Aflevering 37

3.b mat A

Kevin Zhou

8. december 2024

Opgave 1: Opgave 10

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 0{,}126 \cdot \left(45 - x^{1{,}2}\right) \cdot x^{0{,}5}, \quad 0 \leq x \leq 23$$

Grafen for f,koordinatsystemets førsteakse og linjen med ligningen $x = 23$ afgrænser et område M, der har et areal.
I en model kan formen af en varmluftsballon beskrives ved det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M roteres 360° omkring førsteaksen i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser.

a. Benyt modellen til at bestemme volumen af ballonen.

b. Benyt modellen til at bestemme bredden b af ballonen (se figuren).

Løsning:
a. Ballonen er det omdrejningslegeme, der fremkommer, når grafen for f drejes 360° omkring førsteakesen i intervallet 0 til 23. Dettes areal må da være

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{23} f(x)^2 \, dx \\ &= \pi \int_0^{23} \left(0{,}126 \cdot \left(45 - x^{1{,}2}\right) \cdot x^{0{,}5}\right)^2 \, dx \\ &= \frac{3969}{22000000} \, \pi \, \left(5596820 \, \sqrt[5]{23}^2 - 30113325 \, \sqrt[5]{23} + 47133900\right) \\ &\approx 5879{,}5 \end{aligned}$$

der er løst med CAS (se fig. 2). Da enheden er m på begge akser, så må volumenet have enheden m^3. Altså er volumen af ballonen ifølge modellen 5879,5 m^3.
b. Bredden af ballonen er 2 gange maksmimum for funktionen, hvilket fremgår af figuren i opgavebeskrivelsen. Vi finder først den afledede funktion for f.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(0{,}126 \cdot 45 \cdot x^{0{,}5} - 0{,}126 \cdot x^{1{,}2} \cdot x^{0{,}5}\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(5{,}67 \cdot x^{0{,}5} - 0{,}126 \cdot x^{1{,}7}\right) \\ &= 0{,}5 \cdot 5{,}67 \cdot x^{-0{,}5} - 1{,}7 \cdot 0{,}126 \cdot x^{0{,}7} \\ &= 2{,}835 \cdot x^{-0{,}5} - 0{,}2142 \cdot x^{0{,}7} \end{aligned}$$

Vi sætter dette udtryk lig 0 og løser for x.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\implies 2{,}835 \cdot x^{-0{,}5} - 0{,}2142 \cdot x^{0{,}7} = 0 \\ &\iff 0{,}2142 \cdot x^{0{,}7} = 2{,}835 \cdot x^{-0{,}5} \\ &\iff 0{,}2142 \cdot x^{1{,}2} = 2{,}835 \\ &\iff x^{\frac{6}{5}} = \frac{2{,}835}{0{,}2142} \\ &\iff x = \left(\frac{2{,}835}{0{,}2142}\right)^{\frac{5}{6}} \approx 8{,}606 \end{aligned}$$

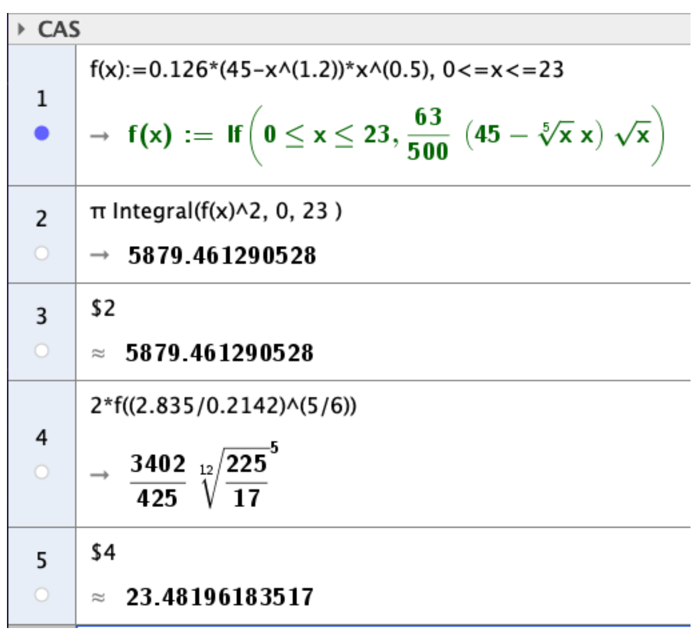
Fra grafen for f i fig. 1 ses det, at dette virkeligt er det globale maksimumssted.

