Ραφαήλ Κιτρομηλίδης 1095897

1. Ασκ1

   Το αριστερό μέλος είναι να επιλέξουμε n+1 στοιχεία από 2n+2 στοιχεία.

   Εναλλακτικά μπορούμε να πούμε ότι έχουμε 2n απλά στοιχεία και 2 «ξεχωριστά», από τα οποία θέλουμε n+1.

   Έτσι μπορούμε να έχουμε 3 περιπτώσεις:

   Κανένα «ξεχωριστό» στοιχείο, άρα επιλέγουμε n+1 στοιχεία ανάμεσα σε 2n. $\binom{2n}{n+1}$

   1 «ξεχωριστό» στοιχείο ανάμεσα στα 2 «ξεχωριστά», και n στοιχεία ανάμεσα στα 2n. $2\binom{2n}{n}$

   2 «ξεχωριστά» στοιχεία ανάμεσα στα 2 «ξεχωριστά» και n-1 στοιχεία ανάμεσα στα 2n. $\binom{2n}{n-1}$

   Άρα από τις 3 αυτές περιπτώσεις έχουμε $\binom{2n}{n+1}+2\binom{2n}{n}+\binom{2n}{n-1}$

2. Ασκ2
   i. 2x+1 + 2(x+1)+1 + … + 2y+1
   ii. –
   iii. –

3. Εφόσον γνωρίζουμε ότι έχουμε 99.999 διαδοχικούς από τους οποίους πρέπει να επιλέξουμε 50.001, κάνουμε την διαίρεση με βάση την αρχή των περιστερώνων και βρίσκουμε ότι 99.999/50.001=1.99 . Εφόσον σε κάθε θέση αντιστοιχούν λιγότερο από 2 αριθμοί, τότε αναγκαστικά, τουλάχιστον 2 από τους αριθμούς που θα επιλέξουμε θα είναι διαδοχικοί το οποίο σημαίνει θα είναι και πρώτοι μεταξύ τους.
4. **1)**
   i. Σε μία από τις θέσεις θα μπει σίγουρα ο Σωτήρης. Στις υπόλοιπες θέσεις, από τους 19 υπόλοιπους μαθητές αφαιρούμε την Μάρθα, άρα απομένουν 18 μαθητές οι οποίοι μπορούν να μπουν σε 4 θέσεις. Επομένως θα έχουμε 1*18*17*16*15=73440. Επειδή οι θέσεις δεν έχουν κάποια σειρά στην ομάδα, οι ομάδες που θα έχουν τα ίδια μέλη είναι ουσιαστικά οι ίδιες ομάδες άρα θα πρέπει να αφαιρεθούν. Άρα 73440-(5!-5)=73440-120+5=73325 διαφορετικοί τρόποι.
   ii. Με τον ίδιο τρόπο που υπολογίσαμε πάνω, απλώς αντί Σωτήρη έχουμε Μάρθα.

iii. Παρόμοια με τα παραπάνω, με την διαφορά ότι θα έχουμε σε μία θέση να επιλέξουμε μεταξύ του Σωτήρη ή της Μάρθας. Άρα (2*18*17*16*15)-(5!-5)=146765.

iv. Για να συμμετέχει τουλάχιστον ένας από τους 2, πρέπει σε μία από τις θέσεις να είναι οι μόνες επιλογές ο Σωτήρης ή η Μάρθα. Εφόσον δεν έχουμε τον περιορισμό να είναι μόνο ένας από τους 2, στις υπόλοιπες θέσεις θα μπορούμε να βάλουμε οποιοδήποτε από τους 19 υπόλοιπους μαθητές. Άρα (2*19*18*17*16)-(5!-5)=185933.

2) Έχουμε 4 διαφορετικές περιπτώσεις. Να μην υπάρχουν Γ, να υπάρχει 1Γ, 2Γ ή 3Γ.

0Γ) Συνολικά υπάρχουν 13 σύμβολα (εκτός των 10 Γ), τα οποία μπορούν να κατανεμηθούν με οποιοδήποτε τρόπο. Για να μην υπάρξουν ίδιες σειρές, θα πάρουμε πάλι περιπτώσεις, με 0Δ, 1Δ, 2Δ και 3Δ.

0Δ) Έχουμε αρκετά Α και Β τέτοια ώστε να μπορούν να μπουν σε οποιαδήποτε θέση. Άρα για κάθε θέση έχουμε 2 επιλογές επομένως $2^5 = 32$.

