Matprøve 2

3.b mat A

Kevin Zhou

19. november 2024

Opgave 1

To funktioner f og g er givet ved

$$f(x) = -x^2 + 3x + 5$$

og

$$g(x) = 5.$$

Grafen for f og grafen for g afgrænser et område M i første kvadrant.

a. Bestem arealet af M.

b. Bestem rumfanget af det omdrejningslegeme, som fremkommer, når M drejes 360° om førsteaksen.

Løsning:

a. Vi finder først de x-værdier, hvor graferne for f og g skærer hinanden.

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\iff -x^2 + 3x + 5 = 5 \\ &\iff x(-x+3) = 0 \\ &\iff x = 0 \vee x = 3 \end{aligned}$$

Siden både f og g er kontinuerte og $1 \in [0;3]$ samt at $f(1) = 7 > g(1) = 5$, så må der gælde, at

$$x \in [0;3] \implies f(x) \geq g(x)$$

Altså må arealet af M være

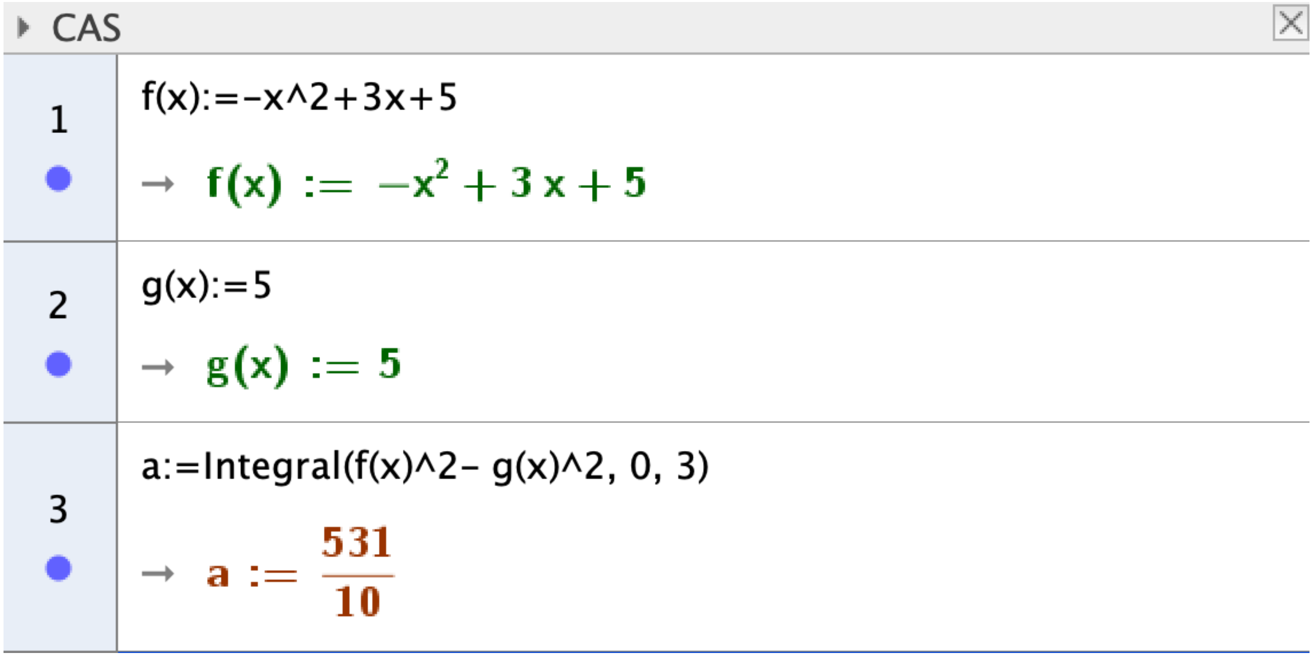
$$\begin{aligned} A(M) &= \int_0^3 (f(x) - g(x))\, dx \\ &= \int_0^3 \left(-x^2 + 3x + 5 - 5\right) dx \\ &= \int_0^3 \left(-x^2 + 3x\right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^3 \\ &= -3^2 + \frac{3^3}{2} \\ &= \frac{27}{2} - 9 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Arealet af M er altså $\frac{9}{2}$.

b. Rumfanget af det hule omdrejningslegeme må være

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^3 \left(f(x)^2 - g(x)^2\right) dx \\ &= \pi \int_0^3 ((-x^2 + 3x + 5)^2 - 5^2)\, dx \\ &= \frac{531}{10}\pi \end{aligned}$$

Der er løst med CAS (se fig. 1). Altså er rumfanget af det omdrejningslegeme, som fremkommer, når M drejes 360° om førsteaksen $\frac{531}{10}\pi$.