Figur 1: Grafen for f tegnet i GeoGebra

Vi kan nu beregne bredden af ballonen.

$$b = 2 \cdot f\left(\left(\frac{2{,}835}{0{,}2142}\right)^{\frac{5}{6}}\right)$$
$$\approx 23{,}5$$

som er regnet med CAS (se fig. 2). Altså er ballonens bredde 23,5 m.



Figur 2: Udtrykket for volumen og bredde udregnet med CAS

Opgave 2: Opgave 11

En differentialligning er givet ved

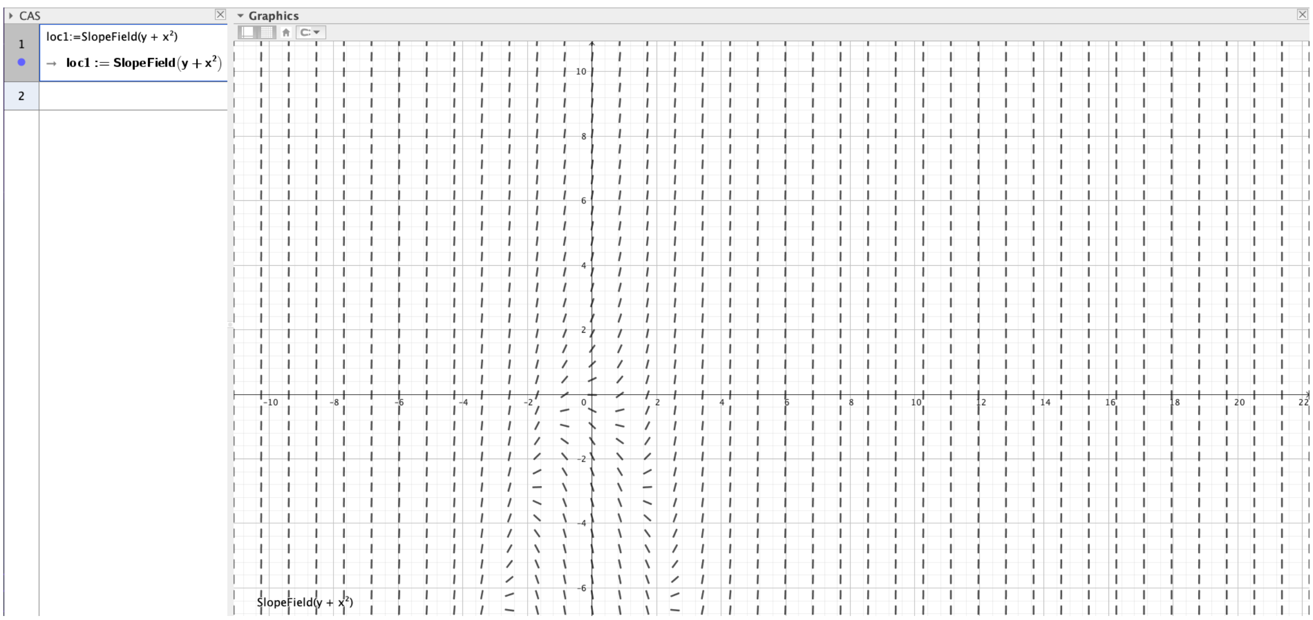
$$y' = y + x^2.$$

a. Tegn et hældningsfelt for differentialligningen.

Det oplyses, at funktionen f er løsning til differentialligningen, og at grafen for f går gennem punktet $P(0,-1)$.

b. Bestem en forskrift for f.

Løsning:
a. Hældningsfeltet for differentialligningen ses i fig. 3.



Figur 3: Hældningsfelt for differentialligningen tegnet i GeoGebra

b. Vi finder først den fuldstændige løsning for differentialligningen med panserformlen. Siden $A(x) = -x$ er en stamfunktion til $a(x) = -1$, så gælder

$$\begin{aligned} y' = y + x^2 &\iff y' - y = x^2 \\ &\iff y = e^{-(-x)} \int x^2 \cdot e^{-x}\, dx + c \cdot e^{-(-x)} \end{aligned}$$

Vi beregner nu integralet med integration med dele (to gange), hvor vi lader $u = x^2$ og $dt = e^{-x}\, dx$, hvilket vil sige, at $du = 2x\,dx$ og $t = -e^{-x}$. Bemærk at vi ser bort fra konstanten fra integralet.

