VIRUM GYMNASIUM

SRP

MATEMATIK

Riemann-integralet

Forfatter
MINRUI KEVIN ZHOU

Vejledere
NIELS NØRSKOV LAURSEN

21. marts 2025

Resumé

Dette er mit resumé.

Indhold

1 Indledning

2 De reele tal

I dette afsnit vil vi først og fremmest undersøge nogle vigtige egenskaber ved $\mathbb{R}$, der er nødvendige for en stringent opbygning af integrationsteorien. Derefter indfører vi grundlæggende teori om topologi for $\mathbb{R}$, som vi senere skal bruge til at definere kontinuitet samt grænseværdien for en funktion.[1]

2.1 Supremum-egenskaben

Definition 2.1 Overtal, undertal

Antag, at $A \subseteq \mathbb{R}$. Hvis der eksisterer $y \in \mathbb{R}$ sådan at $x \leq y$ for alle $x \in A$, så siges A at være opad begrænset, og y kaldes et overtal for A.
Hvis der eksisterer $z \in \mathbb{R}$ sådan at $x \geq z$ for alle $x \in A$, så siges A at være nedad begrænset, og z kaldes et undertal for A.

Imidlertid, kan det også være interessant at kunne sige noget om, hvorvidt et bestemt overtal er det mindste overtal og om et bestemt undertal er det største undertal.

Definition 2.2 Supremum, infimum

Antag, at $A \subseteq \mathbb{R}$. Et element $y \in \mathbb{R}$ kaldes supremum eller mindste overtal af A og betegnes $\sup A$, hvis y har følgende egenskaber:

- y er et overtal for A.
- $y \leq z$ for alle overtal z af A.

Et element $\beta \in \mathbb{R}$ kaldes infimum eller største undertal af A og betegnes $\inf A$, hvis β har følgende egenskaber:

- β er et undertal for A.
- $\beta \geq \alpha$ for alle undertal α af A.

Eksempel 2.3 Supremum og infimum af mængder

Betragt mængderne

$$A = \{a \in \mathbb{R} : a \leq 1\} \quad \text{og} \quad B = \{b \in \mathbb{R} : b > 0\}.$$

Vi har så $\sup A = 1$ og $\inf B = 0$. Derudover er mængden A ikke nedad begrænset og mængden B er ikke opad begrænset.

Bemærk, at $\sup A \in A$, hvor $\inf B \notin B$. Det næste eksempel viser, at en ikke-tom opad begrænset delmængde af $\mathbb{Q}$ kan have supremum, der ikke er i $\mathbb{Q}$.

Eksempel 2.4 [a] Ikke-tom opad begrænset delmængde af $\mathbb{Q}$ uden supremum i $\mathbb{Q}$

Lad

$$A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$$

Antag, at $q \in \mathbb{Q}$. Vi vil vise, at $q \neq \sup A$. Siden $\sqrt{2}$ er irrational, så må vi have $q^2 < 2$ eller $q^2 > 2$.
Hvis $q^2 < 2$, kan vi finde et element i A, der er lidt større end q. Vælg

$$\delta = \frac{2 - q^2}{5}.$$

[1] Afsnittet er baseret på Rudin (1976), s. 3-33. Vi nøjes dog med at kigge på delmængder af $\mathbb{R}$, hvor Rudins bog behandler teorien mere generelt via metriske rum.

