Aflevering 35

3.b mat A

Kevin Zhou

1. november 2024

Opgave 1

På figuren ses banekurven for vektorfunktionen $\vec{s}$ givet ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^3 + t^2 + 4t + 5 \\ \\ \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t + 4 \end{pmatrix}.$$

a. Bestem hastighedsvektoren $\vec{v}(t)$.

b. Bestem de t-værdier, hvor banekurven har en vandret tangent.

Løsning:
a. Hastighedsvektoren er den afledede funktion af vektorfunktionen $\vec{\mathbf{s}}$.

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{v}}(t) &= \vec{\mathbf{s}}'(t) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{1}{2}t^3 + t^2 + 4t + 5\right) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t + 4\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t^2 + 2t + 4 \\ t^2 - 4t + 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b. Da $\vec{\mathbf{v}}(t)$ altid er tangent til banekurven for $\vec{\mathbf{s}}(t)$, så må banekurven have en vandret tangent, når $\vec{\mathbf{v}}(t)$'s komposant i y-retningen er 0. Dette er tilfældet, når

$$\begin{aligned} t^2 - 4t + 3 = 0 &\iff (t-1)(t-3) = 0 \\ &\iff t = 1 \vee t = 3 \end{aligned}$$

Banekurven har altså en vandret tangent når $t = 1$ eller $t = 3$.

Opgave 2

En funktion f af to variable er givet ved

$$f(x,y) = 2x^4 \cdot y + 7x - y\,.$$

a. Bestem $f'_x(x,y)$

b. Bestem $f'_y(x,y)$

Løsning:
a. Vi beregner den partielle afledede af $f(x,y)$ mht. x.

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^4 \cdot y + 7x - y\right) \\ &= 8x^3 \cdot y + 7 \end{aligned}$$

b. Vi beregner den partielle afledede af $f(x,y)$ mht. y.

$$\begin{aligned} f'_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(2x^4 \cdot y + 7x - y\right) \\ &= 2x^4 - 1 \end{aligned}$$

Opgave 3

Befolkningsudvikilingen i Taiwan i perioden 1996-2019 kan i en model beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}003641 \cdot P \cdot (23{,}95 - P)$$

hvor $P(t)$ er antalle af indbyggere i Taiwan (målt i millioner), og t er antal år efter 1996. I 1996 var der 21,53 millioner indbyggere i Taiwan.

a. Bestem en forskrift for P.

b. Bestem $P'(23)$, og forklar betydningen af dete tal.

Løsning:

a. Siden der for en ligning af formen

$$y' = ay(M - y), \quad a > 0, M > 0$$

gælder, at den har de ikke-negative, voksende løsninger

$$f(x) = \frac{M}{1 + ce^{-aMx}}, \quad c \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}$$

så må en forskrift for P være af formen

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{23{,}95}{1 + ce^{-0{,}003641 \cdot 23{,}95 \cdot t}} \\ &= \frac{23{,}95}{1 + ce^{-0{,}08720195 \cdot t}} \end{aligned}$$

og da $P(0) = 21{,}53$, kan vi finde c

$$\begin{aligned} P(0) = 21{,}53 &\iff \frac{23{,}95}{1 + ce^{-0{,}08720195 \cdot 0}} = 21{,}53 \\ &\iff c = \frac{23{,}95}{21{,}53} - 1 \\ &\iff c = 0{,}112401301 \end{aligned}$$

Altså er en forskrift for P

$$P(t) = \frac{23{,}95}{1 + 0{,}112401301e^{-0{,}08720195t}}$$

b. Vi finder først den afledede funktion af P med kædereglen.

$$\begin{aligned} P'(t) &= -\frac{23{,}95 \cdot \left(-0{,}009801613e^{-0{,}08720195t}\right)}{(1 + 0{,}112401301e^{-0{,}08720195t})^2} \\ &= -\frac{-0{,}234748622e^{-0{,}08720195t}}{(1 + 0{,}112401301e^{-0{,}08720195t})^2} \end{aligned}$$

Vi kan nu bestemme $P'(23)$.

$$\begin{aligned} P'(23) &= -\frac{-0{,}234748622e^{-0{,}08720195 \cdot 23}}{(1 + 0{,}112401301e^{-0{,}08720195 \cdot 23})^2} \\ &\approx -0{,}0307 \end{aligned}$$

Det betyder altså, at antallet af indbyggere i Taiwan i år 2019 aftager med 0,0307 millioner indbyggere per år.

Opgave 4

I 2001 fandt amerikanske og canadiske forskere, at sammenhængen mellem den oplevede temperatur og den aktuelle temperatur ved forskellige vindhastigheder, det såkaldte "windchill indeks", kan beskrives ved

$$f(t,v) = 13{,}3 + 0{,}62 \cdot t - 13{,}95 \cdot v^{0{,}16} + 0{,}486 \cdot t \cdot v^{0{,}16},$$

hvor $f(t,v)$ er "windchill indekset"(målt i °C), t er den aktuelle målte temperatur (målt i °C, og v er vindhastigheden (målt i m/s).

a. Bestem $f(-5{,}20)$, og forklar betydningen af værdien.

b. Bestem den vindhastighed, der ved en temperatur på -3°C giver et "windchill indeks"på -10 °C.

