Aflevering 36

3.b mat A

Kevin Zhou

26. november 2024

Opgave 1

En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x,y) = y^3 + x^2 + x \cdot y - 4y$$

a. Undersøg, om gradienten $\nabla f(1,2)$ og vektoren $\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ er ortogonale.

Løsning:
a. Vi beregner først et generelt udtryk for gradienten for f.

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(y^3 + x^2 + x \cdot y - 4y\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(y^3 + x^2 + x \cdot y - 4y\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x + y \\ 3y^2 + x - 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vi kan nu beregne $\nabla f(1,2)$.

$$\begin{aligned} \nabla f(1,2) &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 2 \\ 3 \cdot 2^2 + 1 - 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Siden to vektorer er ortogonale præcis når deres prikprodukt er 0, så beregner vi $\nabla f(1,2) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \nabla f(1,2) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= 4 \cdot 7 + 9 \cdot (-3) \\ &= 1 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Altså er de to vektorer ikke ortogonale.

Opgave 2

En vektorfunktion $\vec{\mathbf{s}}$ er bestemt ved

$$\vec{\mathbf{s}}(t) = \begin{pmatrix} 5 + 5 \cdot \cos(t) \\ 7 + 5 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Parameterkurven for $\vec{\mathbf{s}}$ er en cirkel.

a. Bestem centrum og radius for cirklen.

Linjen l er tangent til cirklen i punktet $P(8,11)$.

b. Bestem en ligning for l.

Løsning:
a. Siden parameterfremstillingen for en cirkel med centrum i (a,b) og radius r er

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + r \cdot \cos(t) \\ b + r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

så må den givne cirkel have centrum i $(5,7)$ og have radius 5.

b. Vi finder først værdien af t, når $\vec{\mathbf{s}}(t) = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \end{pmatrix}$.

$$\vec{\mathbf{s}}(t) = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \end{pmatrix} \iff 5 + 5 \cdot \cos(t) = 8 \wedge 7 + 5 \cdot \sin(t) = 11$$
$$\implies t = \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$$

da $0 \leq t \leq 2\pi$. Vi finder nu forskriften for den afledede funktion for $\vec{\mathbf{s}}$.

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{s}}'(t) &= \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(5 + 5 \cdot \cos(t)) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(7 + 5 \cdot \sin(t)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 \cdot \sin(t) \\ 5 \cdot \cos(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der gælder, at $\vec{\mathbf{s}}'(t)$ er retningsvektoren for tangenten til parameterkurven for $\vec{\mathbf{s}}$. Vi beregner nu $\vec{\mathbf{s}}'\left(\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$ (bemærk at $\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$).

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{s}}'\left(\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right) &= \begin{pmatrix} -5 \cdot \sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right) \\ 5 \cdot \cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Altså må en normalvektor til linjen l, der er tangent til cirklen i punktet $P(8{,}11)$ være $\vec{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, og en ligning for l må da være

$$3 \cdot (x - 8) + 4 \cdot (y - 11) = 0$$

Opgave 3

Den samlede biomasse af en population af helleflyndere i et område af Stillehavet kan beskrives ved modellen

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}71 \cdot \left(1 - \frac{y}{80{,}5}\right) \cdot y,$$

hvor $y = f(x)$ er populationens samlede biomasse (målt i mio. kg), og x er tiden (målt i år). Til tidspunktet $x = 0$ er den samlede biomasse 20,1 mio. kg.

a. Med hvilken hastighed vokser den samlede biomasse til tidspunktet $x = 0$?

b. Bestem et udtryk for den samlede biomasse $f(x)$.

c. Til hvilket tidspunkt når den samlede biomasse op på 75 mio. kg?

Løsning:

a. Da der gælder, at $x = 0 \implies y = 20{,}1$, så må væksthastigheden være

$$\begin{aligned} f'(20{,}1) &= 0{,}71 \cdot \left(1 - \frac{20{,}1}{80{,}5}\right) \cdot 20{,}1 \\ &\approx 10{,}71 \end{aligned}$$

Altsår vokser den samlede biomasse med 10,71 mio. kg per år til tidspunktet $x = 0$.

b. Vi omskriver først differentialligningen.

$$\frac{dy}{dx} = 0{,}71 \cdot \left(1 - \frac{y}{80{,}5}\right) \cdot y \iff \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \cdot \left(0{,}71 - \frac{0{,}71}{80{,}5} \cdot y\right)$$

