Aflevering 41

3.b mat A

Kevin Zhou

8. marts 2025

Opgave 1: Normalfordelt stokastisk variabel

Tæthedsfunktionen for en normalfordelt stokastisk variabel X er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 3} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-10}{3}\right)^2}.$$

Løsning:

a. For at finde middelværdien og spredningen for X, betragter vi den generelle tæthedsfunktionen for en stokastisk variabel med middelværdi μ og spredning σ:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Det er klart for X, at middelværdien må være $\mu = 10$ og spredningen må være $\sigma = 3$.

b. Vi ser, at

$$\begin{aligned} P(7 \leq X \leq 13) &= P(10-3 \leq X \leq 10+3) \\ &= P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \end{aligned}$$

For en vilkårlig normalfordelt stokastisk variabel X gælder der, at

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68{,}27\%$$

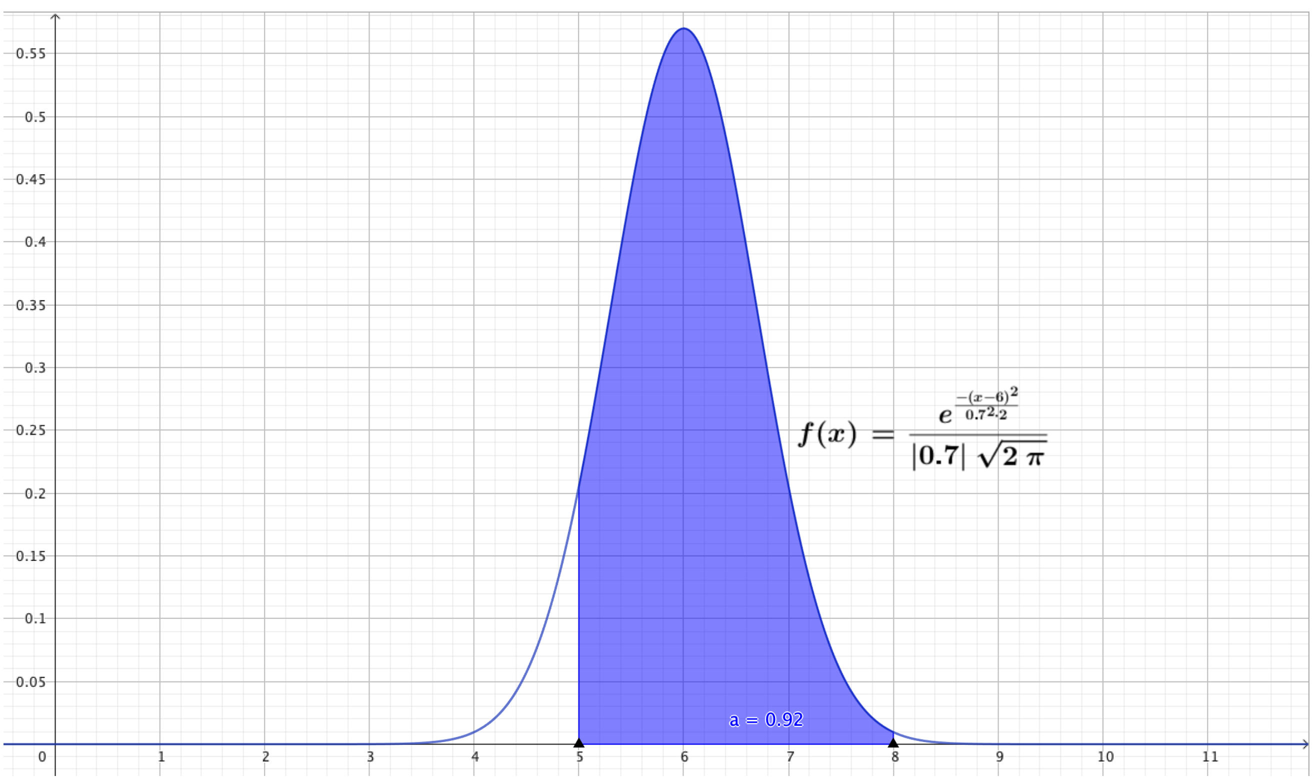
Altså må sandsynligheden $P(7 \leq 10 \leq 13)$ være 68,27 %.

Opgave 2: Normalfordelt stokastisk variabel

En normalfordelt stokastisk variabel X er givet ved $X \sim N(6{,}0.7)$. Tæthedsfunktionen for X betegnes f.

Løsning:

a. Grafen for f ses i fig. 1.

