VIRUM GYMNASIUM

SRP

MATEMATIK

Riemann-integralet

Forfatter
MINRUI KEVIN ZHOU

Vejledere
NIELS NØRSKOV LAURSEN

18. marts 2025

Resumé

Dette er mit resumé.

Indhold

1 Indledning

2 De reele tal

I dette afsnit vil vi først og fremmest undersøge nogle vigtige egenskaber ved $\mathbb{R}$, der er nødvendige for en stringent opbygning af integrationsteorien. Derefter indfører vi grundlæggende teori om topologi for $\mathbb{R}$, som vi senere skal bruge til at definere kontinuitet samt grænseværdien for en funktion.[1]

2.1 Supremum-egenskaben

Definition 2.1 Overtal, undertal

Antag, at $A \subseteq \mathbb{R}$. Hvis der eksisterer $y \in \mathbb{R}$ sådan at $x \leq y$ for alle $x \in A$, så siges A at være opad begrænset, og y kaldes et overtal for A.
Hvis der eksisterer $z \in \mathbb{R}$ sådan at $x \geq z$ for alle $x \in A$, så siges A at være nedad begrænset, og z kaldes et undertal for A.

Imidlertid, kan det også være interessant at kunne sige noget om, hvorvidt et bestemt overtal er det mindste overtal og om et bestemt undertal er det største undertal.

Definition 2.2 Supremum, infimum

Antag, at $A \subseteq \mathbb{R}$. Et element $y \in \mathbb{R}$ kaldes supremum eller mindste overtal af A og betegnes $\sup A$, hvis y har følgende egenskaber:

- y er et overtal for A.
- $y \leq z$ for alle overtal z af A.

Et element $\beta \in \mathbb{R}$ kaldes infimum eller største undertal af A og betegnes $\inf A$, hvis β har følgende egenskaber:

- β er et undertal for A.
- $\beta \geq \alpha$ for alle undertal α af A.

Eksempel 2.3 Supremum og infimum af mængder

Betragt mængderne

$$A = \{a \in \mathbb{R} : a \leq 1\} \quad \text{og} \quad B = \{b \in \mathbb{R} : b > 0\}.$$

Vi har så $\sup A = 1$ og $\inf B = 0$. Derudover er mængden A ikke nedad begrænset og mængden B er ikke opad begrænset.

Bemærk, at $\sup A \in A$, hvor $\inf B \notin B$. Det næste eksempel viser, at en ikke-tom opad begrænset delmængde af $\mathbb{Q}$ kan have supremum, der ikke er i $\mathbb{Q}$.

Eksempel 2.4 [a] Ikke-tom opad begrænset delmængde af $\mathbb{Q}$ uden supremum i $\mathbb{Q}$

Lad

$$A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$$

Antag, at $q \in \mathbb{Q}$. Vi vil vise, at $q \neq \sup A$. Siden $\sqrt{2}$ er irrational, så må vi have $q^2 < 2$ eller $q^2 > 2$.
Hvis $q^2 < 2$, kan vi finde et element i A, der er lidt større end q. Vælg

$$\delta = \frac{2 - q^2}{5}.$$

[1] Afsnittet er baseret på Rudin (1976), s. 3-33. Vi nøjes dog med at kigge på delmængder af $\mathbb{R}$, hvor Rudins bog behandler teorien mere generelt via metriske rum.

Siden $q < \left|\sqrt{2}\right| < 2$ og $0 < \delta \leq \frac{2}{5} < 1$, så må der gælde, at $2q + \delta < 5$. Vi har så

$$\begin{aligned}(q+\delta)^2 &= q^2 + \delta^2 + 2q\delta \\ &= q^2 + (2q+\delta)\cdot\delta \\ &< q^2 + 5\delta \\ &= 2.\end{aligned}$$

Med andre ord er $q + \delta$ altså et element i A, og $q \neq \sup A$.
Antag nu, at $q^2 > 0$ og $q > 0$ (når $q \leq 0$ er det trivielt, at $q \neq \sup A$). Lad

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{q^2 - 2}{2q} \\ &= \frac{q}{2} - \frac{1}{q} \\ &< b.\end{aligned}$$

Vi har så $0 < \alpha < q$, og der gælder

$$\begin{aligned}(q-\alpha)^2 &= q^2 + \alpha^2 - 2q\alpha \\ &< q^2 - 2q\alpha \\ &= q^2 - (q^2 - 2) \\ &= 2.\end{aligned}$$

Altså er $q - \alpha$ et overtal for A, hvilket vil sige, at $q \neq \sup A$. Vi har nu vist, at mængden A ikke har et supremum i $\mathbb{Q}$.

[a]Eksemplet er baseret på Axler (2024), s. 9

Eksempel 2.4 motiverer den næste sætning, som vi her ikke vil bevise, da beviset er relativt langt og ikke interessant for vores foretagende. Sætningen er dog en følge af måden, hvorpå $\mathbb{R}$ er konstrueret.[2]

Sætning 2.5 $\mathbb{R}$ har supremum-egenskaben

Antag, at $A \in \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ og A er opad begrænset. Så eksisterer $\sup A \in \mathbb{R}$.

