Aflevering 21
2.b mat A

Kevin Zhou

December 2023

Bedømmelseskriterier:

- Redegørelse og dokumentation for metode
- Figurer, grafer og andre illustrationer
- Notation og layout
- Formidling og forklaring

Opgave 1

Funktionen $f : [0; 2\pi[\to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x) = \sin(x)$$

a. Tegn grafen for f.

b. Løs ligningen

$$\sin(x) = \frac{1}{4}, \quad 0 \leq x < 2\pi$$

Løsning:
a. Grafen for f ses i fig. 1.

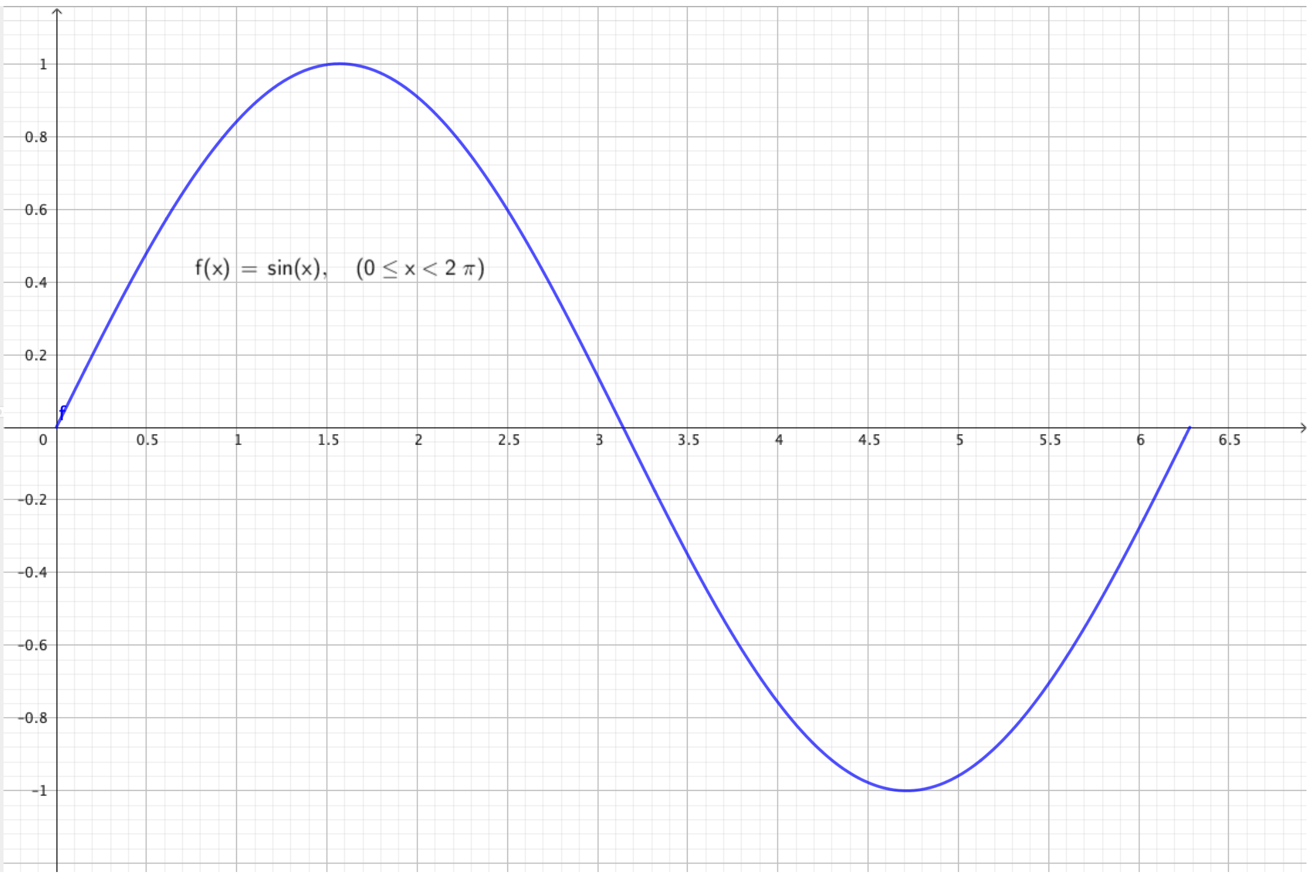

Figure 1: Grafen for f

b. Ligningen løses ved hjælp af lommeregneren.

$$\sin(x) = \frac{1}{4} \wedge 0 \leq x < 2\pi \iff x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \vee x = \pi - \sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$$

Opgave 2

Ved en bestemt infektion er antallet af bakterier hos en inficeret person givet ved funktionen

$$M(t) = 3{,}2 \cdot 10^5 + 7{,}8 \cdot 10^5 \cdot e^{0{,}154t}$$

hvor M er antallet af bakterier og t er tiden målt i timer.

a. Bestem $M'(18)$, og beskriv hvad dette tal fortæller om udviklingen i antallet af bakterier.