Siden $q < \left|\sqrt{2}\right| < 2$ og $0 < \delta \leq \frac{2}{5} < 1$, så må der gælde, at $2q + \delta < 5$. Vi har så

$$\begin{aligned}(q+\delta)^2 &= q^2 + \delta^2 + 2q\delta \\ &= q^2 + (2q+\delta)\cdot\delta \\ &< q^2 + 5\delta \\ &= 2.\end{aligned}$$

Med andre ord er $q + \delta$ altså et element i A, og $q \neq \sup A$.
Antag nu, at $q^2 > 0$ og $q > 0$ (når $q \leq 0$ er det trivielt, at $q \neq \sup A$). Lad

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{q^2 - 2}{2q} \\ &= \frac{q}{2} - \frac{1}{q} \\ &< b.\end{aligned}$$

Vi har så $0 < \alpha < q$, og der gælder

$$\begin{aligned}(q-\alpha)^2 &= q^2 + \alpha^2 - 2q\alpha \\ &< q^2 - 2q\alpha \\ &= q^2 - (q^2 - 2) \\ &= 2.\end{aligned}$$

Altså er $q - \alpha$ et overtal for A, hvilket vil sige, at $q \neq \sup A$. Vi har nu vist, at mængden A ikke har et supremum i $\mathbb{Q}$.

[a]Eksemplet er baseret på Axler (2024), s. 9

Eksempel 2.4 motiverer den næste sætning, som vi her ikke vil bevise, da beviset er relativt langt og ikke interessant for vores foretagende. Sætningen er dog en følge af måden, hvorpå $\mathbb{R}$ er konstrueret.[2]

Sætning 2.5 $\mathbb{R}$ har supremum-egenskaben

Antag, at $A \in \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ og A er opad begrænset. Så eksisterer $\sup A \in \mathbb{R}$.

Denne egenskab ved $\mathbb{R}$ kaldes for supremum-egenskaben. Bemærk, at en alternativ tilgang her kunne være at definere $\mathbb{R}$ ud fra supremum-egenskaben og derefter bevise $\mathbb{R}$'s eksistens ved konstruktion. Vi vil nu ud fra supremum-egenskaben af $\mathbb{R}$ vise, at $\mathbb{R}$ også må have infimum-egenskaben.

Sætning 2.6 $\mathbb{R}$ har infimum-egenskaben

Antag, at $A \in \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ og A er nedad begrænset. Så eksisterer $\inf A \in \mathbb{R}$.

Bevis. Lad
$$B = \{b \in \mathbb{R} : b \leq a \text{ for alle } a \in A\}.$$

Så er B mængden af alle undertal for A. Siden A er nedad begrænset, så er B ikke tom. Siden $A \neq \emptyset$, så er B opad begrænset. Fra supremum-egenskaben eksisterer da $\sup B \in \mathbb{R}$.

Per definition 2.2 har vi så, at $\sup B \leq a$ for alle $a \in A$ (fordi alle elementer af A er overtal for B). Siden $\sup B$ også er større end eller lig alle undertal for A, så må $\sup B = \inf A$. ■

2.2 Topologi i $\mathbb{R}$

Det skal bemærkes, at når vi arbejder med $\mathbb{R}$, så kan ordene *punkt* og *tal* bruges i flæng. Begge ord referer i dette tilfælde til elementerne i $\mathbb{R}$.

[2] $\mathbb{R}$ kan konstrueres fra $\mathbb{Q}$ via Dedekind-snit. Rudin (1976), s. 17-21

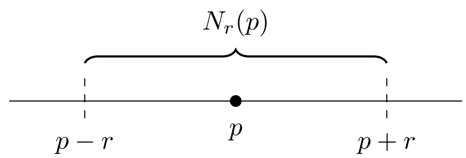
Definition 2.7 Omegn

Antag $p \in \mathbb{R}$. Så er en omegn af et punkt p en mængde

$$N_r(p) = \{q \in \mathbb{R} : |q - p| < r\}, \quad \text{hvor } r \in \mathbb{R}^+.$$

Tallet r kaldes for radius af omegnen $N_r(p)$.

Med andre ord, er en omegn af et punkt p mængden af alle punkter indenfor en given afstand fra p. Ved en omegn i $\mathbb{R}$ (som vi lige har defineret) er der altså tale om et interval. Dette ses illustreret i fig. 1.



