H3: Mekanik – cirkelbevægelse
3.b mat A

Kevin Zhou

6. oktober 2024

Bobslæde

Løsning:

a. Hvis man ser bort fra alle friktionskræfter, er det kun tyngdekraften $\overrightarrow{\mathbf{F}_t}$ og normalkraften $\overrightarrow{\mathbf{F}_N}$, der påvirker bobslæden. Den eneste ydre kraft er da $\overrightarrow{\mathbf{F}_N}$. Siden denne altid er vinkelret med bobslædens retning, så må der gælde, at

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{mek}} &= A_{\text{ydre}} \\ &= |\overrightarrow{\mathbf{F}_N}| \cdot \Delta s \cdot \cos(90°) \\ &= 0\end{aligned}$$

Tilvæksten i mekanisk energi er altså 0. Per definition har vi $E_{\text{mek}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$, hvor $E_{\text{kin}} = 0$ ved toppen og bobslæden opnår maksimal fart når $E_{\text{pot}} = 0$. Altså har vi

$$0 + m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + 0 \iff v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

da vi lader farten være en positiv størrelse. Da vi kender højden, kan vi nu udregne farten.

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \\ &= \sqrt{2 \cdot 9{,}82\ \text{m/s}^2 \cdot 114{,}3\ \text{m}} \\ &\approx 47{,}4\ \text{m/s}\end{aligned}$$

Bobslædens maksimale fart på banen, hvis man ser bort fra friktionskræfter er altså 47,4 m/s.

b. Fra **a.** har vi allerede, at normalkraftens arbejde er 0. Både gnidningskraften $\overrightarrow{\mathbf{F}_\mu}$ og luftmodstanden $\overrightarrow{\mathbf{F}_{\text{luft}}}$ er ydre kræfter, der er modsatrettet bobslædens retning, og vi har igen

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{mek}} &= A_{\text{ydre}} \\ &= A_\mu + A_{\text{luft}} \\ &= |\overrightarrow{\mathbf{F}_\mu}| \cdot \Delta s \cdot \cos(180°) + |\overrightarrow{\mathbf{F}_{\text{luft}}}| \cdot \Delta s \cdot \cos(180°) \\ &= -\Delta s \cdot \left(m \cdot g \cdot \mu + |\overrightarrow{\mathbf{F}_{\text{luft}}}|\right)\end{aligned}$$

hvilket holder, da der er tale om et vandret stykke, hvor $|\overrightarrow{\mathbf{F}_N}| = |\overrightarrow{\mathbf{F}_t}| = m \cdot g$. Vi kan da indsætte de kendte værdier og regne tilvæksten i mekanisk energi.

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{mek}} &= -\Delta s \cdot \left(m \cdot g \cdot \mu + |\overrightarrow{\mathbf{F}_{\text{luft}}}|\right) \\ &= -50\ \text{m} \cdot \left(630\ \text{kg} \cdot 9{,}82\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}0095 + 48\ \text{N}\right) \\ &\approx -5{,}3 \cdot 10^3\ \text{J} \\ &= -5{,}3\ \text{kJ}\end{aligned}$$

Tabet i mekanisk energi på strækningen er altså 5,3 kJ.