$$\begin{aligned} y &= e^x \cdot \left(ut - \int t\,du \right) + c \cdot e^x \\ &= e^x \cdot \left(-e^{-x} \cdot x^2 - 2 \int -e^{-x} x\,dx \right) + c \cdot e^x \\ &= e^x \cdot \left(-e^{-x} \cdot x^2 - 2 \cdot \left(x \cdot e^{-x} - \int e^{-x}\,dx \right) \right) + c \cdot e^x \\ &= e^x \cdot \left(-e^{-x} \cdot x^2 - 2 \cdot \left(x \cdot e^{-x} + e^{-x} \right) \right) + c \cdot e^x \\ &= e^x \cdot e^{-x} \cdot \left(-x^2 - 2x - 2 \right) + c \cdot e^x \\ &= -x^2 - 2x - 2 + c \cdot e^x \end{aligned}$$

Da grafen for f går gennem $P(0, -1)$, så kan vi finde c.

$$\begin{aligned} f(0) = -1 &\implies -0^2 - 2 \cdot 0 - 2 + c \cdot e^0 = -1 \\ &\iff c - 2 = -1 \\ &\iff c = 1 \end{aligned}$$

Altså er en forskrift for f

$$f(x) = -x^2 - 2x - 2 + e^x$$

Opgave 3: Opgave 13

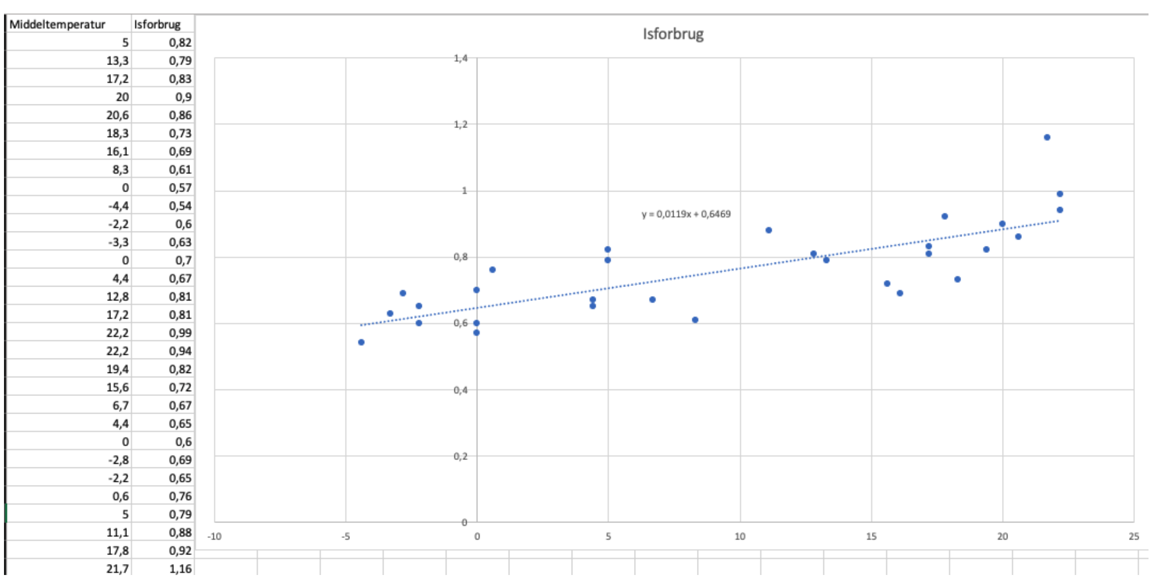
En isproducent har undersøgt det daglige isforbrug blandt en række forbrugere. Tabellen viser sammenhørende værdier for det daglige isforbrug og middeltemperaturenden pågældende dag.
I en model kan sammenhængen beskrives ved

$$f(x) = a \cdot x + b,$$

hvor $f(x)$ betegner det daglige isforbrug (målt i liter), og x betegner middeltemperatur målt i °C.

a. Benyt regression på tabellens data til at bestemme konstanterne a og b.

Løsning:
a. Vi laver en lineær regression i Excel, hvilket ses i fig. 4.



