Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

СБОРНИК
программ и заданий
Физтех-школа прикладной математики и информатики (ФПМИ)

для студентов 1 курса
на осенний семестр
2024–2025 учебного года

ПМФ, ИВТ. Математическое моделирование
и компьютерные технологии

МОСКВА
МФТИ
2024

Сборник программ и заданий для студентов 1 курса на осенний семестр 2024–2025 учебного года. **Физтех-школа прикладной математики и информатики (ФПМИ)**. ПМФ, ИВТ. Математическое моделирование и компьютерные технологии. – Москва : МФТИ, 2024. – 32 с.

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
17 июня 2024 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Общая физика: механика**
по направлениям подготовки:
03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
16.03.01 «Техническая физика»,
11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»
физтех-школа: **для всех физтех-школ, кроме ФБВТ, ВШПИ**
кафедра: **общей физики**
курс: 1
семестр: 1

лекции – 30 часов
практические (семинарские) занятия – 30 часов
лабораторные занятия – 60 часов

Экзамен – 1 семестр
Диф. зачёт – 1 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ – 120

Самостоятельная работа:
теор. курс – 90 часов
физ. практикум – 75 часов

Программу и задание составили:

к.ф.-м.н., доц. Л. М. Колдунов
к.ф.-м.н., доц. П. В. Попов
к.ф.-м.н., доц. М. А. Савров
к.ф.-м.н., доц. Д. И. Холин
к.ф.-м.н., доц. И. С. Юдин

Программа принята на заседании
кафедры общей физики 14 мая 2024 г.

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор
А. В. Максимычев

МЕХАНИКА

1. Предмет физики. Физические величины, единицы измерений СИ и СГС, внесистемные единицы.

Кинематика материальной точки. Системы отсчёта и системы координат (декартова, полярная, сферическая). Радиус-вектор, линейные и угловые скорости и ускорения. Нормальное, тангенциальное и полное ускорения. Описание движения вдоль плоской кривой. Радиус кривизны траектории. Угловая скорость как вектор, сложение вращений.

2. Динамика материальной точки. Задание состояния частицы в классической механике. Основная задача динамики. Инерциальные и неинерциальные системы отсчёта. Первый закон Ньютона. Импульс и сила. Инертная и гравитационная массы. Второй закон Ньютона. Уравнение движения частицы, роль начальных условий. Третий закон Ньютона. Закон сохранения импульса.

Движение тел с переменной массой, реактивное движение. Уравнение Мещерского, формула Циолковского.

3. Работа силы. Мощность. Консервативные и неконсервативные силы. Понятие силового поля. Потенциальная энергия, потенциал поля. Кинетическая энергия частицы. Закон сохранения энергии в механике. Общефизический закон сохранения энергии.

Динамика системы частиц. Центр инерции (центр масс). Закон движения центра инерции. Система центра инерции. Преобразование энергии при смене системы отсчёта. Теорема Кёнига. Задача двух тел, приведённая масса. Анализ столкновения двух частиц для абсолютно упругого и неупругого ударов. Построение и использование векторных диаграмм. Пороговая энергия при неупругом столкновении частиц.

4. Момент импульса материальной точки. Связь момента импульса материальной точки с секториальной скоростью. Момент импульса системы материальных точек. Момент силы. Уравнение моментов. Закон сохранения момента импульса. Движение тел в центральном поле. Потенциальность центральных сил.

5. Закон всемирного тяготения. Потенциальная энергия в гравитационном поле. Законы Кеплера. Классификация траекторий в поле центральных гравитационных сил, финитные и инфинитные движения. Критерий финитного движения. Первая и вторая космические скорости. Связь параметров орбиты планеты с полной энергией и моментом импульса планеты. Теорема Гаусса и её применение для вычисления гравитационных полей.

6. Вращение твёрдого тела вокруг неподвижной оси. Момент инерции. Вычисление моментов инерции твёрдых тел. Теорема Гюйгенса – Штейнера. Уравнение моментов при вращении вокруг неподвижной оси. Кинетическая энергия вращающегося тела.

Кинематика твёрдого тела. Теорема Эйлера. Мгновенная ось вращения. Независимость угловой скорости вращения твёрдого тела от положения оси, к которой отнесено вращение. Уравнение моментов относительно движущегося начала и движущейся оси. Условие равновесия твёрдого тела. Плоское движение твёрдого тела. Качение, скатывание тел с наклонной плоскости.

7. Общее вращение твёрдого тела. Понятие о тензоре инерции и эллипсоиде инерции. Центробежные моменты инерции. Главные оси инерции. Регулярная прецессия свободного вращающегося симметричного волчка. Гироскопы. Движение свободного гироскопа. Уравнение движения гироскопа под действием сил (приближённая теория). Применения гироскопов.

8. Элементы специальной теории относительности. Принцип относительности. Независимость скорости распространения взаимодействий (скорости света) от системы отсчёта. Преобразования Галилея и Лоренца. Интервал и его инвариантность относительно смены системы отсчёта. Относительность понятия одновременности. Замедление времени, собственное время жизни частицы. Сокращение масштабов, собственная длина. Релятивистское сложение скоростей.

9. Релятивистская динамика. Импульс релятивистской частицы. Уравнение движения релятивистской частицы под действием внешней силы. Кинетическая энергия релятивистской частицы, энергия покоя, полная энергия. Инвариантность массы системы. Инвариант энергии-импульса.

10. Гармонические колебания материальной точки. Пружинный и математический маятники. Частота, круговая частота и период колебаний. Роль начальных условий. Энергия колебаний, связь средней кинетической и средней потенциальной энергий гармонического осциллятора. Механические колебания твёрдых тел. Физический маятник. Приведённая длина, центр качания. Теорема Гюйгенса о физическом маятнике.

11. Свободные затухающие колебания. Коэффициент затухания, логарифмический декремент затухания, добротность. Понятие о вынужденных колебаниях материальной точки под действием синусоидальной силы. Резонанс. Резонансные кривые (амплитудно-частотная и фазово-частотная характеристики осциллятора). Фазовая плоскость, фазовые траектории осциллятора. Суперпозиция колебаний: фигуры Лиссажу, биения. Параметрическая раскачка колебаний. Понятие об автоколебаниях.

12. Неинерциальные системы отсчёта. Относительное, переносное, кориолисово ускорения. Силы инерции: поступательная, центробежная, кориолисова. Второй закон Ньютона в неинерциальных системах отсчёта. Потенциальная энергия в поле центробежных сил. Вес тела, невесомость. Отклонение падающих тел от направления отвеса. Геофизические проявления кориолисовых сил. Маятник Фуко.

13. Элементы теории упругости. Нормальные и касательные напряжения. Упругие и пластические деформации. Растяжение и сжатие стержней. Коэффициент упругости, модуль Юнга, коэффициент Пуассона. Объёмная плотность энергии упругой деформации. Всестороннее и одностороннее растяжение и сжатие. Понятие о деформациях сдвига и кручения.

14. Волны. Распространение продольных упругих возмущений в среде. Скорость распространения звука в тонком стержне. Волновое уравнение (в одномерном случае). Длина волны, волновое число, фазовая скорость. Бегущие и стоячие волны. Отражение волн от свободной и жёстко закреплённой

границы. Условие возникновения стоячих волн. Эффект Доплера (классический и релятивистский).

15. Элементы гидродинамики. Гидростатика: закон Паскаля, сила Архимеда, уравнение равновесия жидкости. Идеальная жидкость. Линии тока, стационарное течение идеальной жидкости и газа. Уравнение Бернулли. Формула Торричелли.

