Aflevering 16

2.b mat A

Kevin Zhou

September 2023

Bedømmelseskriterier:

- Redegørelse og dokumentation for metode

- Figurer, grafer og andre illustrationer

- Notation og layout

- Formidling og forklaring

Opgave 1

Grafen for et tredjegradspolynomium f ses på fig. 1

a. Løs ligningen $f(x) = 0$ ved hjælp af figuren.

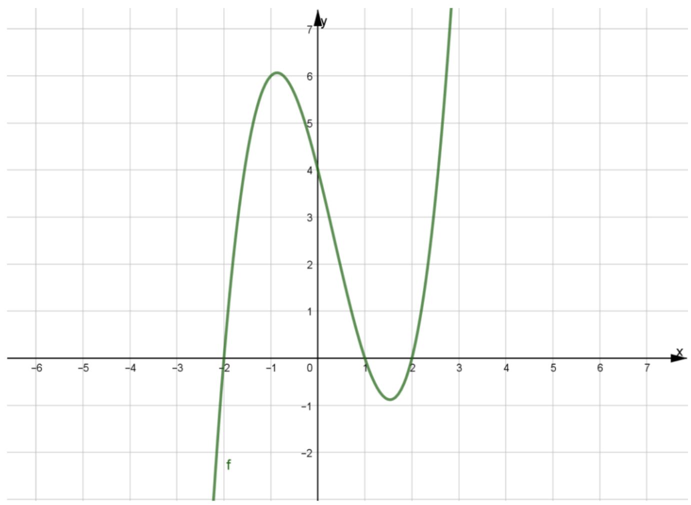

Figure 1: graf for f

Løsning:

a. Da den geometriske betydning af $f(x)$ blot er y-værdien, kan følgende udledes ved aflæsning på de steder af grafen, hvor y-værdien er 0.

$$f(x) = 0 \implies x = -2 \lor x = 1 \lor x = 2$$

Opgave 2

Grafen for et tredjegradspolynomium f ses på fig. 2

a. Løs ved hjælp af grafen ligningen $f'(x) = 0$

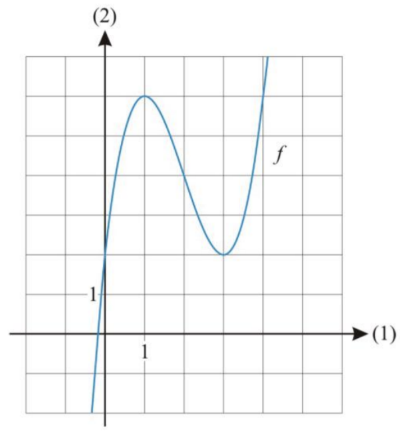

Figure 2: graf for f

Løsning:
Ved toppunkterne af grafen er hældningen af tangenten0. Den geometriske betydning af $f'(x)$ er da hældningen af tangenten til grafen. Ved aflæsning må følgende gælde.

$$f'(x) = 0 \implies x = 1 \lor x = 3$$

Opgave 3

En del af grafen for f er vist i fig. 3. Benyt den til at bestemme $f'(2)$.

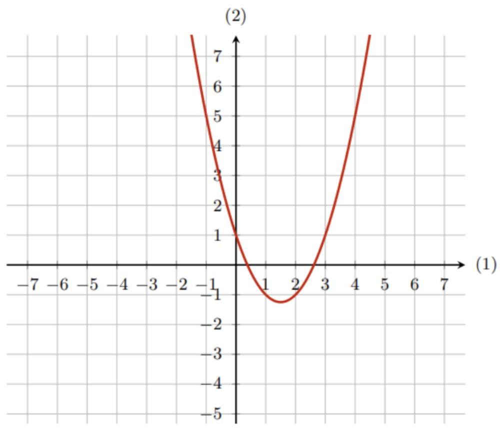

Figure 3: graf for f

Løsning:
Lad p denotere grafen for f. Det aflæses da på fig. 3, at $(0{,}1), (1,-1), (2,-1) \in g$. Siden grafen for f er en parabel, er funktionsforskriften af formen $f(x) = ax^2 + bx + c$. Vi kan nemt finde c-værdien med punktet (0,1):

$$(0{,}1) \in g \implies a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 1 \iff c = 1$$

Vi kan få lignende ud af de to andre punkter, hvor vi jo allerede kender c-værdien.

$$\begin{aligned}(1,-1) \in g &\implies 1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 = -1 \\ (2,-1) \in g &\implies 2^2 \cdot a + 2 \cdot b + 1 = -1\end{aligned}$$

Vi har nu blot et simpelt ligningssystem, der skal løses.

$$\begin{aligned}a + b + 1 = -1 \wedge 4a + 2b + 1 = -1 &\implies b = -a - 2 \wedge 4a + 2b + 1 = -1 \\ &\implies 4a - 2a - 4 + 1 = -1 \\ &\implies 2a = 2 \\ &\implies a = 1\end{aligned}$$

b-værdien kan nemt regnes.

$$b = -a - 2 = -1 - 2 = -3$$

Da vi nu kender alle koefficienter og dermed funktionsforskriften, kan den afledede funktion findes.

$$f(x) = x^2 - 3x + 1 \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)) = 2x - 3$$

