VIRUM GYMNASIUM

SRP

MATEMATIK

Riemann-integralet

Forfatter
MINRUI KEVIN ZHOU

Vejledere
NIELS NØRSKOV LAURSEN

15. marts 2025

Resumé

Dette er mit resumé.

Indhold

1 Indledning

2 De reele tal

I denne sektion vil vi først og fremmest undersøge nogle vigtige egenskaber ved $\mathbb{R}$, der er nødvendige for en stringent opbygning af integrationsteorien. Derefter indfører vi grundlæggende teori om topologi for $\mathbb{R}$, som vi senere skal bruge til at definere kontinuitet samt grænseværdien for en funktion.

Definition 2.1 Overtal, undertal

Antag, at $A \subseteq \mathbb{R}$. Hvis der eksisterer $y \in \mathbb{R}$ sådan at $x \leq y$ for alle $x \in A$, så siges A at være opad begrænset, og y kaldes et overtal for A.
Hvis der eksisterer $z \in \mathbb{R}$ sådan at $x \geq z$ for alle $x \in A$, så siges A at være nedad begrænset, og z kaldes et undertal for A.

Imidlertid, kan det også være interessant at kunne sige noget om, om et bestemt overtal er det mindste overtal og et bestemt undertal er det største undertal.

Definition 2.2 Supremum, infimum

Antag, at $A \subseteq \mathbb{R}$. Et element $y \in \mathbb{R}$ kaldes supremum eller mindste overtal af A og betegnes $\sup A$, hvis y har følgende egenskaber:

- y er et overtal for A.
- $y \leq z$ for alle overtal z af A.

Eksempel 2.3 (Supremum og infimum af mængder)

Betragt mængderne

$$A = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\} \quad \text{og} \quad B = \{b \in \mathbb{R} : b \leq 1\}.$$

Eksempel 2.4 (Ikke-tom opad begrænset delmængde af $\mathbb{Q}$ uden supremum i $\mathbb{Q}$)

Eksempel 2.4 motiverer den næste sætning, som vi her ikke vil bevise, da beviset er relativt langt og ikke interessant for vores foretagende. Sætningen er dog en følge af måden, hvorpå $\mathbb{R}$ er konstrueret.[1]

Sætning 2.5 $\mathbb{R}$ har supremum-egenskaben

Antag, at $A \in \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ og A er opad begrænset. Så eksisterer $\sup A \in \mathbb{R}$.

Denne egenskab ved $\mathbb{R}$ kaldes for supremum-egenskaben.

3 Kontinuitet

Definition 3.1 Begrænset funktion

4 Riemann-integralet

I denne sektion vil vi definere Riemann-integralet.[2] Før vi gør dette, er vi nødt til at starte med nogle definitioner, vi har brug for.

[1] $\mathbb{R}$ kan konstrueres fra $\mathbb{Q}$ via Dedekind-snit. Rudin (1976), s. 17-21
[2] Sektionen er baseret på Abbott (2002), s. 183-194

Definition 4.1 Inddeling

Antag a, $b \in \mathbb{R}$ sådan at $a < b$. Ved en inddeling P af $[a;b]$ forstår vi en endelig mængde $\{x_0, \ldots, x_n\}$, hvor

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

og vi skriver

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Med en inddeling kan vi dele intervallet $[a;b]$ op i n delintervaller, hvor det i'te delinterval har længden Δx_i:

$$[a;b] = [x_0;x_1] \cup [x_1;x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1};x_n]$$

Vi vil nu definere over- og undersummen af en funktion med hensyn til en given inddeling.

Definition 4.2 Over- og undersum

Antag $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ er en begrænset funktion, og $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ er en inddeling af $[a;b]$. Lad

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{x_{i-1}};x_i]\} \quad \text{og} \quad m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{x_{i-1}};x_i]\}.$$

Så er oversummen af f med hensyn til P defineret ved

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Tilsvarende er undersummen af f med hensyn til P defineret ved

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i.$$

Skriv eksistens

Sætning 4.3 Uligheder med over- og undersummer

Antag $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ er en begrænset funktion og P_1, P_2 er inddelinger af $[a;b]$ sådan at $P_1 \subseteq P_2$. Så gælder

$$L(f,P_1) \leq L(f,P_2) \leq U(f,P_2) \leq U(f,P_1)$$

Bevis. j ■

5 Numerisk integration

Litteratur

Abbott, S. (2002). *Understanding Analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. New York Berlin: Springer.

Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. Auckland: McGraw-Hill, 3. ed., [nachdr.] ed.