Aflevering 28
2.b mat A

Kevin Zhou

4. april 2024

Bedømmelseskriterier:

- Redegørelse og dokumentation for metode

- Figurer, grafer og andre illustrationer

- Notation og layout

- Formidling og forklaring

Opgave 1

Opskriv en vektorfunktion, der beskriver banekurven for en cirkel, der har centrum i punktet $P(2{,}1)$ og radius $r = 4$.

Løsning:
Vi ved da, at den generelle form for en vektorfunktion, der beskriver banekurven for en cirkel med centrum i $(a{,}b)$ og radius r er

$$\vec{\mathbf{p}}(t) = \begin{pmatrix} a + r \cdot \cos(t) \\ b + r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

Altså må en vektorfunktion, der beskriver banekurven for en cirkel, der har centrum i punktet $P(2{,}1)$ og radius $r = 4$ være

$$\vec{\mathbf{p}}(t) = \begin{pmatrix} 2 + 4\cos(t) \\ 1 + 4\sin(t) \end{pmatrix}$$

Opgave 2

En vektorfunktion $\vec{\mathbf{r}} : [-1; 4] \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} t \cdot (t-2)^2 \\ t^2 - 5t + 6 \end{pmatrix}$$

a. Bestem banekurvens skæringspunkter med koordinatakserne.

b. Bestem røringspunkter og ligninger for evt. akseparallelle tangenter.

c. Tegn banekurven for $\vec{\mathbf{r}}(t)$

Løsning:
a. Vi bestemmer først banekurvens skæringer med x-aksen ved at løse ligningen $t^2 - 5t + 6 = 0$.

$$\begin{aligned} t^2 - 5t + 6 = 0 \implies t &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} \\ \iff t &= \frac{6}{2} \vee t = \frac{4}{2} \\ \iff t &= 3 \vee t = 2 \end{aligned}$$

Vi sætter disse t-værdier i vektorfunktionen, for at finde stedvektoren til de to skæringer med x-aksen.

$$\vec{\mathbf{r}}(3) = \begin{pmatrix} 3 \cdot (3-2)^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\vec{\mathbf{r}}(2) = \begin{pmatrix} 2 \cdot (2-2)^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi løser nu lingningen $t \cdot (t-2)^2 = 0$ for at finde banekurvens skæringer med y-aksen.

$$\begin{aligned} t \cdot (t-2)^2 = 0 &\iff t = 0 \vee (t-2)^2 = 0 \\ &\iff t = 0 \vee t = 2 \end{aligned}$$

Vi finder nu stedvektoren når $t = 0$.

$$\vec{\mathbf{r}}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Altså skærer banekurven x-aksen i $(0{,}0)$ og $(3{,}0)$. Banekurven skærer y-aksen i $(0{,}0)$ og $(0{,}6)$.

b. Vi bestemmer først t-værdierne til røringspunkter til vandrette tangenter ved at løse ligningen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^2 - 5t + 6\right) = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^2 - 5t + 6\right) = 0 &\iff 2t - 5 = 0 \\ &\iff t = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Stedvektoren til røringspunktet til den vandrette tangent er da

$$\vec{\mathbf{r}}\left(\frac{5}{2}\right) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

