# Aflevering 38

**3.b mat A**

Kevin Zhou

1. januar 2025

## Opgave 1: Opgave 9 - Differentialligning

En funktion $f$ er løsning til differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 5y$$

og grafen for $f$ går gennem punktet $P = (1{,}3)$.

***Løsning:***

**a.** Vi vil finde en forskrift for $f$. Siden der for en differentialligning af formen $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = k \cdot y$ gælder, at den har løsningerne $y = c \cdot e^{kx}$, så må en forskrift for $f$ være i formen

$$f(x) = c \cdot e^{5x}$$

Da $P = (1{,}3)$ tilhører grafen for $f$ så kan vi løse for $c$.

$$\begin{aligned} f(1) = 3 &\iff c \cdot e^{5 \cdot 1} = 3 \\ &\iff c = \frac{3}{e^5} \end{aligned}$$

En forskrift for $f$ er

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{e^5} \cdot e^{5x} \\ &= \frac{3 \cdot (e^5)^x}{e^5} \\ &= 3 \cdot e^{5 \cdot (x-1)} \end{aligned}$$

Altså er en forskrift for $f$

$$f(x) = 3 \cdot e^{5 \cdot (x-1)}$$

og en mulig definitionsmængde for $f$ må da være

$$Dm(f) = \mathbb{R}$$

## Opgave 2: Opgave 10 - Lineær model for æblevægt

En æbleavler har udtaget en stikprøve blandt årets æblehøst og målt vægt og rumfang af æblerne. Excel-arket i opgaven viser resultatet af målingerne. I en model beskrives sammenhængen ved

$$M(V) = a \cdot V + b,$$

hvor $M(V)$ betegner vægten (målt i gram) af et æble med et volumen på $V$ (målt i cm$^3$).

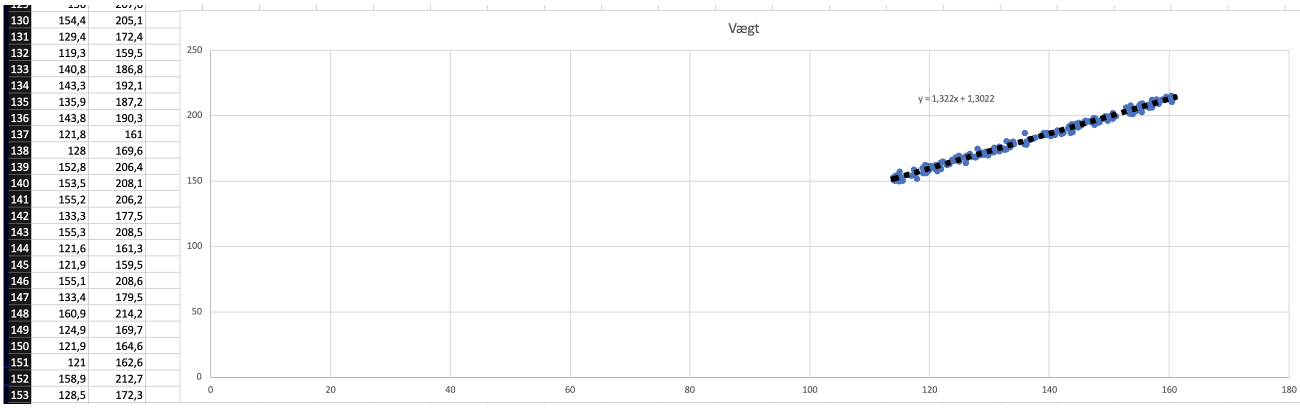
***Løsning:***

**a.** For at bestemme $a$ og $b$, laves en lineær regression laves i Excel, hvilket ses i fig. 1. Fra regressionen har vi, at

