

Список определений и формулировок по курсу «Алгебра» к коллоквиуму,
2019/2020 учебный год
Версия 1. 20 июня 2020 г.

1-й модуль

1. Дать определение умножения матриц. Коммутативна ли эта операция? Ответ пояснить.
2. Дать определения ступенчатого вида матрицы и канонического вида матрицы.
3. Перечислить элементарные преобразования строк матрицы.
4. Сформулировать теорему о методе Гаусса (алгоритм приводить не нужно).
5. Дать определения перестановки и подстановки.
6. Выписать общую формулу для вычисления определителя произвольного порядка.
7. Что такое алгебраическое дополнение?
8. Выписать формулы для разложения определителя по строке и по столбцу.
9. Что такое фальшивое разложение?
10. Выписать формулы Крамера для квадратной матрицы произвольного порядка. Когда с их помощью можно найти решение СЛАУ?
11. Дать определение союзной матрицы.
12. Дать определение обратной матрицы. Сформулировать критерий её существования.
13. Выписать формулу для нахождения обратной матрицы.
14. Дать определение минора.
15. Дать определение базисного минора. Какие строки называются базисными?
16. Дать определение ранга матрицы.
17. Дать определение линейной комбинации строк. Что такое нетривиальная линейная комбинация?
18. Дать определение линейной зависимости строк матрицы.
19. Дать определение линейно независимых столбцов матрицы.
20. Сформулировать критерий линейной зависимости.
21. Сформулировать теорему о базисном миноре.
22. Сформулировать теорему о ранге матрицы.
23. Сформулировать критерий невырожденности квадратной матрицы.
24. Выписать свойства решений однородных и неоднородных СЛАУ.
25. Сформулировать теорему Кронекера–Капелли.
26. Дать определение фундаментальной системы решений (ФСР) однородной СЛАУ.
27. Сформулировать критерий существования ненулевого решения однородной системы линейных уравнений с квадратной матрицей.

2-й модуль

1. Сформулируйте теорему о структуре общего решения однородной СЛАУ.
2. Сформулируйте теорему о структуре общего решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений.
3. Что такое алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексного числа?
4. Дайте определения модуля и аргумента комплексного числа. Что такое главное значение аргумента комплексного числа?
5. Сложение, умножение комплексных чисел. Что происходит с аргументами и модулями комплексных чисел при умножении и при делении?

6. Что такое комплексное сопряжение? Как можно делить комплексные числа в алгебраической форме?
7. Выпишите формулу Муавра.
8. Как найти комплексные корни n -ой степени из комплексного числа? Сделайте эскиз, на котором отметьте исходное число и все корни из него.
9. Сформулируйте основную теорему алгебры. Сформулируйте теорему Безу.
10. Выпишите формулу Эйлера. Выпишите выражения для синуса и косинуса через экспоненту.
11. Выпишите формулы Виета для многочлена третьей степени.
12. Какие многочлены называются неприводимыми?
13. Сформулируйте утверждение о разложении многочленов на неприводимые множители над полем комплексных чисел.
14. Дайте определение векторного произведения векторов в трехмерном пространстве.
15. Выпишите формулу для вычисления векторного произведения в координатах, заданных в ортонормированном базисе.
16. Дайте определение смешанного произведения векторов. Как вычислить объем тетраэдра с помощью смешанного произведения?
17. Выпишите формулу для вычисления смешанного произведения в координатах, заданных в ортонормированном базисе.
18. Сформулируйте критерий компланарности трех векторов с помощью смешанного произведения.
19. Что такое уравнение поверхности и его геометрический образ?
20. Сформулируйте теорему о том, что задает любое линейное уравнение на координаты точки в трехмерном пространстве.
21. Что такое нормаль к плоскости?
22. Выпишите формулу для расстояния от точки до плоскости.
23. Общие уравнения прямой. Векторное уравнение прямой. Параметрические и канонические уравнения прямой.
24. Выпишите формулу для вычисления расстояния между двумя скрещивающимися прямыми.
25. Какие бинарные операции называются ассоциативными, а какие коммутативными?
26. Дайте определения полугруппы и моноида. Приведите примеры.
27. Сформулируйте определение группы. Приведите пример.
28. Что такое симметрическая группа? Укажите число элементов в ней.
29. Что такое общая линейная и специальная линейная группы?
30. Сформулируйте определение абелевой группы. Приведите пример.
31. Дайте определение подгруппы. Приведите пример группы и её подгруппы.
32. Дайте определение гомоморфизма групп. Приведите пример.
33. Что такое ядро гомоморфизма групп? Приведите пример.
34. Дайте определение изоморфизма групп. Приведите пример.
35. Сформулируйте определение циклической группы. Приведите пример.
36. Дайте определение порядка элемента.
37. Сформулируйте утверждение о связи порядка элемента, порождающего циклическую группу, с порядком группы.
38. Сколько существует, с точностью до изоморфизма, циклических групп данного порядка?
39. Что такое группа диэдра? Что такое знакопеременная группа? Укажите число элементов в них.
40. Сформулируйте утверждение о том, какими могут быть подгруппы группы целых чисел по сложению.
41. Дайте определение левого смежного класса по некоторой подгруппе.

