Studieretningsprojekt i 3g 2025

Omfang: 15-20 A4-sider á 2400 anslag

Navn: Minrui Kevin Zhou

ID: 3b 22

Fag:
Matematik A
Enkeltfaglig

Vejledere:
Niels Nørskov Laursen (NL)

Udlevering: Fredag d. 14. marts 2025 kl. 8:30

Aflevering: Torsdag d. 27. marts 2025 kl. 15:00

Emne for studieretningsprojekt:
Riemann integralet

Opgaveformulering:

Antal bilag udleveret til opgaven: 0

Gør rede for, hvordan grænseværdi og kontinuitet kan defineres stringent ved hjælp af epsilon-delta definitioner.

Gør rede for Riemann integralet, og bevis herunder, at en kontinuert funktion i [a;b] er integrabel. Bevis også andre sætninger om Riemann integralet efter eget valg, og giv eksempler på funktioner, der er henholdsvis integrable og ikke-integrable med den anvendte definition af integrabilitet.

Forklar, hvordan man kan integrere numerisk ved hjælp af Simpsons metode, og brug numerisk integration til at bestemme sandsynligheder i normalfordelingen.

Diskutér fordele og ulemper ved nogle af de forskellige måder, integrabilitet kan defineres på.

Resumé

Tidligere i 1600-tallet blev integration defineret som det omvendte af differentiation. En sådan definition er ikke ideel, da blandt andet funktioner med bestemte typer af diskontinuiteter så ikke er integrable. Denne artikel præsenterer det mere generelle Riemann-integral, der defineres uafhængigt fra differentiation.

Integrationsteorien opbygges stringent fra bunden med egenskaber ved de reele tal. Derefter indføres stringente definitioner på grænseværdier og kontinuitet for reele funktioner defineret på delmængder af $\mathbb{R}$. Riemann-integralet defineres så, og vi beviser, at alle kontinuerte funktioner er integrable med den anvendte definition. Derudover er begrænsede funktioner med endeligt mange diskontinuiteter også integrable. Vi beviser også integralregningens hovedsætning, der siger, at den tidligere definition på integralet som omvendt differentiation bliver til et specialtilfælde hos Riemann-integralet.

Indhold

1 Indledning

Da integralregningen blev opfundet i anden halvdel af 1600-tallet med markante bidrag fra blandt andet Newton og Leibniz, var det primært med formålet at bestemme arealer og rumfang.[1] Man valgte at definere integration som den omvendte process af differentiation. Med andre ord sagde man, at integralet for en funktion f var dens stamfunktion F, hvor $F' = f$, og med grænser på, var integralet defineret som

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).^2 \tag{1}$$

Dette giver imidlertid anledning til problemer, idet der findes mange funktioner, hvor stamfunktionen ikke eksisterer. Navnligt er der blandt andet tale om funktioner med bestemte typer af diskontinuiteter. Eksempelvis kan man vise, at en funktion $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ defineret ved

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{hvis } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{hvis } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

ikke har nogen stamfunktion.[3] Med definitionen af integralet fra 1600-tallet er integralet af funktionen på intervallet $[0; 1]$ altså ikke defineret, selvom arealet under grafen for f åbenlyst er 1.

Dette motiverer et nyt integralbegreb, der ikke er defineret ud fra differentiation. I denne artikel introducerer vi da Riemann-integralet, der er en mere generel definition på integralet, hvor blandt andet den ovennævnte funktion er integrabel. Derudover gælder der, at hvis stamfunktionen F for en funktion f eksisterer, så gælder ligning (1) stadig. Sætningen kalder vi for integralregningens hovedsætning.

Siden Riemann-integralet er bygget på nogle bestemte egenskaber for de reele tal, er det netop, hvad vi vil starte med at undersøge i artiklen. Derefter definerer vi grænseværdi, kontinuitet og uniform kontinuitet stringent med ε-δ-definitioner. Disse begreber benytter vi senere til at bevise centrale sætninger om Riemann-integralet. Vi beviser blandt andet, at alle kontinuerte funktioner på et interval $[a; b]$ er Riemann-integrable. Derudover beviser vi også, at alle begrænsede funktioner med endeligt mange diskontinuiteter er Riemann-integrable.

Dernæst i artiklen præsenteres Simpsons metode, der kan bruges til at approksimere integralet for en kontinuert funktion. Til sidst findes en diskussion/perspektivering om videreudviklingen af integralbegrebet, hvor enkelte svagheder ved Riemann-integralet undersøges nærmere.

2 De reele tal

I dette afsnit vil vi først og fremmest undersøge nogle vigtige egenskaber ved $\mathbb{R}$, der er nødvendige for en stringent opbygning af integrationsteorien. Derefter indfører vi grundlæggende teori om topologi for $\mathbb{R}$, som vi senere skal bruge til at definere kontinuitet samt grænseværdien for en funktion.[4]

2.1 Supremum-egenskaben

Definition 2.1 Overtal, undertal, begrænset

Antag, at $A \subseteq \mathbb{R}$. Hvis der eksisterer $y \in \mathbb{R}$ sådan at $x \leq y$ for alle $x \in A$, så siges A at være opad begrænset, og y kaldes et overtal for A.
Hvis der eksisterer $z \in \mathbb{R}$ sådan at $x \geq z$ for alle $x \in A$, så siges A at være nedad begrænset, og z kaldes et undertal for A.
Hvis A både er opad begrænset og nedad begrænset, så kalder vi A begrænset.

Imidlertid, kan det også være interessant at kunne sige noget om, hvorvidt et bestemt overtal er det mindste overtal og om et bestemt undertal er det største undertal.

[1] Clausen et al. (1993), s. 129-132.
[2] Notationen af integralet med grænser blev egentligt først brugt i begyndelsen af 1800-tallet af Fourier, men det ændrer ikke på definitionen af begrebet. Ibid.
[3] Faktummet følger fra den såkaldte mellemværdisætning for afledede funktioner, Rudin (1976), s. 108.
[4] Afsnittet er baseret på Rudin (1976), s. 3-33, medmindre andet er angivet. Vi nøjes dog med at kigge på delmængder af $\mathbb{R}$, hvor Rudins bog behandler teorien mere generelt via metriske rum.

Definition 2.2 Supremum, infimum

Antag, at $A \subseteq \mathbb{R}$. Et element $y \in \mathbb{R}$ kaldes supremum eller mindste overtal af A og betegnes $\sup A$, hvis y har følgende egenskaber:

- y er et overtal for A.
- $y \leq z$ for alle overtal z af A.

Et element $\beta \in \mathbb{R}$ kaldes infimum eller største undertal af A og betegnes $\inf A$, hvis β har følgende egenskaber:

- β er et undertal for A.
- $\beta \geq \alpha$ for alle undertal α af A.

Eksempel 2.3 Supremum og infimum af mængder

Betragt mængderne

$$A = \{a \in \mathbb{R} : a \leq 1\} \quad \text{og} \quad B = \{b \in \mathbb{R} : b > 0\}.$$

Vi har så $\sup A = 1$ og $\inf B = 0$. Derudover er mængden A ikke nedad begrænset og mængden B er ikke opad begrænset.

Bemærk, at $\sup A \in A$, hvor $\inf B \notin B$. Det næste eksempel viser, at en ikke-tom opad begrænset delmængde af $\mathbb{Q}$ kan have supremum, der ikke er i $\mathbb{Q}$.

Eksempel 2.4 [a] Ikke-tom opad begrænset delmængde af $\mathbb{Q}$ uden supremum i $\mathbb{Q}$

Lad

$$A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$$

Antag, at $q \in \mathbb{Q}$. Vi vil vise, at $q \neq \sup A$. Siden $\sqrt{2}$ er irrational, så må vi have $q^2 < 2$ eller $q^2 > 2$.
Hvis $q^2 < 2$, kan vi finde et element i A, der er lidt større end q. Vælg

$$\delta = \frac{2 - q^2}{5}.$$

Siden $q < \left|\sqrt{2}\right| < 2$ og $0 < \delta \leq \frac{2}{5} < 1$, så må der gælde, at $2q + \delta < 5$. Vi har så

$$\begin{aligned}(q + \delta)^2 &= q^2 + \delta^2 + 2q\delta \\ &= q^2 + (2q + \delta) \cdot \delta \\ &< q^2 + 5\delta \\ &= 2.\end{aligned}$$

Med andre ord er $q + \delta$ altså et element i A, og $q \neq \sup A$.
Antag nu, at $q^2 > 0$ og $q > 0$ (når $q \leq 0$ er det trivielt, at $q \neq \sup A$). Lad

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{q^2 - 2}{2q} \\ &= \frac{q}{2} - \frac{1}{q} \\ &< b.\end{aligned}$$

Vi har så $0 < \alpha < q$, og der gælder

$$\begin{aligned}(q - \alpha)^2 &= q^2 + \alpha^2 - 2q\alpha \\ &< q^2 - 2q\alpha \\ &= q^2 - (q^2 - 2) \\ &= 2.\end{aligned}$$

Altså er $q - \alpha$ et overtal for A, hvilket vil sige, at $q \neq \sup A$. Vi har nu vist, at mængden A ikke har et supremum i $\mathbb{Q}$.

[a]Eksemplet er baseret på Axler (2024), s. 9

Eksempel 2.4 motiverer den næste sætning, som vi her ikke vil bevise, da beviset er relativt langt og ikke interessant for vores foretagende. Sætningen er dog en følge af måden, hvorpå $\mathbb{R}$ er konstrueret.[5]

Sætning 2.5 $\mathbb{R}$ har supremum-egenskaben

Antag, at $A \in \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ og A er opad begrænset. Så eksisterer $\sup A \in \mathbb{R}$.

Denne egenskab ved $\mathbb{R}$ kaldes for supremum-egenskaben. Bemærk, at en alternativ tilgang her kunne være at definere $\mathbb{R}$ ud fra supremum-egenskaben og derefter bevise $\mathbb{R}$'s eksistens ved konstruktion. Vi vil nu ud fra supremum-egenskaben af $\mathbb{R}$ vise, at $\mathbb{R}$ også må have infimum-egenskaben.

Sætning 2.6 $\mathbb{R}$ har infimum-egenskaben

Antag, at $A \in \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ og A er nedad begrænset. Så eksisterer $\inf A \in \mathbb{R}$.

