Aflevering 30

3.b mat A

Kevin Zhou

19. august 2024

Opgave 1

Bestem $\int (e^x + 6x^5 - 1)\,dx$

Løsning:
Vi benytter sumreglen.

$$\begin{aligned}\int (e^x + 6x^5 - 1)\,dx &= e^x + 6 \cdot \frac{1}{6}x^6 - x + k \\ &= e^x + x^6 - x + k\end{aligned}$$

Opgave 2

En funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x) = \ln(x) - 3x^2 + 10$$

Bestem den stamfunktion til f, hvis graf går gennem punktet $P(1{,}20)$.

Løsning:
Vi finder først et generelt udtryk for en stamfunktion for f.

$$\begin{aligned}F(x) &= \int f(x)\,dx \\ &= \int (\ln(x) - 3x^2 + 10)\,dx \\ &= x \cdot \ln(x) - x - \frac{3}{3}x^3 + 10x + k \\ &= (\ln(x) + 9 - x^2)x + k\end{aligned}$$

Grafen for stamfunktionen skal gå gennem $P(1{,}20)$.

$$\begin{aligned}F(1) = 20 &\iff (\ln(1) + 9 - 1^2) \cdot 1 + k = 20 \\ &\iff 0 + 9 - 1 + k = 20 \\ &\iff k = 12\end{aligned}$$

Altså er stamfunktionen til f, hvis graf går gennem punktet $P(1{,}20)$

$$F(x) = (\ln(x) + 9 - x^2)x + 12$$

Opgave 3

En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x) = -3x^2 + 12x - 9$$

a. Løs ligningen $f(x) = 0$.

Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen et område M, der har et areal.

b. Bestem arealet af M.

Løsning:
a. Andengradsligningen løses med nulreglen.

$$\begin{aligned}f(x) = 0 &\iff -3x^2 + 12x - 9 = 0 \\ &\iff -x^2 + 4x - 3 = 0 \\ &\iff -(x-3)(x-1) = 0 \\ &\iff x - 3 = 0 \lor x - 1 = 0 \\ &\iff x = 3 \lor x = 1\end{aligned}$$

b. Arealet af M må være

$$\begin{aligned} A(M) &= \int_1^3 f(x)\,dx \\ &= \int_1^3 (-3x^2+12x-9)\,dx \\ &= \left[-x^3+6x^2-9x\right]_1^3 \\ &= -3^3+6\cdot 3^2-9\cdot 3-(-1^3+6\cdot 1^2-9\cdot 1) \\ &= 6\cdot(3^2-1)-(2+3)\cdot 9+1 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Altså er arealet af M 4.

Opgave 4

Funktionerne $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ og $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x)=x^2-1,\quad g(x)=x+1$$

a. Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem grafen for f og grafen for g.

Graferne for de to funktioner afgrænser et område M, der har et areal.

b. Bestem arealet af området M.

Løsning:

a. Graferne skærer hinanden, når den samme x giver den samme y for begge funktioner.

$$\begin{aligned} f(x)=g(x) &\iff x^2-1=x+1 \\ &\iff x^2-x-2=0 \\ &\iff (x-2)(x+1)=0 \\ &\iff x=2 \vee x=-1 \end{aligned}$$

For at finde y-værdien for skæringspunkterne, benytter vi $g(x)$.

$$\begin{aligned} g(2)&=3 \\ g(-1)&=0 \end{aligned}$$

Altså er koordinatsættene til hvert af skæringspunkterne mellem grafen for f og grafen for g henholdsvis (2,3) og (−1,0).

b. Fra grafen ser vi, at $f(x)\le g(x)$ for alle $x\in[-1,2]$. Altså har vi, at

$$\begin{aligned} A(M) &= \int_{-1}^2 g(x)-f(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^2 x+1-(x^2-1)\,dx \\ &= \int_{-1}^2 -x^2+x+2\,dx \\ &= -\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^2+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^2+[2x]_{-1}^2 \\ &= -3+\frac{3}{2}+6 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Arealet af området M er altså $\frac{9}{2}$.

Opgave 5

Bestem integralet

$$\int x \cdot \cos\left(x^2+1\right)\,dx$$

Løsning:
Vi benytter integration ved substitution, hvor vi lader $t = x^2 + 1$.

$$\begin{aligned}\int x \cdot \cos\left(x^2+1\right)\,dx &= \frac{1}{2}\int 2x \cdot \cos\left(x^2+1\right)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int \cos(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\sin(t)+k \\ &= \frac{1}{2}\sin\left(x^2+1\right)+k\end{aligned}$$

Opgave 6

En funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x) = e^{0{,}25\cdot x} + e^{-0{,}50\cdot x}$$

a. Bestem minimum for f ved brug af $f'(x)$.

Grafen for f afgrænser sammen med koordinatsystemets førsteakse og linjerne $x = -2$ og $x = 3$ et område M. Når M drejes 360° omkring førsteaksen fremkommer der et omdrejningslegeme.

b. Bestem rumfanget af omdrejningslegemet.

c. Bestem kurvelængden af grafen for f i intervallet $-2 \leq x \leq 3$.

Løsning:
a. Vi finder først den afledede funktion for f.