42. Что такое индекс подгруппы?
43. Сформулируйте теорему Лагранжа.
44. Сформулируйте две леммы, которые нужны для доказательства теоремы Лагранжа.

3-й модуль

1. Сформулируйте критерий нормальности подгруппы, использующий сопряжение.
2. Дайте определение факторгруппы.
3. Что такое естественный гомоморфизм?
4. Сформулируйте критерий нормальности подгруппы, использующий понятие ядра гомоморфизма.
5. Сформулируйте теорему о гомоморфизме групп. Приведите пример.
6. Что такое прямое произведение групп?
7. Сформулируйте определение автоморфизма и внутреннего автоморфизма.
8. Что такое центр группы? Приведите пример.
9. Чему изоморфна факторгруппа группы по её центру?
10. Сформулируйте теорему Кэли.
11. Дайте определение кольца.
12. Что такое коммутативное кольцо? Приведите примеры коммутативного и некоммутативного колец.
13. Дайте определение делителей нуля.
14. Дайте определение целостного кольца. Приведите пример.
15. Сформулируйте критерий целостности для нетривиального коммутативного кольца с единицей.
16. Какие элементы кольца называются обратимыми?
17. Дайте определение поля. Приведите три примера.
18. Дайте определение подполя. Привести пример пары: поле и его подполе.
19. Дайте определение характеристики поля. Привести примеры: поля конечной положительной характеристики и поля нулевой характеристики.
20. Сформулируйте утверждение о том, каким будет простое подполе в зависимости от характеристики.
21. Дайте определение идеала. Что такое главный идеал?
22. Сформулируйте определение гомоморфизма колец.
23. Сформулируйте теорему о гомоморфизме колец. Приведите пример.
24. Сформулируйте критерий того, что кольцо вычетов по модулю n является полем.
25. Сформулируйте теорему о том, когда факторкольцо кольца многочленов над полем само является полем.
26. Дайте определение алгебраического элемента над полем.
27. Сформулируйте утверждение о том, что любое конечное поле может быть реализовано как факторкольцо кольца многочленов по некоторому идеалу.
28. Сформулируйте утверждение о том, сколько элементов может быть в конечном поле.
29. Дайте определение линейного (векторного) пространства.
30. Дайте определение базиса линейного (векторного) пространства.
31. Что такое размерность пространства?
32. Дайте определение матрицы перехода от старого базиса линейного пространства к новому.
33. Выпишите формулу для описания изменения координат вектора при изменении базиса.
34. Дайте определение подпространства в линейном пространстве.
35. Дайте определения линейной оболочки конечного набора векторов и ранга системы векторов.

36. Дайте определения суммы и прямой суммы подпространств.
37. Сформулируйте утверждение о связи размерности суммы и пересечения подпространств.
38. Дайте определение билинейной формы.
39. Дайте определение квадратичной формы.
40. Дайте определения положительной и отрицательной определенности квадратичной формы.
41. Какую квадратичную форму называют знакопеременной?
42. Дайте определения канонического и нормального вида квадратичной формы.
43. Как меняется матрица билинейной формы при замене базиса? Как меняется матрица квадратичной формы при замене базиса?
44. Сформулируйте критерий Сильвестра и его следствие.
45. Сформулируйте закон инерции квадратичных форм. Что такое индексы инерции?
46. Дайте определение линейного отображения. Приведите пример.
47. Дайте определение матрицы линейного отображения.
48. Выпишите формулу для преобразования матрицы линейного отображения при замене базиса. Как выглядит формула в случае линейного оператора?

