Oscillations mécaniques libres

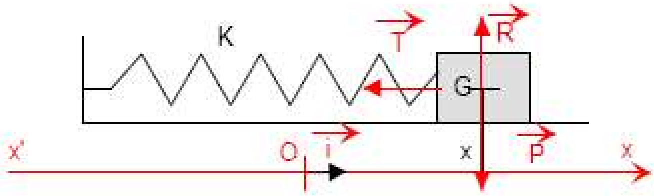
I. Généralités

- un mouvement périodique est un mouvement qui se répète de manière identique à des intervalles de temps réguliers.
- un mouvement oscillatoire est un mouvement périodique de va et de vient de part et d'autre d'une position d'équilibre.
- la période est la durée d'une oscillation complète.
- les oscillations sont dites libres lorsque le système une fois, le système, écarté de sa position d'équilibre est abandonné à lui-même.
- s'il n'existe aucune force de frottement (énergie mécanique E constante: ΔE=0) les oscillations ne sont pas amorties et le mouvement continu indéfiniment.
- s'il existe des forces de frottement le système perd de l'énergie mécanique ($\Delta E=W(\vec{f})$) les oscillations sont progressivement amorties et le système finit par s'arrêter.

II. Oscillateurs en translation

1. Pendule elastique horizontal

On suppose que la masse m glissant sans frottement sur un plan horizontal est reliée à l'une des extrémités d'un ressort de raideur k, l'autre extrémité étant fixe. Soit le repère (G_o, $\vec{i}$).



a) Équation différentielle du mouvement

Système : la masse m

Référentiel : laboratoire

Bilan des forces : $\vec{R}$, $\vec{P}$ et $\vec{T}$

Théorème du centre d'inertie : $\vec{P}+\vec{T}+\vec{R}=m\,\vec{a}$

Projetons la relation vectorielle sur l'axe xx' : 0+0-T=m$\ddot{x}$ $\Rightarrow$ −kx=m$\ddot{x}$

$$\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$$

$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$ est l'équation différentielle d'un mouvement harmonique.

b) Solution de l'équation différentielle

Posons $\omega_0{}^2 = \dfrac{k}{m} \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Cette équation a pour solution : $x = x_m\cos(\omega_0 + \varphi)$; $x_m>0$ et $\varphi\in[0;2\pi[$ sont des constantes déterminées à partir des conditions initiales. ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur.

- preuve: On notera $\ddot{x} = x''$ et $\dot{x} = x'$

$x = x_m\cos(\omega_0 t+\varphi)$; $\dot{x} = -x_m\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi)$; $\ddot{x} = -x_m\omega_0{}^2\cos(\omega_0 t+\varphi)$

Calculons $\ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = -x_m\omega_0{}^2\cos(\omega_0 t+\varphi) + \dfrac{k}{m}x_m\cos(\omega_0 t+\varphi) = 0$ car $\omega_0{}^2 = \dfrac{k}{m}$

$x = x_m\cos(\omega_0 t+\varphi)$ est bien solution de l'équation différentielle.

$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}}$: pulsation propre; $\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}}$: période propre; $\boxed{f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}}$: fréquence propre.

Application: Montrer que $x(t) = x_m\sin(\omega t+\varphi)$ est également solution de l'équation différentielle du mouvement

Remarque: l'amplitude des oscillations dépend des conditions initiales sur la vitesse et la position

$$\begin{cases} x(t) = X_m\cos(\omega_0 t+\varphi) \\ \dot{x}(t) = -\omega_0 X_m\sin(\omega_0 t+\varphi) \end{cases} \Rightarrow \text{à } t=0 \begin{cases} x(0) & = x_0 & = X_m\cos\varphi \\ \dot{x}(0) & = v_0 & = -\omega_0 X_m\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_m\cos\varphi = x_0 \\ X_m\sin\varphi = -\dfrac{v_0}{\omega_0} \end{cases}$$

Comme $(X_m\cos\varphi)^2 + (X_m\sin\varphi)^2 = X_m^2$, on obtient : $\boxed{X_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{v_0}{\omega_0}\right)^2}}$

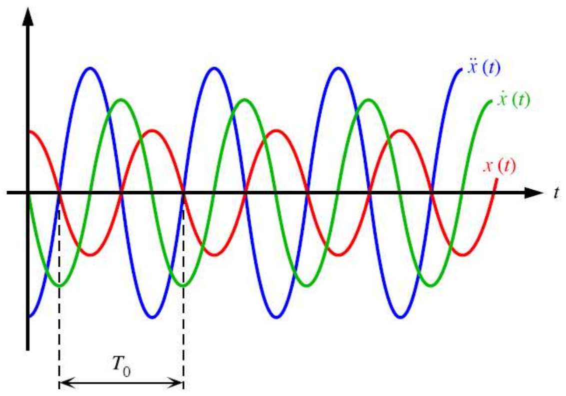
c) Représentation graphique

$x = x_m\cos(\omega_0 t+\varphi)$;

$\dot{x} = -x_m\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi) = \omega_0 x_m\cos\left(\omega_0 t+\varphi+\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \dot{x}$ est en avance de $\dfrac{\pi}{2}$ par rapport à x (quadratures de phase)

$\ddot{x} = -x_m\omega_0{}^2\cos(\omega_0 t+\varphi) = -\omega_0 x \Rightarrow \ddot{x}$ et x sont en opposition de phase.

Les facteurs qui multiplient les fonctions trigonométriques sont les valeurs maximales de la vitesse $v_{max} = x_m\omega_0$ et de l'accélération $a_{max} = x_m\,\omega_0{}^2$



d) *étude énergétique*

A un instant t donné: $Em = Ec + Ep_e = \frac{1}{2}mx'^2 + \frac{1}{2}kx^2$

$$E = \frac{1}{2}m[-x_m\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi)]^2 + \frac{1}{2}k[x_m\cos(\omega_0 t + \varphi)]^2 = \frac{1}{2}kx_m{}^2$$

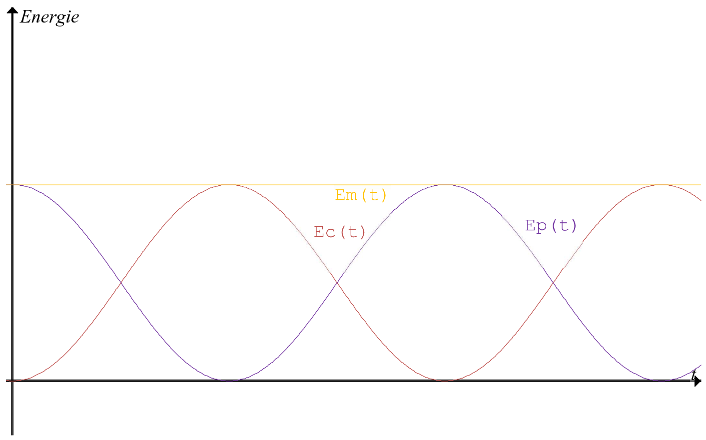
$$E = = \frac{1}{2}kx_m{}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0{}^2x_m{}^2 = \frac{1}{2}mv_m{}^2 \text{ avec } v_m = x_m\omega_0$$

Le système est conservatif car l'énergie mécanique est constante. Donnons une représentation graphiquement de Ep, Ec et E dans le cas où $x = x_m\cos\omega t$

$$Ep = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_m{}^2\cos^2\omega t = \frac{1}{4}kx_m{}^2(1+\cos 2\omega t)$$

$$Ec = \frac{1}{2}mx'^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x_m{}^2\sin^2\omega t = \frac{1}{4}kx_m{}^2(1-\cos 2\omega t)$$

Les deux fonctions Ep et Ec sont périodiques de période $\frac{\pi}{\omega} = \frac{T_0}{2}$.



Au cours du mouvement, il y a échange mutuel et permanent des formes cinétique et potentielle de l'énergie.

<u>Réciproque</u>: E=$\frac{1}{2}mx'^2+\frac{1}{2}kx^2$

$$E=cte \Rightarrow \frac{dE}{dt}=0=mx''x'+kx'x=x'(mx''+kx)=0 \Rightarrow x\neq 0 \text{ donc } mx''+kx=0$$

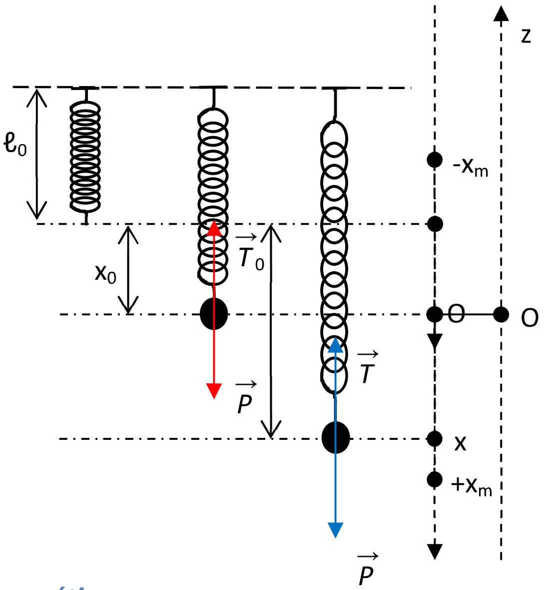
2. PENDULE ELASTIQUE VERTICAL

a) équation différentielle

A l'équilibre: $\vec{T}_0+\vec{P}=\vec{0} \Rightarrow$ (Ox): $-kx_0+mg=0$ (1)

En mouvement: $\vec{T}+\vec{P}=m\vec{a} \Rightarrow$ (Ox): $-k(x_0+x)+mg=mx''$ (2)

(1) et (2) $\Rightarrow -kx=mx'' \Rightarrow \boxed{mx''+kx=0}$



b) étude énergétique

$$E=Ec+Ep_e+Ep_p=\frac{1}{2}mx'^2+\frac{1}{2}k(x_0+x)^2-mgx$$

$$E=\frac{1}{2}mx'^2+\frac{1}{2}k(x_0^2+2xx_0+x^2)-mgx=\frac{1}{2}mx'^2+\frac{1}{2}k(x_0^2+x^2)+x(kx_0-mg) \text{ or } -kx_0+mg=0$$

$$\text{d'où: } \boxed{E=\frac{1}{2}mx'^2+\frac{1}{2}k(x_0^2+x^2)}$$

Montrons que E est une constante

$$E=\frac{1}{2}mx_m^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi)+\frac{1}{2}kx_0^2+\frac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi)$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2}kx_m{}^2 + \frac{1}{2}kx_0{}^2 = cte}$$

L'énergie mécanique se conserve: le système est conservatif.

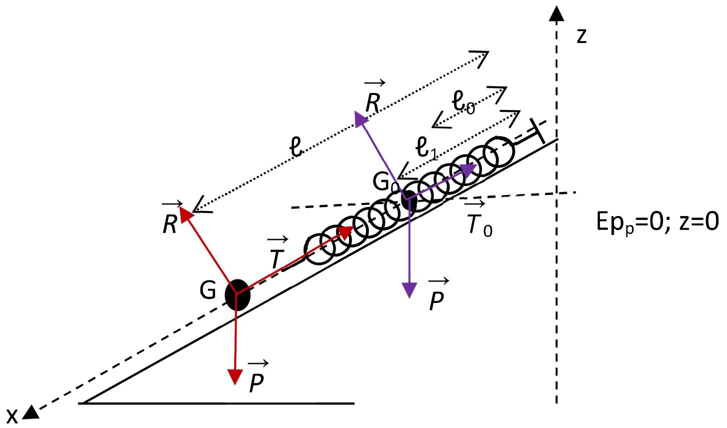
*Réciproque:

E = $\frac{1}{2}mx'^2 + \frac{1}{2}k\left(x_0{}^2 + x^2\right)$: E=cte $\Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow mx''x' + \frac{1}{2}\times 2xx' = x'(mx'' + kx) = 0$; x' $\neq 0$ alors

$$\boxed{mx'' + kx = 0}$$

3. PENDULE ELASTIQUE SUR UN PLAN INCLINE

a) étude dynamique



A l'équilibre: $\vec{R} + \vec{P} + \vec{T}_0 = \vec{0} \Rightarrow$ G_0x: $0 + mg\sin\alpha - k\left(\ell_1 - \ell_0\right) = 0$ (1)

En mouvement: $\vec{R} + \vec{P} + \vec{T}$ = m $\vec{a} \Rightarrow$ (G_0x): $0 + mg\sin\alpha - k\left(\ell - \ell_0\right) = mx''$ (2)

