

Aflevering 18

2.b mat A

Kevin Zhou

November 2023

Bedømmelseskriterier:

- Redegørelse og dokumentation for metode
- Figurer, grafer og andre illustrationer
- Notation og layout
- Formidling og forklaring

Opgave 1

Funktionen $f : [0; 6] \rightarrow \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 5$$

- Bestem monotoniforholdene for f .
- Bestem ekstrema for f .
- Tegn grafen for f .

Løsning:

a. f differentieres.

$$\frac{df}{dx} = 3x^2 - 18x + 15$$

Herefter finder vi de x -værdier, hvor $\frac{df}{dx} = 0$.

$$3x^2 - 18x + 15 = 0 \implies x = 1 \vee x = 5$$

Vi ved, at $f'(x)$ har konstant fortegn i intervallerne $[0; 1[$, $]1; 5[$, $]5; 6]$, da $f'(x)$ er kontinuert. Siden

$$f'(0) = 15$$

$$f'(2) = -9$$

$$f'(6) = 15$$

så må følgende gælde med hensyn til monotoniforholdene for f .

f er voksende på $[0; 1]$

f er aftagende på $[1; 5]$

f er voksende på $[5; 6]$

b. Ekstremumsstederne for f må være 0, 1, 5 og 6, hvilket fremgår af a. Ekstrema for f kan da nu udregnes.

$$f(0) = 5$$

$$f(1) = 12$$

$$f(5) = -20$$

$$f(6) = -13$$

c. I fig. 1 ses grafen for f .

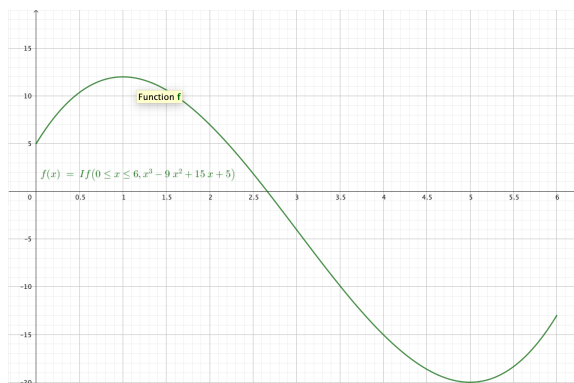


Figure 1: Grafen for f tegnet i GeoGebra

Opgave 2

Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x) = x^3 \cdot e^x$$

- Bestem minimum for f .
- Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $(1, f(1))$.
- Tegn grafen for f .

Løsning:

- a. Funktionen differentieres med produktreglen.

$$\frac{df}{dx} = 3x^2 \cdot e^x + x^3 \cdot e^x$$

Ekstremumsstederne findes ved at sætte lig med 0.

$$3x^2 \cdot e^x + x^3 \cdot e^x = 0 \implies x = -3 \vee x = 0$$

Siden $f'(-1) > 0$ og $-1 \in]-3; 0[$, er f voksende i intervallet $[-3; 0]$, så -3 er altså ekstremumssted til et minimum, der nu kan regnes.

$$f(-3) = (-3)^3 \cdot e^{-3} \approx -1,34$$

- b. Følgende må gælde for tangenten til grafen for f i punktet $(1, f(1))$.

$$\begin{aligned} y &= f'(1) \cdot (x - 1) + f(1) \\ &= 4e^x \cdot (x - 1) + e^x \\ &= 4x \cdot e^x - 3e^x \end{aligned}$$

Altså er ligningen for tangenten $y = 4x \cdot e^x - 3e^x$.

- c. I fig. 2 ses grafen for f .

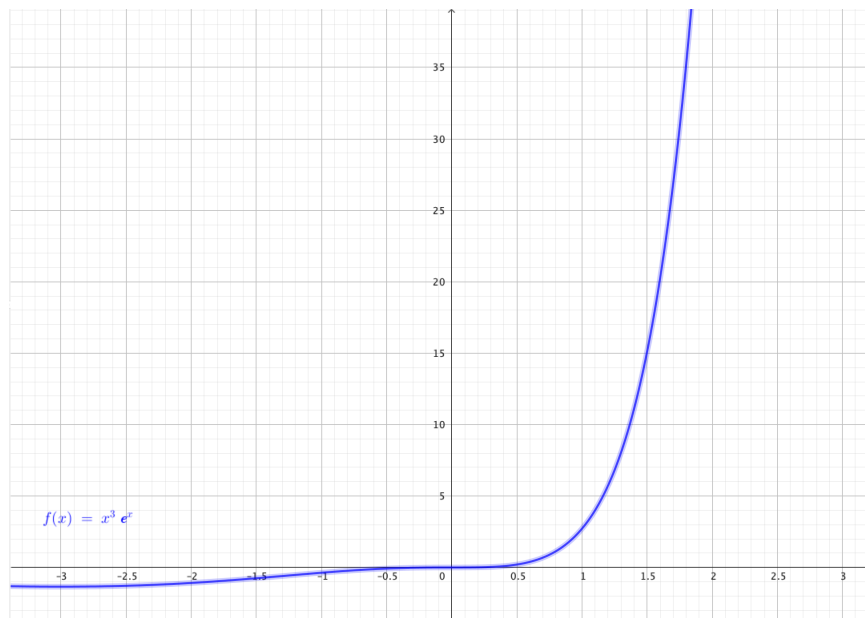


Figure 2: Grafen for f tegnet i GeoGebra