Домашнее задание 3. Курс “Алгебра”. 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 1

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 152 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{76} = 1$;
   (b) элементы g порядка 76.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 2 в группе $D_5 \times S_3 \times \mathbb{Z}_2$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_{11}$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.
$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 & 3 \\ 6 & 8 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 8 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 149$ и $q = 61$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 114$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (149, 61, 114)$, а закрытый ключ равен $x = 24$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (25, 74)$.
   Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 9573$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 16637, d = 5407)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 29353, e = 157)$.

6. Пусть $f(x) = x^4 + 10x^3 + 16x^2 + 5x + 12, g(x) = x^3 + 3x^2 + 12x + 10$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_{17}$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_{17}[x]$ такие, что
$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_3[x]/\langle x^3 + 2x^2 + x + 1 \rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс
$$f + \left\langle x^3 + 2x^2 + x + 1 \right\rangle \in F.$$
   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 3$ выражение
$$\tfrac{x^6+x^3+2x^2+2}{x} + (x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2)(2x^3 + x^2 + 2) - \tfrac{x^4+x^3+2x^2+x+1}{2x^2+1}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 & 0 \\ x_1 & x_3 & x_4 & x_2 \end{pmatrix},$$
   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс "Алгебра". 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 2

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 570 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{285} = 1$;
   (b) элементы g порядка 285.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 4 в группе $D_4 \times S_4 \times \mathbb{Z}_4$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_7$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 6 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 113$ и $q = 41$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 63$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (113, 41, 63)$, а закрытый ключ равен $x = 43$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (25, 45)$. Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 6008$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 18857, d = 7669)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 28459, e = 103)$.

6. Пусть $f(x) = x^4 + 6x^3 + 3x^2 + 2x + 4, g(x) = x^4 + 3x^2 + 4x + 6$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_7$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_2[x]/\left\langle x^3 + x + 1 \right\rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \left\langle x^3 + x + 1 \right\rangle \in F.$$

   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 3$ выражение

$$\tfrac{x^4+x^3+x^2+x}{x^2+x} + (x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + x)(x^3 + x + 1) - \tfrac{x^4+x^3+x}{x}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix},$$

   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс “Алгебра”. 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 3

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 204 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{24} = 1$;
   (b) элементы g порядка 24.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 2 в группе $D_5 \times S_3 \times \mathbb{Z}_2$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_{11}$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 3 & 8 \\ 0 & 4 & 2 & 8 \\ 3 & 10 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 137$ и $q = 67$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 115$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (137, 67, 115)$, а закрытый ключ равен $x = 8$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (77, 93)$.
   Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 18104$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 22879, d = 6593)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 15707, e = 101)$.

6. Пусть $f(x) = x^3 + 4x^2 + 2x + 8, g(x) = x^3 + 18x^2 + 10$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_{19}$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_{19}[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_2[x]/\left\langle x^2 + x + 1 \right\rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \left\langle x^2 + x + 1 \right\rangle \in F.$$

   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 2$ выражение

$$\tfrac{x^4+x^3+x^2+x}{x^2+x} + \left(x^4 + x^2 + x\right)\left(x^2 + 1\right) - \tfrac{x^2+x}{x^2+x+1}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & x_3 & x_4 & 0 \\ 0 & x_4 & x_3 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix},$$

   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс "Алгебра". 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 4

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 570 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{135} = 1$;
   (b) элементы g порядка 135.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 2 в группе $D_3 \times S_3 \times \mathbb{Z}_6$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_{19}$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} 18 & 16 & 5 & 5 \\ 7 & 18 & 18 & 16 \\ 13 & 14 & 3 & 18 \\ 5 & 12 & 9 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ 18 \\ 10 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 73$ и $q = 31$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 13$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (73, 31, 13)$, а закрытый ключ равен $x = 25$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (70, 69)$. Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 12873$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 21473, d = 20197)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 18923, e = 101)$.

6. Пусть $f(x) = x^4 + 7x^3 + 4x^2 + x + 9, g(x) = x^4 + 3x^3 + 10x + 6$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_{11}$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_{11}[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_2[x]/\langle x^4 + x^3 + 1 \rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \left\langle x^4 + x^3 + 1 \right\rangle \in F.$$

   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 4$ выражение

$$\tfrac{x^2}{x^2} + (x^5 + x^4 + x)(x^4 + x^3) - \tfrac{x+1}{x^2+x+1}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1 & x_4 & 0 \\ 0 & x_4 & x_1 & 0 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix},$$

   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс "Алгебра". 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 5

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 550 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{90} = 1$;
   (b) элементы g порядка 90.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 2 в группе $D_4 \times S_3 \times \mathbb{Z}_2$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_5$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 103$ и $q = 67$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 10$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (103, 67, 10)$, а закрытый ключ равен $x = 27$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (75, 44)$. Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 14912$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 15857, d = 9589)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 36863, e = 101)$.

