Matematikprøve 1

2.b mat A

Navn: Kevin Zhou
Nummer: 22

Oktober 2023

Bedømmelseskriterier:

- Redegørelse og dokumentation for metode

- Figurer, grafer og andre illustrationer

- Notation og layout

- Formidling og forklaring

Opgave 1

Omsætningen hos madleverandøren Aarstiderne kan efter 2013 beskrives med modellen

$$f(x) = 301 \cdot 1{,}227^x,$$

hvor betegner antallet af år efter 2013, og $f(x)$ er den årlige omsætning i millioner kr.

a. Hvad fortæller tallet 1,227 om udviklingen af omsætningen?

b. Bestem fordoblingstiden for omsætningen.

Løsning:

a. Tallet 1,227 fortæller, hvor meget omsætningen udvikler sig hvert år, da vækstraten, r, blot er

$$r = 1{,}227 - 1 = 0{,}227$$

Det vil sige, at omsætningen hvert år vokser med 22,7%.

b. Siden fordoblingstiden er et udtryk for, hvor lang tid det tager for omsætningen at vokse med 100%, kan vi benytte resultatet i **a.** og få, at fordoblingstiden er følgende.

$$T_2 = \log_{1{,}227}(2) \approx 3{,}388$$

Altså er fordoblingstiden for omsætningen 3,388 år.

Opgave 2

Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2}.$$

a. Gør rede for, at punkterne $P(-1{,}4)$ og $Q(5{,}10)$ ligger på grafen for f.

b. Undersøg, om linjen gennem P og Q er parallel med tangenten til grafen for f i punktet med førstekoordinat 2.

Løsning:

a. Det er klart, at punkterne $P(-1{,}4)$ og $Q(5{,}10)$ ligger på grafen for f, hvis og kun hvis

$$f(-1) = 4 \wedge f(5) = 10$$

Dette vil vi nu vise.

$$\begin{aligned} f(-1) &= \frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) + \frac{5}{2} \\ &= \frac{3}{2} + \frac{5}{2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Altså ligger $P(-1{,}4)$ på grafen for f.

$$\begin{aligned} f(5) &= \frac{1}{2}5^2 - 5 + \frac{5}{2} \\ &= \frac{6 \cdot 5}{2} - 5 \\ &= 15 - 5 \\ &= 10 \end{aligned}$$

Altså ligger $Q(5{,}10)$ også på grafen for f.

b. To linjer er parallelle, hvis deres hældning er ens. Linjen gennem P og Q har da hældningen

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10 - 4}{5 - (-1)} = 1$$

For at finde hældningen til tangenten til grafen for f, når $x = 2$, kan vi benytte den geometriske betydning af differentialkvotienten $f'(2)$, der netop er denne.

$$f'(x) = x - 1 \implies f'(2) = 1$$

Det ses da, at disse to linjer har samme hældning. Altså er linjen gennem P og Q parallel med tangenten til grafen for f i punktet med førstekoordinat 2.

Opgave 3

Linjerne l og m er givet ved

$$l : 5x - 2y + 1 = 0$$

$$m : 4x + 3y - 13 = 0$$

a. Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem l og m.

b. Bestem den spidse vinkel v mellem l og m.

Løsning:
a. Ved skæringspunktet er x-værdierne og y-værdierne ens. Da kan ligningerne ses som et ligningssystem, der skal løses.

$$\begin{aligned} 5x - 2y + 1 = 0 \wedge 4x + 3y - 13 = 0 &\implies y = \frac{5x+1}{2} \wedge 4x + 3y - 13 = 0 \\ &\implies 4x + 3 \cdot \frac{5x+1}{2} - 13 = 0 \\ &\iff (4 + \frac{15}{2} \cdot x) = 13 - \frac{3}{2} \\ &\iff \frac{23}{2}x = \frac{23}{2} \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

y kan nu findes.

$$y = \frac{5x+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Koordinatsættet til skæringspunktet mellem l og m er altså (1,3).

b. Hældningen for l kendes fra **a.**, men skal findes for m.

$$4x + 3y - 13 = 0 \iff y = -\frac{4}{3}x + \frac{13}{3}$$

Hældningen for m er altså $-\frac{4}{3}$. Vinklen v mellem linjerne må da være følgende, grundet hældningerne for linjerne.

$$v = 180° - \tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) - \tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right) \approx 58{,}67°.$$