$$y = M(V) = a \cdot V + b = 1{,}322 \cdot V + 1{,}3022$$

Altså må $a$ og $b$ være

$$\begin{aligned} a &= 1{,}322 \\ b &= 1{,}3022 \end{aligned}$$



| | | |
|---|---|---|
| 130 | 154,4 | 205,1 |
| 131 | 129,4 | 172,4 |
| 132 | 119,3 | 159,5 |
| 133 | 140,8 | 186,8 |
| 134 | 143,3 | 192,1 |
| 135 | 135,9 | 187,2 |
| 136 | 143,8 | 190,3 |
| 137 | 121,8 | 161 |
| 138 | 128 | 169,6 |
| 139 | 152,8 | 206,4 |
| 140 | 153,5 | 208,1 |
| 141 | 155,2 | 206,2 |
| 142 | 133,3 | 177,5 |
| 143 | 155,3 | 208,5 |
| 144 | 121,6 | 161,3 |
| 145 | 121,9 | 159,5 |
| 146 | 155,1 | 208,6 |
| 147 | 133,4 | 179,5 |
| 148 | 160,9 | 214,2 |
| 149 | 124,9 | 169,7 |
| 150 | 121,9 | 164,6 |
| 151 | 121 | 162,6 |
| 152 | 158,9 | 212,7 |
| 153 | 128,5 | 172,3 |



Figur 1: Lineær regression lavet i Excel

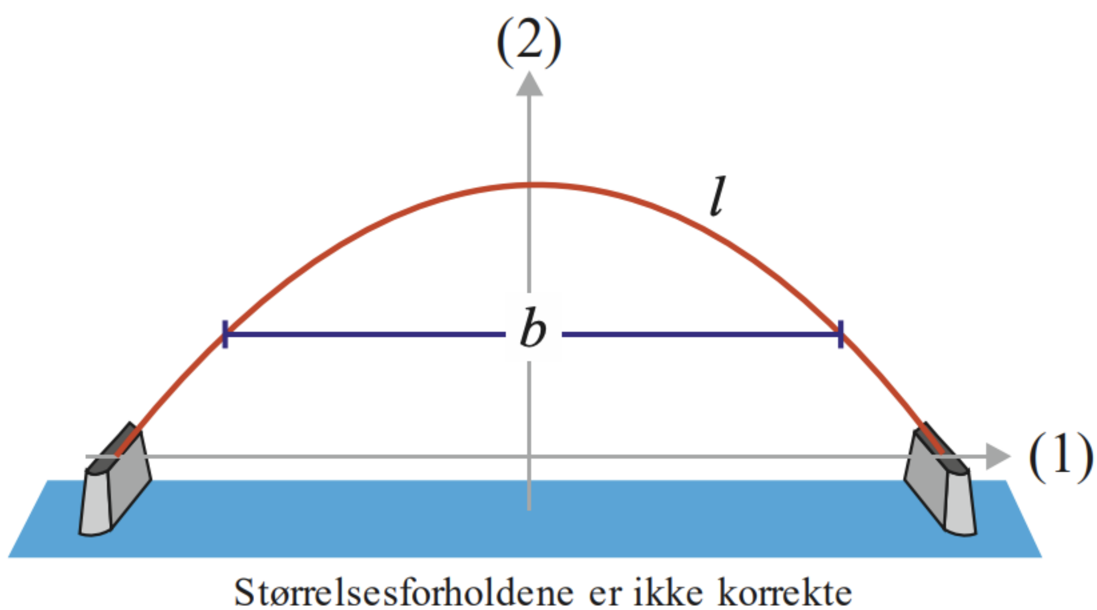
**Opgave 3: Opgave 12 - Model for bro**

Dronning Alexandrines Bro består af en række buer fastgjort på bropiller og en kørebane. I en model i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser kan den del af den midterste bue, der ligger over bropillerne, beskrives ved den positive del af grafen for

$$f(x) = -0{,}0104 \cdot x^2 + 41{,}7$$

I modellen er kørebanen vandret og ligger 26 meter over bropillerne.

Betegnelserne for bredde og længde illustreres i fig. 2.