6. Пусть $f(x) = x^4 + 16x^2 + 4x + 4, g(x) = x^3 + 5x^2 + 15x + 18$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_{19}$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_{19}[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_3[x]/\left\langle x^4 + x^3 + 2x + 1 \right\rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \left\langle x^4 + x^3 + 2x + 1 \right\rangle \in F.$$

   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 4$ выражение

$$\tfrac{x^5+x^4+2x^3+2x+1}{x} + (2x^3 + 2x^2 + 2)(x^6 + 2x^5 + 2x^4 + x^3 + 2) - \tfrac{x^3+x^2+x}{2x}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & x_3 & x_4 & 0 \\ 0 & x_4 & x_3 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix},$$

   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс "Алгебра". 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 6

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 2125 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{425} = 1$;
   (b) элементы g порядка 425.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 2 в группе $D_3 \times S_4 \times \mathbb{Z}_2$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_7$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 6 & 6 \\ 5 & 2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 131$ и $q = 29$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 64$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (131, 29, 64)$, а закрытый ключ равен $x = 46$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (120, 41)$. Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 3784$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 25159, d = 14411)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 21509, e = 197)$.

6. Пусть $f(x) = x^4 + 8x^3 + 9x^2 + 4x, g(x) = x^3 + 16x^2 + 12x + 9$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_{17}$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_{17}[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_7[x]/\left\langle x^2 + 1 \right\rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \left\langle x^2 + 1 \right\rangle \in F.$$

   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 2$ выражение

$$\tfrac{6x+6}{6x+1} + \left(3x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 3x + 6\right)\left(x^5 + x^4 + x^3 + 3x + 5\right) - \tfrac{6x^2+x+6}{2x}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1 & x_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс "Алгебра". 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 7

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 350 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{90} = 1$;
   (b) элементы g порядка 90.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 2 в группе $D_5 \times S_3 \times \mathbb{Z}_4$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_5$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 137$ и $q = 29$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 70$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (137, 29, 70)$, а закрытый ключ равен $x = 109$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (60, 72)$. Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 8965$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 13837, d = 5399)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 31243, e = 137)$.

6. Пусть $f(x) = x^4 + 11x^3 + 9x^2 + 14x + 3, g(x) = x^3 + 4x^2 + 7x$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_{19}$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_{19}[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_3[x]/\langle x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 2 \rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \left\langle x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 2 \right\rangle \in F.$$

   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 4$ выражение

$$\tfrac{x^4+2x^3+2x^2}{x} + (2x^4 + x^2 + 2x + 2)(x^5 + 2x^4 + x^3) - \tfrac{x^3+x}{x+1}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1 & x_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс "Алгебра". 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 8

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 340 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{90} = 1$;
   (b) элементы g порядка 90.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 2 в группе $D_5 \times S_4 \times \mathbb{Z}_4$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_{17}$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 2 & 9 \\ 3 & 12 & 1 & 1 \\ 16 & 2 & 3 & 10 \\ 12 & 9 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 5 \\ 16 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 149$ и $q = 29$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 88$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (149, 29, 88)$, а закрытый ключ равен $x = 33$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (19, 21)$. Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 11740$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 29353, d = 12679)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 20651, e = 113)$.

6. Пусть $f(x) = x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 12x + 13, g(x) = x^5 + 10x^4 + 3x^3 + 15x^2 + 11x + 7$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_{17}$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_{17}[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_2[x]/\left\langle x^3 + x + 1 \right\rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \left\langle x^3 + x + 1 \right\rangle \in F.$$

   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 3$ выражение

$$\tfrac{x^3+x^2+x+1}{x+1} + \left(x^3 + x^2 + x\right)\left(x^5 + x^4 + x + 1\right) - \tfrac{x^6+x^3+x^2+1}{x^2}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix},$$

   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс “Алгебра”. 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 9

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 104 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{52} = 1$;
   (b) элементы g порядка 52.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 6 в группе $D_3 \times S_4 \times \mathbb{Z}_6$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_{17}$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 16 & 5 & 1 \\ 3 & 13 & 14 & 2 \\ 5 & 8 & 16 & 5 \\ 1 & 11 & 7 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 13 \\ 8 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 149$ и $q = 67$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 17$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (149, 67, 17)$, а закрытый ключ равен $x = 10$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (17, 53)$. Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 15855$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 19493, d = 5989)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 28891, e = 191)$.

