Aflevering 22

2.b mat A

Kevin Zhou

Januar 2024

Bedømmelseskriterier:

- Redegørelse og dokumentation for metode

- Figurer, grafer og andre illustrationer

- Notation og layout

- Formidling og forklaring

Opgave 1

Funktionen $f : [0; 2\pi[\to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x) = \cos(x)$$

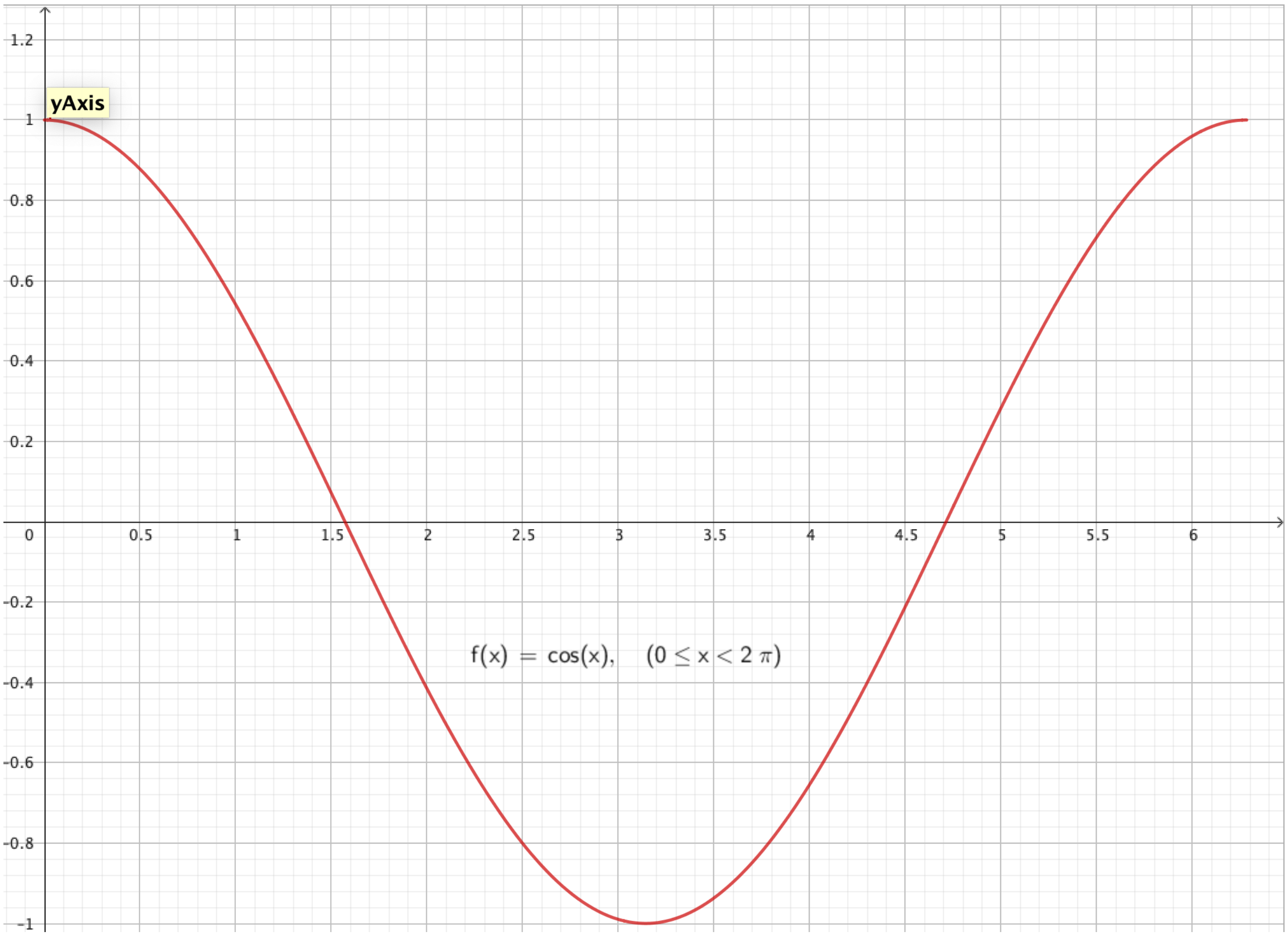
a. Tegn grafen for f.

b. Løs ligningen

$$\cos(x) = \frac{1}{2}, \quad 0 \leq x < 2\pi$$

Løsning:

a. Grafen for f kan ses i fig. 1.



Figur 1: Graf for f tegnet i GeoGebra

b. Vi løser ligningen.

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \wedge 0 \leq x < 2\pi \iff x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Læg mærke til, at der kun er en løsning til ligningen, siden afstanden til næste positive løsning til $\cos(x) = \frac{1}{2}$ er 2π.

