Ραφαήλ Κιτρομηλίδης 1095897

1. α) Έστω ένα αυθαίρετο z τέτοιο ώστε $z \in P(A) \cup P(B)$. Δεδομένου ότι $z \in A$ και $z \in B$, έχουμε z=P(xA) ή z=P(xB). Επίσης ισχύει το $z \in A \cup B$ και συνεπώς $z \in P(A \cup B)$. Άρα η πρόταση είναι αληθής.
   β) Αυτή η πρόταση είναι ψευδής, εφόσον το $P(A \cup B)$ έχει περισσότερα υποσύνολα από τα $P(A) \cup P(B)$ επομένως δεν μπορεί να είναι υποσύνολό τους.

2. α) Η σχέση αυτή είναι:
   i. ανακλαστική: αφού (a,b)T(a,b) σημαίνει ότι βρίσκονται στην ίδια ευθεία, που ισχύει.
   ii. συμμετρική: αφού (a,b)T(c,d) σημαίνει ότι βρίσκονται στην ίδια ευθεία, τότε ισχύει το ίδιο και για (c,d)T(a,b).
   iii. μεταβατική: έστω (a,b)T(c,d) και (c,d)T(x,y), τότε ισχύει και το (a,b)T(x,y), εφόσον το (a,b) βρίσκεται στην ίδια ευθεία με το (c,d), συνεπώς και με το (x,y).

   Άρα είναι σχέση ισοδυναμίας.

   β) Οι αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας θα είναι οι παράλληλες ευθείες με την T.
   γ) Ναι, είναι σχέση ισοδυναμίας εφόσον η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, επομένως αν ένα από τα (a,b) ή (c,d) είναι το σημείο (0,0), τότε θα ισχύουν πάλι τα παραπάνω.

3. α) Έστω x=ΜΚΔ(r,s), άρα x|r και x|s.

   Αφού έχουμε ως δεδομένα τα c≡a(mod r), c≡b(mod s) , μπορούμε να συμπεράνουμε τα εξής:

   1) r | c-a
   2) x | r
   3) x | c-a, άρα (c-a) mod x = 0
   4) s | c-b
   5) x |s
   6) x | c-b, άρα (c-b) mod x =0
   7) από 3) και 6), (c-a)≡(c-b) (mod x)

   προσθέτω και στα 2 μέρη το c και μετά τα πολλαπλασιάζω με -1.

   (c-a-c)≡(c-b-c) (mod x) => -a≡-b (mod x)

   (-a) *(-1)≡(-b)*(-1) (mod x) => a≡b (mod x)

   Άρα η πρόταση ισχύει.

β) $n^2 - 4 = (n-2) * (n+2)$

Αν 7 **|** $(n^2 - 4)$, δεν μπορούμε να πούμε ότι σίγουρα διαιρεί και το (n-2), εφόσον θα μπορούσε να διαιρεί οποιοδήποτε από τα 2 μέλη της παραπάνω εξίσωσης, άρα δεν ισχύει για κάθε ακέραιο n.

γ) Παίρνοντας την παραπάνω εξίσωση, μπορούμε να πούμε ότι η πρόταση αυτή ισχύει, εφόσον έχουμε:

7 | $n - 2$ και $n - 2$ | $n^2 - 4$, άρα 7 | $n^2 - 4$ για κάθε ακέραιο n.

δ) Για P(n)=n*(n+1)*(n+2), με n ≥ 0.

Για n=0:

0*(0+1)*(0+2)=0, το οποίο είναι πολλαπλάσιο του 6. (6 * 0)

Για n=1:

1*(1+1)*(1+2)=6, επίσης πολλαπλάσιο του 6

Έστω ότι η πρόταση ισχύει για n=k

Άρα k*(k+1)*(k+2)=6*a

Για n=k+1

(k+1)*(k+2)*(k+3) = k*(k+1)*(k+2) + 3(k+1)*(k+2) = 6*a + 3(k+1)*(k+2)

Το (k+1)*(k+2), αφού είναι γινόμενο διαδοχικών αριθμών, έχει ως αποτέλεσμα άρτιο αριθμό, επομένως μπορεί να γραφτεί ως 6b

⇨ 6*a + 6*b = 6(a+b) Άρα η υπόθεση ισχύει, το γινόμενο 3 διαδοχικών αριθμών διαιρείται πάντα με το 6.