Bevis. Lad
$$B = \{b \in \mathbb{R} : b \leq a \text{ for alle } a \in A\}.$$
Så er B mængden af alle undertal for A. Siden A er nedad begrænset, så er B ikke tom. Siden $A \neq \emptyset$, så er B opad begrænset. Fra supremum-egenskaben eksisterer da $\sup B \in \mathbb{R}$.

Per definition 2.2 har vi så, at $\sup B \leq a$ for alle $a \in A$ (fordi alle elementer af A er overtal for B). Siden $\sup B$ også er større end eller lig alle undertal for A, så må $\sup B = \inf A$. ■

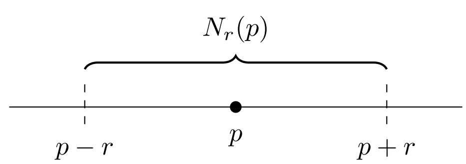
2.2 Topologi i $\mathbb{R}$

Det skal bemærkes, at når vi arbejder med $\mathbb{R}$, så kan ordene *punkt* og *tal* bruges i flæng. Begge ord referer i dette tilfælde til elementerne i $\mathbb{R}$.

Definition 2.7 Omegn

Antag $p \in \mathbb{R}$. Så er en omegn af et punkt p en mængde
$$N_r(p) = \{q \in \mathbb{R} : |q - p| < r\}, \quad \text{hvor } r \in \mathbb{R}^+.$$
Tallet r kaldes for radius af omegnen $N_r(p)$.

Med andre ord, er en omegn af et punkt p mængden af alle punkter indenfor en given afstand fra p. Ved en omegn i $\mathbb{R}$ (som vi lige har defineret) er der altså tale om et interval. Dette ses illustreret i fig. 1.



Figur 1: Illustration af en omegn $N_r(p)$

[5]$\mathbb{R}$ kan konstrueres fra $\mathbb{Q}$ via Dedekind-snit. Rudin (1976), s. 17-21

Definition 2.8 Indre punkt, åben mængde

Antag, at $A \subseteq \mathbb{R}$. Et punkt $p \in A$ kaldes et indre punkt af A, hvis der eksisterer en omegn $N_r(p)$ af p sådan at $N_r(p) \subseteq A$.
Mængden A er åben, hvis alle punkter i A er indre punkter.

Som eksempel på åbne mængder, kan vi betragte omegne.

Sætning 2.9 Omegne er åbne

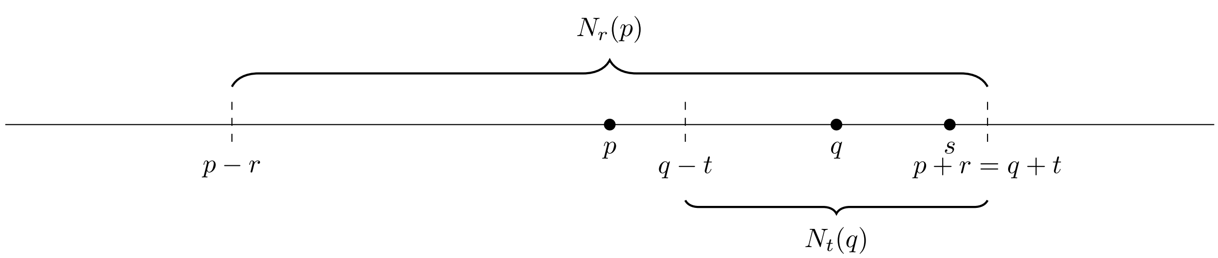
Alle omegne $N_r(p)$ af et punkt $p \in \mathbb{R}$ er åbne.

Bevis. Lad $q \in N_r(p)$ og $t = r - |p - q|$. Så har vi $|p - q| < r$, hvilket vil sige, at $t > 0$. Fra trekantsuligheden har vi så, at der for alle $s \in N_t(q)$ gælder

$$\begin{aligned} |p - s| &\leq |p - q| + |q - s| \\ &< |q - p| + t \\ &= r. \end{aligned}$$

Altså må $N_t(q) \subseteq N_r(p)$. Således er $N_r(p)$ en åben mængde. ■

Ideen i beviset af sætning 2.9 ses illustreret i fig. 2.



Figur 2: Ideen i beviset af sætning 2.9

Definition 2.10 Fortætningspunkt, isoleret punkt

Antag, at $A \subseteq \mathbb{R}$. Et punkt $p \in \mathbb{R}$ er et fortætningspunkt af mængden A, hvis alle omegne $N_r(p)$ indeholder et punkt $q \neq p$ i omegnen sådan at $q \in A$.
Et punkt $s \in A$ kaldes et isoleret punkt, hvis det ikke er et fortætningspunkt af A.

Fra definitionen er det klart, at et fortætningspunkt af en mængde ikke nødvendigvis behøver være et element i mængden. Dette tydeliggøres af det næste eksempel.

Eksempel 2.11 Fortætningspunkter af en mængde

Vi betragter mængden B fra eksempel 2.3. Mængden af alle fortætningspunkter af B må være $B' = B \cup \{0\}$. For at se, hvorfor det er tilfældet, lad $p \in B'$. Så for enhver $r > 0$ indeholder omegnen $N_r(p)$ et punkt $q = p + \frac{r}{2}$. Siden

$$p \geq 0 \iff p + \frac{r}{2} > 0 \iff q > 0$$

så må vi have $q \in B$. Således må alle punkter i B' være fortætningspunkter af B.
Omvendt, antag at $x \notin B'$. Så har vi $x \in \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$. Vi kan så vælge $r = |x| > 0$, og det er klart at $N_r(x) \cap B = \emptyset$. Vi har nu vist, at B' er mængden af alle fortætningspunkter af B.

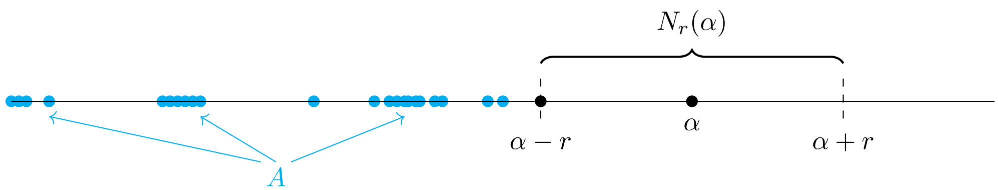
Mere generelt gælder der faktisk, at hvis supremum og/eller infimum eksisterer for en delmængde af $\mathbb{R}$, så er de fortætningspunkter af mængden.

Sætning 2.12 Supremum og infimum er fortætningspunkter

Antag $A \subseteq \mathbb{R}$ og $A \neq \emptyset$. Hvis A er opad begrænset, så er $\sup A$ et fortætningspunkt af A. Hvis A er nedad begræset, så er $\inf B$ et fortætningspunkt af A.

Bevis. Antag, at A er opad begrænset. Så eksisterer $\alpha = \sup A$ (sætning 2.5). Antag, at α ikke er et fortætningspunkt af A. Så eksisterer en omegn $N_r(\alpha)$ sådan at $N_r(\alpha) \cap A = \emptyset$. Men så er $\alpha - r$ et overtal for A, hvilket fører til modstrid. Altså må α være et fortætningspunkt af A.

På tilsvarende måde kan man vise, at hvis A er nedad begrænset, så er $\inf A$ et fortætningspunkt af A. ■



Figur 3: Antagelsen om, at α ikke er et fortætningspunkt fører til modstrid

Faktummet, at et fortætningspunkt af en mængde ikke nødvendigvis er et element i mængden (hvilket vi så i eksempel 2.11), motiverer den næste definition.

Definition 2.13 Lukket mængde

En mængde $A \subseteq \mathbb{R}$ er lukket, hvis den indeholder alle sine fortætningspunkter.

Vi vil nu bevise det intuitive resultat, at komplementærmængden til en åben mængde er lukket, og vice versa. Bemærk, at nogle benytter notationen $\overline{A}$ til at denotere afslutningen af A (foreningsmængden af A og mængden af alle dens fortætningspunkter), hvor vi her bruger $\overline{A}$ til at denotere komplementærmængden til A.

Sætning 2.14 Mængde er lukket præcis når dens komplementærmængde er åben

En mængde $A \in \mathbb{R}$ er lukket hvis og kun hvis dens komplementærmængde $\overline{A}$ er åben.

Bevis. Antag først, at A er lukket. Så er alle $x \in \overline{A}$ ikke fortætningspunkter af A, og der eksisterer en omegn $N_r(x)$ sådan at $A \cap N_r(x) = \emptyset$. Det vil sige, at $N_r(x) \subseteq \overline{A}$, og x er derfor et indre punkt af $\overline{A}$. Således er A åben.

Omvendt, antag at $\overline{A}$ er åben, og lad p være et fortætningspunkt af A. Så indeholder alle omegne $N_r(p)$ et punkt $q \in A$, og p er derfor ikke et indre punkt af $\overline{A}$. Siden $\overline{A}$ er åben, så må $p \in A$. Altså indeholder A alle sine fortætningspunkter og må være lukket. ■

3 Kontinuitet

I dette afsnit definerer vi grænseværdien for en funktion stringent med den såkaldte ε-δ-definition. Vi arbejder dog kun med reele funktioner med delmængder af $\mathbb{R}$ som definitionsmængde. [6]

Vi undersøger så kontinuerte funktioner med lukkede intervaller som definitionsmængde, da disse funktioner har nogle specielle egenskaber, der ikke er gældende for alle kontinuerte funktioner. Disse resultater benyttes senere til at bevise vigtige resultater for Riemann-integralet.

[6] Definitioner og sætninger i afsnittet er baseret på Bartle & Sherbert (2010), s. 125-143, medmindre andet er angivet.

