7

№1

$n = 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 6! = 720$

№2.

а.) всего 10^6 чисел. $= 10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10$.

без единицы: $n_x = 9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9\cdot9 = 531441$ число
(больше половины)

б.) всего 10^7 чисел

без единицы: 9^7 чисел $4782969 <$ половины.

№3.

Шестизначных чисел: $n_0 = 9\cdot10^5$

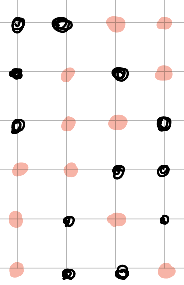
Шестизначных чисел, у которых все цифры разные:

$n = 9\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5$

Вероятность того, что найдется повторяющаяся цифра:

$$\boxed{p = \frac{n_0 - n}{n_0} = 0,8488}$$

№4.



→ 6 вариантов.

$$p = 6 \cdot \frac{18 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 17}{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33} = 0{,}3974$$

№5.

3 четных, 3 нечетных.

Всего шестизначных: $9 \cdot 10^5$

С одними четными: $4 \cdot 5^5$

С одними нечетными: 5^6

Со всеми четными и одной нечетной: $5^6 + 4 \cdot 5^5 \cdot 5 = 78125$

С 4 четными и двумя нечетными:

$$5 \cdot 5^6 + 4 \cdot 4 \cdot 5^5 + 3 \cdot 4 \cdot 5^5 + 2 \cdot 4 \cdot 5^5 + 4 \cdot 5^5 = 203125$$

на 2 и 3-6 позициях

нечетные на 1 и 2-6 позициях

С 4 нечетными и двумя четными:

$$5 \cdot 4 \cdot 5^5 + 4 \cdot 5^6 + 3 \cdot 5^6 + 2 \cdot 5^6 + 5^6 = 218750$$

Со всеми нечетными и одним четным:

$$4 \cdot 5^5 + 5 \cdot 5^6 = 90625$$

$$n = 9 \cdot 10^5 - 90625 - 218750 - 203125 - 78125 - 4 \cdot 5^5 - 5^6 = 281250$$

№6.

наборы четная-нечетная: $5 \cdot 5 = 25$

2 набора: $25 \times 25 = 625$.

$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$$

сюда можно поставить пару.

3 нечетных числа: $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

$625 \cdot 6 \cdot 125 = \boxed{468750}.$

№7.

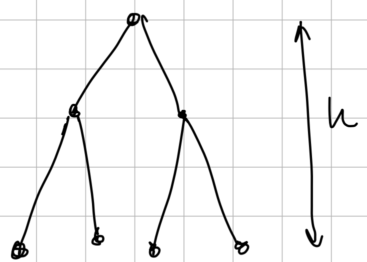
в одноместную: 7 вар. поселений.

в двухместную: $C_2^6 = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

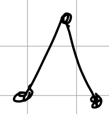
в четырехместную: $C_4^4 = \frac{4!}{4!} = 1$

$15 \times 1 \times 7 = 105$ способов.

№8.



ранг 0: $\bullet$

ранг 1: 

и т.д.

2^n способов выбрать начало диаметров и

2^{n-1} способов выбрать конец. (в другой половине)

Начало и конец однозначно задают диаметр.

Ответ: $2^n \cdot 2^{n-1} = 2^{2n-1}$.

№9.

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_n = N, \ n \le k$

$\lambda'_1 + \lambda'_2 + \ldots \lambda'_k = N + k \Rightarrow (\lambda'_1 - 1) + (\lambda'_2 - 1) + \ldots + (\lambda'_k - 1) = N$

$\lambda'_i - 1 \ge 0$, т.е. может быть равно 0.

$\Downarrow$

разбиения равносильны

их одинаковое количество.

№10

представим "(" $= 1$; ")" $= -1$, т.е. Σ скобочной последовательности $= 0$.

т.е. любая скобочная посл. есть в ± 1,

а вот не любой ± 1 есть скобочная посл.

т.е. послед. ± 1 больше.

Неделя 8.

Определение: $\sum_{0}^{n} C_k^n = 2^n$

1	1	1	1	1
1	2	3	4	
1	3	6		
1	4			
1				

$$\sum_{0}^{n} C_k^n = 2 \sum_{0}^{n-1} C_k^{n-1} \rightarrow N_n = 2^n$$

Неделя 9

№4

4. Пусть $X = \{1, \ldots, n\}$. Найдите число способов взять k подмножеств $X_1, \ldots, X_k$ множества X таких, что $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots \subseteq X_k$.

2^n способов взять X_k

в паре с X_k

$\sum\limits_{i=0}^{n} 2^i$ способов взять X_{k-1}, т.е. $\sum\limits_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1}$

2^{n+2} способов взять X_k, X_{k-1}, X_{k-2}

и т.д.

2^{n+k} способов взять $X_k, X_{k-1}, X_{k-2}, \ldots, X_1$.

Ответ: 2^{n+k}.

№9.

9. Есть n конфет и m коробок. Найдите число способов разместить конфеты по коробкам для каждого из условий (все конфеты должны быть разложены): **а)** и конфеты и коробки разные; **б)** конфеты одинаковые, коробки разные, не должно быть пустых коробок; **в)** конфеты одинаковые, коробки разные; **г)** и конфеты и коробки разные, не должно быть пустых коробок; **д)** конфеты разные, коробки одинаковые, не должно быть пустых коробок; **е)** конфеты разные, коробки одинаковые.

Укажите тип отображения, соответствующий размещению, если это возможно.

а.) m коробок $= m-1$ перегородок.

Получаем перестановку $n+m-1$ эл-тов.

Ответ: $(n+m-1)!$

б.) n одинаковых конфет.

$\cancel{\varnothing}$ пустых коробок $\to$ $n-1$ мест для 1 перегородки, n − 2 мест для второй перегородки.

получаем: $C_{n-1}^{m} \cdot m! = \dfrac{(n-1)!}{(n-1-m)!}$ (перегородки разные)

в.) перестановка из $n+m-1$ эл-тов, но n из них одинаковые:

$$\frac{(n+m-1)!}{n!}$$

г.) $n! \cdot \dfrac{n-1!}{(n-1-m!)}$

перестановки конфет.

д.) $\dfrac{(n-1)! \cdot n!}{(n-1-m)! \cdot m!}$

е.) $\dfrac{(n+m-1)!}{(m-1)!}$