Aflevering 31
3.b mat A

Kevin Zhou

24. august 2024

Opgave 1

En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x) = 2e^x + x$$

a. Gør rede for, at f er en løsning til differentialligningen $y' = y - x + 1$.

b. Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0{,}2)$.

Løsning:
a. Vi ser, at

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2e^x + x) \\ &= 2e^x + 1 \\ &= 2e^x + x - x + 1 \\ &= f(x) - x + 1 \end{aligned}$$

hvilket var, hvad vi skulle.

b. Ligningen for tangenten til grafen for f i punktet (0,2) må være

$$\begin{aligned} y &= f'(0) \cdot (x - 0) + f(0) \\ &= (2e^0 + 1) \cdot x + 2e^0 + 0 \\ &= 3x + 2 \end{aligned}$$

Ligningen for tangenten til grafen for f i punktet (0,2) er altså

$$y = 3x + 2$$

Opgave 2

Om en lineær funktion f oplyses det, at

$$f(0) = 3 \text{ og } \int_0^4 f(x)\,dx = 24$$

Figuren i opgavebeskrivelsen viser grafen for f.

a. Bestem en forskrift for f.

Løsning:
a. Da f er lineær, må dens forskrift være af formen

$$f(x) = ax + b$$

Siden vi har $f(0) = 3$, så må

$$b = 3$$

Vi finder nu a.

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(x)\,dx = 24 &\iff \int_0^4 (ax + 3)\,dx = 24 \\ &\iff \frac{a}{2}\left[x^2\right]_0^4 + 3\left[x\right]_0^4 = 24 \\ &\iff 8a + 12 = 24 \\ &\iff a = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Altså må forskriften for f være

$$f(x) = \frac{3}{2}x + 3$$

Opgave 3

Bestem integralet

$$\int_0^1 \left(8x^3 + e^x\right)\, dx,$$

og giv en geometrisk tolkning af resultatet.

Løsning:
Vi regner integralet.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(8x^3 + e^x\right)\, dx &= 2\left[x^4\right]_0^1 + \left[e^x\right]_0^1 \\ &= 2 + e - 1 \\ &= e + 1\end{aligned}$$

Lad f være en funktion givet ved $f(x) = 8x^3 + e^x$. Det er klart, at $x \in [0;1] \implies f(x) \geq 0$. En geometrisk tolkning af ovenstående resultat ville så være arealet af området mellem grafen for f og førsteaksen.

Opgave 4

En funktion f er givet ved

$$f(x) = k^2 - x^2, \quad k > 0.$$

Grafen for f afgrænser i første kvadrant sammen med de to koordinatakser en punktmængde M, der har et areal. På figuren ses grafen for f, punktmængden M samt et rektangel $OPQR$ i første kvadrant, hvor O er origo, P er grafens skæring med førsteaksen, og R er grafens skæring med andenaksen.

a. Bestem koordinatsættet til punktet P udtrykt ved k.

b. Vis, at arealet af M udgør $\frac{2}{3}$ af arealet af rektanglet $OPQR$.

Løsning:
a. Da P er på førsteaksen, så må y-værdien være 0. Siden P tilhører grafen for f og $x > 0$, så har vi, at

$$\begin{aligned}f(x) = k^2 - x^2 \wedge x > 0 \wedge k > 0 &\implies 0 = k^2 - x^2 \wedge k > 0 \wedge x > 0 \\ &\implies x = k\end{aligned}$$

Koordinatsættet til P er altså $(k{,}0)$.

b. Vi ser, at

$$f(0) = k^2 - 0^2 = k^2$$

Koordinatsættet til punktet R er derfor

$$R = (0{,}f(0)) = \left(0{,}k^2\right)$$

Således må arealet af $OPQR$ være

$$\begin{aligned}A(OPQR) &= k \cdot k^2 \\ &= k^3\end{aligned}$$

Siden f er ikke-negativ i intervallet $[0,k]$, så er arealet af M

$$\begin{aligned} A(M) &= \int_0^k f(x)\,dx \\ &= \int_0^k \left(k^2 - x^2\right)\,dx \\ &= \left[k^2 x\right]_0^k - \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^k \\ &= k^3 - \frac{1}{3}k^3 \\ &= \frac{2}{3}k^3 \\ &= \frac{2}{3}\cdot A(OPQR) \end{aligned}$$

hvilket var, hvad vi skulle vise.

Opgave 5

En funktion f er givet ved

$$f(x) = 3\cdot\sqrt{x-2} - x + 2.$$

a. Bestem funktionens nulpunkter.

Sammen med førsteaksen afgrænser grafen for f et område M i første kvadrant.

b. Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om førsteaksen.