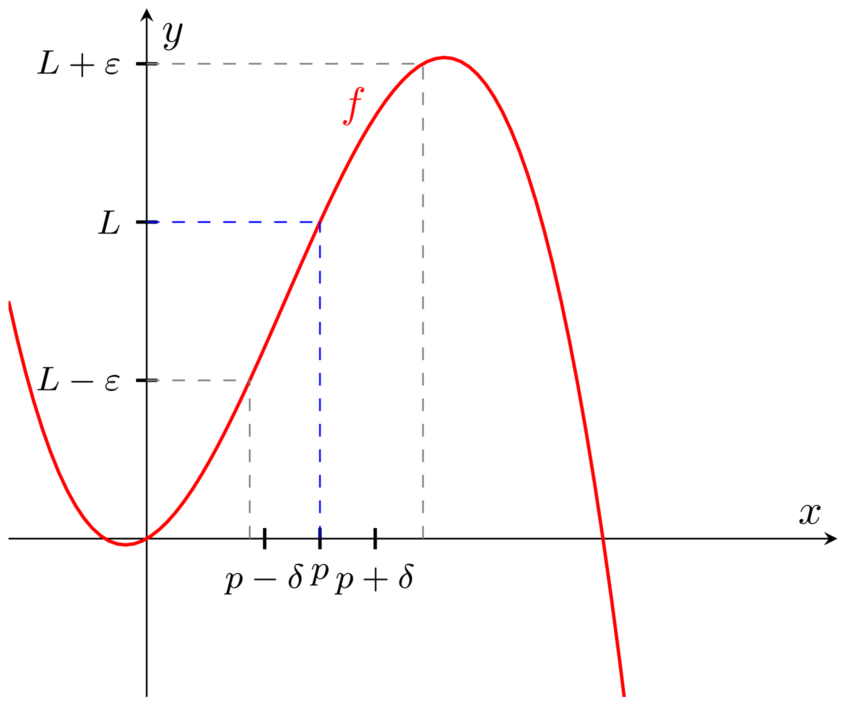
3.1 Grænseværdier af reele funktioner defineret på delmængder af $\mathbb{R}$

Definition 3.1 Grænseværdi af funktion

Antag $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, og p er et fortætningspunkt af X. Et tal L kaldes for grænseværdien af f i p og vi skriver

$$\lim_{x \to p} f(x) = L,$$

hvis der for alle $\varepsilon > 0$ eksisterer et tal $\delta > 0$ sådan at når $x \in X$ og $0 < |x - p| < \delta$, så gælder $|f(x) - L| < \varepsilon$.



Figur 4: ε-δ-definition af funktionel grænseværdi

Bemærk, at siden p ikke behøver være i definitionsmængden X (se eksempel 2.11), så kan grænseværdien for f sagtens give mening i punkter, hvor selve f ikke er defineret.

Eksempel 3.2 Grænseværdi i punkt, hvor funktion ikke er defineret

Lad funktionen $f : \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \to \mathbb{R}$ være defineret ved

$$f(x) = x^2.$$

Fra eksempel 2.11 har vi, at 0 er et fortætningspunkt af $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Vores intuition fortæller os så, at

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Dette vil vi nu bevise stringent via definition 3.1.
For alle $\varepsilon > 0$ vælger vi $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Så har vi, at når $x \in \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ og $0 < |x - 0| = |x| < \delta$, så gælder

$$|f(x) - 0| = \left|x^2\right| = |x|^2 < \delta^2 = \varepsilon.$$

Altså har vi vist, at $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Der gælder også, at selv hvis et punkt p tilhører definitionsmængden af en funktion f, så kan vi trods intuitionen godt have $\lim_{x \to p} f(x) \neq f(p)$.

3.2 Kontinuerte funktioner på intervaller

Definition 3.3 Kontinuert, diskontinuert

Antag $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ og $p \in X$.
Så er f kontinuert i p, hvis der for alle $\varepsilon > 0$ eksisterer $\delta > 0$ sådan at når $x \in X$ og $|x - p| < \delta$, så gælder $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$.
Hvis f ikke er kontinuert i p, så kaldes f diskontinuert i p.
Hvis f er kontinuert i alle punkter i X, så siger vi, at f er kontinuert på X.

Ved første øjekast ligner dette definitionen af grænseværdier af funktioner til forveksling. Den største forskel ligger i, at vi her kræver, at f skal være defineret i p. Tilvarende skal vi i fig. 4 blot skrive $f(p)$ i stedet for L, for at figuren illustrerer definitionen på kontinuitet.

Sammenligner vi med definition 3.1, ser vi, at hvis vi også antager, at p er et fortætningspunkt af X, så er f kontinuert i p præcis når

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p).$$[7]

Derudover medfører vores definition, at en funktion er kontinuert i alle isolerede punkter af dens definitionsmængde.

Eksempel 3.4 Funktioner er kontinuerte i isolerede punkter af dens definitionsmængde

Antag $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, og p er et isoleret punkt af X.
Så er p ikke et fortætningspunkt af X, hvilket vil sige, at der eksisterer en omegn $N_r(p)$ sådan at $N_r(p) \cap X = \{p\}$. For alle $\varepsilon > 0$ kan vi så vælge $\delta = r$. Så har vi, at når $x \in X$ og $|x - p| < \delta$, så gælder

$$|f(x) - f(p)| = 0 < \epsilon.$$

Altså er f kontinuert i p.

Definition 3.5 Begrænset funktion

Antag $X \in \mathbb{R}$. Så er en funktion $f : X \to \mathbb{R}$ begrænset, hvis der eksisterer $M \in \mathbb{R}$, hvor $M > 0$, sådan at $|f(x)| \leq M$ for alle $x \in X$.

Det næste resultat viser, at en kontinuert funktion på et lukket interval er begrænset, og at dens værdimængde i øvrigt også er lukket.

Sætning 3.6 Værdimængde for kontinuert funktion på lukket interval er lukket og begrænset

Hvis en funktion $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ er kontinuert, så er $\mathrm{Vm}(f) = \{f(x) : x \in [a; b]\}$ lukket og begrænset.

Vi vælger her at udelade beviset, da det falder uden for den indførte teori i denne artikel.[8]

Sætning 3.7 Kontinuert funktion på lukket interval har maksimum og minimum

Antag $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ er kontinuert, og lad $\mathrm{Vm}(f) = \{f(x) : x \in [a; b]\}$. Så eksisterer $p, q \in [a; b]$ sådan at $f(p) = \sup \mathrm{Vm}(f)$ og $f(q) = \inf \mathrm{Vm}(f)$.

[7] Kontinuitet defineres sådan i f.eks. Brydensholt & Ridder Ebbesen (2018), s. 34. Bemærk, at grænseværdien $\lim_{x \to p} f(x)$ ikke giver nogen mening, hvis p er et isoleret punkt af X.

[8] Sætningen kan bevises via kompakthed og Heine-Borel-sætningen, se Rudin (1976), s. 40 og 89. Alternativt kan sætningen også bevises indirekte ved brug af følger og Bolzano-Weierstrass-sætningen, se Bartle & Sherbert (2010), s. 135.

Bevis. Fra sætning 3.6 har vi, at $\text{Vm}(f)$ er lukket og begrænset. Det følger så fra sætning 2.12, at $\sup \text{Vm}(f)$ og $\inf \text{Vm}(f)$ er fortætningspunkter af $\text{Vm}(f)$. Siden $\text{Vm}(f)$ er lukket, indeholder den alle sine fortætningspunkter. Således eksisterer $p, q \in [a; b]$ sådan at $f(p) = \sup \text{Vm}(f)$ og $f(q) = \inf \text{Vm}(f)$. ■

3.3 Uniform kontinuitet

Vi definerer nu begrebet uniform kontinuitet, som også kaldes for ligelig kontinuitet.

Definition 3.8 Uniform kontinuert

Antag $X \subseteq \mathbb{R}$ og $f : X \to \mathbb{R}$. Så er f uniform kontinuert på X hvis der for alle $\varepsilon > 0$ eksisterer $\delta > 0$ sådan at der for alle $p, q \in X$ gælder

$$|p - q| < \delta \implies |f(p) - f(q)| < \varepsilon.$$

Fra definition 3.3 ser vi, at hvis en funktion f er kontinuert på en delmængde $X \subseteq \mathbb{R}$, så betyder det, at der ved *hvert* punkt $p \in X$ for hver $\varepsilon > 0$ kan findes en $\delta > 0$ sådan at $|x - p| < \delta$ medfører $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$. Hvis f derimod er uniform kontinuert på X, så eksisterer der for hver $\varepsilon > 0$ en $\delta > 0$ der opfylder betingelsen for *alle* $p \in X$.

Definitionen på uniform kontinuitet giver os altså evnen til at kunne skelne mellem, om δ afhænger af punktet p eller ej. Med andre ord er kontinuitet en *nødvendig* betingelse for uniform kontinuitet, hvor uniform kontinuitet er en *tilstrækkelig* betingelse for kontinuitet. Bemærk også, at en funktion sagtens kan være kontinuert i et *punkt*, hvor uniform kontinuitet kun er defineret på en *mængde*.

Vi vil nu bevise, at hvis en funktion er uniform kontinuert på to lukkede intervaller, så er den uniform kontinuert på foreningsmængden af de to intervaller.

Sætning 3.9 Uniform kontinuitet på foreningsmængde af lukkede intervaller, som funktion er uniform kontinuert på

Antag $g : [a; b] \to \mathbb{R}$, $[c; d] \subseteq [a; b]$, og $[e; f] \subseteq [a; b]$. Hvis g er uniform kontinuert på intervallerne $[c; d]$ og $[e; f]$, så er g uniform kontinuert på $[c; d] \cup [e; f]$.

Bevis. [9] Lad $\varepsilon > 0$ være givet.