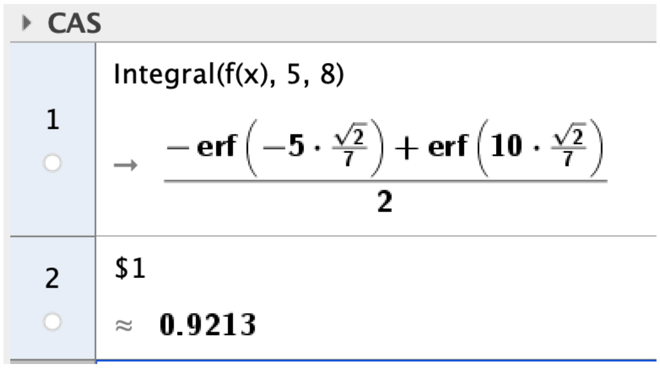


Figur 1: Grafen for tæthedsfunktionen f

b. Vi beregner $\int_5^8 f(x)\,dx$ med CAS (se fig. 2), og får

$$\int_5^8 f(x)\,dx \approx 0{,}9213$$

Det fortæller om X, at $P(5 \leq X \leq 8) \approx 0{,}9213$.



Figur 2: Integralet udregnet med CAS

Opgave 3: Koncentration af hæmoglobin

I en model kan koncentrationen af hæmoglobin i blodet hos kvinder beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X. Målt i mmol/L har X middelværdien $\mu = 8{,}4$ og spredningen $\sigma = 0{,}55$.

Løsning:

a. De normale udfald for X er

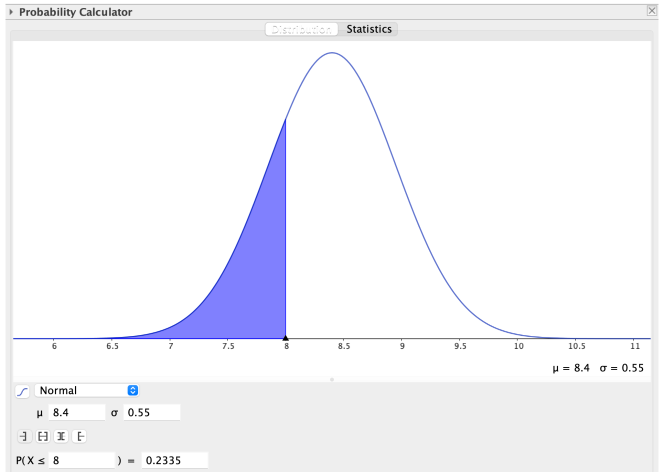
$$\begin{aligned}[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma] &= [8{,}4 - 2 \cdot 0{,}55; 8{,}4 + 2 \cdot 0{,}55] \\ &= [7{,}3; 9{,}5]\end{aligned}$$

Mængden af de normale udfald for X er altså $[7{,}3; 9{,}5]$.

b. For at bestemme sandsynligheden $P(X \leq 8{,}0)$, benytter vi CAS, hvilket ses i fig. 3.

$$\begin{aligned}P(X \leq 8) &= \Phi\left(\frac{8 - 8{,}4}{0{,}55}\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{8-8,4}{0,55}} \frac{e^{-\frac{1}{2}} \cdot x^2}{\sqrt{2\pi}}\,dx \\ &\approx 0{,}2335 \\ &= 23{,}35\%\end{aligned}$$

Sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt kvinde har en koncentration af hæmoglobin i blodet på højst 8,0 mmol/L er altså 23,35 %.



