Terminsprøve

Matematik A

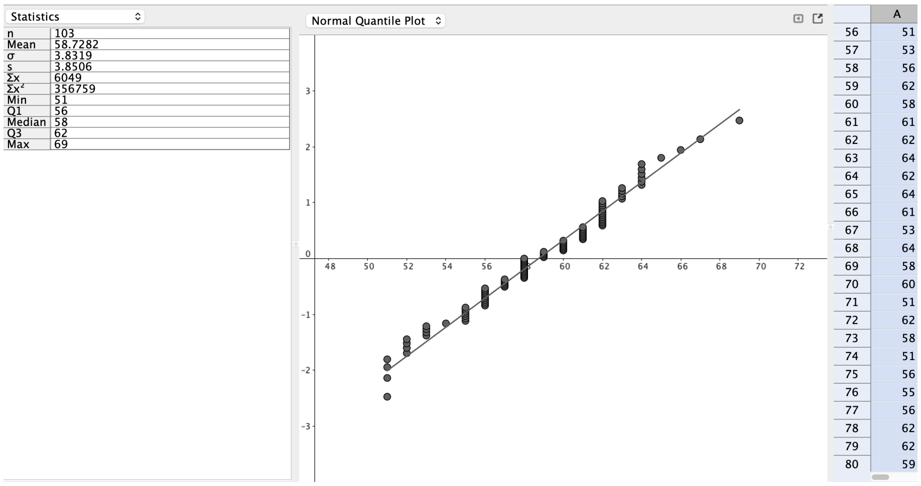
12. marts 2025

Opgave: 9 - Normalfordelt fårevægt

En fåreavler har vejet sine voksne får. I en model kan måleresultaterne beskrives ved en stokastisk variabel X.

Løsning:

a. For at redegøre for, at X tilnærmelsesvist er normalfordelt, tegner vi et fraktilplot med de givne data, hvilket ses i fig. 1.



Figur 1: Fraktilplot tegnet i GeoGebra

Det ses, at punkterne ligger tilnærmelsesvist på den rette linje. Altså er X tilnærmelsesvist normalfordelt med middelværdi $\mu = 58{,}7282$ og spredning $\sigma = 3{,}8319$.

b. Vi beregner sandsynligheden med CAS, hvilket ses i **??**.

$$
\begin{aligned}
P(59 \leq X \leq 61) &= \Phi\left(\frac{61 - 58{,}7282}{3{,}8319}\right) - \Phi\left(\frac{59 - 58{,}7282}{3{,}8319}\right) \\
&\approx 0{,}1951 \\
&= 19{,}51\ \%
\end{aligned}
$$

Sandsynligheden for, at et voksent får vejer mellem 59 kg og 61 kg er altså 19,51 %.

Opgave: 10 - Omdrejningslegeme

Funktionen f er givet ved

$$f(x) = k - x^4, \quad \text{hvor } k > 0.$$

Grafen for f afgrænser sammen med koordinatsystemets førsteakse et område M. Når M roteres 360° om førsteaksen dannes et omdrejningslegeme.

Løsning:

a. For at finde omdrejningslegemets volumen finder vi først x-værdierne for grafen for f's skæringspunkter med førsteaksen, når $k = 1$.

$$
\begin{aligned}
f(x) = 0 &\iff 1 - x^4 = 0 \\
&\iff x^4 = 1 \\
&\iff x = -1 \vee x = 1
\end{aligned}
$$

Rumfanget af omdrejningslegemt bliver så

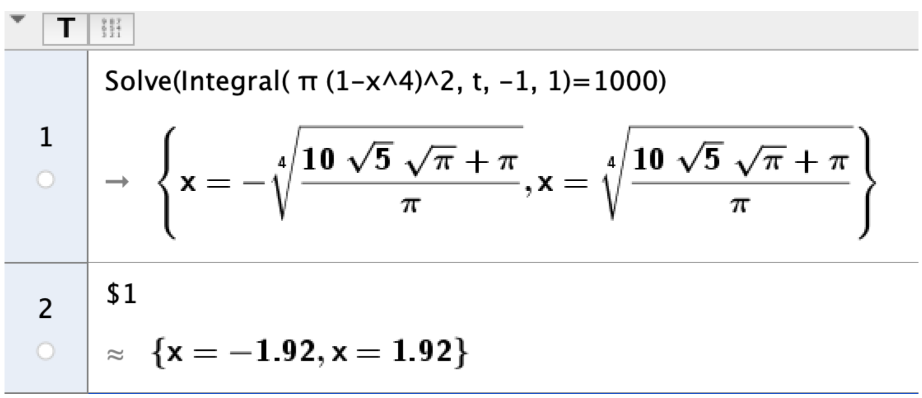
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^{1} f(x)^2 \, dx \\ &= \pi \int_{-1}^{1} \left(1 - x^4\right)^2 \, dx \\ &= \pi \int_{-1}^{1} \left(x^8 + 1 - 2x^4\right) \, dx \\ &= \pi \cdot \left[\frac{1}{9} \cdot x^9 + x - \frac{2}{5} x^5\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{64}{45}\pi \end{aligned}$$

