2.g Terminsprøve matematik

2.b mat A

Kevin Zhou

15. marts 2024

Bedømmelseskriterier:

- Redegørelse og dokumentation for metode
- Figurer, grafer og andre illustrationer
- Notation og layout
- Formidling og forklaring

Opgave 1: Opgave 9

En person kaster en basketbold meget hårdt mod jorden. Bolden rammer jorden i punktet P, hvorfra bolden hopper op igen. I modellen antages, at boldens højde som funktion af dens vandrette afstand fra P kan skrives på formen

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

hvor $f(x)$ er boldens højde over jorden (målt i cm), når dens vandrette afstand fra P er x cm.

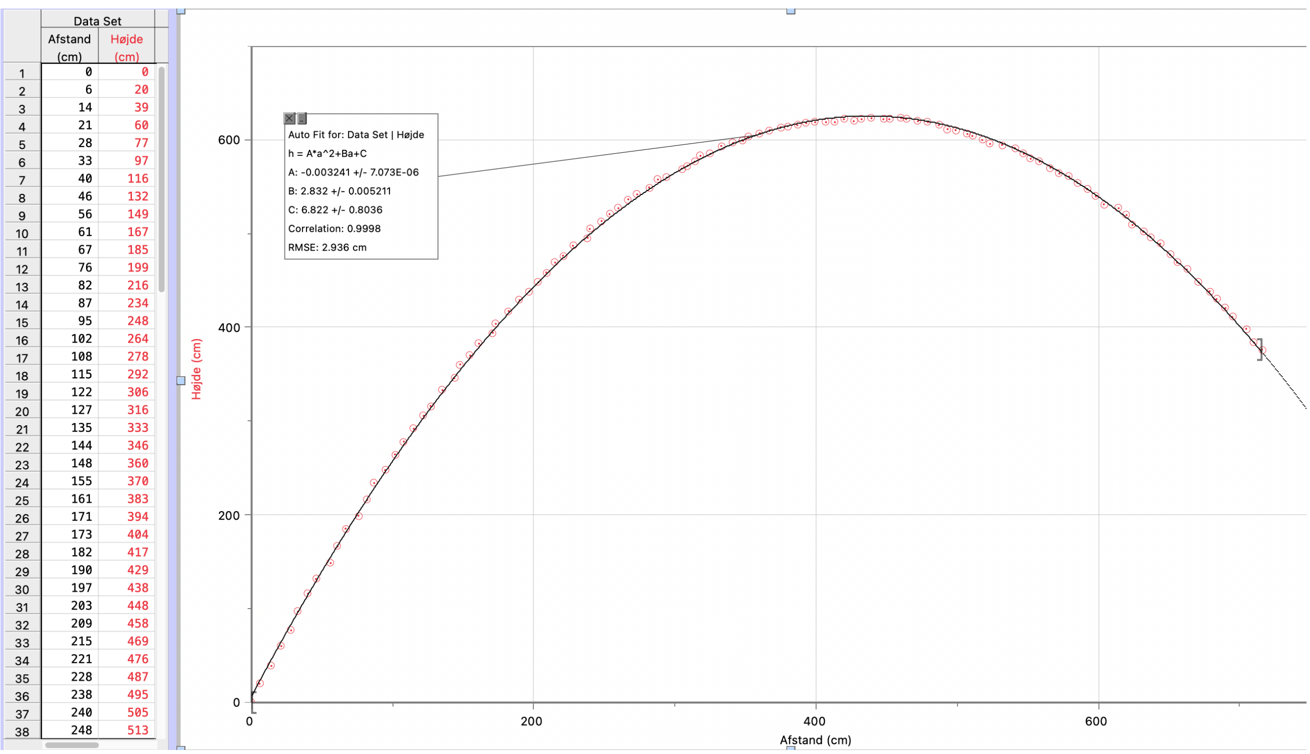
a. Bestem ved brug af alle tabellens 109 punkter værdierne af konstanterne a,b og c.

b. Bestem boldens største højde over jorden ifølge modellen ved brug af $f'(x)$.

c. Bestem den spidse vinkel, som tangenten til grafen for f danner med vandret, når bolden igen rammer jorden.