Løsning:
a. Vi finder den afledede funktion med kædereglen.

$$\begin{aligned} M'(t) &= 0{,}154 \cdot 7{,}8 \cdot 10^5 \cdot e^{0{,}154t} \\ &= 1{,}2012 \cdot 10^5 \cdot e^{0{,}154t} \end{aligned}$$

Vi kan nu tage den aflede funktion for M af 18.

$$\begin{aligned} M'(18) &= 1{,}2012 \cdot 10^5 \cdot e^{0{,}154 \cdot 18} \\ &\approx 1{,}92 \cdot 10^6 \end{aligned}$$

Dette tal fortæller, at væksthastigheden af bakterierne efter 18 timer er $1{,}92 \cdot 10^6$ bakterier per time.

Opgave 3

I en model for temperaturen som funktion af tiden i en bestemt by i løbet af et bestemt døgn er temperaturen $f(t)$ målt i grader Celsius til tiden t målt i antal timer efter midnat givet ved

$$f(t) = 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{5\pi}{6}\right) + 10,\ 0 \leq t \leq 24$$

a. Tegn grafen for f og bestem temperaturen klokken 7 om morgenen.

b. Bestem de tidspunkter på døgnet, hvor temperaturen er 12 grader Celsius.

c. Bestem den maksimale temperatur i løbet af døgnet.

d. Bestem det tidspunkt på døgnet, hvor temperaturen er maksimal.

e. Bestem $f'(18)$ og giv en fortolkning af dette tal.

f. Bestem det tidspunkt på døgnet, hvor temperaturen stiger mest.

Løsning:
a. Grafen for f ses i fig. 2. Vi bruger modellen til at finde temperaturen klokken 7.

$$\begin{aligned} f(7) &= 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot 7 - \frac{5\pi}{6}\right) + 10 \\ &\approx 6{,}46 \end{aligned}$$

Altså er temperaturen klokken 7 ifølge modellen 6,46 °C.