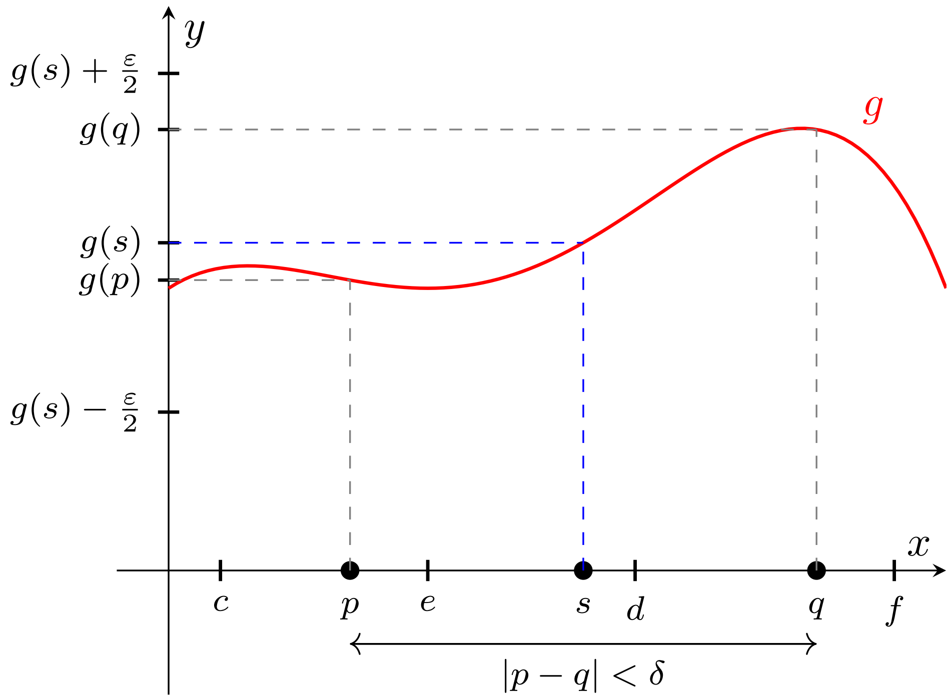
Betragt først tilfældet, hvor $[c; d] \cap [e; f] \neq \emptyset$. Siden g er uniform kontinuert på $[c; d]$, har vi, at der eksisterer $\delta_1 > 0$ sådan at når $p, q \in [c; d]$ og $|p - q| < \delta_2$, så gælder $|g(p) - g(q)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tilsvarende eksisterer $\delta_2 > 0$, sådan at når $p, q \in [e; f]$ og $|p - q| < \delta_2$, så gælder $|g(p) - g(q)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Lad $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, og $p, q \in [c; d] \cup [e; f]$.
Hvis både p og q tilhører det samme interval, er det klart, at når $|p - q| < \delta$, så er $|g(p) - g(q)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
Hvis vi derimod har, at $p \in [c; d]$ og $q \in [e; f]$ sådan at $p, q \notin [c; d] \cup [e; f]$, så eksisterer $s \in [c; d] \cap [e; f]$ sådan at når $|p - q| < \delta$, så er $|p - s| < \delta_1$ og $|q - s| < \delta_2$. Der gælder derfor

$$\begin{aligned} |g(p) - g(q)| &= |g(p) - g(s)| + |g(q) - g(s)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Altså er g uniform kontinuert på $[c; d] \cup [e; f]$, hvis $[c; d] \cap [e; f] \neq \emptyset$.

Antag nu, at $[c; d] \cap [e; f] = \emptyset$. Siden g er uniform kontinuert på $[c; d]$, eksisterer der $\delta_1 > 0$ sådan at når $p, q \in [c; d]$ og $|p - q| < \delta_2$, så gælder $|g(p) - g(q)| < \varepsilon$. Tilsvarende eksisterer $\delta_2 > 0$, sådan at når $p, q \in [e; f]$ og $|p - q| < \delta_2$, så gælder $|g(p) - g(q)| < \varepsilon$. Da intervallerne $[c; d]$ og $[e; f]$ er lukkede, så er afstanden mellem dem ikke nul, og der eksisterer $\delta_3 > 0$, sådan at $|x - y| \geq \delta_3$ for alle $x \in [c; d]$ og $y \in [e; f]$.
Lad $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ og $p, q \in [c; d] \cup [e; f]$. Når $|p - q| < \delta$ har vi så, at både p og q må være i enten $[c; d]$ eller $[e; f]$. Så gælder $|g(p) - g(q)| < \varepsilon$. Altså er g uniform kontinuert på $[c; d] \cup [e; f]$. ■

[9] Sætningen og beviset er selvstændigt udarbejdet.



Figur 5: Første del af beviset af sætning 4.3

Det næste resultat viser, at på lukkede intervaller er kontinuerte funktioner også uniform kontinuerte. Med andre ord er begreberne kontinuitet og uniform kontinuitet altså ækvivalente på lukkede intervaller (husk, at uniform kontinuerte funktioner altid er kontinuerte).

Sætning 3.10 Kontinuert funktion på lukket interval er uniform kontinuert
Antag $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ er kontinuert. Så er f uniform kontinuert på $[a; b]$.

Bevis. [10] Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Siden f er kontinuert i a, så eksisterer der δ_0, hvor $0 < \delta_0 \leq b$, sådan at når $x \in [a; a + \delta_0]$, så gælder $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Fra sætning 3.7 har vi så, at der eksisterer $\alpha, \beta \in [a; a + \delta_0]$, sådan at

$$f(\alpha) = \sup\{f(x) : x \in [a; a + \delta_0]\} \text{ og } f(\beta) = \inf\{f(x) : x \in [a; a + \delta_0]\}.$$

For alle $p, q \in [a; a + \delta_0]$ har vi så, at

$$\begin{aligned} |f(p) - f(q)| &\leq |f(\alpha) - f(\beta)| \\ &\leq |f(\alpha) - f(a)| + |f(\beta) - f(a)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Altså er f uniform kontinuert på $[a; a + \delta_0]$.

Vi har, at f ligeledes er kontinuert i $a + \delta_0$, og med lignende ræsonnement som før, må der så gælde, at der eksisterer δ_1, hvor $0 < \delta_1 \leq b - (a + \delta_0)$, sådan at f er uniform kontinuert på $[a + \delta_0 - \delta_1; a + \delta_0 + \delta_1]$. Vi påstår, at intervallet $[a; b]$ kan overdækkes med et endeligt antal af disse intervaller. Med andre ord påstår vi, at der eksisterer $\delta_0, \ldots, \delta_n$ sådan, at

$$[a; b] = [a; a + \delta_0] \cup [a + \delta_0 - \delta_1; a + \delta_0 + \delta_1] \cup \cdots \cup [a + \delta_0 + \cdots + \delta_{n-1} - \delta_n; a + \delta_0 + \cdots + \delta_n],$$

hvor f er uniform kontinuert i hvert af intervallerne på højre side af lighedstegnet.

[10] Beviset er med enkelte tilføjelser baseret på Clausen et al. (1993), s. 115-116.

Antag nemlig, at $[a;b]$ ikke kan dækkes af endeligt mange af disse intervaller, og lad U være intervallet, som kan overdækkes med et endeligt antal af de beskrevne intervaller, med venstre endepunkt i a. Så er U ikke tom, og U er opad begrænset med b som overtal. Fra supremum-egenskaben (sætning 2.5) følger det, at $c = \sup U < b$ eksisterer. Imidlertid er f dog kontinuert i c, og vi har igen med lignende ræsonnement som før, at der eksisterer $\delta_c > 0$ sådan at f er uniform kontinuert i $[c - \delta_c; c + \delta_c]$. Der opstår da modstrid, da vi antog, at c er supremum for U.

Således kan $[a;b]$ overdækkes af et endeligt antal intervaller, hvorpå f er uniform kontinuert. Det følger så induktivt fra sætning 3.9, at f er uniform kontinuert på $[a;b]$. ■

4 Riemann-integralet

Dette afsnit præsenterer Riemann-integralet.[11] Det skal dog bemærkes, at vi ikke benytter Riemanns originale definition, men derimod en videreudvikling af den franske matematiker Darboux. Det kan bevises, at de to definitioner på integralet er ækvivalente.[12]

4.1 Inddelinger samt over- og undersummer

Vi starter med nogle grundlæggende definitioner, vi har brug for til at definere integralet.

Definition 4.1 Inddeling

Antag $a, b \in \mathbb{R}$ sådan at $a < b$. Ved en inddeling P af $[a;b]$ forstår vi en endelig mængde $\{x_0, \dots, x_n\}$, hvor

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

og vi skriver

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Med en inddeling kan vi dele intervallet $[a;b]$ op i n delintervaller, hvor det i'te delinterval har længden Δx_i:

$$[a;b] = [x_0;x_1] \cup [x_1;x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1};x_n].$$

Vi vil nu definere over- og undersummen af en funktion med hensyn til en given inddeling.

Definition 4.2 Over- og undersum

Antag $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ er en begrænset funktion, og $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ er en inddeling af $[a;b]$. Lad

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1};x_i]\} \quad \text{og} \quad m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1};x_i]\}.$$

Så er oversummen af f med hensyn til P defineret ved

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Tilsvarende er undersummen af f med hensyn til P defineret ved

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i.$$

Vi kræver i definitionen, at $f(x)$ er begrænset, da vi så fra supremum- og infimum-egenskaben (sætning 2.5 og 2.6) ved, at M_i og m_i eksisterer.

Sætning 4.3 Uligheder med over- og undersummer

Antag $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ er en begrænset funktion og P og P' er inddelinger af $[a;b]$ sådan at $P \subseteq P'$. Så

[11] Afsnittet er baseret på Abbott (2002), s. 186-204, medmindre andet er angivet.
[12] Bartle & Sherbert (2010), s. 231-232.

gælder

$$L(f,P) \leq L(f,P') \leq U(f,P') \leq U(f,P).$$

Bevis. [13] Lad $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ og $P' = \{x'_0, \ldots x'_N\}$. Siden $P \subseteq P'$, så har vi, at for hver $j = 1, \ldots, n$ eksisterer $k \in \{0, \ldots, N-1\}$ og $m \in \mathbb{Z}^+$ sådan at $x_{j-1} = x'_k < \cdots < x'_{k+m} = k_j$.

Så gælder for hver $i = 1, \ldots, m$, at $\{f(x) : x \in [x'_{k+i-1}; x'_{k+i}]\} \subseteq \{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}$, og

$$\begin{aligned} m_j &= \inf\{f(x) : x \in [x_{j-1}; x_j]\} \\ &\leq \inf\{f(x) : x \in [x'_{k+i-1}; x'_{k+i}]\} \\ &= m'_{k+i}. \end{aligned}$$

Vi får så uligheden

$$\begin{aligned} m_j \Delta x_j &= \sum_{i=1}^{m} m_j \Delta x_{k+i} \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} m'_{k+i} \Delta x_{k+i}. \end{aligned}$$

Det følger, at $L(f,P) \leq L(f,P')$.

