Ραφαήλ Κιτρομηλίδης 1095897

1. p: Το μαχαίρι είναι στην αποθήκη.
   q: Είδαμε το μαχαίρι όταν ελέγχαμε την αποθήκη.
   r: Ο φόνος έγινε στην πυλωτή.
   s: Ο φόνος έγινε στο διαμέρισμα.
   t: Το μαχαίρι είναι μέσα στον μπλε κάδο.
   u: Ο φόνος έγινε εκτός κτιρίου.
   v: Δεν μπορούμε να βρούμε το μαχαίρι.

   Προτάσεις:
   (1) $p \to q$ (2) $r \vee s$ (3) $r \to t$ (4) $\neg q$ (5) $u \to v$ (6) $s \to p$

   (7) από (1)+(4), M.T. $(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$ (8) από (7)+(6), M.T. $(\neg p \wedge (s \to p)) \to \neg s$

   (9) από (2)+(8), $(r \vee s) \wedge s \equiv r$, άρα $r \equiv T$

   Επομένως, για να είναι αληθές οι υποθέσεις (3) και (5), πρέπει το t ναι είναι αληθές και το s ψευδές. Έτσι συμπεραίνουμε πως το μαχαίρι είναι μέσα στον μπλε κάδο.

2. (α) $P(x, y) = (x < y)$, $f(x) = x+1$, $c=7$ στο **N**
   1. Αν $x=1, z=2, y=3$ $(x<z)=(1<2)\equiv T$, $(z<y)=(2<3)\equiv T$ **(True)**
   2. Αν $x=3, y=4$, δεν υπάρχει z στο **N** τέτοιο ώστε $3<z$ & $z<4$. **(False)**
   3. Αν $x=6, y=8$, $((6<7)\wedge(7<8))\to((6=7)\vee(8=7)) \equiv T\to F \equiv F$ **(False)**
   4. $(P(x, c)\wedge P(c, y))\to P(x, y) \equiv ((x<c)\wedge(c<y))\to(x<y) \equiv (x<y)\to(x<y)$ Οι μόνες πιθανές περιπτώσεις είναι: $T\to T\equiv T$ ή $F\to F\equiv T$. **(True)**
   5. Αν $x=6$, $6+1=7=c$ **(True)**

   (β) Στο διμελές σύνολο $\{0, 1\}$, $P(x, y)= x\leq y$, $f(x)= 1-x$, $c=0$

   1. Αν $x=0, z=0, y=0$ $(0\leq 0)\wedge(0\leq 0) \equiv T\wedge T \equiv T$ **(True)**
   2. Αν $x=0, z=1, y=0$ $(0\leq 1)\wedge(1\leq 0) \equiv T\wedge F \equiv F$ **(False)**
   3. $((x\leq 0)\wedge(0\leq y))\to((x=0)\vee(y=0)) \equiv ((x\leq 0)\wedge T)\to((x=0)\vee(y=0)) \equiv (x\leq 0)\to((x=0)\vee(y=0))$. Παίρνω τις 2 διαφορετικές περιπτώσεις για το x, $x=0$ & $x=1$. (0) $(0\leq 0)\to((0=0)\vee(y=0)) \equiv T\to T \equiv T$. (1) $(1\leq 0)\to((1=0)\vee(y=0)) \equiv F\to(F\vee(y=0)) \equiv T$. **(True)**
   4. Από τις ίδιες απλοποιήσεις που έγιναν στο 2.(α).4., έχουμε $(x\leq y)\to(x\leq y)$. Όταν $(x\leq y) \equiv T$, $T\to T \equiv T$. Όταν $(x\leq y) \equiv F$, $F\to F \equiv T$. **(True)**
   5. Αν $x=1$, $f(1)=1-1 = 0 = c$ **(True)**

(γ) Στο σύνολο {Γιώργος(Γ), Δήμητρα(Γ), Κώστας(Π), Μαρία(Π), Ελένη(Π)}, στο $P(x, y)$ ισχύει $x\neq y$ και x,y είναι αδέρφια. Η f(x) αντιστοιχεί στον γονέα του x αν είναι παιδί ή στον σύζυγο αν είναι γονέας. c= Κώστας