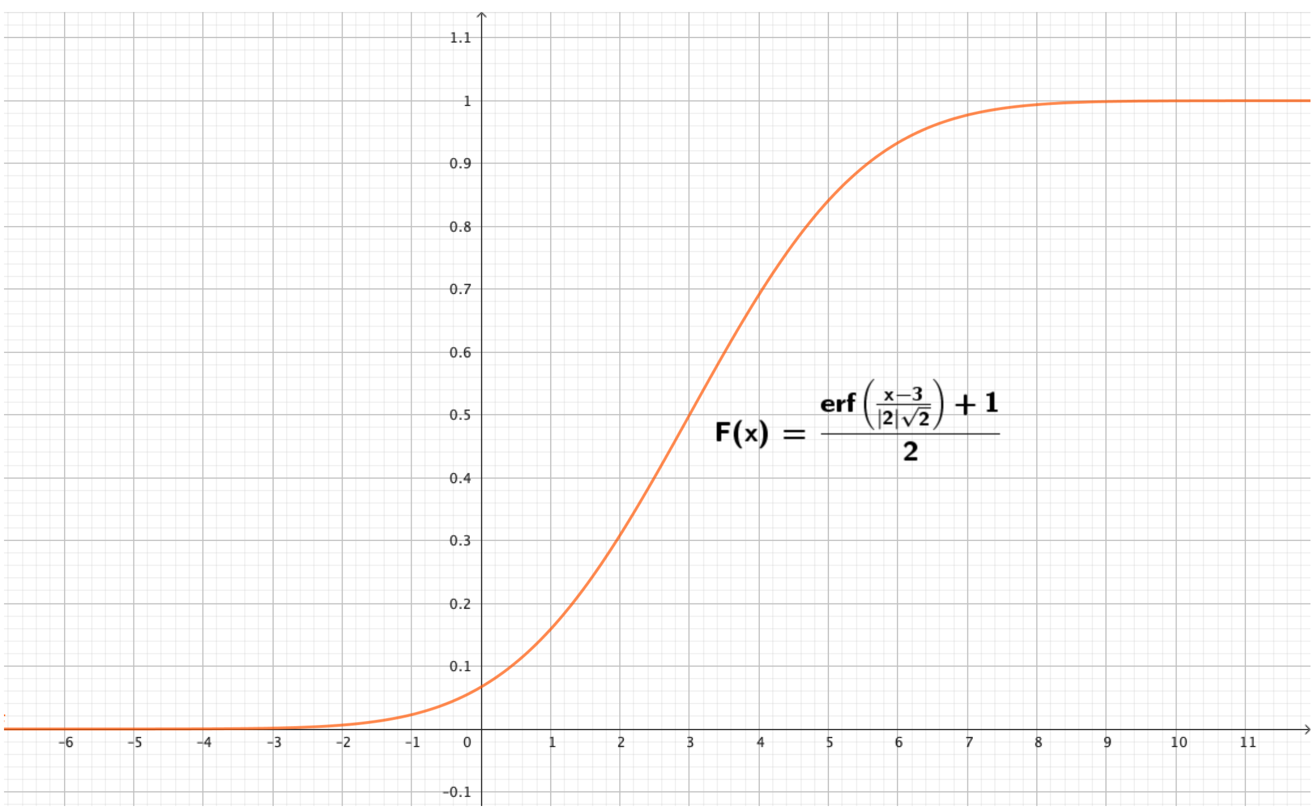
Figur 3: Sandsynligheden udregnet med CAS

Opgave 4: Endnu en normalfordelt stokastisk variabel

En normalfordelt stokastisk variabel X er givet ved $X \sim N(3{,}2)$.

Løsning:

a. Grafen for fordelingsfunktionen hørende til X ses i fig. 4.

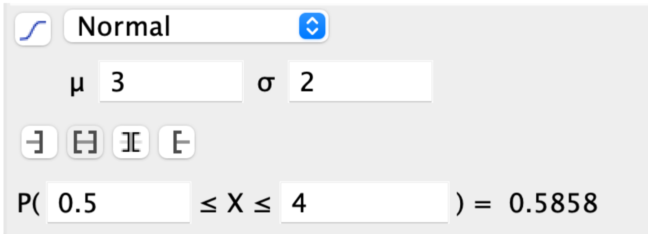


Figur 4: Graf for fordelingsfunktionen hørende til X

b. $P(0{,}5 \leq X \leq 4)$ udregnes med CAS, hvilket ses i fig. 5, og vi får

$$P(0{,}5 \leq X \leq 4) \approx 0{,}5858$$

Altså har vi bestemt $P(0{,}5 \leq X \leq 4)$ til at være 0,5858.



Figur 5: Sandsynligheden udregnet med CAS

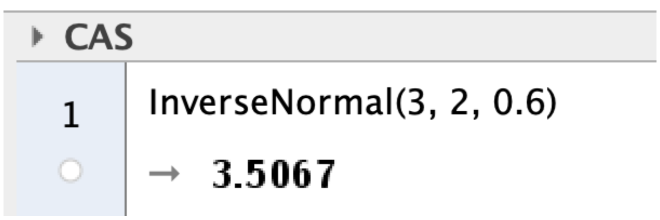
c. For at bestemme k benytter vi fraktilfunktionen. Lad F betegne fordelingsfunktionen hørende til X (bemærk F er injektiv), så gælder

$$\begin{aligned} P(X \leq k) = 0{,}6 &\iff F(k) = 0{,}6 \\ &\iff k = F^{-1}(0{,}6) \end{aligned}$$

Vi beregner $F^{-1}(0{,}6)$ med CAS, hvilket ses i fig. 6.

$$\begin{aligned} k &= F^{-1}(0{,}6) \\ &\approx 3{,}5067 \end{aligned}$$

Når $P(X \leq k) = 0{,}6$, så er tallet k altså 3,5067.