4-й модуль

1. Сформулируйте утверждение о связи размерностей ядра и образа линейного отображения.
2. Дайте определения собственного вектора и собственного значения линейного оператора.
3. Дайте определения характеристического уравнения и характеристического многочлена квадратной матрицы.
4. Сформулируйте утверждение о связи характеристического уравнения и спектра линейного оператора.
5. Дайте определение собственного подпространства.
6. Дайте определения алгебраической и геометрической кратности собственного значения. Какое неравенство их связывает?
7. Каким свойством обладают собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям?
8. Сформулируйте критерий диагональности матрицы оператора.
9. Сформулируйте критерий диагонализруемости матрицы оператора с использованием понятия геометрической кратности.
10. Дайте определение жордановой клетки. Сформулируйте теорему о жордановой нормальной форме матрицы оператора.
11. Выпишите формулу для количества жордановых клеток заданного размера.
12. Сформулируйте теорему Гамильтона—Кэли.
13. Дайте определение корневого подпространства.
14. Дайте определение минимального многочлена линейного оператора.
15. Дайте определение инвариантного подпространства.
16. Дайте определение евклидова пространства.
17. Выпишите неравенства Коши—Буняковского и треугольника.
18. Дайте определения ортогонального и ортонормированного базисов.
19. Дайте определение матрицы Грама.
20. Выпишите формулу для преобразования матрицы Грама при переходе к новому базису.
21. Как меняется определитель матрицы Грама (грамиан) при применении процесса ортогонализации Грама—Шмидта?

22. Сформулируйте критерий линейной зависимости с помощью матрицы Грама.
23. Дайте определение ортогонального дополнения.
24. Дайте определения ортогональной проекции вектора на подпространство и ортогональной составляющей.
25. Выпишите формулу для ортогональной проекции вектора на подпространство, заданное как линейная оболочка данного линейно независимого набора векторов.
26. Выпишите формулу для вычисления расстояния с помощью определителей матриц Грама.
27. Дайте определение сопряженного оператора в евклидовом пространстве.
28. Дайте определение самосопряженного (симметрического) оператора.
29. Как найти матрицу сопряженного оператора в произвольном базисе?
30. Каким свойством обладают собственные значения самосопряженного оператора?
31. Что можно сказать про собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие разным собственным значениям?
32. Сформулируйте определение ортогональной матрицы.
33. Сформулируйте определение ортогонального оператора.
34. Сформулируйте критерий ортогональности оператора, использующий его матрицу.
35. Каков канонический вид ортогонального оператора? Сформулируйте теорему Эйлера.
36. Сформулируйте теорему о существовании для самосопряженного оператора базиса из собственных векторов.
37. Сформулируйте теорему о приведении квадратичной формы к диагональному виду при помощи ортогональной замены координат.
38. Сформулируйте утверждение о QR-разложении.
39. Сформулируйте теорему о сингулярном разложении.
40. Сформулируйте утверждение о полярном разложении.
41. Дайте определение сопряженного пространства.
42. Выпишите формулу для преобразования координат ковектора при переходе к другому базису.
43. Дайте определение взаимных базисов.
44. Дайте определение биортогонального базиса.
45. Сформулируйте определение алгебры над полем. Приведите два примера.
46. Сформулируйте определение тензора. Приведите два примера.
47. Дайте определение эллипса как геометрического места точек. Выпишите его каноническое уравнение. Что такое эксцентриситет эллипса? В каких пределах он может меняться?
48. Дайте определение гиперболы как геометрического места точек. Выпишите её каноническое уравнение. Что такое эксцентриситет гиперболы? В каких пределах он может меняться?
49. Дайте определение параболы как геометрического места точек. Выпишите её каноническое уравнение.
50. Дайте определение цилиндрической поверхности.
51. Дайте определение линейчатой поверхности. Приведите три примера.