Вязкость. Стационарное ламинарное течение вязкой жидкости по прямолинейной трубе, формула Пуазейля. Законы физического подобия, безразмерные параметры. Понятие о гидродинамической турбулентности. Число Рейнольдса и его физический смысл. Эффект Магнуса. Подъёмная сила крыла.

Литература

Основная

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. 1. Механика. — Москва : Физматлит, 2003.
2. *Кириченко Н.А.*, *Крымский К.М.* Общая физика. Механика : учеб. пособие. — Москва : МФТИ, 2013.
3. *Кингсеп А.С.*, *Локшин Г.Р.*, *Ольхов О.А.* Основы физики. Курс общей физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. — Москва : Физматлит, 2001.
4. Лабораторный практикум по общей физике. Т. 1. Механика / под ред. А.Д. Гладуна. — Москва : МФТИ, 2012.
5. Сборник задач по общему курсу физики. Ч. 1 / под ред. В.А. Овчинкина. — Москва : Физматкнига, 2017.

Дополнительная

1. *Калашников Н.П., Смондырев М.А.* Основы физики. — Москва : Лаборатория знаний, 2017.
2. *Стрелков С.П.* Механика — Москва : Лань, 2005.
3. *Ландау Л.Д.*, *Ахиезер А.И.*, *Лифшиц Е.М.* Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. — Москва : Наука, 1969.
4. *Хайкин С.Э.* Физические основы механики. — Москва : Наука, 1971.
5. *Киттель Ч.*, *Найт У.*, *Рудерман М.* Механика. — Москва : Наука, 1983.
6. *Фейнман Р.* Фейнмановские лекции по физике. Вып. 1, 2. М.: Мир, 1977.
7. *Корявов В.П.* Методы решения задач в общем курсе физики. Механика. — Москва : Студент, 2012.
8. *Гавриков А.В., Ворона Н.А.* Механические колебания. — Москва : МФТИ, 2011.
9. *Белонучкин В.Е.* Относительно относительности. — Москва : МФТИ, 2009.
10. *Булыгин В.С.* Физическая механика (кинематика, начала динамики). — Москва : МФТИ, 2019; Автоколебательный пружинный маятник. — М.: МФТИ, 2018; Простая баллистика. — Москва : МФТИ, 2018.

Электронные ресурсы: http://physics.mipt.ru/S_I/

ЗАДАНИЕ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ

для студентов 1-го курса
на осенний семестр 2024/25 учебного года

Дата	№ нед	Темы семинарских занятий	Задачи		
			0	I	II
2–6 сент.	**1**	Основы кинематики.	1.2 $^{0}1$ $^{0}2$	1.12 1.3 1.13 1.17	1.5 1.11 1.21 1.24
9–13 сент.	**2**	Динамика материальной точки. Законы Ньютона.	$^{0}3$ 2.1 2.5	2.17 2.68 2.43 2.57	2.18 2.51 2.71 2.59
16–20 сент.	**3**	Закон сохранения импульса. Реактивное движение. Центр масс.	$^{0}4$ 4.10 $^{0}5$	3.11 3.43 4.55 4.25	3.41 3.60 2.76 T1
23–27 сент.	**4**	Работа и энергия. Законы сохранения	$^{0}6$ $^{0}7$ 4.70	4.80 4.47 4.98 4.134	4.41 4.76 4.90 4.125 4.100
30 сен. – 4 окт.	**5**	Движение в поле центральных сил. Тяготение.	$^{0}8$ 7.1 $^{0}9$	7.61 7.85 7.189 7.136	T2 T3 T4 7.139
7–11 окт.	**6**	Момент импульса. Вращение твёрдых тел вокруг неподвижной оси.	$^{0}10$ $^{0}11$ $^{0}12$	6.8 9.1 T5 9.95	6.9 9.105 9.126 9.121
14–18 окт.	**7**	Плоское движение твёрдого тела, качение.	$^{0}13$ $^{0}14$ $^{0}15$	9.76 9.79 9.115 9.163	6.15 9.71 9.89 9.187
21–25 окт.	**8**	Произвольное движение твёрдого тела. Гироскопы.	11.7 11.8	11.1 11.14 11.18 11.24	T6 T7 T8 11.20
26 октября		Общекурсовая контрольная работа (по 1–7 неделям)			
28 окт.– 1 нояб.	**9**	Разбор контрольной работы. Сдача 1-го задания (1-8 недели).			

4–8 нояб.	**10**	Кинематические эффекты теории относительности. Преобразования Лоренца.	$^{0}16$ $^{0}17$	8.4 8.79 8.30 8.77	8.7 8.98 8.89
11–15 нояб.	**11**	Релятивистские и нерелятивистские столкновения частиц. Динамика релятивистских частиц.	$^{0}18$ $^{0}19$	8.59 8.43 8.47 8.74	8.44 8.57 8.105 Т9
18–22 нояб.	**12**	Гармонические колебания. Колебания твёрдых тел.	$^{0}20$ $^{0}21$ 10.3	5.22 5.43 10.47 10.84	5.49 10.78 10.43 10.53 10.34
25–29 нояб.	**13**	Вынужденные колебания. Неинерциальные системы отсчёта.	$^{0}22$ 12.38 $^{0}23$	12.27 12.19 12.7 12.80	12.48 12.89 12.86 12.70
2–6 дек.	**14**	Элементы теории упругости.	$^{0}24$ 13.18	13.7 13.16 13.41 13.39	Т10 13.36 13.49 13.42
9–13 дек.	**15**	Элементы гидродинамики.	$^{0}25$ $^{0}26$ $^{0}27$	14.17 14.11 14.27 14.24	14.42 14.21 14.46 14.29
16–20 дек.	**16**	Сдача 2-го задания (8-15 недели)			

Примечания

Номера задач указаны по “Сборнику задач по общему курсу физики. Ч. 1. Механика, термодинамика и молекулярная физика” / под ред. В.А. Овчинкина (**4-е изд.**). — Москва : Физматкнига, 2016.

Все задачи обязательны для сдачи задания, их решения должны быть представлены преподавателю на проверку. В каждой теме семинара задачи разбиты на 3 группы:

- **0** — задачи, которые студент должен решать заранее для подготовки к семинару;
- **I** — задачи, рекомендованные для разбора на семинаре (преподаватель может разбирать на семинарах и другие равноценные задачи по своему выбору);
- **II** — задачи для самостоятельного решения.

Задачи 0 группы

⁰1. Мяч посылается с начальной скоростью $v_0 = 19{,}6$ м/с под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. В тот же момент навстречу мячу стартует игрок, находившийся на расстоянии $\ell = 55$ м. С какой скоростью он должен бежать, чтобы успеть схватить мяч до удара о землю?

Ответ: 5,6 м/с.

⁰2. Точка начинает двигаться по окружности с угловым ускорением $\varepsilon = 1{,}7$ рад/с^2. Найти угол между векторами ускорения и скорости точки через $t = 1$ с.

Ответ: $\alpha = 60°$.

⁰3. Скорость некоторого тела при поступательном движении пропорциональна его координате: $\dot{x} = x/\tau$, где $\tau = 10$ с. Найти координату и ускорение тела в момент времени $t = \tau$, если в начальный момент оно находилось в точке $x_0 = 1$ м.

Ответ: $x(\tau) \approx 2{,}72$ м, $a(\tau) \approx 0{,}027$ м/с^2.

⁰4. Ракета массой $M = 6$ т установлена для запуска по вертикали. При скорости истечения газов $u = 3$ км/с найти расход топлива μ, необходимый для того, чтобы обеспечить тягу, достаточную для придания ракете начального ускорения $a = 2g$ вверх.

