Aflevering 32
3.b mat A

Kevin Zhou

14. september 2024

Opgave 1

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y' = -0{,}5 \cdot y$$

Grafen for f går gennem punktet $P(2{,}1)$. Bestem en forskrift for f.

Løsning:
Siden den fuldstændig løsning til differentialligningen $y' = ky$ er funktionerne

$$g(x) = ce^{kx}, \quad c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R},$$

så må forskriften for f være af formen

$$f(x) = c \cdot e^{-0{,}5x}$$

Siden punktet $P(2{,}1)$ tilhører grafen for f, så gælder der

$$\begin{aligned} f(2) = 1 &\implies c \cdot e^{-0{,}5 \cdot 1} = 1 \\ &\iff c = \frac{1}{e^{-0{,}5}} \\ &\iff c = e^{0{,}5} \end{aligned}$$

Forskriften for f er altså

$$f(x) = e^{0{,}5} \cdot e^{-0{,}5x} = e^{-0{,}5x+0{,}5}$$

Opgave 2

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^y \cdot (x-4)$$

Grafen for f går gennem punktet $P(9{,}0)$.
Bestem linjeelementet i punktet P.

Løsning:
Linjeelementets hældning må være

$$\begin{aligned} f'(9) &= e^0 \cdot (9-4) \\ &= 1 \cdot 5 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Linjeelementet i punktet P er altså $(9{,}0{,}5)$

Opgave 3

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y' = 29 - 7 \cdot y$$

Grafen for f går gennem punktet $P(0{,}2)$.

a. Bestem hældningskoefficienten for tangenten til grafen for f i punktet P.

b. Bestem en forskrift for f.

Løsning:
a. Hældningskoefficienten må være

$$\begin{aligned} f'(0) &= 29 - 7 \cdot 2 \\ &= 15 \end{aligned}$$

Hældningskoefficienten for tangenten til grafen for f i punktet P er altså 15.

b. Siden den fuldstændige løsning til en differentialligning af formen $y' = b - a \cdot y$ er funktionerne

$$g(x) = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}, \quad c,x \in \mathbb{R}$$

så må forskriften for f være af formen

$$f(x) = \frac{29}{7} + c \cdot e^{-7x}$$

Vi kan nu beregne c.

$$\begin{aligned} f(0) = 2 &\implies \frac{29}{7} + c \cdot e^{-7\cdot 0} = 2 \\ &\iff c = 2 - \frac{29}{7} \\ &\iff c = -\frac{15}{7} \end{aligned}$$

Forskriften for f er altså $f(x) = \frac{29}{7} - \frac{15}{7} \cdot e^{-7x}$.

Opgave 4

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{1}{16} \cdot \sqrt{(16x - x^2) \cdot (x^2 - 24x + 164)}, \quad 0 \le x \le 16\,.$$

a. Løs ligningen $f(x) = 0$.

Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen et område M. Figur 1 viser en legetøjskegle. I en model kan legetøjskeglen beskrives ved det omdrejningslegeme, der fremkommer ved, at M drejes 360° om førsteaksen. I modellen på figur 2 har begge akser enheden cm.

b. Benyt modellen til at bestemme rumfanget af legetøjskeglen

Løsning:

a. Vi løser ligningen med nulreglen.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\implies \frac{1}{16} \cdot \sqrt{(16x - x^2) \cdot (x^2 - 24x + 164)} = 0 \\ &\iff (16x - x^2) \cdot (x^2 - 24x + 164) = 0 \\ &\iff x(16 - x) = 0 \lor x^2 - 24x + 164 = 0 \\ &\iff x = 0 \lor x = 16 \end{aligned}$$

Bemærk, at $x^2 - 24x + 164 = 0$ ikke har nogen reele løsninger, og at de fundne løsniger tilhører f's domæne. Løsningerne til $f(x) = 0$ er altså $x = 0 \lor x = 16$.

b. Volumenet af keglen må være

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^{16} f(x)^2 \, dx \\
&= \pi \int_0^{16} \left(\frac{1}{16} \cdot \sqrt{(16x - x^2) \cdot (x^2 - 24x + 164)} \right)^2 \, dx \\
&= \frac{\pi}{16^2} \int_0^{16} \left(-x^4 + 40x^3 - 548x^2 + 2624x \right) \, dx \\
&= \frac{\pi}{16^2} \left(-\frac{1}{5} \left[x^5 \right]_0^{16} + \frac{40}{4} \left[x^4 \right]_0^{16} - \frac{548}{3} \left[x^3 \right]_0^{16} + \frac{2624}{2} \left[x^2 \right]_0^{16} \right) \\
&= -\frac{16^3 \pi}{5} + 16^2 \cdot 10 \cdot \pi - \frac{16 \cdot 548\pi}{3} + 1312\pi \\
&= \frac{1952}{15}\pi \\
&\approx 408{,}83
\end{aligned}
$$

Siden akserne har enheden cm, så må volumenet af keglen være 408,83 cm^2.

