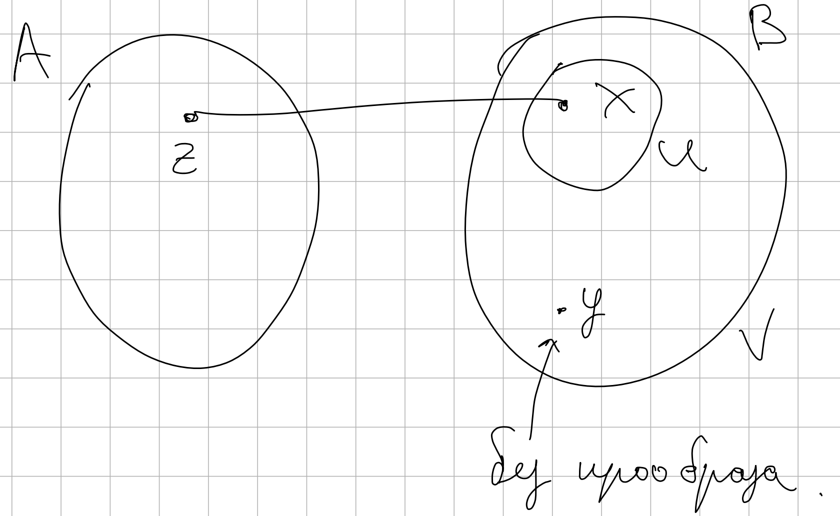
№3.

г) $f^{-1}(U) = f^{-1}(V) \overset{?}{\Rightarrow} U = V$; $f(A) \to B$.



$f^{-1}(U) = \{z\}$

$f^{-1}(V) = \{z\}$

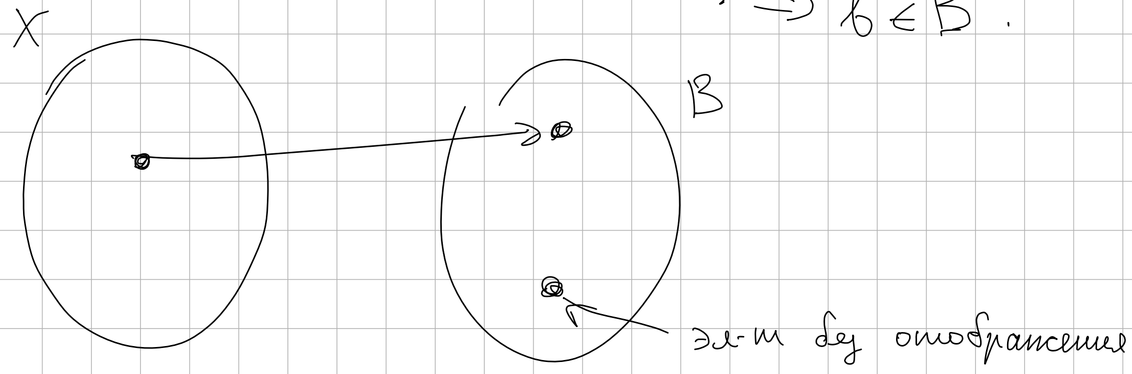
№4.

4°. Пусть f — частичная функция из множества X в множество Y, при этом $B \subseteq Y$. Какой знак сравнения можно поставить вместо «?», чтобы утверждение «$f(f^{-1}(B))$? B» стало верным?

$f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

$\forall b \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow \exists \underbrace{a \in f^{-1}(B)}_{f(a) \in B.} : \underbrace{f(a) = b}_{\Downarrow}.$

$\Rightarrow b \in B.$

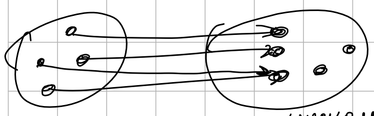


$f^{-1}(B) = \{z\}$

$f(f^{-1}(B)) = \{m\}$

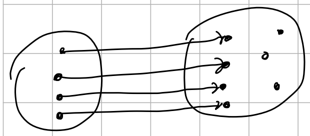
$B = \{m, u\}$.