Denne egenskab ved $\mathbb{R}$ kaldes for supremum-egenskaben. Bemærk, at en alternativ tilgang her kunne være at definere $\mathbb{R}$ ud fra supremum-egenskaben og derefter bevise $\mathbb{R}$'s eksistens ved konstruktion. Vi vil nu ud fra supremum-egenskaben af $\mathbb{R}$ vise, at $\mathbb{R}$ også må have infimum-egenskaben.

Sætning 2.6 $\mathbb{R}$ har infimum-egenskaben

Antag, at $A \in \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ og A er nedad begrænset. Så eksisterer $\inf A \in \mathbb{R}$.

Bevis. Lad

$$B = \{b \in \mathbb{R} : b \leq a \text{ for alle } a \in A\}.$$

Så er B mængden af alle undertal for A. Siden A er nedad begrænset, så er B ikke tom. Siden $A \neq \emptyset$, så er B opad begrænset. Fra supremum-egenskaben eksisterer da $\sup B \in \mathbb{R}$.

Per definition 2.2 har vi så, at $\sup B \leq a$ for alle $a \in A$ (fordi alle elementer af A er overtal for B). Siden $\sup B$ også er større end eller lig alle undertal for A, så må $\sup B = \inf A$. ■

2.2 Topologi i $\mathbb{R}$

Det skal bemærkes, at når vi arbejder med $\mathbb{R}$, så kan ordene *punkt* og *tal* bruges i flæng. Begge ord referer i dette tilfælde til elementerne i $\mathbb{R}$.

[2]$\mathbb{R}$ kan konstrueres fra $\mathbb{Q}$ via Dedekind-snit. Rudin (1976), s. 17-21

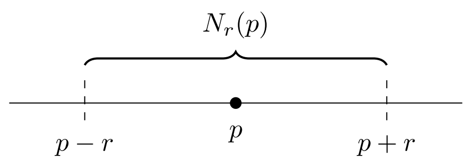
Definition 2.7 Omegn

Antag $p \in \mathbb{R}$. Så er en omegn af et punkt p en mængde

$$N_r(p) = \{q \in \mathbb{R} : |q - p| < r\}, \quad \text{hvor } r \in \mathbb{R}^+.$$

Tallet r kaldes for radius af omegnen $N_r(p)$.

Med andre ord, er en omegn af et punkt p mængden af alle punkter indenfor en given afstand fra p. Ved en omegn i $\mathbb{R}$ (som vi lige har defineret) er der altså tale om et interval. Dette ses illustreret i fig. 1.



Figur 1: Illustration af en omegn $N_r(p)$

Definition 2.8 Indre punkt, åben mængde

Antag, at $A \subseteq \mathbb{R}$. Et punkt $p \in A$ kaldes et indre punkt af A, hvis der eksisterer en omegn $N_r(p)$ af p sådan at $N_r(p) \subseteq A$.
Mængden A er åben, hvis alle punkter i A er indre punkter.

Som eksempel på åbne mængder, kan vi betragte omegne.

Sætning 2.9 Omegne er åbne

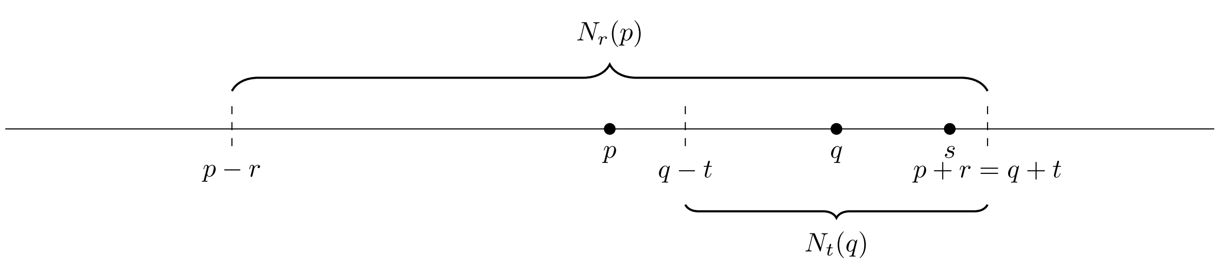
Alle omegne $N_r(p)$ af et punkt $p \in \mathbb{R}$ er åbne.

Bevis. Lad $q \in N_r(p)$ og $t = r - |p - q|$. Så har vi $|p - q| < r$, hvilket vil sige, at $t > 0$. Fra trekantsuligheden har vi så, at der for alle $s \in N_t(q)$ gælder

$$\begin{aligned} |p - s| &\leq |p - q| + |q - s| \\ &< |q - p| + t \\ &= r. \end{aligned}$$

Altså må $N_t(q) \subseteq N_r(p)$. Således er $N_r(p)$ en åben mængde. ■

Ideen i beviset af sætning 2.9 ses illustreret i fig. 2.



Figur 2: Ideen i beviset af sætning 2.9

Definition 2.10 Fortætningspunkt

Antag, at $A \subseteq \mathbb{R}$. Et punkt $p \in \mathbb{R}$ er et fortætningspunkt af mængden A, hvis alle omegne $N_r(p)$ indeholder et punkt $q \neq p$ i omegnen sådan at $q \in A$.