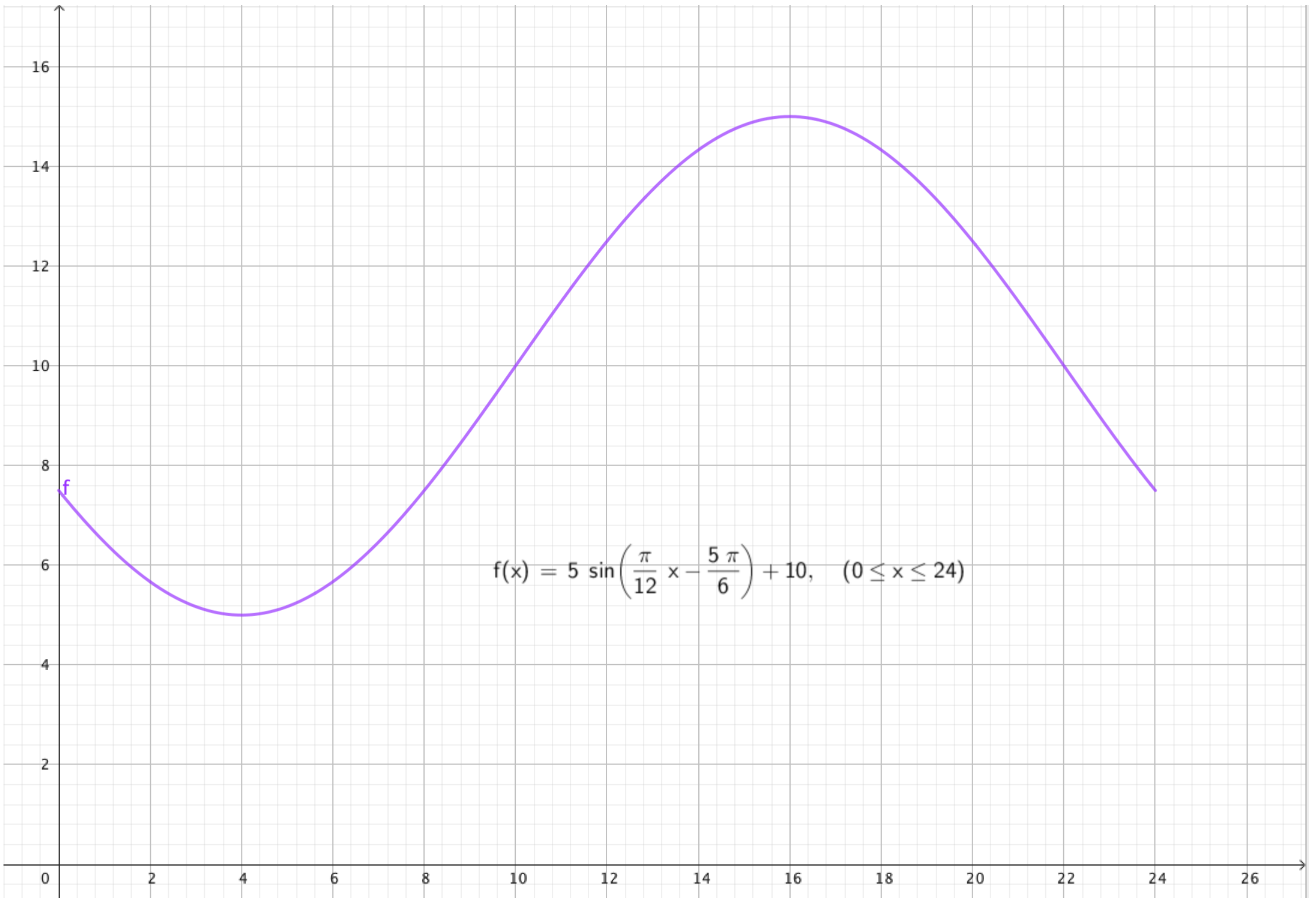

Figure 2: Grafen for f tegnet i GeoGebra. Bemærk at variablen hedder x i stedet for t her.

b. Vi opstiller en ligning og løser den med hensyn til x.

$$\begin{aligned} f(t) = 12 \implies 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{5\pi}{6}\right) + 10 = 12 \\ \iff \sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{2}{5} \\ \iff \frac{t}{2}\pi - 5\pi = 6 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) \\ \iff t = \frac{12 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{2}{5}\right)}{\pi} + 10 \\ \implies t \approx 11{,}6 \vee t \approx 20{,}4 \end{aligned}$$

Altså må temperaturen være 12 °C når tiden er enten klokken 11:36 eller klokken 20:24.

c. Vi finder først den afledede funktion med kædereglen.

$$\begin{aligned} f'(t) &= 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{5\pi}{6}\right) \cdot \frac{\pi}{12} \\ &= -\frac{5}{12} \cdot \pi \cdot \cos\left(\frac{1}{12}\pi \cdot (2+t)\right) \end{aligned}$$

Vi sætter dette udtryk lig med 0 og løser for t.

$$\begin{aligned} -\frac{5}{12} \cdot \pi \cdot \cos\left(\frac{1}{12}\pi \cdot (2+t)\right) = 0 &\iff \cos\left(\frac{1}{12}\pi \cdot (2+t)\right) = 0 \\ &\iff t = \left(\cos^{-1}(0) + \pi n\right) \cdot \frac{12}{\pi} - 2, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Dog, siden $t \in Dm(f)$, så må der gælde, at

$$f'(t) = 0 \implies t = 4 \vee t = 16$$

Vi finder nu den dobbeltafledede funktion for f med kædereglen igen.

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{5}{12}\cdot\pi\cdot\cos\left(\frac{1}{12}\pi\cdot(2+t)\right)\right) \\ &= -\frac{5}{12}\pi\cdot\left(-\sin\left(\frac{1}{12}\pi\cdot(2+t)\right)\right)\cdot\frac{1}{12}\pi \\ &= \frac{5}{144}\pi^2\cdot\sin\left(\frac{1}{12}\pi\cdot(2+t)\right) \end{aligned}$$

For at se, om 4 og 16 er maksimumssteder, så tager vi den dobbeltafledede funktion af dem. Vi får da, at

$$f''(4) \approx 0{,}34 > 0$$
$$f''(16) \approx -0{,}34 < 0$$

Altså må 16 være et maksimumssted. Vi regner temperaturen ud, når $t = 16$.

$$f(16) = 5\cdot\sin\left(\frac{8\pi}{6}-\frac{5\pi}{6}\right) + 10 = 15$$

Dette må være den maksimale temperatur, da temperaturen ikke er højere i endepunkterne, hvilket nemt kan tjekkes af læseren. Altså er den maksimale temperatur i løbet af døgnet 15 °C.

d. Fra **c.** får vi, at temperaturen er maksimal, når klokken er 16:00.