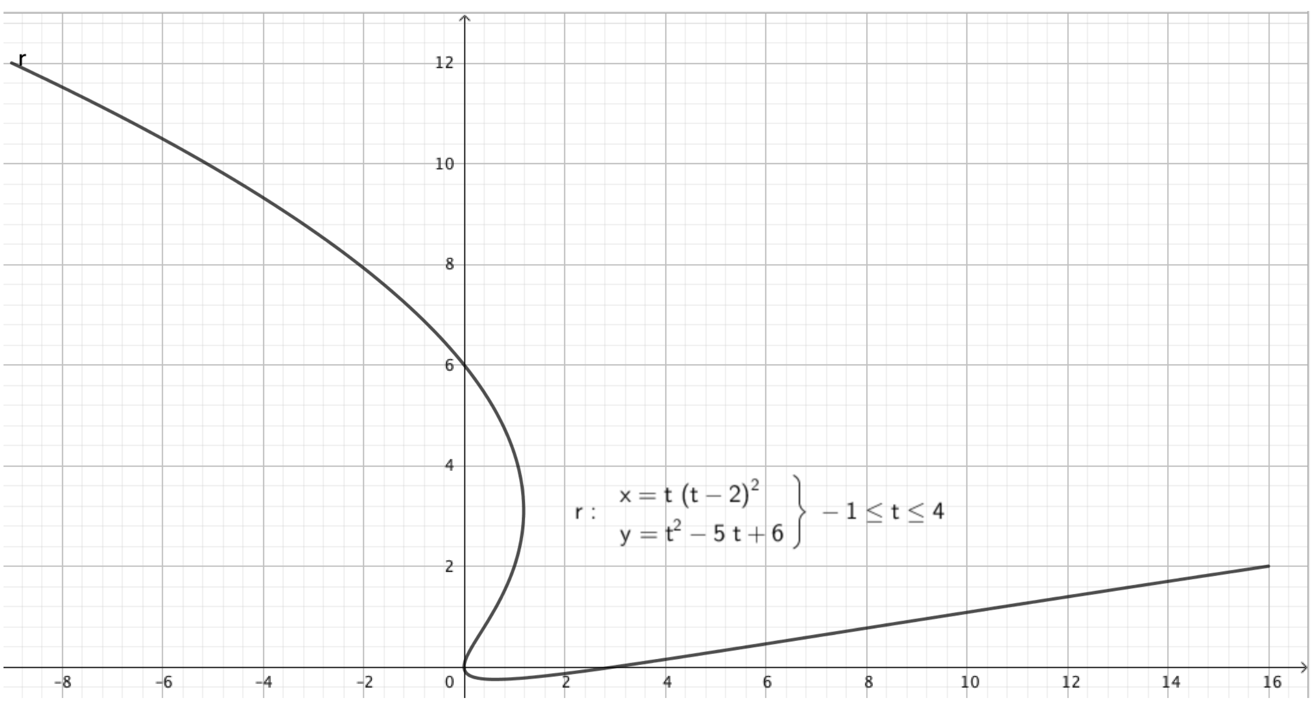
Nu bestemmer vi t-værdierne til røringspunkter til lodrette tangenter ved at løse ligningen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t \cdot (t-2)^2\right) = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t \cdot (t-2)^2\right) = 0 &\iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^3 - 4t^2 + 4t\right) = 0 \\ &\iff 3t^2 - 8t + 4 = 0 \\ &\implies t = \frac{8 + \sqrt{8^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} \vee t = \frac{8 - \sqrt{8^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} \\ &\iff t = \frac{4+2}{3} \vee t = \frac{2}{3} \\ &\iff t = 2 \vee t = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Vi finder nu stedvektorene til de to røringspunkter til de lodrette tangenter.

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{r}}(2) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{\mathbf{r}}\left(\frac{2}{3}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^2 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 5 \cdot \frac{2}{3} + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{32}{27} \\ \frac{28}{9} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Altså er røringspunktet til den vandrette tangent $\left(\frac{5}{8}, -\frac{1}{4}\right)$, hvor ligningen til tangenten er $y = -\frac{1}{4}$. Røringspunkterne til de to lodrette tangenter er henholdsvis (0,0) og $\left(\frac{32}{27}, \frac{28}{9}\right)$, hvor ligningerne til dem er henholdsvis $x = 0$ og $x = \frac{32}{27}$.
c. Banekurven for $\vec{\mathbf{r}}(t)$ ses i fig. 1.



Figur 1: Banekurven for $\vec{\mathbf{r}}(t)$ tegnet i GeoGebra

Opgave 3

En vektorfunktion $\vec{\mathbf{r}} : [-10; 10] \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \begin{pmatrix} 2t^3 - 3t^2 - 36t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

Det oplyses, at der findes præcis ét dobbeltpunkt på banekurven for $\vec{\mathbf{r}}(t)$

a. Bestem dobbeltpunktets koordinater ved beregning.

Løsning:
a. Ved dobbeltpunktet er t-værdien forskellig, men positionsvektoren er den samme. Vi kalder de to t-værdier ved dobbeltpunktet for t og x. Vi skal altså løse ligningssystemet, hvor $x \neq t$:

$$\begin{aligned} 2t^3 - 3t^2 - 36t &= 2x^3 - 3x^2 - 36x \\ t^2 &= x^2 \end{aligned}$$

Da vi ikke vil have $x = t$, så har vi

$$t^2 = x^2 \wedge x \neq t \implies t = -x$$

Vi laver en substitution.

$$\begin{aligned} -2x^3 - 3x^2 + 36x = 2x^3 - 3x^2 - 36x &\iff 4x^3 - 2 \cdot 36x = 0 \\ &\iff x \cdot (x^2 - 18) = 0 \\ &\implies x = 0 \vee x^2 = 18 \\ &\iff x = 0 \vee x = 3\sqrt{2} \vee x = -3\sqrt{2} \end{aligned}$$

x kan dog ikke være lig med 0, da det modstrider vores antagelse om, at $x \neq t$. Altså har vi løsningerne

$$\begin{aligned} x = 3\sqrt{2} \wedge t = -3\sqrt{2} \\ x = -3\sqrt{2} \wedge t = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

Vi finder positionsvektoren til dobbeltpunktet ved at tage vektorfunktionen af en af de fundne t-værdier.

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{r}}(t) &= \begin{pmatrix} 2 \cdot \left(3\sqrt{2}\right)^3 - 3 \cdot \left(3\sqrt{2}\right)^2 - 36 \cdot 3\sqrt{2} \\ \left(3\sqrt{2}\right)^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -54 \\ 18 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Altså må dobbeltpunktets koordinater være $(-54, 18)$.