Figur 1: Illustration af en omegn $N_r(p)$

Definition 2.8 Indre punkt, åben mængde

Antag, at $A \subseteq \mathbb{R}$. Et punkt $p \in A$ kaldes et indre punkt af A, hvis der eksisterer en omegn $N_r(p)$ af p sådan at $N_r(p) \subseteq A$.
Mængden A er åben, hvis alle punkter i A er indre punkter.

Som eksempel på åbne mængder, kan vi betragte omegne.

Sætning 2.9 Omegne er åbne

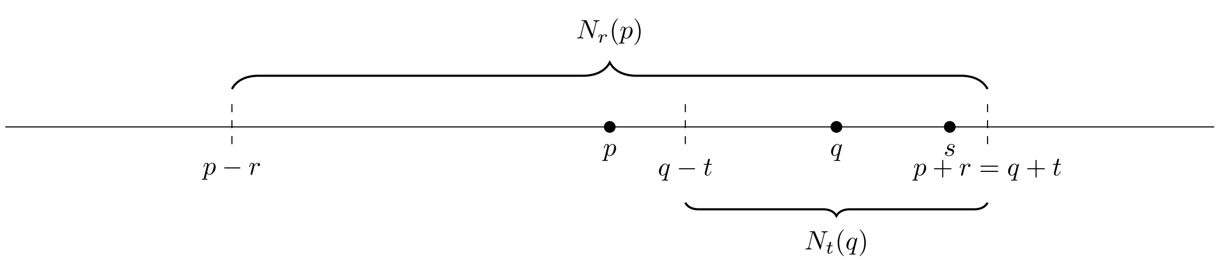
Alle omegne $N_r(p)$ af et punkt $p \in \mathbb{R}$ er åbne.

Bevis. Lad $q \in N_r(p)$ og $t = r - |p - q|$. Så har vi $|p - q| < r$, hvilket vil sige, at $t > 0$. Fra trekantsuligheden har vi så, at der for alle $s \in N_t(q)$ gælder

$$\begin{aligned} |p - s| &\leq |p - q| + |q - s| \\ &< |q - p| + t \\ &= r. \end{aligned}$$

Altså må $N_t(q) \subseteq N_r(p)$. Således er $N_r(p)$ en åben mængde. ■

Ideen i beviset af sætning 2.9 ses illustreret i fig. 2.



Figur 2: Ideen i beviset af sætning 2.9

Definition 2.10 Fortætningspunkt, isoleret punkt

Antag, at $A \subseteq \mathbb{R}$. Et punkt $p \in \mathbb{R}$ er et fortætningspunkt af mængden A, hvis alle omegne $N_r(p)$ indeholder

et punkt $q \neq p$ i omegnen sådan at $q \in A$.
Et punkt $s \in A$ kaldes et isoleret punkt, hvis det ikke er et fortætningspunkt af A.

Fra definitionen er det klart, at et fortætningspunkt af en mængde ikke nødvendigvis behøver være et element i mængden. Dette tydeliggøres af det næste eksempel.

Eksempel 2.11 Fortætningspunkter af en mængde

Vi betragter mængden B fra eksempel 2.3. Mængden af alle fortætningspunkter af B må være $B' = B \cup \{0\}$. For at se, hvorfor det er tilfældet, lad $p \in B'$. Så for enhver $r > 0$ indeholder omegnen $N_r(p)$ et punkt $q = p + \frac{r}{2}$. Siden

$$p \geq 0 \iff p + \frac{r}{2} > 0 \iff q > 0$$

så må vi have $q \in B$. Således må alle punkter i B' være fortætningspunkter af B.
Omvendt, antag at $x \notin B'$. Så har vi $x \in \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$. Vi kan så vælge $r = |x| > 0$, og det er klart at $N_r(x) \cap B = \emptyset$. Vi har nu vist, at B' er mængden af alle fortætningspunkter af B.

