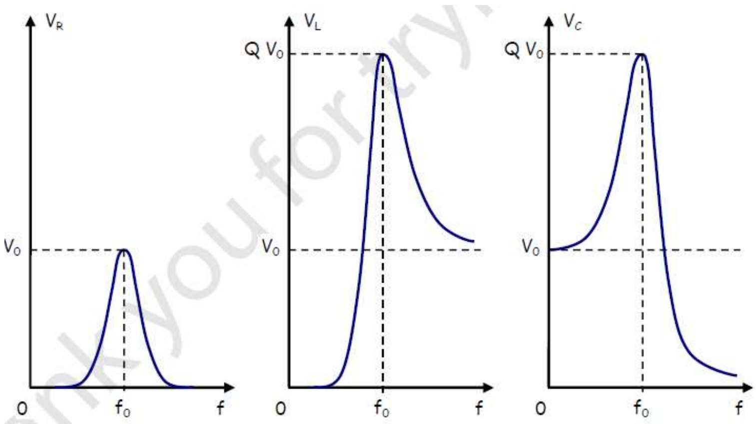


fig: résistance — fig.: inducteur — fig.: condensateur

V. Puissance en courant alternatif

1. PUISSANCE INSTANTANEE

La définition de la puissance instantanée reçue par un dipôle est la même que celle de la puissance en régime continu. Pour un dipôle (AB) quelconque, la puissance instantanée reçue est définie par:

$$\boxed{p(t) = u_{AB}(t)\,i_{AB}(t)}$$

en régime sinusoïdal, on a $i(t) = I_m\cos(\omega t)$ et $u(t) = U_m\cos(\omega t + \varphi)$, on a donc:

$$\boxed{p(t) = U_m I_m \cos(\omega t)\cos(\omega t + \varphi)}$$

p(t) est donnée par le produit de deux fonctions sinusoïdales. On peut utiliser les relations trigonométriques pour se ramener à une somme de sinusoïdes.

$$\begin{cases}\cos(a+b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b\\ \cos(a-b)=\cos a.\cos b+\sin a.\sin b\end{cases}\Rightarrow \cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos a.\cos b$$

$$\begin{cases}a=\omega t\\ b=\omega t+\varphi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+b=2\omega t+\varphi\\ a-b=-\varphi\end{cases}\text{ donc on a}$$

$$\boxed{p(t)=U_mI_m[\cos(2\omega t+\varphi)+\cos(\varphi)]}$$

On constate que p(t) est la somme de deux termes: un terme sinusoïdal mais de fréquence double et un terme constant.

2. PUISSANCE MOYENNE

$$<p>=\frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{U_mI_m}{2}[\cos(\omega t+\varphi)+\cos\varphi]dt=\frac{U_mI_m}{2}\cos\varphi$$

$$\Rightarrow\boxed{<p>=\frac{U_mI_m}{2}\cos\varphi}\text{ ou }<p>=UI\cos\varphi$$

Cette puissance est appelée puissance active

$\frac{U_mI_m}{2}$ =UI: Puissance apparente en VA(volt-Ampère)

$\cos\varphi$: facteur de puissance (sans unité)

- cas d'un résistor

$$\begin{cases}U_m=RI_m\\ \varphi=0\end{cases}\Rightarrow\ <p>=\frac{RI_m{}^2}{2}$$

On définit les grandeurs efficaces à partir de cette relation: l'intensité efficace est l'intensité qui devrait parcourir R en courant continu pour obtenir le même dégagement de chaleur (même énergie dissipée)

$$I^2{}_{eff}=\frac{I^2{}_m}{2}\Rightarrow I_{eff}=\frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

- cas d'une bobine parfaite

$$\begin{cases}U_m=Z_LI_m=L\omega I_m\\ \varphi=+\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\ <P>=\frac{L\omega I_m{}^2}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

on constate donc qu'une bobine parfaite ne consomme pas d'énergie.

- cas d'un condensateur

$$\begin{cases} U_m = Z_C I_m = \dfrac{I_m}{C\omega} \\ \varphi = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \langle P \rangle = \frac{I_m{}^2}{2C\omega}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

un condensateur ne consomme pas d'énergie.

Attention, la puissance instantanée reçue par un condensateur ou une bobine n'est toujours pas nulle.

$$p_L(\mathrm{t}) = \frac{U_m I_m}{2}\cos\left(2\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ et } p_C(t) = \frac{U_m I_m}{2}\cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Lorsqu'une bobine et un condensateur sont en série dans un circuit, leurs puissances sont en opposition de phase. Quand $p_L(t)$ est à son maximum, $p_C(t)$ est à son minimum, et inversement.

Dans un circuit RLC, la bobine et le condensateur vont échanger de l'énergie. Ces échanges d'énergie seront d'autant plus forts que la pulsation imposée par le GBF sera proche de la fréquence propre du circuit $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$: c'est le phénomène de résonance.