# Aflevering 19

**2.b mat A**

Kevin Zhou

November 2023

**Opgave 1**

Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er bestemt ved

$$f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x.$$

a. Bestem monotoniforholdene for $f$.

b. Bestem minimum for $f$.

***Løsning:***
**a.** Vi bestemmer først den afledede funktion.

$$f'(x) = 4x^3 - 28x + 24$$

Vi kan da finde løsningerne til ligningen $f'(x) = 0$.

$$4x^3 - 28x + 24 = 0 \implies x = -3 \lor x = 1 \lor x = 2$$

Vi bestemmer nu den dobbeltafledede funktion.

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(4x^3 - 28x + 24\right) = 12x^2 - 28$$

Siden

$$\begin{aligned} f''(-3) &= 80 > 0 \\ f''(1) &= -16 < 0 \\ f''(2) &= 20 > 0 \end{aligned}$$

så må $-3$ være et lokalt minimumssted, 1 være et lokalt maksimumssted og 2 være et lokalt minimumssted. Ud fra dette kan vi nemt bestemme monotoniforholdene for $f$.

$$\begin{aligned} &f \text{ er aftagende på } (-\infty; -3] \\ &f \text{ er voksende på } [-3{,}1] \\ &f \text{ er aftagende på } [1; 2] \\ &f \text{ er voksende på } [2; \infty) \end{aligned}$$

**b.** Fra delopgave **a.** ved vi, at $-3$ og 2 er lokale minimumssteder. Vi kan da nemt regne disse lokale minima.

$$\begin{aligned} f(-3) &= -117 \\ f(2) &= 8 \end{aligned}$$

Altså er $-117$ det globale minimum.

**Opgave 2**

Funktionen $f : [0; 12] \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x) = 0{,}5x \cdot \sqrt{144 - x^2}$$

a. Tegn grafen for $f$.

b. Bestem maksimum for $f$.