Figur 6: $F^{-1}(0.6)$ udregnet med CAS

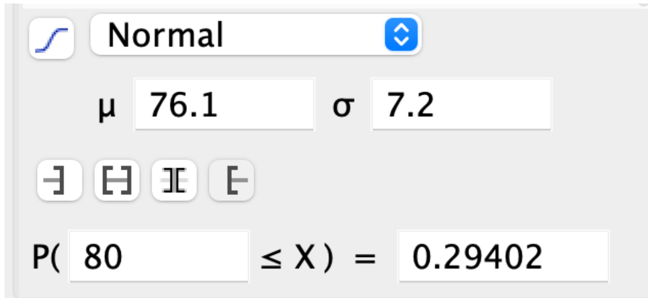
Opgave 5: Fart på en bil

I en model kan bilernes fart (målt i km/t) på en bestemt vejrstrækning beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X med middelværdi $\mu = 76{,}1$ og spredning $\sigma = 7{,}2$. Fartgrænsen på vejrstrækningen er 80 km/t.

Løsning:
a. Andelen af biler hurtigere end fartgrænsen må være

$$\begin{aligned} P(X \geq 80) &= 1 - \Phi\left(\frac{80-\mu}{\sigma}\right) \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{\frac{80-76{,}1}{7{,}2}} \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\right) dx \\ &\approx 0{,}2940 \\ &= 29{,}40\ \% \end{aligned}$$

Sandsynligheden er udregnet med CAS, hvilket ses i fig. 7. Altså kører 29,40 % af bilerne ifølge modellen hurtigere end de tilladte 80 km/t.



Figur 7: Sandsynligheden udregnet med CAS

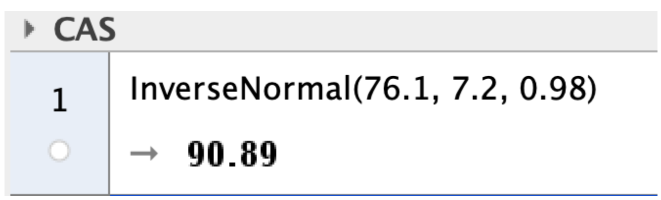
c. For at bestemme, hvor hurtigt de hurtigste 2 % af bilerne kører, benytter vi fraktilfunktionen. Den fart som disse biler mindst kører betegner vi v, og fordelingsfunktionen hørende til X betegner vi F.

$$\begin{aligned} P(X \geq v) = 0{,}02 &\iff P(X \leq v) = 0{,}98 \\ &\iff F(v) = 0{,}98 \\ &\iff v = F^{-1}(0{,}98) \end{aligned}$$

Vi beregner nu v med CAS, hvilket ses i fig. 8.

$$\begin{aligned} v &= F^{-1}(0{,}98) \\ &\approx 90{,}89 \end{aligned}$$

Ifølge modellen kører de 2 % hurtigste biler altså mindst 90,89 km/t.



Figur 8: $F^{-1}(0{,}98)$ udregnet med CAS

Opgave 6: Afstemning om forsvarsforbehold

I en meningsmåling fra den 16. maj 2022 blandt 683 tilfældigt udvalgte danske vælgere svarede 38,2 %, at de ville stemme nej til at ophæve det danske EU-forsvarsforbehold.
Den 1. juni 2022 var der folkeafstemning om at ophæve det danske EU-forsvarsforbehold. Ved denne folkeafstemning stemte 33,1 % af vælgerne nej.

Løsning:
a. Lad $\hat{p}$ angive stikprøveandelen af nej-svar, og n være antal vælgere i meningsmålingen. Så må 95 % konfidensintervallet for nej-andelen af danske vælgere være

$$\begin{aligned} \left[\hat{p} - 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + 2 \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}}\right] &= \left[0{,}382 - 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}382 \cdot (1-0{,}382)}{683}}; 0{,}382 + 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}382 \cdot (1-0{,}382)}{683}}\right] \\ &\approx [0{,}345; 0{,}419] \end{aligned}$$

Et 95 % konfidensinterval for nej-andelen af danske vælgere er altså $[0{,}345; 0{,}419]$.

b. For at bestemme, om der er sket en signifikant ændring i nej-andelen af af danske vælgere, betrager vi 95 % konfidensintervallet fra **a.**. Siden

$$33{,}1\ \% = 0{,}331 \notin [0{,}345; 0{,}419]$$

så er der tale om en signifikant ændring. Altså skete der en signifikant ændring i nej-andelen af danske vælgere fra den 16. maj til den 1. juni 2022.