Задачи для подготовки к экзамену

(«нулевой вариант») по курсу «Алгебра»,

4-ый модуль 2017/2018 учебного года.

Решения

(№№1-8, без кривых второго порядка)

Подготовила Анна Першина,

гр. БПИ171

С замечаниями и вопросами feel free to write me: vk.com/nechka266

1. Представить невырожденную матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ в виде произведения ортогональной матрицы Q на верхнетреугольную матрицу R.

Применим к векторам столбцов процесс ортогонализации Грама-Шмидта:

$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ – изначальный набор векторов-столбцов. Построим набор из взаимно ортогональных векторов по формуле: $b_j = a_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{(a_j, b_i)}{(b_i, b_i)} \cdot b_i$:

$$b_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{0 \cdot 2 + 4 \cdot 2 - 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1)} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix},$$

$$b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-1)}{2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1)} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + (-1) \cdot \frac{8}{3} + 3 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right)}{\left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{8}{3} \cdot \frac{8}{3} + \left(-\frac{8}{3}\right) \cdot \left(-\frac{8}{3}\right)} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

В конце не забудем нормализовать векторы, иначе матрица, составленная из них, не будет ортогональной.

$$b_1' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, b_2' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, b_3' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Составим из полученных столбцов матрицу Q и проверим, что она действительно ортогональна:

$$Q \cdot Q^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Осталось найти матрицу R такую, что $A = Q \cdot R$, то есть

$$R = Q^{-1} \cdot A = Q^T \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Действительно, матрица R является верхнетреугольной, то есть все элементы ниже главной диагонали нулевые.

2. Постройте сингулярное разложение для матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \\ -4 & -7 & -5 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу самосопряженного оператора $A^T \cdot A$:

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 & -4 \\ 5 & 5 & 7 & -7 \\ 1 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \\ -4 & -7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 & 136 & 56 \\ 136 & 148 & 80 \\ 56 & 80 & 52 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения и собственные векторы:

Характеристический многочлен: $\begin{vmatrix} 160-\lambda & 136 & 56 \\ 136 & 148-\lambda & 80 \\ 56 & 80 & 52-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \cdot (\lambda - 36) \cdot (\lambda - 324)$

Собственные значения: $\lambda_3 = 0,\ \lambda_2 = 36,\ \lambda_1 = 324$. Для каждого найдем собственные векторы:

1) $A - \lambda_3 \cdot E = \begin{pmatrix} 160 & 136 & 56 \\ 136 & 148 & 80 \\ 56 & 80 & 52 \end{pmatrix}$. Фундаментальная система решений однородной СЛАУ, заданной этой матрицей состоит из одного вектора, который и будет собственным: $u_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) $A - \lambda_2 \cdot E = \begin{pmatrix} 124 & 136 & 56 \\ 136 & 112 & 80 \\ 56 & 80 & 16 \end{pmatrix}$. ФСР – $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) $A - \lambda_1 \cdot E = \begin{pmatrix} -164 & 136 & 56 \\ 136 & -172 & 80 \\ 56 & 80 & -272 \end{pmatrix}$. ФСР – $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Нормируем векторы u_i, запишем их по столбцам и получим ортогональную матрицу $U = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Матрица Σ – диагональная матрица такого же размера, как и данная (A), в которой на главной диагонали расположены в порядке неубывания квадратные корни из собственных значений самосопряженного оператора $A^T \cdot A$ (вообще, можно доказать, что они всегда неотрицательны, но на контрольной это никому не нужно, извлекается корень – вот и хорошо). То есть $\Sigma = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Осталось построить вторую ортогональную матрицу C. Для этого подействуем оператором A на столбцы U, поделим на соответствующие (ненулевые!) сингулярные числа и дополним еще двумя векторами до ОНБ.

$$\frac{\mathrm{A}u_1}{\sigma_1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}, \frac{\mathrm{A}u_2}{\sigma_2} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -\frac{9}{4} \\ -\frac{9}{4} \\ \frac{9}{4} \\ -\frac{9}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

Проверка: $V \cdot \Sigma \cdot U^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \\ -4 & -7 & -5 \end{pmatrix} = A.$

3. Пусть в некотором ортонормированном базисе трёхмерного евклидова пространства заданы векторы $e_1 = (0,1,1)^T, e_2 = (-1,-1,1)^T, e_3 = (1,0,1)^T$. Пусть оператор f задан матрицей $A_f = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ в базисе e_1, e_2, e_3. Найти матрицу A_{f^*} споряженного оператора f^* в том же базисе.