Løsning:

a. Vi laver en regressionsanalyse med mindste kvadraters metode via LoggerPro, hvilket kan ses i fig. 1.



	Data Set	
	Afstand (cm)	Højde (cm)
1	0	0
2	6	20
3	14	39
4	21	60
5	28	77
6	33	97
7	40	116
8	46	132
9	56	149
10	61	167
11	67	185
12	76	199
13	82	216
14	87	234
15	95	248
16	102	264
17	108	278
18	115	292
19	122	306
20	127	316
21	135	333
22	144	346
23	148	360
24	155	370
25	161	383
26	171	394
27	173	404
28	182	417
29	190	429
30	197	438
31	203	448
32	209	458
33	215	469
34	221	476
35	228	487
36	238	495
37	240	505
38	248	513

Figur 1: Regressionsanalyse lavet i LoggerPro

Vi får da konstanterne til at være

$$a = -0{,}003214$$
$$b = 2{,}832$$
$$c = 6{,}822$$

b. Vi finder først den afledede funktion for f.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot (-0{,}003214x) + 2{,}832 \\ &= -0{,}006428x + 2{,}832 \end{aligned}$$

Denne må være lig med 0 når højden er størst.

$$f'(x) = 0 \implies -0{,}006428x + 2{,}832 = 0$$
$$\iff x = \frac{2{,}832}{0{,}006428} \approx 440{,}6$$

Vi tager da funktionen f af denne x-værdi.

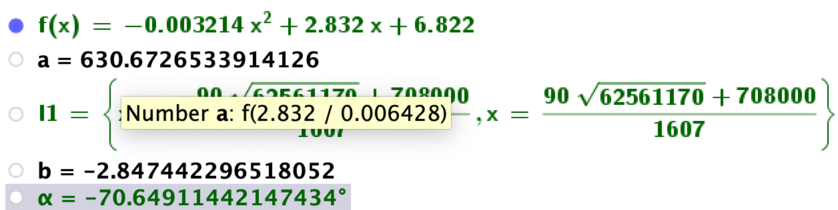
$$f\left(\frac{2{,}832}{0{,}006428}\right) \approx 630{,}67$$

Altså er den største højde over jorden ifølge modellen 630,67 cm.

c. Med CAS får vi, at den større rod for f er $\frac{90\sqrt{62561170}+708000}{1607}$. Vi tager den afledede funktion for f af denne for at finde hældningen. Den spidse vinkel med vandret må så være den inverse tangent af hældningen.

$$v = \tan^{-1}\left(f'\left(\frac{90\sqrt{62561170}+708000}{1607}\right)\right)$$
$$\approx -70{,}65°$$

Altså er den spidse vinkel dannet med vandret $-70{,}65°$. CAS-udklip ses i fig. 2



Figur 2: CAS-udklip

Opgave 2: Opgave 10

I en model for vanddybden i en bestemt havn i løbet af et døgn er vanddybden $h(x)$ (målt i meter) til tiden x (målt i antal timer efter midnat) givet ved

$$h(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) + 7, \quad 0 \leq x < 24$$

a. Bestem den minimale vanddybde i havnen i løbet af døgnet.

b. Bestem de tidspunkter på døgnet, hvor vanddybden i havnen er 8 meter.

Løsning:

a. Vanddybden må være mindst, når $\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right)$ er mindst. Dette er tilfældet når $\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) = -1$, hvilket vi ser godt kan lade sig gøre med definitionsmængden. Der er vanddybden

$$2 \cdot (-1) + 7 = 5$$

Altså er den minimale vanddybde i havnen 5 m.

