Aflevering 29

2.b mat A

Kevin Zhou

23. april 2024

Bedømmelseskriterier:

- Redegørelse og dokumentation for metode

- Figurer, grafer og andre illustrationer

- Notation og layout

- Formidling og forklaring

Opgave 1

En vektorfunktion $\vec{\mathbf{r}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ er givet ved

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} 2t^3 - t^2 \\ 2t^2 - 2t \end{pmatrix}$$

a. Bestem en parameterfremstilling for tangenten til parameterkurven for $\vec{\mathbf{r}}$ i punktet $P(0{,}4)$.

Løsning:

a. Vi løser først ligningen $x(t) = 0$ mht. t for at finde t-værdien, når $\vec{\mathbf{r}}(t) = P$.

$$\begin{aligned} x(t) = 0 &\iff 2t^3 - t^2 = 0 \\ &\iff t^2 \cdot (2t - 1) = 0 \\ &\iff t = 0 \lor t = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vi indsætter disse værdier i $y(t)$.

$$\begin{aligned} t = 0 &\implies y(t) = 2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0 \\ t = \frac{1}{2} &\implies y(t) = \frac{2}{4} - 1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ved indsættelse af disse værdier i $y(t)$ ses det, at ingen af y-værdierne er 4. Altså må det gælde, at $P \notin Vm(\vec{\mathbf{r}})$.

Opgave 2

En vektorfunktion $\vec{\mathbf{s}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ er givet ved

$$\vec{\mathbf{s}}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 2t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

Punktet $P(4{,}4)$ ligger på parameterkurven for $\vec{\mathbf{s}}$.

a. Bestem parameterværdien t hørende til P.

b. Gør rede for, at linjen $l : 2x - 5y + 12 = 0$ er en tangent til parameterkurven for $\vec{\mathbf{s}}$ i punktet P.

Løsning:

a. Vi løser da først ligningen $y(t) = 4$.

$$t^2 = 4 \iff t = 2 \lor t = -2$$

Vi regner $x(t)$ med disse t-værdier.

$$\begin{aligned} x(2) &= 2^3 - 2 \cdot 2 = 4 \\ x(-2) &= (-2)^3 + 2 \cdot 2 = -4 \neq 4 \end{aligned}$$

Altså har vi $\vec{\mathbf{s}}(2) = (4{,}4)$. Parameterværdien hørende til P må da være 2.

b. Vi finder først den afledede funktion for $\vec{\mathbf{s}}$.

$$\vec{\mathbf{s}}'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 - 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vi finder retningsvektoren for tangenten i punktet P, der blot er værdien af funktionen $\vec{\mathbf{s}}'$ når $t = 2$.

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{s}}'(2) &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^2 - 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Imidlertid aflæser vi fra linjens ligning, at $\vec{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ er en normalvektor til l. Siden der gælder, at

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{s}}'(2) &= 10 \cdot 2 - 2 \cdot 5 \\ &= 0 \end{aligned}$$

så må l være parallel med tangenten til parameterkurven i punktet P (for retningsvektoren er ortogonal med normalvektoren). Vi mangler nu blot at vise, at $P \in l$.

Da ser vi, at

$$2 \cdot 4 - 5 \cdot 4 + 12 = 0$$

og P må være et element i l. Altså har vi nu vist, at $l : 2x - 5y + 12 = 0$ er en tangent til parameterkurven for $\vec{\mathbf{s}}$ i punktet P.

Opgave 3

En vektorfunktion $\vec{\mathbf{s}} : [-2{,}5; 2{,}5] \to \mathbb{R}^2$ er givet ved

$$\vec{\mathbf{s}}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 3t \\ -t^4 + 4t^2 \end{pmatrix}$$

Parameterkurven for $\vec{\mathbf{s}}$ har tre dobbeltpunkter. Det oplyses, at et af dobbeltpunkterne har t-værdien

$$t = \frac{1}{2}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$$

a. Bestem koordinatsættet til dette dobbeltpunkt.

Det oplyses, at der er et dobbeltpunkt i $P(-\sqrt{2}{,}1)$.

b. Bestem t-værdierne hørende til dette dobbeltpunkt.

Det oplyses, at det sidste dobbeltpunkt ligger på andenaksen.

c. Bestem t-værdierne hørende til dette dobbeltpunkt.