Løsning:
a. Vi bestemmer $f(-5{,}20)$.

$$\begin{aligned} f(-5{,}20) &= 13{,}3 + 0{,}62 \cdot (-5) - 13{,}95 \cdot 20^{0{,}16} + 0{,}486 \cdot (-5) \cdot 20^{0{,}16} \\ &\approx -16{,}25 \end{aligned}$$

Det betyder altså, at når den aktuelle temperatur er -5 °C, og vindhastigheden er 20 m/s, så er windchill indekset $-16{,}25$ °C.

b. Vi løser da ligningen $f(-3{,}v) = -10$.

$$\begin{aligned} f(-3{,}v) = -10 &\iff 13{,}3 + 0{,}62 \cdot (-3) - 13{,}95 \cdot v^{0{,}16} + 0{,}486 \cdot (-3) \cdot v^{0{,}16} = -10 \\ &\iff 23{,}3 - 1{,}86 - (13{,}95 + 1{,}458) \cdot v^{0{,}16} = 0 \\ &\iff 15{,}408 \cdot v^{0{,}16} = 21{,}44 \\ &\iff v = \left(\frac{21{,}44}{15{,}408}\right)^{\frac{1}{0{,}16}} \approx 7{,}884 \end{aligned}$$

Ved en temperatur på -3 °C skal vindhastigheden altså være 7,884 m/s for at få et windchill indeks på -10 °C.

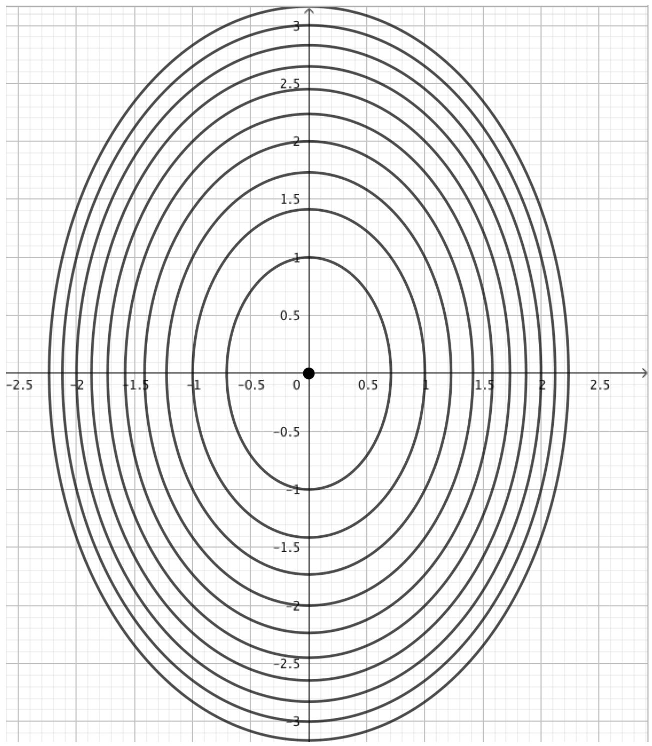
Opgave 5

En funktion f er givet ved $f(x,y) = 10 - 2x^2 - y^2$, hvor $2x^2 + y^2 \leq 10$.

a. Tegn et konturplot med niveaukurver for f.

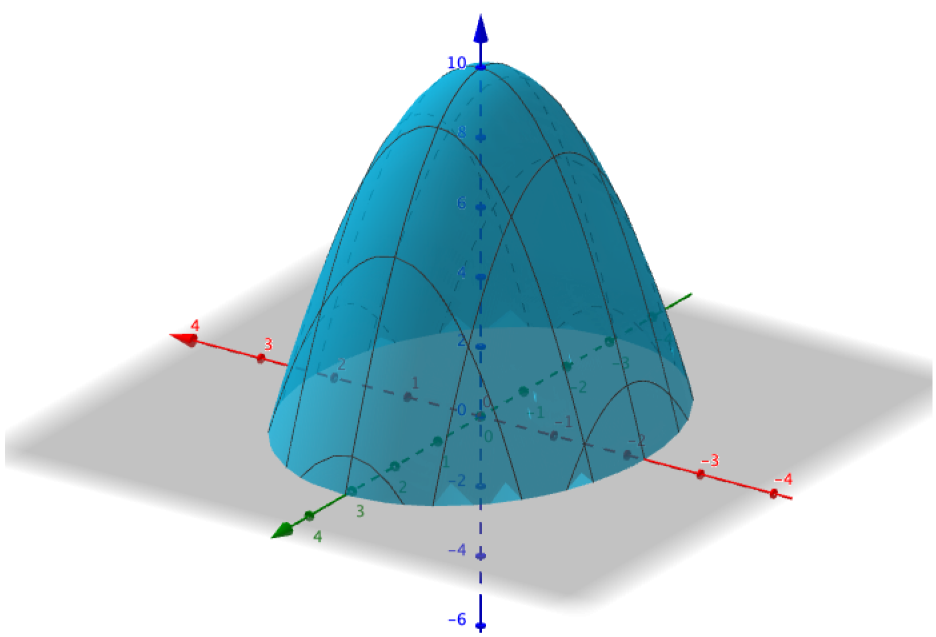
b. Tegn grafen for f.

Løsning:
a. Et konturplot med niveakurver for f ses i fig. 1.



Figur 1: Konturplot for f tegnet i GeoGebra

b. Grafen for ses i fig. 2.



Figur 2: Grafen for f tegnet i GeoGebra