

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО  
Факультет программной инженерии и компьютерной техники  
Дисциплина «Дискретная математика»

**Курсовая работа**  
Часть 1  
Вариант 41

Студент  
Кучерук Родион Олегович  
Р3132

Преподаватель  
Поляков Владимир Иванович

Функция  $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$  принимает значение 1 при  $-2 \leq x_2x_3 - x_4x_5x_1 < 3$  и неопределенное значение при  $x_2x_3 - x_4x_5x_1 = -1$

## Таблица истинности

№	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_2x_3$	$x_4x_5x_1$	$x_2x_3 - x_4x_5x_1$	$f$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0	2	0	1
2	0	0	0	1	0	0	4	0	0
3	0	0	0	1	1	0	6	0	0
4	0	0	1	0	0	2	0	2	1
5	0	0	1	0	1	2	2	2	1
6	0	0	1	1	0	2	4	2	1
7	0	0	1	1	1	2	6	2	0
8	0	1	0	0	0	4	0	4	0
9	0	1	0	0	1	4	2	4	1
10	0	1	0	1	0	4	4	4	1
11	0	1	0	1	1	4	6	4	1
12	0	1	1	0	0	6	0	6	0
13	0	1	1	0	1	6	2	6	0
14	0	1	1	1	0	6	4	6	1
15	0	1	1	1	1	6	6	6	1
16	1	0	0	0	0	0	1	0	d
17	1	0	0	0	1	0	3	0	0
18	1	0	0	1	0	0	5	0	0
19	1	0	0	1	1	0	7	0	0
20	1	0	1	0	0	2	1	2	1
21	1	0	1	0	1	2	3	2	d
22	1	0	1	1	0	2	5	2	0
23	1	0	1	1	1	2	7	2	0
24	1	1	0	0	0	4	1	4	0
25	1	1	0	0	1	4	3	4	1
26	1	1	0	1	0	4	5	4	d
27	1	1	0	1	1	4	7	4	0
28	1	1	1	0	0	6	1	6	0
29	1	1	1	0	1	6	3	6	0
30	1	1	1	1	0	6	5	6	1
31	1	1	1	1	1	6	7	6	d

## Аналитический вид

### Каноническая ДНФ:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 x_5 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 \overline{x_5}$$

### Каноническая КНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5})$$

# Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

## Кубы различной размерности и простые импликанты

$K^0(f)$			$K^1(f)$			$K^2(f)$			$Z(f)$
$m_0$	00000	✓	$m_0-m_1$	0000X	✓	$m_0-m_1-m_4-m_5$	00X0X		001X0
$m_1$	00001	✓	$m_0-m_4$	00X00	✓	$m_0-m_4-m_{16}-m_{20}$	X0X00		0X001
$m_4$	00100	✓	$m_0-m_{16}$	X0000	✓	$m_4-m_5-m_{20}-m_{21}$	X010X		010X1
$m_{16}$	10000	✓	$m_4-m_5$	0010X	✓	$m_{10}-m_{11}-m_{14}-m_{15}$	01X1X		0X110
$m_5$	00101	✓	$m_4-m_6$	001X0		$m_{10}-m_{14}-m_{26}-m_{30}$	X1X10		X1001
$m_6$	00110	✓	$m_1-m_5$	00X01	✓	$m_{14}-m_{15}-m_{30}-m_{31}$	X111X		00X0X
$m_9$	01001	✓	$m_1-m_9$	0X001					X0X00
$m_{10}$	01010	✓	$m_{16}-m_{20}$	10X00	✓				X010X
$m_{20}$	10100	✓	$m_4-m_{20}$	X0100	✓				01X1X
$m_{11}$	01011	✓	$m_{10}-m_{11}$	0101X	✓				X1X10
$m_{14}$	01110	✓	$m_9-m_{11}$	010X1					X111X
$m_{25}$	11001	✓	$m_{10}-m_{14}$	01X10	✓				
$m_{21}$	10101	✓	$m_6-m_{14}$	0X110					
$m_{26}$	11010	✓	$m_{20}-m_{21}$	1010X	✓				
$m_{15}$	01111	✓	$m_5-m_{21}$	X0101	✓				
$m_{30}$	11110	✓	$m_9-m_{25}$	X1001					
$m_{31}$	11111	✓	$m_{10}-m_{26}$	X1010	✓				
			$m_{14}-m_{15}$	0111X	✓				
			$m_{11}-m_{15}$	01X11	✓				
			$m_{26}-m_{30}$	11X10	✓				
			$m_{14}-m_{30}$	X1110	✓				
			$m_{30}-m_{31}$	1111X	✓				
			$m_{15}-m_{31}$	X1111	✓				