Opgave 2

Funktionen $f : [0; \frac{2\pi}{3}[$ er givet ved

$$f(x) = \sin(3x - \pi)$$

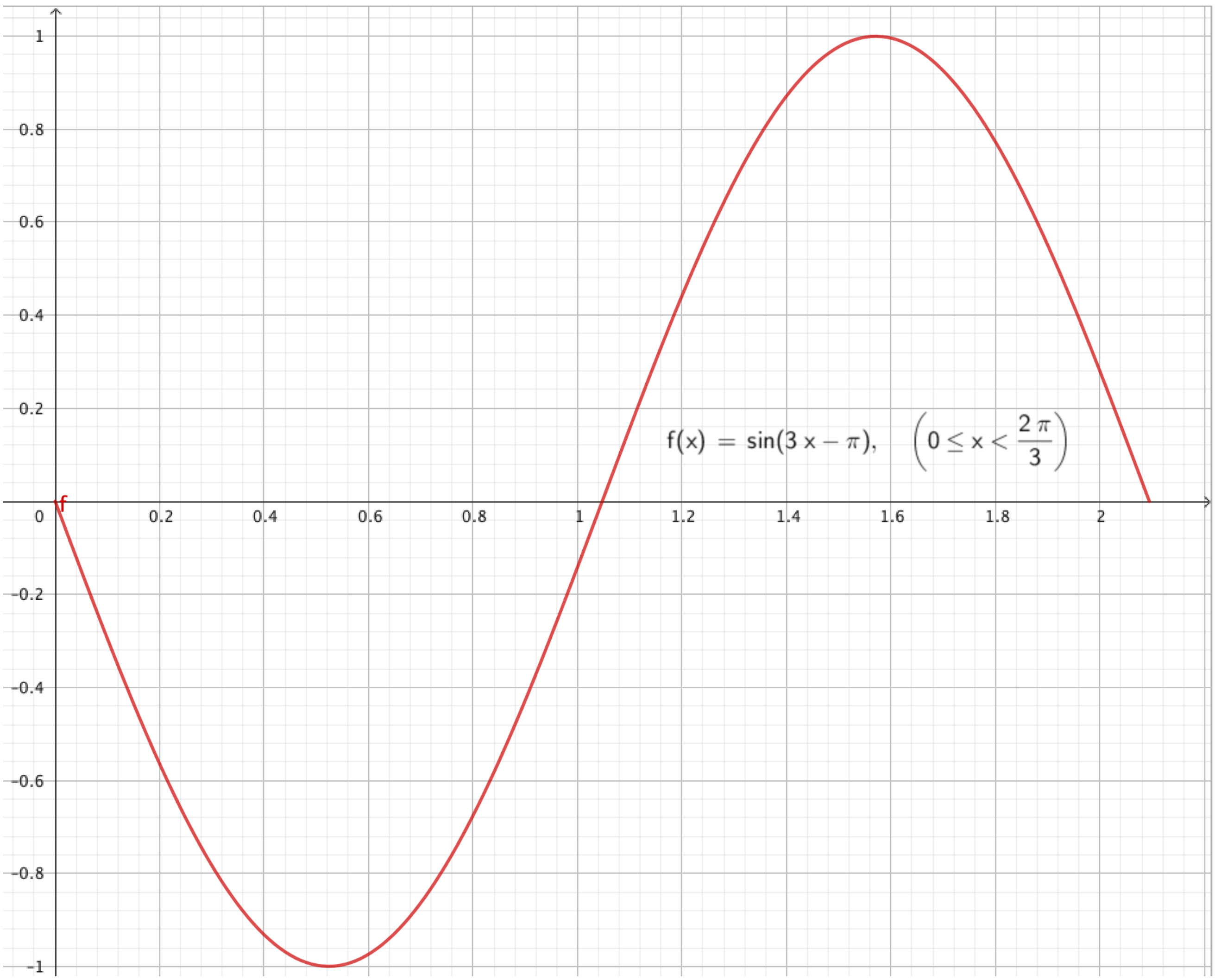
a. Tegn grafen for f.

b. Løs ligningen

$$\sin(3x - \pi) = -1, \quad 0 \leq x < \frac{2\pi}{3}.$$

Løsning:

a. Grafen for f ses i fig. 2.



Figur 2: Grafen for f tegnet i GeoGebra

b. Siden der for en funktion af formen $f(t) = A \cdot \sin(\alpha t + \varphi) + d$ gælder, at den har en periode på $\frac{2\pi}{\alpha}$, så må der gælde, at funktionen f har en periode på $\frac{2\pi}{3}$. Derfor har ligningen kun én løsning.

$$\begin{aligned} \sin(3x - \pi) = -1 \wedge 0 \leq x < \frac{2\pi}{3} &\implies 3x - \pi = -\frac{\pi}{2} \\ &\iff x = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Opgave 3

I en model kan befolkningsudviklingen i Kina beskrives ved

$$N(t) = \frac{2{,}2}{1 + 1{,}09 \cdot 0{,}9636^t},$$

hvor $N(t)$ betegner befolkningstallet i Kina (målt i mia.) til tidspunktet t (målt i år efter 1985). Statistikere har fundet belæg for, at modellen kan bruges til fremskrivning af befolkningstallet i Kina.

a. Bestem befolkningstallet til tidspunktet $t = 30$.

b. Benyt modellen til at bestemme det årstal, hvor befolkningstallet er 1,8 mia.

c. Bestem $N'(50)$, og forklar betydningen af tallet.