Figur 2: Bredden $b$ og længden $l$ illustreret

***Løsning:***

**a.** For at finde bredden $b$ af buen langs kørebanen, bestemmer vi først de to $x$-værdier, hvor $f(x) = 26$.

$$\begin{aligned} f(x) = 26 &\iff -0{,}0104 \cdot x^2 + 41{,}7 = 26 \\ &\iff 0{,}0104 \cdot x^2 = 15{,}7 \\ &\iff x = \sqrt{\frac{15{,}7}{0{,}0104}} \vee x = -\sqrt{\frac{15{,}7}{0{,}0104}} \end{aligned}$$

Bredden målt langs kørebanen må da være afstanden mellem disse.

$$\begin{aligned} b &= \left| \sqrt{\frac{15{,}7}{0{,}0104}} - \left(-\sqrt{\frac{15{,}7}{0{,}0104}}\right) \right| \\ &= 2 \cdot \sqrt{\frac{15{,}7}{0{,}0104}} \\ &\approx 77{,}7 \end{aligned}$$

Bredden af buen målt langs kørebanen er altså 77,7 m.

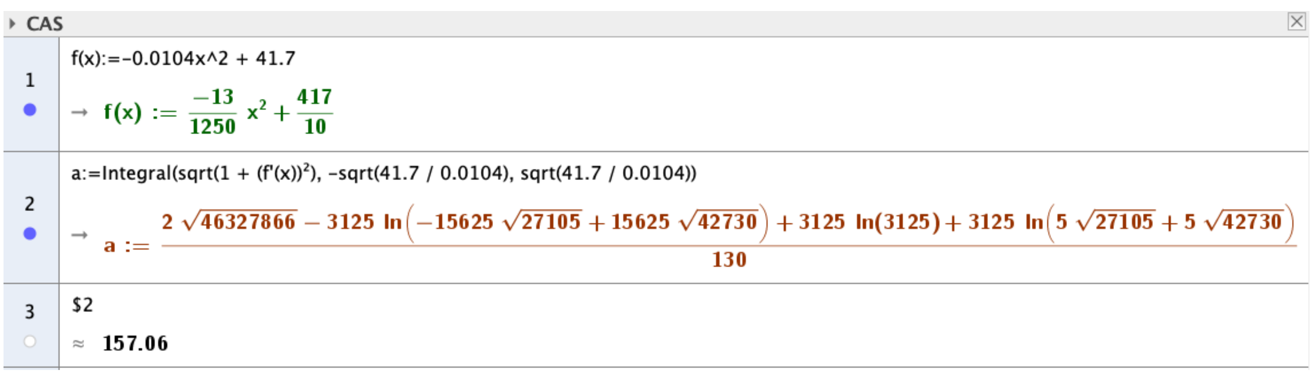
**b.** For at bestemme længden $l$ af buen fra bropille til bropille, finder vi først de to $x$-værdier, hvor $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff -0{,}0104 \cdot x^2 + 41{,}7 = 0 \\ &\iff x = \pm\sqrt{\frac{41{,}7}{0{,}0104}} \end{aligned}$$

Vi kan nu bestemme kurvelængden af grafen for $f$ mellem de to bropiller, hvilket gøres med CAS (se fig. 3).

$$\begin{aligned} l &= \int_{-\sqrt{\frac{41{,}7}{0{,}0104}}}^{\sqrt{\frac{41{,}7}{0{,}0104}}} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx \\ &= \int_{-\sqrt{\frac{41{,}7}{0{,}0104}}}^{\sqrt{\frac{41{,}7}{0{,}0104}}} \sqrt{1 + (-0{,}0208x)^2}\, dx \\ &\approx 157{,}06 \end{aligned}$$

Altså er længden af buen fra bropille til bropille 157,06 m ifølge modellen.