Mere generelt gælder der faktisk, at hvis supremum og/eller infimum eksisterer for en delmængde af $\mathbb{R}$, så er de fortætningspunkter af mængden.

Faktummet, at et fortætningspunkt af en mængde ikke nødvendigvis er et element i mængden (hvilket vi så i eksempel 2.11), motiverer den næste definition.

Definition 2.12 Lukket mængde

En mængde $A \subseteq \mathbb{R}$ er lukket, hvis den indeholder alle sine fortætningspunkter.

Vi vil nu bevise det intuitive resultat, at komplementærmængden til en åben mængde er lukket, og vice versa. Bemærk, at nogle benytter notationen $\overline{A}$ til at denotere afslutningen af A (foreningsmængden af A og mængden af alle dens fortætningspunkter), hvor vi her bruger $\overline{A}$ til at denotere komplementærmængden til A.

Sætning 2.13 Mængde er lukket præcis når dens komplementærmængde er åben

En mængde $A \in \mathbb{R}$ er lukket hvis og kun hvis dens komplementærmængde $\overline{A}$ er åben.

Bevis. Antag først, at A er lukket. Så er alle $x \in \overline{A}$ ikke fortætningspunkter af A, og der eksisterer en omegn $N_r(x)$ sådan at $A \cap N_r(x) = \emptyset$. Det vil sige, at $N_r(x) \subseteq \overline{A}$, og x er derfor et indre punkt af $\overline{A}$. Således er A åben.

Omvendt, antag at $\overline{A}$ er åben, og lad p være et fortætningspunkt af A. Så indeholder alle omegne $N_r(p)$ et punkt $q \in A$, og p er derfor ikke et indre punkt af $\overline{A}$. Siden $\overline{A}$ er åben, så må $p \in A$. Altså indeholder A alle sine fortætningspunkter og må være lukket. ■

3 Kontinuitet

I dette afsnit definerer vi grænseværdien for en funktion stringent med den såkaldte ε-δ-definition. Vi arbejder dog kun med reele funktioner med delmængder af $\mathbb{R}$ som definitionsmængde.

Vi undersøger så kontinuerte funktioner med lukkede intervaller som definitionsmængde, da disse funktioner har nogle specielle egenskaber, der ikke er gældende for alle kontinuerte funktioner. Disse resultater benyttes senere til at bevise vigtige resultater for Riemann-integralet.

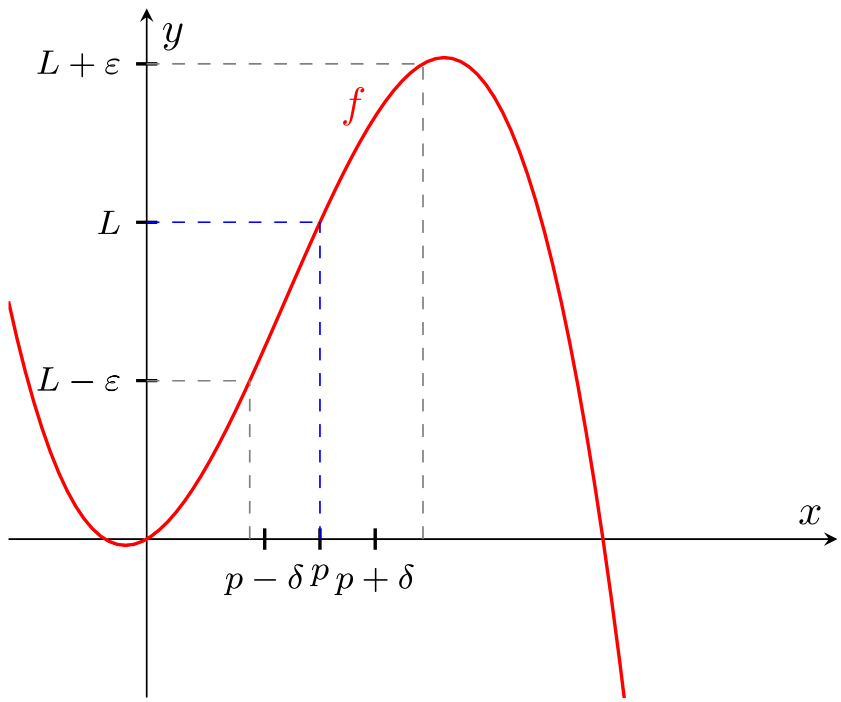
3.1 Grænseværdier af reele funktioner af delmængder af $\mathbb{R}$

