Aflevering 20

2.b mat A

Kevin Zhou

November 2023

Bedømmelseskriterier:

- Redegørelse og dokumentation for metode

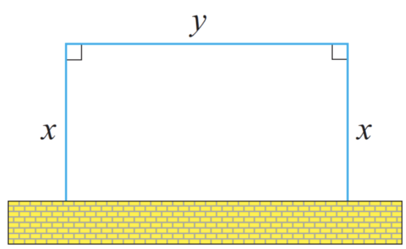
- Figurer, grafer og andre illustrationer

- Notation og layout

- Formidling og forklaring

Opgave 1: Opgave 7

I fig. 1 ses en rektangulær løbegård til en hund. Løbegården skal bygges op ad en mur, og de tre øvrige sider skal dannes af et 20 m langt hegn. Løbegardens længde betegnes med y, og løbegårdens bredde betegnes med x. Bestem y udtrykt ved x. Bestem x, så arealet af løbegården bliver størst muligt.



Figur 1: Løbegård til hunden

Løsning:
Siden de tre sider skal dannes af et 20 m langt hegn, så må følgende gælde.

$$2x + y = 20 \iff y = 20 - 2x$$

Arealet af løbegården som funktion af x, $A :]0; 10[\to \mathbb{R}$ må da være bestemt ved

$$A(x) = x \cdot (20 - 2x) = -2x^2 + 20x.$$

Vi differentierer funktionen og sætter lig med nul.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} &= -4x + 20 = 0 \\ &\implies 4x = 20 \\ &\iff x = 5 \end{aligned}$$

Vi ser da, at $5 \in Dm(A)$. For at se om 5 er et maksimumssted, finder vi den dobbeltaflede funktion af A.

$$A''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-4x + 20) = -4$$

5 være et maksimumssted, siden $A''(5) < 0$. Altså er arealet af løbegården størst muligt, når x er 5 m.

Opgave 2: Opgave 8

En kvægavler vil indhegne et stykke jord. Indhegningen skal være rektangulær, og ved hjælp af et hegn parallelt med det ene par sider skal den deles i to adskilte folde. Der er i alt 600 meter hegn til rådighed. Bestem det størst mulige areal af det indhegnede stykke jord.

Løsning:
Lad længden af siderne, der er parallele med hegnet, der deler indhegningen i to adskilte folde være betegnet med x. Lad længden af hver af de to ortogonale sider til hegnet, der deler indhegningen i to adskilte folde være betegnet med y. Så gælder der, at

$$3x + 2y = 600 \implies y = \frac{600 - 3x}{2} = 300 - \frac{3}{2}x$$

Arealet af det indhegnede stykke jord som funktion af x, $A :]0; 200[\to \mathbb{R}$ må da være bestemt ved

$$A = x \cdot y \implies A(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 300x$$

Vi differentierer og sætter lig med 0.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} &= -3x + 300 = 0\\ &\implies 3x = 300\\ &\iff x = 100\end{aligned}$$

Vi ser da, at $100 \in Dm(A)$. For at se om 100 er et maksimumssted, finder vi den dobbeltaflede funktion af A.

$$A''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-3x + 300) = -3$$

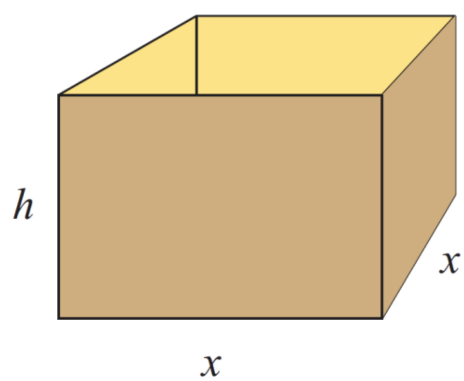
Siden $A''(100) = -3 < 0$, så må 100 være det globale maksimumssted. Vi finder nu arealet, når $x = 100$.

$$A(100) = -\frac{3}{2}(100)^2 + 300 \cdot 100 = 15000$$

Altså er det størst mulige areal af det indhegnede stykke jord 15000 m^2.

Opgave 3: Opgave 9

En kasse uden låg har kvadratisk bund. Rumfanget af kassen er 32. På figuren i fig. 2 betegner x sidelængden i den kvadratiske bund, og h betegner kassens højde. Bestem h udtrykt ved x og bestem den værdi af x, som gør kassens samlede overfladeareal mindst muligt.



Figur 2: Kasse uden låg

Løsning:
Med hensyn til rumfanget af kassen, så kan vi bestemme h udtrykt ved x.

$$h \cdot x^2 = 32 \implies h = \frac{32}{x^2}$$

Overfladearealet af kassen er

$$o = 4 \cdot hx + x^2 = 4 \cdot \frac{32}{x} + x^2$$

Vi differentierer dette udtryk med hensyn til x og sætter lig med 0.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2 + 4 \cdot 32x^{-1}\right) &= 2x - 4 \cdot \frac{32}{x^2} = 0\\ &\implies x^3 = 64\\ &\iff x = \sqrt[3]{64} = 4\end{aligned}$$

Siden

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(x^2+4\cdot 32x^{-1}\right)=\frac{256}{x^3}+2$$

og når $x=4$:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(x^2+4\cdot 32x^{-1}\right)=6>0$$