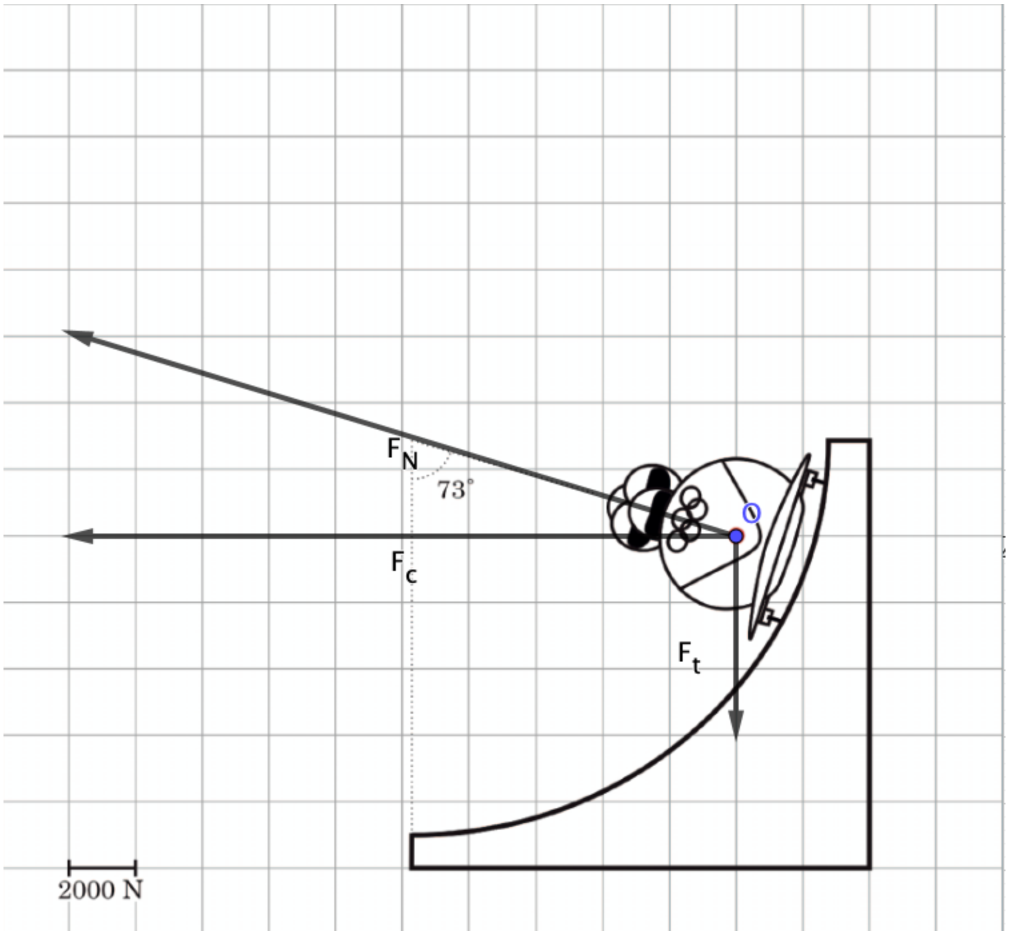
c. Vi regner først størrelsen af tyngdekraften ud. Den må være

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathbf{F}_t}| &= m \cdot g \\ &= 630\ \text{kg} \cdot 9{,}82\ \text{m/s}^2 \\ &= 6186{,}6\ \text{N}\end{aligned}$$

Tyngdekraftens retning er lodret nedad og kan nemt tegnes ind i fig. 1. Da der er tale om en vandret cirkelbevægelse, så må den resulterende kraft $\overrightarrow{\mathbf{F}_c}$ have retning vandret mod centrum. Siden $\overrightarrow{\mathbf{F}_c} = \overrightarrow{\mathbf{F}_N} + \overrightarrow{\mathbf{F}_t}$, så må $\overrightarrow{\mathbf{F}_N}$'s komposant i y-retningen være lige stor og modsatrettet $\overrightarrow{\mathbf{F}_t}$. Ved at betragte den retvinklede trekant er det nemt at se, at

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathbf{F}_N}| &= \frac{|\overrightarrow{\mathbf{F}_t}|}{\cos(73°)} \\ &= \frac{6186{,}6\ \text{N}}{\cos(73°)} \\ &= 21160{,}05037\ \text{N}\end{aligned}$$

Til sidst indtegnes $\overrightarrow{\mathbf{F}_c}$ blot som summen af de to andre vektorer. I fig. 1 ses pile, der viser retning og størrelse af de kræfter, der virker på bobslæden.



