Aflevering 26

2.b mat A

Kevin Zhou

1. april 2024

Bedømmelseskriterier:

- Redegørelse og dokumentation for metode
- Figurer, grafer og andre illustrationer
- Notation og layout
- Formidling og forklaring

Opgave 1

En linje l er givet ved ligningen

$$5 \cdot (x-7) + 4 \cdot (y-2) = 0$$

a. Angiv en normalvektor til linjen l.

b. Angiv et punkt P_0 på linjen l.

Løsning:

a. Fra linjens ligning ses det, at en normalvektor til linjen må være

$$\vec{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b. Lad P_0 have x-værdien 7. Så kan vi regne y-værdien for punktet, da det må opfylde linjens ligning.

$$\begin{aligned} 5 \cdot (x-7) + 4 \cdot (y-2) = 0 &\iff 4 \cdot (y-2) = 0 \\ &\iff y = 2 \end{aligned}$$

Altså har vi

$$P_0 = (7{,}2)$$

Opgave 2

En linje l har parameterfremstillingen

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Bestem en ligning for den linje m, der går gennem punktet $(3{,}4)$ og er vinkelret på l.

Løsning:

Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en retningsvektor for l. Derfor kan den da være en normalvektor til linjen m. Da m skal gå gennem $(3{,}4)$, så kan en ligning for m være

$$2 \cdot (x-3) + 1 \cdot (y-4) = 0 \iff 2x + y - 10 = 0$$

Opgave 3

To linjer i planen er givet ved ligningerne

$$\begin{aligned} &l : x - 2y - 5 = 0 \\ &m : -3x + 6y + 12 = 0 \end{aligned}$$

a. Gør rede for, at de to linjer er parallelle.

b. Bestem afstanden mellem de to linjer.

Løsning:

a. Vi kan fra ligningerne se, at en normalvektor for l er $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ og en normalvektor for m er $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Siden der gælder, at

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

så er de to normalvektorer for l og m skalare multipla, hvilket medfører, at de to normalvektorer er parallele. Da to normalvektorer for m og l er parallele, så må m og l også være parallele.

b. Afstanden mellem de to linjer må være afstanden mellem et punkt, der tilhører den ene linje, og den anden linje. Vi ser da, at $P_0 = (1, -\frac{3}{2}) \in m$. Vi har da

$$\begin{aligned} \text{dist}(P_0,l) &= \frac{\left|1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{3}{2} - 5\right|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Opgave 4

To linjer i planen er givet ved parameterfremstillingerne

$$\begin{aligned} l: &\quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \\ m: &\quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

a. Gør rede for, at de to linjer ikke er parallelle

b. Bestem koordinaterne til de to linjer skæringspunktet S.

Løsning:

a. To retningsvektorer for m og l er henholdsvis $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Da disse to vektorer ikke er skalare multipla, så er de ikke parallele. Atså er de to linjer heller ikke parallele.

b. Ved skæringspunktet har vi følgende ligningssystem, der løses:

$$\begin{aligned} -1 + 2t = s \land 2 + t = 1 - s &\implies 2 + t = 1 + 1 - 2t \\ &\iff 3t = 0 \\ &\iff t = 0 \end{aligned}$$

Vi sætter denne t-værdi ind i parameterfremstillingen for l og får positionssvektoren til S.

$$\vec{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Altså er $S = (-1,2)$.

Opgave 5

En cirkel har ligningen

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y + 8 = 0$$

a. Bestem cirklens radius og koordinatsættet til cirklens centrum.

En linje er bestemt ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b. Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem cirklen og linjen.

Løsning:

a. Cirklens ligning kan omskrives på følgende måde:

$$x^2 - 2x + y^2 + 6y + 8 = 0 \iff (x-1)^2 + (y+3)^2 = 2$$

Da er det klart, at cirklens radius må være $\sqrt{2}$ og cirklens centrum må være i $(1, -3)$. Dette ses også i fig. 1.