Воспользуемся известной формулой: $A^* = \Gamma^{-1} \cdot A^T \cdot \Gamma$

Для этого найдем матрицу Грама для базиса e_1, e_2, e_3:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_1, e_2) & (e_2, e_2) & (e_3, e_2) \\ (e_1, e_3) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 & (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Подставим в формулу:

$$A^* = \Gamma^{-1} \cdot A^T \cdot \Gamma = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ \frac{4}{3} & 5 & \frac{5}{3} \\ 5 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$ – искомая матрица

4. В базисе $e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ квадратичная форма $Q(x)$ имеет матрицу $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу квадратичной формы $Q(x)$ в базисе $\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Воспользуемся формулой для преобразования матрицы квадратичной формы при замене базиса:

$$B' = T_{e\to e'}^T \cdot B \cdot T_{e\to e'}$$

Для этого найдем матрицу перехода от базиса e к базису e' *(да, мне лень искать в символах циркумфлекс, будет штрих)*.

Обозначим за s стандартный базис $s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда

$$T_{e\to e'} = T_{s\to e}^{-1} \cdot T_{s\to e'} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{5} \\ -1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}, \text{ и, соответственно,}$$

$$B' = T_{e\to e'}^T \cdot B \cdot T_{e\to e'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{5} \\ -1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{7}{25} \end{pmatrix}.$$

5. Привести квадратичную форму $2x_1x_1 - 2x_1x_3 - x_2^2 + x_2^2 + 5x_3^2$ к нормальному виду с помощью метода Лагранжа. Определить ранг и индексы инерции. Указать соответствующее линейное преобразование.

Суть метода Лагранжа в том, чтобы просто занести все в квадраты, пользуясь формулами сокращенного умножения.

Задание на самом деле с кучей опечаток (инфа подтверждена В.Л.), его потом заменят, но решим пока так. Приведем к адекватному виду:

$$2x_1x_1 - 2x_1x_3 - x_2^2 + x_2^2 + 5x_3^2 = 2x_1^2 - 2x_1x_3 + 5x_3^2$$

Осталось всего две переменных! Последовательно «уберем» их в квадраты:

$$2x_1^2 - 2x_1x_3 + 5x_3^2 = (\sqrt{2}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3)^2 + \frac{9}{2}x_3^2 = (\sqrt{2}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3)^2 + (\frac{3}{\sqrt{2}}x_3)^2$$

Таким образом, искомый нормальный вид квадратичной формы - $Q(x) = {x'_1}^2 + {x'_3}^2$,

где $x'_1 = \sqrt{2}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3$, $x'_3 = \frac{3}{\sqrt{2}}x_3$. Матрица такой формы имеет вид $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ранг квадратичной формы равен 2, индексы инерции (количества положительных и отрицательных элементов на диагонали соответственно) - $i_+ = 2,\ \ i_- = 0$.

Запишем матрицу перехода (с переменной x_2 ничего не происходит): $T = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ – обратная к ней,

$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$, и есть матрица соответствующего линейного преобразования.

6. Привести квадратичную форму $k = x_1^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 5x_3^2$ к каноническому виду посредством ортогональной замены координат. Определить ранг и индексы инерции. Указать соответствующее линейное преобразование.