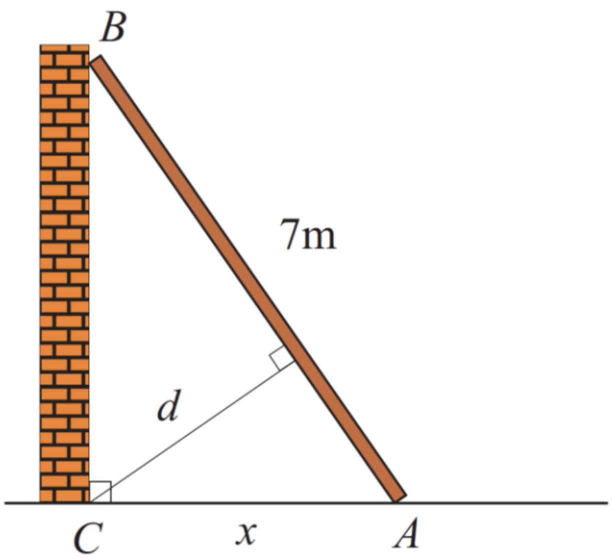
så må 4 være det globale minimumssted. Altså er kassens samlede overfladeareal mindst muligt, når $x=4$.

Opgave 4: Opgave 10

En 7 m lang stige er placeret op ad en lodret mur. Stigens røringspunkt med jorden benævnes A, og stigens røringspunkt med muren benævnes B. Afstanden mellem stigen og murens fod benævnes d. Afstanden mellem murens fod og stigens fod benævnes med x, og det oplyses, at $0<x<7$.

a. Gør rede for, at $|BC|=\sqrt{49-x^2}$, og benyt dette til at vise, at $d=\frac{x\cdot\sqrt{49-x^2}}{7}$.

b. Bestem x, så d bliver størst mulig.



Figur 3: Stige op af en lodret mur som i opgaven

Løsning:
a. Ved at bruge Pythagoras' læresætning kan vi se på fig. 3, at

$$|BC|=\sqrt{|AB|^2-|AC|^2}=\sqrt{49-x^2}$$

Vi kan da kigge på arealet af trekanten for at finde et udtryk for d.

$$\begin{aligned}A=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d&=\frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot x\\ \implies 7\cdot d&=\sqrt{49-x^2}\cdot x\\ \iff d&=\frac{x\cdot\sqrt{49-x^2}}{7}\end{aligned}$$

hvilket var, hvad vi skulle vise.

b. Vi differentierer udtrykket for d fundet i **a.** med produktreglen og kædereglen.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x\cdot\sqrt{49-x^2}}{7}\right) &= \frac{1}{7}\left(\sqrt{49-x^2}+x\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{49-x^2}\right)\right)\\ &= \frac{1}{7}\left(\sqrt{49-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{49-x^2}}\right)\\ &= \frac{49-2x^2}{7\sqrt{49-x^2}}\end{aligned}$$

Vi sætter dette lig med 0 og løser for x.

$$\begin{aligned}\frac{49-2x^2}{7\sqrt{49-x^2}}=0 &\iff 49-2x^2=0\\ &\iff x^2=\frac{49}{2}\\ &\iff x=-\frac{7}{\sqrt{2}}\vee x=\frac{7}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

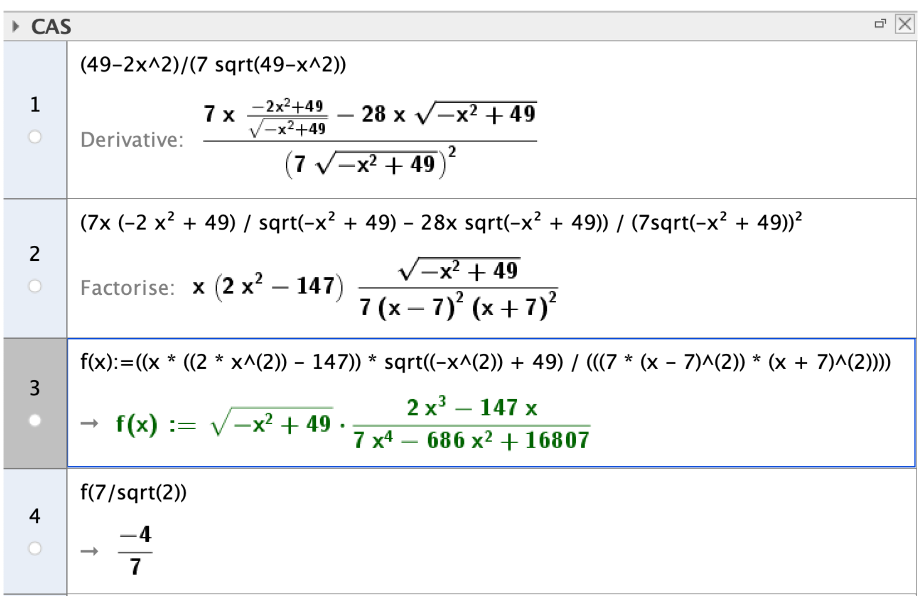
Dog siden $x\in\mathbb{R}^+$, så må x være positiv. Vi finder det dobbeltdifferentierer udtrykket for d med CAS (se fig. 4).

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{x\cdot\sqrt{49-x^2}}{7}\right)=\frac{x(2x^2-147)}{7(49-x^2)^{3/2}}$$

Når $x=\frac{7}{\sqrt{2}}$, så får vi med CAS (se fig. 4), at

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{x\cdot\sqrt{49-x^2}}{7}\right)=-\frac{4}{7}<0$$

Altså må $\frac{7}{\sqrt{2}}$ være det globale maksimumssted med hensyn til d. Det vil sige, at d er størst mulig, når $x=\frac{7}{\sqrt{2}}$.



Figur 4: Måden, hvorpå CAS er brugt til regning af ovenstående