Figur 1: Integralet løst med CAS

Opgave 2

I en model er længden L af en torsk (målt i cm) en funktion af torskens alder t (målt i år), og det antages, at differentialligning gælder:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = k \cdot (150 - L)\,,$$

hvor k er en konstant. Det oplyses, at til tiden $t = 0$ er torskens længde 1 cm, og til tiden $t = 1$ er torskens længden 15 cm.

a. Bestem L som funktion af t.

b. Bestem aldersintervallet for de torsk, som er mellem 50 cm og 100 cm lange ifølge modellen.

Løsning:

a. Vi omskriver differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = k \cdot (150 - L) \iff \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = 150k - kL$$

Siden der for ligningen $y' = b - a \cdot y$ gælder, at den har løsningerne $y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$, så må løsninger for L være af formen

$$\begin{aligned} L(t) &= \frac{150k}{k} + c \cdot e^{-kx} \\ &= 150 + c \cdot e^{-kx} \end{aligned}$$

Siden $L(0) = 1$, så har vi

$$\begin{aligned} L(0) = 1 &\iff 150 + c \cdot e^{-k \cdot 0} = 1 \\ &\iff 150 + c = 1 \\ &\iff c = -149 \end{aligned}$$

Da vi ved at $L(1) = 15$, så kan vi også finde k.

$$\begin{aligned} L(1) = 15 &\iff 150 - 149 \cdot e^{-k\cdot 1} = 15 \\ &\iff e^{-k} = \frac{135}{149} \\ &\iff k = -\ln\left(\frac{135}{149}\right) \end{aligned}$$

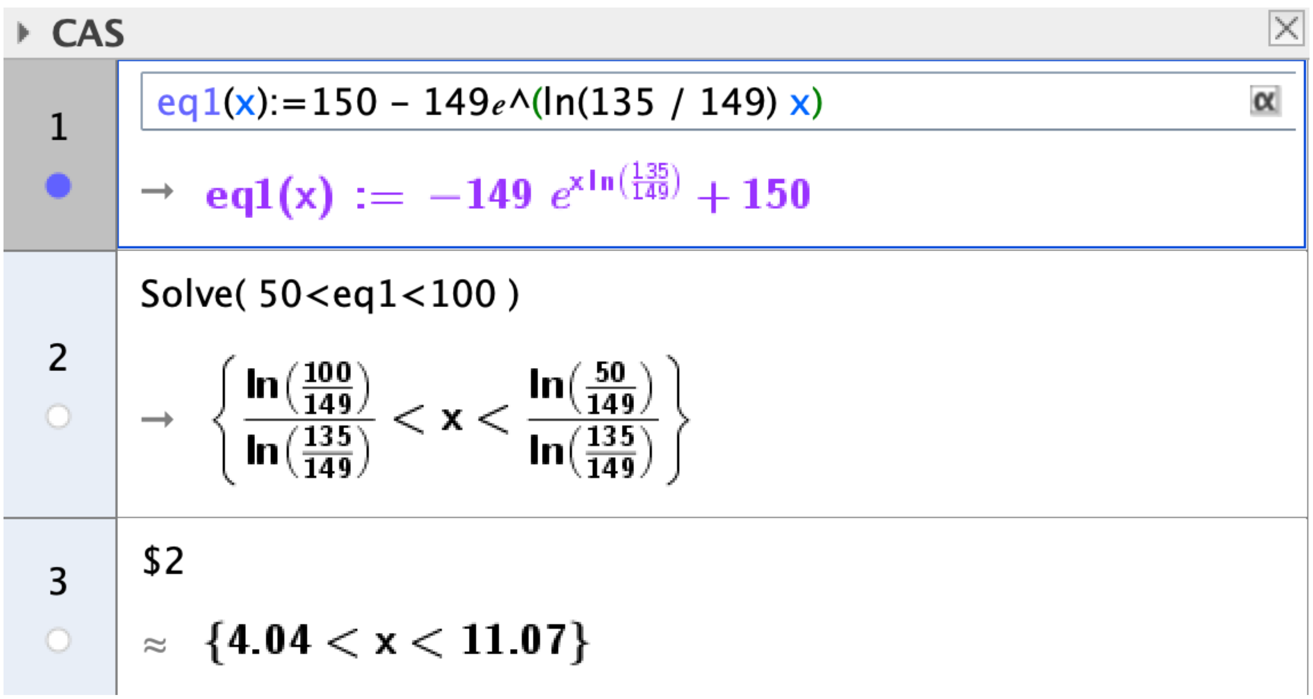
L som funktion af t er altså

$$L(t) = 150 - 149 \cdot e^{\ln\left(\frac{135}{149}\right)\cdot x}$$

b. Aldersintervallet findes ved at løse ligningen

$$50 < L(t) < 100 \implies 4{,}04 < t < 11{,}07$$

der løses med CAS (se fig. 2). Aldersintervallet er altså $t \in]4{,}04; 11{,}07[$.



Figur 2: Ligningen løses med CAS