Составим матрицу данной квадратичной формы (не забудем поделить на 2 коэффициенты при смешанных произведениях):

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Найдем для нее собственные значения и соответствующие им собственные векторы:

$$\mathrm{X}_B = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & -1 \\ -3 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36 = -(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda-6)$$

1) $B - \lambda_1 \cdot E = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. Фундаментальная система решений однородной СЛАУ, заданной этой матрицей состоит из одного вектора, который и будет собственным: $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2) $B - \lambda_2 \cdot E = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. ФСР – $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) $B - \lambda_3 \cdot E = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. ФСР – $u_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Так как все три собственных значения различны, собственные векторы ортогональны. Просто нормируем их и составим ортогональную матрицу перехода:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Обратная к ней и будет искомой матрицей линейного преобразования:

$$T^{-1} = T^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Канонический вид квадратичной формы задается диагональным видом матрицы:

$$B' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Он равен $-2{x'_1}^2 + 3{x'_2}^2 + 6{x'_3}^2$ ранг квадратичной формы равен 3, индексы инерции (количества положительных и отрицательных элементов на диагонали соответственно) - $i_+ = 2, \ \ i_- = 1$.

7. Исследовать квадратичную форму на положительную или отрицательную определенность в зависимости от параметра: $k = (\alpha - 1)x_1^2 + (2\alpha - 2)x_1x_2 - 2\alpha x_1x_3 + 2\alpha x_2^2 - 2\alpha x_2x_3 + (\alpha - 2)x_3^2$.

Воспользуемся критерием Сильвестра, для этого найдем главные угловые миноры матрицы данной квадратичной формы (ее надо составлять внимательно, не забыв поделить на 2 коэффициенты при смешанных произведениях):

$$B = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & \alpha - 1 & -\alpha \\ \alpha - 1 & 2\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & \alpha - 2 \end{pmatrix} \text{– матрица квадратичной формы}$$

И миноры:

$$\Delta_1 = \alpha - 1, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha - 1 & \alpha - 1 \\ \alpha - 1 & 2\alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 1, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha - 1 & \alpha - 1 & -\alpha \\ \alpha - 1 & 2\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & \alpha - 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot \alpha^2 - \alpha + 2$$

Найдем значения параметра, при которых квадратичная форма определена положительно (то есть все три угловых минора положительны):

$$\begin{cases} \alpha - 1 > 0, \\ \alpha^2 - 1 > 0, \\ -3\alpha^2 - \alpha + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1, \\ (\alpha - 1) \cdot (\alpha + 1) > 0, \\ \left(\alpha - \frac{2}{3}\right) \cdot (\alpha + 1) < 0 \end{cases}$$

Решим все методом интервалов, получим ответ: квадратичная форма не может быть положительно определена.

Найдем значения параметра, при которых квадратичная форма определена отрицательно (то есть знаки угловых миноров чередуются, начиная с –):

$$\begin{cases} \alpha - 1 < 0, \\ \alpha^2 - 1 > 0, \\ -3\alpha^2 - \alpha + 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < 1, \\ (\alpha - 1) \cdot (\alpha + 1) > 0, \\ \left(\alpha - \frac{2}{3}\right) \cdot (\alpha + 1) > 0 \end{cases}$$

Решим все методом интервалов, получим ответ: квадратичная форма отрицательно определена, если $\alpha \epsilon (-\infty; -1)$.

8. Линейный оператор A в некотором базисе задан матрицей
$A = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Плоскость P задана уравнением $x_2 + x_3 = 1$. Найти расстояние между P и $A(P)$, то есть её образом под действием A.

Плоскость P является линейным многообразием $M_1 = L_1 + v_1 = t_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, так как это множество точек, координаты которых имеют вид $\begin{pmatrix} 1 - x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Подействуем данным линейным оператором на произвольный вектор такого вида:

$$A \begin{pmatrix} 1 - x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x_2 + 3x_3 - 6 \\ 3x_2 - 3 \\ -6x_2 - 2x_3 - 3 \end{pmatrix}$$

Получается, что образ плоскости при применении данного линейного оператора – многообразие $M_2 = L_2 + v_2 = t_1 \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Для нахождения расстояния воспользуемся формулой с грамианами, для этого сначала найдем базис пространства $L_1 + L_2$.

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 9 & 3 & -6 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ранг матрицы равен 3, а значит, сумма $L_1 + L_2$ есть все пространство.

Значит, расстояние равно 0 и можно дальше ничего не считать.