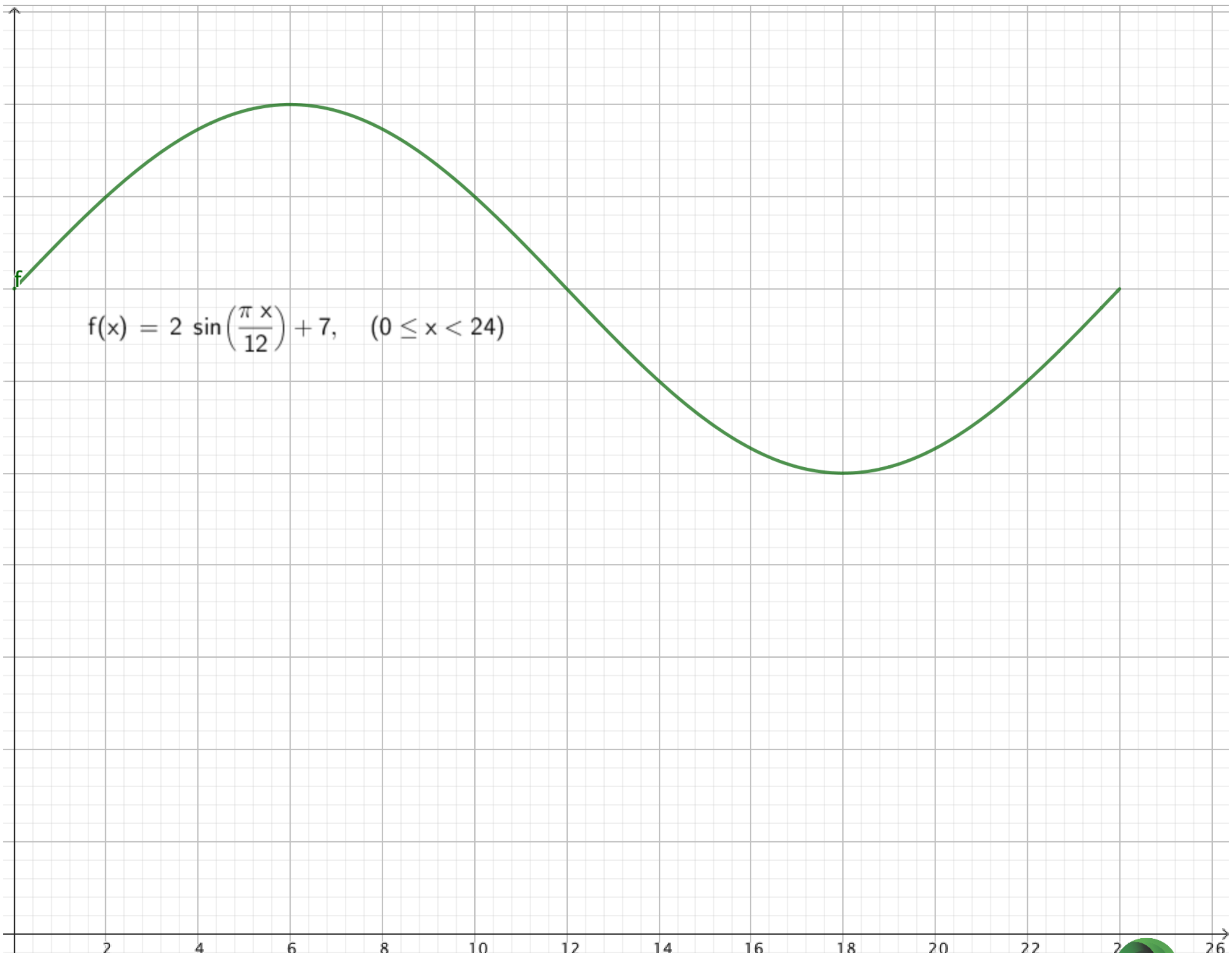
b. Vi løser da ligningen $h(x) = 8$.

$$2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) + 7 = 8 \iff \sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) = \frac{1}{2}$$

Med vores definitionsmængde er der to løsninger.

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) = \frac{1}{2} \implies \frac{\pi}{12}x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \vee \frac{\pi}{12}x = \pi - \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\iff x = 2 \vee x = 10$$

Altså er vanddybden 8 meter klokken 2 og klokken 10. Dette stemmer overens med funktionens graf, der ses i fig. 3.



Figur 3: Grafen for h

Opgave 3: Opgave 11

I en model kan udviklingen af den årlige nedbørsmængde i en bestemt by beskrives ved

$$780 \cdot e^{0{,}012x}$$

hvor $f(x)$ betegner den årlige nedbørsmængde (målt i mm) og x betegner tiden målt i antal år efter 2020.

a. Benyt modellen til at bestemme det årstal, hvor den årlige nedbørsmængde overstiger 1000 mm.

b. Bestem $f'(5)$, og giv en fortolkning af dette tal.