Introduisons ℓ_1 dans l'expression (2):

$$mg\sin\alpha - k\left(\ell + \ell_1 - \ell_1 - \ell_0\right) = mx'' \Rightarrow mg\sin\alpha - k\left(\ell_1 - \ell_0\right) - k\left(\ell - \ell_1\right) = mx'' \Rightarrow mx'' + k\left(\ell - \ell_1\right) = 0$$

car $mg\sin\alpha - k\left(\ell_1 - \ell_0\right)$=0 d'après (1) d'où en posant x=$\left(\ell - \ell_1\right)$, on a: $\boxed{mx'' + kx = 0}$

b) étude énergétique

$$E = \frac{1}{2}mx'^2 + \frac{1}{2}k\left(x + \ell_1 - \ell_0\right) - \text{mgxsin}\alpha$$

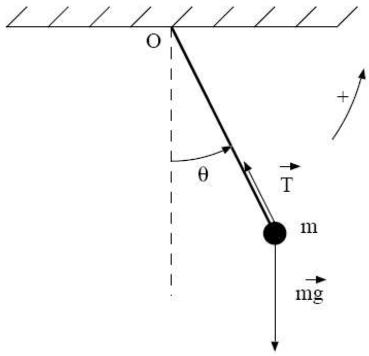
$$\frac{dE}{dt} = mx''x' + \frac{1}{2}k\times 2x'\left(x + \ell_1 - \ell_0\right) - mgx'\sin\alpha = x'\left[mx'' + kx + k\left(\ell_1 - \ell_0\right) - mg\sin\alpha\right] = 0$$

puisque $+ mg\sin\alpha - k\left(\ell_1 - \ell_0\right) = 0$ donc: $\boxed{mx'' + kx = 0}$

III. Oscillateurs en rotation

1. PENDULE SIMPLE

Un pendule simple d'une longueur ℓ est écarté de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 puis abandonné à lui-même.



a) Application de la conservation de l'énergie mécanique

La position de (m) sur la verticale est prise pour origine: Ep=0 et z=0 (l'axe z est supposé ascendant). La masse m est repérée à un instant t par son abscisse angulaire θ ou élongation.

$$E = Ec + Ep = \frac{1}{2}J\omega^2 + mg\ell(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}J\frac{v^2}{\ell^2} + mg\ell(1-\cos\theta)$$

$$v = \pm\ell\omega = \pm\ell\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v^2 = \ell^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$E = \frac{1}{2}\frac{J}{\ell^2}\ell^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mg\ell(1-\cos\theta) \Rightarrow E = \frac{1}{2}J\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mg\ell(1-\cos\theta)$$

E est une constante $\frac{dE}{dt} = J\theta''\theta' + mg\ell\theta'\sin\theta = \theta'(J\theta'' + mg\ell\sin\theta) = 0 \Rightarrow J\theta'' + mg\ell\sin\theta = 0$

Pour de faible oscillations (θ<10°): $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$ (en radian) d'où $\boxed{\theta'' + \frac{mg\ell}{J}\theta = 0}$

On a: $J = m\ell^2 \Rightarrow \theta'' + \frac{g}{\ell}\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\theta'' + \omega_0^2\theta = 0}$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ .Par analogie cette équation a pour solution: $\boxed{\theta = \theta_m\cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t + \varphi\right)}$

b) Application du théorème de l'accélération angulaire (S1)

TAA: $\sum\mathcal{M}(\vec{F}) = J\theta'' \Rightarrow \mathcal{M}(\vec{T}) + \mathcal{M}(\vec{P}) = m\ell^2\theta'' \Rightarrow 0 - mg\ell\sin\theta = m\ell^2\theta''$

Pour $\theta \leqslant 10°$ $\boxed{\theta'' + \frac{g}{\ell}\theta = 0}$

2. PENDULE PESANT

G: centre d'inertie du solide

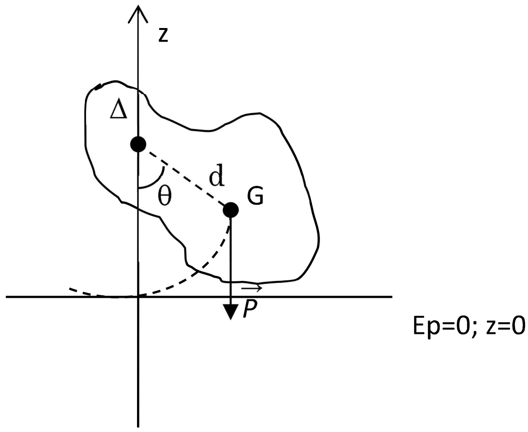
$E = Ec + Ep = \frac{1}{2}J\omega^2 + mgd(1-\cos\theta)$

$E = \frac{1}{2}J\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgd(1-\cos\theta)$

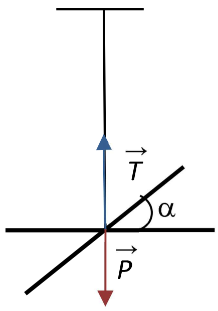
E est une constante $\frac{dE}{dt} = J\theta''\theta' + mgd\theta'\sin\theta$

$\frac{dE}{dt} = \theta'(J\theta'' + mgd\sin\theta) = 0 \Rightarrow J\theta'' + mgd\sin\theta = 0$

Pour de faible oscillations (θ<10°): $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$ (en radian) d'où $\theta'' + \omega_0^2\theta = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{mgd}{J}$



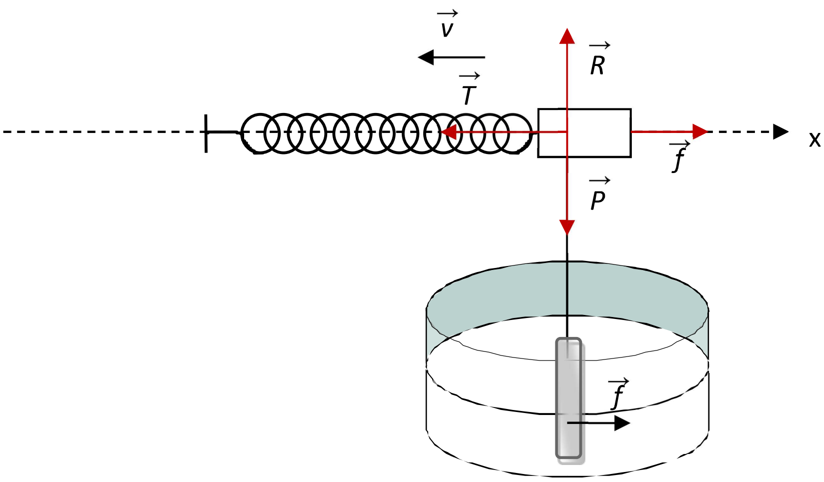
3. PENDULE DE TORSION



TAA: $\mathcal{M}(\vec{P}) + \mathcal{M}(\vec{T}) + \mathcal{M}(\mathscr{C}) = J\alpha'' \Rightarrow 0 + 0 - C\alpha = J\alpha''$ d'où $\alpha'' + \frac{C}{J}\alpha = 0$

$\boxed{\alpha'' + \omega_0^2\alpha = 0}$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}}$

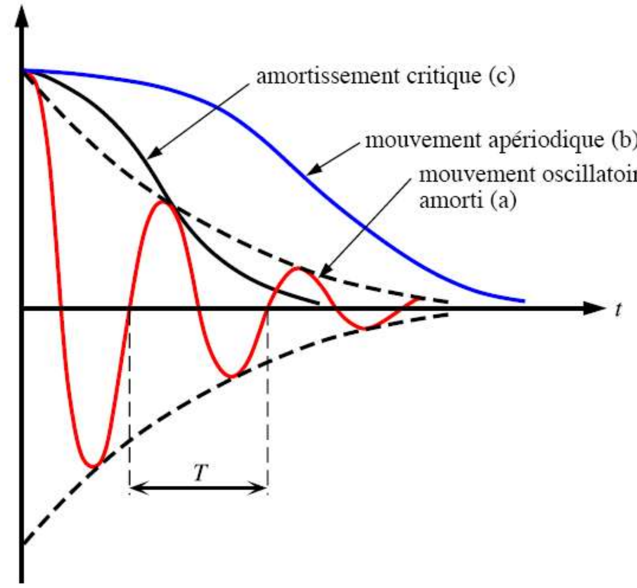
IV. Oscillateurs mécaniques amorties



La force de frottement a pour expression $\vec{f}=-\alpha\vec{V}$ (où α est le coefficient de frottement).

TCI: $\vec{R}+\vec{T}+\vec{P}+\vec{f}=m\vec{a} \Rightarrow -kx-\alpha v=mx'' \Rightarrow \boxed{m\frac{d^2x}{dt^2}+\alpha\frac{dx}{dt}+kx=0}$: équation différentielle d'un système amorti. La courbe x=f(t) présente trois types suivant les valeurs de α.

α faible (a): amortissement faible : le régime est dit pseudopériodique. La période est voisine de T_0	**α grand (b)**: amortissement important : le régime est apériodique	**α très grand (c)**: le régime est critique



V. Association de ressorts

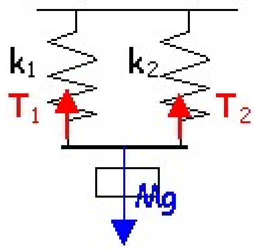
1. Association en parallele

Quel ressort unique est équivalent à ce dispositif (longueur initiale et raideur) ?

l_0 :longueur à vide du ressort 1

l'_0 :longueur à vide du ressort 2

l longueur commune de chaque ressort



corrigé

$T_1=k_1(l-l_0)$; $T_2=k_2(l-l'_0)$;

A l'équilibre : $Mg= k_1(l-l_0) + k_2(l-l'_0)$

$$Mg = (k_1 + k_2)\, l - (k_1 l_0 + k_2 l'_0)$$

$$Mg = (k_1 + k_2)[\, l - (k_1 l_0 + k_2 l'_0) / (k_1 + k_2)]$$

raideur du ressort unique : $k_1 + k_2$

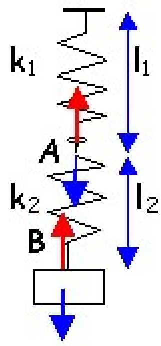
longueur à vide de ce ressort : $(k_1 l_0 + k_2 l'_0) / (k_1 + k_2)$

si les deux ressorts sont identiques : $2\,k$ et l_o

2. Association en serie

Quel ressort unique est équivalent à ce dispositif (longueur initiale et raideur) ?

l_0 :longueur à vide du ressort 1 ; l'_0 :longueur à vide du ressort 2.



corrigé

en A point immobile et sans masse les deux tensions sont égales

$$T_1 = T_2 = k_1(l_1 - l_0) = k_2(l_2 - l'_0)$$

en B : $Mg = k_2(l_2 - l'_0)$

l'allongement du système est

$$\Delta l = (l_1 + l_2) - (l_0 + l'_0)$$

$$\Delta l = (l_2 - l'_0) + (l_1 - l_0) = (l_2 + l'_0) + k_2/k_1 (l_2 - l'_0)$$

$$\Delta l = (l_2 - l'_0)[\,1 + k_2/k_1]$$

$$Mg = k_2 / [\,1 + k_2/k_1]\,\Delta l$$

raideur du ressort unique : $k_2 / [\,1 + k_2/k_1] = k_1 k_2 / (k_1 + k_2)$

longueur à vide de ce ressort : $l_0 + l'_0$

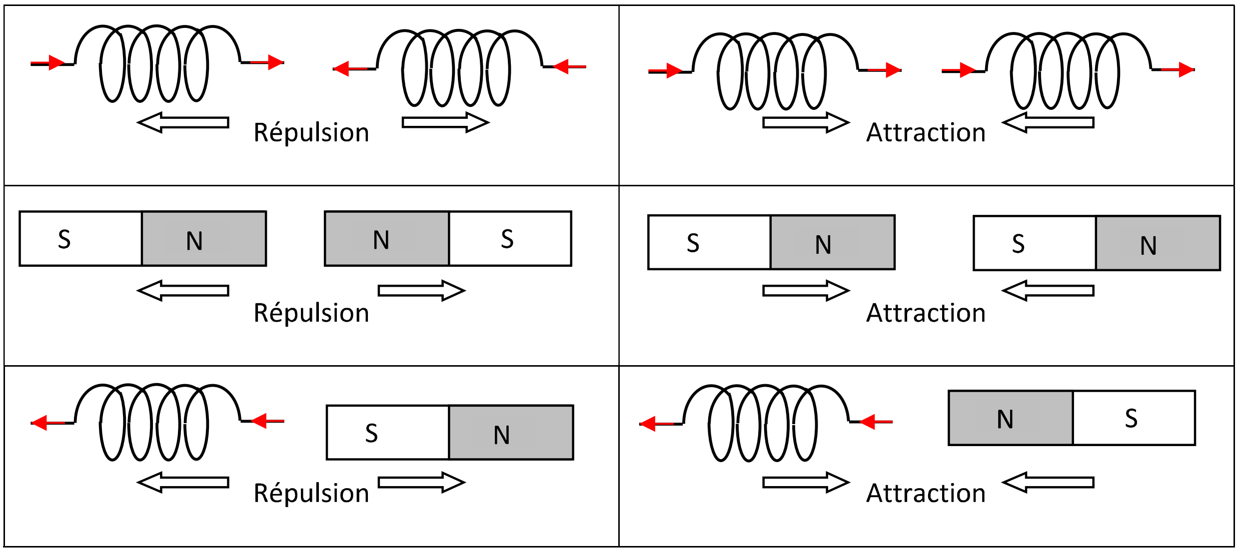
si les deux ressorts sont identiques : $0{,}5\,k$ et $2l_o$

Généralités sur les champs magnétiques

I. Interactions électromagnétiques

1. Mise en evidence

Les bobines sont parcourrues par des courants continus d'intensité I.