Отображение:

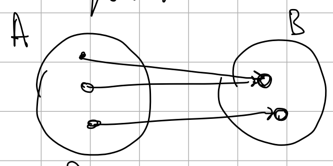


(несколько прообразов возможно)

Инъекция

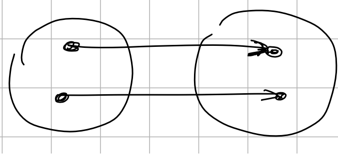


Сюръекция



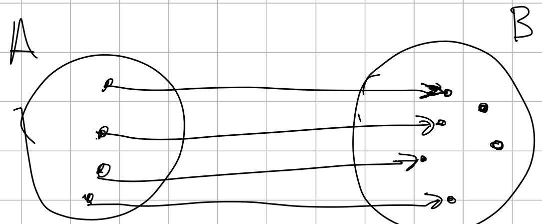
$\forall b \in B$ $\exists$ хотя бы один $a \in A : a \to b$.

Биекция:

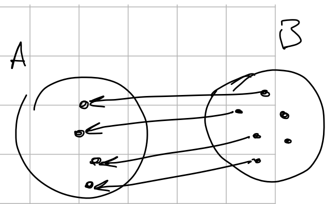


5°. Пусть A и B — два множества. Покажите равносильность свойств «существует отображение $f\colon A \to B$, являющееся инъекцией» и «существует отображение $g : B \to A$, являющееся сюръекцией».

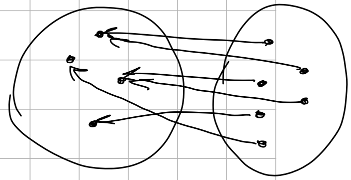
Инъекция:



1. развернем ребра

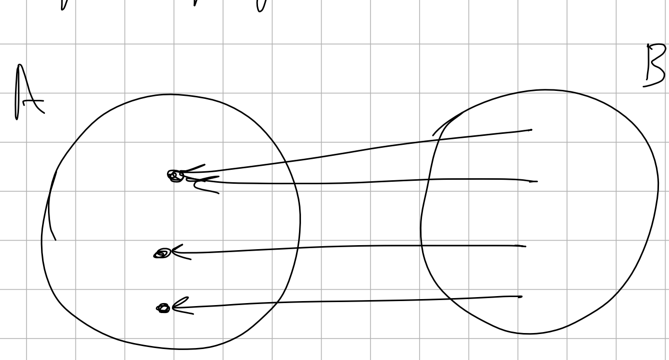


2. для всех изолированных вершин множества B построим ребра в любую вершину A.



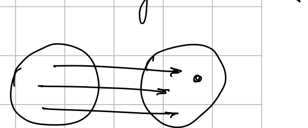
получим сюръекцию $B \to A$.

В обр. сторону.



1.) развернуть ребра

2.) удалить все ребра, не являющиеся единств. у точки



---

6. Приведите пример сюръекции множества положительных целых чисел на себя, для которой прообраз любого 1-элементного множества бесконечен.

Паросочетание *покрывает* вершину графа, если оно содержит ребро, смежное этой вершине.

$\forall n \in N$

$|f^{-1}\{n\}| = \infty$

Н Любое натуральное число встречается бесконечное число раз.