Definition 3.1 Grænseværdi af funktion

Antag $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, og p er et fortætningspunkt af X. Et tal L kaldes for grænseværdien af f i p og vi skriver

$$\lim_{x \to p} f(x) = L,$$

hvis der for alle $\varepsilon > 0$ eksisterer et tal $\delta > 0$ sådan at når $x \in X$ og $0 < |x - p| < \delta$, så gælder $|f(x) - L| < \varepsilon$.



Figur 3: ε-δ-definition af funktionel grænseværdi

Bemærk, at siden p ikke behøver være i definitionsmængden X (se eksempel 2.11), så kan grænseværdien for f sagtens give mening i punkter, hvor selve f ikke er defineret.

Eksempel 3.2 Grænseværdi i punkt, hvor funktion ikke er defineret

Lad funktionen $f : \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \to \mathbb{R}$ være defineret ved

$$f(x) = x^2.$$

Fra eksempel 2.11 har vi, at 0 er et fortætningspunkt af $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Vores intuition fortæller os så, at

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Dette vil vi nu bevise stringent via definition 3.1.
For alle $\varepsilon > 0$ vælger vi $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Så har vi, at når $x \in \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ og $0 < |x - 0| = |x| < \delta$, så gælder

$$|f(x) - 0| = \left|x^2\right| = |x|^2 < \delta^2 = \varepsilon.$$

Altså har vi vist, at $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Det næste eksempel viser, at selv hvis et punkt p tilhører definitionsmængden af en funktion f, så kan vi trods intuitionen godt have $\lim\limits_{x \to p} f(x) \neq f(p)$.

Eksempel 3.3 Grænseværdi af funktion i punkt ulig funktionsværdien

3.2 Kontinuerte funktioner på intervaller

Definition 3.4 Kontinuert

Antag $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ og $p \in X$.
Så er f kontinuert i p, hvis der for alle $\varepsilon > 0$ eksisterer $\delta > 0$ sådan at når $x \in X$ og $|x - p| < \delta$, så gælder $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$.
Hvis f er kontinuert i alle punkter i X, så siger vi, at f er kontinuert på X.

Ved første øjekast ligner dette definitionen af grænseværdier af funktioner til forveksling. Den største forskel ligger i, at vi her kræver, at f skal være defineret i p. Tilvarende skal vi i fig. 3 blot skrive $f(p)$ i stedet for L, for at figuren illustrerer definitionen på kontinuitet.

Sammenligner vi med definition 3.1, ser vi, at hvis vi også antager, at p er et fortætningspunkt af X, så er f kontinuert i p præcis når

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p).$$ [3]

Derudover medfører vores definition, at en funktion er kontinuert i alle isolerede punkter af dens definitionsmængde.

Eksempel 3.5 Funktioner er kontinuerte i isolerede punkter af dens definitionsmængde

Antag $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, og p er et isoleret punkt af X.
Så er p ikke et fortætningspunkt af X, hvilket vil sige, at der eksisterer en omegn $N_r(p)$ sådan at $N_r(p) \cap X = \{p\}$. For alle $\varepsilon > 0$ kan vi så vælge $\delta = r$. Så har vi, at når $x \in X$ og $|x - p| < \delta$, så gælder

$$|f(x) - f(p)| = 0 < \epsilon.$$

Altså er f kontinuert i p.