Når $k = 1$ er rumfanget af omdrejningslegemet altså $\frac{64}{45}\pi$.

b. For at bestemme k, så rumfanget af omdrejningslegemet er 1000, løser vi ligningen $V = 1000$ mht. k.

$$\begin{aligned} V = \pi \int_{-1}^{1} \left(k - x^4\right)^2 \, dx = 1000 &\iff \pi \int_{-1}^{1} \left(x^8 + k^2 - 2x^4 \cdot k\right) \, dx = 1000 \\ &\iff \pi \cdot \left[\frac{1}{9} \cdot x^9 + k^2 \cdot x - \frac{2k}{5} x^5\right]_{-1}^{1} = 1000 \\ &\implies k \approx 1{,}92 \end{aligned}$$

Bemærk, at vi kun den positive løsning til andengradsligningen bruges, da $k > 0$. Ligningen er løst med CAS, hvilket ses i fig. 2. Altså skal k være 1,92, for at rumfanget af omdrejningslegemet er 1000.



Figur 2: Ligningen løst med CAS

Opgave: 11 - Væske i beholder

I en model for tømning af væske fra en bestemt beholder kan væskehøjden beskrives ved differentialligningen

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -16 \cdot h(t)^{-\frac{3}{2}}$$

hvor $h(t)$ er væskehøjden målt i cm, når der er gået t sekunder siden tømningens start. Når tømningen startes, er væskehøjden 50 cm.

Løsning:

a. Siden $t = 0$ ved tømningens fart, så må hastigheden, som væskehøjden falder med til start være

$$\begin{aligned} h'(0) &= -16 \cdot h(0)^{-\frac{3}{2}} \\ &= -16 \cdot 50^{-\frac{3}{2}} \\ &\approx -0{,}0453 \end{aligned}$$

Hastigheden, som væskehøjden falder med til start er altså 0,0453 cm per sekund.

b. Vi løser differentialligningen ved seperation af variable.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -16 \cdot h^{-\frac{3}{2}} &\iff \int \frac{1}{h^{-\frac{3}{2}}}\, dh = \int (-16)\ dt \\ &\iff \int h^{\frac{3}{2}}\, dh = -16t + c_1 \\ &\iff \frac{2}{5} \cdot h^{\frac{5}{2}} = -16t + c_2 \\ &\iff h = \left(\frac{5 \cdot (-16t + c_2)}{2}\right)^{\frac{2}{5}} \\ &\iff h = (-40t + k)^{\frac{2}{5}}\end{aligned}$$

Da vi ved, at $h(0) = 5$, kan vi udregne k.

$$\begin{aligned}h(0) = 5 &\iff (-40 \cdot 0 + k)^{\frac{2}{5}} = 5 \\ &\iff k = \pm\sqrt{5^5} \\ &\iff k = -25\sqrt{5} \vee k = 25\sqrt{5}\end{aligned}$$

Vi benytter den positive k, da væskehøjden skal falde til start. En forskrift for $h(t)$ er altså

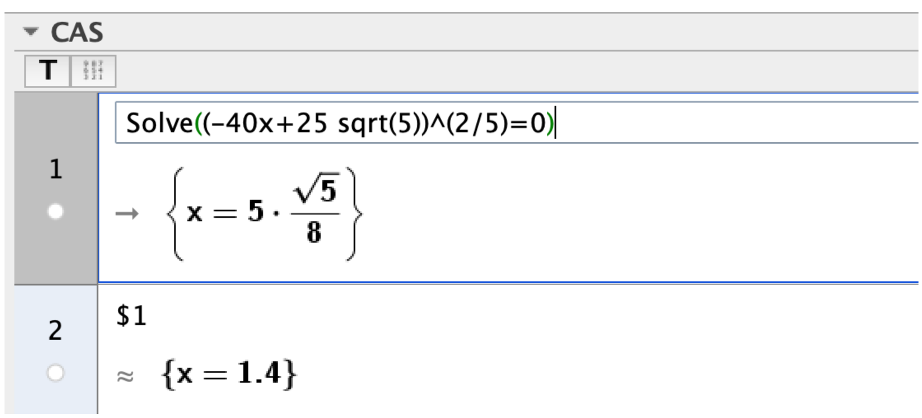
$$h(t) = \left(40 \cdot t + 25\sqrt{5}\right)^{\frac{2}{5}}$$

En mulig definitionsmængde er $\mathbb{R}$.

c. For at finde, hvor lang tid der går, før beholderen er tom, løser vi ligningen $h(t) = 0$.

$$\begin{aligned}h(t) = 0 &\iff (40 \cdot t + 25\sqrt{5})^{\frac{2}{5}} = 0 \\ &\iff x = 5 \cdot \frac{\sqrt{5}}{8} \approx 11{,}4\end{aligned}$$

Ligningen er løst med CAS, hvilket ses i fig. 3. Ifølge modellen er beholderen altså tom efter 1,4 sekunder.