## Таблица импликант

Вычеркнем строки, соответствующие существенным импликантам (это те, которые покрывают вершины, не покрытые другими импликантами), а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами. Затем вычеркнем импликанты, не покрывающие ни одной вершины.

Простые импликанты		0-кубы												
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	
		0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	
		0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	
		0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	
		0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
		0	1	4	5	6	9	10	11	14	15	20	25	30
A	001X0			X		X								
B	0X001		X				X							
C	010X1						X		X					
D	0X110					X				X				
	X1001						X						X	
E	00X0X	X	X	X	X									
F	X0X00	X		X								X		
G	X010X			X	X							X		
H	01X1X							X	X	X	X			
I	X1X10							X		X				X
J	X111X									X	X			X

Ядро покрытия:

$$T = \{X1001\}$$

Получим следующую упрощенную импликантную таблицу:

Простые импликанты		0-кубы										
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
		0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1
		0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
		0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1
		0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
		0	1	4	5	6	10	11	14	15	20	30
A	001X0			X		X						
B	0X001		X									
C	010X1							X				
D	0X110					X			X			
E	00X0X	X	X	X	X							
F	X0X00	X		X							X	
G	X010X			X	X						X	
H	01X1X						X	X	X	X		
I	X1X10						X		X			X
J	X111X								X	X		X

Метод Петрика:

Запишем булево выражение, определяющее условие покрытия всех вершин:

$$Y = (E \vee F) (B \vee E) (A \vee E \vee F \vee G) (E \vee G) (A \vee D) (H \vee I) (C \vee H) (D \vee H \vee I \vee J) (H \vee J) (F \vee G) (I \vee J)$$

Приведем выражение в ДНФ:

$$Y = AEFHI \vee AEFHJ \vee AEGHI \vee AEGHJ \vee DEFHI \vee DEFHJ \vee DEGHI \vee DEGHJ \vee ABFGHI \vee ABFGHJ \vee ACEFIJ \vee ACEGIJ \vee BDFGHI \vee BDFGHJ \vee CDEFIJ \vee CDEGIJ \vee ABCFGIJ \vee BCDFGIJ$$

Возможны следующие покрытия:

$$C_1 = \begin{pmatrix} T \\ A \\ E \\ F \\ H \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X1001 \\ 001X0 \\ 00X0X \\ X0X00 \\ 01X1X \\ X1X10 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} T \\ A \\ E \\ F \\ H \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X1001 \\ 001X0 \\ 00X0X \\ X0X00 \\ 01X1X \\ X111X \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} T \\ A \\ E \\ G \\ H \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X1001 \\ 001X0 \\ 00X0X \\ X010X \\ 01X1X \\ X1X10 \end{pmatrix}$$

$$S_1^a = 20 \\ S_1^b = 26$$

$$S_2^a = 20 \\ S_2^b = 26$$

$$S_3^a = 20 \\ S_3^b = 26$$

$$C_4 = \begin{pmatrix} T \\ A \\ E \\ G \\ H \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X1001 \\ 001X0 \\ 00X0X \\ X010X \\ 01X1X \\ X111X \end{pmatrix} \quad C_5 = \begin{pmatrix} T \\ D \\ E \\ F \\ H \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X1001 \\ 0X110 \\ 00X0X \\ X0X00 \\ 01X1X \\ X1X10 \end{pmatrix} \quad C_6 = \begin{pmatrix} T \\ D \\ E \\ F \\ H \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X1001 \\ 0X110 \\ 00X0X \\ X0X00 \\ 01X1X \\ X111X \end{pmatrix}$$

