Задачи для подготовки к контрольной работе по алгебре

3 модуль 2018/2019 уч. года

1. Подгруппа G симметрической группы S_n порождена степенями подстановки $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)(8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15)$. Найти
   (a) все элементы $g \in G$ такие, что $g^7 = id$;
   (b) элементы g порядка 7,
   и в каждом случае подсчитать их количество.

ⓐ $g = \sigma^n, n \in \mathbb{Z}$ $\quad$ $\mathrm{ord}(\sigma) = \text{НОК}(7,8) = 56$

$g^7 = (\sigma^n)^7 = \sigma^{7n}$

$\sigma^n = id \iff n \,\vdots\, 56$

$7n \,\vdots\, 56 \iff n \,\vdots\, 8$

$n \in \{8; 16; 24; 32; 40; 48; 56\}$

ответ: $\{\sigma^n \mid n \in \{8; 16; 24; 32; 40; 48; 56\}\}$

ⓑ $\mathrm{ord}(g) = 7 \iff g = \sigma^n$; $\text{НОД}(n, 7) = 1$, $7n \,\vdots\, 56$

ответ: $\{\sigma^n \mid n \in \mathbb{Z}, \text{НОД}(n,7)=1, 7n \,\vdots\, 56\}$

2. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_5[x]/\left\langle x^3 + 3\,x^2 + 2\,x + 3 \right\rangle$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \left\langle x^3 + 3\,x^2 + 2\,x + 3 \right\rangle \in F.$$

Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg \bar{f} < 3$ выражение

$$\frac{2\,x^4+4\,x^2+3}{2\,x^3+2\,x^2} + \left(4\,x^6 + 3\,x^4 + 2\,x^3 + 2\,x^2 + 4\,x + 2\right)\left(3\,x^4 + 4\,x^3 + x^2 + 2\,x + 2\right) - \frac{x^3+3\,x^2+3\,x+2}{4\,x+1}$$

3. Пусть $f(x) = x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 7x, g(x) = x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 3x$ — многочлены над полем $\mathbb{Z}_{11}$. Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_{11}[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

4. Сколько элементов порядка 2 в группе $D_3 \times S_3 \times \mathbb{Z}_4$?

Эти три были в кдз, разбирать лишний раз не буду, можете просто еще раз на них посмотреть и вспомнить.

5. Найти базис и размерность линейного подпространства L в $\mathbb{R}^4$, заданного системой уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Опечатка в условии: подпространство, конечно же, в $\mathbb{R}^5$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ +I \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -2I \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = 6x_5 - x_4$$

$$x_1 = -3x_5 - 2x_3 + 4x_2 = -3x_5 - 2x_3 + 24x_5 - 4x_4 =$$

$$= 21x_5 - 2x_3 - 4x_4$$

$$X = x_5 \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

базисы: $\begin{pmatrix} 21 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

размерность: 3

6. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов $a_1 = (1,-1,2,1)^T, a_2 = (1,2,1,-1)^T, a_3 = (0,3,-1,-2)^T, a_4 = (3,3,4,-1)^T, a_5 = (1,-4,3,3)^T$ в $\mathbb{R}^4$, выразить небазисные векторы через базисные.

базис

$$\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ -I \\ \\ -3I \\ -I \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ -II \\ -2II \\ +II \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Размерность: 2

Базис: $(1; -1; 2; 1); (0; 3; -1; -2)$

$$a_3 = a_2 - a_1$$

$$a_4 = 2(a_2 - a_1) + 3a_1 = 2a_2 + a_1$$

$$a_5 = a_1 - (a_2 - a_1) = 2a_1 - a_2$$

7. Составить систему линейных уравнений, задающую линейную оболочку векторов $a_1 = (1, 1, 2, 1, 2)^T, a_2 = (0, -1, -2, 1, -1)^T, a_3 = (3, 1, 2, 5, 4)^T$ в $\mathbb{R}^5$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} +\,II \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ -3\,I \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ & & \text{———} & & \end{pmatrix} \Big| \text{ — базисы}$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \\ -2\,I \\ -\,I \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -2\,II \\ +\,II \\ -\,II \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Bigg| \Rightarrow \begin{cases} -2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$

8. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств V_1, V_2 в $\mathbb{R}^4$, $V_1 = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $V_2 = \langle b_1, b_2 \rangle$, где $a_1 = (1, 0, -3, -2)^T, a_2 = (7, 1, 9, 14)^T, a_3 = (-4, 1, 2, -9)^T, b_1 = (10, 1, 0, 8)^T, b_2 = (-3, 0, 1, -3)^T$.