6. Пусть $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 10x + 9, g(x) = x^4 + 3x^3 + 10x^2 + 8x$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_{11}$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_{11}[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_7[x]/\left\langle x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 6x + 4 \right\rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \left\langle x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 6x + 4 \right\rangle \in F.$$

   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 4$ выражение

$$\tfrac{4x+3}{4x^2+5} + (x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 6x + 6)(2x^3 + 3x^2 + 4x + 4) - \tfrac{2x^6+4x^5+x^4+4x^3+x^2+4x+3}{3x+2}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & x_3 & x_4 & 0 \\ 0 & x_4 & x_3 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix},$$

   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс "Алгебра". 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 10

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 1275 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{60} = 1$;
   (b) элементы g порядка 60.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 4 в группе $D_4 \times S_3 \times \mathbb{Z}_6$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_5$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 103$ и $q = 43$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 90$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (103, 43, 90)$, а закрытый ключ равен $x = 93$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (42, 10)$. Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 12945$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 17653, d = 10369)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 23449, e = 113)$.

6. Пусть $f(x) = x^4 + x^3 + 12x^2 + 2x + 16, g(x) = x^5 + 9x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 10x$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_{17}$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_{17}[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_3[x]/\langle x^3 + 2x^2 + 1 \rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \langle x^3 + 2x^2 + 1 \rangle \in F.$$

   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 3$ выражение

$$\frac{2x^5+2x^4+2x^3}{2x^2+2x} + (x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2 + 1)(2x^2 + x + 1) - \frac{x+1}{x^2+1}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & x_3 & x_4 & 0 \\ 0 & x_4 & x_3 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix},$$

   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс "Алгебра". 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 11

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 234 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{36} = 1$;
   (b) элементы g порядка 36.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 6 в группе $D_3 \times S_4 \times \mathbb{Z}_4$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_{11}$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 7 & 10 \\ 6 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 9 & 1 \\ 4 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 103$ и $q = 23$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 64$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (103, 23, 64)$, а закрытый ключ равен $x = 45$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (79, 102)$. Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 16796$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 28891, d = 13583)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 35657, e = 113)$.

6. Пусть $f(x) = x^3 + 6x^2 + 10x, g(x) = x^3 + 5x^2 + 6x$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_{17}$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_{17}[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_7[x]/\langle x^3 + 5x^2 + 4 \rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \left\langle x^3 + 5x^2 + 4 \right\rangle \in F.$$

   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 3$ выражение

$$\tfrac{6x+1}{x} + (2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x)(5x^3 + 3x + 4) - \tfrac{x^6+4x^5+x^4+6x^3+x^2+2x}{x+4}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & x_4 & x_3 \end{pmatrix},$$

   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс "Алгебра". 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 12

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 1275 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{60} = 1$;
   (b) элементы g порядка 60.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 4 в группе $D_3 \times S_4 \times \mathbb{Z}_6$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_5$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 149$ и $q = 23$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 120$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (149, 23, 120)$, а закрытый ключ равен $x = 122$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (35, 139)$.
   Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 2588$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 15553, d = 12173)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 18079, e = 131)$.

6. Пусть $f(x) = x^3 + 12x^2 + 18x + 7, g(x) = x^3 + 2x^2 + 6x + 10$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_{19}$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_{19}[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_7[x]/\langle x^3 + 6x^2 + 6 \rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \left\langle x^3 + 6x^2 + 6 \right\rangle \in F.$$

   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 3$ выражение

$$\tfrac{2x+4}{3x} + (x+1)\left(3x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 4x^2 + x + 6\right) - \tfrac{x^2+2x+2}{2x+4}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1 & x_4 & 0 \\ 0 & x_4 & x_1 & 0 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix},$$

   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс "Алгебра". 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 13

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 510 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{54} = 1$;
   (b) элементы g порядка 54.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 6 в группе $D_5 \times S_3 \times \mathbb{Z}_2$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_5$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 107$ и $q = 59$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 16$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (107, 59, 16)$, а закрытый ключ равен $x = 86$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (3, 1)$. Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 24091$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 34933, d = 25867)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 24047, e = 131)$.