Løsning:
a. Vi løser da ligningen $f(x) = 1000$.

$$f(x) = 1000 \implies 780 \cdot e^{0{,}012x} = 1000$$
$$\iff x = \frac{\ln\left(\frac{50}{39}\right)}{0{,}012} \approx 20{,}7$$

Altså overstiger den årlige nedbørsmængde 1000 mm i år 2040.

b. Vi finder først den afledede funktion for f.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0{,}012 \cdot 780 \cdot e^{0{,}012x} \\ &= 9{,}36 \cdot e^{0{,}012x} \end{aligned}$$

Vi tager nu den afledede funktion af 5.

$$\begin{aligned} f'(5) &= 9{,}36 \cdot e^{0{,}012 \cdot 5} \\ &\approx 9{,}94 \end{aligned}$$

Dette tal fortæller, at det årlige nedbør vokser med 9,94 mm per år ved tiden $x = 5$.

Opgave 4: Opgave 12

I et koordinatsystem er der givet et punkt $C(10, -2)$ og en linje l med ligningen

$$4x + 3y - 6 = 0$$

a. Benyt en formel til at bestemme afstanden fra C til l.

En cirkel har centrum i C og radius 3. Det punkt, som ligger på cirklen, og som har den mindste afstand til l, kaldes for P.

b. Bestem koordinatsættet til punktet P.

Løsning:

a. Siden der gælder, at afstanden fra et punkt (x_1,y_1) til en linje med ligningen $ax + by + c = 0$ er

$$\frac{|a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

så gælder der i dette tilfælde, at afstanden fra C til l må være

$$\frac{|4 \cdot 10 + 3 \cdot (-2) - 6|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{28}{5}$$

b. Da der kun er et punkt P, så må der gælde, at afstanden til linjen må være 3 mindre end ved C. Siden cirklen ikke skærer linjen, så kan vi udelade den absolutte værdi i tælleren.

$$\frac{4 \cdot x + 3 \cdot y - 6}{5} = \frac{13}{5} \iff x = \frac{19 - 3y}{4}$$

Vi substituerer ind i cirklens ligning og løser den med CAS.

$$\left(\frac{19 - 3y}{4} - 10\right)^2 + (y + 2)^2 = 3^2 \iff y = \frac{-19}{5}$$

Vi regner nu x-koordinatet ud.

$$x = \frac{19 - 3 \cdot \frac{-19}{5}}{4} = \frac{38}{5}$$

Altså har vi

$$P = \left(\frac{38}{5}, \frac{-19}{5}\right)$$

Opgave 5: Opgave 14

En klods skal være fire gange så lang, som den er bred. Klodsens rumfang skal være 200 cm^3.

a. Opstil en formel for klodsens højde udtrykt ved klodsens bredde.

b. Bestem hvilken bredde, længde og højde, klodsen skal have, når klodsens overfladeareal skal være mindst muligt.

Løsning:

a. Vi har at

$$4b^2 \cdot h = 200 \iff h = \frac{200}{4b^2}$$

hvor b er klodsens bredde og h er klodsens højde.

b. Vi finder først et udtryk for halvdelen af klodsens overfladeareal

$$\begin{aligned} A &= 4b^2 + \frac{200b}{4b^2} + \frac{200 \cdot 4b}{4b^2} \\ &= 4b^2 + \frac{250}{b} \end{aligned}$$

Vi differentierer dette udtryk.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\left(4b^2 + \frac{250}{b}\right) = 8b - \frac{250}{b^2}$$

Vi sætter dette udtryk lig 0 og løser for b.

$$\begin{aligned} 8b - \frac{250}{b^2} = 0 &\iff 8b^3 = 250 \\ &\iff b = \left(\frac{250}{8}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 3{,}15 \end{aligned}$$

Altså er bredden 3,15 cm. Længden må være $4 \cdot 3{,}15\ \text{cm} = 12{,}6\ \text{cm}$. Højden må da være $\frac{200\ \text{cm}^3}{4 \cdot (3{,}15\ \text{cm})^2} \approx 5{,}04\ \text{cm}$.