$[\{\neg, \oplus\}]$

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

xy	$x \oplus y$
00	0
01	1
10	1
11	0

	$\neg$	$\oplus$
T_0	−	+
T_1	−	−
L	+	+
M	−	−

$\Rightarrow [\{\neg ; \oplus\}] \subseteq L$

$MAJ(x_1, x_2 \ldots)$: если кол-во 1 $> 0 \to 1$

если кол-во 1 $\leq 0 \to 0$.

булев куб:

$(0 \ldots 0)$

$(1, 0 \ldots 0) \quad \ldots \quad (0 \ldots 0, 1)$

$\ldots$

$(\quad) \quad \ldots \quad (\quad) \leftarrow \left[\frac{n+1}{2}\right]$ ряд $\leftarrow \binom{n}{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ наборов.

$(1 \ldots 1)$

$MAJ(x_1 \ldots x_n)$ можно выразить в базисе $(0, 1, \vee, \wedge)$:

$x_1 \cdot x_2 \cdot x_{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \vee x_2 \cdot x_3 \cdot x_{\left[\frac{n-1}{2}\right]+1} \vee \ldots \vee x_{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \cdot \ldots \cdot x_n$.

Производящие функции.

ряд: $a_0, a_1, a_2 \dots$

функция: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = A(x)$

если сходится в какой-либо окрестности x.

примеры:

1 1 1

$1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$ при $|x| < 1$ сходится

$(1 + x + x^2 + \dots + x^n)(1-x) = 1 - x^{n+1}$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$$

$$(1 + x + x^2 + \dots)' = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)'$$

$$(1 + x + x^2 + \dots)^{(k)} = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k)}$$

$k! + [k+1]_k$

$$[n]_k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

$$k! + [k+1]_k x + [k+2]_k x^2 \dots = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

$$1 + \frac{[k+1]_k}{k!} x + \frac{[k+2]}{k!} x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$

$$\binom{k}{0} + \binom{k+1}{1} x + \binom{k+2}{2} x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x)^{k+1}},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} y^k = (1+y)^n,$$

$$\int \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k \, dx = \frac{1}{n+1} (1+y)^{n+1} + C$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{1+k} \cdot x^{k+1} = \frac{1}{n+1} (1+y)^{n+1} + C.$$

$\int x^k dx$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$$

$$a_0 + a_1 x + \dots = A(x)$$

$$b_0 + b_1 x + \dots = B(x)$$

$$C_0 + C_1 x + \dots = C(x) = A(x) B(x)$$

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots) =$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_2 + \dots) x^2 + \dots$$

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

$$C(x) = A(x) B(x) = (1+x)^n (1+x)^n = (1+x)^{2n} = \sum_{m=0}^{2n} \binom{2n}{m} x^m$$

$$C_m = \binom{2n}{m} \to C_n = \binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

---

4. В урне находится 3 красных, 4 синих и 2 зелёных шара. Сколькими способами можно извлечь 6 шаров так, чтобы среди них было нечётное число красных, чётное число синих и хотя бы один зелёный шар?

$$6 = x_к + x_с + x_з$$

$x_к$: 1, 3; $x_с$: 0, 2, 4; $x_з$: 1, 2

$$(x^1+x^3)(x^0+x^2+x^4)(x^1+x^2) = \sum_{n=}^{9} a_n x^n$$

6. Найдите производящую функцию $f(x)$ для последовательности a_n, состоящей из числа способов набрать n рублей, имея монеты в 1, 2 и 5 рублей. Представьте $f(x)$ аналитически.

a_n способов.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$(x^1+x^2+x^5) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n_1} x^n$$ a_{n_1} – способов представить 1 монетой.

$$(x^1+x^2+x^5)^2 = \sum_{n=0} a_{n_2} x^n$$

$$(x^1+x^2+x^5)^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n_k} x^n$$ a_{n_k} – k монетками.