Løsning:

a. Vi tager da funktionen N af 30.

$$N(30) = \frac{2{,}2}{1 + 1{,}09 \cdot 0{,}9636^{30}} \approx 1{,}0730$$

Ifølge modellen er befolkningstallet i Kina til tidspunktet $t = 30$ altså 1,0730 mia.

b. Når befolkningstallet ifølge modellen er 1,8 mia., da gælder der, at

$$\frac{2{,}2}{1 + 1{,}09 \cdot 0{,}9636^t} = 1{,}8 \iff 2{,}2 = 1{,}8 \cdot \left(1 + 1{,}09 \cdot 0{,}9636^t\right)$$
$$\implies t = \log_{0{,}9636}\left(\frac{2{,}2 - 1{,}8}{1{,}8 \cdot 1{,}09}\right) \approx 42{,}89$$

Vi runder da op, og årstallet 43 år efter 1985 er 2028. Altså er årstallet, hvor befolkningstallet er 1,8 mia ifølge modellen 2028.

c. Vi finder den afledede funktion for N med kædereglen.

$$\begin{aligned} N'(t) &= 2{,}2 \cdot \left(-\frac{1}{(1 + 1{,}09 \cdot 0{,}9636^t)^2}\right) \cdot 1{,}09 \cdot 0{,}9636^t \cdot \ln(0{,}9636) \\ &= \left(-\frac{2{,}398}{(1 + 1{,}09 \cdot 0{,}9636^t)^2}\right) \cdot 0{,}9636^t \cdot \ln(0{,}9636) \end{aligned}$$

Vi tager den afledede funktion af 50.

$$\begin{aligned} N'(50) &= \left(-\frac{2{,}398}{(1 + 1{,}09 \cdot 0{,}9636^{50})^2}\right) \cdot 0{,}9636^{50} \cdot \ln(0{,}9636) \\ &\approx 0{,}01016 \end{aligned}$$

Det vil altså sige, at der til tidspunktet $t = 50$, hvor årstallet er 2015, så vokser befolkningstallet i Kina ifølge modellen med 0,01016 mia indbyggere per år. Det svarer til 10,16 mio indbyggere per år.

Opgave 4

I en model kan længden af dagen i Anchorage Alaska som funktion af tiden beskrives ved

$$f(t) = 6{,}61 \cdot \sin(0{,}0167t - 1{,}303) + 12{,}2, \quad 0 \leq t \leq 365,$$

hvor $f(t)$ er længden af dagen (målt i timer) til tidspunktet t (målt i døgn efter 1. januar 2011).

a. Benyt modellen til at bestemme længden af dagen i Anchorage Alaska til tidspunktet $t = 100$.

b. Benyt modellen til at bestemme det tidspunkt, hvor længden af dagen i Anchorage Alaska er størst.

c. Bestem $f'(100)$, og gør rede for, hvad dette tal fortæller.

Løsning:

a. Vi tager da funktionen f af 100.

$$\begin{aligned} f(100) &= 6{,}61 \cdot \sin(0{,}0167 \cdot 100 - 1{,}303) + 12{,}2 \\ &= 6{,}61 \cdot \sin(0{,}367) + 12{,}2 \\ &\approx 14{,}57 \end{aligned}$$

Længden af dagen til tidspunktet $t = 100$ er ifølge modellen 14,57 timer.

b. Længden af dagen må være størst når $\sin(0{,}0167t - 1{,}303)$ er størst, siden leddet, det indgår i skal være størst muligt for at længden af dagen er størst. Siden $Vm(\sin) = [-1; 1]$, så må der gælde, at længden af dagen er størst når

$$\begin{aligned} \sin(0{,}0167t - 1{,}303) = 1 \wedge 0 \leq t \leq 365 &\implies 0{,}0167t - 1{,}303 = \frac{1}{2}\pi \\ &\implies t = \frac{\frac{1}{2}\pi + 1{,}303}{0{,}0167} \approx 172 \end{aligned}$$

Altså er længden af dagen i Anchorage Alaska ifølge modellen størst til tidspunktet $t = 172$, der er 172 døgn efter 1. januar 2011.

c. Vi finder den afledede funktion for f med kædereglen.

$$\begin{aligned} f'(t) &= 6{,}61 \cdot \cos(0{,}0167t - 1{,}303) \cdot 0{,}0167 \\ &= 0{,}110387 \cdot \cos(0{,}0167t - 1{,}303) \end{aligned}$$

Vi tager den afledede funktion for f af 100.

$$\begin{aligned} f'(100) &= 0{,}110387 \cdot \cos(0{,}367) \\ &\approx 0{,}1030 \end{aligned}$$

Dette tal fortæller, at dagens længde til tidspunktet $t = 100$ vokser med 0,1030 timer per dag.