Hjemmeopgave H1: Mekanik

3.b fys A

Kevin Zhou

31. august 2024

Opgave 1: Månehop

Fotoet stammer fra en filmoptagelse af en astronauts hop på overfladen af Månen. Tabellen viser sammenhørende værdier af tiden og astronautens lodrette hastighed v under hoppet. Til $t = 0$ s slipper astronautens fødder måneoverfladen. Astronauten hoppede med strakt krop.

a. Bestem ud fra tabellens data en værdi for tyngdeaccelerationen på Månen.

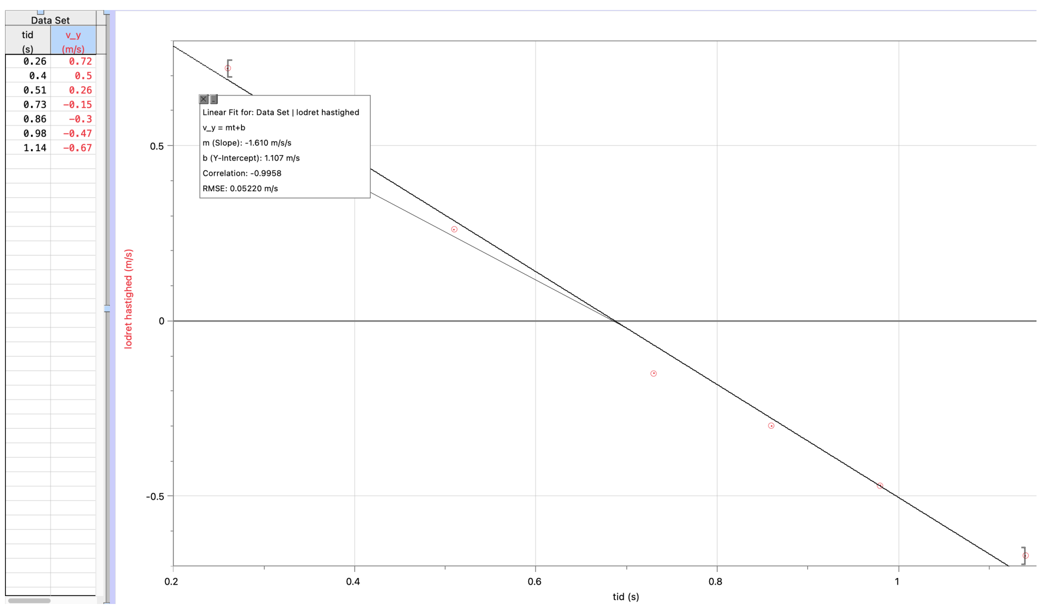
b. Bestem ud fra tabellens data, til hvilket tidspunkt astronauten befandt sig øverst i hoppet. Hvor højt hoppede astronauten?

Løsning:

a. Vi har med uafhængighedsprincippet

$$v_y = -g \cdot t + v_{0y}$$

Denne kan opfattes som en linæer funktion af t. Tabellens data ses i fig. 1.



Figur 1: Lineær regression af tabellens data

Hældningen af (t,v)-grafen er da $-g$. Fra denne ser vi, at tyngdeaccelerationen er

$$\begin{aligned} g &= -(-1{,}610\ \text{m/s}^2) \\ &\approx 1{,}6\ \text{m/s}^2 \end{aligned}$$

Altså er tyngdeaccelerationen på månen 1,6 m/s^2.

b. Vi har, at

$$\begin{aligned} t_{\text{top}} &= \frac{v_{0y}}{g} \\ &= \frac{1{,}107\ \text{m/s}}{1{,}610\ \text{m/s}^2} \\ &= 0{,}68758\ \text{s} \\ &\approx 0{,}69\ \text{s} \end{aligned}$$

Nu kan vi regne hoppets højde ud.

$$\begin{aligned} y_{\text{max}} &= v_{0y} \cdot t_{\text{top}} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{\text{top}}^2 \\ &= 1{,}107 \text{ m/s} \cdot 0{,}68758 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 1{,}610 \text{ m/s}^2 \cdot (0{,}68758 \text{ s})^2 \\ &\approx 0{,}38 \text{ m} \end{aligned}$$

Astronauten befandt sig altså øverst i hoppet efter 0,69 s og hoppede 0,38 m højt.

Opgave 2: Målspark

Under en fodboldkamp diskuterer to tilskuere, hvilken fart fodbolden opnår ved et målspark. De beslutter at vurdere denne fart ved det næste målspark. Den ene tilskuer måler, at der går 2,9 s, fra fodbolden forlader målmandens fod, til fodbolden igen rammer jorden. Den anden tilskuer bestemmer den vandrette afstand mellem fodboldens startsted og nedslagssted til 60 m.

a. Beregn fodboldens middelhastighed i vandret retning.