Fra definitionen er det klart, at et fortætningspunkt af en mængde ikke nødvendigvis behøver være et element i mængden. Dette tydeliggøres af det næste eksempel.

Eksempel 2.11 Fortætningspunkter af en mængde

Vi betragter mængden B fra eksempel 2.3. Mængden af alle fortætningspunkter af B må være $B' = B \cup \{0\}$. For at se, hvorfor det er tilfældet, lad $p \in B'$. Så for enhver $r > 0$ indeholder omegnen $N_r(p)$ et punkt $q = p + \frac{r}{2}$. Siden

$$p \geq 0 \iff p + \frac{r}{2} > 0 \iff q > 0$$

så må vi have $q \in B$. Således må alle punkter i B' være fortætningspunkter af B.
Omvendt, antag at $x \notin B'$. Så har vi $x \in \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$. Vi kan så vælge $r = |x| > 0$, og det er klart at $N_r(x) \cap B = \emptyset$. Vi har nu vist, at B' er mængden af alle fortætningspunkter af B.

Mere generelt gælder der faktisk, at hvis supremum og/eller infimum eksisterer for en delmængde af $\mathbb{R}$, så er de fortætningspunkter af mængden.

Faktummet, at et fortætningspunkt af en mængde ikke nødvendigvis er et element i mængden (hvilket ses i eksempel 2.11), motiverer den næste definition.

Definition 2.12 Lukket mængde

En mængde $A \subseteq \mathbb{R}$ er lukket, hvis den indeholder alle sine fortætningspunkter.

Vi vil nu bevise det intuitive resultat, at komplementærmængden til en åben mængde er lukket, og vice versa. Bemærk, at nogle benytter notationen $\overline{A}$ til at denotere afslutningen af A (foreningsmængden af A og mængden af alle dens fortætningspunkter), hvor vi her bruger den til at denotere komplementærmængden til A.

Sætning 2.13 Mængde er lukket præcis når dens komplementærmængde er åben

En mængde $A \in \mathbb{R}$ er lukket hvis og kun hvis dens komplementærmængde $\overline{A}$ er åben.

Bevis. Antag først, at A er lukket. Så er alle $x \in \overline{A}$ ikke fortætningspunkter af A, og der eksisterer en omegn $N_r(x)$ sådan at $A \cap N_r(x) = \emptyset$. Det vil sige, at $N_r(x) \subseteq \overline{A}$, og x er derfor et indre punkt af $\overline{A}$. Således er A åben.

Omvendt, antag at $\overline{A}$ er åben, og lad p være et fortætningspunkt af A. Så indeholder alle omegne $N_r(p)$ et punkt $q \in A$, og p er derfor ikke et indre punkt af $\overline{A}$. Siden $\overline{A}$ er åben, så må $p \in A$. Altså indeholder A alle sine fortætningspunkter og må være lukket. ∎

3 Kontinuitet

Definition 3.1 Begrænset funktion

4 Riemann-integralet

I denne sektion vil vi definere Riemann-integralet.[3] Før vi gør dette, er vi nødt til at starte med nogle definitioner, vi har brug for.

Definition 4.1 Inddeling

Antag $a, b \in \mathbb{R}$ sådan at $a < b$. Ved en inddeling P af $[a; b]$ forstår vi en endelig mængde $\{x_0, \ldots, x_n\}$, hvor

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

[3] Sektionen er baseret på Abbott (2002), s. 183-194

og vi skriver

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Med en inddeling kan vi dele intervallet $[a; b]$ op i n delintervaller, hvor det i'te delinterval har længden Δx_i:

$$[a; b] = [x_0; x_1] \cup [x_1; x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}; x_n]$$

Vi vil nu definere over- og undersummen af en funktion med hensyn til en given inddeling.

Definition 4.2 Over- og undersum

Antag $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ er en begrænset funktion, og $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ er en inddeling af $[a; b]$. Lad

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{x_{i-1}}; x_i]\} \quad \text{og} \quad m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{x_{i-1}}; x_i]\}.$$

Så er oversummen af f med hensyn til P defineret ved

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Tilsvarende er undersummen af f med hensyn til P defineret ved

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i.$$

Skriv eksistens

Sætning 4.3 Uligheder med over- og undersummer

Antag $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ er en begrænset funktion og P_1, P_2 er inddelinger af $[a; b]$ sådan at $P_1 \subseteq P_2$. Så gælder

$$L(f,P_1) \leq L(f,P_2) \leq U(f,P_2) \leq U(f,P_1)$$

Bevis. j ∎

5 Numerisk integration

6 Diskussion - videreudvikling af integrationsteorien

7 Konklusion

Litteratur

Abbott, S. (2002). *Understanding Analysis*. Undergraduate Texts in Mathematics. New York Berlin: Springer.

Axler, S. (2024). *Supplement for Measure, Integration & Real Analysis*. Cham: Springer International Publishing.

Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. Auckland: McGraw-Hill, 3. ed.