Aflevering 33

3.b mat A

Kevin Zhou

29. september 2024

Opgave 1

En funktion $f$er løsning til differentialligningen

$$y' = 6 - \frac{1}{2}\,y\,.$$

Det oplyses, at grafen for f går gennem punktet (0,8).

a. Bestem $f'(0)$.

b. Bestem en forskrift for f.

Løsning:
a. Da f er en løsning til den givne differentialligning, så må så må der gælde, at

$$\begin{aligned} f'(0) &= 6 - \frac{1}{2}\cdot 8 \\ &= 6 - 4 \\ &= 2 \end{aligned}$$

b. Siden løsningerne til differentialligningen

$$y' = b - ay, \quad a \neq 0$$

er funktionerne

$$g(x) = \frac{b}{a} + ce^{-ax}, \quad c,x \in \mathbb{R}$$

Altså må forskriften for f være af formen

$$f(x) = \frac{6}{\frac{1}{2}} + c\cdot e^{-\frac{1}{2}x} = 12 + c\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

Siden punktet (0,8) tilhører grafen for f, så har vi

$$\begin{aligned} f(0) = 8 &\iff 8 = 12 + c\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot 0} \\ &\iff c + 12 = 8 \\ &\iff c = -4 \end{aligned}$$

Forskriften for f er altså

$$f(x) = 12 - 4\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

Opgave 2

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y' = 0{,}1\cdot y,$$

og grafen for f går gennem punktet $P(0{,}6)$.

a. Bestem linjeelementet i P.

b. Bestem en forskrift for f.

Løsning:
a. Først bestemmer vi hældningen af tangenten til grafen for f i punktet P

$$f'(0) = 0{,}1\cdot 6 = 0{,}6$$

Altså må linjeelementet i P være (0,6,(0,6)).

b. Siden løsningerne til differentialligningen

$$y' = k \cdot y$$

er funktionerne

$$g(x) = c \cdot e^{kx}, \quad c \in \mathbb{R}$$

Forskriften for f må altså være af formen

$$f(x) = c \cdot e^{0{,}1x}$$

Da punktet $P(0{,}6)$ tilhører grafen for f, så må der gælde, at

$$\begin{aligned} f(0) = 6 &\iff 6 = c \cdot e^{0{,}1\cdot 0} \\ &\iff c = 6 \end{aligned}$$

Altså er en forskrift for f

$$f(x) = 6 \cdot e^{0{,}1x}$$

Opgave 3

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y' = 2y \cdot (8 - y).$$

Grafen for f går gennem punktet $P(0{,}2)$.

a. Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P.

b. Bestem en forskrift for f.

Løsning:

a. Tangenten til grafen for f i punktet P må have hældningen

$$f'(0) = 2 \cdot 2 \cdot (8 - 2) = 24$$

Ligningen for tangenten må da være af formen

$$y = 24x + a$$

Det er klart, at siden tangenten går gennem punktet $P(0{,}2)$, så

$$2 = 24 \cdot 0 + a \iff a = 2$$

En ligning for tangenten til grafen for f i punktet P er altså

$$y = 24x + 2$$

b. Siden der for den logistiske ligning

$$y' = ay(M - y), \quad a > 0, M > 0$$

gælder, at bortset fra de trivielle løsninger (der ikke passer her), så har den løsningerne

$$f(x) = \frac{M}{1 + ce^{-aMx}}, \quad c \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}$$

så må en forskrift for f være af formen

$$f(x) = \frac{8}{1 + ce^{-2\cdot 8x}} = \frac{8}{1 + ce^{-16x}}$$

Vi kan nu finde c.

$$\begin{aligned} f(0) = 2 &\iff 2 = \frac{8}{1 + ce^{-16\cdot 0}} \\ &\iff 2 + 2c = 8 \\ &\iff c = 3 \end{aligned}$$

En forskrift for f er altså

$$f(x) = \frac{8}{1 + 3e^{-16x}}$$

Opgave 4

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot y + 1\,,$$

og grafen for f går gennem punktet $P(1{,}4)$.

a. Bestem en forskrift for f.