6. Пусть $f(x) = x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + x, g(x) = x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 6x$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_7$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_3[x]/\langle x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 2\rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \left\langle x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 2 \right\rangle \in F.$$

   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 4$ выражение

$$\tfrac{2x^4+x^3}{2x+1} + (2x)\left(x^6 + x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x\right) - \tfrac{x^6+2x^4+x^3+2x^2+2x+2}{x^2+x+2}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & x_3 & x_4 & 0 \\ 0 & x_4 & x_3 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix},$$

   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс "Алгебра". 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 14

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 390 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{135} = 1$;
   (b) элементы g порядка 135.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 6 в группе $D_4 \times S_4 \times \mathbb{Z}_4$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_{17}$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 15 & 9 & 13 \\ 3 & 0 & 7 & 7 \\ 4 & 15 & 16 & 3 \\ 8 & 13 & 15 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 151$ и $q = 71$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 141$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (151, 71, 141)$, а закрытый ключ равен $x = 121$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (82, 113)$.
   Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 26323$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 29353, d = 589)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 20453, e = 139)$.

6. Пусть $f(x) = x^4 + x^3 + 17x^2 + 16x + 18, g(x) = x^3 + 15x + 9$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_{19}$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_{19}[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_3[x]/\langle x^3 + 2x^2 + x + 1 \rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \left\langle x^3 + 2x^2 + x + 1 \right\rangle \in F.$$

   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 3$ выражение

$$\tfrac{2x+2}{x+1} + (x^5 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1)(x^4 + x^2 + 2x) - \tfrac{2x+1}{x^2+2}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1 & x_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс “Алгебра”. 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 15

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 550 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{275} = 1$;
   (b) элементы g порядка 275.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 6 в группе $D_4 \times S_4 \times \mathbb{Z}_6$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_{11}$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 4 \\ 7 & 7 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 5 & 1 \\ 8 & 9 & 8 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 97$ и $q = 59$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 74$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (97, 59, 74)$, а закрытый ключ равен $x = 95$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (3, 9)$. Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 17422$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 18643, d = 9539)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 13837, e = 127)$.

6. Пусть $f(x) = x^4 + 12x^3 + 12x^2 + 14x + 16, g(x) = x^4 + 15x^3 + 12x^2 + 4x + 6$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_{17}$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_{17}[x]$ такие, что
$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_3[x]/\left\langle x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 2\right\rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс
$$f + \left\langle x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 2\right\rangle \in F.$$
   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 4$ выражение
$$\tfrac{2x^2+2x}{2x^2+2x+1} + (x^2 + 2)(x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x) - \tfrac{x^5+2x^4+2x^2+x+1}{2x}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида
$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix},$$
   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс “Алгебра”. 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 16

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 390 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{40} = 1$;
   (b) элементы g порядка 40.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 6 в группе $D_3 \times S_4 \times \mathbb{Z}_6$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_{19}$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 13 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 11 & 14 & 10 \\ 13 & 17 & 13 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \\ 16 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 89$ и $q = 43$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 14$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (89, 43, 14)$, а закрытый ключ равен $x = 61$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (38, 17)$. Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 32912$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 33043, d = 11027)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 27161, e = 103)$.

6. Пусть $f(x) = x^3 + 2x^2 + 14x + 12, g(x) = x^4 + 10x^3 + 14x^2 + 3x + 17$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_{19}$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_{19}[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_7[x]/\left\langle x^4 + 3x^2 + 5\right\rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \left\langle x^4 + 3x^2 + 5\right\rangle \in F.$$

Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 4$ выражение

$$\tfrac{2x^6+2x^5+3x^4+x^3+x^2+2x+1}{4x+4} + (4x + 2)(6x + 4) - \tfrac{2x^3+x^2+5x+2}{x}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1 & x_4 & 0 \\ 0 & x_4 & x_1 & 0 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix},$$

где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс “Алгебра”. 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 17

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 210 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{135} = 1$;
   (b) элементы g порядка 135.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 2 в группе $D_5 \times S_3 \times \mathbb{Z}_2$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_5$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 97$ и $q = 41$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 52$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (97, 41, 52)$, а закрытый ключ равен $x = 9$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (9, 75)$. Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 18498$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 22331, d = 10091)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 28459, e = 193)$.