Ответ: 59 кг/с.

⁰5. Тонкий однородный стержень раскрутили вокруг одного из концов. С какой силой действует стержень на ось вращения, если сила натяжения в его середине равна 12 Н?

Ответ: 16 Н.

⁰6. Груз, висящий на лёгкой пружине жёсткостью $k = 400$ Н/м, растягивает её на $\Delta x_0 = 2$ см. Какую работу надо затратить, чтобы утроить удлинение пружины ($\Delta x_1 = 6$ см), прикладывая к грузу вертикальную силу?

Ответ: 0,32 Дж.

⁰7. Потенциальная энергия взаимодействия двух неполярных молекул может быть приближённо описана формулой $U(r) = U_0\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{12} - \left(\frac{a}{r}\right)^{6}\right]$ (потенциал Леннард-Джонса), где $U_0 > 0$, $a = 4$ нм, r — расстояние между молекулами. Найти расстояние r_0, при котором сила взаимодействия молекул равна нулю.

Ответ: 4,5 нм.

⁰8. Над некоторой планетой запущен спутник связи, всё время находящийся над одной и той же её точкой. Во сколько раз радиус орбиты этого спутника R больше радиуса планеты R_0, если известно, что другой спутник, обращающийся вокруг планеты на малой высоте, делает за время планетарных суток 17 полных оборотов?

Ответ: $R \approx 6{,}6R_0$.

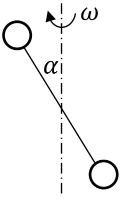
[0]9. Найти период обращения двойной звезды, компоненты которой имеют массы $M_\odot$ и $2M_\odot$ ($M_\odot$ — масса Солнца) и движутся по орбитам с нулевым эксцентриситетом на расстоянии 0,5 а.е. друг от друга.

Ответ: $T \approx 2{,}5$ мес.

[0]10. Вычислить момент инерции I однородного диска массы m и радиусом R относительно оси вращения, проходящей в плоскости диска по его диаметру.

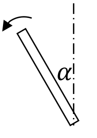
Ответ: $mr^2/4$.

[0]11. Два маленьких шарика массы m каждый, закреплённых на лёгкой штанге длины l, вращаются с угловой скоростью ω вокруг фиксированной оси, проходящей через центр штанги (т. O) под углом α к ней. Найти направление и модуль вектора момента импульса системы относительно т. O в произвольный момент времени.



Ответ: $\left|\vec{L}\right| = \frac{1}{2} m\omega l^2 \sin\alpha,$ перпендикулярно стержню в плоскости рисунка.

[0]12. Высокая и тонкая фабричная труба треснула у основания и стала падать. Найти угловую скорость ω и угловое ускорение ε как функции угла α между трубой и вертикалью.



Ответ: $\varepsilon = \frac{3g}{2l}\sin\alpha$, $\omega = \sqrt{3\frac{g}{l}(1-\cos\alpha)}$.

[0]13. Найти ускорение центра тонкостенного мяча, скатывающегося без проскальзывания с плоскости, установленной под углом α к горизонту.

Ответ: $a = \frac{3}{5} g \sin\alpha$.

[0]14. Шар и сплошной цилиндр, имеющие равные массы, катятся без скольжения с одинаковой скоростью. Определить отношение их кинетических энергий $K_ш / K_ц$.

Ответ: $K_ш / K_ц = 14 / 15$.

[0]15. Мяч радиуса R и массы m раскручен до угловой скорости ω и поставлен на горизонтальную шероховатую поверхность. С какой скоростью V будет двигаться мяч после прекращения проскальзывания?

Ответ: $V = 2\omega R/5$.

⁰16. Две частицы летят вдоль прямой со скоростью $v = 0{,}99c$ относительно лабораторной системы. Неподвижный детектор регистрирует эти частицы с интервалом $\Delta t = 10^{-4}$ с. Найти расстояние между частицами в их системе отсчёта.

Ответ: $l \approx 2{,}1 \cdot 10^5$ м.

⁰17. Две частицы, движущиеся на встречу друг другу с одинаковыми скоростями и находившиеся исходно на расстоянии L в лабораторной системе, столкнулись через время $t = L/c$ по лабораторным часам. Найти их относительную скорость.

Ответ: 0,8c.

⁰18. Найти скорость электрона, имеющего кинетическую энергию 1) 1 эВ, 2) 1 МэВ. Энергия покоя электрона $m_e c^2 \approx 0{,}5$ МэВ.

Ответ: 1) $6 \cdot 10^5$ м/с, 2) $2{,}8 \cdot 10^8$ м/с.

⁰19. Исходно покоящееся ядро цезия-137 испустило фотон с энергией $E = 1$ МэВ. Найти скорость, которую приобрело ядро.

Ответ: $v \approx \frac{c}{1{,}3 \cdot 10^5} \approx 2{,}3$ км/с.

⁰20. На гладком столе лежат два груза массами m и $2m$, скреплённые двумя последовательно соединёнными пружинами с жёсткостями k и $2k$. Найти их период колебаний.

Ответ: $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

⁰21. Однородный диск радиусом $r = 10$ см подвешен на оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его край (см. зад. 10.6). Диску сообщили из положения равновесия начальную угловую скорость $\omega_0 = 0{,}8$ рад/с. Найти закон изменения угла отклонения маятника во времени, считая амплитуду колебаний малой.

Ответ: $\varphi \approx 0{,}1 \sin 8t$.

⁰22. Математический маятник имеет длину $L = 9{,}8$ см. Точка подвеса маятника колеблется вдоль оси, расположенной горизонтально, по гармоническому закону с циклической частотой $\Omega = 11$ рад/с и амплитудой $a = 1$ мм. Найти амплитуду A установившихся колебаний маятника. Трение считать малым.

Указание: перейти в систему отсчёта точки подвеса и рассмотреть силу инерции как вынуждающую гармоническую силу.

Ответ: $A = \frac{a}{\ell\Omega^2/g - 1} = 4{,}8$ мм.

⁰23. Поезд движется со скоростью $V = 144$ км/ч по закруглению радиуса $R = 20$ км. К потолку вагона подвешен на нити небольшой груз. Оценить угол отклонения нити $\Delta\alpha$ и относительное изменение натяжения нити $\Delta T/T$ по сравнению со случаем, когда поезд покоится.

Ответ: $\Delta\alpha \approx 8{,}2 \cdot 10^{-3}$ рад $\approx 0{,}5°$; $\frac{\Delta T}{T} \approx \frac{\Delta\alpha^2}{2} = 3{,}3 \cdot 10^{-5}$.

⁰24. Два троса с сечениями S_1 и $S_2 = 2S_1$ и одинаковой длины имеют модули Юнга E_1 и $E_2 = 2E_1$. Найти отношение плотностей энергии деформации при одинаковом весе подвешенного к ним груза.

Ответ: $w_1/w_2 = 8$.

⁰25. На горизонтальной поверхности стола стоит цилиндрический сосуд, заполненный водой. В боковой стенке проделано малое отверстие площадью $S = 1$ см^2 на высоте $h = 0{,}5$ м относительно поверхности стола. Найти реактивную силу, действующую на сосуд в момент, когда высота воды в нём равна $H = 1$ м.

Ответ: ≈ 1 Н.

⁰26. Зазор толщиной $h = 0{,}1$ мм между двумя плоскими поверхностями заполнен маслом с вязкостью $\eta \approx 10^{-1}$ Па · с. Найти касательное напряжение, которое необходимо прикладывать к плоскостям для того, чтобы обеспечить их относительное движение со скоростью $v = 10$ см/с.