Tilsvarende har vi for hver $i = 1, \ldots, m$ også, at

$$\begin{aligned} M_j &= \sup\{f(x) : x \in [x_{j-1}; x_j]\} \\ &\geq \sup\{f(x) : x \in [x'_{k+i-1}; x'_{k+i}]\} \\ &= M'_{k+i}, \end{aligned}$$

og vi får uligheden

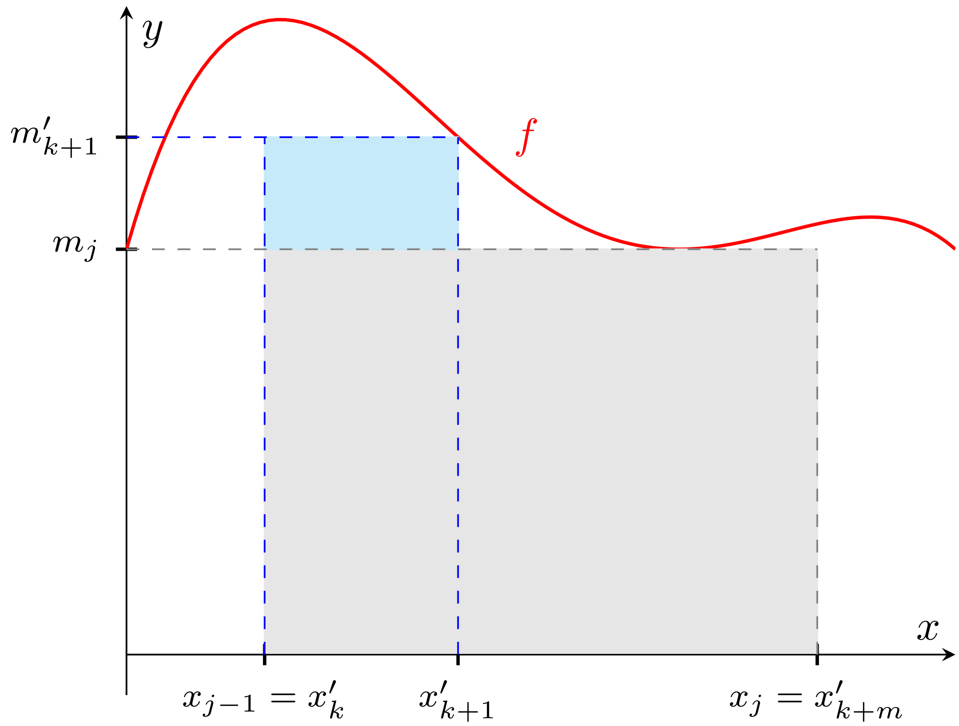
$$\begin{aligned} M_j \Delta x_j &= \sum_{i=1}^{m} M_j \Delta x_{k+i} \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} M'_{k+i} \Delta x_{k+i}. \end{aligned}$$

Det følger, at $U(f,P) \geq U(f,P')$.

Siden infimum af en mængde altid er mindre end eller lig med supremum af mængden, så må der til sidst også gælde, at $L(f,P') \leq U(f,P')$. ■

Sætning 4.3 fortæller, at når vi tilføjer ekstra punkter til en inddeling så bliver undersummen potentielt større, og oversummen bliver potentielt mindre. Figur 6 tydeliggør i høj grad ideen i beviset.

[13] Beviset er baseret på Axler (2020), s. 3-4.



Figur 6: Ideen i beviset af sætning 4.3

Det næste resultat viser, at der for en reel funktion med definitionsmængden $[a;b]$ gælder, at undersummen mht. enhver inddeling af $[a;b]$ altid er mindre end eller lig med oversummen mht. enhver inddeling af $[a;b]$.

Sætning 4.4 Undersum $\leq$ oversum

Antag $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ er en begrænset funktion og P_1 og P_2 er inddelinger af $[a;b]$. Så gælder

$$L(f,P_1) \leq U(f,P_2).$$

Bevis. Lad $P_3 = P_1 \cup P_2$. Så har vi fra sætning 4.3, at

$$\begin{aligned} L(f,P_1) &\leq L(f,P_3) \\ &\leq U(f,P_3) \\ &\leq U(f,P_2). \end{aligned}$$

■

4.2 Integrabilitet

Vi har nu set, at når vi tilføjer ekstra punkter til en inddeling så bliver undersummen potentielt større, og oversummen bliver potentielt mindre. Derudover er en undersum for en funktion altid mindre end en oversum, uanset mht. hvilken inddeling. Mængden af alle oversummer er så opad begrænset og mængden af alle undersummer er så nedad begrænset. Derfor eksisterer supremum for mængden af alle oversummer og ligeledes eksisterer infimum for mængden af alle undersummer. Vi definerer det såkaldte øvre integral og nedre integral ud fra dette faktum.

Definition 4.5 Øvre integral, nedre integral

Antag $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ er en begrænset funktion, og lad $\mathfrak{P}$ være mængden af alle inddelinger af $[a; b]$. Så er det øvre integral af f defineret ved

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(f, P) : P \in \mathfrak{P}\}.$$

Tilsvarende er det nedre integral af f defineret ved

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(f, P) : P \in \mathfrak{P}\}.$$

Det viser sig, at det nedre integral for en funktion altid er mindre end eller lig det øvre intagral for funktionen.

Sætning 4.6 Nedre integral $\leq$ øvre integral

Antag $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ er en begrænset funktion. Så gælder

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f$$

Bevis. [14] Fra sætning 4.4 har vi, at $L(f,P_1) \leq U(f,P_2)$ for alle $P_1, P_2 \in \mathfrak{P}$. Fra definitionen af supremum (def. 2.2) følger det så, at

$$\begin{aligned}\underline{\int_a^b} f &= \sup\{L(f, P) : P \in \mathfrak{P}\} \\ &\leq U(f, P_2),\end{aligned}$$

hvor $P_2 \in \mathfrak{P}$. $\underline{\int_a^b} f$ er da et undertal for mængden $\{U(f, P) : P \in \mathfrak{P}\}$, og siden infimum af en mængde altid er større end eller lig ethvert undertal for mængden, så har vi

$$\begin{aligned}\underline{\int_a^b} f &\leq \inf\{U(f, P) : P \in \mathfrak{P}\} \\ &= \overline{\int_a^b} f.\end{aligned}$$

■

Ved Riemann-integration arbejder vi kun med funktioner, hvor det øvre og nedre integral har en fælles værdi. Da vi i dette afsnit kun arbejder med Riemann-integralet og ikke andre integralbegreber, nøjes vi med at sige, at en funktion er integrabel, når den er Riemann-integrabel. Ligeledes kalder vi blot Riemann-integralet af en funktion for integralet af funktionen.

Definition 4.7 Integrabel, integral

Antag $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ er en begrænset funktion. Så er f integrabel, hvis

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f,$$

og denne fælles værdi kaldes for integralet af f fra a til b, som denoteres

$$\int_a^b f \text{ eller } \int_a^b f(x)\, dx.$$

[14] Øvelse 7.2.1 i Abbott (2002), s. 190.

Bemærk, at den sidste notation for integralet ikke bidrager med nogen ny information ift. den første. Integrationsvariablen (x) kan nemlig lige så godt repræsenteres af et andet bogstav. Vi vil da primært benytte den første notation for integralet.

Eksempel 4.8 Riemann-integrabel funktion

Lad funktion $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ være defineret ved

$$f(x) = \pi.$$

Det er klart, at arealet under grafen for f må være π. Vi vil nu vise, at funktionen er integrabel, og at integralet af f fra 0 til 1 har denne værdi.
Siden funktionsværdien er konstant, har vi for enhver inddeling $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ af $[0; 1]$, at alle $M_i = m_i = \pi$. Oversummerne bliver så

$$\begin{aligned} U(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \\ &= \pi \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Tilsvarende bliver undersummerne

$$\begin{aligned} U(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \\ &= \pi \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Vi har altså $\{U(f, P) : P \in \mathfrak{P}\} = \{L(f, P) : P \in \mathfrak{P}\} = \{\pi\}$. Det er klart, at $\overline{\int_0^1} f = \underline{\int_0^1} f = \pi$. Således er funktionen integrabel, og integralet bliver da

$$\int_0^1 f = \pi.$$

Det er imidlertid lidt vanskeligt at bevise, om en funktion er integrabel eller ej alene ud fra definition 4.7. Den næste sætning viser da, at en funktion er integrabel præcis når forskellen på undersum og oversum kan gøres vilkårligt lille.

Sætning 4.9 Kriterie for integrabilitet

Antag $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ er en begrænset funktion. Så er f integrabel præcis når der for alle $\varepsilon > 0$ eksisterer en inddeling P_ε af $[a; b]$, sådan at

$$U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Bevis. Antag først, at f er integrabel, altså at $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$. Siden $\overline{\int_a^b} f$ er infimum af mængden af alle oversummer, så har vi for enhver given $\varepsilon > 0$, at der eksisterer en inddeling P_1 af $[a; b]$ sådan at

$$U(f, P_1) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2},$$

for ellers ville $\overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}$ være et undertal.
Ligeledes er $\underline{\int_a^b} f$ supremum af mængden af undersummer, og der eksisterer en inddeling P_2 af $[a; b]$ sådan at

$$L(f, P_2) > L(f) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Lad $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2$, så har vi fra sætning 4.3, at

$$\begin{aligned} U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) &\leq U(f,P_1) - L(f,P_2) \\ &< \left(\overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} \right) - \left(\underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Lighedstegnet på anden sidst linje kommer fra f's integrabilitet.

Omvendt, antag nu, at der for enhver given $\varepsilon > 0$ eksisterer en inddeling P_ε af $[a;b]$, sådan at

$$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Der gælder så også, at

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon).$$

Antag, at f ikke er integrabel, hvilket vil sige, at $\overline{\int_a^b} f \neq \underline{\int_a^b} f$. Så har vi $\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f > 0$. Men så kan vi vælge $\varepsilon = \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f$, hvilket fører til modstrid, fordi vi så får $\varepsilon \leq U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon)$. Således er f integrabel. ■

Med dette kriterie for integrabilitet kan vi bevise, om bestemte funktioner, eller typer af funktioner er integrable. Det næste vigtige resultat viser, at alle kontinuerte funktioner på lukkede intervaller er integrable.

Sætning 4.10 Kontinuert funktion på lukket interval er integrabel
Antag funktionen $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ er kontinuert på $[a;b]$. Så er f integrabel.