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{0{,}25\cdot x} + e^{-0{,}50\cdot x}\right) \\ &= 0{,}25\cdot e^{0{,}25\cdot x} - 0{,}50\cdot e^{-0{,}50\cdot x}\end{aligned}$$

Vi løser så ligningen $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned}f'(x) = 0 &\iff 0{,}25\cdot e^{0{,}25\cdot x} - 0{,}50\cdot e^{-0{,}50\cdot x} = 0 \\ &\iff e^{\frac{1}{4}x} - 2e^{-\frac{1}{2}x} = 0 \\ &\iff \ln\left(e^{\frac{1}{4}x}\right) = \ln\left(2\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right) \\ &\iff \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot x = \ln(2) \\ &\iff x = \frac{4}{3}\ln(2)\end{aligned}$$

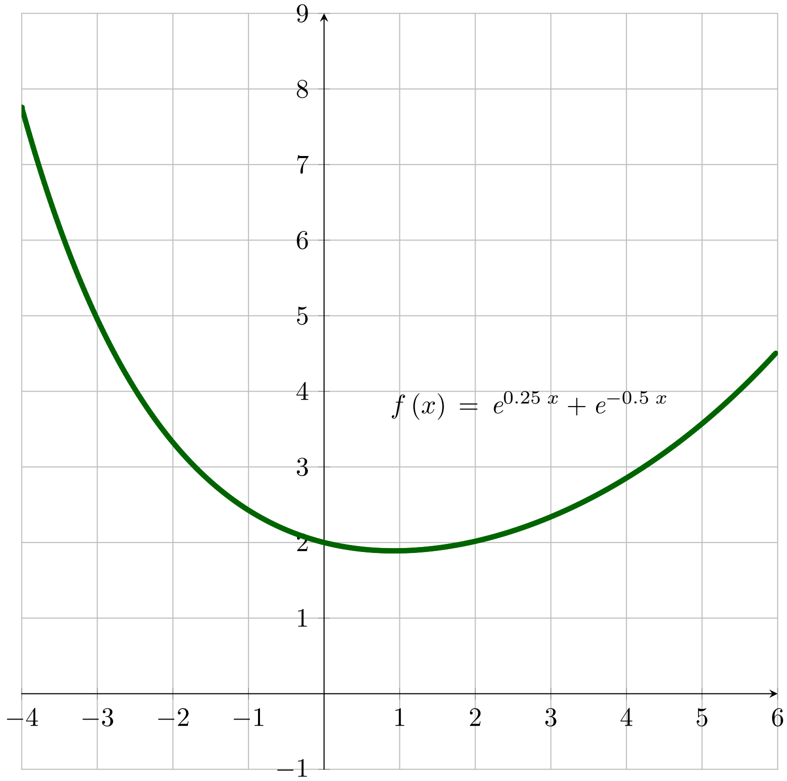
I intervallerne $]-\infty; \frac{4}{3}\ln(2)[$ og $]\frac{4}{3}\ln(2);\infty[$ har $f'(x)$ konstant fortegn, siden funktionen er kontinuert. For at bekræfte, at vores fundne x-værdi er et minimumssted vælger vi tilfældige x-værdier i hvert interval og udregner $f'(x)$.

$$\begin{aligned}f'(0) &= 0{,}25\cdot e^{0{,}25\cdot 0} - 0{,}50\cdot e^{-0{,}50\cdot 0} = -0{,}25 < 0 \\ f'(1) &= 0{,}25\cdot e^{0{,}25\cdot 1} - 0{,}50\cdot e^{-0{,}50\cdot 1} \approx 0{,}0177 > 0\end{aligned}$$

Altså må $\frac{4}{3}\ln(2)$ være et minimumssted, hvilket også kan ses i fig. 1, og minimum for f må da være

$$f\left(\frac{4}{3}\ln(2)\right) \approx 1{,}89$$

Minimum for f er altså 1,89.



Figur 1: Grafen for f tegnet med TikZ

b. Rumfanget af omdrejningslegemet må da være

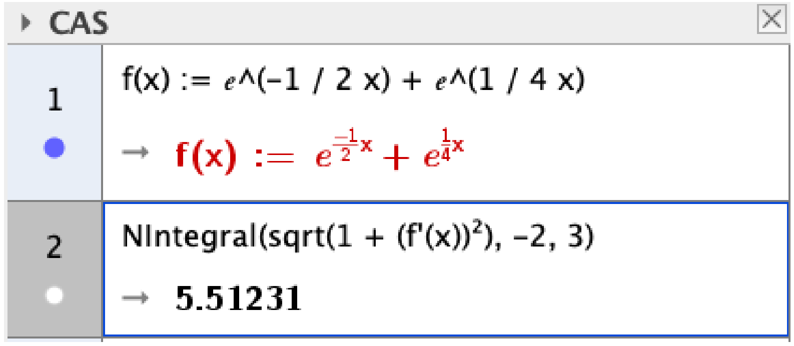
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-2}^{3} f(x)^2\,dx \\ &= \pi \int_{-2}^{3} e^{\frac{1}{2}x} + e^{-x} + 2 \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx \\ &= \pi \left(2\left[e^{\frac{1}{2}x}\right]_{-2}^{3} - \left[e^{-x}\right]_{-2}^{3} - 8\left[e^{-\frac{1}{4}x}\right]_{-2}^{3} \right) \\ &\approx 78{,}47 \end{aligned}$$

Altså er rumfanget af omdrejningslegemet 78,47.

c. Kurvelængden for grafen for f i intervallet $-2 \leq x \leq 3$ regnes med CAS og må være

$$\int_{-2}^{3} \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx = \int_{-2}^{3} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}x} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right)^2}\,dx$$
$$\approx 5{,}51231$$

Kurvelængden for grafen for f i intervallet $-2 \leq x \leq 3$ er altså 5,51231.



Figur 2: Kurvelængden regnet med CAS