Ответ: 10^2 Н/м^2.

⁰27. Оценить число Рейнольдса в водопроводной трубе диаметра $d = 2$ см при расходе $Q = 30$ л/мин. Вязкость холодной воды $\eta = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ Па · с. Будет ли такое течение ламинарным?

Ответ: 10^4.

Текстовые задачи

Т1. (2018) К аэростату массой $M = 150$ кг привязана верёвочная лестница длиной $L = 40$ м, на нижнем конце которой находится человек массой $m = 50$ кг. Исходно аэростат находится в равновесии и неподвижен. Человек начинает подниматься вверх с постоянной скоростью $u = 0{,}2$ м/с относительно лестницы. Сила сопротивления воздуха, действующая на аэростат, пропорциональна его скорости $F = -kV$, где $k = 1{,}0$ Н·с/м. На какой высоте окажется человек, когда доберётся до конца лестницы? Действием сопротивления воздуха на человека пренебречь.

Ответ: 33,7 м.

Т2. Два тела с массами m и $3m$ движутся навстречу из бесконечности по параллельным траекториям, расстояние между которыми равно l. Начальные скорости равны $3v_0$ и v_0 соответственно. Каково будет минимальное расстояние между телами с учетом их гравитационного притяжения?

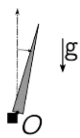
Ответ: $l\left(\sqrt{\frac{v_{II}^4}{v_0^4}+1}-\frac{v_{II}^2}{v_0^2}\right)$, где $v_{II}^2 = \frac{3\gamma m}{l}$.

Т3. (2016) Космический аппарат движется по круговой орбите радиусом $r_0 = 1{,}5 \cdot 10^8$ км вокруг Солнца вдали от других тел. За короткое время он получает приращение скорости $\Delta v = 15$ км/с в направлении, перпендикулярном движению. Определить период T обращения аппарата по новой орбите.

Ответ: 560 сут.

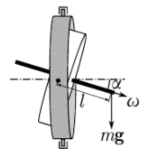
T4. (2018) В 2017 году в Солнечной системе был обнаружен первый объект межзвёздного происхождения — астероид Оумуамуа. Когда астероид находился на расстоянии $R = 1$ а.е. от Солнца, его полная скорость (относительно Солнца) была равна $v = 50$ км/с, а её радиальная компонента (скорость удаления от Солнца) $v_r = 40$ км/с. Найти расстояние r_p от астероида до центра Солнца и его скорость v_p при прохождении перигелия. Считать известной орбитальную скорость Земли: $V = 30$ км/с (скорость спутника Солнца на круговой орбите на расстоянии 1 а.е.).

Ответ: $r_p = 0{,}43$ а.е., $v_p = 70$ км/с.



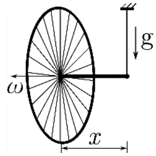
T5. (2022) Высокая ель, отпиленная у основания, падает на землю из неподвижного вертикального положения. Ель имеет форму кругового конуса высотой $H = 28$ м. Определите кинетическую энергию дерева в момент отрыва от опоры, если его масса $M = 1$ т. Считать, что ель опирается на край опоры центром основания (см. рис.), а отрыв происходит при отсутствии компоненты силы реакции вдоль ствола дерева. Изгибом ствола и сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: 30 кДж



T6. (2019) К оси лабораторного гироскопа, закреплённого на кардановом подвесе в центре масс, подвешен груз массой $m = 306$ г на расстоянии $l = 120$ мм от центра. За один оборот регулярной прецессии исходно горизонтальная ось гироскопа опустилась на $\Delta\alpha = 10°$. Определите величину момента силы трения в вертикальной оси крепления подвеса.

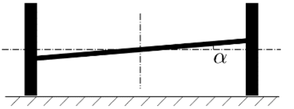
Ответ: $0{,}01$ Н · м.



T7. (2023) Демонстрационный гироскоп представляет собой велосипедное колесо массы m. В начале демонстрации колесо раскручено с большой скоростью и подвешено за конец оси так, что ось располагается горизонтально, а расстояние от точки подвеса до центра масс колеса равно x. Из-за небольшого постоянного момента силы трения M во втулке вращение колеса постепенно замедляется. Сколько оборотов совершит ось колеса в результате прецессии к тому моменту, как угловая скорость вращения самого колеса уменьшится вдвое?

Ответ: $\frac{mgx \ln 2}{M}$.

Т8. (2014) Ось железнодорожной колёсной пары, представляющая собой однородный тонкий стержень массы $m = 200$ кг и длины $\ell = 1{,}5$ м, приварена к колёсам под углом $\alpha = 1°$ к горизонту, как показано на рис. (колёса расположены вертикально и симметрично, центр масс стержня совпадает с серединой горизонтального отрезка, соединяющего центры колёс). Найти максимальную силу давления одного из колёс на землю при поступательном движении конструкции без проскальзывания по горизонтальной поверхности, когда угловая скорость равна $\omega = 50$ рад/с. Суммарная масса конструкции равна $m_0 = 1000$ кг.

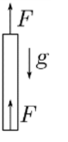


<u>Ответ</u>: $N_{\max} \approx \frac{1}{12} m\omega^2 \ell\alpha + \frac{1}{2} m_0 g = 6 \cdot 10^3$ Н

Т9. (2024) Электрон, двигаясь без начальной скорости в постоянном и однородном электрическом поле пролетел расстояние $L = 1$ м за время $\tau = 5{,}8$ нс. Найдите отношение кинетической энергии электрона в конце пути к его энергии покоя mc^2.

<u>Ответ:</u> 1.

Т10. (2024) Однородный стержень длины L, радиуса r и массы m движется вертикально вверх в однородном поле силы тяжести под действием двух сил $F = mg$, приложенных к его верхнему и нижнему торцам (g - ускорение свободного падения). Определите изменение длины стержня, энергию его деформации и положение точки, в которой деформация стержня равна нулю. Модуль Юнга материала E. Силы распределены равномерно по площади торцов.



<u>Ответ:</u> 0; $L/2$; $\frac{(mg)^2 L}{6\pi r^2 E}$

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
17 июня 2024 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Аналитическая геометрия**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика»,
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
09.03.04 «Программная инженерия»,
11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»,
16.03.01 «Техническая физика»,
19.03.01 «Биотехнология»
физтех-школы: **ФАКТ, ФЭФМ, ФПМИ, ФБМФ, ФРКТ, ВШПИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 1

лекции — 30 часов
практические (семинарские) занятия — 30 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 1 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Самостоятельная работа:
теор. курс — 18 часов

Программу составили:
к. ф.-м. н., доцент А. Н. Бурмистров
к. ф.-м. н., доцент О. К. Подлипский
к. ф.-м. н., доцент Д. А. Степанов
к. п. н., доцент Д. А. Терёшин
к. ф.-м. н., доцент И. А. Чубаров

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 11 апреля 2024 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Направленные отрезки и векторы, линейные операции над ними. Свойства линейных операций. Коллинеарность и компланарность векторов. Линейно зависимые и независимые системы векторов. Связь линейной зависимости с коллинеарностью и компланарностью векторов. Базис, координаты вектора в базисе. Действия с векторами в координатах.

2. Определения общей декартовой и прямоугольной (ортонормированной) системы координат. Матрица перехода и ее основное свойство. Изменение координат вектора при замене базиса. Изменение координат точки при переходе к новой системе координат. Формулы перехода от одной прямоугольной системы координат на плоскости к другой.