N: pôle nord et S: pôle sud

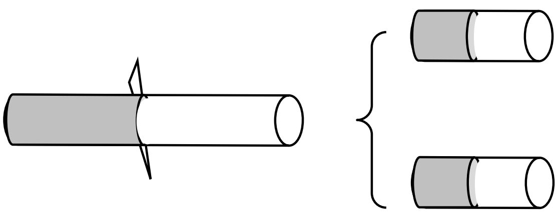
Les expériences montrent:

- des bobines parcourues par des courants de sens contraires se repoussent; elles s'attirent si les courants sont de même sens.
- des pôles d'aimant de même nom se repoussent et des pôles de noms différents s'attirent.

2. Poles d'un aimant, faces d'une bobine

L'action d'un pôle d'aimant sur une bobine dépend du sens du courant qui la parcourt. Les faces d'une bobine se comportent alors comme les pôles d'un aimant.

a. Expérience de l'aimant brisé



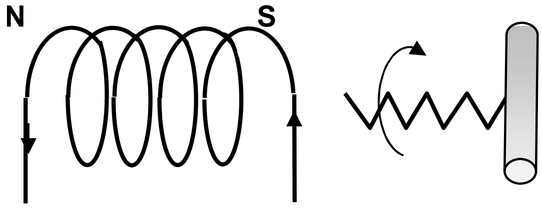
On ne peut pas séparer les deux pôles d'un aimant. En brisant un aimant, on obtient deux aimants ayant chacun un pole Nord et un pole Sud.

b. Faces d'une bobine

On détermine les noms des faces d'une bobine par les règles d'orientation selon le sens du courant.

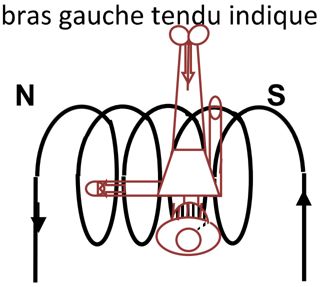
- <u>Le tir bouchon</u>

Lorsque le tir bouchon tourne dans le sens du courant, il progresse de la face Sud vers la face Nord à l'intérieur de la bobine.



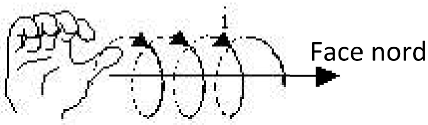
- <u>Le bonhomme d'Ampère</u>

Le bonhomme d'Ampère couché sur le fil regarde vers l'intérieur de la bobine. Le courant lui entre par les pieds et sort par la tête. Son bras gauche tendu indique la face Nord.



- <u>La main droite</u>

La main droite disposée dans le sens du courant, la paume tournée vers l'intérieur de la bobine et la face Nord est indiquée par le pouce.

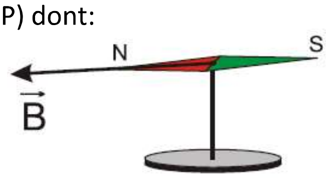


II. Champ magnétique

1. Vecteur champ magnetique

Un aimant agit à distance sur un autre aimant: il modifie les propriétés de l'espace qui l'environne. Nous dirons que l'espace environnant un aimant ou une bobine parcourue par un courant est le siège d'un champ magnétique.

Le champ magnétique en un point P est représenté par un vecteur noté $\vec{B}(P)$ dont:



- Le point d'application est le point P
- La direction est celle de l'aiguille aimantée (boussole) placée en P
- Son sens est dirigé du pôle sud vers le pôle nord de l'aiguille aimantée.
    - Sa norme peut être déterminée par le calcul ou par mesure à l'aide d'un teslamètre à sonde de Hall.

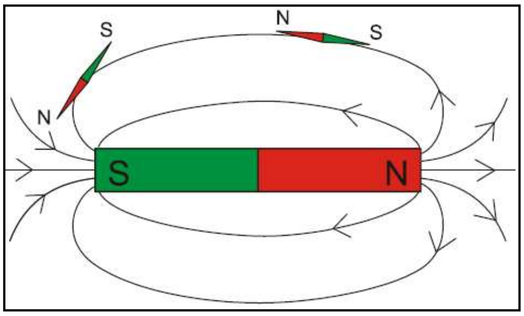
<u>Remarque</u>: l'unité du champ magnétique dans le SI est le tesla (symbole T)

2. Spectres magnetiques

- Une ligne de champ est une courbe tangente en chacun de ses points avec le vecteur champ magnétique $\vec{B}$. Elle est orientée dans le sens de $\vec{B}$.
- Deux lignes de champ ne se coupent jamais parce qu'il n'existe qu'un seul vecteur champ magnétique en un point.
- L'ensemble des lignes de champ magnétique constitue le spectre du champ magnétique.

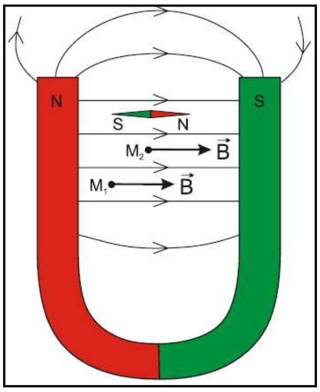
a. Spectre d'un champ magnétique crée par un aimant droit

- Près des pôles les lignes de champ sont resserrées: le champ y est plus intense.
- Les lignes de champ quittent le pôle nord pour converger vers le pôle sud.



b. Spectre d'un champ magnétique créé par un aimant en U

Entre les deux branches de l'aimant en U, les lignes de champ sont parallèles et de même sens. Dans cette région le champ magnétique est uniforme.

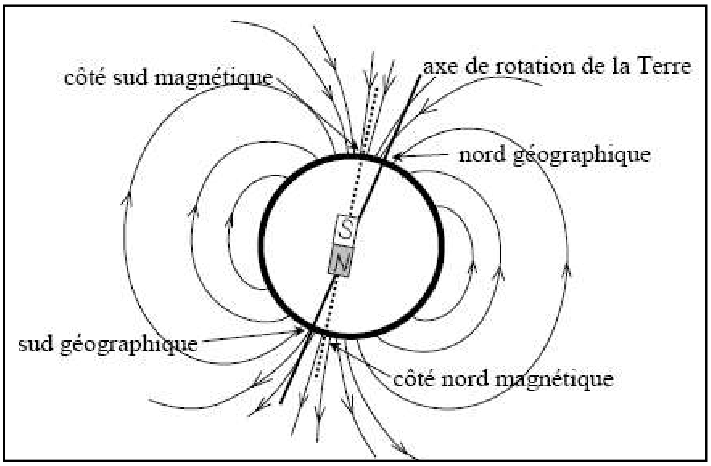


.0

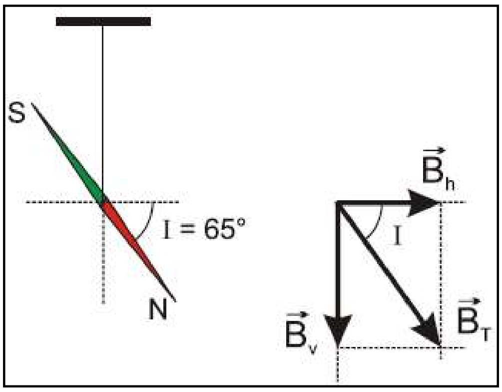
3. Champ magnetique terrestre

Plaçons plusieurs boussoles (ou aiguilles aimantées) dans une région de l'espace loin de toute source apparente de champ magnétique. Nous constatons qu'elles s'orientent toutes suivant la même direction. Cette direction particulière est due à la présence dans l'espace d'un champ magnétique: c'est le champ magnétique terrestre $\vec{B}_T$.

Le champ magnétique terrestre peut-être considéré comme le champ créé par un aimant droit placé au centre de la Terre (en réalité, la magnétosphère est déformée par le vent solaire).



- Le méridien géographique est le plan vertical qui contient le point considéré et l'axe nord sud des pôles.
- Le plan du méridien magnétique est le plan vertical contenant la direction du champ magnétique du point considéré.
- L'angle formé par les deux plans s'appelle la déclinaison (D).
- L'angle que fait $\vec{B}_T$ et l'horizontal du point considéré est appelé inclinaison (i).



Le champ magnétique terrestre est la résultante de deux composantes:

- $\vec{B}_H$: composante horizontale du champ magnétique terrestre au point M.
- $\vec{B}_V$: composante verticale du champ magnétique terrestre au point M.

$$\boxed{\vec{B} = \vec{B}_H + \vec{B}_V}$$

<u>Exemple:</u> à Paris i = 65° et B = $4{,}7.10^{-5}$T.

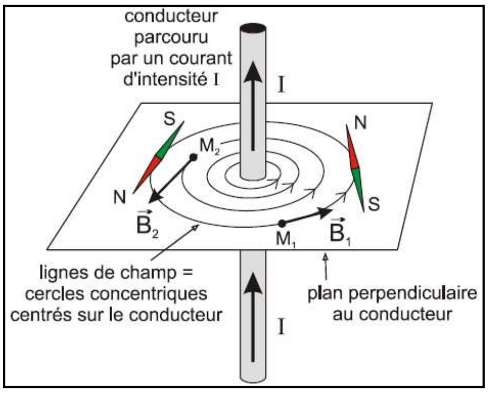
$B_H = B.\cos(i)$ => $B_H = 4{,}7.10^{-5}.\cos(65)$
=> $B_H = 2{,}0.10^{-5}$ T

Remarque: le champ magnétique terrestre se superpose toujours aux champs créés par les autres sources (aimants, courant) devant lesquels il est d'ailleurs souvent négligeable.

4. Champs crees par les courants

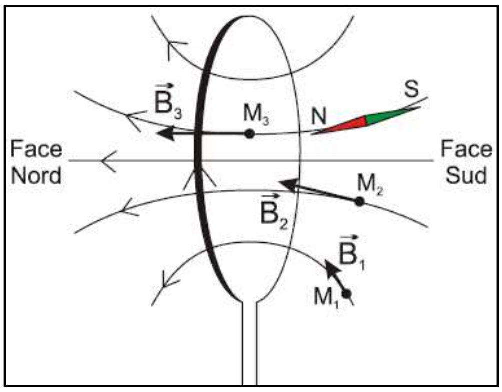
a. Conducteur rectiligne parcouru par un courant

- Les lignes de champ sont des cercles concentriques
- Les caractéristiques du champ créé en un point M_1 appartenant au plan π sont les suivantes:



- Direction: celle de la tangente en M_1 à la ligne de champ
- Sens: son sens est donné par plusieurs règles parmi lesquelles le bonhomme d'Ampère (le bras gauche indique le sens de $\vec{B}$) et la main droite (la paume tournée vers le point où on veut définir le champ, le pouce indique le sens de $\vec{B}$).
- Norme: on a montré qu'en se plaçant à la distance d d'un conducteur rectiligne parcouru par un courant I, le champ magnétique vaut $\boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{d}}$ ($\mu_0=4\pi.10^{-7}$ SI: perméabilité du vide)

b. Bobine plate

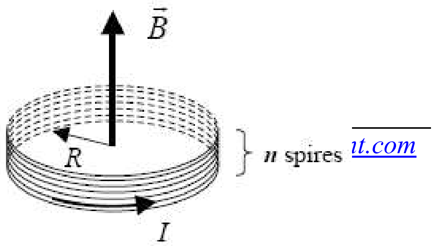


- Les lignes de champ appartiennent au plan π perpendiculaire à la bobine.
- Le sens de $\vec{B}$ est donné par la règle du bonhomme d'Ampère (un bonhomme d'Ampère placé sur la bobine, le courant entrant par ses pieds et sortant par sa tête, indique le sens du champ magnétique par son bras gauche lorsqu'il regarde le centre de la bobine) ou de la main droite.
- Au centre de la bobine, l'intensité de $\vec{B}$ est égale à:

$\boxed{B = \frac{\mu_0}{2}\frac{I}{R}}$, R rayon de la bobine.