Løsning:

a. Ved omskrivning ser vi, at

$$y' = \frac{1}{x} \cdot y + 1 \iff y' - \frac{1}{x} \cdot y = 1$$

Vi benytter sætning 2.4.1 (panserformlen) hvor $a(x) = -\frac{1}{x}$ og $b(x) = 1$. Vi vælger $A(x) = -\ln(|x|)$ som stamfunktion til $a(x)$. Dermed er den fuldstændige løsning funktionerne

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\ln(|x|)} \int e^{-\ln(|x|)}\, dx + ce^{\ln(|x|)} \\ &= |x| \cdot (\ln(|x|) + k) + c|x| \\ &= |x| \cdot \ln(|x|) + \alpha|x| \end{aligned}$$

som er defineret på hele $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Siden P tilhører grafen for f, kan vi finde α.

$$\begin{aligned} f(1) = 4 &\iff 4 = |1| \cdot \ln(|1|) + \alpha \cdot |1| \\ &\iff \alpha = 4 \end{aligned}$$

Altså er en forskrift for f

$$f(x) = |x| \cdot \ln|x| + 4|x|, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Opgave 5

I en model kan tykkelsen af isen på en sø i en periode med frost beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dh}{dt} = \frac{93{,}5}{h},$$

hvor $h(t)$ betegner tykkelsen af isen (målt i mm) til tidspunktet t (målt i timer efter den første måling af isens tykkelse). Til tidspunktet $t = 0$ har isen en tykkelse på 74 mm.

a. Benyt modellen til at bestemme vaeksthastigheden af isens tykkelse til tidspunktet $t = 0$.

b. Bestem en forskrift for $h(t)$.

Når isen har en tykkelse på 150 mm, er den sikker at skøjte på

c. Hvor lang tid går der fra den første måling af isens tykkelse, til den er sikker at skøjte på?

Løsning:

a. Siden isen har en tykkelse på 74 mm når $t = 0$, så har vi $h(0) = 74$. Væksthastigheden af isens tykkelse til tidspunktet $t = 0$ må være

$$\begin{aligned} h'(0) &= \frac{93{,}5}{h(0)} \\ &= \frac{93{,}5}{74} \\ &\approx 1{,}264 \end{aligned}$$

Ifølge modellen er væksthastigheden af isens tykkelse til tidspunktet $t = 0$ altså 1,264 mm/h.

b. Ved seperation af de variable har vi, at

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{93{,}5}{h} &\iff \int h\,dh = \int 93{,}5\,dt \\ &\iff \frac{1}{2}h^2 = 93{,}5t + \frac{1}{2}k \\ &\iff h^2 = 187t + k\end{aligned}$$

hvor k er en konstant. Vi bestemmer nu k, da vi ved at $h(0) = 74$.

$$74^2 = 187 \cdot 0 + k \iff k = 5476$$

Siden is-tykkelsen er ikke-negativ ($h(0) = 74 > 0$) må der gælde, at

$$h^2 = 187t + 5476 \implies h = \sqrt{187t + 5476}$$

Siden funktionen h kun må have reele værdier, så har vi $t > -\frac{5476}{187}$. En forskrift for h er da

$$h(t) = \sqrt{187t + 5476}$$

c. Det er klart, at h er en voksende funktion. Altså er der én værdi for t, hvor $h(t) = 150$ og isen er sikker at skøjte på. Vi bestemmer denne t-værdi.

$$\begin{aligned}h(t) = 150 &\iff \sqrt{187t + 5476} = 150 \\ &\implies 187t + 5476 = 150^2 \\ &\iff t = \frac{150^2 - 5476}{187} \\ &\iff t = \frac{17024}{187} \approx 91{,}0\end{aligned}$$

Altså er isen sikker at skøjte på, når der er gået 91 timer fra den første måling af isens tykkelse.

Opgave 6

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^2 + 4x + 1.$$

a. Bestem værdien af k, så kurvelængden L af grafen for f fra punktet $A(-1,f(-1))$ til punktet $B(k,f(k))$ er 35.

Løsning:

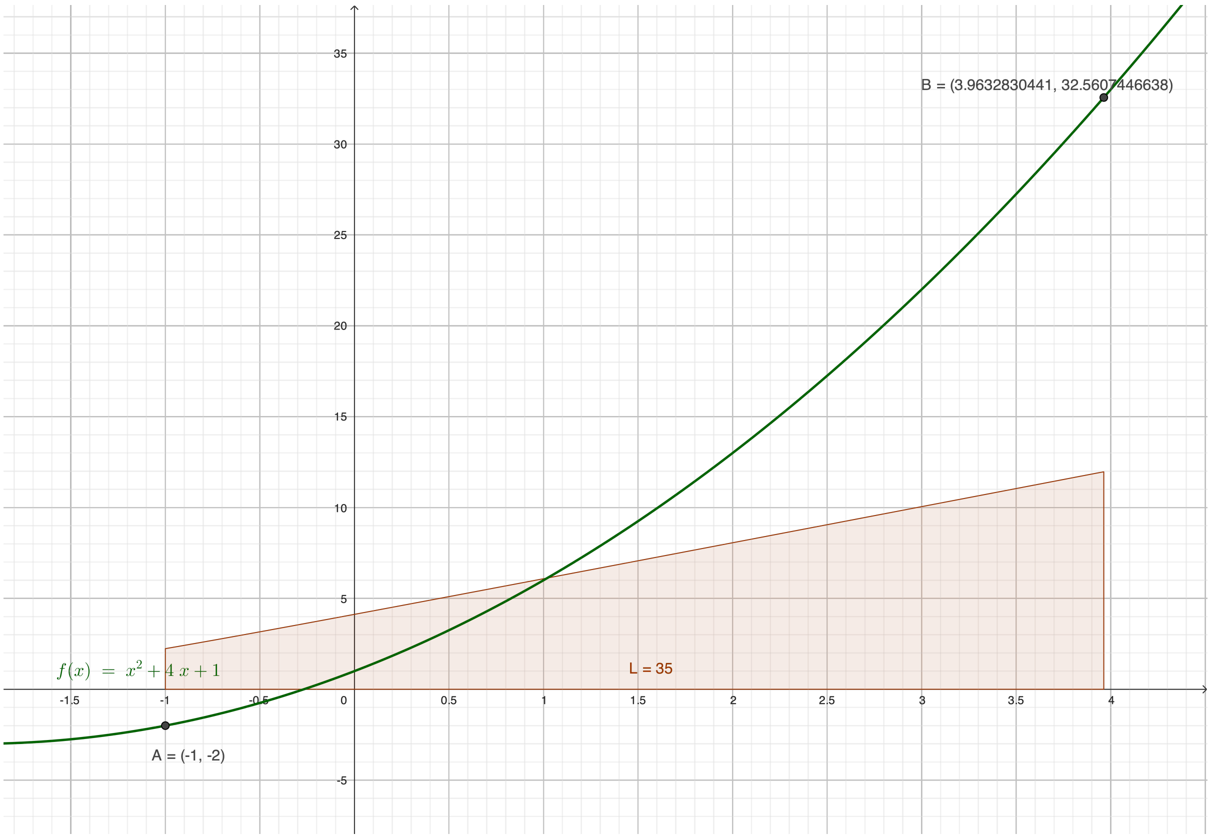
a. Siden f er differentiabel på $[-1,k]$ og $f' = 2x + 4$ er kontinuert på $[-1,k]$, så må kurvelængden L af grafen for f fra punkt A til punkt B være

$$L = \int_{-1}^{k} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

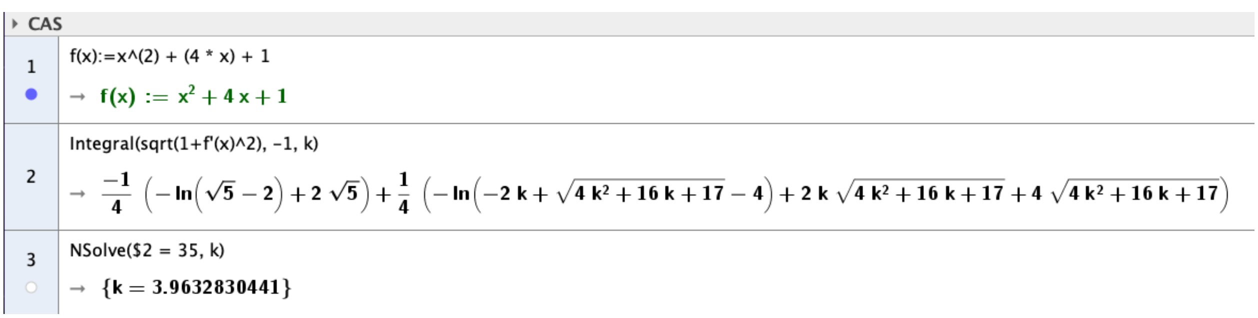
Vi løser da ligningen numerisk $L = 35$ med hensyn til k ved hjælp af CAS (se fig. 2).

$$\begin{aligned}L = 35 &\iff \int_{-1}^{k} \sqrt{1 + (2x+4)^2}\,dx = 35 \\ &\implies k \approx 3{,}963\end{aligned}$$

Altså er kurvelængden af grafen for f fra punktet $A(-1,f(-1))$ til punktet $B(k,f(k))$ 35 når $k = 3{,}963$. En geometrisk afbildning af situationen ses i fig. 1.



Figur 1: Grafen for f, punkterne A og B samt den geometriske betydning af "kurvelængde-integralet"tegnet i GeoGebra



Figur 2: Ligningen løst numerisk med CAS