Løsning:

a. Vi finder funktionens nulpunkter ved at løse ligningen $f(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff 3\cdot\sqrt{x-2} - x + 2 = 0 \\ &\iff \sqrt{x-2} = \frac{x-2}{3} \\ &\iff x - 2 = \left(\frac{x-2}{3}\right)^2 \\ &\iff 9x - 18 = x^2 + 4 - 4x \\ &\iff x^2 - 13x + 22 = 0 \\ &\iff (x-11)\cdot(x-2) = 0 \\ &\iff x = 11 \vee x = 2 \end{aligned}$$

Vi har bestemt funktionens nulpunkter til at være 2 og 11.

b. Siden der gælder, at $x \in [2, 11] \implies f(x) \geq 0$, så må rumfanget af omdrejningslegemet, der fremkommer, når M drejes om førsteaksen være

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_2^{11} f(x)^2\,dx \\ &= \pi\int_2^{11} \left(3\cdot\sqrt{x-2} - x + 2\right)^2\,dx \end{aligned}$$

Vi laver så en substitution med $t = \sqrt{x-2}$ og med kædereglen har vi $dt = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}\,dx$. Nedre og øvre grænse er henholdsvis $\sqrt{2-2}=0$ og $\sqrt{11-2}=3$. Bemærk, at $-x+2=-t^2$:

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^3 2t\cdot\left(3t-t^2\right)^2\,dt \\ &= 2\pi\int_0^3 t\cdot\left(9t^2+t^4-6t^3\right)\,dt \\ &= 2\pi\int_0^3 \left(9t^3+t^5-6t^4\right)\,dt \\ &= 2\pi\cdot\left(\frac{9}{4}\left[t^4\right]_0^3+\frac{1}{6}\left[t^6\right]_0^3-\frac{6}{5}\left[t^5\right]_0^3\right) \\ &= 2\pi\cdot\left(\frac{3^6}{4}+\frac{3^5}{2}-\frac{2\cdot 3^6}{5}\right) \\ &= \frac{243}{10}\pi \end{aligned}$$

Rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes $360°$ om førsteaksen er altså $\frac{243}{10}\pi$.

Opgave 6

Under den kolde krig anvendtes en bestemt type mellemdistanceraketter med en rækkevidde $|PQ|$ på 2400 km og en maksimal højde på 560 km. Rakettens bane kan beskrives som graf for et andengradspolynomium

$$f(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

hvor x er den vandrette afstand fra affyringsstedet (målt i km), og $f(x)$ er rakettens højde over jorden (målt i km).

a. Bestem en forskrift for f.

b. Bestem kurvelængden af grafen fra P til Q.

Løsning:

a. Vi ser først, at punktet $P(0,0)$ tilhører grafen for f. Der gælder altså

$$f(0)=c=0$$

Siden grafen for f er en parabel med toppunkt ved $x=1200$, så har vi, at

$$f'(1200)=0=a\cdot 2\cdot 1200+b \implies b=-2400a$$

Fra toppunktet har vi

$$f(1200)=560=a\cdot 1200^2+1200b$$

Vi har da to ligninger med to ubekendte, som vi løser

$$\begin{aligned} 1200^2a+1200\cdot(-2400a)=560 &\iff -1200^2a=560 \\ &\iff a=-\frac{7}{18000} \end{aligned}$$

Vi kan nu regne b.

$$\begin{aligned} b &= -2400a \\ &= \frac{2400\cdot 7}{18000} \\ &= \frac{14}{15} \end{aligned}$$

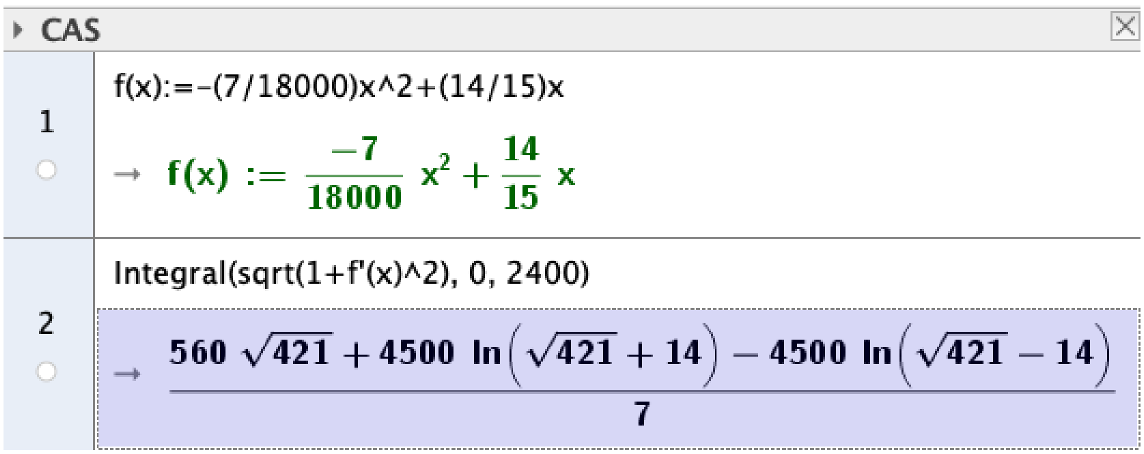
En forskrift for f er altså

$$f(x) = -\frac{7}{18000}x^2 + \frac{14}{15}x$$

b. Siden f er differentiabel og f' er kontinuert, så må kurvelængden af grafen fra P til Q, som vi løser med CAS (se fig. 1), være

$$\begin{aligned}\int_0^{2400} 1 + f'(x)^2\,dx &= \int_0^{2400} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{7}{18000}x^2 + \frac{14}{15}x\right)\right)^2}\,dx \\ &= \frac{560\,\sqrt{421} + 4500\,\ln\left(\sqrt{421}+14\right) - 4500\,\ln\left(\sqrt{421}-14\right)}{7} \\ &\approx 2713{,}03\end{aligned}$$

Kurvelængden for grafen for f fra P til Q er altså 2713,03.



Figur 1: Integralet løst med CAS