Figur 3: Ligningen løst mec CAS

Opgave: 12 - Skøjteløber

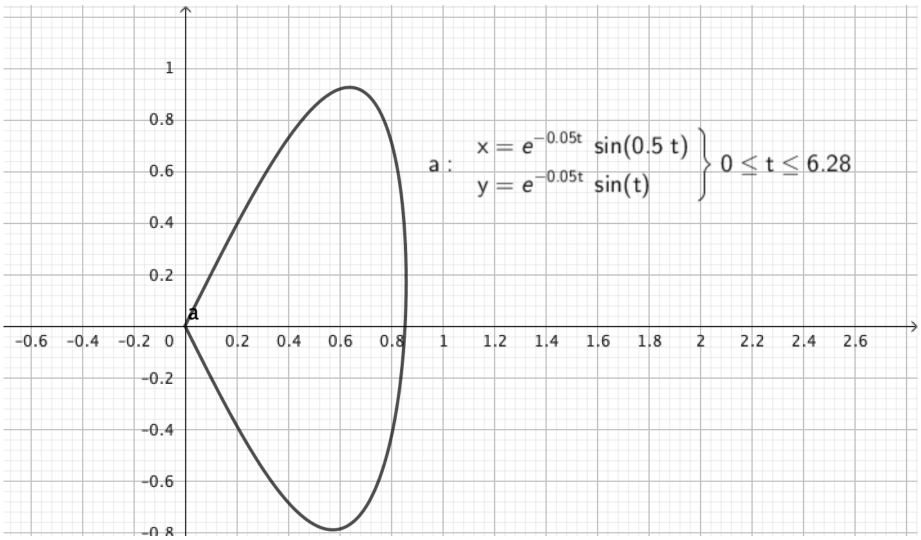
En skøjteløbers position i et koordinatsystem er givet ved vektorfunktionen

$$\vec{\mathbf{s}}(t) = \begin{pmatrix} e^{-0{,}05t} \cdot \sin(0{,}5t) \\ e^{-0{,}05t} \cdot \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0; 2\pi]$$

Begge koordinatfunktioner er målt i meter, og tiden t er målt i sekunder.

Løsning:

a. Skøjteløberens banekurve tegnet i et koordinatsystem ses i fig. 4.

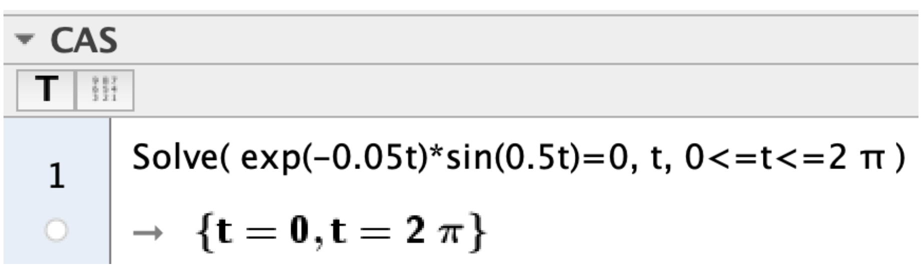


Figur 4: Parameterkuven for vektorfunktionen

b. For at finde t-værdierne, hvor løberen er på x-aksen løser vi ligningen $x(t) = 0$. Vi løser ligningen med CAS, hvilket ses i fig. 5.

$$\begin{aligned} x(t) = 0 &\iff e^{-0{,}05t} \cdot \sin(0{,}5t) = 0 \wedge 0 \leq t \leq 2\pi \\ &\iff t = 0 \vee t = 2\pi \end{aligned}$$

Altså er skøjteløberen på førsteaksen når $t = 0$ eller $t = 2\pi$.



Figur 5: Ligningen løst med CAS

c. For at bestemme, hvornår størrelsen af accelerationen er maksimal, finder vi først et udtryk for skøjteløberens acceleration.

$$\begin{aligned} a(t) &= |\vec{\mathbf{s}}''(t)| \\ &= \left| \begin{pmatrix} \frac{-1}{20}\, e^{\frac{-1}{20}\,x} \cos\left(\frac{1}{2}\,x\right) - \frac{99}{400}\, e^{\frac{-1}{20}\,x} \sin\left(\frac{1}{2}\,x\right) \\ \frac{-1}{10}\, e^{\frac{-1}{20}\,x} \cos(x) - \frac{399}{400}\, e^{\frac{-1}{20}\,x} \sin(x) \end{pmatrix} \right| \\ &= \sqrt{()^2 + ()^2} \end{aligned}$$

Vi differentierer så dette udtryk og sætter lig 0, og løser for t.

Opgave: 13 - Metalplade

Løsning:

a. Vi bestemmer temperaturen i punktet $(-2{,}3)$.

$$\begin{aligned} T(-2{,}3) &= -(-2)^2 - 3^2 + 4 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 + 195 \\ &= 168 \end{aligned}$$

Temperaturen i punktet er altså 168 °C