Figur 3: Kurvelængden udregnet med CAS

**Opgave 4: Opgave 13 - Bygningstag og funktion af to variable**

I en model kan taget af en bygning beskrives ved grafen for funktionen

$$f(x,y) = 0{,}88 \cdot y \cdot \sin(0{,}63x) + 2{,}2, \quad -7{,}5 \leq x \leq 7{,}5 \text{og} -2{,}5 \leq y \leq 2{,}5,$$

hvor $f(x,y)$ beskriver tagets højde over broen (målt i meter). I modellen er broen placeret i $xy$-planen.

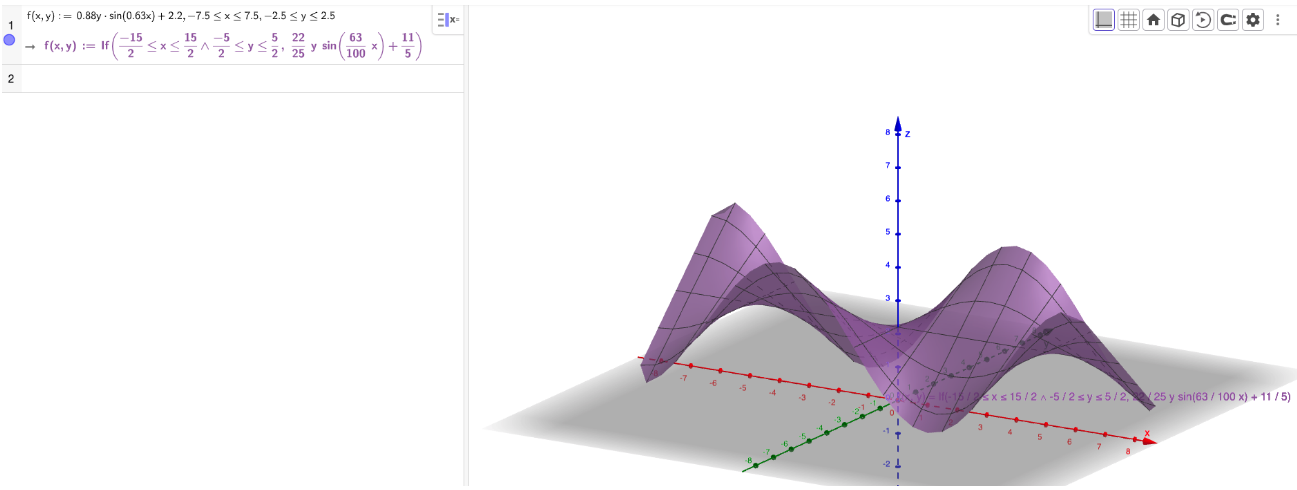
***Løsning:***

**a.** For at bestemme tagets højde over broen ved $x = 0$ og $y = 0$, beregner vi funktionens værdi $f(0{,}0)$.

$$\begin{aligned} f(0{,}0) &= 0{,}88 \cdot 0 \cdot \sin(0{,}63 \cdot 0) + 2{,}2 \\ &= 2{,}2 \end{aligned}$$

Når $x = 0$ og $y = 0$ er tagets højde over broen altså 2,2 m.

**b.** Grafen for $f$ tegnes i GeoGebra, og ses i fig. 4.




Figur 4: Grafen for $f$ tegnet i GeoGebra

Det oplyses, at afgrænsningen af taget mod syd kan beskrives ved snitkurven givet ved $g(x) = f(x{,}2.5)$.

**c.** For at bestemme tagets maksimale højde over broen mod syd, bestemmer vi først et udtryk for $g(x)$ udtrykt ved $x$.

