VIRUM GYMNASIUM

SRP

MATEMATIK

Riemann-integralet

Forfatter
MINRUI KEVIN ZHOU

Vejledere
NIELS NØRSKOV LAURSEN

14. marts 2025

Resumé

Dette er mit resumé.

Indhold

1 Indledning **2**

2 De reele tal **2**

3 Kontinuitet **2**

4 Riemann-integralet **2**

5 Numerisk integration **2**

1 Indledning

2 De reele tal

3 Kontinuitet

Definition 3.1: Begrænset funktion

4 Riemann-integralet

I denne sektion vil vi definere Riemann-integralet. Før vi gør dette, er vi nødt til at starte med nogle definitioner, vi har brug for.

Definition 4.1: Inddeling

Antag a, $b \in \mathbb{R}$ sådan at $a < b$. Ved en inddeling P af $[a; b]$ forstår vi en endelig mængde $\{x_0, \ldots, x_n\}$, hvor

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

og vi skriver

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Med en inddeling kan vi dele intervallet $[a; b]$ op i n delintervaller, hvor det i'te delinterval har længden Δx_i:

$$[a; b] = [x_0; x_1] \cup [x_1; x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}; x_n]$$

Vi vil nu definere over- og undersummen af en funktion med hensyn til en given inddeling.

Definition 4.2: Over- og undersum

Antag $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ er en begrænset funktion, og $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ er en inddeling af $[a; b]$. Lad

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{x_{i-1}}; x_i]\} \quad \text{og} \quad m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{x_{i-1}}; x_i]\}.$$

Så er oversummen af f med hensyn til P defineret ved

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Tilsvarende er undersummen af f med hensyn til P defineret ved

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i.$$

Skriv eksistens

Sætning 4.3 Uligheder med over- og undersummer
Antag $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ er en begrænset funktion og P_1, P_2 er inddelinger af $[a; b]$ sådan at $P_1 \subseteq P_2$. Så gælder

$$L(f,P_1) \leq L(f,P_2) \leq U(f,P_2) \leq U(f,P_1)$$

Bevis. Bevis det selv, lol. □

5 Numerisk integration