Opgave 5

Figuren viser graferne for funktionerne f og g givet ved

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 3 \quad \text{og} \quad g(x) = 0{,}75x + 0{,}75\,.$$

a. Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem grafen for f og grafen for g.

De to grafer afgrænser et område M i første kvadrant.

b. Bestem arealet af M.

c. Bestem omkredsen af M.

Løsning:

a. Vi finder først x-værdien til skæringspunkterne for grafen for f og g ved at løse ligningen $f(x) = g(x)$ med CAS (se fig. 1).

$$
\begin{aligned}
f(x) = g(x) &\implies -x^3 + 3x^2 + x - 3 = 0{,}75x + 0{,}75 \\
&\iff -x^3 + 3x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{15}{4} = 0 \\
&\iff x = -1 \vee x = \frac{3}{2} \vee x = \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

Vi finder da de tilhørende y-værdier ved at beregne $g(x)$.

$$
\begin{aligned}
g(-1) &= \frac{3}{4} \cdot (-1) + \frac{3}{4} = 0 \\
g\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{15}{8} \\
g\left(\frac{5}{2}\right) &= \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{21}{8}
\end{aligned}
$$

Koordinatsættene til hvert af skæringspunkterne mellem grafen for f og grafen for g er altså $(-1{,}0)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{8}\right)$ og $\left(\frac{5}{2}, \frac{21}{8}\right)$

Figur 1: Ligningen løst med CAS

b. Vi bemærker, at kun skæringspunkterne $\left(\frac{3}{2},\frac{15}{8}\right)$ og $\left(\frac{5}{2},\frac{21}{8}\right)$ fra **a.** er i første kvadrant Ved at kigge på figuren i opgavebeskrivelsen ses det, at $f(x) \geq g(x)$ for alle $x \in \left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$. Siden det er de to grafer, der afgrænser området M, så må M være

$$M = \{(x,y) : \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \wedge g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

f og g er begge kontinuerte funktioner. Altså gælder der, at

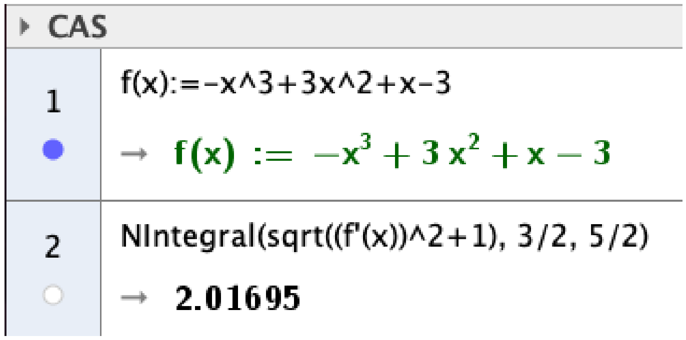
$$\begin{aligned}
A(M) &= \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} (f(x) - g(x))\, dx \\
&= \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \left(-x^3 + 3x^2 + x - 3 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}\right) dx \\
&= \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \left(-x^3 + 3x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{15}{4}\right) dx \\
&= -\frac{1}{4}\left[x^4\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} + \left[x^3\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{8}\left[x^2\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} - \frac{15}{4}\left[x\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Arealet af M er altså $\frac{1}{2}$.

c. Da det er graferne for f og g, der afgrænser M, så må omkredsen af M være summen af kurvelængderne af graferne for f og g i intervallet $x \in \left[\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$ (som vi betegner L_f og L_g). Bemærk, at siden g er en lineær funktion, så kan L_g regnes med pythagoras. L_f regnes med CAS (se fig. 2).

$$\begin{aligned}
O(M) &= L_f + L_g \\
&= \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx + \sqrt{\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{21}{8} - \frac{15}{8}\right)^2} \\
&= \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \sqrt{1 + (-3x + 6x + 1)^2}\, dx + \frac{5}{4} \\
&\approx 2{,}017 + \frac{5}{4} \\
&= 3{,}267
\end{aligned}$$

Omkredsen af M er altså 3,267.



Figur 2: L_f beregnet numerisk med CAS

Opgave 6

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = -x^2 + 4\,.$$

Grafen for f og koordinatsystemets akser afgrænser i første kvadrant en punktmængde M, der har et areal.

a. Bestem arealet af M.

Når $0 < a < 2$, skærer tangenten til grafen for$f$ i punktet $P(a, f(a))$ koordinatsystemets akser i punkterne Q og R (se figuren). Det oplyses, at arealet af trekant OQR er en funktion af a, som er givet ved

$$T(a) = \frac{(a^2+4)^2}{4a}, 0 < a < 2.$$

b. Bestem den værdi af a, der gør arealet af trekant OQR mindst muligt

c. Bestem koordinatsættet til hvert af punktern Q og R udtrykt ved a, og gør rede for, at arealet af trekant OQR som funktion af a er givet ved $T(a)$.