6. Пусть $f(x) = x^4 + 13x^3 + 12x^2 + 15x + 10, g(x) = x^3 + 14x^2 + 13x + 12$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_{17}$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_{17}[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_3[x]/\left\langle x^2 + 2x + 2 \right\rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \left\langle x^2 + 2x + 2 \right\rangle \in F.$$

   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 2$ выражение

$$\tfrac{2x^3+x+1}{x^2+2x+2} + (2x+1)\left(x^3 + x^2 + x\right) - \tfrac{x^2+2x+2}{2x+1}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix},$$

   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс "Алгебра". 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 18

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 260 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{130} = 1$;
   (b) элементы g порядка 130.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 4 в группе $D_5 \times S_3 \times \mathbb{Z}_2$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_7$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 89$ и $q = 43$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 1$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (89, 43, 1)$, а закрытый ключ равен $x = 88$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (66, 25)$. Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 1080$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 15347, d = 8173)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 27221, e = 179)$.

6. Пусть $f(x) = x^3+7x^2+8, g(x) = x^4+3x^3+9x$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_{11}$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_{11}[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_2[x]/\left\langle x^4 + x^3 + 1\right\rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \left\langle x^4 + x^3 + 1\right\rangle \in F.$$

   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 4$ выражение

$$\tfrac{x^5+x^3+x}{x^2+x+1} + (x^3 + x^2 + x + 1)\,(x^6 + x^5 + x^4 + x) - \tfrac{x+1}{x^2+x}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix},$$

   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс “Алгебра”. 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 19

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 136 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{36} = 1$;
   (b) элементы g порядка 36.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 4 в группе $D_3 \times S_4 \times \mathbb{Z}_4$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_5$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 113$ и $q = 23$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 84$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (113, 23, 84)$, а закрытый ключ равен $x = 9$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (91, 57)$. Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 1693$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 20711, d = 15773)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 17441, e = 109)$.

6. Пусть $f(x) = x^4 + 2x^3 + 4x^2, g(x) = x^4 + 6x^3 + 5x^2$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_7$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_5[x]/\left\langle x^3 + 2x^2 + 1 \right\rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \left\langle x^3 + 2x^2 + 1 \right\rangle \in F.$$

   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 3$ выражение

$$\tfrac{2x^3+x^2+4x+1}{x} + (4x+3)\left(4x^5 + 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 4x + 3\right) - \tfrac{2x^2+4x+2}{2x+1}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix},$$

   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс "Алгебра". 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 20

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 140 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{40} = 1$;
   (b) элементы g порядка 40.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 6 в группе $D_4 \times S_4 \times \mathbb{Z}_2$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_{11}$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 10 & 9 \\ 6 & 3 & 2 & 4 \\ 7 & 4 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 103$ и $q = 59$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 50$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (103, 59, 50)$, а закрытый ключ равен $x = 65$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (28, 76)$. Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 14307$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 29893, d = 14849)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 21079, e = 103)$.

6. Пусть $f(x) = x^5 + 9x^3 + 4x^2 + 6x + 18, g(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 5x$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_{19}$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_{19}[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_2[x]/\left\langle x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right\rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \left\langle x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \right\rangle \in F.$$

   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 4$ выражение

$$\tfrac{x^2+x}{x^2+1} + \left(x^3 + x^2 + 1\right)(x + 1) - \tfrac{x^4+x^3}{x^2+x+1}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 & 0 \\ x_1 & x_3 & x_4 & x_2 \end{pmatrix},$$

   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс "Алгебра". 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 21

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 234 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{54} = 1$;
   (b) элементы g порядка 54.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 4 в группе $D_3 \times S_3 \times \mathbb{Z}_2$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_{19}$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 18 & 10 \\ 14 & 11 & 8 & 1 \\ 6 & 11 & 15 & 12 \\ 3 & 0 & 14 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 10 \\ 13 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 151$ и $q = 37$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 98$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (151, 37, 98)$, а закрытый ключ равен $x = 144$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (91, 58)$. Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 1921$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 14317, d = 1519)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 21037, e = 193)$.

6. Пусть $f(x) = x^3 + 11x^2 + 14x + 8$, $g(x) = x^4 + 15x^3 + 4x^2 + 10x + 10$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_{19}$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_{19}[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_2[x]/\left\langle x^4 + x^3 + 1 \right\rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \left\langle x^4 + x^3 + 1 \right\rangle \in F.$$

   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 4$ выражение

$$\tfrac{x^5+x^2}{x} + \left(x^5 + x^4 + x + 1\right)\left(x^5 + x^2\right) - \tfrac{x^5+x^2+x}{x^2+x+1}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 & 0 \\ x_1 & x_3 & x_4 & x_2 \end{pmatrix},$$

   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс "Алгебра". 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 22

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 140 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{28} = 1$;
   (b) элементы g порядка 28.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 4 в группе $D_5 \times S_4 \times \mathbb{Z}_4$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_{19}$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 17 & 2 \\ 14 & 6 & 15 & 3 \\ 17 & 18 & 9 & 8 \\ 11 & 18 & 11 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 15 \\ 18 \\ 10 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 109$ и $q = 41$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 8$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (109, 41, 8)$, а закрытый ключ равен $x = 59$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (63, 49)$. Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 22279$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 30929, d = 9803)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 20227, e = 181)$.