$$S_4^a = 20 \\ S_4^b = 26$$

$$S_5^a = 20 \\ S_5^b = 26$$

$$S_6^a = 20 \\ S_6^b = 26$$

$$\begin{aligned}
C_7 &= \begin{pmatrix} T \\ D \\ E \\ G \\ H \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X1001 \\ 0X110 \\ 00X0X \\ X010X \\ 01X1X \\ X1X10 \end{pmatrix} & C_8 &= \begin{pmatrix} T \\ D \\ E \\ G \\ H \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X1001 \\ 0X110 \\ 00X0X \\ X010X \\ 01X1X \\ X111X \end{pmatrix} & C_9 &= \begin{pmatrix} T \\ A \\ B \\ F \\ G \\ H \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X1001 \\ 001X0 \\ 0X001 \\ X0X00 \\ X010X \\ 01X1X \\ X1X10 \end{pmatrix} \\
S_7^a &= 20 & S_8^a &= 20 & S_9^a &= 24 \\
S_7^b &= 26 & S_8^b &= 26 & S_9^b &= 31 \\
\\
C_{10} &= \begin{pmatrix} T \\ A \\ B \\ F \\ G \\ H \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X1001 \\ 001X0 \\ 0X001 \\ X0X00 \\ X010X \\ 01X1X \\ X111X \end{pmatrix} & C_{11} &= \begin{pmatrix} T \\ A \\ C \\ E \\ F \\ I \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X1001 \\ 001X0 \\ 010X1 \\ 00X0X \\ X0X00 \\ X1X10 \\ X111X \end{pmatrix} & C_{12} &= \begin{pmatrix} T \\ A \\ C \\ E \\ G \\ I \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X1001 \\ 001X0 \\ 010X1 \\ 00X0X \\ X010X \\ X1X10 \\ X111X \end{pmatrix} \\
S_{10}^a &= 24 & S_{11}^a &= 24 & S_{12}^a &= 24 \\
S_{10}^b &= 31 & S_{11}^b &= 31 & S_{12}^b &= 31 \\
\\
C_{13} &= \begin{pmatrix} T \\ B \\ D \\ F \\ G \\ H \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X1001 \\ 0X001 \\ 0X110 \\ X0X00 \\ X010X \\ 01X1X \\ X1X10 \end{pmatrix} & C_{14} &= \begin{pmatrix} T \\ B \\ D \\ F \\ G \\ H \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X1001 \\ 0X001 \\ 0X110 \\ X0X00 \\ X010X \\ 01X1X \\ X111X \end{pmatrix} & C_{15} &= \begin{pmatrix} T \\ C \\ D \\ E \\ F \\ I \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X1001 \\ 010X1 \\ 0X110 \\ 00X0X \\ X0X00 \\ X1X10 \\ X111X \end{pmatrix} \\
S_{13}^a &= 24 & S_{14}^a &= 24 & S_{15}^a &= 24 \\
S_{13}^b &= 31 & S_{14}^b &= 31 & S_{15}^b &= 31 \\
\\
C_{16} &= \begin{pmatrix} T \\ C \\ D \\ E \\ G \\ I \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X1001 \\ 010X1 \\ 0X110 \\ 00X0X \\ X010X \\ X1X10 \\ X111X \end{pmatrix} & C_{17} &= \begin{pmatrix} T \\ A \\ B \\ C \\ F \\ G \\ I \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X1001 \\ 001X0 \\ 0X001 \\ 010X1 \\ X0X00 \\ X010X \\ X1X10 \\ X111X \end{pmatrix} & C_{18} &= \begin{pmatrix} T \\ B \\ C \\ D \\ F \\ G \\ I \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X1001 \\ 0X001 \\ 010X1 \\ 0X110 \\ X0X00 \\ X010X \\ X1X10 \\ X111X \end{pmatrix} \\
S_{16}^a &= 24 & S_{17}^a &= 28 & S_{18}^a &= 28 \\
S_{16}^b &= 31 & S_{17}^b &= 36 & S_{18}^b &= 36
\end{aligned}$$

Рассмотрим следующее минимальное покрытие:

$$C_{\min} = \begin{pmatrix} X1001 \\ 001X0 \\ 00X0X \\ X0X00 \\ 01X1X \\ X1X10 \end{pmatrix}$$