Siden der for en ligning af formen

$$y' = y(b - ay)$$

gælder, at den har de ikke-negative, voksende løsninger

$$g(x) = \frac{\frac{b}{a}}{1+ce^{-bx}}, \quad c \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}$$

Altså må forskriften for f være af formen

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\frac{0{,}71 \cdot 80{,}5}{0{,}71}}{1+ce^{-0{,}71x}} \\ &= \frac{80{,}5}{1+ce^{-0{,}71x}} \end{aligned}$$

Siden $f(0) = 20{,}1$, så har vi

$$\frac{80{,}5}{1+ce^{-0{,}71 \cdot 0}} = 20{,}1 \iff c = \frac{80{,}5}{20{,}1} - 1 \approx 3{,}005$$

Et udtryk for den samlede biomasse er altså

$$f(x) = \frac{80{,}5}{1+\left(\frac{80{,}5}{20{,}1}-1\right)e^{-0{,}71x}} \approx \frac{80{,}5}{1+3{,}005e^{-0{,}71x}}$$

En definitionsmængde, der giver mening er $Dm(f) = \mathbb{R}$.

c. Vi løser ligningen $f(x) = 75$.

$$\begin{aligned} f(x) = 75 &\iff \frac{80{,}5}{1+\left(\frac{80{,}5}{20{,}1}-1\right)e^{-0{,}71x}} = 75 \\ &\iff e^{-0{,}71x} \cdot \left(\frac{80{,}5}{20{,}1} - 1\right) = \frac{80{,}5}{75} - 1 \\ &\iff e^{-0{,}71x} = \frac{80{,}5 - 75}{75 \cdot \left(\frac{80{,}5}{20{,}1} - 1\right)} \\ &\iff x = -\frac{\ln\left(\frac{80{,}5-75}{75\cdot\left(\frac{80{,}5}{20{,}1}-1\right)}\right)}{0{,}71} \approx 5{,}23 \end{aligned}$$

Altså når den samlede biomasse op på 75 mio. kg efter 5,23 år.

Opgave 4

En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x.$$

Det oplyses, at f har ét stationært punkt.

a. Bestem koordinatsættet til det stationære punkt

b. Bestem arten af det stationære punkt.

Løsning:

a. Vi finder først et udtryk for $\nabla f(x,y)$.

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \begin{pmatrix} f'_x(x,y) \\ f'_y(x,y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x+2 \\ 2y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ved det stationære punkt (x_0,y_0) er gradienten $\boldsymbol{\nabla} f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} 2x_0 + 2 \\ 2y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff x_0 = -1 \wedge y_0 = 0 \end{aligned}$$

Koordinatsættet til det stationære punkt er altså $(-1,0)$.

b. Vi beregner først den dobbelt partielle afledede af $f(x,y)$ mht. x og x.

$$\begin{aligned} f''_{xx}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(f'_x(x,y)\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(2x+2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Vi beregner nu den dobbelt partielle afledede af $f(x,y)$ mht. y og y.

$$\begin{aligned} f''_{yy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(f'_y(x,y)\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(2y) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Vi beregner nu den dobbelt partielle afledede af $f(x,y)$ mht. x og y.

$$\begin{aligned} f''_{xy}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(f'_x(x,y)\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}(2x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vi ser da, at

$$\begin{aligned} f''_{xx}(-1,0) \cdot f''_{yy}(-1,0) - \left(f''_{xy}(-1,0)\right)^2 &= 2 \cdot 2 - 0^2 \\ &= 4 > 0 \end{aligned}$$

Siden der også gælder, at

$$f''_{xx}(-1,0) = 2 > 0$$

så må arten af det stationære punkt være et minimum.

Opgave 5

Figuren viser grafen for funktionen f givet ved

$$f(x,y) = e^{1-(x^2-1)^2-y^2}$$

Funktionen f har tre stationære punkter A, B og C.

a. Bestem koordinatsættet til hvert af punkterne A, B og C.

b. Bestem længden af snitkurven fra punktet A til punktet B.