Man kan få en mere nøjagtig værdi for den søgte begyndelsesfart ved også at tage hensyn til fodboldens bevægelse i lodret retning.

b. Bestem en mere nøjagtig værdi for fodboldens begyndelsesfart. Man kan se bort fra luftmodstanden.

Løsning:
a. Middelhastigheden i vandret retning er

$$\begin{aligned} v_{\text{vandret}} &= \frac{\Delta s}{\Delta t} \\ &= \frac{60 \text{ m}}{2{,}9 \text{ s}} \\ &\approx 21 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Altså er fodboldens middelhastighed i vandret retning 21 m/s.

b. Vi har, at

$$t_{\text{top}} = \frac{2{,}9 \text{ s}}{2} = \frac{v_0 \cdot \sin(\theta)}{g} \implies v_0 = \frac{g \cdot 1{,}45 \text{ s}}{\sin(\theta)}$$

Der gælder også, at

$$\begin{aligned} x_{\text{max}} = v_0 \cdot \cos(\theta) \cdot t_{\text{kast}} &\implies 60 \text{ m} = \frac{g \cdot 1{,}45 \text{ s} \cdot \cos(\theta) \cdot 2{,}9 \text{ s}}{\sin(\theta)} \\ &\iff 60 = 41{,}209 \cdot \cot(\theta) \\ &\iff \theta = \pi n + \cot^{-1}\left(\frac{60}{41{,}209}\right), \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Bemærk, at er flere forskellige vinkler, der er løsninger. Vi regner nu v_0.

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{g \cdot 1{,}45 \text{ s}}{\sin(\theta)} \\ &= \frac{9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 1{,}45 \text{ s}}{\sin\left(\pi n + \cot^{-1}\left(\frac{60}{41{,}209}\right)\right)}, \quad n \in \mathbb{Z} \\ &\approx \pm 25 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Da begyndelsesfarten jo kun kan være positiv, så er en mere nøjagtig værdi for denne, når man ser bort fra luftmodstanden, 25 m/s.

Opgave 3: Dart

I spillet dart kaster spillerne små pile mod en skive, som er inddelt i pointfelter. Man får flest point ved at ramme bull's-eye, der er et lille cirkelformet område midt på skiven. En dartspiller kaster en pil. Herunder accelererer han med en hurtig håndbevægelse pilen fra hvile op til farten 5,9 m/s i løbet af 0,12 s.

a. Beregn størrelsen af pilens gennemsnitlige acceleration.

Dartspilleren forsøger at ramme bull's-eye og sigter derfor mod et punkt lidt over skivens centrum. Han sender pilen af sted skråt opad med farten 5,9 m/s og i en vinkel på 18,6° med vandret. Pilen slippes 2,21 m fra skiven i samme højde over gulvet som skivens centrum. Bull's-eye har diameteren 12,7 mm.

b. Vurdér, om pilen rammer bull's-eye.

Løsning:
Det er værd at tilføje, at feltet, der giver flest point i dart, modsat det, der står i opgaven, faktisk er triple 20, der giver 60 point, og ikke bull's-eye, der kun giver 50.

a. Størrelsen af den gennemsnitlige acceleration er

$$
\begin{aligned}
|\vec{\mathbf{a}}_{\text{middel}}| &= \frac{\Delta|\vec{\mathbf{v}}|}{\Delta t} \\
&= \frac{5{,}9\ \text{m/s} - 0\ \text{m/s}}{0{,}12\ \text{s}} \\
&\approx 49\ \text{m/s}^2
\end{aligned}
$$

Altså er størrelsen af pilens gennemsnitlige acceleration 49 m/s^2.

b. For at finde ud af, om pilen rammer bull's-eye, sætter vi blot de kendte værdier ind i ligningen for banekurven for et skråt kast og ser, om det er sandt, at $y \in [6{,}35; -6{,}35]$ mm (fordi bull's-eye jo har radius på $\frac{12{,}7}{2}$ mm).

$$
\begin{aligned}
y &= -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2(\theta)} \cdot x^2 + \tan(\theta) \cdot x \\
&= -\frac{9{,}8\ \text{m/s}^2}{2 \cdot (5{,}9\ \text{m/s})^2 \cdot \cos^2(18{,}6°)} \cdot (2{,}21\ \text{m})^2 + \tan(18{,}6°) \cdot 2{,}21\ \text{m} \\
&\approx -0{,}022\ \text{m} \\
&= 22\ \text{mm} \notin [6{,}35\ \text{mm}; -6{,}35\ \text{mm}]
\end{aligned}
$$

Altså rammer pilen ikke bull's-eye.