Aflevering 27

2.b mat A

Kevin Zhou

5. marts 2024

Bedømmelseskriterier:

- Redegørelse og dokumentation for metode
- Figurer, grafer og andre illustrationer
- Notation og layout
- Formidling og forklaring

Opgave 1: Opgave 6

En funktion $f :]-3;2] \to \mathbb{R}$ er givet ved

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 6$$

a. Bestem ekstrema for f

Løsning:
a. Vi finder først den afledede funktion for f med hensyn til x.

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

Vi finder nu løsningen til ligningen $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff 6x^2 + 6x - 12 = 0 \\ &\implies x = \frac{-6 - \sqrt{6^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-12)}}{2 \cdot 6} \vee x = \frac{-6 + \sqrt{6^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-12)}}{2 \cdot 6} \\ &\iff x = \frac{-6 - 18}{2 \cdot 6} \vee x = \frac{-6 + 18}{2 \cdot 6} \\ &\iff x = -2 \vee x = 1 \end{aligned}$$

Vi finder nu den dobbeltafledede funktion for f og tager den af de to løsninger til $f'(x) = 0$.

$$f''(x) = 12x + 6$$

Vi har altså

$$\begin{aligned} f''(-2) &= -18 < 0 \\ f''(1) &= 18 > 0 \end{aligned}$$

-2 må da være et maksimumssted og 1 må være et minimumssted. Vi kan da beregne ekstrema for f ved at tage f af de to fundne ekstremumssteder.

$$\begin{aligned} f(-2) &= 26 \\ f(1) &= -1 \end{aligned}$$

Altså er ekstrema for f 26 og -1.

Opgave 2: Opgave 7

Lad funktionen f være givet ved

$$f(x) = x - x^3$$

a. Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $(-1,f(-1))$.

Den tangent, hvis ligning blev bestemt i **a.** kaldes t.

b. Angiv koordinatsættet til hvert af de to punkter, hvor tangenten t skærer grafen for f.

Løsning:
a. Ligningen for tangenten til grafen for f i punktet $(-1,f(-1))$ må da være

$$\begin{aligned} y &= f'(-1) \cdot (x - (-1)) + f(-1) \\ &= \left(1 - 3 \cdot (-1)^2\right) \cdot (x + 1) + 0 \\ &= -2x - 2 \end{aligned}$$

Altså er ligningen for denne tangent $y = -2x - 2$.

b. Ved skæring for tangenten med grafen for f må der gælde følgende, hvor vi løser ligningen med nulreglen

$$\begin{aligned} x - x^3 = -2x - 2 &\iff -x^3 + 3x + 2 = 0 \\ &\iff (x-2)\cdot(x^2+2x+1) = 0 \\ &\iff (x-2)\cdot(x+1)^2 = 0 \\ &\iff x = 2 \vee x = -1 \end{aligned}$$

Vi finder nu de to tilhørende y-værdier til punkterne.

$$\begin{aligned} x = 2 &\implies y = -2\cdot 2 - 2 = -6 \\ x = -1 &\implies y = -2\cdot(-1) - 2 = 0 \end{aligned}$$

Koordinatsættet til de to punkter, hvor t skærer grafen for f må da være $(2,-6)$ og $(-1{,}0)$.

Opgave 3: Opgave 8

Tabellen i table 1 viser nogle sammenhørende værdier af alderen og højden for en bestemt abe. I en model antages sammenhængen mellem en abes alder og højde at være givet ved

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad 0 \le x \le 7$$

hvor x er abens alder målt i år og $f(x)$ er abens højde målt i cm.

a. Bestem tallene a, b og c via tallene i tabellen.