Middeltemperatur	Isforbrug
5	0,82
13,3	0,79
17,2	0,83
20	0,9
20,6	0,86
18,3	0,73
16,1	0,69
8,3	0,61
0	0,57
-4,4	0,54
-2,2	0,6
-3,3	0,63
0	0,7
4,4	0,67
12,8	0,81
17,2	0,81
22,2	0,99
22,2	0,94
19,4	0,82
15,6	0,72
6,7	0,67
4,4	0,65
0	0,6
-2,8	0,69
-2,2	0,65
0,6	0,76
5	0,79
11,1	0,88
17,8	0,92
21,7	1,16

Figur 4: Regression lavet i Excel

Fra regressionen har vi, at

$$y = f(x) = 0{,}0119x + 0{,}6469$$

Altså må konstanterne være

$$a = 0{,}0119$$
$$b = 0{,}6469$$

Opgave 4: Opgave 14

En funktion f af to variable er givet ved

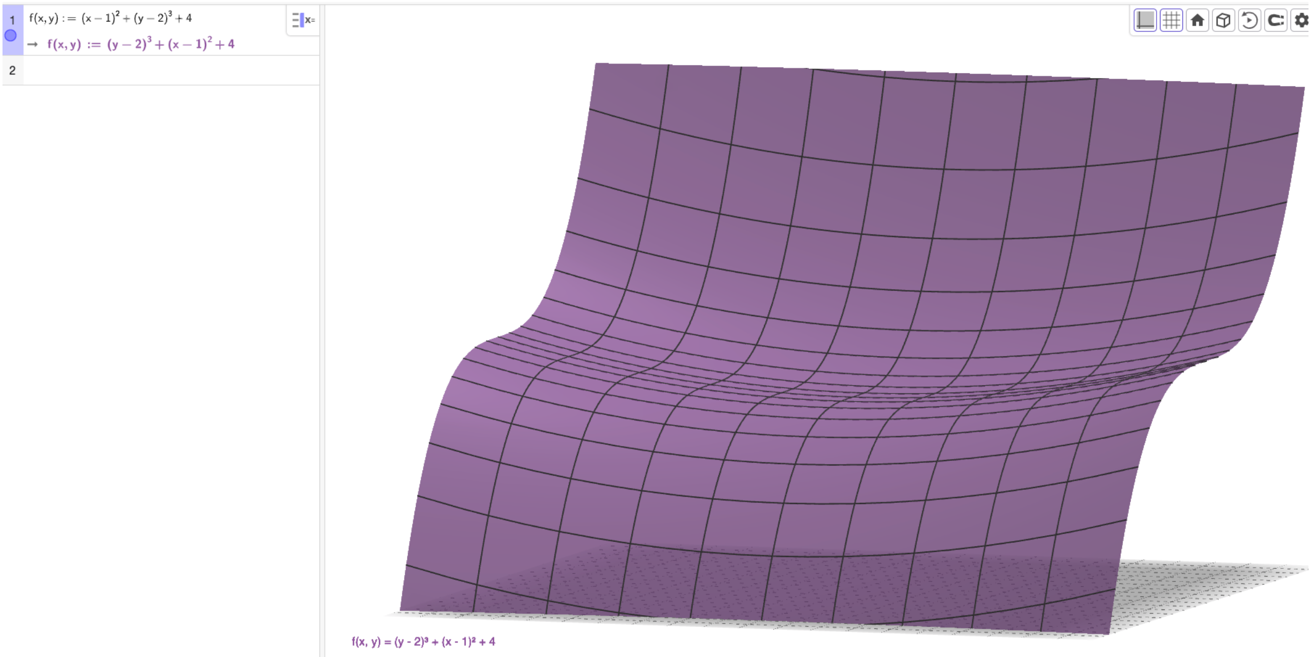
$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^3 + 4.$$

a. Tegn grafen for f i grafvinduet $[0,2] \times [0,4] \times [0,10]$.

Det oplyses, at grafen for f har et stationært punkt i $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

b. Bestem x_0 og y_0.

Løsning:
a. Grafen for f i grafvinduet $[0,2] \times [0,4] \times [0,10]$ ses i fig. 5.



Figur 5: Grafen for f i grafvinduet $[0,2] \times [0,4] \times [0,10]$ tegnet i GeoGebra

GeoGebra tegner ikke akserne når man vælger grafvinduet?

b. Vi finder først et udtryk for gradienten for f.