1. Αν x=Κώστας, y=Μαρία, z=Ελένη, $P(x, z)\wedge P(z, y)\equiv T\wedge T\equiv T$ **(True)**
2. Αν x=Γιώργος, y=Μαρία, z=Ελένη, $P(x, z)\wedge P(z, y)\equiv F\wedge T\equiv F$ **(False)**
3. Αν x=Ελένη, y=Μαρία, $(P(x, c)\wedge P(c, y))\to((x=c)\vee(y=c)) \equiv (T\wedge T)\to(F\vee F) \equiv T\to F \equiv F$ **(False)**

4. Όταν x & y αντιστοιχούν σε παιδιά, έχουμε $(T \wedge T) \rightarrow T \equiv T \rightarrow T \equiv T$. Όταν αντιστοιχεί ένα από τα δύο ή και τα δύο σε γονέα έχουμε $(F \wedge F) \rightarrow F \equiv F \rightarrow F \equiv T$. **(True)**
5. Δεν μπορεί να ισχύσει το f(x)=c, διότι η f(x) έχει πάντα ως αποτέλεσμα γονέα και το c αντιστοιχεί στον Κώστα, ο οποίος είναι παιδί. **(False)**

3. **(α)** Έστω ότι ο $6^{1/2}$ είναι ρητός. Ο α και $α^2$ είναι άρτιοι (από εκφώνηση), άρα $α = 2κ$ και $α^2 = 4κ^2$.
   $6^{1/2} = α/β$ (α και β ακέραιοι και το κλάσμα βρίσκεται στην απλούστερη του μορφή).

⇨ $6 = α^2/β^2$
⇨ $6β^2 = α^2$
⇨ $6β^2 = 4κ^2$
⇨ $3β^2 = 2κ^2$

Έτσι βλέπουμε πως ο $β^2$ είναι άρτιος, συνεπώς και ο β είναι άρτιος, γεγονός το οποίο έρχεται σε αντιπαράθεση με την αρχική υπόθεση, εφόσον το κλάσμα α/β δεν μπορεί να βρίσκεται στην απλούστερη του μορφή αν α και β είναι και οι 2 άρτιοι. Από αντίφαση, το $6^{1/2}$ είναι άρρητος

(β) (α) Έστω ότι $a + b < c$

Υψώνω κα τα 2 μέρη της ανίσωσης στο τετράγωνο.

⇨ $(a + b)^2 < c^2$
⇨ $a^2 + 2ab + b^2 < a^2 + b^2$ // (από εκφώνηση $a^2 + b^2 = c^2$)
⇨ $2ab < 0$

Δεν ισχύει, γιατί a & b είναι μη αρνητικοί αριθμοί. Άρα η υπόθεση ακυρώνεται.

(β) $a + b \geq c$

⇨ $(a + b)^2 \geq c^2$
⇨ $a^2 + 2ab + b^2 \geq a^2 + b^2$
⇨ $2ab \geq 0$

Ισχύει, γιατί a & b είναι μη αρνητικοί αριθμοί. Άρα επιβεβαιώνεται.

(γ) 1) n-5 περιττός

⇨ n–5 = 2k+1
⇨ n = 2k+6
⇨ n = 2(k+3)
⇨ n άρτιος

2) 3n+2 άρτιος

⇨ 3n+2 = 2k
⇨ 3n = 2k+2

- ⇨ $3n = 2(k+1)$
- ⇨ n άρτιος

3) $n^2 - 1$ περιττός

- ⇨ $n^2 - 1 = 2k+1$
- ⇨ $n^2 = 2k+2$
- ⇨ $n^2 = 2(k+1)$
- ⇨ n^2 άρτιος
- ⇨ n άρτιος

1), 2), 3) ισοδύναμα.

δ) για $n = 1$, $1+x \geq 1 + x$

για $n = k$, $(1+x)^k \geq 1+kx$

για $n = k+1$, $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$

$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x)$

- ⇨ $(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x)$ // από το $n = k$, $(1+x)^k \geq 1+kx$
- ⇨ $(1+x)^{k+1} \geq 1+kx+x+kx^2$ //(αφόυ το kx^2 είναι πάντα θετικό ή μηδενικό (χ≥ -1) μπορώ να το φύγω και να ισχύει ακόμη η ανισώτητα)
- ⇨ $(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x$

Άρα η ανισώτητα ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς n.