6. Пусть $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2, g(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 6$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_7$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_3[x]/\langle x^3 + 2x^2 + 2x + 2 \rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \left\langle x^3 + 2x^2 + 2x + 2 \right\rangle \in F.$$

   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 3$ выражение

$$\tfrac{x}{2x+2} + (x^5 + x^4 + 2x^2 + x)(2x^3 + x^2 + 2) - \tfrac{x^2+2x+1}{2x}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix},$$

   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс "Алгебра". 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 23

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 570 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{24} = 1$;
   (b) элементы g порядка 24.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 4 в группе $D_5 \times S_3 \times \mathbb{Z}_6$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_{17}$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 8 & 3 & 3 \\ 3 & 14 & 9 & 3 \\ 14 & 5 & 12 & 6 \\ 11 & 10 & 7 & 12 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 113$ и $q = 67$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 97$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (113, 67, 97)$, а закрытый ключ равен $x = 40$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (45, 73)$. Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 7711$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 18923, d = 16399)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 16459, e = 101)$.

6. Пусть $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3, g(x) = x^3 + x^2 + 16x + 17$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_{19}$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_{19}[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_5[x]/\left\langle x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x + 2\right\rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \left\langle x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x + 2\right\rangle \in F.$$

   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 4$ выражение

$$\tfrac{x^4+3x^3+4x+3}{3x+2} + (2x^2 + 3x + 2)(x^3 + x^2 + 2x + 1) - \tfrac{3x+2}{3x^2}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & 0 & x_4 & x_3 \end{pmatrix},$$

   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс “Алгебра”. 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 24

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 132 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{16} = 1$;
   (b) элементы g порядка 16.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 4 в группе $D_4 \times S_4 \times \mathbb{Z}_2$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_{11}$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 5 \\ 8 & 0 & 7 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 131$ и $q = 59$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 36$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (131, 59, 36)$, а закрытый ключ равен $x = 43$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (3, 60)$. Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 16307$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 30929, d = 2365)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 18437, e = 199)$.

6. Пусть $f(x) = x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 4x + 1, g(x) = x^5 + 6x^4 + 9x^3 + 10x^2 + 3x + 7$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_{11}$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_{11}[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_2[x]/\left\langle x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \right\rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \left\langle x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \right\rangle \in F.$$

   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 4$ выражение

$$\tfrac{x^5+x^4}{x^2+1} + \left(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x\right)\left(x^5 + x^4 + x^3 + x^2\right) - \tfrac{x^2+1}{x}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1 & x_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс "Алгебра". 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 25

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 84 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{24} = 1$;
   (b) элементы g порядка 24.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 2 в группе $D_5 \times S_4 \times \mathbb{Z}_6$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_{11}$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 9 & 8 \\ 1 & 10 & 7 & 3 \\ 9 & 8 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 97$ и $q = 31$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 72$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (97, 31, 72)$, а закрытый ключ равен $x = 47$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (6, 37)$. Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 18866$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 24881, d = 1607)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 19879, e = 107)$.

6. Пусть $f(x) = x^3 + 3x^2 + 12x + 17, g(x) = x^4 + 18x^3 + 7x^2 + 5x + 15$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_{19}$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_{19}[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_3[x]/\langle x^3 + 2x + 2 \rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \langle x^3 + 2x + 2 \rangle \in F.$$

   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 3$ выражение

$$\tfrac{x^2}{2x+2} + (x^6 + 2x^5 + x^3 + 2x + 1)(x^6 + x^5 + 2x^4 + x^2 + 2x) - \tfrac{x^4+2x^3+x^2+2}{2x+1}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 & 0 \\ x_1 & x_3 & x_4 & x_2 \end{pmatrix},$$

   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс "Алгебра". 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 26

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 210 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{54} = 1$;
   (b) элементы g порядка 54.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 6 в группе $D_3 \times S_3 \times \mathbb{Z}_2$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_{19}$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 14 & 16 \\ 17 & 5 & 11 & 8 \\ 17 & 18 & 12 & 10 \\ 18 & 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 13 \\ 16 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 97$ и $q = 37$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 28$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (97, 37, 28)$, а закрытый ключ равен $x = 57$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (87, 1)$. Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 7812$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 32111, d = 8245)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 26969, e = 131)$.