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left((x-1)^2 + (y-2)^3 + 4\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left((x-1)^2 + (y-2)^3 + 4\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - 2x + 1\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(y^3 - 6y^2 + 12y - 8\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x - 2 \\ 3y^2 - 12y + 12 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Siden $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ er et stationært punkt for f, så må der gælde, at

$$\begin{aligned}\nabla f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix}2x_0-2\\3y_0^2-12y_0+12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ &\iff 2x_0 = 2 \wedge 3\cdot\left(y^2-4y+4\right)=0\\ &\iff x_0 = 1 \wedge (y-2)^2 = 0\\ &\iff x_0 = 1 \wedge y_0 = 2\end{aligned}$$

Vi har altså bestemt $x_0 = 1$ og $y_0 = 2$.

Opgave 5: Opgave 15

En krage flyver hen over en sti og taber en nød. I en model kan nøddens position i et koordinatsystem med enheden meter på begge akser beskrives ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5t\\30-4{,}91\cdot t^2\end{pmatrix}, t \geq 0\,,$$

hvor $\vec{s}(t)$ betegner stedvektoren til nøddens position over stien til tidspunktet t (målt i sekunder).

a. Benyt modellen til at bestemme nøddens fart $|\vec{s}'(t)|$ til tidspunktet $t = 1$.

Det oplyses, at længden af en parameterkurve med koordinatfunktioner x og y samt parameteren t i intervallet $[t_1,t_2]$ kan beregnes ved formlen

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt.$$

b. Benyt modellen til at bestemme længden af den banekurve nødden følger, inden den rammer stien.

Vi finder først et udtryk for den afledede funktion for $\vec{\mathbf{s}}$.

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{s}}'(t) &= \begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(5t)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(30-4{,}91\cdot t^2\right)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}5\\-9{,}82\cdot t\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Vi beregner nu nøddens fart til tidspunktet $t = 1$.

$$\begin{aligned}|\vec{\mathbf{s}}'(1)| &= \left|\begin{pmatrix}5\\-9{,}82\cdot 1\end{pmatrix}\right|\\ &= \sqrt{5^2+(-9{,}82)^2}\\ &\approx 11{,}02\end{aligned}$$

Nøddens fart til tidspunktet $t = 1$ er altså 11,02 m/s.

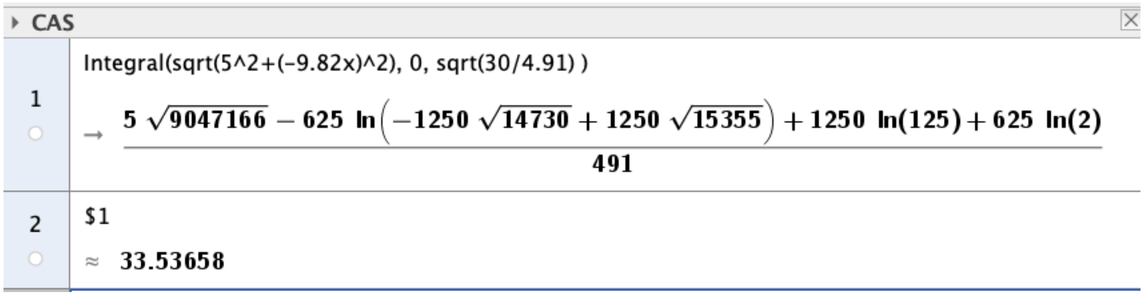
b. Vi finder først værdien af t når nødden rammer jorden, hvor $y(t) = 0$.

$$\begin{aligned}y(t) = 0 &\iff 30 - 4{,}91\cdot t^2 = 0\\ &\iff t = \sqrt{\frac{30}{4{,}91}}\end{aligned}$$

da t er positiv.
Vi kan nu beregne længden af banekurven, som nødden følger, inden den rammer stien (bemærk at $|\vec{\mathbf{s}}'(t)| = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}$).

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\frac{30}{4{,}91}}} \sqrt{5^2+(-9{,}82\cdot t)^2}\,dt &= \frac{5\sqrt{9047166}-625\ \ln\left(-1250\sqrt{14730}+1250\sqrt{15355}\right)+1250\ \ln(125)+625\ \ln(2)}{491}\\ &\approx 33{,}54\end{aligned}$$

som er regnet med CAS (se fig. 6). Længden af den banekurve nødden følger, inden den rammer stien er altså 33,54 m.



Figur 6: Længden af banekuven regnet med CAS