Remarque: si la bobine comprend n spires (enroulements):

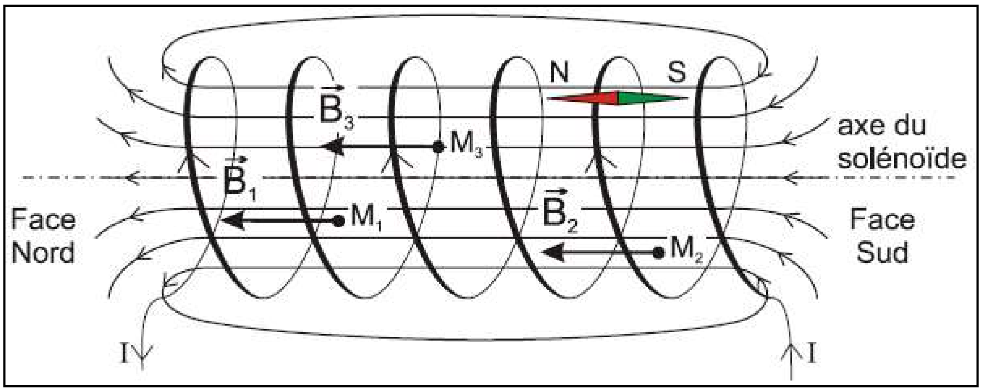
$$\boxed{B = \frac{\mu_0 nI}{2R}}$$



c. Champ magnétique créé par un solénoïde

Définition: Un solénoïde est une bobine longue dont sa longueur L est supérieure à dix fois son rayon r (L>10.r).

Sens du champ: Un bonhomme d'Ampère placé sur les fils du solénoïde, le courant entrant par ses pieds et sortant par sa tête, indique le sens du champ magnétique par son bras gauche lorsqu'il regarde le centre du solénoïde.



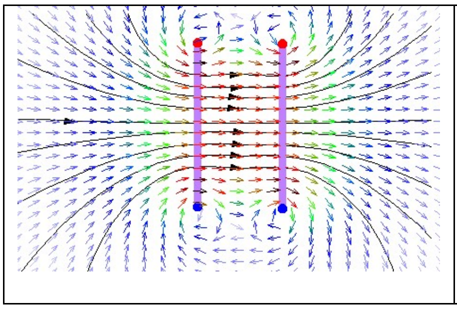
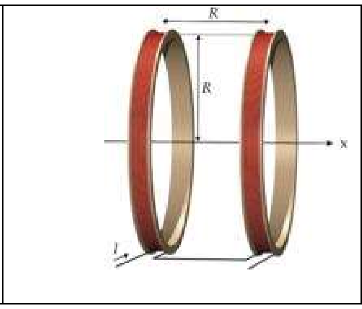
A l'intérieur d'un solénoïde long:

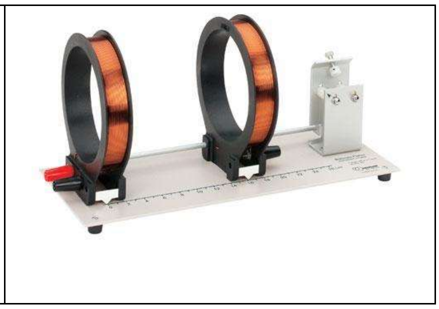
- Les lignes de champ sont parallèles (les vecteurs champs $\vec{B}$ sont colinéaires et de même sens).
- Le champ magnétique conserve la même valeur, on dit qu'il est uniforme.
- L'intensité du champ magnétique B au centre d'une bobine longue de N spires, de longueur L parcourue par un courant I vaut : On pose $n = \frac{N}{L}$

$\boxed{B = \mu_o.n.I}$ avec
- B: Champ magnétique à l'intérieur du solénoïde en teslas (T).
- $\mu o = 4.\pi.10^{-7}$S.I (perméabilité magnétique du vide)
- n: nombre de spires par mètre du solénoïde (spires.m^{-1}).
- I: Intensité du courant circulant dans le solénoïde en ampères (A).

d. Bobines d'Helmholtz

Les bobines d'Helmholtz sont deux bobines plates, identiques, coaxiales, de même rayon séparées par une distance égale à leur rayon. Elles sont parcourues par le même courant dans le même sens. Elles créent un champ magnétique uniforme dans la région de l'espace comprise entre les deux bobines.



Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

I. Force magnétique

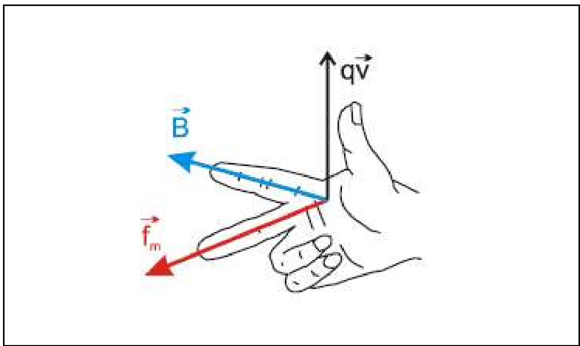
1. Relation de Lorentz

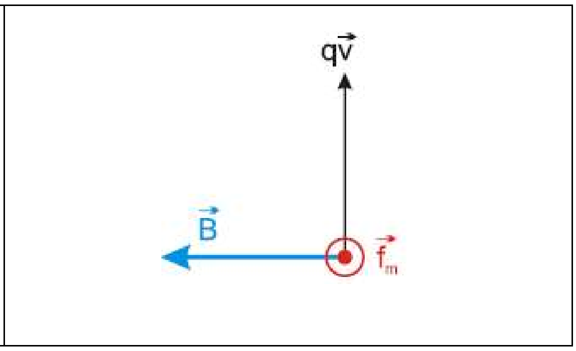
Une charge q qui se déplace avec une vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique caractérisé par le vecteur $\vec{B}$ subit une force magnétique appelée force de Lorentz $\vec{F}$ donnée par : $\boxed{\vec{F}=q\vec{v}\wedge\vec{B}}$

Cette relation fait intervenir un opérateur mathématique appelé produit vectoriel (noté "$\wedge$").

2. Caractéristiques de la force de Lorentz

- Point d'application: c'est la particule elle-même considérée comme ponctuelle
- Direction: perpendiculaire à $q\vec{v}$ et à $\vec{B}$, donc au plan formé $q\vec{v}$ et $\vec{B}$
- Sens : déterminé par la règle des trois doigts de la main droite (règle d'orientation de l'espace)



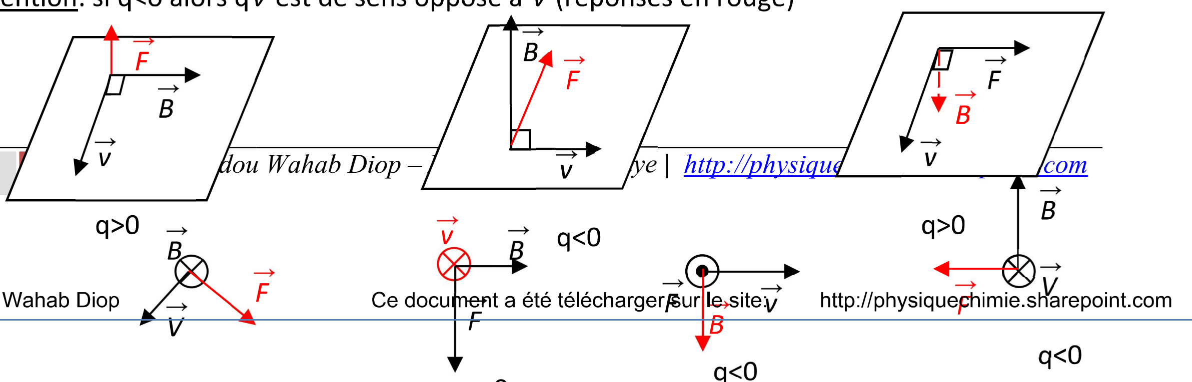


- Norme: $F = \left| qvB\sin\left(\vec{v},\vec{B}\right) \right| = \left| qvB\sin\alpha \right|$

3. Application

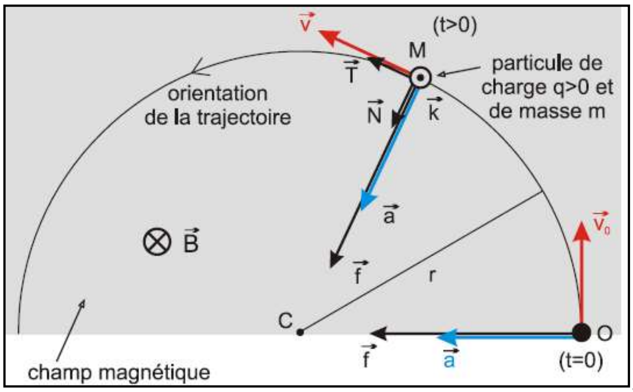
Représenter dans chaque cas, le vecteur manquant en respectant le type de représentation choisie.

Attention: si q<o alors $q\vec{v}$ est de sens opposé à $\vec{v}$ (réponses en rouge)



II. Étude théorique du mouvement dans le cas où la vitesse initiale est perpendiculaire au champ magnétique

Données : A l' instant initial une particule de masse m et de charge électrique q pénètre avec la vitesse $\vec{v}_0$ dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$. On suppose que $\vec{v}_0$ est perpendiculaire à $\vec{B}$



1. Expression de l'acceleration

Système: particule chargée; référentiel: terrestre; BF: $\vec{F}$ et $\vec{P}$(négligeable devant $\vec{F}$)

TCI: $\vec{F}=m\vec{a} \Rightarrow q\,\vec{v}\wedge\vec{B}=m\,\vec{a} \Rightarrow \boxed{\vec{a}=\frac{q}{m}\vec{v}\wedge\vec{B}}$

Remarque: $\vec{a}\perp\vec{v}$ et $\vec{a}\perp\vec{B}$. Son sens dépend du signe de q.

2. Nature du mouvement

- Le mouvement est uniforme:

$\vec{F}=q\,\vec{v}\wedge\vec{B} \Rightarrow \vec{F}\perp\vec{v} \Rightarrow \mathscr{P}(\vec{F})=\vec{F}.\vec{v}=0$ or $\mathscr{P}(\vec{F})=\frac{dEc}{dt}=0 \Rightarrow Ec=\frac{1}{2}mv^2=cte \Rightarrow v=v_0=cte$. La vitesse v est égale à la vitesse v_0 au point d'entrée dans le champ magnétique.

- Le mouvement est plan

$\vec{a}\perp\vec{B} \Rightarrow a_k=0 \Rightarrow v_k=cte=0 \Rightarrow z=cte=z_0=0$ (d'après les conditions initiales) $\Rightarrow$ z=0.

Au cours du mouvement le vecteur $\vec{v}$ reste dans le plan $(\vec{N},\vec{T})$: la trajectoire de la particule est située dans le plan orthogonal à $\vec{B}$ passant par O et contenant $\vec{v}_0$.

- La trajectoire est circulaire

$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{\rho}\vec{N}$, la vitesse est constante donc $\frac{dv}{dt} = 0$ d'où $\vec{a} = \frac{v^2}{\rho}\vec{N}$

$\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B} = \frac{v^2}{\rho}\vec{N} \Rightarrow \frac{|q|}{m}Bv_0 = \frac{{v_0}^2}{\rho}$ d'où $\rho = \frac{mv_0}{|q|B} = cte = R \Rightarrow R = \frac{mv_0}{|q|B}$

La trajectoire est curviligne et possède un rayon de courbure constant donc c'est un cercle.

- conclusion:

Une particule chargée entrant dans un champ magnétique avec une vitesse perpendiculaire au champ décrit un mouvement circulaire et uniforme dans un plan perpendiculaire au champ.

Le rayon de la trajectoire est donné par l'expression: $\boxed{R = \frac{mv_0}{|q|B}}$

3. Vitesse lineaire, vitesse angulaire, periode, frequence

- La vitesse linéaire de la particule est: $v = |q|\frac{BR}{m}$
- La vitesse angulaire est reliée à la vitesse linéaire par $\omega = \frac{v}{r} \Rightarrow \omega = \frac{|q|B}{m}$
- La période est reliée à la vitesse angulaire par $T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi\frac{m}{|q|B}$
- La fréquence est reliée à la période par $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\frac{|q|B}{m}$

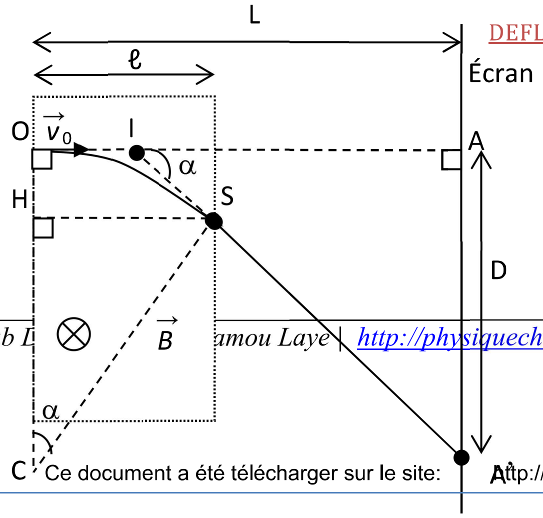
Les expressions montrent que ω, T et f sont indépendants du rayon r et de la vitesse v.