Definition 3.6 Begrænset funktion

Antag $X \in \mathbb{R}$. Så er en funktion $f : X \to \mathbb{R}$ begrænset, hvis der eksisterer $M \in \mathbb{R}$ sådan at $|f(x)| \leq M$ for alle $x \in X$.

Det næste resultat viser, at en kontinuert funktion på et lukket interval er begrænset.

Sætning 3.7 Kontinuert funktion på lukket interval er begrænset

Hvis en funktion $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ er kontinuert, så er den begrænset.

Bevis. ∎

Sætning 3.8 Kontinuert funktion på luklet interval har maksimum og minimum

Antag $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ er kontinuert, og lad $\mathrm{Vm}(f) = \{f(x) : x \in [a; b]\}$. Så eksisterer $p, q \in [a; b]$ sådan at $f(p) = \sup \mathrm{Vm}(f)$ og $f(q) = \inf \mathrm{Vm}(f)$.

Bevis. ∎

Definition 3.9 Uniform kontinuert

Antag $X \subseteq \mathbb{R}$ og $f : X \to \mathbb{R}$. Så er f uniform kontinuert på X hvis der for alle $\varepsilon > 0$ eksisterer $\delta > 0$ sådan at der for alle $p, q \in X$ gælder

$$|p - q| < \delta \implies |f(p) - f(q)| < \varepsilon.$$

[3] Kontinuitet defineres sådan i f.eks. Brydensholt & Ridder Ebbesen (2018), s. 34. Bemærk, at grænseværdien $\lim_{x \to p} f(x)$ ikke giver nogen mening, hvis p er et isoleret punkt af X.

4 Riemann-integralet

I denne sektion vil vi definere Riemann-integralet.[4] Før vi gør dette, er vi nødt til at starte med nogle definitioner, vi har brug for.

Definition 4.1 Inddeling

Antag $a, b \in \mathbb{R}$ sådan at $a < b$. Ved en inddeling P af $[a; b]$ forstår vi en endelig mængde $\{x_0, \ldots, x_n\}$, hvor

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

og vi skriver

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, \ldots ,n)$$

Med en inddeling kan vi dele intervallet $[a; b]$ op i n delintervaller, hvor det i'te delinterval har længden Δx_i:

$$[a; b] = [x_0; x_1] \cup [x_1; x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}; x_n]$$

Vi vil nu definere over- og undersummen af en funktion med hensyn til en given inddeling.

Definition 4.2 Over- og undersum

Antag $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ er en begrænset funktion, og $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ er en inddeling af $[a; b]$. Lad

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{x_{i-1}}; x_i]\} \quad \text{og} \quad m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{x_{i-1}}; x_i]\}.$$

Så er oversummen af f med hensyn til P defineret ved

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Tilsvarende er undersummen af f med hensyn til P defineret ved

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i.$$

Skriv eksistens

Sætning 4.3 Uligheder med over- og undersummer

Antag $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ er en begrænset funktion og P_1, P_2 er inddelinger af $[a; b]$ sådan at $P_1 \subseteq P_2$. Så gælder

$$L(f,P_1) \leq L(f,P_2) \leq U(f,P_2) \leq U(f,P_1)$$

Bevis. j ■

5 Numerisk integration

6 Diskussion - videreudvikling af integrationsteorien

7 Konklusion

[4]Sektionen er baseret på Abbott (2002), s. 183-194

Litteratur

Abbott, S. (2002). *Understanding Analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. New York Berlin: Springer.

Axler, S. (2024). *Supplement for Measure, Integration & Real Analysis*. Cham: Springer International Publishing.

Brydensholt, M., & Ridder Ebbesen, G. (2018). *Lærebog i Matematik A2 STX*. Aarhus C: Systime, 2. udgave, 1. oplag ed.

Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. Auckland: McGraw-Hill, 3. ed.