Bevis. Siden f er kontinuert på $[a;b]$, så følger det fra sætning 3.6 og 3.10, at f er begrænset og uniform kontinuert i $[a;b]$. Lad $\varepsilon > 0$ være givet, og lad

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Så har vi $\gamma > 0$, fordi vi har $a < b$. Siden f er uniform kontinuert på $[a;b]$, så eksisterer $\delta > 0$ sådan at når $p,q \in [a;b]$ og $|p-q| < \delta$, så gælder

$$|f(p) - f(q)| < \gamma.$$

Lad $P_\varepsilon = \{x_0, \ldots, x_n\}$ være en inddeling af $[a;b]$, hvor $\Delta x_i < \delta$ for $i = 1, \ldots, n$. Fra sætning 3.7 følger det så, at der i hvert delinterval eksisterer $p_i, q_i \in [x_{i-1}; x_i]$ sådan at

$$f(p_i) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}; x_i]\} = M_i \text{ og } f(q_i) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}; x_i]\} = m_i$$

Siden $|p_i - q_i| \leq \Delta x_i < \delta$, så har vi

$$M_i - m_i = f(p_i) - f(q_i) < \gamma.$$

Forskellen på over- og undersummen af f med hensyn til P_ε bliver så

$$\begin{aligned} U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) &= \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i \\ &< \sum_{i=1}^n \gamma \cdot \Delta x_i \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Vi har nu vist, at forskellen på oversum og undersum kan gøres mindre end enhver $\varepsilon > 0$, og det følger fra sætning 4.9, at f er integrabel. ■

4.3 Integrabilitet af diskontinuerte funktioner

Vi har nu set, at alle kontinuerte funktioner på lukkede intervaller er integrable. Imidlertid kan man undre sig over, om også funktioner med diskontinuiteter kan være integrable med den anvendte definition. Det viser sig, at når en begrænset funktion på et lukket interval kun har endeligt mange diskontinuiteter, så er funktionen Riemann-integrabel.

Vi vil starte med at bevise, at hvis en funktion er integrabel på $[a;c]$ og $[c;b]$, så er funktionen integrabel på $[a;b]$.

Sætning 4.11 Omvendt indskudssætning

Hvis en begrænset funktion $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ er integrabel på $[a;c]$ og $[c;b]$, så er f integrabel på $[a;b]$.

Bevis. Siden f er integrabel på $[a;c]$ og $[c;b]$, så har vi fra sætning 4.9 har vi, at der for enhver $\varepsilon > 0$ eksisterer en inddeling $P_1 = \{x_0, \dots, x_n\}$ af $[a;c]$, sådan at

$$U(f, P_1) - L(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tilsvarende eksisterer en inddeling $P_2 = \{x_n, \dots, x_m\}$ af $[c;b]$, sådan at

$$U(f, P_2) - L(f, P_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Lad $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2 = \{x_0, \dots, x_m\}$. Så er P_ε en inddeling af $[a;b]$, hvor forskellen på over- og undersum bliver

$$\begin{aligned} U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) &= \sum_{i=1}^{m} (M_i - m_i)\Delta x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i + \sum_{i=n+1}^{m} (M_i - m_i)\Delta x_i \\ &= (U(f, P_1) - L(f, P_1)) + (U(f, P_2) - L(f, P_2)) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Altså er f integrabel på $[a;b]$. ■

Det næste resultat viser, at hvis en funktion defineret på $[a;b]$ er integrabel på alle lukkede intervaller, hvor det ene endepunkt er a eller b og det andet endepunkt er et indre punkt i $[a;b]$, så er funktionen integrabel på hele $[a;b]$. Ideen i beviset ligner meget beviset af den omvendte indskudssætning.

Sætning 4.12

Antag en begrænset funktion $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ er integrabel på $[c;b]$ for alle $c \in]a;b[$. Så er f integrabel på $[a;b]$. Tilsvarende hvis f er integrabel på $[a;c]$ for alle $c \in]a;b[$, så er f integrabel på $[a;b]$.

Bevis. Lad $\varepsilon > 0$ være givet. Siden f er begrænset, så eksisterer $B > 0$ sådan at $|f(x)| \leq B$ for alle $x \in [a;b]$.

Antag først, at f er integrabel på $[c;b]$ for alle $c \in]a;b[$. Så eksisterer $x_1 \in]a;b[$ sådan at

$$x_1 < a + \frac{\varepsilon}{4B} \iff x_1 - a < \frac{\varepsilon}{4B},$$

og f er integrabel på $[x_1;b]$. Det vil sige (sætning 4.9), at der eksisterer en inddeling P_1 af $[x_1;b]$, hvor forskellen på over- og undersum er

$$U(f, P_1) - L(f, P_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Lad $P_\varepsilon = \{a\} \cup P_1$. Så er P_ε en inddeling af $[a;b]$. Bemærk, at der for hvert delinterval gælder, at $M_i - m_i \leq 2B$ (hvor $i = 1, \dots, n$), og forskellen på over- og undersummen af f mht. P_ε bliver så

$$\begin{aligned} U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i \\ &= (M_1 - m_1)(x_1 - a) + \sum_{i=2}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i \\ &= (M_1 - m_1)(x_1 - a) + (U(f,P_1) - L(f,P_1)) \\ &< 2B \cdot \frac{\varepsilon}{4B} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Fra sætning 4.9 følger det så, at f er integrabel på $[a;b]$.

Antag så, at f er integrabel på $[a;c]$ for alle $c \in]a;b[$. Så eksisterer ligeledes $x_n \in]a;b[$, sådan at

$$b - x_n < \frac{\varepsilon}{4B}.$$

Da f er integrabel på $[a;x_n]$, så eksisterer også en inddeling P_n af $[a;x_n]$, hvor

$$U(f,P_n) - L(f,P_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vi lader igen ligeledes $P_\varepsilon = P_n \cup \{b\}$, og får forskellen på over- og undersummen af f mht. P_ε til

$$\begin{aligned} U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i \\ &= (M_n - m_n)(b - x_n) + \sum_{i=1}^{n-1}(M_i - m_i)\Delta x_i \\ &\leq (2B)\,(b - x_n) + (U(f,P_n) - L(f,P_n)) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Altså er f integrabel på $[a;b]$. ■

Med sætning 4.11 og 4.12 kan vi bevise, at funktioner på lukkede intervaller med endeligt mange diskontinuiteter er integrable.

Sætning 4.13 Begrænset funktion på lukket interval med endeligt mange diskontinuiteter er integrabel

En begrænset funktion $f : [a;b] \to \mathbb{R}$, som er diskontinuert i endeligt mange punkter $p_1, \dots, p_n \in [a;b]$, er integrabel.

Bevis. Betragt først tilfældet, hvor f er diskontinuert i et enkelt punkt $p_1 \in [a;b]$.

Hvis $a < p_1 < b$, så er f kontinuert på $[a;c]$ for alle $c \in]a;p_1[$, og kontinuert på $[d;b]$ for alle $d \in]p_1;b[$. Altså er f også integrabel på intervallerne $[a;c]$ og $[d;b]$. Fra sætning 4.12 har vi så, at f er integrabel på $[a;p]$ og $[p;b]$. Den omvendte indskudssætning giver os så, at f er integrabel på $[a;b]$.

Hvis $p_1 = a$ eller $p_1 = b$, så er f enten kontinuert og derfor integrabel for alle $c \in]a;b[$ på enten $[c;b]$ eller på $[a;c]$. I begge tilfælde følger det direkte fra sætning 4.12, at f er integrabel på $[a;b]$.

Tilføjer vi et ekstra punkt $p_2 \in [a;b]$, hvor f også er diskontinuert, så kan vi med samme argumentation komme frem til, at f er integrabel på $[a;b]$ (vi laver blot ét delinterval mere). Ved induktion har vi så, at hvis f er diskontinuert i et endeligt antal punkter $p_1, \dots, p_n$, så er f integrabel. ■

Hvis en funktion skal være ikke-integrabel, så kan den altså ikke have endeligt mange diskontinuiteter. Et eksempel på en ikke-integrabel funktion er Dirichlets funktion, som vi undersøger i det næste eksempel.

Eksempel 4.14 Ikke-integrabel funktion

Betragt funktionen $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{hvis } x \text{ rational} \\ 0, & \text{hvis } x \text{ irrational.} \end{cases}$$

Der gælder for alle tal i $x \in \mathbb{R}$, at x er et fortætningspunkt af $\mathbb{Q}$ eller $x \in \mathbb{Q}$. Tilsvarende gælder der også for alle $x \in \mathbb{R}$, at x er et fortætningspunkt af $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ eller $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.[a]

For enhver inddeling $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ af $[0;1]$ har vi så, at hvert af dets delintervaller $[x_{i-1}; x_i]$ (hvor $i = 1, \ldots, n$) både indeholder rationelle og irrationelle tal. Det vil sige, at oversummen bliver

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = 1.$$

Samtidigt bliver undersummen

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0.$$

Det øvre integral bliver så $\overline{\int_0^1} f = 1$, og det nedre integral bliver $\underline{\int_0^1} f = 0$. Siden $\overline{\int_0^1} f \neq \underline{\int_0^1} f$, så er f ikke integrabel.

[a] Se Rudin (1976), s. 9.

Det skal dog tilføjes, at der eksisterer funktioner med uendeligt mange diskontinuiteter, der stadig er Riemann-integrable. Dette undersøges nærmere i afsnit 6.

4.4 Integralregningens hovedsætning

Indtil nu har vi primært undersøgt, *hvorvidt* bestemte funktioner og typer af funktioner er integrable. Vi har dog ikke præsenteret gode metoder til udregninger af disse integraler. Integralregningens hovedsætning, som vi beviser her, fortæller, at hvis en funktion er integrabel, og stamfunktionen eksisterer, så kan vi udregne integralet med de sædvanlige metoder (dvs. stamfunktionsbestemmelse).

Vi starter med at bevise middelværdisætningen for afledede funktioner, som vi skal bruge i beviset for integralregningens hovedsætning.