4. Remarques importantes

- La force de Lorentz $\vec{F}$ est centripète. C'est elle qui est à l'origine du mouvement circulaire et uniforme !
- Si $\vec{v}_0$ est parallèle à $\vec{B}$, la force de Lorentz est nulle et la particule décrit un mouvement rectiligne et uniforme à travers le champ (Newton I).
- Si l'angle entre $\vec{v}_0$ et $\vec{B}$ est différent de 0° et de 90°, la particule décrit un mouvement uniforme hélicoïdal (trajectoire = hélice).

III. Applications pratiques

1. Étude de la deflexion magnetique



$\ell << L$ et α très petit. En absence de champ les particules arrivent en A. Étudions la déflexion D.

$\alpha=(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CS})=(\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{IA})$ sont deux angles à côtés $\perp$

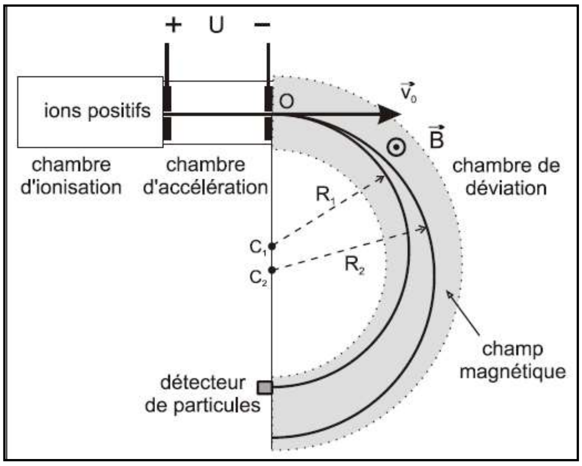
Pour le triangle HCS: $\sin\alpha = \frac{HS}{CS} = \frac{\ell}{R}$. Pour le triangle A'IA: $\tan\alpha = \frac{AA'}{IA} = \frac{D}{IA}$

Première approximation: $\ell << L \Rightarrow IA \approx OA = L$; 2[e] approximation: $\alpha \leqslant 10° \Rightarrow \alpha(\text{rad}) \approx \sin\alpha \approx \tan\alpha$

$$\text{Donc } \frac{\ell}{R} = \frac{D}{L} \Rightarrow D = \frac{\ell L}{R} \text{ or } R = \frac{m v_0}{|q|B} \text{ d'où } D = \frac{|q|}{m} \times \frac{\ell L B}{v_0}$$

La mesure de la déflexion D permet de calculer la charge massique $\frac{q}{m}$.

2. Spectrographe de masse



Chambres d'ionisation : On y produit des ions de même charge q mais de masses m_1 et m_2 différentes.
Chambre d'accélération : A travers une première fente, les ions pénètrent dans cette chambre avec une vitesse négligeable. Ils sont accélérés par la tension U > 0 et sortent avec une vitesse

$$v_0 = \sqrt{(2|q|)\frac{U}{m}}$$

Chambre de déviation : Les ions sont déviés par un champ magnétique $\vec{B}$ et ont pour trajectoire des demi-cercles dont les rayons R_1 et R_2 dépendent des masses m_1 et m_2.
L'expression de R et de $v_0 \Rightarrow R_1 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2Um_1}{|q|}}$ et $R_2 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2Um_2}{|q|}}$

Le rayon de la trajectoire augmente avec la masse.
On arrive ainsi à recueillir sur le détecteur des particules de même masse ; la position du détecteur permet de déterminer le rayon R de la trajectoire. Connaissant la charge q, on détermine la masse m de la particule.

C_1C_2 est la distance entre les deux points d'impact: $C_1C_2 = 2R_2 - 2R_1 = \sqrt{\frac{8U}{|q|B^2}}\left(\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1}\right)$

3. Filtre de vitesse

<u>Étude d'un exemple:</u>

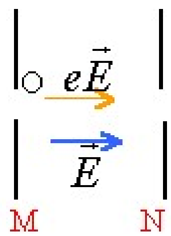
Une chambre d'ionisation produit des ions $^{20}Ne^+$ et $^{22}Ne^+$ de masses respectives $m_1$et m_2. Le poids est négligeable devant les forces électromagnétiques et leur mouvement a eu lieu dans le vide.

Les ions pénètrent avec une vitesse initiale négligeable dans un accélérateur où ils sont soumis à un champ électrique uniforme crée par une tension $U_0=V_M-V_N$ établie entre deux plaques conductrices M et N. On désigne par v_1 et v_2 les vitesses des ions $^{20}Ne^+$ et $^{22}Ne^+$ lors du passage en O_1. Charge élémentaire e=1,6 10^{-19} C.

a) Représenter sur un schéma le vecteur champ électrique et donner le signe de U_0. Justifier.
b) Exprimer la vitesse de l'ion $^{20}Ne^+$ à la sortie de l'accélérateur en fonction de sa masse et de U_0.
c) Calculer cette vitesse si la valeur absolue de la tension vaut 2 10^4 V; masse atomique molaire de l'ion $^{20}Ne^+$ =0,02 kg mol^{-1}; nombre d'Avogadro = 6,02 10^{23} mol^{-1}.
d) Montrer qu'en O_1 : $m_1v_1^2 = m_2 v_2^2$; en déduire la valeur de v_2. Masse atomique molaire de l'ion $^{22}Ne^+$ =0,022 kg mol^{-1}.
e) Au delà de O_1 les ions entrent dans un sélecteur de vitesse limité par les plaques P et Q. Dans cette région ils sont soumis simultanément à un champ électrique uniforme crée par une tension positive $U=V_Q-V_P$ et à un champ magnétique perpendiculaire aux vecteurs vitesses et au champ électrique. Représenter les champs sur un schéma afin que les forces électriques et magnétiques soient opposées.
f) On règle la tension U de telle façon que le mouvement des ions $^{20}Ne^+$ soit rectiligne et uniforme de trajectoire O_1O_2. Représenter les forces qui agissent sur l'autre ion $^{22}Ne^+$ ainsi que le vecteur vitesse v_1.
g) Exprimer U en fonction de v_1, d (distance des plaques P et Q) et du champ magnétique. Calculer U si B=0,1 T et d=5 cm.
h) Dans quelle direction seront déviés les ions $^{22}Ne^+$. Justifier le nom "filtre de vitesse" donné à la région limitée par P et Q.

<u>Résolution</u>

a) Entre O et O_1 les ions sont accélérés : seule la force électrique travaille, donc son travail est moteur : q U_{MN} >0. La charge q est positive donc U_{MN} >0 soit $V_M > V_N$. Le champ électrique pointe vers le plus petit potentiel donc vers N.
b) le théorème de l'énergie cinétique s'écrit entre M et N:



$$0,5\ m_1v_1^2 = eU_0. \Rightarrow v_1^2 = \frac{2eU_0}{m_1}.$$

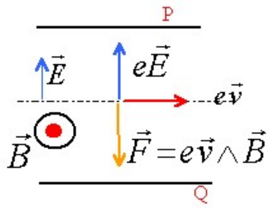
c) calculer la masse en kg : $\frac{0,02}{6,02.10^{23}}$=3,322.10^-26kg $\Rightarrow$

$v_1^2 = 2\times1,6.10^{-19}*2.10^4/3,322\ 10^{-26} = 1,928.10^{11} \Rightarrow v_1 = \underline{4,39\ 10^5}$ m s^{-1}.

d) même travail pour l'autre ion : $0,5\ m_2v_2^2 = eU_0. \Rightarrow m_1v_1^2 = m_2v_2^2 = 2eU_0$

$$v_2^2 = m_1/m_2\, v_1^2 \text{ d'où } v_2 = \underline{4,186\ 10^5\ m\ s^{-1}}.$$

e) représentation



f) La tension U_{QP} est positive : le champ électrique pointe vers le plus petit potentiel soit vers P. La charge q est positive, alors la force électrique a le sens du champ électrique. La force magnétique opposée (mouvement uniforme) à la force électrique pointe vers Q. Le vecteur charge fois vitesse pointe vers la droite. La règle de la main droite donne le sens du champ magnétique.

g) Le mouvement de l'ion $^{20}Ne^+$ étant rectiligne uniforme, la somme des forces est nulle. La norme des forces est égale: $\Rightarrow$ $eE=ev_1B$ ou $E=U / d = v_1B$ soit $U= d\ v_1B$

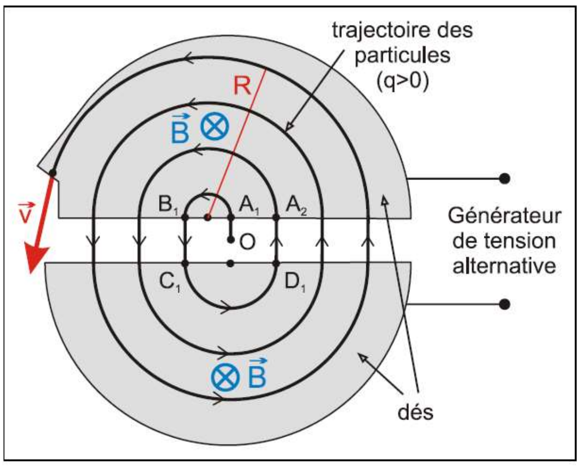
$$U=0,05*4,39\ 10^5 *0,1 = \underline{2195}\ V.$$

h) mouvement de l'ion $^{22}Ne^+$: la force électrique ne dépend que de la charge et de la tension U, elle n'est pas modifiée. La force magnétique est proportionnelle à la vitesse de l'ion : or cet ion plus massif a une vitesse plus faible que v_1. La force magnétique sera plus petite que la force électrique. La somme des forces n'est pas nulle, elle est égale à une force verticale dirigée vers P, de norme constante. Le mouvement de cet ion $^{22}Ne^+$ sera uniformément accéléré : la trajectoire sera un arc de parabole. Cet ion ne pourra pas sortir par le trou O_2, (tant qu'on ne modifie pas la tension U) il va heurter la paroi du sélecteur de vitesse. Seuls les ions $^{20}Ne^+$ sortiront par le trou O_2.

4. Cyclotron

Le principe du cyclotron a été découvert en 1929 par E. O. LAWRENCE aux USA. Un cyclotron est un accélérateur de particules chargées. Il comporte deux électrodes creuses (des demi-cylindres plats) en forme de la lettre "D", les "dee" (en anglais) ou "dés" (en français), entre lesquelles est appliquée une tension alternative haute fréquence. Les deux "dés" baignent dans un champ magnétique uniforme.

En son centre (point O) se trouve une source qui fournit des ions, le plus souvent positifs : protons,



deutons (particules formées d’un proton et d’un neutron), particules alpha (particules formées par 2 protons et 2 neutrons), etc......

Ces particules sont accélérées vers le "dé" supérieur, où elles arrivent en A_1 avec une vitesse v_{A1}. Elles décrivent alors avec la vitesse v_{A1} constante un demi-cercle. Au moment précis où elles s’apprêtent à sortir du dé (point B_1), la tension appliquée entre les deux "dés" a changé de signe : les particules sont accélérées vers le "dé" inférieur (entre B_1 et C_1) : sa nouvelle vitesse est $v_{C1} > v_{A1}$. Dans le "dé" inférieur les particules décrivent aussi un demi-cercle, de rayon supérieur au précédent, avec la vitesse v_{C1} constante. Lorsqu'elles sortent (point D_1) la polarité des "dés" a encore changé : les particules sont accélérées vers le "dé" supérieur (entre D_1 et A_2) et entrent dans ce "dé" avec la vitesse $v_{A2} > v_{C1}$.

A chaque traversée de l'intervalle entre les "dés", la tension appliquée accélère les particules. Lorsque les particules sont à l'intérieur des "dés", elles décrivent des demi-cercles avec des vitesses de plus en plus grandes, et donc avec des rayons de plus en plus grands.

La durée de parcours des demi-cercles est constante et égale à la demi-période : $\frac{T}{2} = \frac{\pi m}{|q|B}$.

Après avoir tourné quelques centaines de tours, les particules arrivent à la périphérie des "dés" (rayon R) et sortent tangentiellement à la trajectoire avec la vitesse v. Elles peuvent alors être utilisées comme projectiles corpusculaires de haute énergie.