***Løsning:***
**a.** Grafen for $f$ kan ses i fig. 1.

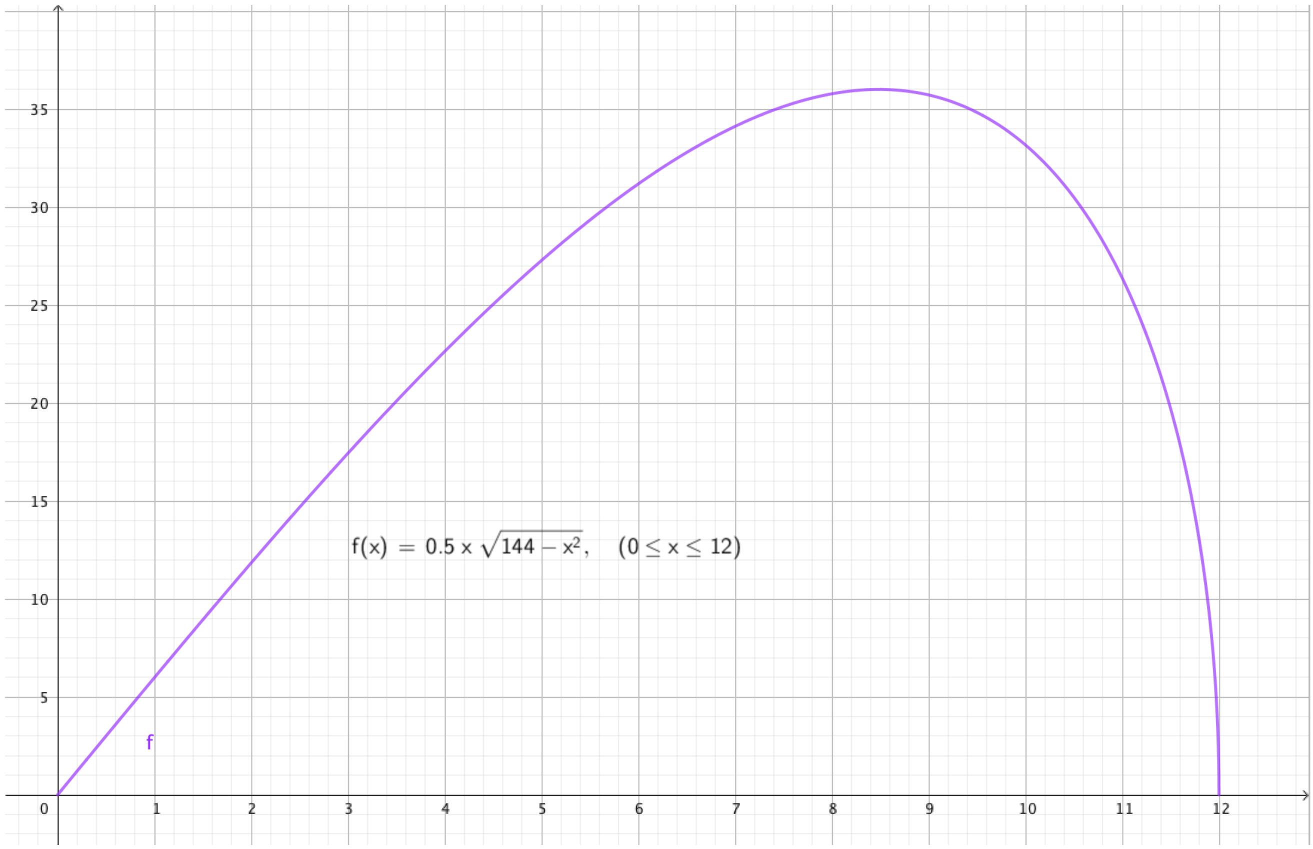


Figure 1: Grafen for $f$

**b.** Den afledede funktion regnes.

$$f'(x) = 0{,}5 \cdot \left(\sqrt{144 - x^2} + x \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{144 - x^2}}\right)\right) = \frac{72 - x^2}{\sqrt{144 - x^2}}$$

Vi finder nu løsningerne til $f'(x) = 0$ via CAS.

$$\frac{72 - x^2}{\sqrt{144 - x^2}} = 0 \implies x = -6\sqrt{2} \vee x = 6\sqrt{2}$$

Det er dog kun en af disse, som tilhører definitionsmængden for $f$:

$$-6\sqrt{2} \notin Dm(f)$$
$$6\sqrt{2} \in Dm(f)$$

Altså vil det sige, at

$$f'(x) = 0 \implies x = 6\sqrt{2}$$

Vi regner nu den dobbeltafledede funktion af $f$ med lommeregneren.

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{72 - x^2}{\sqrt{144 - x^2}}\right) = \frac{x\left(x^2 - 216\right)}{\left(144 - x^2\right)^{3/2}}$$

Med lommeregneren får vi, at

$$f''(x) = -2 < 0$$

Derfor må $6\sqrt{2}$ være det globale maksimumssted. Det globale maksimum må være

$$f(6\sqrt{2}) = 36$$

**Opgave 3**

I en model beskrives udviklingen i det årlige antal nedlagte råvild i Danmark med

$$f(x) = \frac{150000}{1 + 2{,}6 \cdot e^{-0{,}1x}},$$

hvor $f(x)$ angiver det årlige antal nedlagte råvild til tidspunktet $x$ år efter 1980

a. Benyt modellen til at bestemme det årstal, hvor det årlige antal nedlagte råvildt var 120000.

b. Bestem væksthastigheden for det årlige antal nedlagte råvildt til tidspunktet $x = 40$.

***Løsning:***

**a.** Årstallet finder vi ved at løse den nedenstående opstillede ligning.

$$\begin{aligned} f(x) = 120000 \implies & \frac{150000}{1 + 2{,}6 \cdot e^{-0{,}1x}} = 120000 \\ \iff & -0{,}1x = \ln\left(\frac{30000}{2{,}6 \cdot 120000}\right) \\ \iff & x = -10 \cdot \ln\left(\frac{30000}{2{,}6 \cdot 120000}\right) \approx 23{,}42 \end{aligned}$$

Årstallet kan nu bestemmes.

$$1980 + 23{,}42 = 2003{,}42$$

Vi runder her ned. Altså da det årlige antal nedlagte råvildt var 120000 var årstallet 2003.

**b.** Vi finder først den afledede funktion via kædereglen.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 150000\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1 + 2{,}6 \cdot e^{-0{,}1x}}\right)\right) \\ &= 150000 \cdot \left(-\frac{1}{(1 + 2{,}6 \cdot e^{-0{,}1x})^2}\right) \cdot (-0{,}26e^{-0{,}1x}) \\ &= \frac{39000}{(1 + 2{,}6 \cdot e^{-0{,}1x})^2} \end{aligned}$$

Vi kan nu bestemme væksthastigheden for det årlige antal nedlagte råvildt via en lommeregner.

$$f'(40) \approx 650{,}846$$

Altså vokser det årlige antal nedlagte råvildt til tidspunktet $x = 40$ ifølge modellen 650,846 råvildt per år.