Sætning 4.15 Middelværdisætningen

Hvis en funktion $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ er kontinuert på $[a;b]$ og differentiabel på $]a;b[$, så eksisterer et punkt $x \in]a;b[$, sådan at

$$f'(x)(b-a) = f(b) - f(a)$$

Bevis. [15] Lad $g : [a;b] \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$g(p) = (f(b) - f(a)) \cdot p - f(p) \cdot (b-a).$$

Man kan så vise, at g er kontinuert på $[a;b]$ og differentiabel på $]a;b[$ med

$$g'(p) = (f(b) - f(a)) - f'(p) \cdot (b-a).$$

Derudover gælder også, at

$$\begin{aligned} g(a) &= f(b) \cdot a - f(a) \cdot b - f(a) \cdot b + f(a) \cdot a \\ &= f(b) \cdot a - f(a) \cdot b \\ &= f(b) \cdot b - f(a) \cdot b - f(b) \cdot b + f(b) \cdot a \\ &= g(b). \end{aligned}$$

[15] Beviset er baseret på Rudin (1976), s. 107-108.

Hvis g er konstant på $[a;b]$, så er $g'(x) = 0$ for alle $x \in]a;b[$.
Hvis der derimod er $p \in]a;b[$, sådan at $g(p) > g(a) = g(b)$, så fra sætning 3.7 eksisterer der et punkt $x \in]a;b[$, hvor g har et lokalt maksimum, og $g'(x) = 0$.
Hvis der til sidst er $p \in]a;b[$, sådan at $g(p) < g(a) = g(b)$, så har vi ligedes, at der eksisterer der et punkt $x \in]a;b[$, hvor g har et lokalt minimum, og $g'(x) = 0$.

Vi har altså vist, at der altid eksisterer et punkt $x \in]a;b[$, hvor der gælder

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\iff (f(b) - f(a)) - f'(x) \cdot (b-a) = 0 \\ &\iff f'(x)(b-a) = f(b) - f(a). \end{aligned}$$

■

Vi kan nu bevise integralregningens hovedsætning.

Sætning 4.16 Integralregningens hovedsætning
Antag $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ er integrabel, og $F : [a;b] \to \mathbb{R}$, hvor $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in [a;b]$. Så gælder

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Bevis. Lad $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ være enhver inddeling af $[a;b]$. Fra middelværdisætningen har vi så, at der i hvert delinterval eksisterer et punkt $p_i \in [x_{i-1}; x_i]$ (hvor $i = 1, \ldots, n$), sådan at

$$\begin{aligned} F(x_i) - F(x_{i-1}) &= F'(p_i)\,(x_i - x_{i-1}) \\ &= f(p_i)\Delta x_i. \end{aligned}$$

Imidlertid har vi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(p_i)\Delta x_i &= \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Siden $m_i \le f(p_i) \le M_i$ for $i = 1, \ldots, n$, så får vi uligheden

$$\begin{aligned} L(f,P) \le \sum_{i=1}^n f(p_i)\Delta x_i \le U(f,P) &\iff L(f,P) \le F(b) - F(a) \le U(f,P) \\ &\iff \underline{\int_a^b} f \le F(b) - F(a) \le \overline{\int_a^b} f, \end{aligned}$$

hvor den sidste implikation holder, fordi udtrykket $F(b) - F(a)$ ikke afhænger af inddelingen. Fra vores antagelse om, at f er integrabel, følger det imidlertid, at $\int_a^b f = \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$, og vi har

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

■

5 Numerisk integration

Nogle gange kan vi ikke benytte integralregningens hovedsætning til at bestemme værdien af et integral, da vi ikke er i stand til at finde en stamfunktion. I det tilfælde er det praktisk at kunne bestemme værdien af integralet numerisk. Vi præsenterer her kort Simpsons metode, der tilnærmer arealet under grafen for en kontinuert funktion ved hjælp af parabler.[16]

[16] Afsnittet er baseret på Bartle & Sherbert (2010), s. 238-239.

5.1 Simpsons metode

Før vi kan angive en formel for Simpsons metode, vil vi først kigge på arealet under grafen for et andengradspolynomium, der er bestemt af tre givne punkter.

Eksempel 5.1 Areal under grafen for andengradspolynomium bestemt af tre punkter

Betragt andengradspolynomiet, der går gennem de tre punkter

$$(-h, y_0), (0, y_1) \text{ og } (h, y_2).$$

Andengradspolynomiet må være af formen $p(x) = ax^2 + bx + c$. Siden $p(0) = y_1$, så har vi $c = y_1$. Vi får da ligningssystemet

$$\begin{aligned} a(-h)^2 - bh + y_1 &= y_0 \\ ah^2 + bh + y_1 &= y_2. \end{aligned}$$

Løser vi ligningssystemet, får vi

$$a = \frac{y_0 - y_1 + \frac{y_2 - y_0}{2}}{h^2} \text{ og } b = \frac{y_2 - y_0}{2h}.$$

Arealet under grafen fra $-h$ til h må være

$$\begin{aligned} \int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)\, dx &= 2 \cdot \int_0^h \left(ax^2 + c\right)\, dx \\ &= 2 \cdot \left[\frac{x^3}{3}a + cx\right]_0^h \\ &= 2 \cdot \left(\frac{h^3}{3}a + ch\right) \\ &= \frac{h}{3}\left(2ah^2 + 6c\right) \\ &= \frac{h}{3}\left(2 \cdot \left(y_0 - y_1 + \frac{y_2 - y_0}{2}\right) + 6y_1\right) \\ &= \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right). \end{aligned}$$

Arealet under grafen for det givne andengradspolynomium fra $-h$ til h er altså $\frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$.

Ideen i Simpsons metode er så, at vi kan bruge dette udtryk til at bestemme arealet under hvert af andengradspolynomierne vi approksimerer med, da y-værdierne og dermed arealet ikke ændres ved en horisontal forskydning. En intuitiv måde at forstå formlen for Simpsons metode er nemlig, at vi vandret forskyder midtpunktet af hver parabel til $x = 0$, hvor vi så kan benytte den udledte formel fra eksempel 5.1.

For en kontinuert funktion $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ deler vi intervallet $[a; b]$ op i n delintervaller, der hver har længden $h = \frac{b-a}{n}$. På hvert dobbelt delinterval

$$[a; a + 2h], [a + 2h; a + 4h], \ldots, [b - 2h; b],$$

kan vi så tilnærme os en værdi for arealet under grafen med en parabel. Vi får da

$$\begin{aligned} \int_a^b f &\approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right) + \frac{h}{3}\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right) + \cdots \frac{h}{3}\left(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right) \\ &= \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right), \end{aligned}$$

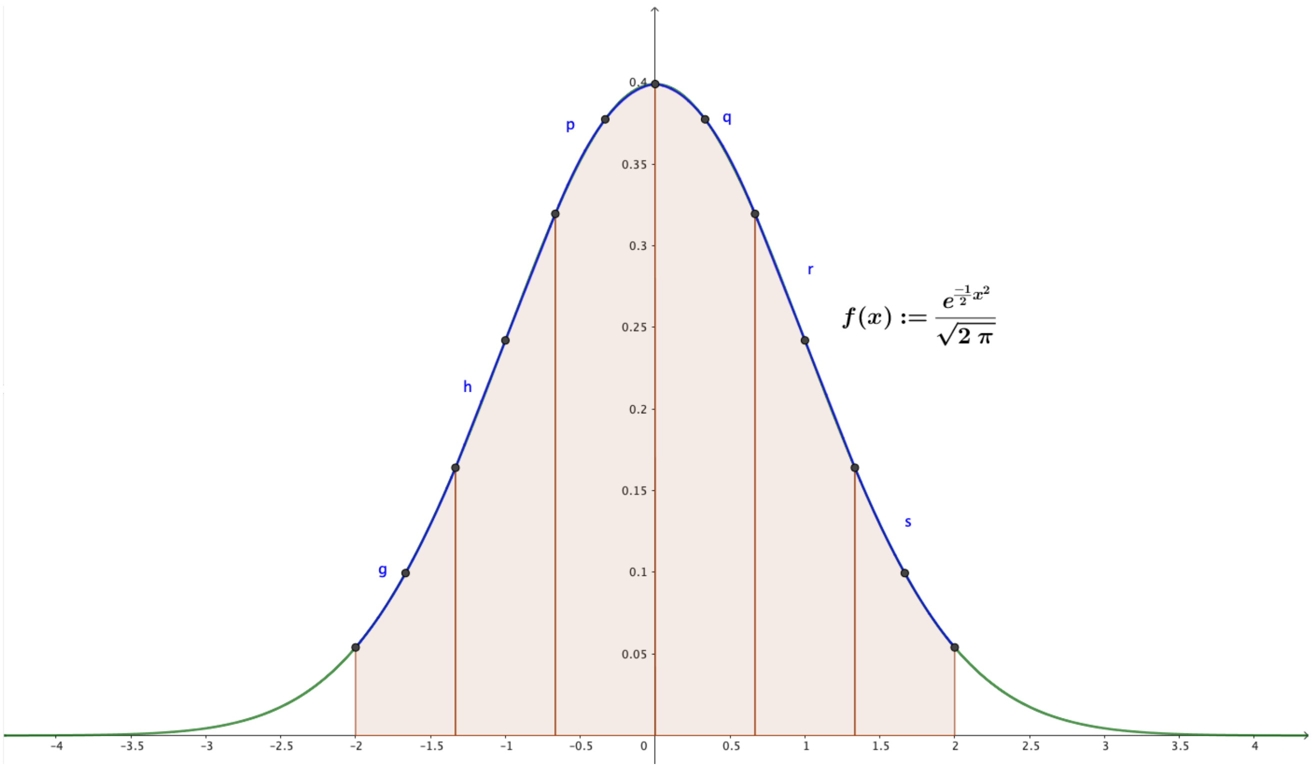
hvor $y_i = f(a + ih)$ for $i = 0, \ldots, n$. Dette fører til den næste definition.

Definition 5.2 n'te Simpson-approksimation

Antag en reel funktion f er kontinuert på $[a;b]$, $n \in \mathbb{N}$ er et lige tal, og lad $h_n = \frac{b-a}{n}$. Så er den n'te Simpson-approksimation defineret ved

$$\begin{aligned} S_n(f) = &\frac{h_n}{3}(f(a) + 4f(a+h_n) + 2f(a+2h_n) + 4f(a+3h_n) \\ &+ 2f(a+4h_n) + \cdots + 2f(b-2h_n) + 4f(b-h_n) + f(b)). \end{aligned}$$

Det er åbenlyst, at jo større n er, desto bedre er approksimationen. Som eksempel på en Simpson-approksimation bestemmer vi sandsynligheden for et udfald inden for to spredninger af middelværdien for standardnormalfordelingen.