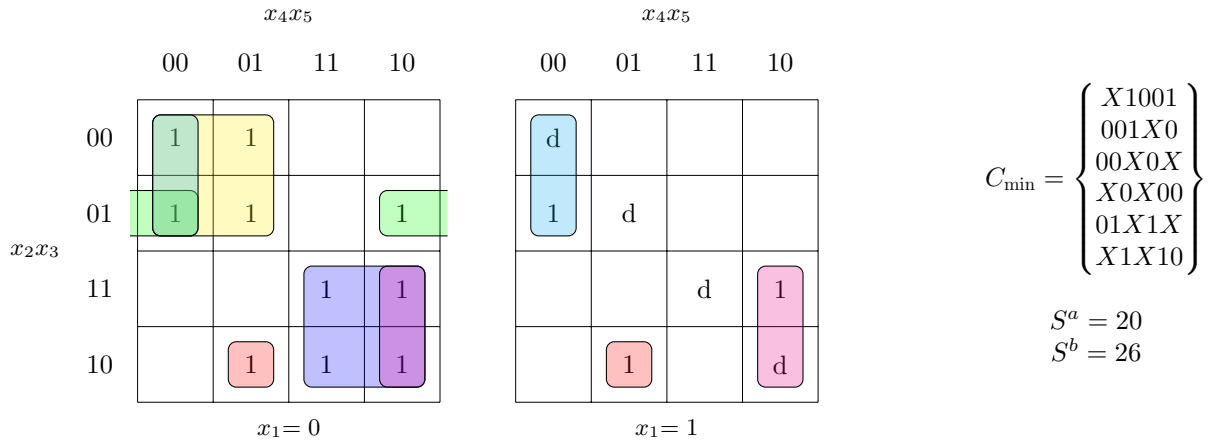
$$\begin{aligned}
S^a &= 20 \\
S^b &= 26
\end{aligned}$$

Этому покрытию соответствует следующая МДНФ:

$$f = x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_4} \vee \overline{x_2} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 x_4 \vee x_2 x_4 \overline{x_5}$$

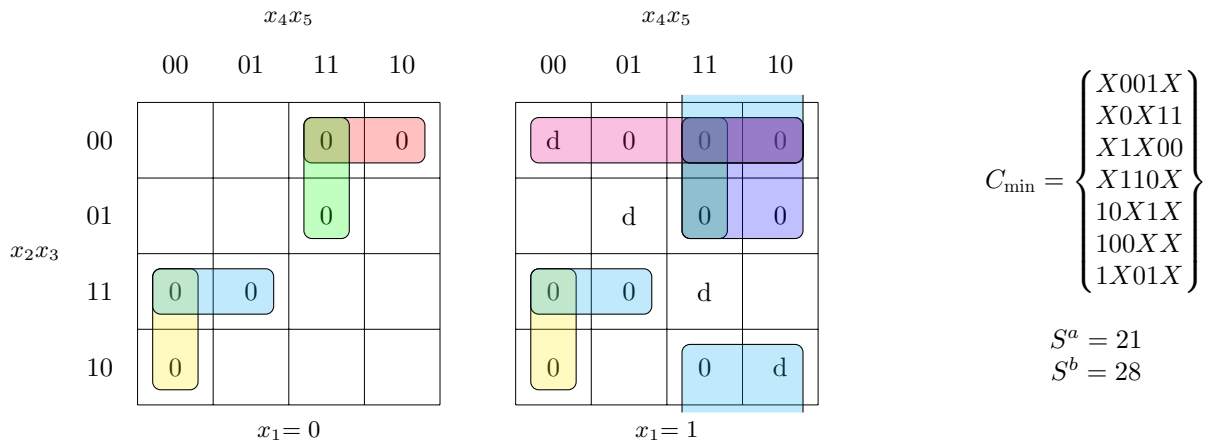
# Минимизация булевой функции на картах Карно

## Определение МДНФ



$$f = x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_4} \vee \overline{x_2} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 x_4 \vee x_2 x_4 \overline{x_5}$$

## Определение МКНФ



$$f = (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}) (x_2 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_2} \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) (\overline{x_1} \vee x_3 \vee \overline{x_4})$$

# Преобразование минимальных форм булевой функции

## Факторизация и декомпозиция МДНФ

$$f = x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_4} \vee \overline{x_2} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 x_4 \vee x_2 x_4 \overline{x_5} \quad S_Q = 26 \quad \tau = 2$$