Løsning:

a. Vi løser først ligningen $f(x) = 0$ for at finde det positive nulpunkt.

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff -x^2 + 4 = 0 \\ &\iff x^2 = 4 \\ &\iff x = 2 \vee x = -2 \end{aligned}$$

Altså vil det sige, at grafen for f skærer y-aksen, når $x = 0$, og grafen for f skærer x-aksen i første kvadrant når $x = 2$. Siden M er punktmængden i første kvadrant afgrænset af grafen for f og koordinatsystemets akser, så må arealet være

$$\begin{aligned} A(M) &= \int_0^2 f(x)\,dx \\ &= \int_0^2 \left(-x^2 + 4\right)\,dx \\ &= -\frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^2 + 4\left[x\right]_0^2 \\ &= -\frac{8}{3} + 8 \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Arealet af punktmængden M er altså $\frac{16}{3}$.

b. Vi finder først den afledede funktion af T med hensyn til a via produktreglen.

$$\begin{aligned}
T'(a) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\frac{\left(a^2+4\right)^2}{4a}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\left(a^2+4\right)^2\right)\cdot\frac{1}{4a} + \left(a^2+4\right)^2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\frac{1}{a}\right) \\
&= 2\cdot\left(a^2+4\right)\cdot 2a\cdot\frac{1}{4a} + \left(a^2+4\right)^2\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{a^2}\right) \\
&= \left(a^2+4\right) - \frac{\left(a^2+4\right)^2}{4a^2} \\
&= a^2+4-\frac{a^2}{4}-\frac{4}{a^2}-2 \\
&= \frac{3}{4}a^2-\frac{4}{a^2}+2
\end{aligned}$$

Vi sætter denne lig 0 og løser for a.

$$\begin{aligned}
T'(a)=0 &\implies \frac{3}{4}a^2-\frac{4}{a^2}+2=0 \\
&\iff \frac{3a^4-16+8a^2}{4a^2}=0 \\
&\iff 3a^4+8a^2-16=0
\end{aligned}$$

Vi laver nu en substitution med $u=a^2$.

$$\begin{aligned}
3a^4+8a^2-16=0 &\iff 3u^2+8u-16=0 \\
&\iff (u+4)(3u-4)=0 \\
&\iff u=-4 \lor u=\frac{4}{3} \\
&\iff a=\pm\sqrt{-4} \lor a=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}
\end{aligned}$$

Imidlertid er $Dm(T)=]0;2[$, og vi har da, at

$$a=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Vi ser, at $0<1<\frac{2}{\sqrt{3}}$, og beregner $T'(1)$.

$$\begin{aligned}
T'(1) &= \frac{3}{4}\cdot 1^2-\frac{4}{1^2}+2 \\
&= -\frac{5}{4}<0
\end{aligned}$$

Vi ser også, at $\frac{2}{\sqrt{3}}<\frac{4}{3}<2$, og beregner $T'\left(\frac{4}{3}\right)$.

$$\begin{aligned}
T'\left(\frac{4}{3}\right) &= \frac{3}{4}\cdot\frac{4^2}{3^2}-\frac{4\cdot 3^2}{4^2}+2 \\
&= \frac{4}{3}-\frac{3^2}{4}+2 \\
&= \frac{13}{12}>0
\end{aligned}$$

Siden $T'(a)$ er kontinuert i intervallet $]0;2[$, samt at $T'(1)<0$ og $T'\left(\frac{4}{3}\right)>0$ er det klart, at $\frac{2}{\sqrt{3}}$ må være et minimumssted. Arealet af trekant OQR er altså mindst muligt, når $a=\frac{2}{\sqrt{3}}$.

c. Ligningen for tangenten til grafen for f i punktet $P(a,f(a))$ er

$$\begin{aligned} y &= f'(a)\cdot(x-a)+f(a) \\ &= -2a\cdot(x-a)-a^2+4 \\ &= a^2-2ax+4 \end{aligned}$$

Da punktet R ligger på y-aksen, så må x-værdien være 0. Da gælder da

$$\begin{aligned} y &= a^2-2a\cdot 0+4 \\ &= a^2+4 \end{aligned}$$

Altså har vi $R=(0,a^2+4)$. Siden punktet Q ligger på x-aksen, så må dets y-værdi være 0. Da gælder da

$$0=a^2-2ax+4 \iff x=\frac{a^2+4}{2a}$$

Altså må Q udtrykt ved a være $\left(\frac{a^2+4}{2a},0\right)$. Arealet af trekant OQR må være $\frac{1}{2}\cdot|OQ|\cdot|OR|$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\cdot|OQ|\cdot|OR| \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+4}{2a}\cdot\left(a^2+4\right) \\ &= \frac{\left(a^2+4\right)^2}{4a} \\ &= T(a) \end{aligned}$$

Per definition af punkterne O og Q findes de kun, når $0<a<2$, hvilket stemmer overens med funktionens domæne. Altså har vi vist, hvad vi ville.