Virum Gymnasium

SRP

Matematik

Riemann-integralet

Forfatter
Minrui Kevin Zhou

Vejledere
Niels Nørskov Laursen

14. marts 2025

Resumé

Dette er mit resumé.

Indhold

1 Indledning **2**

2 De reele tal **2**

3 Kontinuitet **2**

4 Riemann-integralet **2**

5 Numerisk integration **3**

1 Indledning

2 De reele tal

I denne sektion vil vi først og fremmest kigge på nogle vigtige egenskaber ved $\mathbb{R}$, der er nødvendige for en stringent opbygning af integrationsteorien. Derefter indfører vi grundlæggende teori om topologi for $\mathbb{R}$, som vi senere skal bruge til at definere kontinuitet samt grænseværdien for en funktion.

Definition 2.1 Overtal, undertal

Antag, at $A \subseteq \mathbb{R}$. Hvis der eksisterer $y \in \mathbb{R}$ sådan at $x \leq y$ for alle $x \in A$, så siges A at være opad begrænset, og y kaldes et overtal for A.
Hvis der eksisterer $z \in \mathbb{R}$ sådan at $x \geq z$ for alle $x \in A$, så siges A at være nedad begrænset, og z kaldes et undertal for A.

3 Kontinuitet

Definition 3.1 Begrænset funktion

4 Riemann-integralet

I denne sektion vil vi definere Riemann-integralet.[1] Før vi gør dette, er vi nødt til at starte med nogle definitioner, vi har brug for.

Definition 4.1 Inddeling

Antag $a, b \in \mathbb{R}$ sådan at $a < b$. Ved en inddeling P af $[a;b]$ forstår vi en endelig mængde $\{x_0, \dots, x_n\}$, hvor

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

og vi skriver

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, \dots, n)$$

Med en inddeling kan vi dele intervallet $[a;b]$ op i n delintervaller, hvor det i'te delinterval har længden Δx_i:

$$[a;b] = [x_0;x_1] \cup [x_1;x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1};x_n]$$

Vi vil nu definere over- og undersummen af en funktion med hensyn til en given inddeling.

Definition 4.2 Over- og undersum

Antag $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ er en begrænset funktion, og $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ er en inddeling af $[a;b]$. Lad

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{x_{i-1}}; x_i]\} \quad \text{og} \quad m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{x_{i-1}}; x_i]\}.$$

Så er oversummen af f med hensyn til P defineret ved

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Tilsvarende er undersummen af f med hensyn til P defineret ved

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i.$$

[1] Sektionen er baseret på Abbott (2002), s. 183-194

Skriv eksistens

Sætning 4.3 Uligheder med over- og undersummer
Antag $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ er en begrænset funktion og P_1, P_2 er inddelinger af $[a;b]$ sådan at $P_1 \subseteq P_2$. Så gælder

$$L(f,P_1) \leq L(f,P_2) \leq U(f,P_2) \leq U(f,P_1)$$

Bevis. j ■

5 Numerisk integration

Litteratur

Abbott, S. (2002). *Understanding Analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. New York Berlin: Springer.