3. Скалярное произведение и его свойства. Ортогональные проекции. Выражение скалярного произведения в координатах, выражение в ортонормированном базисе. *Матрица Грама*[1]. Формулы для определения расстояния между точками и угла между векторами.

4. Ориентация на плоскости и в пространстве. Смешанное и векторное произведения векторов, их свойства и геометрический смысл. Выражение смешанного и векторного произведений через координаты векторов. Условия коллинеарности и компланарности векторов. Формула двойного векторного произведения. Биортогональный (взаимный) базис.

5. Алгебраические линии и поверхности, их порядок. Теорема об инвариантности порядка линии на плоскости (поверхности в пространстве) при переходе к новой декартовой системе координат.

6. Векторные и координатные формы уравнения прямой на плоскости и в пространстве. Условия параллельности (или совпадения), перпендикулярности прямых на плоскости, заданных в координатной форме. *Пучок прямых на плоскости*[2] Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве. Расстояние от точки до прямой на плоскости и в пространстве. Расстояние между двумя прямыми в пространстве.

7. Векторные и координатные формы уравнения плоскости. Условия параллельности (или совпадения) плоскостей, заданных в координатной форме. Расстояние от точки до плоскости в пространстве и расстояние между параллельными плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Прямая как линия пересечения двух плоскостей. *Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых*[3]. *Связка и пучок плоскостей*[4].

[1] Для потоков О.Г. Подлипской, Д.А. Степанова и И.А. Чубарова.
[2] Для всех, кроме потока Д.А. Терёшина.
[3] Для потоков О.Г. Подлипской и И.А. Чубарова.
[4] Для потока А.Н. Бурмистрова.

8. Алгебраические линии второго порядка на плоскости, их классификация. Приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду. Центр линии второго порядка, центральные и нецентральные линии.

9. Эллипс, гипербола и парабола, их свойства. Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе. *Уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярной системе координат*[5].

10. *Асимптотические направления и диаметры линий второго порядка.*[6]

11. *Цилиндрические и конические поверхности*[7]. Поверхности вращения. Эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды и конус второго порядка, их основные свойства. Прямолинейные образующие.

12. Отображения и преобразования плоскости. Произведение (композиция) отображений. Взаимно однозначное отображение, обратное отображение. Линейные преобразования плоскости. Координатное представление линейных преобразований плоскости.

13. Аффинные преобразования плоскости и их основные свойства. Геометрический смысл модуля и знака определителя аффинного преобразования плоскости. Аффинная классификация линий второго порядка. Ортогональные преобразования плоскости и их свойства. Разложение аффинного преобразования плоскости в произведение ортогонального преобразования и двух сжатий. *Понятие о группе преобразований*[8].

14. Алгебраические операции с матрицами. *Элементарные преобразования матриц*[9]. Обратная матрица.

15. Определение детерминанта. Свойства детерминанта. Миноры, алгебраические дополнения. Детерминант произведения матриц. Правило Крамера. Критерий обратимости. Формула для элементов обратной матрицы.

Литература

1. *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — Санкт-Петербург : Издательство «Лань», 2018.
2. *Умнов А. Е.* Аналитическая геометрия и линейная влгебра. — Москва : МФТИ, 2011, `http://www.umnov.ru`.
3. *Чехлов В. И.* Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре. — Москва : МФТИ, 2000.
4. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры. Ч. 2. Линейная алгебра. — Москва : Физматлит, 2005.

[5] Для потоков Д.А. Терёшина и И.А. Чубарова.
[6] Для всех, кроме потоков Д.А. Степанова и Д.А. Терёшина.
[7] Для всех, кроме потока Д.А. Терёшина.
[8] Для всех, кроме потоков А.Н. Бурмистрова и Д.А. Терёшина.
[9] Для всех, кроме потока И.А. Чубарова.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. *Беклемишева Л. А., Беклемишев Д. В., Петрович А. Ю., Чубаров И. А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — Санкт-Петербург : Издательство «Лань», 2023. (цитируется — С)

Замечания

1. Задачи с подчеркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 30 сентября – 05 октября)

I. Матрицы и определители 2-го и 3-го порядков. Системы линейных уравнений. Правило Крамера

С: 14.4(<u>5</u>, 6); 14.7(<u>4</u>, 6, 11); 14.10(1)*; 15.2(<u>1</u>, 3); 15.5(<u>1</u>, 2, 11, 14); 15.11(<u>3</u>, 4, 7); 15.22(<u>1</u>)*.

T.1. Пусть все элементы квадратной вещественной матрицы третьего порядка отличны от нуля. Доказать, что все 6 произведений в определителе этой матрицы не могут быть одного знака.

T.2. Найти все квадратные матрицы второго порядка, перестановочные с любой квадратной матрицей второго порядка.

С: 17.1(<u>2</u>, 4); 17.2(4).

II. Векторы

С: <u>1.5</u>; 1.7; 1.10; <u>1.15</u>; 1.21; 1.23; 1.30(1, 2); 1.37*; 1.35; 1.50*.

III. Замена базиса и системы координат

С: 4.5; <u>4.10</u>; 4.19; 4.23*; 4.27*.

IV. Скалярное, векторное и смешанное произведения

С: 2.7(<u>4</u>); <u>2.10</u>(1, 2); 2.11*; <u>2.22</u>; 2.27(<u>3</u>); <u>2.30</u>; 2.32; 2.42*; 3.2(2); 3.6; 3.9; 3.12; 3.13(<u>1</u>, 2); 3.19(<u>2</u>); 3.21; 3.24*; 3.26(3)*; 3.32.

T.3. При каком λ векторы

$$\boldsymbol{a} = (1, 1, 1),\ \boldsymbol{b} = (2, 0, 1),\ \boldsymbol{c} = (3, 1, \lambda),$$

образуют базис?

Т.4. Решить уравнение $[\boldsymbol{a}, [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}]] = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}$ относительно неизвестного вектора $\boldsymbol{x}$, считая вектор $\boldsymbol{a}$ известным.

Рекомендации по решению
первого домашнего задания по неделям

1 неделя	**С:** 14.4(5, 6); 14.7(4, 6, 11); 14.10(1)*; 15.2(1, 3); 15.5(1, 2, 11, 14); 15.11(3, 4, 7); 15.22(1); Т.1; Т.2; 17.1(2,4); 17.2(4).
2 неделя	**С:** 1.5; 1.7; 1.10; 1.15; 1.21; 1.23; 1.30(1, 2); 1.37*; 1.35; 1.50*.
3 неделя	**С:** 4.5; 4.10; 4.19; 4.23*; 4.27* 2.7(4); 2.10(1, 2); 2.11*; 2.22; 2.27(3); 2.30; 2.32; 2.42*.
4 неделя	**С:** 3.2(2); 3.6; 3.9; 3.12; 3.13(1, 2); 3.19(2); 3.21; 3.24*; 3.26(3)*; 3.32; Т.3; Т.4.

$\boxed{37 + 9^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 04–09 ноября)

I. Прямая на плоскости

С: 5.1(1, 2, 3); 5.4(1); 5.8(1, 2, 5); 5.11; 5.16; 5.19; 5.24; 5.37; 5.54; 5.56*.

II. Плоскость и прямая в пространстве

С: 6.1(1, 3, 5); 6.2(1, 2, 3); 6.3(2); 6.4(1); 6.10(3, 4); 6.11(3, 5, 9); 6.15; 6.18(1); 6.21(2); 6.26*; 6.37*; 6.68(2); 6.74(1, 2, 3, 4, 5).