6. Пусть $f(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 4x + 4, g(x) = x^4 + 4x^3 + 6x + 3$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_7$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_2[x]/\langle x^3 + x + 1 \rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \langle x^3 + x + 1 \rangle \in F.$$

   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 3$ выражение

$$\tfrac{x^6+x^5+x^4+x}{x^2} + (x^3 + x^2 + x + 1)(x^3) - \tfrac{x^2+x+1}{x^2+x+1}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 & 0 \\ x_1 & x_3 & x_4 & x_2 \end{pmatrix},$$

   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс "Алгебра". 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 27

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 88 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{44} = 1$;
   (b) элементы g порядка 44.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 4 в группе $D_5 \times S_4 \times \mathbb{Z}_6$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_{19}$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 & 15 \\ 10 & 18 & 17 & 1 \\ 17 & 1 & 7 & 16 \\ 5 & 3 & 16 & 12 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 9 \\ 18 \\ 8 \\ 17 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 151$ и $q = 59$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 64$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (151, 59, 64)$, а закрытый ключ равен $x = 59$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (64, 147)$. Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 7155$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 25217, d = 8257)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 30049, e = 109)$.

6. Пусть $f(x) = x^4 + 3x^3 + 18x^2 + 4x + 6, g(x) = x^5 + x^4 + 10x^3 + 9x^2 + 2x + 3$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_{19}$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_{19}[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_3[x]/\left\langle x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 2 \right\rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \left\langle x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 2 \right\rangle \in F.$$

   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 4$ выражение

$$\tfrac{2x^6 + x^5 + 2x^3 + 2}{2x+2} + (2x + 2)\left(2x^4 + 2x + 1\right) - \tfrac{x^6 + 2x^5 + 2x^4 + x^2}{x+1}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1 & x_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс "Алгебра". 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 28

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 510 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{90} = 1$;
   (b) элементы g порядка 90.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 6 в группе $D_3 \times S_4 \times \mathbb{Z}_4$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_{11}$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 2 & 4 \\ 10 & 5 & 8 & 0 \\ 9 & 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 73$ и $q = 47$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 48$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (73, 47, 48)$, а закрытый ключ равен $x = 50$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (49, 44)$. Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 21412$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 24287, d = 2069)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 13081, e = 131)$.

6. Пусть $f(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 4x + 8, g(x) = x^5 + 6x^4 + 3x^2 + 7x + 4$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_{11}$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_{11}[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_3[x]/\left\langle x^3 + 2x^2 + x + 1 \right\rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \left\langle x^3 + 2x^2 + x + 1 \right\rangle \in F.$$

   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 3$ выражение

$$\tfrac{x^6+x^5+2x^3+x^2}{x+1} + (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x)(2x^6 + 2x^5 + x^4 + x^3) - \tfrac{x+1}{2x^2}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix},$$

   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс "Алгебра". 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 29

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 140 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{28} = 1$;
   (b) элементы g порядка 28.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 6 в группе $D_3 \times S_3 \times \mathbb{Z}_6$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_{19}$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 17 & 17 & 17 \\ 3 & 2 & 2 & 6 \\ 12 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 17 & 17 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 14 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 127$ и $q = 59$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 19$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (127, 59, 19)$, а закрытый ключ равен $x = 6$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (52, 74)$. Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 10986$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 15049, d = 1457)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 22487, e = 107)$.

6. Пусть $f(x) = x^3 + 6, g(x) = x^4 + 6x^3 + 6x^2 + 2x + 5$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_7$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_5[x]/\langle x^4 + 3x^3 + 4x + 3\rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \left\langle x^4 + 3x^3 + 4x + 3 \right\rangle \in F.$$

   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 4$ выражение

$$\tfrac{4x^5+2x^4+x^3+x^2+4x+3}{x+2} + (2x^6 + 3x^5 + x^4 + x^3 + 4x^2 + 3x + 4)(4x^3 + 1) - \tfrac{4x^5+3x^4+2x^3+4x^2+3}{x+2}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & x_3 & x_4 & 0 \\ 0 & x_4 & x_3 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix},$$

   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс "Алгебра". 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 30

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 132 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{66} = 1$;
   (b) элементы g порядка 66.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 2 в группе $D_5 \times S_3 \times \mathbb{Z}_6$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_{19}$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} 18 & 6 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 1 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & 16 & 10 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 73$ и $q = 41$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 64$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (73, 41, 64)$, а закрытый ключ равен $x = 48$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (37, 68)$. Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 7823$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 20291, d = 12365)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 30049, e = 137)$.