b. Fra parameterfremstilling ses det (skæring med y-aksen og hældning er givet), at en ligning for linjen må være

$$y = -x - 2$$

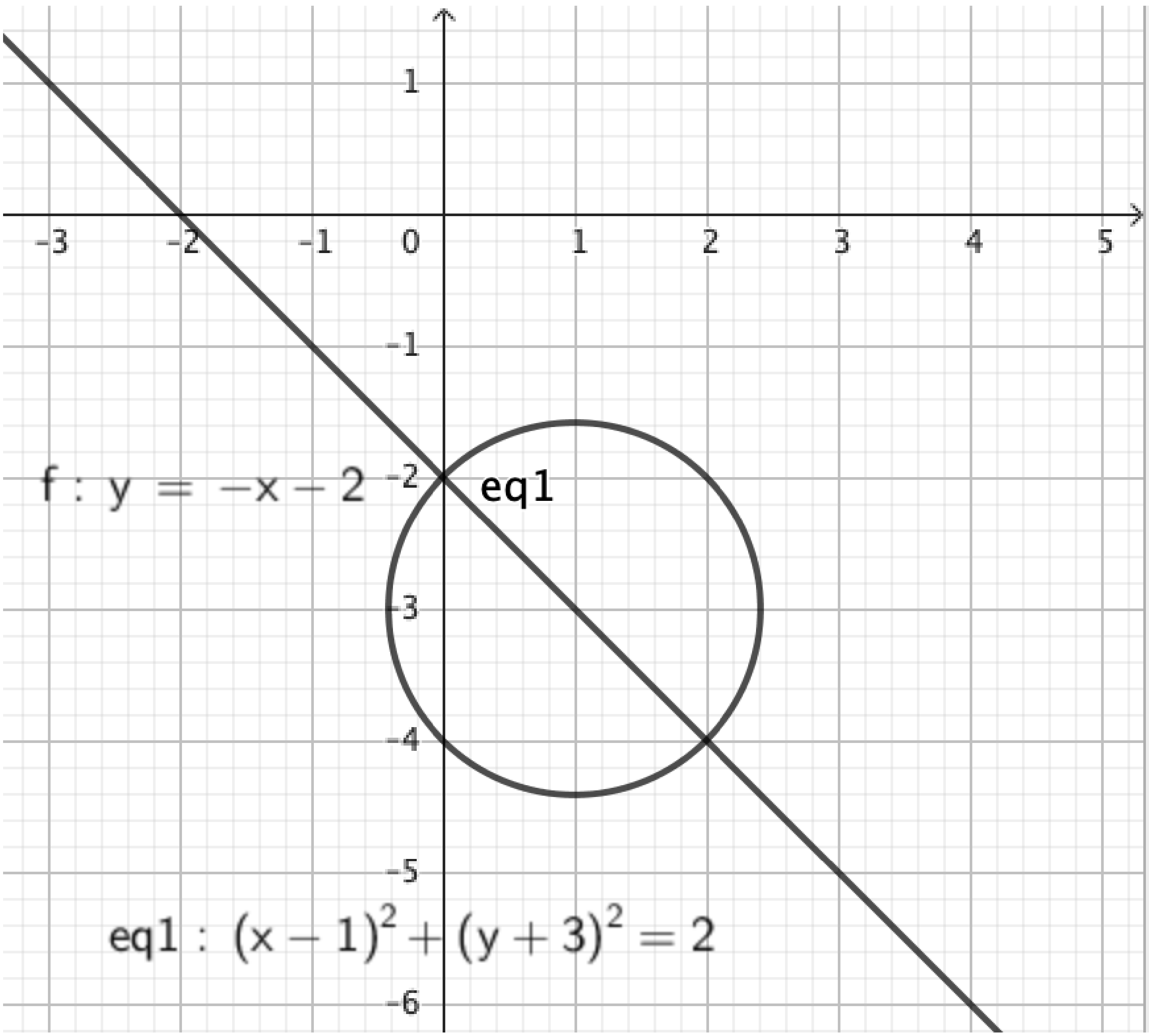
Vi substituerer dette udtryk ind i ligningen for cirklen.

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + (-x-2+3)^2 = 2 &\iff 2x^2 - 4x = 0 \\ &\iff x(2x-4) = 0 \\ &\iff x = 0 \lor x = 2 \end{aligned}$$

De tilhørende y-værdier er

$$y = -2 \lor y = -4$$

Altså har vi koordinatsættene til de to skæringspunkter til at være $(0, -2)$ og $(2, -4)$. Dette ses også i fig. 1.



Figur 1: Cirklen og linjen fra opgaven tegnet i GeoGebra