Aflevering 23

2.b mat A

Kevin Zhou

Januar 2023

Bedømmelseskriterier:

- Redegørelse og dokumentation for metode
- Figurer, grafer og andre illustrationer
- Notation og layout
- Formidling og forklaring

Opgave 1

Med et spirometer har man målt, hvordan luftmængden i lungerne hos en bestemt person afhænger af tiden. I en model kan luftmængden beskrives ved

$$f(t) = 3{,}2 + 0{,}4 \cdot \sin(1{,}25 \cdot t), \quad 0 \leq t \leq 5$$

hvor $f(t)$ betegner luftmængden i lungerne (målt i liter) til tidspunktet t (målt i sekunder fra begyndelsen af vejrtrækningen).

a. Tegn grafen for f.

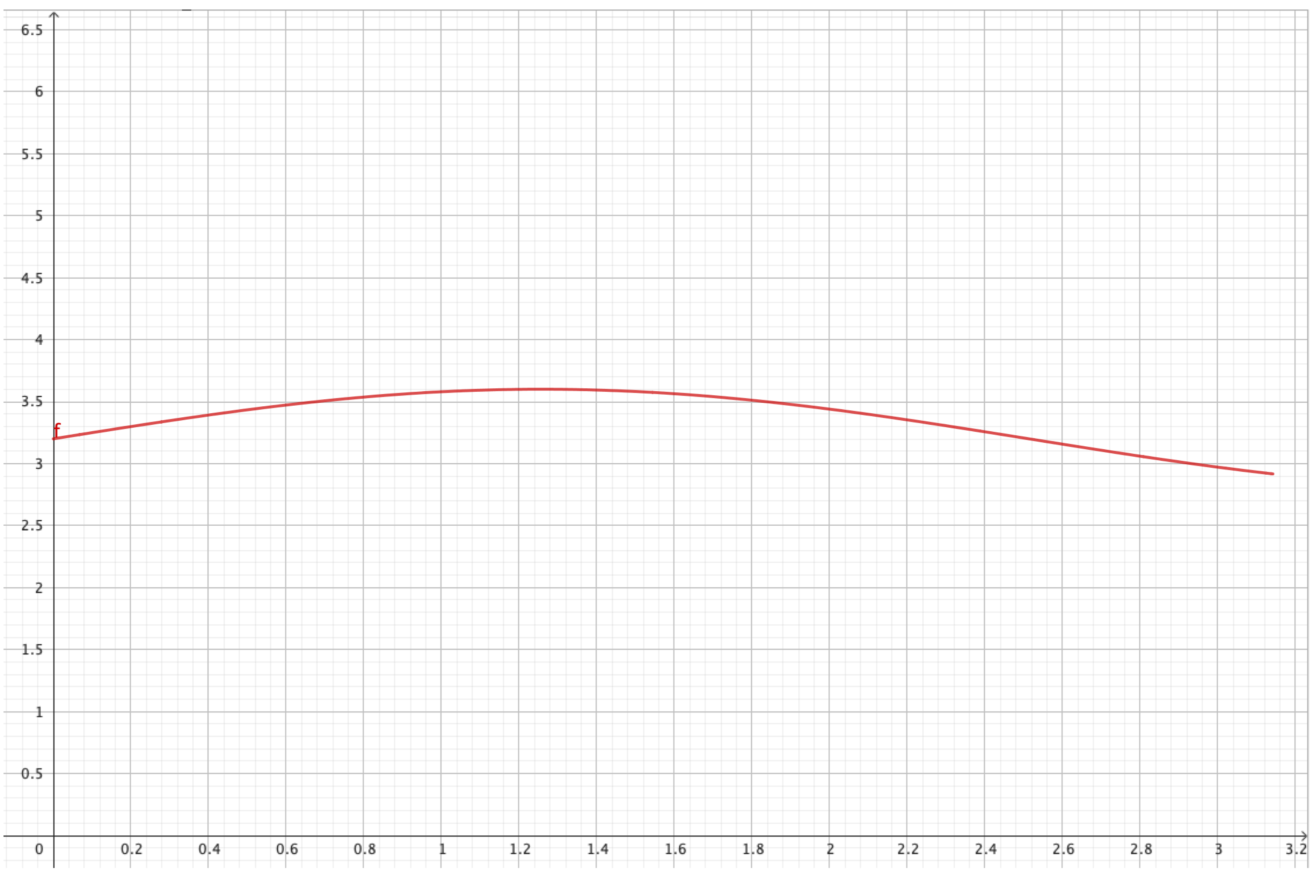
b. Bestem den maksimale luftmængde i lungerne ifølge modellen.

c. Bestem perioden T.

d. Benyt modellen til at bestemme de tidspunkter, hvor luftmængden er 3,5 liter.

e. Bestem $f'(2)$, og giv en fortolkning af dette tal.

Løsning:
a. Grafen for f kan ses i fig. 1.