III. Линии второго порядка

С: 7.25(3, 8); 7.28; 7.34*; 7.38(4, 7); 7.41(1); 7.49(2)*; 7.54(1, 2, 3); 7.56*; 7.62(2, 4); 8.1(2, 5, 6); 8.3(2); 8.7(3); 8.9(1, 3); 8.13; 8.23*; 8.24(2); 8.25(3); 8.27*; 8.28(3, 6); 9.1(6); 9.4(1, 3, 10); 9.13(1); 9.15(2); 9.17*.

Рекомендации по решению
второго домашнего задания по неделям

1 неделя	**С:** 5.1(1, 2, 3); 5.4(1); 5.8(1, 2, 5); 5.11; 5.16; 5.19; 5.24; 5.37; 5.54; 5.56*; 6.1(1, 3, 5); 6.2(1, 2, 3); 6.3(2); 6.4(1); 6.10(3, 4).
2 неделя	**С:** 6.11(3, 5, 9); 6.15; 6.18(1); 6.21(2); 6.26*; 6.37*; 6.68(2); 6.74(1, 2, 3, 4, 5).
3 неделя	**С:** 7.25(3, 8); 7.28; 7.34*; 7.38(4, 7); 7.41(1); 7.49(2)*; 7.54(1, 2, 3); 7.56*; 7.62(2, 4).
4 неделя	**С:** 8.1(2, 5, 6); 8.3(2); 8.7(3); 8.9(1, 3); 8.13; 8.23*; 8.24(2); 8.25(3); 8.27*; 8.28(3, 6); 9.1(6); 9.4(1, 3, 10); 9.13(1); 9.15(2); 9.17*.

$\boxed{38 + 9^*}$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 09–14 декабря)

I. Поверхности второго порядка

С: 10.3($\underline{3}$, 7, 9); 10.9(2, 3, 6); 10.16; 10.23*; $\underline{10.32}$; 10.42; 10.46($\underline{3}$); 10.65(1); 10.81; 10.82.

Т.1. Будет ли линия пересечения двух поверхностей второго порядка линией второго порядка?

II. Аффинные преобразования плоскости

С: 12.28(1, 2*, 3); $\underline{12.32}$; 12.38(2); 12.39(2); 12.40($\underline{1}$, 3); 12.43(5); 12.53(1, $\underline{2}$, 5, 8*); 12.55(11)*; 12.69(1, 4); 12.82 (для преобразования 12.81($\underline{7}$, 9)).

III. Определители n-го порядка

С: 14.12(1, 2); 14.21($\underline{2}$, 9, 13*); 14.22(2); 14.23(6, 9, 11, $\underline{18}$); 14.24($\underline{3}$, 5, 7); 14.33*.

Т.2*. Найдите наибольшее значение определителя 4-го порядка, у которого все элементы равны 1 или -1.

IV. Операции с матрицами. Обратная матрица

С: 15.11(2, 4); 15.18(2); 15.22($\underline{2}$, 5); 15.23(1)*; 15.24($\underline{1}$, 3 ,4); 15.45(2, 7, 9); 15.54(3); 15.56*; 15.65($\underline{4}$, 5, 6*).

Т.3*. Опишите такие обратимые (вещественные) матрицы A порядка n, что все элементы как матрицы A, так и обратной матрицы A^{-1} неотрицательны.

Рекомендации по решению третьего домашнего задания по неделям

1 неделя	**С:** 10.3(3, 7, 9); 10.9(2, 3, 6); 10.16; 10.23*; 10.32; 10.42; 10.46(3); 10.65(1); 10.81; 10.82; Т.1.
2 неделя	**С:** 12.28(1, 2*, 3); 12.32; 12.38(2); 12.39(2); 12.40(1, 3); 12.43(5); 12.53(1, 2, 5, 8*); 12.55(11)*; 12.69(1, 4); 12.82 (для преобразования 12.81(7, 9)).
3 неделя	**С:** 14.12(1, 2); 14.21(2, 9, 13*); 14.22(2); 14.23(6, 9, 11, 18); 14.24(3, 5, 7); 14.33*; Т.2*.
4 неделя	**С:** 15.11(2, 4); 15.18(2); 15.22(2, 5); 15.23(1); 15.24(1, 3, 4); 15.45(2, 7, 9); 15.54(3); 15.56*; 15.65(4, 5, 6); Т.3*.

$\boxed{32 + 9^*}$

Составитель задания к. ф.-м. н., доцент И. А. Чубаров

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
17 июня 2024 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Введение в математический анализ**
по направлению подготовки: 03.03.01 «Прикладные математика и физика», 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», 09.03.04 «Программная инженерия»
физтех-школы: **ФПМИ, ВШПИ**
кафедра: **высшей математики**
курс: 1
семестр: 1

лекции — 60 часов
практические (семинарские) занятия — 60 часов
лабораторные занятия — нет

Экзамен — 1 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 120

Самостоятельная работа:
теор. курс — 30 часов

Программу составил
к. ф.-м. н., доцент Н. А. Гусев

Программа принята на заседании кафедры высшей математики 11 апреля 2024 г.

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор Г. Е. Иванов

1. Действительные числа. Отношения неравенств между действительными числами, арифметические операции с ними. Представление действительных чисел бесконечными десятичными дробями. Свойство Архимеда. Плотность множества рациональных чисел во множестве действительных чисел. Теорема о существовании и единственности точной верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу).

2. Равномощность множеств. Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел. Теорема Кантора.

3. Предел числовой последовательности. Единственность предела. Ограниченность последовательности, имеющей конечный предел. Бесконечно малые последовательности и их свойства. Переход к пределу в неравенствах. Арифметические операции с пределами. Бесконечные пределы.

4. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности. Неравенство Бернулли, число e.

5. Теорема Кантора о вложенных отрезках. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Частичные пределы, теорема о верхнем и нижнем пределах. Фундаментальные последовательности и критерий Коши.

6. Определения предела функции в точке по Коши и по Гейне, их эквивалентность. Колебание функции. Свойства пределов функции, теорема о пределе композиции. Различные типы пределов. Критерий Коши существования конечного предела функции. Односторонние пределы функции. Существование односторонних пределов у монотонной функции.

7. Непрерывность функции в точке. Теорема о непрерывности композиции. Точки разрыва функции, их классификация. Теорема о разрывах монотонной функции.

8. Ограниченность непрерывной на отрезке функции. Теорема Вейерштрасса о достижимости точных граней. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Критерий непрерывности монотонной функции. Теорема об обратной функции. Основные элементарные функции. Сравнение асимптотического поведения функций (символы o, O, $\sim$).

9. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора о равномерной непрерывности. Условия Липшица и Гёльдера.

10. Производная функции одной переменной. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал. Геометрический смысл производной и дифференциала. Непрерывность дифференцируемой функции. Односторонние производные. Производная суммы, произведения (правило Лейбница) и частного. Производная композиции. Инвариантность формы диф-

ференциала относительно замены переменного. Производная обратной функции. Таблица производных основных элементарных функций.

11. Локальные экстремумы. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Теорема Ролля. Теоремы Лагранжа и Коши о среднем значении. Теорема Дарбу о промежуточных значениях производной. Условия монотонности и постоянства дифференцируемой функции. Достаточное условие экстремума функции в терминах первой производной. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$.

12. Производные высших порядков. Формула Лейбница для n-й производной произведения функций. Дифференциал второго порядка. Отсутствие инвариантности его формы относительно замены переменной. Дифференциалы высших порядков.

13. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Разложения функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ и $(1+x)^\alpha$. Достаточное условие локального экстремума в терминах высших производных. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

14. Применение производных к исследованию функций. Достаточные условия локального экстремума в терминах второй и высших производных. Выпуклость, точки перегиба. Построение графиков функций — асимптоты, исследование интервалов монотонности и точек локального экстремума, интервалов выпуклости и точек перегиба.

15. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Интегрирование рациональных функций.

16. Определенный интеграл Римана. Линейность, монотонность и аддитивность интеграла. Интегрируемость непрерывных функций, монотонных функций и ограниченных функций с конечным числом точек разрыва. Формула Ньютона–Лейбница. Интеграл с переменным верхним пределом, достаточные условия его непрерывности и дифференцируемости. Существование первообразной у непрерывной функции. Суммы Римана, суммы Дарбу, взвешенное колебание. Критерии интегрируемости. Интегрирование подстановкой и по частям в определённом интеграле. Интегральная теорема о среднем. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

Литература

Основная

1. *Бесов О. В.* Лекции по математическому анализу. — Москва : Физматлит, 2014.
2. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. — Москва : МФТИ, 2011.

3. *Петрович А. Ю.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. Введение в математический анализ. — Москва : МФТИ, 2017.
4. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. — Москва : МФТИ, 2007.

<u>*Дополнительная*</u>

5. *Зорич В. А.* Математический анализ. Т. 1. — Москва : Наука, 1997.
6. *Карасёв Р. Н.* Отдельные темы математического анализа. — `https://rkarasev.ru/common/upload/an_explanations.pdf`.
7. *Редкозубов В. В.* Лекции по математическому анализу. Функции одной переменной. — Москва : МФТИ, 2023.
8. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. — 8-е изд. — Москва : Физматлит, 2007.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Предел, непрерывность, дифференцируемость: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С1)
2. Сборник задач по математическому анализу. Т.2. Интегралы. Ряды: учебное пособие / под ред. Л.Д. Кудрявцева. — Москва : Физматлит, 2003. (цитируется — С2)

Замечания

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные *, являются необязательными для всех студентов.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 07–12 октября)

I. Приёмы вычисления производных

С1, §13: 33; 78; 106; 146.

Т.1. Найдите $f'(x_0)$, если

а) $f = \ln \circ \operatorname{sh} \circ \exp \circ \sin \circ \ln$ (символ $\circ$ означает операцию композиции), $x_0 = e^{\pi/2}$;

б)* $f(x) = \dfrac{(4x+3)^5}{(8x+9)^7}\left(\dfrac{7x+9}{5x+6}\right)^8$, $x_0 = 0$.

Т.2. Найдите производную функции (ответ не упрощать)

$$y = \left(\frac{\operatorname{tg} \sqrt{1 - \log_3 2x}}{\operatorname{cth}\left(x^3 + 3e^{x^4}\right)} \right)^{\arccos 2x^2}.$$

II. Приёмы вычисления первообразных

С2, §1: 2(16); 12(2); <u>13(7)</u>; 15(5); 17(4); 23(5); <u>24(3)</u>.

III. Действительные числа

С1, §3: <u>4</u>; 8; 9(2); 10.

Т.3. Найдите $\inf\limits_{t>0} \sup\limits_{s>0} \dfrac{s}{s+t}$ и $\sup\limits_{s>0} \inf\limits_{t>0} \dfrac{s}{s+t}$.

Т.4. Найдите сумму $1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n$.

Т.5*. Рассматриваются множество E и функция $f\colon E^2 \to (0,1)$. Докажите, что

$$\sup_{x\in E} \sup_{y\in E} f(x,y) = \sup_{y\in E} \sup_{x\in E} f(x,y) = \sup_{(x,y)\in E^2} f(x,y).$$

IV. Последовательности. Предел последовательности

С1, §7: 275(4); 276(5); <u>279(1)</u>; 299(2); <u>300(3)</u>.

С1, §8: 2(3) (по определению); 13(3); <u>25(3)</u>; 27; <u>28</u>; 39(3); 46; 53(6).

С1, §8: 60 (для всех $a > 0$); 63(4); <u>64(3)</u>; 67; 71(1); 164(1); 220*.

С1, §8: 141(2); <u>143(1)</u>; 147(5); <u>158</u>; 90(3); <u>91</u>; 100(3); <u>119</u>; <u>120</u>; 117(1); 139*; 246(2).

V. Функции. Предел функции. Непрерывность

С1, §9: 3; 8(1); 16(2, 3); 18(1, 3); 25(8); <u>30(2)</u>; 36(1); <u>61</u>.

С1, §10: <u>5(9)</u> (по определению); 14; <u>22</u>; 41(1); 42; 47(2)*; 56(4); 65; 66*; 76; 93*; 120*; 130.

VI. Равномощность множеств

Т.6. Построить биекцию $f\colon (0,1) \to (0,+\infty)$.

Т.7. Доказать, что множество всех многочленов с рациональными коэффициентами счётно.

Т.8. Доказать, что множество всех вещественных чисел, которые можно записать в виде десятичной дроби, в которую входят только цифры 4 и 5, несчётно.

<u>**Т.9**</u>. Построить биекцию $f\colon (0,1] \to (0,1)$.

Т.10*. Доказать, что $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ равномощно $\mathbb{R}$.

Т.11*. Доказать, что $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ равномощно $\mathbb{R}$.

Рекомендации по решению
первого домашнего задания по неделям

1 неделя	**С1, §13:**	33; 78; 106; 146; Т.1(а, б*); Т.2.
	С2, §1:	2(16); 12(2); 13(7); 15(5); 17(4); 23(5); 24(3).
2 неделя	**С1, §3:**	4; 8; 9(2); 10; Т.3; Т.4; Т.5*.
	С1, §7:	275(4); 276(5); 279(1); 299(2); 300(3).
	С1, §8:	2(3); 13(3); 25(3); 27; 28; 39(3); 46; 53(6).
3 неделя	**С1, §8:**	60; 63(4); 64(3); 67; 71(1); 164(1); 220*.
	С1, §8:	141(2); 143(1); 147(5); 158; 90(3); 91; 100(3); 119; 120; 117(1); 139*; 246(2).
4 неделя	**С1, §9:**	3; 8(1); 16(2, 3); 18(1, 3); 25(8); 30(2); 36(1); 61.
5 неделя	**С1, §10:**	5(9); 14; 22; 41(1); 42; 47(2)*; 56(4); 65; 66*; 76; 93*; 120*; Т.6; Т.7; Т.8; Т.9; Т.10*; Т.11*.

$\boxed{74 + 10^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 11–16 ноября)

I. Сравнение функций

С1, §9: 50($\underline{1}$, 2); 51(1).

Т.1. Докажите, что если при $x \to 0$ верно $f(x) = o(g(x))$ и $g(x) \sim h(x)$, то $f(x) = o(h(x))$ при $x \to 0$.

Т.2. Упростите выражение $(2x - 3x^4 + o(x^4))(1 - x + 2x^2 - x^3 + o(x^3))$ при $x \to 0$.

II. Дифференцируемость. Дифференциал

С1, §13: 179(2); 197(5); 201(3); 214(2); $\underline{173}$.

III. Производные и дифференциалы высших порядков

С1, §15: 1(6); 14(7); 22(4); 24(9); 24(9, 15); 25(3, $\underline{7}$, 10); 26(2).

Т.3*. Докажите, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ функция $f_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$ для всех $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяет равенству $f_n'(x) = -2n f_{n-1}(x)$ (здесь $f_0 \equiv 1$).

IV. Теоремы о среднем

С1, §16: $\underline{5}$; 15(4); $\underline{19}$; $\underline{33}$; 30.