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x{,}2.5) \\ &= 0{,}88 \cdot 2{,}5 \cdot \sin(0{,}63x) + 2{,}2 \\ &= 2{,}2 \cdot \sin(0{,}63x) + 2{,}2 \end{aligned}$$

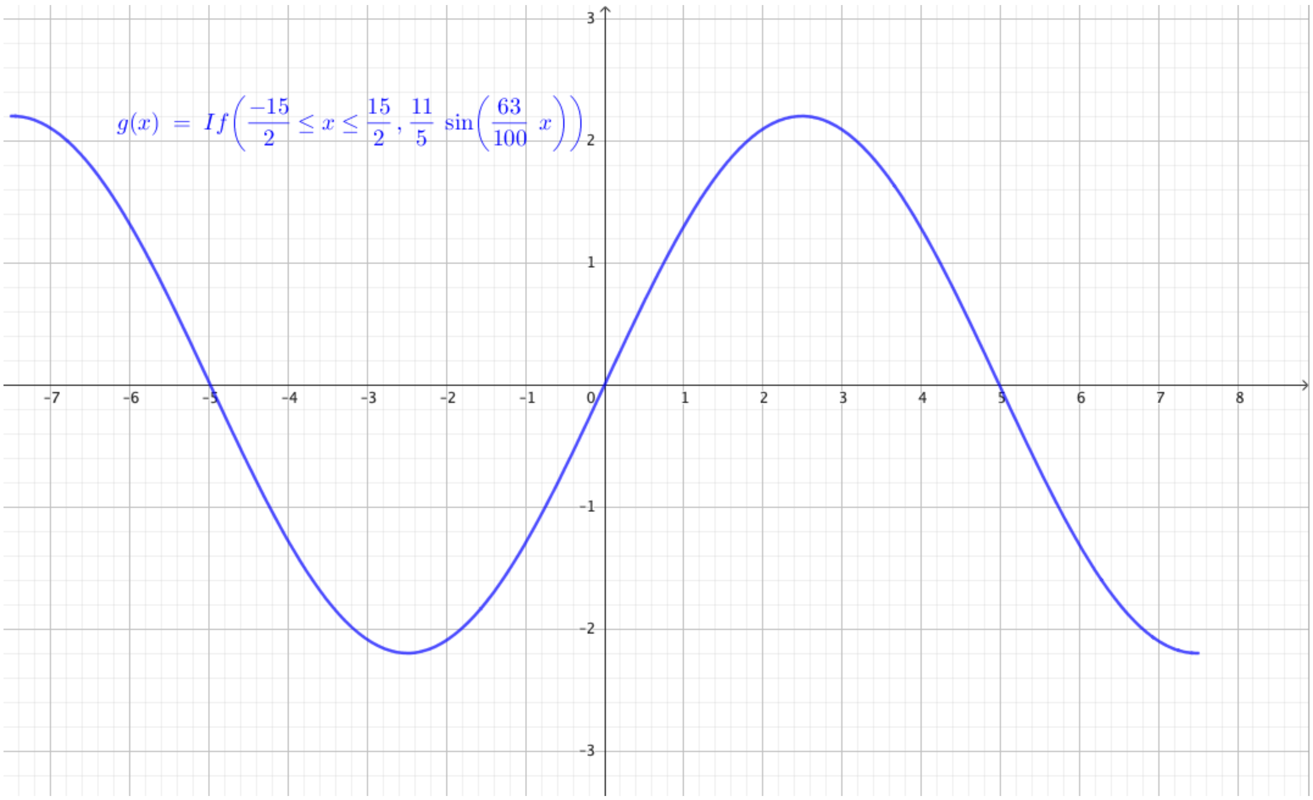
Der må gælde, at $Dm(g) = [-7{,}5; 7{,}5]$. For at finde ekstremumssteder for $g$, løses ligningen $g'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} g'(x) = 0 &\iff 2{,}2 \cdot 0{,}63 \cdot \cos(0{,}63x) = 0 \\ &\iff \cos(0{,}63x) = 0 \\ &\implies 0{,}63x = \frac{\pi}{2} \cdot (2k - 1), \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x = \frac{50\pi}{63} \cdot (2k - 1), \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Når definitionsmængden for $g$ betragtes, ses det, at de eneste mulige løsninger må være

$$x = \frac{-50\pi}{21} \lor x = \frac{-50\pi}{63} \lor x = \frac{50\pi}{63} \lor x = \frac{50\pi}{21}$$

Fra grafen for $g$ i fig. 5, er det dog tydeligt, at kun $x = \frac{-50\pi}{21}$ og $x = \frac{50\pi}{63}$ er maksimumssteder.