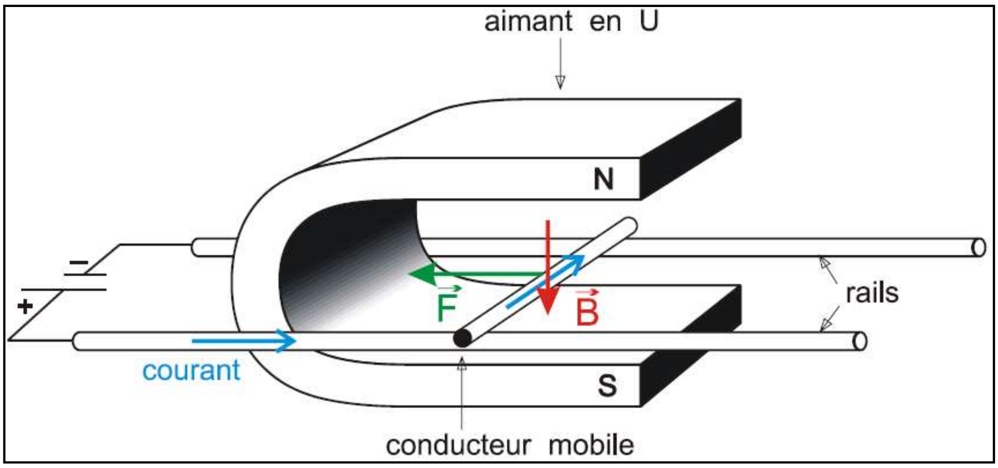
Vitesse : $v = |q|\frac{BR}{m}$ Énergie cinétique des particules : $Ec = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2B^2R^2}{m}$

Loi de Laplace

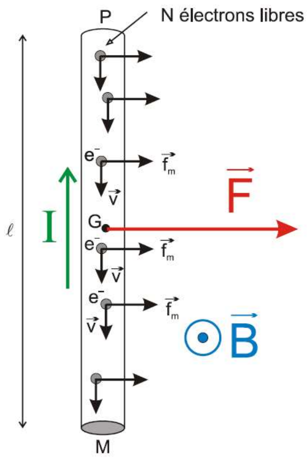
I. Action d'un champ magnétique uniforme sur un élément de courant

1. Étude experimentale

a) Expérience des rails de Laplace



b) Observation



Lorsque le courant passe le conducteur mobile roule vers la gauche où vers la droite selon le sens du courant et selon le sens du champ magnétique.

c) Interprétation

Le passage du courant dans le conducteur est dû à un déplacement de porteurs de charge qui sont des électrons. Sur chaque électron s'exerce une force de Lorentz $\vec{F}=q\,\vec{v}\wedge\vec{B}$. Donc le conducteur est soumis à un ensemble de forces réparties dont la résultante est appelée force de Laplace.

2. Loi de Laplace

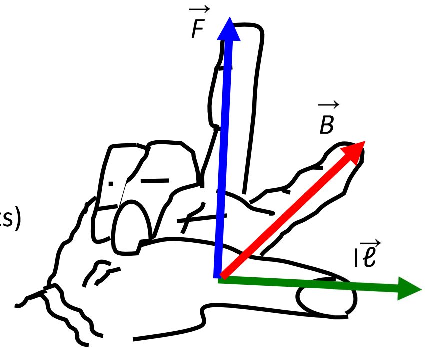
a) Énoncé

Un conducteur rectiligne de longueur ℓ parcouru par un courant d'intensité I placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ est soumis à la force de Laplace

$$\boxed{\vec{F} = I\,\vec{\ell} \wedge \vec{B}}$$

Le sens de $\vec{\ell}$ est celui du courant. La longueur ℓ est la partie du conducteur qui est à la fois parcourue par le courant et plongée dans le champ magnétique $\vec{B}$;

Remarque: $\vec{F}_{\text{Laplace}} = \sum \vec{F}_{Lorentz} = \sum q\vec{v} \wedge \vec{B} = \sum q\,\dfrac{\overrightarrow{\delta\ell}}{\delta t} \wedge \vec{B} = \sum \delta I\,\overrightarrow{\delta\ell} \wedge \vec{B} = I\vec{\ell} \wedge \vec{B}$



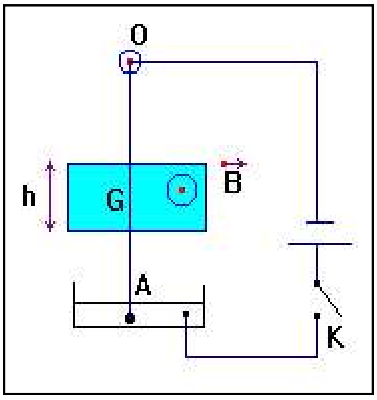
b) Caractéristiques de la force de Laplace

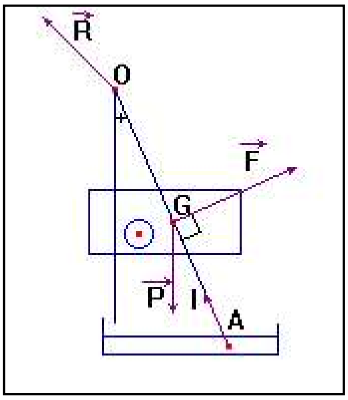
- direction: $\vec{F} \perp (\vec{\ell}, \vec{B})$
- sens: $(\vec{\ell}, \vec{B}, \vec{F})$ forme un trièdre direct (règle des trois doigts)
- norme: $F = I\ell B\,|\sin\alpha|$ avec $\alpha = (\vec{\ell}; \vec{B})$

c) Exercice d'application

Une tige de cuivre OA, de masse m = 8,3 g, homogène, de longueur L=30 cm, peut se mouvoir dans un plan vertical autour de l'axe Δ perpendiculaire au plan de la figure, passant par O. L'extrémité A plonge dans une cuve à mercure qui assure le contact électrique avec le reste du circuit. Sur une hauteur h = 3 cm, la partie centrale de la tige est placée dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et parallèle à Δ, pointant vers le lecteur.

1. Que se passe-t-il quand l'interrupteur K est ouvert ?
2. Que se passe-t-il quand l'interrupteur K est fermé ?
3. Quand I=10A, la tige dévie de θ = 5° et reste en équilibre. Faire le schéma. En déduire la valeur de $\vec{B}$. Comment peut-on réaliser expérimentalement un tel champ magnétique ?





Résolution:

1. K ouvert : I = 0A. Puisque I=0, il n'y a pas de force de Laplace
2. K fermé : I ≠ 0 et circule de A vers O et la tige est déviée.

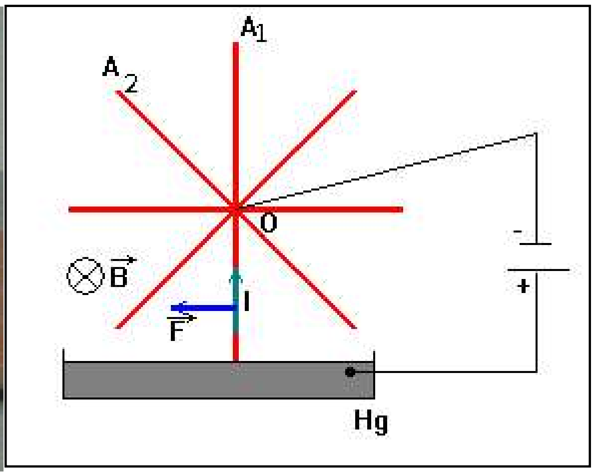
3. F = IℓB avec $\ell = \dfrac{h}{\cos\theta} \Rightarrow F = \dfrac{IhB}{\cos\theta}$. La tige est en équilibre : $\mathcal{M}(\vec{P}) + \mathcal{M}(\vec{R}) + \mathcal{M}(\vec{F}) = 0$

4. $\dfrac{-mgL\sin\theta}{2} + \dfrac{FL}{2} = 0$ d'où $F = mg\sin\theta$ (1)

$$\frac{IhB}{\cos\theta} = mg\sin\theta \text{ d'où } B = \frac{mg\sin 2\theta}{2Ih} = 2,3.10^{-2}\ \text{T}$$

II. Applications

1. Roue de Barlow

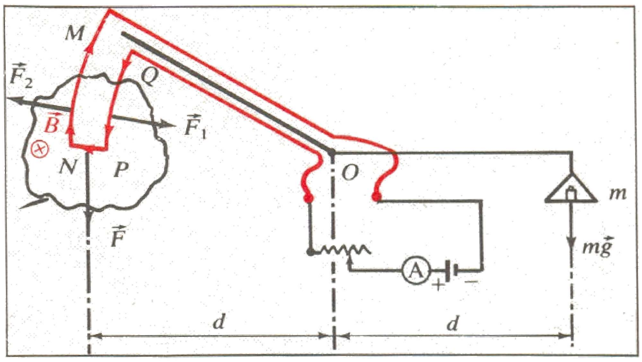
Une roue de rayon en cuivre de longueur ℓ peut tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan de la roue et passant par le point O. Ce dispositif placé dans un champ magnétique uniforme perpendiculaire au plan de la roue se met à tourner.

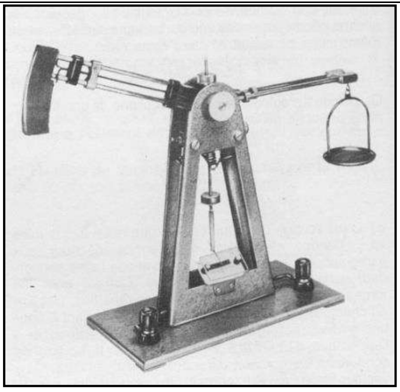
La roue tourne car lorsqu'un rayon parcouru par un courant entre dans l'espace où règne un champ magnétique, il est soumis à la force de Laplace $\vec{F}$($\perp$ au rayon et contenue dans le plan de la roue). Cette force entraîne la roue et avant que ce rayon ne sorte du mercure, le rayon suivant pénètre dans celui-ci et subit à son tour la force de Laplace, ainsi de suite…

La puissance développée par la force électromagnétique est:

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \mathcal{M}(\vec{F}_\Delta) \times \omega \text{ or } F = I\ell B\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = IB\ell \text{ et } \mathcal{M}(\vec{F}_\Delta) = F\frac{\ell}{2} \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}(\vec{F}) = I\ell^2\frac{B}{2}\omega}$$

2. Balance de Cotton





On pose NP=ℓ. Une surcharge de masse m est placée dans une nacelle et déséquilibre la balance. Un courant de sens convenable est envoyé dans le conducteur MNPQ. On règle son intensité pour rétablir l'équilibre.

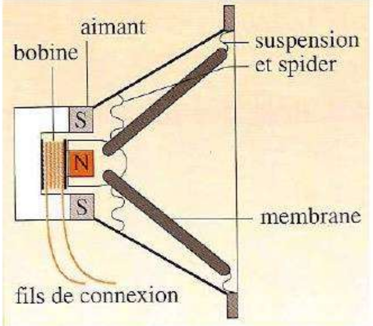
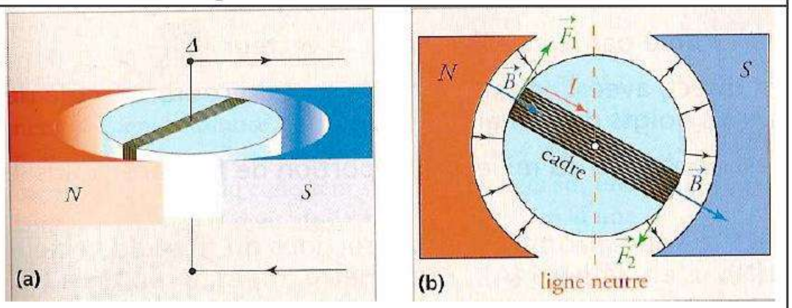
Compte tenu de la forme des conducteurs MN et PQ (arcs de cercle de centre O), les moments des forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ sont nuls. La condition d'équilibre s'écrit:

$$\mathcal{M}(\vec{R})+\mathcal{M}(\vec{P}_0)+\mathcal{M}(\vec{F})+\mathcal{M}(\vec{F}_1)+\mathcal{M}(\vec{F}_2)+\mathcal{M}(\vec{P})=0, \text{ soit } I\ell Bd = mgd \text{ d'où } \boxed{B=\frac{mg}{I\ell}}$$

Remarque: la balance de Cotton permet de déterminer l'intensité du champ magnétique

3. Haut parleur electrodynamique

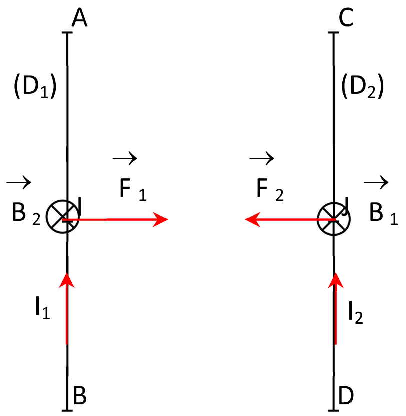
Le haut parleur est une bobine solidaire d'une membrane M, placé à l'intérieur d'un aimant particulier, cet aimant crée un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ et radial ($\vec{B}$ parallèle au plan des spires). Lorsque la bobine est parcourue par un courant d'intensité I, chaque élément de longueur $\partial\ell$ (assimilable à un segment de droite) appartenant à une spire subit la force de Laplace $\partial\vec{F}=\partial\vec{\ell}\wedge\vec{B}$ perpendiculairement au plan de la spire.
Suivant que le sens de I soit entrant ou sortant, la membrane M est attirée ou repoussée. Si I varie alternativement la membrane vivre et émet un son de même fréquence que le courant alternatif.