e. Vi har den aflede funktion for f fra **c.** og tager den af 18.

$$\begin{aligned} f'(18) &= -\frac{5}{12}\cdot\pi\cdot\cos\left(\frac{1}{12}\pi\cdot(2+18)\right) \\ &= -\frac{5}{12}\cdot\pi\cdot\frac{1}{2} \\ &= -\frac{5}{24}\pi \end{aligned}$$

Dette tal fortæller da, at temperaturen til tidspunktet $t = 18$ aftager med $\frac{5}{24}\pi$ °C per time.

f. Vi løser da ligningen $f''(t) = 0$ med hensyn til t.

$$\begin{aligned} \frac{5}{144}\pi^2\cdot\sin\left(\frac{1}{12}\pi\cdot(2+t)\right) = 0 &\iff \sin\left(\frac{1}{12}\pi\cdot(2+t)\right) = 0 \\ &\iff t = \left(\sin^{-1}(0)+\pi n\right)\cdot\frac{12}{\pi} - 2, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Siden $t \in Dm(f)$, så må der gælde, at

$$f''(t) = 0 \implies t = 10 \vee t = 22$$

Vi hævder, at disse er ekstremumssteder, hvilket nemt kan tjekkes af læseren vha. den triple-afledede funktion for f. Altså er stiger temperaturen mest klokken 10:00 og 22:00.

Opgave 4: B

Figuren er et lodret snit $ABCD$ gennem en kanal, hvis tværsnit har form som et trapez. Arealet af kanalens tværsnit er en funktion T af vinklen v, hvor v måles i radianer og $0 < v \leq \frac{\pi}{2}$.

a. Gør rede for, at

$$T(v) = 8\sin v + 4\sin v\cos v$$

og bestem v, så arealet af tværsnittet bliver størst muligt.

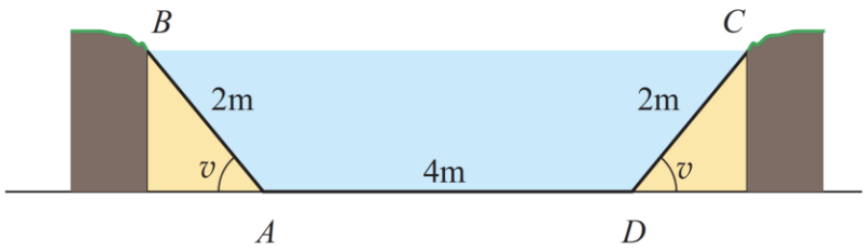

Figure 3: Tværsnit af kanalen

Løsning:
a. Lad h betegne den lodrette side af de to retvinklede trekanter, og lad x betegne længden af den vandrette side. Så må der da gælde, at

$$\begin{aligned} h &= 2 \cdot \sin v \\ x &= 2 \cdot \cos v \end{aligned}$$

Arealet af trapezen må være arealet af den store rektangel med de to treanters arealer trukket fra:

$$\begin{aligned} T(v) &= (4+2x) \cdot h - hx \\ &= 4h + hx \\ &= 8\sin v + 4 \sin v \cos v \end{aligned}$$

hvilket var, hvad vi skulle vise.

Vi finder nu den aflede funktion for T med hensyn til v med produktreglen og sætter dette udtryk lig med 0 og løser for v.

$$\begin{aligned} T'(v) = 8\cos v + 4\left(\cos^2 v - \sin^2 v\right) &= 0 \\ \implies 2\cos v + 2\cos^2 v - 1 &= 0 \\ \iff \frac{1}{4} + \cos v + \cos^2 v &= \frac{3}{4} \\ \iff \cos v + \frac{1}{2} &= \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \iff v &= \cos^{-1}\left(\pm\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Dog, siden $0 < v \leq \frac{\pi}{2}$, så må det gælde, at

$$T'(v) = 0 \implies v = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) \vee v = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

Vi finder nu den dobbeltafledede funktion for T med hensyn til v med produktreglen.

$$\begin{aligned} T''(v) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left(2\cos v + 2\cos^2 v - 1\right) \\ &= -2\sin v - 4\cos v \sin v \\ &= -2\sin v\,(2\cos v + 1) \end{aligned}$$

Vi får ved indsættelse i denne funktion, at

$$\begin{aligned} T''\left(\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\right) &< 0 \\ T''\left(\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\right) &< 0 \end{aligned}$$

Vi finder arealet, ved disse to vinkler.

$$T''\left(\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\right) \approx 6{,}08$$
$$T''\left(\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\right) \approx 8{,}81$$

Altså må arealet af tværsnittet være størst når

$$v = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$