Figur 5: Grafen for $g$ tegnet i GeoGebra

Vi bestemmer nu funktionens værdi ved de to maksimumssteder. Da der for disse gælder, at $\cos(0{,}63x) = 0$, så må $\sin(0{,}63x) = 1$, og vi har da

$$\begin{aligned} g\left(\frac{-50\pi}{21}\right) &= g\left(\frac{50\pi}{63}\right) \\ &= 2{,}2 \cdot 1 + 2{,}2 \\ &= 4{,}4 \end{aligned}$$

Altså er tagets maksimale højde over broen mod syd 4,4 m.

**Opgave 5: Opgave 14 - Muserute og vektorfunktion**

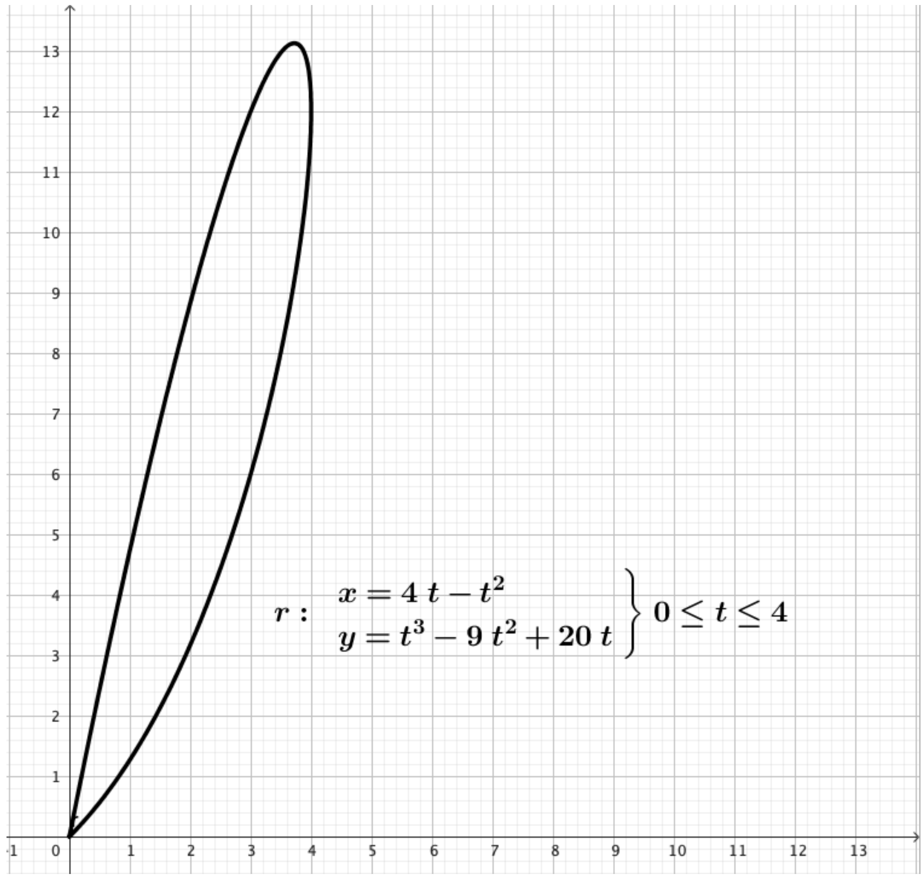
En mus kravler ud af sit musehul og går en tur langs en lukket rute. I en model kan ruten beskrives ved parameterkurven for vektorfunktionen $\vec{s}$ givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot t - t^2 \\ t^3 - 9 \cdot t^2 + 20 \cdot t \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 4,$$

hvor $(x(t),y(t))$ betegner musens position til tidspunktet $t$ (målt i minutter) i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser. Musehullet er placeret i punktet $(0{,}0)$.