Figur 1: Repræsentanter for kræfterne indtegnet i GeoGebra

Vi kan finde et udtryk for v ud fra udtrykket for centripetalkraften.

$$|\overrightarrow{\mathbf{F}_c}| = m \cdot \frac{v^2}{r} \iff v = \sqrt{\frac{|\overrightarrow{\mathbf{F}_c}| \cdot r}{m}}$$
$$\iff v = \sqrt{\frac{|\overrightarrow{\mathbf{F}_N}| \cdot \sin(73°) \cdot r}{m}}$$

Vi kan nu regne farten ud.

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{|\overrightarrow{\mathbf{F}_N}| \cdot \sin(73°) \cdot r}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{21160{,}05\ \mathrm{N} \cdot \sin(73°) \cdot 20\ \mathrm{m}}{630\ \mathrm{kg}}} \\ &\approx 25\ \mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Bobslædens fart i cirkelbevægelsen er altså 25 m/s.

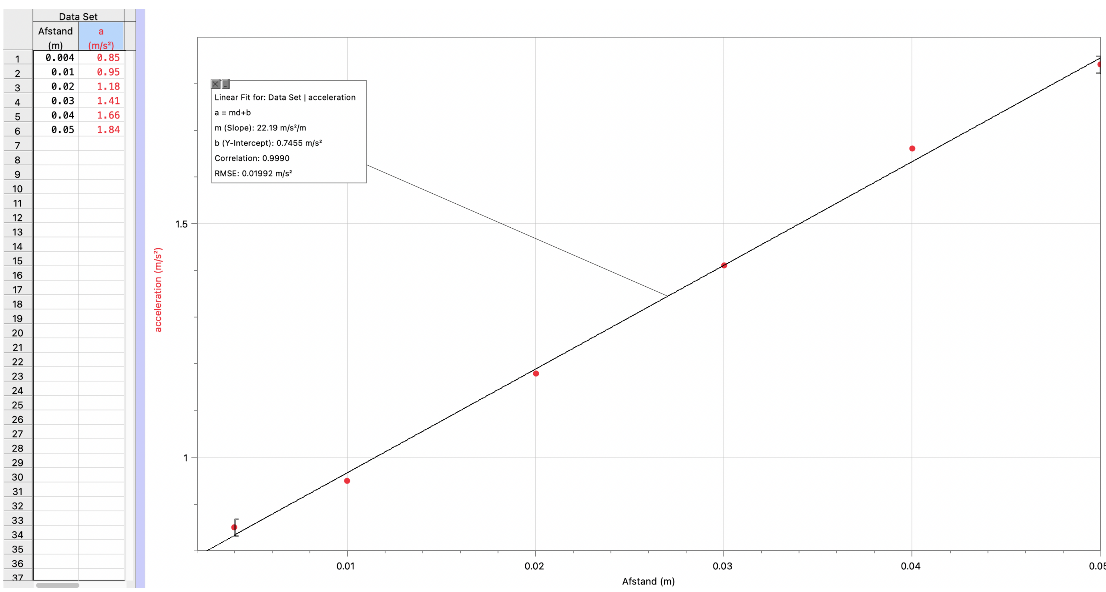
Accelerationssensor

Løsning:
a. Omløbstiden udregnes.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{f} \\ &= \frac{1}{78\ \text{min}^{-1}} \\ &= \frac{1}{78} \cdot 60\ \text{s} \\ &\approx 0{,}77\ \text{s} \end{aligned}$$

Omløbstiden i cirkelbevægelsen er altså 0,77 s.

b. Data fra tabellen sat ind i et regneark med lineær regression ses i fig. 2.



