Aflevering 25

2.b mat A

Kevin Zhou

6. februar 2024

Bedømmelseskriterier:

- Redegørelse og dokumentation for metode
- Figurer, grafer og andre illustrationer
- Notation og layout
- Formidling og forklaring

Opgave 1

I en model kan dugen på en drage beskrives ved parallelogrammet udspændt af vektorerne

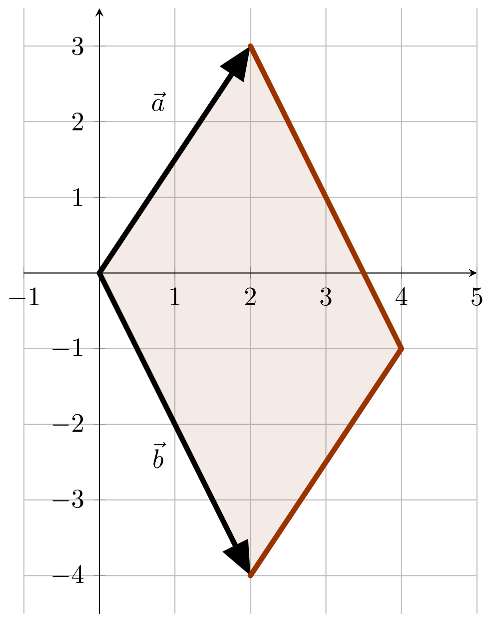
$$\vec{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Enheden i modellen er dm.

a. Tegn en model af dragen i et koordinatsystem med enheden dm på begge akser.

b. Benyt modellen til at bestemme arealet af dugen.

Løsning:
a. En model af dragen ses i fig. 1 med enheden dm på begge akser.



Figur 1: Model tegnet med GeoGebra og TikZ, hvor enheden på akserne er dm

b. Arealet af parallelogrammet udspændt af de to vektorer er da

$$\begin{aligned} A &= \left|\det\left(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}\right)\right| \\ &= \left|\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}\right| \\ &= 14 \end{aligned}$$

Altså er arealet af dugen 14 dm^2.

Opgave 2

En ret linje i planen går gennem punktet $P(2,5)$, og en normalvektor til linjen er givet ved $\vec{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a. Bestem en ligning for linjen.

b. Bestem en parameterfremstilling af linjen.

Løsning:

a. For en linje gennem $P_0(x_0,y_0)$ med normalvektor $\vec{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ har den ligningen

$$\begin{aligned} a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0 &\implies 7 \cdot (x-2) + 2 \cdot (y-5) = 0 \\ &\iff 7x + 2y - 24 = 0 \end{aligned}$$

b. Stedvektoren for punktet $P(2{,}5)$ på linjen er $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Tværvektoren for normalvektoren til linjen må være en retningsvektor for linjen, og er $\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$. Altså er en parameterfremstilling af linjen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Opgave 3

Lad vektorerne $\vec{\mathbf{a}}$ og $\vec{\mathbf{b}}$ være givet ved

$$\vec{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a. Bestem $t \in \mathbb{R}$, således at $\left(\vec{\mathbf{a}} + t \cdot \vec{\mathbf{b}}\right) \perp \vec{\mathbf{b}}$.

b. Undersøg, om der findes $t \in \mathbb{R}$, således at $\left(\vec{\mathbf{a}} + t \cdot \vec{\mathbf{b}}\right) \parallel \vec{\mathbf{b}}$.

c. Bestem projektionen af $\vec{\mathbf{a}}$ på $\vec{\mathbf{b}}$.

Løsning:

a. Skalarproduktet af de to ortogonale vektorer må være 0.

$$\begin{aligned} \left(\vec{\mathbf{a}} + t \cdot \vec{\mathbf{b}}\right) \cdot \vec{\mathbf{b}} = 0 &\implies \begin{pmatrix} -3 + t \cdot 5 \\ 2 + t \cdot 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff 5 \cdot (-3 + 5t) + 4 \cdot (2 + 4t) = 0 \\ &\iff 41t = 7 \\ &\iff t = \frac{7}{41} \end{aligned}$$

b. Når to vektorer er parallele, så må determinanten for dem være 0.

$$\begin{aligned} \left(\vec{\mathbf{a}} + t \cdot \vec{\mathbf{b}}\right) \parallel \vec{\mathbf{b}} &\implies \begin{vmatrix} -3 + 5t & 5 \\ 2 + 4t & 4 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff 4 \cdot (-3 + 5t) - 5 \cdot (2 + 4t) = 0 \\ &\iff -24 = 0 \end{aligned}$$

Altså vil det sige at

$$\nexists t \in \mathbb{R} \text{ sådan at } \left(\vec{\mathbf{a}} + t \cdot \vec{\mathbf{b}}\right) \parallel \vec{\mathbf{b}}$$

c. Projektionen af $\vec{\mathbf{a}}$ på $\vec{\mathbf{b}}$ er da

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{a}}_b &= \frac{\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}}{\left|\vec{\mathbf{b}}\right|^2}\cdot\vec{\mathbf{b}}\\ &= \frac{-3\cdot 5+2\cdot 4}{5^2+4^2}\cdot\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}\\ &= -\frac{7}{41}\cdot\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-\frac{35}{41}\\-\frac{28}{41}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Opgave 4

To linjer m og l i planen er givet ved

$$\begin{aligned}l:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\\ m:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Undersøg, om vinklen mellem linjerne l og m er spids.

Løsning:
Vi finder den lille vinkel mellem de to retningsvektorer i parameterfremstillingerne for linjerne.

$$\begin{aligned}\theta &= \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}}{\sqrt{(3^2+4^2)\cdot(2^2+7^2)}}\right)\\ &= \cos^{-1}\left(\frac{34}{5\sqrt{53}}\right)\\ &\approx 20{,}92^\circ\end{aligned}$$

Altså er der en spids og en stump vinkel mellem linjerne l og m.

Opgave 5

En linje l er givet ved ligningen

$$2x+3y+1=0$$

Linjen m står vinkelret på l og går gennem punktet $P_0(5,-7)$.
Bestem en parameterfremstilling for m.

Løsning:
Ligningen for l kan omskrives til

$$2x+3y+1=0 \iff 2\,(x-1)+3\,(y+1)=0$$

Altså er $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ en normalvektor til linjen l og derfor en retningsvektor for linjen m. Vi kan da bestemme en parameterfremstilling for m, da vi også kender et punkt, der tilhører m.

$$m:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$