***Løsning:***

**a.** Parameterkurven for vektorfunktionen $\vec{\mathbf{s}}$ tegnes i GeoGebra og ses i fig. 6.




Figur 6: Parameterkurve for $\vec{\mathbf{s}}$ tegnet i GeoGebra

**b.** For at bestemme $|\vec{\mathbf{s}}'(1)|$ finder vi først et udtryk for den afledede funktion for $s$.

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{s}}'(t) &= \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(4t - t^2\right) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^3 - 9t^2 + 20t\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2t + 4 \\ 3t^2 - 18t + 20 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vi kan nu beregne $|\vec{\mathbf{s}}'(1)|$.

$$\begin{aligned} |\vec{\mathbf{s}}'(1)| &= \left|\begin{pmatrix} -2 \cdot 1 + 4 \\ 3 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 + 20 \end{pmatrix}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right| \\ &= \sqrt{2^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{29} \\ &\approx 5{,}39 \end{aligned}$$

Længden af den afledede funktion for stedvektoren $\vec{\mathbf{s}}$ må være musens fart. Altså har vi bestemt musens fart til tidspunktet $t = 1$. Musens fart efter 1 minut er altså 5,39 m/min.

**c.** For at bestemme tidspunktet, hvor musen er længst væk fra hullet, finder vi først et udtryk for musens afstand fra hullet. Siden musehullet er i (0,0), så må afstanden være længden af stedvektoren.

$$\begin{aligned}
|\vec{\mathbf{s}}(t)| &= \left|\begin{pmatrix} 4t-t^2 \\ t^3-9t^2+20t \end{pmatrix}\right| \\
&= \sqrt{\left(4t-t^2\right)^2+\left(t^3-9t^2+20t\right)^2} \\
&= \sqrt{16t^2+t^4-8t^3+t^6-18\,t^5+121\,t^4-360\,t^3+400\,t^2} \\
&= \sqrt{t^6-18t^5+122t^4-368t^3+416t^2}
\end{aligned}$$