Декомпозиция невозможна

$$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_5}) (x_2 x_4 \vee \overline{x_2} \overline{x_4}) \vee x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_5} \quad S_Q = 21 \quad \tau = 4$$

## Факторизация и декомпозиция МКНФ

$$f = (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}) (x_2 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_2} \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \vee x_4) \\ (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) (\overline{x_1} \vee x_3 \vee \overline{x_4}) \quad S_Q = 28 \quad \tau = 2$$

$$f = (x_2 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_3 \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_3 \vee x_2 \overline{x_4}) (\overline{x_2} \vee x_4 \vee \overline{x_3} x_5) \quad S_Q = 19 \quad \tau = 3$$

$$\varphi = x_2 \overline{x_4}$$

$$\overline{\varphi} = \overline{x_2} \vee x_4$$

$$f = (x_2 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_3 \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_3 \vee \varphi) (\overline{\varphi} \vee \overline{x_3} x_5) \quad S_Q = 19 \quad \tau = 4$$

Декомпозиция нецелесообразна

$$f = (x_2 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_3 \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_3 \vee x_2 \overline{x_4}) (\overline{x_2} \vee x_4 \vee \overline{x_3} x_5) \quad S_Q = 19 \quad \tau = 3$$

## Синтез комбинационных схем

Будем анализировать схемы на следующих наборах аргументов:

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 1]) = 0$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 1$$

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1]) = 1$$

## Булев базис

Схема по упрощенной МДНФ:

$$f = (\overline{x_1} \vee \overline{x_5}) (x_2 x_4 \vee \overline{x_2} \overline{x_4}) \vee x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_5} \quad (S_Q = 21, \tau = 4)$$

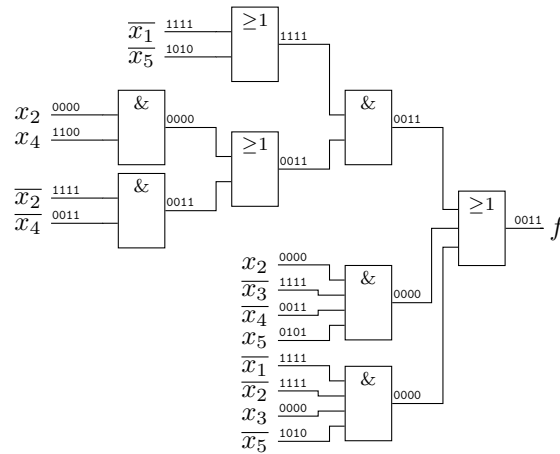
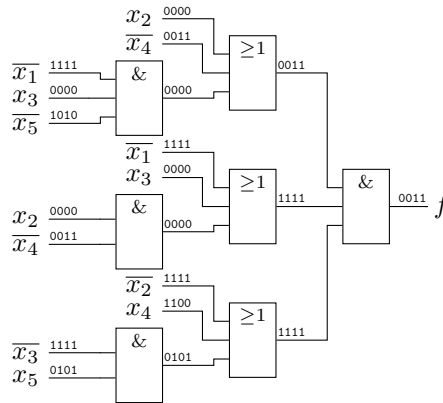


Схема по упрощенной МКНФ:

$$f = (x_2 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_1} x_3 \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_3 \vee x_2 \overline{x_4}) (\overline{x_2} \vee x_4 \vee \overline{x_3} x_5) \quad (S_Q = 19, \tau = 3)$$



## Сокращенный булев базис (И, НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{x_2 x_4 \overline{x_1} x_5 \overline{x_2} \overline{x_4} \overline{x_1} x_5 \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} x_5 \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_5}}} \quad (S_Q = 29, \tau = 6)$$