1Δ) Σε 4 θέσεις μπορούμε να βάλουμε είτε Α είτε Β και στην άλλη θα μπει σίγουρα Δ. Μπορούν να έχουν οποιαδήποτε σειρά . Άρα $1*2^4*5=80$.

2Δ) Σε 3 θέσεις μπορούμε να βάλουμε είτε Α είτε Β και στις άλλες 2 Δ. Μπορούν να έχουν οποιαδήποτε σειρά. $1*1*2^3*10=80$.

3Δ) Σε 2 θέσεις μπορούμε να βάλουμε είτε Α είτε Β και στις υπόλοιπες 3 Δ. Μπορούν να έχουν οποιαδήποτε σειρά. $1*1*1*2^2*10=40$.

Σύνολο για 0Γ) 32+80+80+40=232

1Γ)Σε αυτή την περίπτωση θα ενεργήσω παρόμοια με την πάνω περίπτωση, με τη διαφορά ότι θα κρατώ ακόμη 1 θέση, εχτός αυτές του Δ, και για το Γ.

0Δ) $5*1*2^4=80$

1Δ) $2*1*2^3*10=160$

2Δ) $1*1*1*2^2*10=72$

3Δ) 1*1*1*1*2*10*2=40

Σύνολο για 1Γ) 80+160+72+40=352

2Γ) Εδώ δεν μας απασχολούν τα Δ, εφόσον υπάρχουν αρκετά για να καλύψουν τις κενές θέσεις. Για να μην είναι διαδοχικά τα Γ, υπάρχουν 6 τρόποι να διανεμηθούν στις 5 θέσεις. Άρα έχουμε 1*1*13*12*11*6=10296.

3Γ) Όπως και το 2Γ), μπορούμε απευθείας να υπολογίσουμε χωρίς επιπλέον περιπτώσεις. Στην περίπτωση αυτή, υπάρχει μόνο ένας τρόπος να διανεμηθούν τα Γ έτσι ώστε να μην είναι διαδοχικά. Άρα 1*1*1*13*12=156.

Άρα συνολικά υπάρχουν 11036 τρόποι να μην υπάρχουν διαδοχικά Γ.

3) 5=1+4=2+3   7=1+6=2+5=3+4   4=1+3=2+2

Τα 5 σορτσάκια έχουν 2^2 τρόπους να δοθούν

Οι 7 μπλούζες έχουν 2*3 τρόπους να δοθούν

Τα 4 μπουφάν έχουν 3 τρόπους να δοθούν

2^2 + 2*3 + 3 = 13 τρόποι

4) Εδώ έχουμε 3 περιπτώσεις. Να έχουμε 1 λέξη, 2 ή 3.

1 λέξη: τις 5 θέσεις που θα κρατήσουμε για το κάθε γράμμα, θα τις θεωρήσουμε ως 1 θέση εφόσον δεν θα χωριστούν ποτέ τα γράμματα εκείνα, ούτε θα αλλάξουν σειρά μεταξύ τους. Έτσι αφού έχουμε 5 γράμματα κρατούμενα, μένουν 19 για να μπουν στις υπόλοιπες θέσεις, οι οποίες συνολικά είναι 20 (1 για τη λέξη και 19 για τα γράμματα). Τις 3 λέξεις θα τις θεωρήσουμε σαν ‘γράμματα’ εφόσον παίρνουν 1 θέση μόνο και άρα θα έχουμε συνολικά 3 λέξεις και 19 γράμματα. Θα πολλαπλασιάσουμε επίσης με το 20 εφόσον μπορεί να μπει σε οποιαδήποτε θέση η λέξη. Άρα έχουμε 3*20*19! = 3*20!

2 λέξεις: Παρόμοια με το παραπάνω, θα έχουμε 2 θέσεις για τις λέξεις και ακόμη 14 για τα υπόλοιπα γράμματα. Οι 2 λέξεις μπορούν πάλι να έχουν οποιαδήποτε θέση και γι’ αυτό έχουμε (3!)*[(14!)/(2!*12!)]*14!

3 λέξεις: Εδώ αφού θα έχουμε και τις 3 λέξεις, απλά θα τις υπολογίσουμε σαν γράμματα στις πράξεις εφόσον μπορούν να είναι επιλογή παντού, άρα συνολικά θα έχουμε 3 λέξεις και 9 γράμματα για 12 θέσεις. Έτσι θα έχουμε 12!

Συνολικά υπάρχουν 3*20! + (3!)*[(14!)/(2!*12!)]*14! + 12! τρόποι.