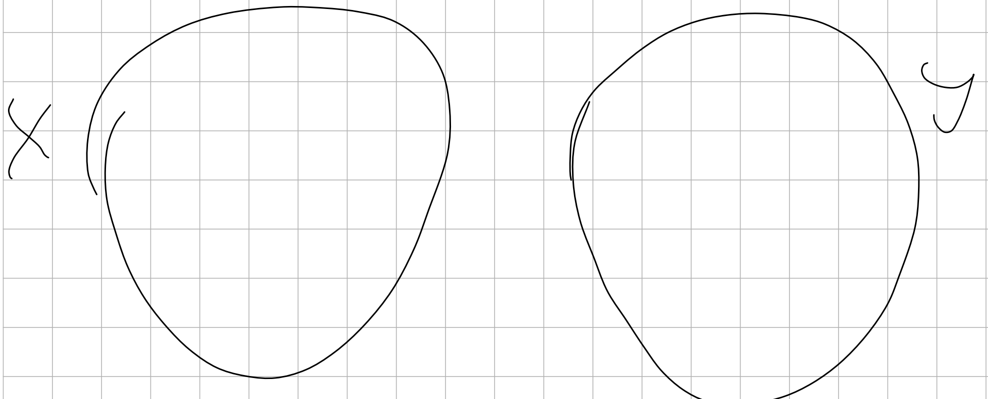
пример: „лесенка“:

1 1 2 1 2 3 1 2 3 4 1 2 3 4 5 1 2 3 4 5 6 1 2 3 4 5 6 7 ...

$f^{-1}(\{1\}) = \{1, 2, 4, 7, 11 ..\}$

$f^{-1}(\{2\}) = \{3, 5, 8, 12 ..\}$

Лемма Холла:



n „женихи“

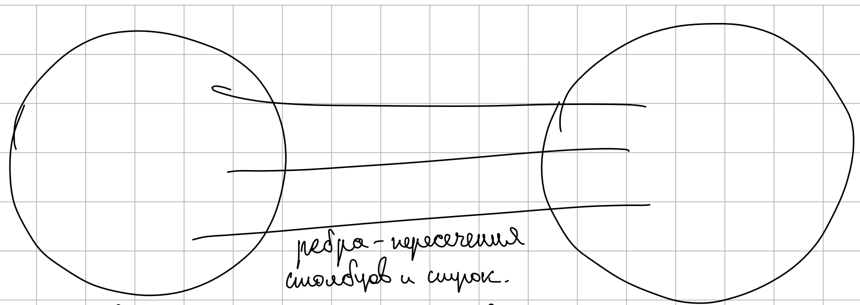
n „невесты“

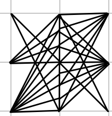
k женихов суммарно знают не менее k невест, чтобы мы могли поженить пары знакомых.

Чтобы построить n паросочетаний $\Leftrightarrow \forall k$, где

k - кол-во вершин из X, суммарное кол-во вершин, с которыми они соединены $\geq k$.

8*. В каждой клетке доски $n \times n$ написано неотрицательное вещественное число таким образом, что суммы в каждой горизонтали и вертикали равны 1. Докажите, что можно расставить n небьющих друг друга ладей так, что стоящие под ними числа будут ненулевыми.



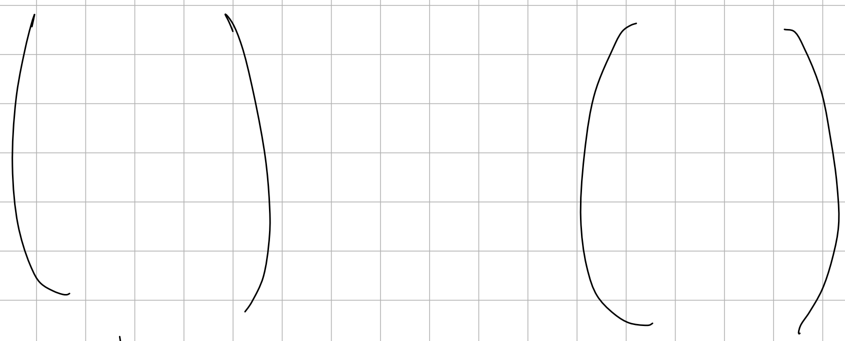


ребра - пересечения столбцов и строк.

столбцы

Удалим все нулевые ребра.

строки.



k столбцов

$k \leq n$

m строк.

$k \leq n$

сумма чисел

для каждого числа $=1$

сумма всех ребер в графе $k=m$