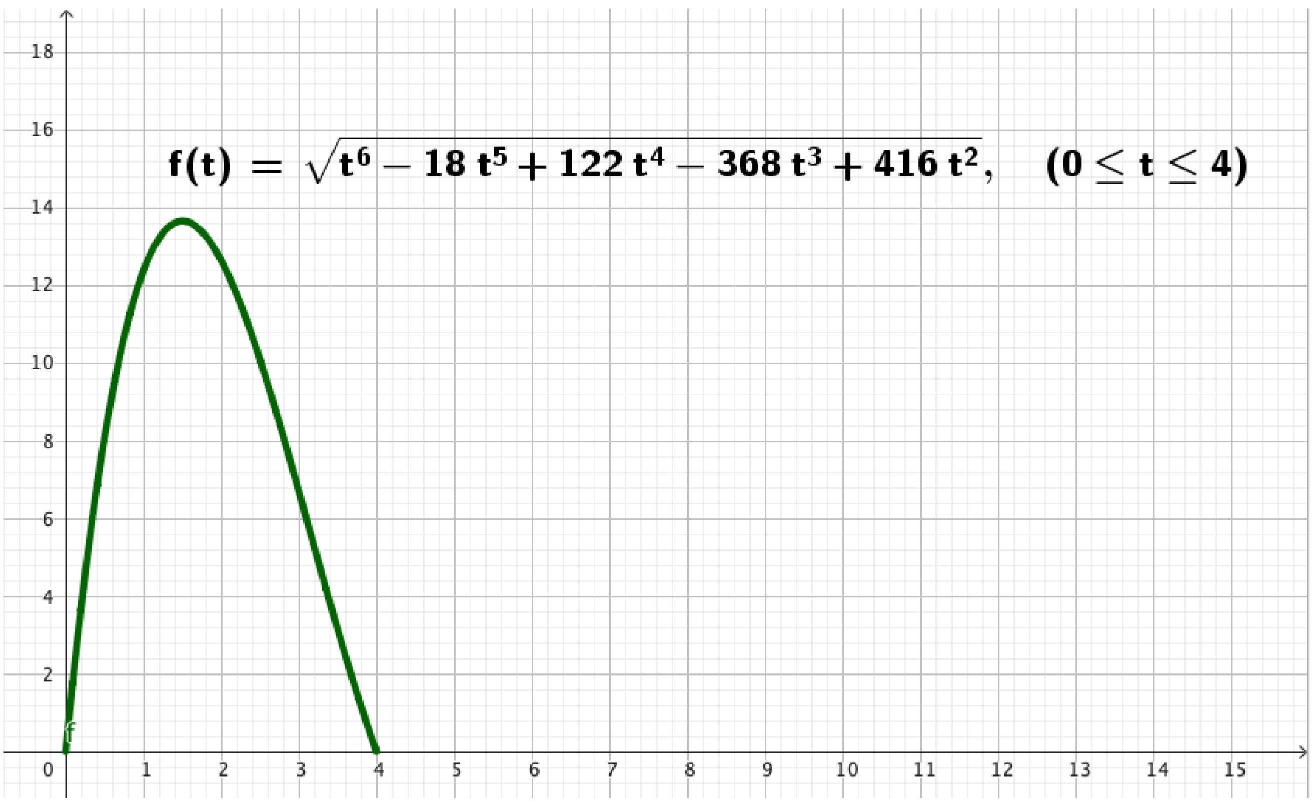
For at finde ekstremumssteder, differentierer vi udtrykket med kædereglen, sætter lig nul og løser for $t$. Bemærk, at afstanden ikke kan være 0 her, da vi så vil have 0 i nævneren.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{t^6-18t^5+122t^4-368t^3+416t^2}=0 &\iff \frac{3t^5-45t^4+244t^3-552t^2+416t}{\sqrt{t^6-18t^5+122t^4-368t^3+416t^2}}=0 \\
&\implies t\cdot\left(3t^4-45t^3+244t^2-552t+416\right)=0
\end{aligned}$$

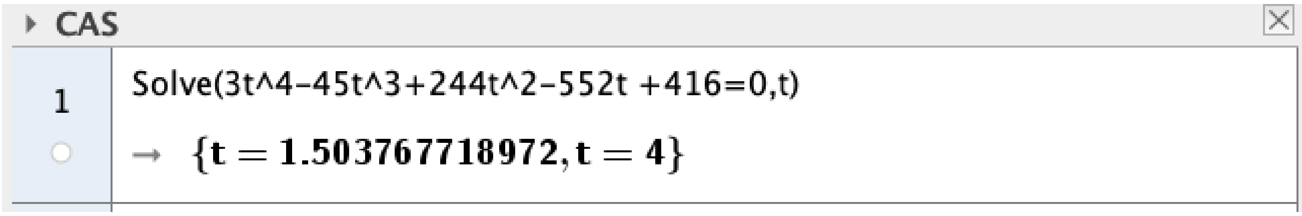
Bemærk, at $t \neq 0$ her, da vi så dividerer med 0. Vi har da

$$3t^4-45t^3+244t^2-552t+416=0 \iff t\approx 1{,}504 \vee t=4$$

som løses med CAS (fig. 8). Dog er $t \approx 1{,}504$ den eneste løsning, da $t \neq 4$ (for ellers divideres med 0). Vi mangler nu blot at redegøre for, at $t \approx 1{,}504$ er et maksimumssted. Det fremgår tydeligt ved grafen for $|\vec{\mathbf{s}}(t)|$, der ses i fig. 7. Altså er musen længst væk fra hullet efter 1,504 minutter.




Figur 7: Grafen for $|\vec{\mathbf{s}}(t)|$




Figur 8: Fjerdegradsligningen løst med CAS