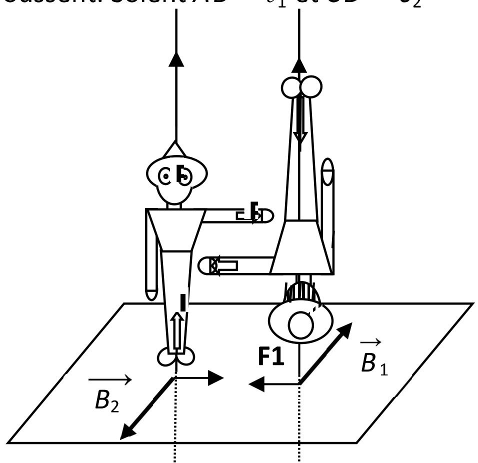
Le haut parleur	Le moteur électrique
	
Le courant est alternatif, la bobine et donc la membrane, sont animées d'un mouvement vibratoire	Le rotor, constitué d'une bobine, s'oriente suivant le champ magnétique créé par un aimant fixe, le stator. Le courant change de sens dans le rotor à chaque demi-tour grâce à des balais et des colecteurs.

III. Interaction entre deux courants rectilignes et parallèles

1. Experience

Si les courants qui parcourent les deux conducteurs sont dans le même sens, les conducteurs s'attirent et si les courants sont de sens contraires ils se repoussent. Soient $AB = \ell_1$ et $CD = \ell_2$





2. Interpretation

- Le courant I_1 crée en tout point du conducteur CD un champ magnétique $\vec{B_1} \perp$ au plan formé par les deux conducteurs ($B_1 = 2.10^{-7}\dfrac{I_1}{d}$). $\vec{B_1}$ exercent en tout point du conducteur CD une force de Laplace dont la résultante s'applique en M_2 milieu de CD.

$$\vec{F_2} = I_2\vec{\ell_2}\wedge\vec{B_1} \Rightarrow F_2 = I_2\ell_2 B_1 = I_2\ell_2\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{d} \Rightarrow \boxed{F_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}I_1 I_2\frac{\ell_2}{d}}$$

- Un raisonnement analogue permet de déterminer la force qui s'exerce sur le conducteur AB

$$\vec{F_1} = I_1\vec{\ell_1}\wedge\vec{B_2} \Rightarrow F_1 = I_1\ell_1 B_2 = I_1\ell_1\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{d} \Rightarrow \boxed{F_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}I_1 I_2\frac{\ell_1}{d}}$$

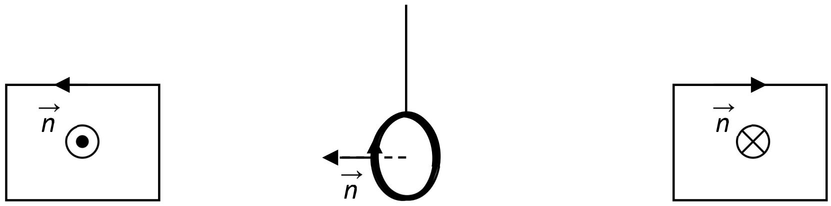
3. Definition legale de l'Ampere

L'Ampère est l'intensité du courant constant qui passant dans deux conducteurs rectilignes et parallèles de longueur infinie et de section constante, placés à 1 m l'un de l'autre dans le vide, produit entre ces conducteurs une force de 2.10^{-7} N par mètre de longueur.

IV. Action d'un champ magnétique sur un cadre rectangulaire

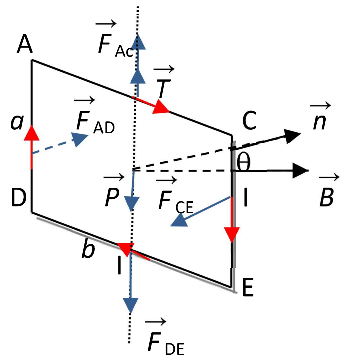
1. Normale au plan d'un cadre

La normale au plan d'un cadre est le vecteur unitaire $\vec{n}$ dont la direction est directement perpendiculaire au plan du cadre, son sens est donné par la main droite ou l'observateur d'Ampère.



2. Force de Laplace s'exerçant sur un cadre

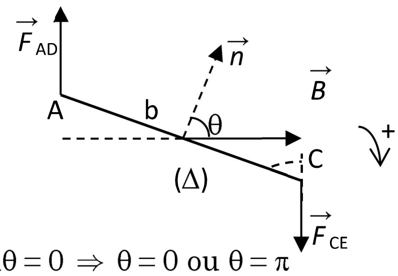
Considérons un cadre rectangulaire parcouru par un courant I dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$



Soit $AC = DE = b$ et $AD = CE = a$. On a: $F_{AC} = F_{DE} = IbB$ et $F_{AD} = F_{CE} = IaB$

3. Moment des forces de Laplace

- $\mathcal{M}(\vec{F}_{AC})=\mathcal{M}(\vec{F}_{DE})=0$
- $\mathcal{M}(\vec{F}_{AD}) = F_{AD}\times\frac{b}{2}\sin\theta = IaB\times\frac{b}{2}\sin\theta = \frac{IBS}{2}\sin\theta$ avec S=ab=surface du cadre et $\theta=(\vec{B};\vec{S})$ car $\vec{S}$ $=S\vec{n}$
- $\mathcal{M}(\vec{F}_{CE}) = F_{CE}\times\frac{b}{2}\sin\theta = \frac{IBS}{2}\sin\theta$



4. Position d'equilibre du cadre

Condition d'équilibre: $\sum\mathcal{M} = 0 \Rightarrow \sum\mathcal{M}=\text{IBS}\sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$ ou $\theta = \pi$

- θ=0, $\vec{B}$ et $\vec{n}$ sont parallèles et de même sens: écarté de sa position d'équilibre le cadre tend à y revenir. On dit que l'équilibre est ***stable***.
- θ=π, $\vec{B}$ et $\vec{n}$ sont parallèles et de sens contraire: écarté de sa position d'équilibre le cadre s'en éloigne définitivement. On dit que l'équilibre est ***instable***.

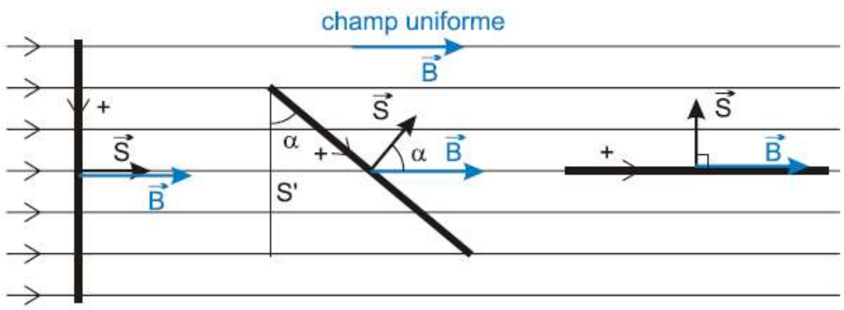
V. Notion de flux magnétique

1. Flux magnetique a travers un contour plan

Par définition, le flux magnétique à travers un contour délimité par une surface S est le nombre de lignes de champ magnétiques qui traverse ce contour fermé. Son expression est:

$\Phi=\vec{B}.\vec{S}=BS\times\cos\theta$ avec $\theta=(\vec{B};\vec{S})$ car $\vec{S}=S\vec{n}$

Le flux magnétique s'exprime en Weber (symbole: Wb)



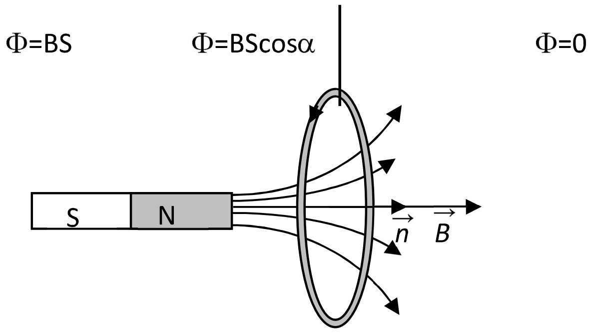
Remarque: si $\vec{B}//\vec{n}$ et de sens contraire: Φ=-BS

2. Flux a travers un circuit

Soit un circuit comportant N spires (cadre ou bobine) placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$

$$\boxed{\Phi = NBS\times\cos\theta}$$

3. Regle du flux maximal

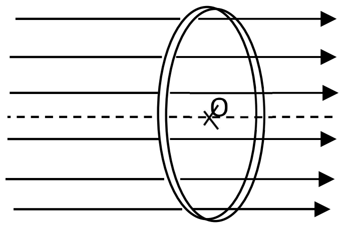


- Lorsqu'on approche le pôle nord d'un aimant de la face sud d'une bobine, elle s'emboîte sur l'aimant (attraction nord-sud)

- Lorsqu'on approche le pôle sud de l'aimant, la bobine est repoussée, elle retourne et revient en présentant sa face nord et s'emboîte dans l'aimant.
- On observe les mêmes faits si on inverse le sens du courant qui traverse la bobine.

Généralisation: règle du flux maximal

Un circuit plan, libre de se déplacer, placé dans un champ magnétique $\vec{B}$ tant à se déplacer de façon que le flux magnétique qui le traverse soit maximal ($\vec{B}//\vec{n}$ et de même sens). Le sens du parcourt choisi étant celui du courant.

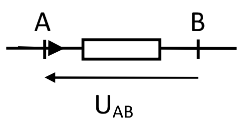


Induction électromagnétique

I. Rappels: algébrisation des grandeurs physiques (i et u)

1. Convention recepteur

Soit un dipôle (AB) quelconque:



- Si $i_{AB}>0$ alors u_{AB} ainsi représentée est positive
- Si $i_{AB}<0 \Rightarrow u_{AB}<0$

Remarque: les flèches de i et de u sont opposées.

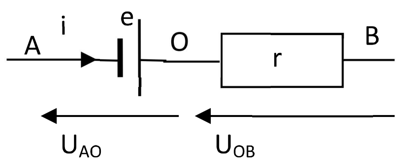
2. Loi d'Ohm generalisee

a) Conducteur ohmique

Pour un conducteur ohmique de résistance R: $\boxed{U = RI}$

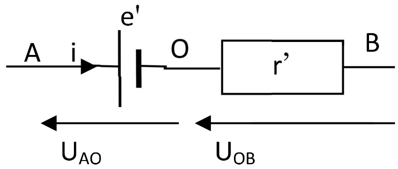
b) Générateur

Un générateur peut être représenté par une f.é.m. et une résistance interne r.



$u_{AB} = u_{AO} + u_{OB} = -e + ri$ donc la tension positive est $\boxed{u = e - ri}$

c) Récepteur actif ou générateur en opposition



$u_{AB} = u_{AO} + u_{OB} = e' + r'i \Rightarrow$ $\boxed{u = r'i + e'}$ où e' est la f.c.é.m.

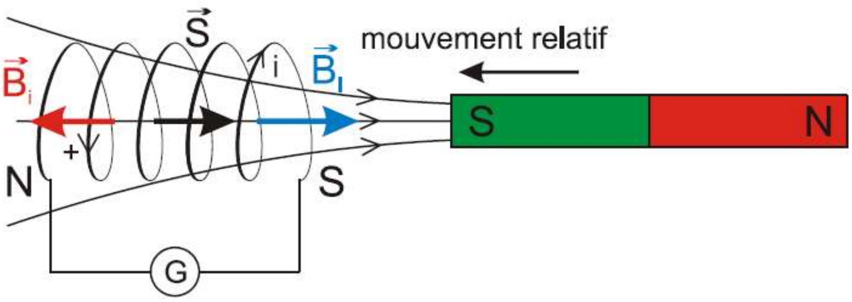
II. Phénomène d'induction

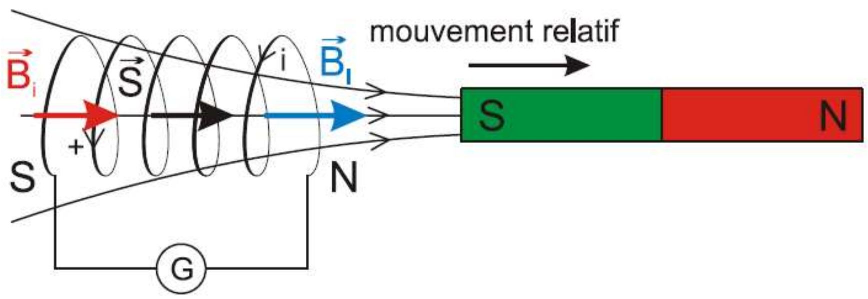
1. ÉTUDE EXPERIMENTALE

a) Expérience 1

- Bobine fixe, aimant mobile

Lorsqu'on approche l'aimant de la bobine, le galvanomètre indique le passage d'un courant qui s'annule dès que le déplacement cesse. Éloignons l'aimant de la bobine un courant circule dans celle-ci en sens inverse. L'intensité du courant est d'autant plus grande que le déplacement est plus rapide.