Løsning:

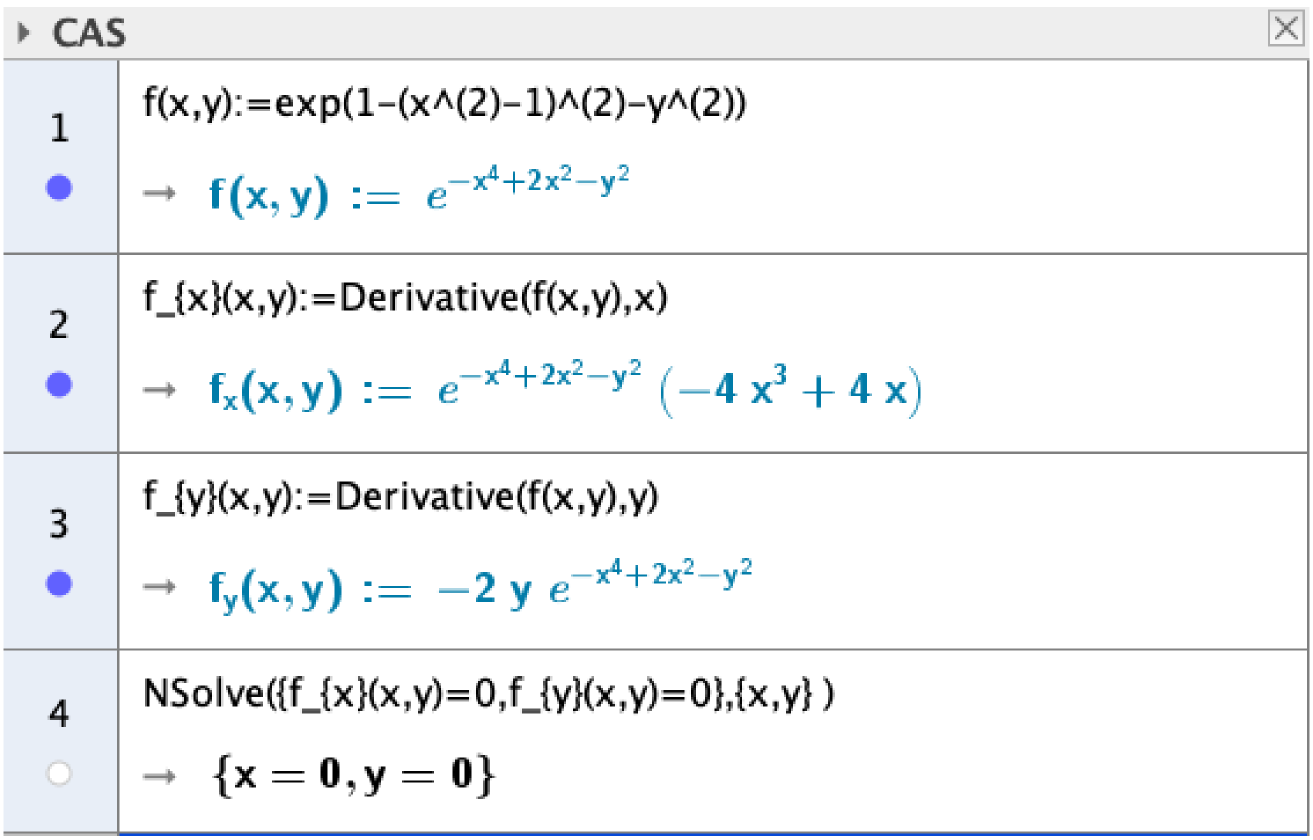
a. Vi finder først et udtryk for $\boldsymbol{\nabla} f(x,y)$ med kædereglen.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} f(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{1-(x^2-1)^2-y^2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{1-(x^2-1)^2-y^2}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{1-(x^2-1)^2-y^2} \cdot \left(4x-4x^3\right) \\ e^{1-(x^2-1)^2-y^2} \cdot 2y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(4x-4x^3\right) \cdot e^{-x^4+2x^2-y^2} \\ 2y \cdot e^{-x^4+2x^2-y^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Vi sætter denne lig $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ og finder løsningerne med CAS.

$$
\boldsymbol{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} \left(4x-4x^3\right) \cdot e^{-x^4+2x^2-y^2} \\ 2y \cdot e^{-x^4+2x^2-y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies x = 0 \wedge y = 0
$$

hvilket ikke kan være sandt, da der er tre stationære punkter. Geo viser kun én løsning.



Figur 1: GeoGebra viser kun én af løsningerne