Løsning:

a. Vi finder koordinatsættet til dette punkt ved at regne $\vec{\mathbf{s}}(t)$.

$$\vec{\mathbf{s}}\left(\frac{1}{2}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Altså er koordinatsættet til dette dobbeltpunkt $\left(\frac{1}{8}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right), 1\right)$.

b. Med hensyn til dette dobbeltpunkt har vi da følgende ligning, der løses med CAS (se fig. 1).

$$t^3 - 3t = -\sqrt{2} \wedge -t^4 + 4t^2 = 1 \implies t = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \vee t = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$$

Altså er t-værdierne hørende til dette dobbeltpunkt $\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$ og $\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$.

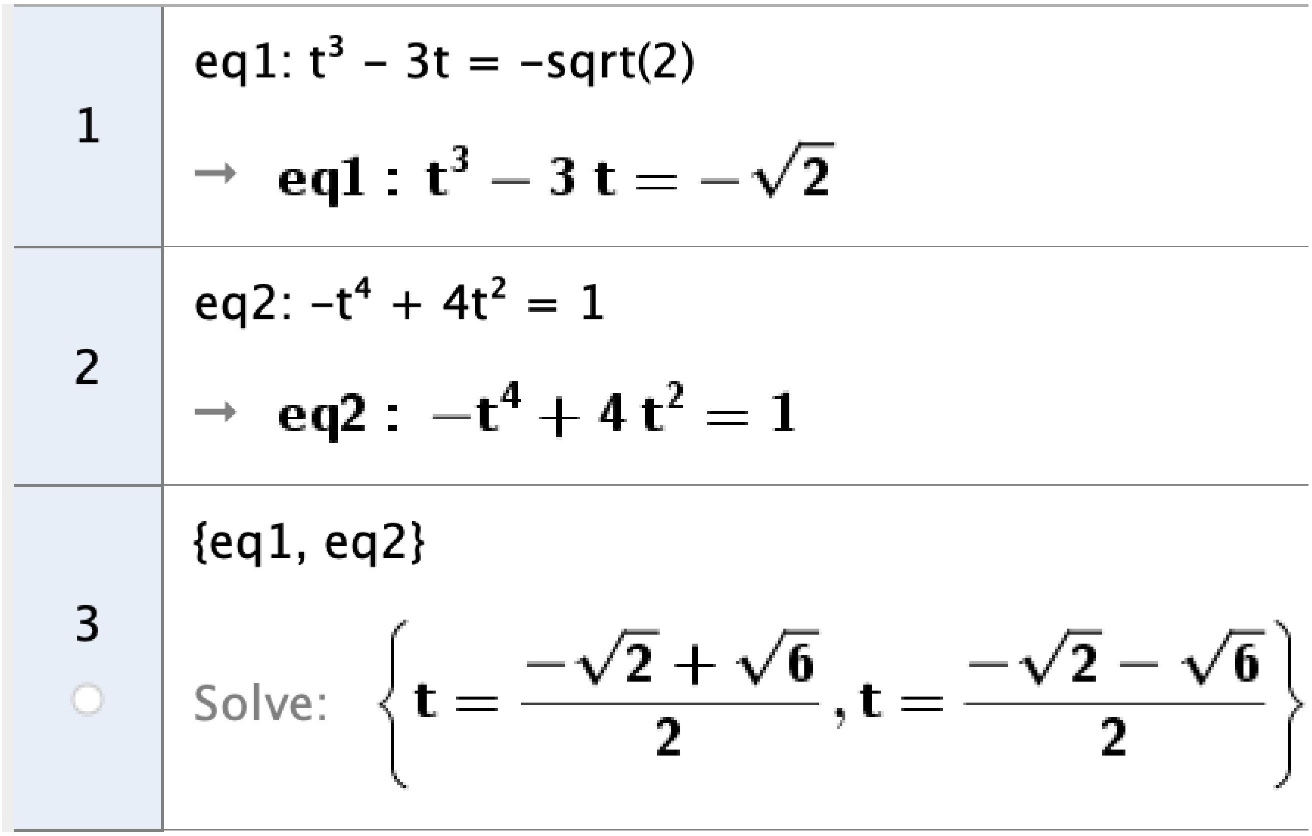
c. Siden dobbeltpunktet ligger på andenaksen, så må $x(t) = 0$. Vi løser denne ligning med hensyn til t.

$$\begin{aligned} t^3 - 3t = 0 &\iff t(t^2 - 3) = 0 \\ &\iff t = 0 \vee t = \sqrt{3} \vee t = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

For vektorfunktionen har vi at $y(t) = -t^4 + 4t^2$. Det er da nemt at se, at

$$y(\sqrt{3}) = y(-\sqrt{3}) \neq y(0)$$

Altså må t-værdierne hørende til dobbeltpunktet på andenaksen være $\sqrt{3}$ og $-\sqrt{3}$.



Figur 1: Ligningssystemet løses med CAS