Figur 1: Grafen for f tegnet i GeoGebra

b. Når luftmængden i lungerne er maksimal ifølge modellen, så må der gælde, at $0{,}4 \cdot \sin(1{,}25 \cdot t)$ er så stor som mulig. Dette er blandt andet tilfældet, når

$$1{,}25 \cdot t = \frac{1}{2}\pi \iff t = \frac{\pi}{1{,}25 \cdot 2} \in [0; 5]$$

Vi har at $Vm(\sin) = [-1;1]$ Altså må den maksimale luftmængde i lungerne være

$$3{,}2 + 0{,}4 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 3{,}2 + 0{,}4 = 3{,}6$$

Ifølge modellen er den maksimale luftmængde i lungerne altså 3,6 L.

c. Fra (128) fra formelsamlingen får vi, at perioden for funktionen f er

$$T = \frac{2\pi}{1{,}25} \approx 5{,}03$$

d. De tidspunkter, t, hvor luftmængden er 3,5 liter må have $f(t) = 3{,}5$.

$$\begin{aligned} 3{,}2 + 0{,}4 \cdot \sin(1{,}25 \cdot t) = 3{,}5 \wedge 0 \leq t \leq 5 &\iff \sin(1{,}25t) = \frac{3}{4} \wedge 0 \leq t \leq 5 \\ &\implies t = \frac{\sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)}{1{,}25} \approx 0{,}68 \vee t = \frac{\pi - \sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)}{1{,}25} \approx 1{,}83 \end{aligned}$$

Altså må de tidspunkter, hvor luftmængden er 3,5 liter være efter 0,68 sekunder og efter 1,83 sekunder.

e. Vi finder den afledede funktion for f mht. t med kædereglen.

$$\begin{aligned} f'(t) &= 0{,}4 \cdot \cos(1{,}25 \cdot t) \cdot 1{,}25 \\ &= 0{,}5 \cdot \cos(1{,}25 \cdot t) \end{aligned}$$

Vi tager nu den afledede funktion for f af 2.

$$\begin{aligned} f'(2) &= 0{,}5 \cdot \cos(1{,}25 \cdot 2) \\ &\approx -0{,}40 \end{aligned}$$

Dette tal fortæller, at luftmængden i personens lunger efter to sekunder aftager med 0,40 liter per sekund.

Opgave 2

En funktion $f : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}$ er bestemt ved

$$f(x) = x + 2\sin x$$

a. Løs ligningen $f'(x) = 0$ og gør rede for monotoniforholdene for f.

Løsning:

a. Vi finder den afledede funktion for f.

$$f'(x) = 1 + 2 \cdot \cos x$$

Når $f'(x) = 0$, så gælder der, at

$$\begin{aligned} 1 + 2 \cdot \cos x = 0 \wedge 0 \leq x \leq 2\pi &\iff \cos(x) = -\frac{1}{2} \wedge 0 \leq x \leq 2\pi \\ &\implies x = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \vee x = 2\pi - \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &\iff x = \frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

Vi finder da den dobbeltafledede funktion for f.

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f'(x)\right) = -2\sin x$$

Vi tager den dobbeltafledede funktion for f af løsningerne til $f'(x) = 0$ for at se, om disse er maksimumssteder, minimumssteder eller andet.

$$\begin{aligned} f''\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= -\sqrt{3} < 0 \\ f''\left(\frac{4\pi}{3}\right) &= \sqrt{3} < 0 \end{aligned}$$

Altså er $\frac{2\pi}{3}$ et maksimumssted, hvor $\frac{4\pi}{3}$ er et minimumssted. Vi får altså følgende om monotoniforholdene for f.

$$f \text{ er voksende på intervallet } \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$$
$$f \text{ er aftagende på intervallet } \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$$
$$f \text{ er voksende på intervallet } \left[\frac{4\pi}{3}; 2\pi\right]$$

Opgave 3

I et koordinatsystem er tre punkter givet ved $A(x{,}0)$, $B(x{,}4-x)$ og $C(0{,}2-x)$, hvor $0 < x < 4$.

a. Bestem arealet af trekant ABC, når $x = 3$.

b. Bestem x, så arealet af trekant ABC er størst muligt.

Løsning:
a. Vi har

$$\overrightarrow{\mathbf{AC}} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Arealet af trekanten når $x = 3$ må være

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{\mathbf{AB}}, \overrightarrow{\mathbf{AC}}\right)\right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot |(0-3)| \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Altså må arealet af trekanten være $\frac{3}{2}$.

b. Arealet af trekant ABC kan beskrives ved

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\left|(b_1 - a_1)\cdot(c_2 - a_2) - (b_2 - a_2)\cdot(c_1 - a_1)\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|(x - x)\cdot(2 - 2x) - (4 - x)\cdot(-x)\right| \\ &= \left|2x - \frac{1}{2}x^2\right| \end{aligned}$$

hvor $A = (a_1{,}a_2)$, $B = (b_1{,}b_2)$ og $C = (c_1{,}c_2)$. Vi differentierer dette udtryk med kædereglen.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} &= \frac{2x - \frac{x^2}{2}}{\left|2x - \frac{x^2}{2}\right|} \cdot (2 - x) \\ &= \frac{\left(4x - x^2\right)\cdot(2-x)}{|4x - x^2|} \end{aligned}$$

Vi antager, at $\left|4x - x^2\right| \neq 0$, og løser ligningen $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = 0$ med nulreglen.

$$\begin{aligned} \frac{\left(4x - x^2\right)\cdot(2-x)}{|4x - x^2|} = 0 &\implies x\cdot(4-x)\cdot(2-x) = 0 \\ &\implies x = 2 \end{aligned}$$

Læg mærke til, at 4 og 0 ikke er gyldige løsninger, grundet modstrid med vores antagelse. Disse tilhører heller ikke $]0;4[$.

Lad $A :]0;4[\to \mathbb{R}$ være funktionen givet ved

$$A(x) = \left| 2x - \frac{1}{2}x^2 \right|$$

Så er A differentiabel i $x \in]0;4[$. Altså er A kontinuert. Derfor må $A'(x)$ have konstant fortegn i intervallerne $]0;2[$ og $]2;4[$. Vi finder da fortegnet ved at vælge tilfældige x-værdier i de to intervaller og udregne $A'(x)$.

$$A'(1) = 1 > 0$$
$$A'(3) = -1 < 0$$

Altså må 2 være et maksimumssted. Arealet af trekant ABC er da størst muligt, når $x = 2$.