$f'(2)$ kan nu bestemmes:

$$f'(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$

Opgave 4

Bestem $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ i hvert af følgende tilfælde:

a. $f(x) = 3x + 4$

b. $f(x) = x^4 + 2x^3 + 4x$

c. $f(x) = \ln(x) - 4e^x + 1$

d. $f(x) = 6 \cdot \sqrt{x} + (x-1)^2$

e. $f(x) = \frac{5}{x} - 2x^{\frac{3}{2}}$

Løsning:
f differentieres i alle delopgaverne:
a.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 3$$

b.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 4x^3 + 3 \cdot 2x^2 + 4 = 4x^3 + 6x^2 + 4$$

c.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = x^{-1} - 4e^x$$

d.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 6 \cdot \frac{\sqrt{x}}{2} + 2x - 2 = 3\sqrt{x} + 2x - 2$$

e.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = -1 \cdot 5x^{-2} - \frac{3}{2} \cdot 2x^{\frac{1}{2}} = -\frac{5}{x^2} - 3\sqrt{x}$$

Opgave 5

Definér $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 5$$

Grafen for f er en parabel.

a. Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(2, f(2))$

b. Tegn i samme koordinatsystem grafen for f og den fundne tangent fra sp. a.

Løsning:
a. I punktet $P(2, f(2))$ er ligningen for tangenten da følgende, siden hældningen af linjen er

differentialkvotienten for f i 2, og konstantleddet blot er tangentens skæring med y-aksen.

$$\begin{aligned} y &= f'(2) \cdot x + f(2) - f'(2) \cdot 2 \\ &= (6 \cdot 2 - 6) \cdot x + 5 - (6 \cdot 2 - 6) \cdot 2 \\ &= 6x - 7 \end{aligned}$$

b. I fig. 4 ses grafen for f og den fundne tangent tegnet i det samme koordinatsystem i GeoGebra.

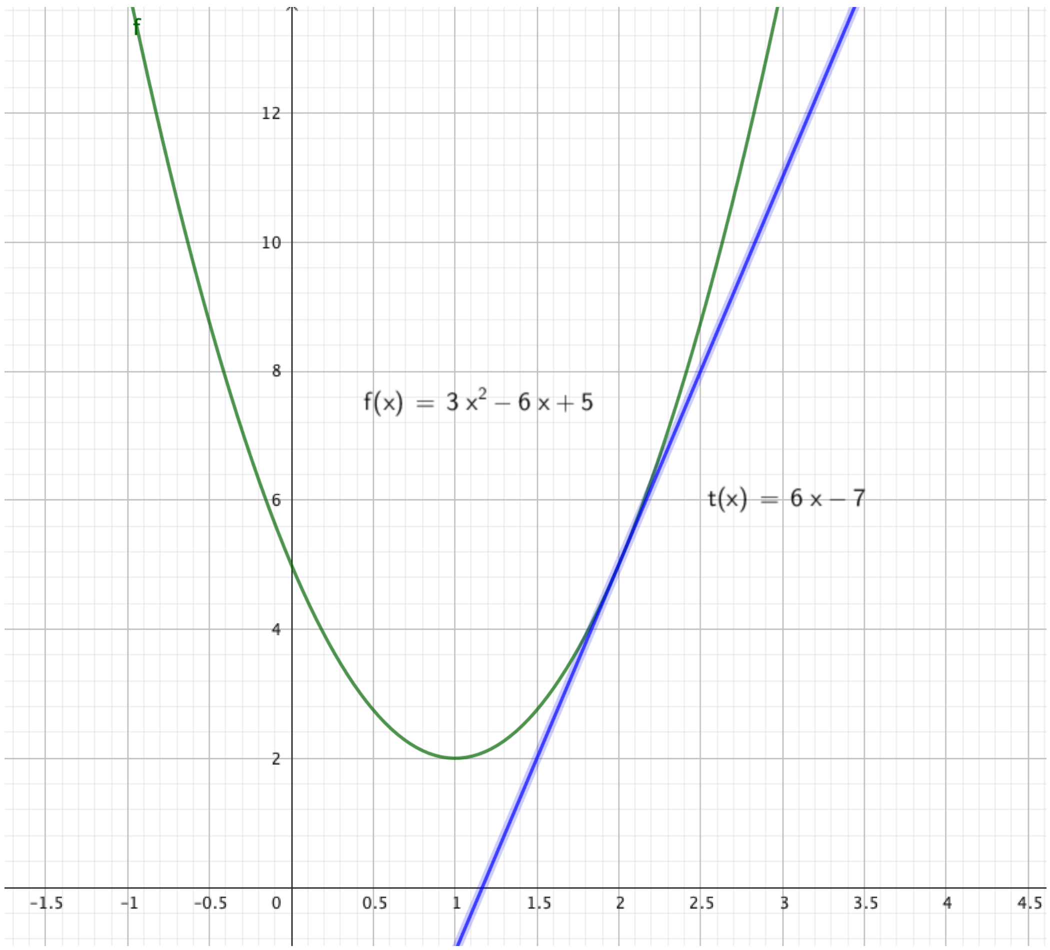

Figure 4: Grafen for f og den fundne tangent tegnet i GeoGebra