V_1: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 7 & 1 & 9 & 14 \\ -4 & 1 & 2 & -9 \end{pmatrix}$

V_2: $\begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & 8 \\ -3 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$V_1 + V_2$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 7 & 1 & 9 & 14 \\ -4 & 1 & 2 & -9 \\ 10 & 1 & 0 & 8 \\ -3 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ + \mathrm{II} \\ - \mathrm{II} \\ \\ \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 7 & 1 & 9 & 14 \\ 3 & 2 & 11 & 5 \\ 3 & 0 & -9 & -6 \\ -3 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +2\mathrm{V} \\ + \mathrm{V} \\ -3\mathrm{I} \\ \\ \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 11 & 8 \\ 0 & 2 & 12 & 2 \\ \hline -3 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -\mathrm{I} \\ /2 \\ +3\mathrm{I} \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 14 & 10 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -8 & -9 \end{pmatrix} - \mathrm{III} + \mathrm{V}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -8 & -9 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ \hline 0 & 1 & 6 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -8 & -9 \end{pmatrix}$

базисы: $(1\ 0\ -3\ -2)$, $(0\ 1\ 6\ 1)$, $(0\ 0\ -8\ -9)$

размерность : 3

V_1: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 7 & 1 & 9 & 14 \\ -4 & 1 & 2 & -9 \end{pmatrix}$ V_2: $\begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & 8 \\ -3 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$\sum_{i=1}^{2} a_i \cdot \alpha_i = \sum_{i=1}^{3} b_i \beta_i = v$ – общий вид вектора в $V_1 \cap V_2$

$\sum_{i=1}^{2} a_i \cdot \alpha_i - \sum_{i=1}^{3} b_i \beta_i = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -4 & 10 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 9 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 14 & -9 & 8 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +3\,I \\ +2\,I \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & -4 & 10 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 30 & -10 & 30 & -8 \\ 0 & 28 & -17 & 28 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} -7\,II \\ \\ -30\,II \\ -28\,II \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -11 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -40 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -45 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ /(-8) \\ /(-9) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -11 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -11 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

ФСР: $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Базисы $V_1 \cap V_2$:

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -4 & 10 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 9 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 14 & -9 & 8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$c_2 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -4 & 10 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 9 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 14 & -9 & 8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 44 \\ 27 \end{pmatrix}$$

размерность: 2

9. Вычислить матрицу перехода $C_{e\to\hat{e}}$ от базиса $e_1 = (-2,1,-1)^T, e_2 = (1,-1,3)^T, e_3 = (1,2,-1)^T$ к базису $\hat{e}_1 = (-1,2,3)^T, \hat{e}_2 = (2,1,2)^T, \hat{e}_3 = (0,2,1)^T$, в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$ и определить координаты вектора $x = -\hat{e}_1 + 3\hat{e}_2 - \hat{e}_3$ в базисе e_1, e_2, e_3.

1 – базис (1 0 0), (0 1 0), (0 0 1)

$$C_{1\to e} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad C_{1\to\hat{e}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +2\mathrm{I} \\ +\mathrm{I} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \cdot(-1)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +\mathrm{II} \\ \\ -2\mathrm{II} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right) /11$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{11} & \frac{5}{11} & \frac{1}{11} \end{array}\right) \begin{array}{l} +3\mathrm{III} \\ +5\mathrm{III} \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{11} & \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{11} & \frac{3}{11} & \frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{11} & \frac{5}{11} & \frac{1}{11} \end{array}\right)$$

$$C_{e\to 1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{11} & \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{3}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{5}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} \qquad C_{e\to\hat{e}} = C_{e\to 1} \cdot C_{1\to e} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{5}{11} & \frac{4}{11} & \frac{3}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{3}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{5}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x^{\hat{e}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad C_{\hat{e}\to e} \cdot x^e = x^{\hat{e}}$$

$$x^e = C_{e\to\hat{e}} \cdot x^{\hat{e}}$$

$$x^e = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$T_{e\to e'} \cdot x' = x,$

$T_{e\to 1} \cdot x = x^e$

10. Доказать, что пространство является прямой суммой подпространств $L_1 = \langle a_1, a_2 \rangle$, а $L_2 = \langle b_1, b_2 \rangle$ и разложить вектор $x = (0, -2, 2, 0)^T$ на сумму проекций на эти подпространства, где $a_1 = (1,1,1,0)^T, a_2 = (1,1,0,1)^T, b_1 = (1,0,1,1)^T, b_2 = (1,1,-1,-1)^T$.