Т.4. Функция f непрерывно дифференцируема на $[2024, 2028]$. Докажите, что существует точка $x \in (2024, 2028)$, для которой $f'(x) < \operatorname{ch}^2 f(x)$.

T.5. Функция f непрерывна на $[a,b)$ и дифференцируема на (a,b). Покажите, что если существует $\lim\limits_{x\to a+0} f'(x)$, то существует $f'_+(a) = f'(a+0)$.

V. Формула Тейлора

C1, §18: 2(6); 3(5); 4(7); 5(3); 2(4); 14(3); 20(6); 30(1); 38(6); 39(7).

T.6. Представьте формулой Маклорена до $o(x^6)$ функции:
а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{arctg} x$; в) $y = \arcsin x$; г) $y = \operatorname{th} x$.

T.7. Пусть функция f строго монотонна и дифференцируема n раз в окрестности нуля. Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $f(x) = x + ax^n + o(x^n)$ при $x \to 0$. Верно ли, что $f^{-1}(y) = y - ay^n + o(y^n)$ при $y \to 0$?

VI. Вычисление пределов и другие приложения формулы Тейлора

C1, §17: 32; 49; 63; 76; 80*.

C1, §19: 7(3); 9(6); 14(5); 22(2); 29(4); 47(5); 58(3)*.

T.8. Найдите многочлен Тейлора функции e^x в нуле, который позволял бы вычислить значения e^x на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 2$ с абсолютной точностью до 10^{-3}.

C1, §23: 67(2, 3); 54*; 52*; 56*.

Рекомендации по решению второго домашнего задания по неделям

1 неделя	**C1, §9:** 50(1, 2); 51(1); T.1; T.2. **C1, §13:** 179(2); 197(5); 201(3); 214(2); 173. **C1, §15:** 1(6); 10(4); 13(1); 14(7); 22(4).
2 неделя	**C1, §15:** 24(9, 15); 25(3, 7, 10); 26(2); T.3*. **C1, §16:** 5; 15(4); 19; 33; 30; T.4; T.5.
3 неделя	**C1, §18:** 2(6); 3(5); 4(7); 5(3); 2(4); 14(3); 20(6); 30(1); 38(6); 39(7); T.6; T.7.
4 неделя	**C1, §17:** 32; 49; 63; 76; 80*. **C1, §19:** 7(3); 9(6); 14(5); 22(2); 29(4); 47(5); 58(3)*; T.8. **C1, §23:** 67(2, 3); 54*; 52*; 56*.

$\boxed{53 + 6^*}$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 09–14 декабря)

I. Равномерная непрерывность

C1, §12: 4(4)(по определению); 2(1, 2); 1(5); 21; 23; 25; 29.

T.1. Пусть функция f дифференцируема на множестве $I = [a, +\infty)$. Докажите следующие утверждения:

а) если f' ограничена на I, то f равномерно непрерывна на этом множестве;

б) если f' бесконечно большая при $x \to +\infty$, то f не является равномерно непрерывной;

в) если f' неограничена, но не является бесконечно большой на I, то f может быть, а может и не быть равномерно непрерывной на I.

С1, §12: 3(7, 9).

T.2. Исследуйте на $(0, +\infty)$ равномерную непрерывность функций

а) $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$; б) $f(x) = xe^{\sin x}$.

T.3*. Пусть $I \subset \mathbb{R}$ — промежуток. Доказать, что функция $f\colon I \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $L > 0$ такое, что для всех $x, y \in I$ выполнено $|f(x) - f(y)| \leqslant \leqslant L|x - y| + \varepsilon$.

II. Исследование функций

С1, §20: 14; 33; 41(5); 57; 69(2); 70(4, 5, 7); 73*.

T.4. Выясните, что больше e^π или π^e?

III. Построение графиков функций

С1, §21: 5(2); 12(10); 14(3); 15(6); 23(4)*; 31(1)*.

IV. Определенный интеграл

С2, §6: 4(1); 24.

T.5. Пусть $f \in \mathcal{R}[0, 1]$ и $\int_0^1 f(x)\,dx > 0$. Покажите, что найдутся такой интервал $J \subset [0, 1]$ и число $m > 0$, что $f(x) \geqslant m$ для всех $x \in J$.

T.6. Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Выясните, верны ли следующие утверждения:

а) $f \in \mathcal{R}[a, b] \Rightarrow f^2 \in \mathcal{R}[a, b]$;

б) $f^2 \in \mathcal{R}[a, b] \Rightarrow f \in \mathcal{R}[a, b]$;

в) $f \in \mathcal{R}[a, b]$ и $f \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f} \in \mathcal{R}[a, b]$;

г) $f \in \mathcal{R}[a, b]$ и $|f| \geqslant c > 0 \Rightarrow \frac{1}{f} \in \mathcal{R}[a, b]$.

С2, §6: 54(5); 112(1); 118; 126; 197; 133; 149; 108(5).

T.7. а) Функция f имеет первообразную на отрезке $[a,b]$. Верно ли, что f интегрируема по Риману на $[a,b]$?

б) Функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$. Верно ли, что f имеет первообразную на $[a,b]$?

T.8. Вычислите $\int\limits_{1/3}^{3} \frac{\mathrm{arctg} x}{x^2-x+1}dx.$

T.9. Покажите, что композиция двух интегрируемых функций может не быть интегрируемой.

T.10*. Пусть f непрерывна на $[a,b]$, $f([a,b]) \subset [c,d]$, и g интегрируема на $[c,d]$. Будет ли $g \circ f$ интегрируема на $[a,b]$?

T.11*. Функция $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ непрерывна и для всех $x, y \geqslant 0$ выполнено $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$. Докажите, что f дифференцируема.

V. Вычисление первообразных

С2, §2: 2(2); 3(4); 4(6).
С2, §3: 4(2); 5(3); 18(5); 19(2).
С2, §4: 4(2); 15(5); 18(6); 21(2).
С2, §5: 139; 184.

Рекомендации по решению третьего домашнего задания по неделям

1 неделя	**С1, §12:** 4(4); 2(1,2); 1(5); 21; 23; 25; 29; Т.1. **С1, §12:** 3(7,9); Т.2; Т.3*.
2 неделя	**С1, §20:** 14; 33; 41(5); 57; 69(2); 70(4,5,7); 73*; Т.4. **С1, §21:** 5(2); 12(10); 14(3); 15(6); 23(4)*; 31(1)*.
3 неделя	**С2, §6:** 4(1); 24; Т.5; Т.6. **С2, §6:** 54(5); 112(1); 118; 126; 197; 133; 149; 108(5); Т.7; Т.8; Т.9; Т.10*; Т.11*.
4 неделя	**С2, §2:** 2(2); 3(4); 4(6). **С2, §3:** 4(2); 5(3); 18(5); 19(2). **С2, §4:** 4(2); 15(5); 18(6); 21(2). **С2, §5:** 139; 184.

$\boxed{53+6^*}$

Задания составили:
к. ф.-м. н., доцент Н. А. Гусев
ст. преподаватель К. Ю. Замана
к. ф.-м. н., доцент Е. Ю. Редкозубова

Учебное издание

СБОРНИК
программ и заданий

Физтех-школа прикладной математики и информатики (ФПМИ)

ПМФ, ИВТ. Математическое моделирование и компьютерные технологии

для студентов 1 курса
на осенний семестр
2024–2025 учебного года

Редакторы и корректоры: *И.А. Волкова, В.А. Дружинина*
Компьютерная верстка *Н.Е. Кобзевой*

Подписано в печать 18.07.2024. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 2,0.
Тираж 180 экз. Заказ № 150.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru

Для заметок

Для заметок