Figur 2: Lineær regression lavet i Logger Pro

Lad x betegne afstanden fra accelerationssensoren til mobiltelefonens kant nærmest centrum af pladespilleren. Så har vi

$$\begin{aligned} a_c &= \omega^2 \cdot r \\ &= \omega^2 \cdot (d + x) \\ &= \omega^2 \cdot d + \omega^2 \cdot x \end{aligned} \tag{1}$$

Fra regressionen har vi

$$a_c = 22{,}19\ \text{s}^{-2} \cdot d + 0{,}7455\ \text{m/s}^2 \tag{2}$$

Altså må der gælde, at

$$\omega^2 = 22{,}19\ \text{s}^{-2}$$

Imidlertid gælder der også, at

$$\begin{aligned} \omega = 2 \cdot \pi \cdot f \iff f &= \frac{\omega}{2\pi} \\ \iff f &= \frac{\sqrt{\omega^2}}{2\pi} \end{aligned}$$

da $\omega > 0$. Vi regner nu frekevensen ud.

$$\begin{aligned} f &= \frac{\sqrt{\omega^2}}{2\pi} \\ &= \frac{\sqrt{22{,}19\ \mathrm{s}^{-2}}}{2\pi} \\ &\approx 0{,}7\ \mathrm{Hz} \end{aligned}$$

Fra ligning 1 og 2 har vi, at

$$\omega^2 \cdot x = 0{,}7455\ \mathrm{m/s}^2 \iff x = \frac{0{,}7455\ \mathrm{m/s}^2}{\omega^2}$$

Vi beregner nu x.

$$\begin{aligned} x &= \frac{0{,}7455\ \mathrm{m/s}^2}{22{,}19\ \mathrm{s}^{-2}} \\ &\approx 0{,}03\ \mathrm{m} \\ &= 3\ \mathrm{cm} \end{aligned}$$

Vi har altså fået frekevensen til at være 0,7 Hz og afstanden fra accelerationssensoren til mobiltelefonens kant nærmest centrum af pladespilleren til at være 3 cm.

Stangtennis

Vi antager, at pigens højde er 1,6 m. Snoren ser ud til at være præcis halvt så lang som pigen og dens længde må da være $\frac{1{,}60\ \mathrm{m}}{2} = 0{,}80$ m. Med vinkelmåler måles det, at snoren danner 80° med vandret, og vi antager også, at der er tale om en jævn cirkelbevægelse. Cirklens radius r må da være

$$r = 0{,}80\ \mathrm{m} \cdot \sin(80^\circ)$$

Altså må den resulterende kraft $\overrightarrow{\mathbf{F}_c}$ have retning vandret mod centrum. Siden $\overrightarrow{\mathbf{F}_c} = \overrightarrow{\mathbf{F}_N} + \overrightarrow{\mathbf{F}_t}$, så må $\overrightarrow{\mathbf{F}_N}$'s komposant i y-retningen være lige stor og modsatrettet $\overrightarrow{\mathbf{F}_t}$. Ved at betragte en retvinklet trekant er det nemt at se, at

$$|\overrightarrow{\mathbf{F}_c}| = |\overrightarrow{\mathbf{F}_t}| \cdot \tan(80^\circ)$$

Hvis vi kombinerer dette med et andet udtryk for centripetalkraften får vi , at

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathbf{F}_c}| = m \cdot \frac{v^2}{r} &\iff v = \sqrt{\frac{r \cdot |\overrightarrow{\mathbf{F}_c}|}{m}} \\ &\iff v = \sqrt{\frac{r \cdot |\overrightarrow{\mathbf{F}_t}| \cdot \tan(80^\circ)}{m}} \\ &\iff v = \sqrt{r \cdot g \cdot \tan(80^\circ)} \end{aligned}$$

Vi regner nu farten ud.

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{r \cdot g \cdot \tan(80^\circ)} \\ &= \sqrt{0{,}80\ \mathrm{m} \cdot \sin(80^\circ) \cdot 9{,}82\ \mathrm{m/s}^2 \cdot \tan(80^\circ)} \\ &\approx 6{,}6\ \mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Tennisboldens fart i situationen på billedet er altså 6,6 m/s.