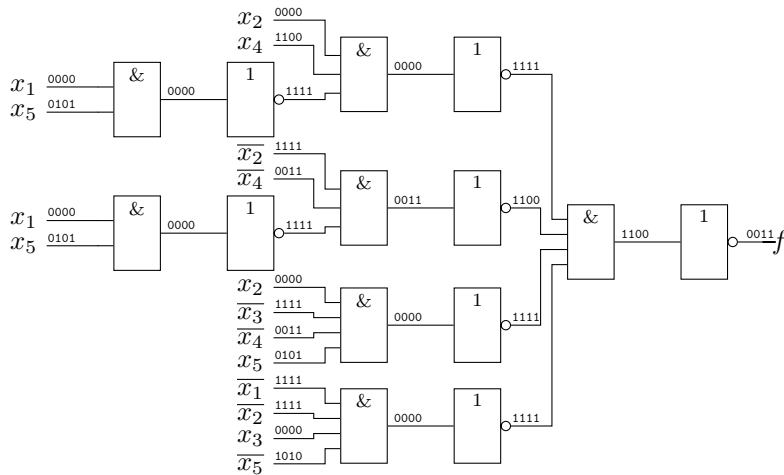
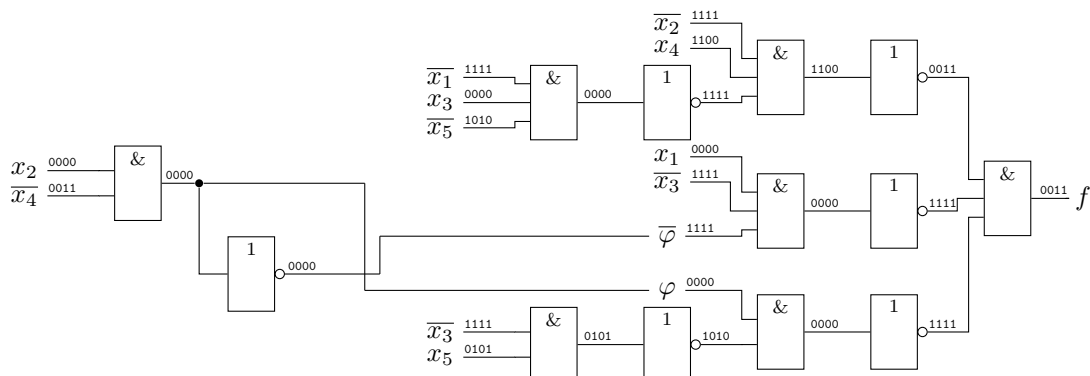


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{x_2} x_4 \overline{\overline{x_1} x_3 \overline{x_5} x_1 \overline{x_3} \overline{\varphi} \overline{\varphi} \overline{x_3} x_5}} \quad (S_Q = 24, \tau = 5)$$

$$\varphi = x_2 \overline{x_4}$$





## Универсальный базис (И-НЕ, 2 входа)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{x_1 x_5 x_2 x_4 x_2 x_4 x_2 x_3 x_4 x_5 x_1 x_2 x_3 x_5} \quad (S_Q = 36, \tau = 6)$$

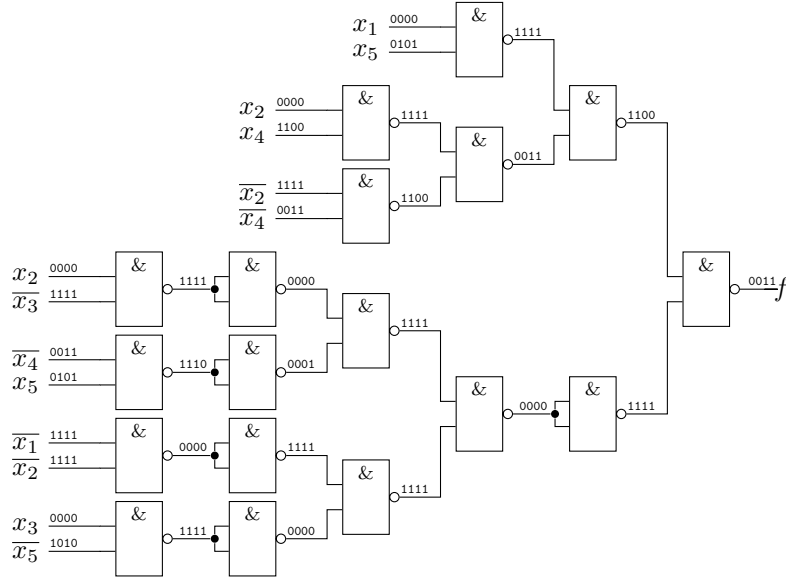


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{x_2 x_4 x_1 x_3 x_5 x_1 x_3 x_2 x_4 x_2 x_4 x_3 x_5} \quad (S_Q = 36, \tau = 8)$$