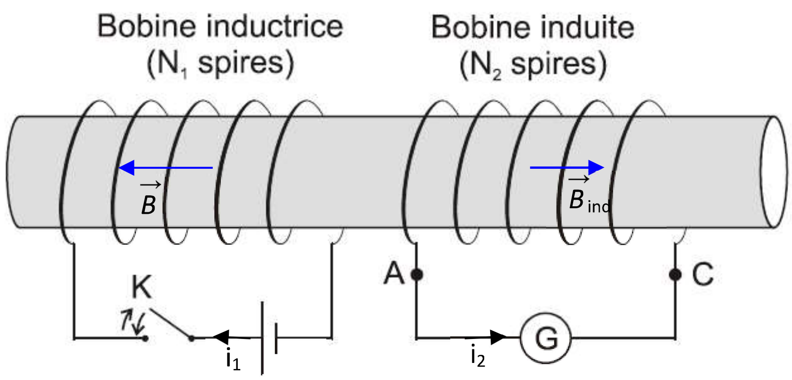


- Bobine mobile, aimant fixe

On observe les mêmes faits expérimentaux.

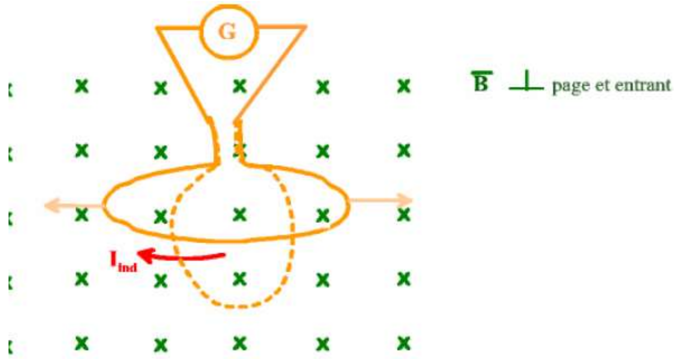
Le courant qui apparait dans la bobine alors que le circuit ne comporte pas de générateur est le courant induit. La bobine dans laquelle circule le courant induit est l'induit. La source de champ magnétique (ici l'aimant) est l'inducteur. Ce phénomène est appelé induction électromagnétique.

b) Expérience 2



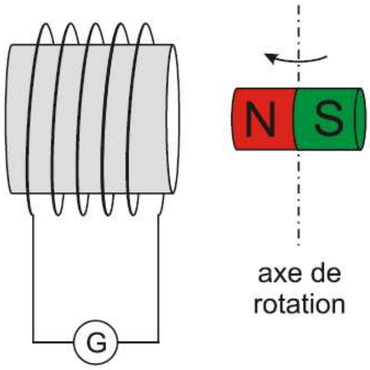
- Fermons l'interrupteur K, l'établissement du courant i_1 dans le solénoïde crée un courant induit i_2 dans la bobine (car i_1 varie de 0 à i_1). i_2 devient nulle dès que i_1 est constant.
- Si nous ouvrons l'interrupteur K (i_1 passe de i_1 à 0), un courant i_2 est créé dans la bobine en sens inverse.
- De même si K est fermé en faisant varier i_1 à l'aide d'un rhéostat monté dans le circuit, on crée un courant induit dans la bobine.

c) Expérience 3



La bobine étant placée dans un champ magnétique, si nous la déformons rapidement un courant induit circule dans la bobine. Ce courant s'annule dès que cesse cette déformation.

d) Expérience 4



Plaçons un aimant horizontal, mobile autour d'un axe vertical, près d'une bobine d'axe horizontal, connectée à un galvanomètre. Faisons tourner cet aimant à vitesse angulaire constante.

Observation : Un courant induit circule dans la bobine dans un sens, puis dans l'autre, puis de nouveau dans le premier sens, et ainsi de suite : la bobine est parcourue par un courant alternatif de fréquence égale à celle du mouvement de rotation.
On fait la même observation si l'aimant est fixe et que la bobine tourne à vitesse angulaire constante

2. INTERPRETATION

- Dans l'expérience 1, en déplaçant l'aimant le nombre de lignes de champ qui traverse la bobine augmente ou diminue. Donc il y a variation du flux magnétique à travers la bobine. Cette variation de flux magnétique est la cause du courant induit. Ceci est justifié par les expériences suivantes:
- dans l'expérience 2, on fait varier $\vec{B}$ en agissant sur i_1.
- dans l'expérience 3, on fait varier la surface S de la bobine.
- dans l'expérience 4, on fait varier l'angle θ formé par $\vec{B}$ et $\vec{S}$.

Toutes les grandeurs $\vec{B}$, S et θ sont des facteurs de l'expression du flux magnétique $\Phi=BS\cos\theta$

3. Conclusion

Dans toute variation du flux magnétique à travers un circuit fermé s'accompagne de la production d'un courant induit dans le circuit. Le courant induit apparait dès que commence les variations du flux et disparait dès que cesse cette variation: la cause et l'effet ont la même durée.

4. Sens du courant induit: loi de Lenz

Le sens du courant induit est tel que par ses effets il s'oppose à la cause qui lui donne naissance. Le courant induit crée un champ $\vec{B}_{ind}$ (champ magnétique induit) qui s'oppose à la variation $\Delta\vec{B}$ de l'inducteur.

III. Force électromotrice d'induction

1. Fem. induite moyenne

Durant le phénomène d'induction, le flux magnétique est une fonction du temps. Si pendant une durée Δt la variation du flux est $\Delta\Phi$, la f.é.m. induite moyenne est:

$$\boxed{e_m = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}}$$

2. Fem. induite instantanee

$$e = \lim_{\Delta t \to 0} e_m = -\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \boxed{e = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

Le signe moins (-) traduit la loi de Lenz

- Si Φ augmente $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} > 0 \Rightarrow e < 0$, le courant circule dans le sens négatif et s'oppose à l'augmentation du flux.
- Si Φ diminue, $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} < 0 \Rightarrow e > 0$, le courant circule dans le sens positif et s'oppose à la diminution du flux.

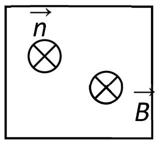
3. Intensite du courant induit

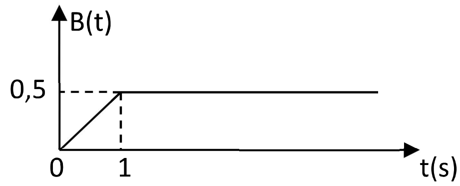
Si R est la résistance totale du circuit, l'intensité du courant induit est donné par la loi de Pouillet

$$i = \frac{\sum e - \sum e'}{\sum R} = \frac{e}{R} \Rightarrow i = \frac{e}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}$$

4. Application

Une spire carré de résistance R=0,1Ω, de coté a=10 cm est placé dans un champ magnétique comme l'indique la figure.





a) Déterminer le sens du courant induit
b) Déterminer la f.é.m. induite
c) Déterminer l'intensité du courant

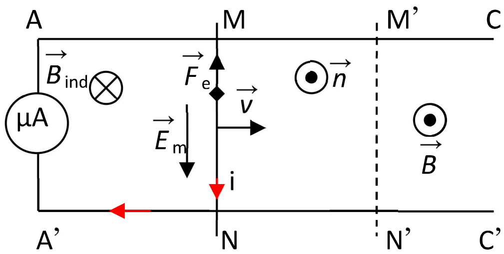
Réponse: $B = 0{,}5t \Rightarrow$ e=-5.10^{-5}V $\Rightarrow i=\frac{e}{R}$ =5.10^{-4}A sur t$\in$[0;1] et B=0,5 $\Rightarrow$ e=0V $\Rightarrow$ i=0 sur t$\in$]1;+∞[

5. Champ electromoteur d'induction

a) Expérience

- AC et A'C' sont des rails conducteurs et horizontaux;
- MN est une tige conductrice de longueur ℓ $\perp$aux rails.

Si nous déplaçons la tige MN avec une vitesse constante $\vec{v}$ parallèle aux rails, un courant est créé dans le circuit de la tige et des rails.



b) Interprétation

Considérons un électron libre de la tige MN, quand on déplace la tige avec une vitesse $\vec{v}$, cet électron est entrainé avec la même vitesse $\vec{v}$. Il s'exerce sur cet électron une force de Lorentz $\vec{F}$=q $\vec{v}\wedge\vec{B}$. Le déplacement des électrons entraine un courant en sens inverse: c'est le courant induit.

L'expression $\vec{v}\wedge\vec{B}$ est homogène à un champ électrique car les électrons se déplacent de N vers M.

$\boxed{\vec{E}_m=\vec{v}\wedge\vec{B}}$ $\vec{E}_m$ est le champ électromoteur. Le trièdre ($\vec{v}$, $\vec{B}$, $\vec{E}_m$) est direct.

<u>Remarque</u>: le champ électromoteur $\vec{E}_m$ a toujours le même sens que i.

c) Autres relations

- ***F.é.m. induite***

Pendant le déplacement la tige MN reçoit du travail mécanique et fournit au circuit du travail électrique donc elle se comporte comme un générateur dont la f.é.m. est:

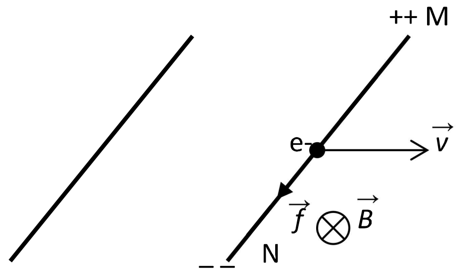
$$E = \frac{W_{N\to M}(\vec{F})}{q} = \frac{\vec{F}.\overrightarrow{NM}}{q} = \vec{E}_m.\overrightarrow{NM} = -vB\ell \Rightarrow \boxed{e=-vB\ell}$$

Autre méthode: $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ or Φ=BS

A t=0; $\Phi_0=BS_0$ et à une date t, $\Phi(t)=B(S_0 + \ell x)=BS_0 + B\ell x=\Phi_0 + B\ell x$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi_0}{dt} - B\ell\frac{dx}{dt} = -B\ell v$$

- *F.é.m. en circuit ouvert*

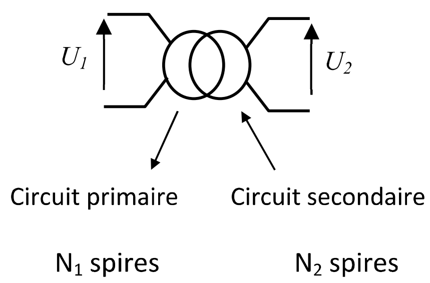


En circuit ouvert la tige se comporte comme un générateur: $U_{MN}=-e=Bv\ell$

IV. Applications: *Le transformateur*

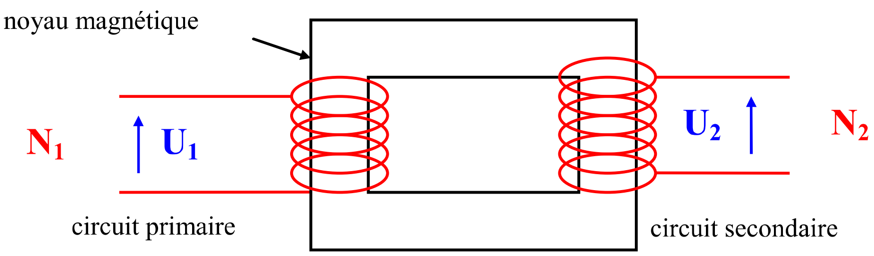
Le transformateur sert à abaisser ou élever la valeur efficace d'une tension sinusoïdale avec des pertes très faibles. Une des principales utilisations des transformateurs est le transport de l'énergie électrique par la SENELEC (ligne à haute tension).

Le symbole d'un transformateur est:



Un transformateur est composé de :

- une bobine composée de N_1 spires appelée circuit primaire.
- une bobine composée de N_2 spires appelée circuit secondaire.
- un circuit magnétique fermé constitué de feuillets métalliques isolés les uns des autres qui canalise les lignes de champ.



Petite explication !

U_1 est une ddp sinusoïdale, donc le flux magnétique créé par N_1 varie, et donc le flux magnétique à travers N_2 varie, et il produit, d'après la loi de Faraday, une f.é.m. induite U_2 sinusoïdale.

On appelle rapport de transformation : $m = \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{I_1}{I_2}$ (pour un transformateur idéal)

Si $N_2 > N_1$: le transformateur est survolteur (élévateur de tension)

Si $N_2 < N_1$: le transformateur est sous-volteur (abaisseur de tension)