РЕАЛЬНЫЕ ВАРИАНТЫ ЭКЗАМЕНА ПО ТВИМС 2017/2018

Вариант 1

1. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $(0; 1)$ и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 16 & -2 \\ -2 & 16 \end{pmatrix}$. Найти $P\{\xi_1 - \xi_2 > -1\}$.
2. В урне находится a белых, b чёрных и c красных шаров. Из урны случайных образом извлекают один шар. Определим случайную величину ξ равной 1, если извлечен белый шар, и равной 0, если извлечен шар не белый. Случайная величина η равна 1, если извлечен шар чёрный, и равна 0, если извлечен шар не чёрный. Найти математическое ожидание и ковариационную матрицу вектора (ξ, η). Вычислить коэффициент корреляции случайных величин ξ и η. Исследовать ξ и η на независимость.
3. Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует распределению с плотностью $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{\left(\frac{1}{\theta}-1\right)}, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}$

   Найти оценку максимального правдоподобия параметра θ. Исследовать несмещенность построенной оценки.
4. Случайные величины ξ и η независимы и распределены по закону $R(0; 1)$. Вычислить вероятность того, что корни уравнения $x^2 + 2\xi x + \eta = 0$ вещественны.
5. В десятичной записи числа π среди первых 10000 знаков после запятой $0,1, \dots, 9$ встретились 968, 1026, 1021, 974, 1014, 1046, 1021, 970, 948 и 1014 раз соответственно. Можно ли считать (на уровне значимости 0,05), что цифры $0,1, \dots, 9$ появляются в дробной части числа π с равными вероятностями?

Вариант 2

1. При 1000-кратном подбрасывании монеты выпало 518 орлов и 482 решки. Проверьте (на уровне значимости 0,05) гипотезу о симметричности монеты против альтернативы о том, что появление орла более вероятно.
2. Распределение дискретного случайного вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ задано таблицей. Найти математическое ожидание и ковариационную матрицу вектора ξ. Являются ли случайные величины ξ_1 и ξ_2 некоррелированными? Являются ли случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимыми?

ξ_1	ξ_2	
	-1	1
-2	1/8	1/3
0	1/12	1/6
2	7/24	0

3. Случайный вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $(2; 7)$ и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}$. Найти $P\{\xi_2 > 2\xi_1\}$.
4. Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует распределению с плотностью $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x b^{-2} e^{-1}, & x > 0 \end{cases}$

   Найти оценку максимального правдоподобия параметра b.
5. Из большой партии электролампочек случайным образом было отобрано 400 штук для определения средней продолжительности горения. Выборочное среднее продолжительности горения оказалось равным 1220 ч. Известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения равно 35 ч. Построить доверительный интервал уровня доверия 0,99 для средней продолжительности горения лампочки. Сколько нужно отобрать лампочек для исследования, чтобы длина доверительного интервала составляла 50 ч.?

Вариант 3

1. Плотность распределения случайного вектора (ξ, η) имеет вид $f(x,y) = \begin{cases} 24xy, & \text{если } x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 1, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$

   Исследовать ξ и η на независимость. Найти $P\left\{-2 < \xi < \frac{1}{2}, -1 < \eta < \frac{1}{2}\right\}$, $\boldsymbol{E}\eta$ и $\boldsymbol{D}\eta$.
2. Случайные величины ξ и η независимы и имеют стандартный гауссовский закон распределения. Найти вероятность попадания точки с координатами (ξ, η) в область $D = \{(x,y): 4 < x^2 + y^2 < 9\}$.
3. Выборка $X_1, \dots, X_n$ соответствует распределению с плотностью $f(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{3}\left(\frac{3}{x}\right)^{\theta+1}, & x > 3 \\ 0, & x \le 3 \end{cases}$ где $\theta > 0$. Найти оценку максимального правдоподобия параметра θ.

4. Согласно данным за 1997 год суточная калорийность питания населения (в ккал на душу населения) составила: в Белоруссии – 3101, Латвии – 2861, России – 2704, Германии – 3330, Франции – 3551. Построить доверительный интервал уровня надежности 0,99 для средней калорийности питания населения европейских стран. Предполагается, что наблюдения имеют гауссовское распределение.

5. Ожидается, что добавление специальных веществ уменьшает жесткость воды. Оценки жесткости воды до и после добавления специальных веществ по 40 и 50 пробам соответственно показало выборочные средние значения жесткости (в градусах жесткости), равные 4,0 и 3,8 градуса. Предполагается, что наблюдения имеют гауссовское распределение, а дисперсия измерений в обоих случаях равна 0,25град^2. Подтверждают ли эти результаты ожидаемый эффект на уровне значимости 0,05 ?

Вариант 4

1. Плотность распределения случайного вектора (ξ, η) имеет вид $f(x,y) = \begin{cases} 3(x+y)/8, & \text{если } 0 \le x+y \le 2, x \ge 0, y \ge 0, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$ Исследовать ξ и η на независимость. Найти $P\left\{\frac{1}{2} < \xi < 1, \eta < 1\right\}$, $\boldsymbol{E}\xi$ и $\boldsymbol{D}\xi$.
2. Независимые случайные величины ξ и η имеют экспоненциальное распределения с параметрами λ и μ соответственно, $\lambda \neq \mu$. Найти вероятность распределения случайной величины $\zeta = \xi + \eta$.
3. Вес семи новорожденных (в кг) составлял: 3,3; 3,2; 3,9; 3,0; 4,0; 4,2; 3,6. Построить доверительный интервал уровня надежности 0,99 для среднего веса новорожденного. Предполагается, что наблюдения имеют нормальное распределение.
4. Выборка $X_1, \ldots, X_n$ соответствует распределению $Bi(12; \theta)$. Оценить параметр θ методом максимального правдоподобия. Исследовать несмещенность построенной оценки.
5. На двух однотипных предприятиях проведено выборочное обследование доходов работников. На предприятии А опрошено 100 человек, выборочное среднее их доходов составило 525 у.е. На предприятии В опрошено 120 человек, выборочное среднее их доходов составило 545 у.е. Проверьте на уровне значимости 0,01 гипотезу о том, что доходы сотрудников предприятий А и В в среднем одинаковы. Предполагается, что все наблюдения имеют нормальное распределение, среднеквадратическое отклонения дохода на предприятии А составляет 35 у.е., а на предприятии В – 40 у.е.