Figur 7: Ved Simpsons metode beregnes summen af arealerne under hver parabel (de blå)

Eksempel 5.3 Sandsynlighed i standardnormalfordelingen

Tæthedsfunktionen for standardnormalfordelingen er givet ved

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$

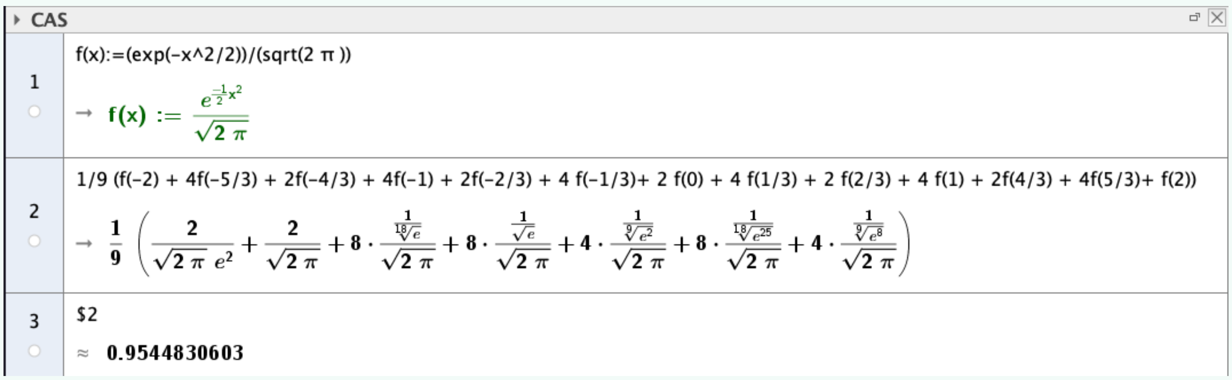
Vi vil finde en tilnærmet værdi for sandsynligheden for et udfald inden for to spredninger af middelværdien. Med andre ord vil vi approksimere sandsynligheden $P(-2 \leq X \leq 2) = \int_{-2}^{2} f$. Dette gør vi med den 12'te Simpson-approksimation. Så får vi h_{12} til

$$h_{12} = \frac{2-(-2)}{12} = \frac{1}{3}.$$

Vi udregner Simpson-approksimationen med CAS, hvilket ses i fig. 8.

$$
\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \right) dx \approx & S_{12}(f) \\
=& \frac{1}{3^2} \left(f(-2) + 4f\left(-\frac{5}{3}\right) + 2f\left(-\frac{4}{3}\right) + 4f(-1) + 2f\left(-\frac{2}{3}\right) + 4f\left(-\frac{1}{3}\right) \right. \\
& \left. + 2f(0) + 4\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\right) + 4\,(1) + 2f\left(\frac{4}{3}\right) + 4f\left(\frac{5}{3}\right) + f(2) \right) \\
\approx & \, 0{,}9544830603.
\end{aligned}
$$

Dette er utroligt tæt på den 'rigtige' værdi til ti betydende cifre, som er 0,9544997361.



Figur 8: Den 12'te Simpson-approksimation udregnet med CAS

6 Diskussion - videreudvikling af integrationsteorien

Selvom Riemann-integralet løser mange af problemerne, som definitionen på integralet fra 1600-tallet havde, så er Riemann-integralet ikke perfekt, hvilket vi i dette afsnit vil se.[17]

6.1 Riemann-integralets svagheder

Indtil nu har vi bevist for forskellige typer af funktioner, at de er integrable. Vi har dog ikke været i stand til at sige, *præcis hvornår* en funktion er Riemann-integrabel. Hvor nogle funktioner med uendeligt mange diskontinuiteter er integrable, så er andre ikke. Præcis hvor diskontinuert må en funktion så være, før den er ikke-integrabel? For at kunne svare på dette spørgsmål, er man nødt til at benytte en generalisering af størrelsen for en mængde, der kaldes for mængdens mål. Denne målteori blev opfundet af Lebesgue i starten af 1900-tallet, hvor han også indførte et nyt integralbegreb, Lebesgue-integralet.

For at forstå behovet for en ny definition på integralet, vil vi kigge på et eksempel.

Eksempel 6.1 Ikke-integrabel funktion, hvor arealet giver mening

Lad $r_1, r_2, \ldots$ være en følge[a], der præcis indeholder hvert rationalt tal i $]0;1[$ én gang. Lad $f_k : [0;1] \to \mathbb{R}$ være defineret ved

$$
f_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x - r_k}}, & \text{hvis } x > r_k \\ 0, & \text{hvis } x \leq r_k, \end{cases}
$$

[17] Afsnittet er baseret på Axler (2020), s. 9-12, medmindre andet er angivet.

hvor $k \in \mathbb{Z}^+$. Lad $f : [0; 1] \to \mathbb{R}^+$ være defineret ved

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(x)}{2^k}.$$

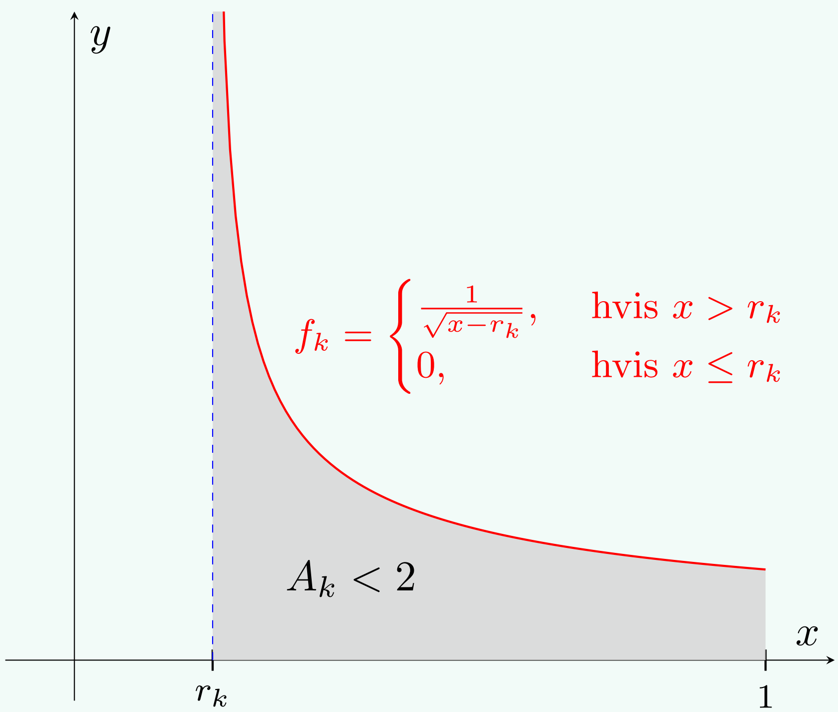
Så har vi, at arealet A_k under grafen for hver f_k må være (se fig. 9)

$$\begin{aligned} A_k &< \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \\ &= \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Arealet under grafen for f må så være

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{2^k} \\ &< \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2^k} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Man kan vise at rækken konvergerer til 2. Vi vil altså gerne have, at arealet under grafen for f skal være mindre end 2.



Figur 9: Grafen for f_k

Imidlertid har vi for enhver inddeling $P = x_0, \ldots, x_n$ af $[0; 1]$, at alle dens delintervaller $[x_{i-1}; x_i]$ (hvor $i = 1, \ldots, n$) indeholder et rationalt tal r_k, hvilket vil sige, at f_k ikke er begrænset på deltintervallet. Man kan så vise, at f af den grund heller ikke er begrænset på alle inddelingens delintervaller. Altså er Riemann-integralet ikke defineret for f i intervallet $[0; 1]$.

[a]En følge er blot en funktion med de naturlige tal $\mathbb{N}$ som definitionsmængde

Udover det netop viste eksemepel, har vi også vist, at en funktion med alt for mange diskontinuiteter ikke er Riemann-integrabel (se Dirichlets funktion i eksempel 4.14). Derudover er Riemann-integralet kun defineret for begrænsede funktioner. Disse er alle sammen gode grunde til den videreudvikling af integrationsteorien, som Lebesgue gav sig til at lave i 1900-tallet.

7 Konklusion

I artiklen har vi præsenteret Riemann-integralet, der opklarer mange af de problemer, som definitionen på integralet fra 1600-tallet gav anledning til. Vi har herunder vist, at alle kontinuerte funktioner på et interval $[a; b]$ er integrable med Riemann-integralet. Derudover er alle begrænsede funktioner med endeligt mange diskontinuiteter også integrable.

Integralregningens hovedsætning viser ydermere, at hvis stamfunktionen til en funktion eksisterer (hvilket blandt andet gælder for alle kontinuerte funktioner på intervaller), så kan vi på sædvanlig integrere via stamfunktionsbestemmelse. Praktisk set er det dog ikke altid lige nemt at finde stamfunktionen til en funktion, og det kan derfor være fordelagtigt at kunne approksimere integralets værdi numerisk. Vi har her kort præsenteret Simpsons metode, som kan bruges på kontinuerte funktioner.

Trods Riemann-integralets forbedringer ift. 1600-tallet, så findes dog stadig enkelte svagheder ved integralet. Disse svagheder er senere blevet dækket af Lebesgue-integralet.

Litteratur

Abbott, S. (2002). *Understanding Analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. New York Berlin: Springer.

Axler, S. (2020). *Measure, Integration & Real Analysis*, vol. 282 af *Graduate Texts in Mathematics*. Cham: Springer International Publishing.

Axler, S. (2024). *Supplement for Measure, Integration & Real Analysis*. Cham: Springer International Publishing.

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2010). *Introduction to Real Analysis*. New York Weinheim: Wiley, 4. udg.

Brydensholt, M., & Ridder Ebbesen, G. (2018). *Lærebog i Matematik A2 STX*. Aarhus C: Systime, 2. udg.

Clausen, F., Printz, P., & Schomacker, G. (1993). *Integralregning og differentialligninger*. Ind i matematikken. København: Munksgaard.

Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. Auckland: McGraw-Hill, 3. udg.