6. Пусть $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 13x + 15, g(x) = x^4 + 10x^3 + 11x^2 + 14x + 2$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_{19}$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_{19}[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_2[x]/\langle x^4 + x + 1 \rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \langle x^4 + x + 1 \rangle \in F.$$

   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 4$ выражение

$$\tfrac{x^2+x+1}{x^2+x+1} + (x+1)(x^4 + x) - \tfrac{x^6+x^5+x^4+x^2}{x}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1 & x_4 & 0 \\ 0 & x_4 & x_1 & 0 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix},$$

   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс "Алгебра". 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 31

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 585 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{195} = 1$;
   (b) элементы g порядка 195.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 6 в группе $D_4 \times S_3 \times \mathbb{Z}_4$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_{19}$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 17 & 7 & 7 \\ 8 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 16 & 5 \\ 8 & 2 & 9 & 17 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 11 \\ 17 \\ 18 \\ 7 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 89$ и $q = 53$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 32$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (89, 53, 32)$, а закрытый ключ равен $x = 36$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (20, 67)$. Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 122$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 15251, d = 4901)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 17473, e = 193)$.

6. Пусть $f(x) = x^3 + 2x^2 + 6x + 5, g(x) = x^3 + 8x^2 + 2x$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_{11}$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_{11}[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_7[x]/\left\langle x^3 + 4x + 6 \right\rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \left\langle x^3 + 4x + 6 \right\rangle \in F.$$

   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 3$ выражение

$$\frac{6x^4+6x^3+3x^2+4x+6}{3x+1} + \left(2x^2 + 2x + 4\right)\left(5x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1\right) - \frac{6x^5+4x^4+4x^3+4x^2+3x+5}{2x+1}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & x_1 & x_4 & 0 \\ 0 & x_4 & x_1 & 0 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix},$$

   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.

Домашнее задание 3. Курс “Алгебра”. 2019 - 2020 уч.год.
БПИИУП. Вариант 32

1. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 765 найдите
   (a) все элементы g такие, что $g^{153} = 1$;
   (b) элементы g порядка 153.
   Для каждого пункта посчитайте количество таких элементов.

2. Сколько элементов порядка 6 в группе $D_3 \times S_3 \times \mathbb{Z}_4$?

3. Решить СЛАУ $Ax = b$ над $\mathbb{Z}_7$. Проверить совместимость. Выписать решение в векторном виде. Выписать ФСР соответствующей однородной СЛАУ.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

4. Алиса хочет отправить Кортане сообщение, состоящее из секретного(неизвестного нам) числа M. Она зашифровала его при помощи схемы Эль-Гамаля, выбрав случайные простые числа $p = 83$ и $q = 71$ и случайное целое число x на интервале от 1 до p и вычислив $y = q^x \mod p = 47$. Таким образом, открытый ключ равен $(p, q, y) = (83, 71, 47)$, а закрытый ключ равен $x = 33$. В результате шифрования получилась пара чисел $(a, b) = (38, 52)$. Расшифруйте сообщение, то есть найдите M. Все вычисления производятся в группе $\mathbb{Z}_p^*$, то есть мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$.

5. Алиса отправила Кортане сообщение m (ASCII код некоторого символа) с помощью алгоритма RSA. Вами было перехвачено зашифрованное сообщение $c = 58$. Расшифруйте исходное сообщение Алисы m и укажите символ с соответствующим кодом из таблицы ASCII, если известна следующая информация:
   1) Закрытый ключ Кортаны: $(N = 30929, d = 27329)$.
   2) Открытый ключ Алисы: $(N = 34189, e = 193)$.

6. Пусть $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x, g(x) = x^5 + 2x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 2x + 4$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_7$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

7. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_3[x]/\left\langle x^4 + 2x^2 + 2 \right\rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \left\langle x^4 + 2x^2 + 2 \right\rangle \in F.$$

   Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 4$ выражение

$$\tfrac{2x^5+2x^4+2x+2}{2x^2+x+2} + (2x^2 + x)(x^2 + x + 2) - \tfrac{2x^6+x^5+2x^4+2x^3+x+2}{x+2}.$$

8. Рассмотрим множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix},$$

   где на месте x_i стоят элементы поля $\mathbb{R}$. Доказать, что это кольцо с операциями сложения и умножения матриц. Найти делители нуля.