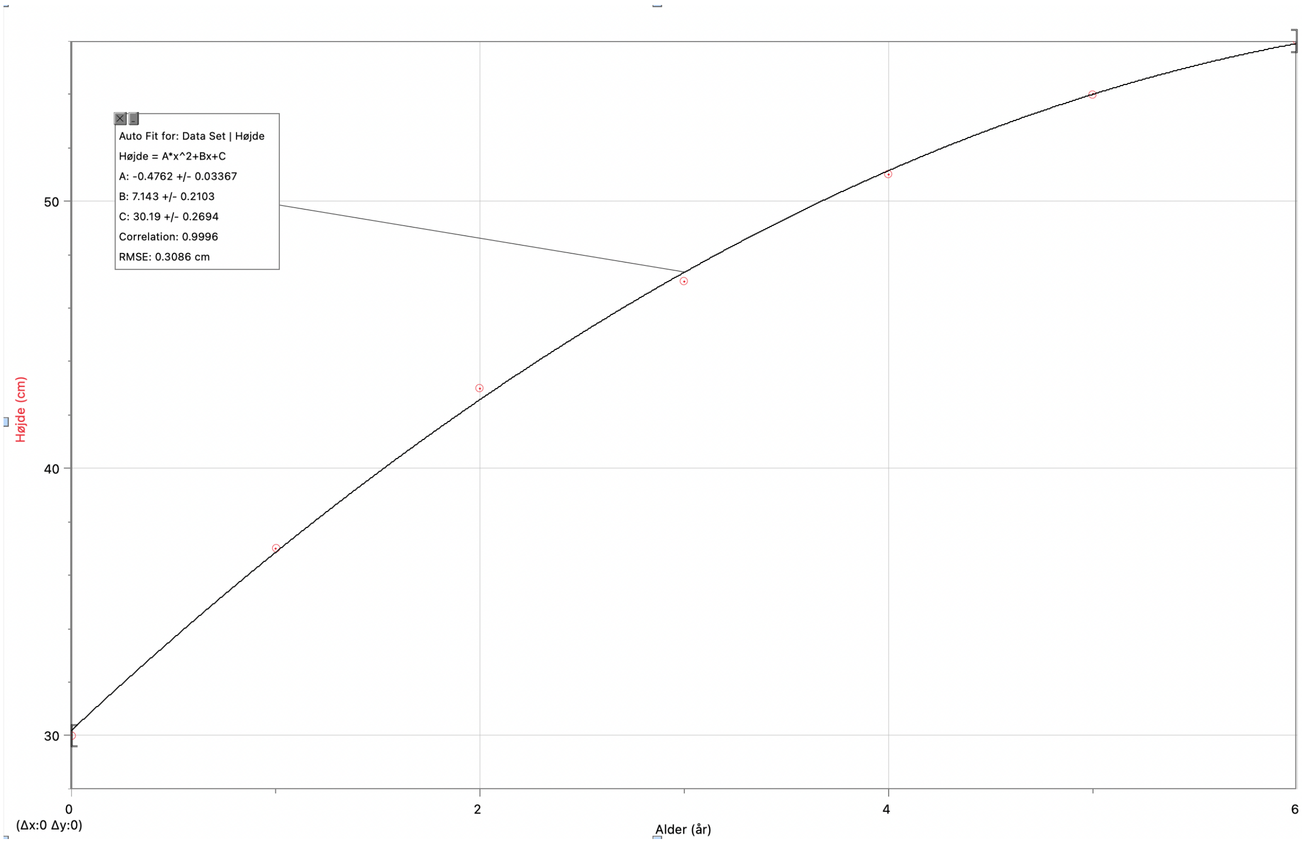
b. Benyt modellen til at bestemme abens højde, når den er 7 år gammel.

c. Bestem $f'(4)$ og giv en fortolkning af dette tal.

Alder/år	0	1	2	3	4	5	6
Højde/cm	30	37	43	47	51	54	56

Tabel 1: Værdier for alderen og højden for en bestemt abe

Løsning:
a. Vi laver da en regressionsanalyse med LoggerPro, der bruger mindste kvadraters metode. Denne ses i fig. 1.



Figur 1: Regressionsanalyse lavet i LoggerPro

Vi ser da, at vi får

$$a = -0{,}4762$$
$$b = 7{,}143$$
$$c = 30{,}19$$

b. For at bestemme abens højde, når den er 7 år gammel, tager vi funktionen f af 7.

$$\begin{aligned} f(7) &= -0{,}4762 \cdot 7^2 + 6{,}143 \cdot 7 + 30{,}19 \\ &\approx 50 \end{aligned}$$

Altså er højden på en 7-årig abe 50 cm.

c. Vi bestemmer først den afledede funktion for f.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-0{,}4762 \cdot x^2 + 6{,}143 \cdot x + 30{,}19\right) \\ &= -0{,}9524 \cdot x + 6{,}143 \end{aligned}$$

Vi tager nu den afledede funktion for f af 4.

$$\begin{aligned} f'(4) &= -0{,}9524 \cdot 4 + 6{,}143 \\ &= 2{,}3334 \end{aligned}$$

Dette tal fortæller, at aben vokser med 2,3334 cm per år, når aben er fire år.