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l} -\mathrm{III} \\ -\mathrm{III} \\ \\ -\mathrm{III}\end{array} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ -\mathrm{I} \\ \\ -\mathrm{I}\end{array} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ (-1) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ -\mathrm{II} \\ +2\mathrm{II}\end{array} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow L_1 \cap L_2 = \{0\}$$

$$\operatorname{Dim} L_1 + \operatorname{Dim} L_2 = 2 + 2 = 4 = \operatorname{Dim} L \Rightarrow L_1 \oplus L_2 = L$$

$T_{1 \to ab}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \\ \\ \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ (-1) \\ (-1) \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} -\mathrm{III} \\ \\ \\ -\mathrm{III} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} -\mathrm{II} \\ \\ \\ -\mathrm{II} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ /(-3) \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} +\mathrm{IV} \\ -2\,\mathrm{IV} \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$T_{ab\to 1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$x^{ab} = T_{ab\to 1} \cdot x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}0\\-2\end{matrix}}\right] L_1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}2\\0\end{matrix}}\right] L_2 \end{matrix}$$

проекция на L_1: $0 \cdot a_1 - 2 \cdot a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

проекция на L_2: $2 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

11. В базисе $e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ билинейная форма $B(x, y)$ имеет матрицу $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу билинейной формы $B(x, y)$ в базисе $\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Воспользуемся формулой для преобразования матрицы квадратичной формы при замене базиса:

$$B' = T_{e\to e'}^T \cdot B \cdot T_{e\to e'}$$

Для этого найдем матрицу перехода от базиса e к базису e' *(да, мне лень искать в символах циркумфлекс, будет штрих)*.

Обозначим за s стандартный базис $s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда

$$T_{e\to e'} = T_{s\to e}^{-1} \cdot T_{s\to e'} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{5} \\ -1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix},$$ и, соответственно,

$$B' = T_{e\to e'}^T \cdot B \cdot T_{e\to e'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{5} \\ -1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{7}{25} \end{pmatrix}.$$

12. Исследовать квадратичную форму на положительную или отрицательную определенность в зависимости от параметра: $k = (\alpha - 1)x_1^2 + (2\alpha - 2)x_1x_2 - 2\alpha x_1x_3 + 2\alpha x_2^2 - 2\alpha x_2x_3 + (\alpha - 2)x_3^2$.

Воспользуемся критерием Сильвестра, для этого найдем главные угловые миноры матрицы данной квадратичной формы (ее надо составлять внимательно, не забыв поделить на 2 коэффициенты при смешанных произведениях):

$$B = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & \alpha - 1 & -\alpha \\ \alpha - 1 & 2\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & \alpha - 2 \end{pmatrix}$$ – матрица квадратичной формы

И миноры:

$$\Delta_1 = \alpha - 1, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha - 1 & \alpha - 1 \\ \alpha - 1 & 2\alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 1, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha - 1 & \alpha - 1 & -\alpha \\ \alpha - 1 & 2\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & \alpha - 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot \alpha^2 - \alpha + 2$$

Найдем значения параметра, при которых квадратичная форма определена положительно (то есть все три угловых минора положительны):

$$\begin{cases} \alpha - 1 > 0, \\ \alpha^2 - 1 > 0, \\ -3\alpha^2 - \alpha + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 1, \\ (\alpha - 1) \cdot (\alpha + 1) > 0, \\ \left(\alpha - \dfrac{2}{3}\right) \cdot (\alpha + 1) < 0 \end{cases}$$

Решим все методом интервалов, получим ответ: квадратичная форма не может быть положительно определена.

Найдем значения параметра, при которых квадратичная форма определена отрицательно (то есть знаки угловых миноров чередуются, начиная с –):

$$\begin{cases} \alpha - 1 < 0, \\ \alpha^2 - 1 > 0, \\ -3\alpha^2 - \alpha + 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < 1, \\ (\alpha - 1) \cdot (\alpha + 1) > 0, \\ \left(\alpha - \dfrac{2}{3}\right) \cdot (\alpha + 1) > 0 \end{cases}$$

Решим все методом интервалов, получим ответ: квадратичная форма отрицательно определена, если $\alpha \epsilon (-\infty; -1)$.