А.И. Кибзун, Е.Р. Горяинова,
А.В. Наумов

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

БАЗОВЫЙ КУРС С ПРИМЕРАМИ И ЗАДАЧАМИ

Под редакцией А.И. Кибзуна

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Рекомендовано Учебно-методическим объединением высших учебных заведений Российской Федерации по образованию в области авиации, ракетостроения и космоса в качестве учебного пособия для студентов высших технических учебных заведений

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2007

УДК 519.2
ББК 22.17
К 38

Кибзун А. И., Горяинова Е. Р., Наумов А. В. **Теория вероятностей и математическая статистика. Базовый курс с примерами и задачами:** Учеб. пособие. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 232 с. — ISBN 978-5-9221-0836-2.

Книга предназначена для начального ознакомления с основами теории вероятностей и математической статистики и развития навыков решения практических задач.

Основное внимание уделяется краткости изложения полного курса «Теории вероятностей и математической статистики», состоящего из теоретического и практического материала. Структура изложения максимально приближена к лекционным и практическим занятиям. Пособие может одновременно играть роль учебника, задачника и справочника.

Для преподавателей ВУЗов, инженеров и студентов технических и экономических специальностей.

Ил. 38. Библиогр. 22 назв.

Рецензенты:
кафедра математического моделирования Московского
государственного технического университета имени Н.Э. Баумана
(зав. кафедрой, д.ф.-м.н. профессор А.П. Крищенко);
д.ф.-м.н. профессор А.И. Матасов

ISBN 978-5-9221-0836-2

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

В 1973 году на факультете прикладной математики Московского авиационного института (государственного технического университета) академиком В.С. Пугачевым была создана кафедра теории вероятностей и математической статистики. За прошедшее время на кафедре под научно-методическим руководством В.С. Пугачева были созданы и прочитаны оригинальные учебные курсы по таким дисциплинам, как «Теория вероятностей и математическая статистика», «Случайные процессы», «Математический анализ» и др. В 2002 г. в издательстве «Физматлит» вышла в свет серия из трех учебных пособий, которые отражали накопленный опыт преподавания этих дисциплин студентам МАИ. Отличительной чертой данных пособий являлось максимально лаконичное изложение материала при достаточно полном описании современного состояния изучаемых предметов. Кроме того, значительную часть пособий занимали многочисленные примеры и задачи с решениями, что позволяло использовать эти пособия не только для чтения лекционных курсов, но и для проведения практических и лабораторных занятий. Структура изложения курсов была такова, что эти пособия могли одновременно играть роль учебника, задачника и справочника. Поэтому пособия оказались полезны как преподавателям и студентам, так и инженерам. Прошедшие три года показали, что авторы сделали правильный расчет, выбрав такую структуру курсов, так как эти пособия пользовались большой популярностью. Учитывая пожелания читателей, издательство готовит переиздание цитируемых пособий. Первым из них переиздается «Теория вероятностей и математическая статистика». Авторы внесли исправления в текст первого варианта пособия, устранив опечатки. Кроме того, формулировки некоторых задач уточнены, в ряд параграфов внесены дополнения. В частности, последние две главы дополнены доказательствами и новыми утверждениями. При этом объем пособия практически не изменился, сохранив свою лаконичность.

Проф., д.ф.-м.н. А.И. Кибзун

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вниманию читателей предлагается учебное пособие по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» (ТВ и МС), который читался в течение многих лет на различных факультетах Московского государственного авиационного института (МАИ) с использованием учебных программ, соответствующих большинству стандартов для технических и экономических специальностей. Характерной особенностью данного пособия является его многоцелевое назначение. При его написании была сделана попытка выполнить следующие требования:

1) лаконичность изложения, свойственную конспекту лекций;

2) детальное доказательство всех утверждений, характерное для учебников;

3) наличие типовых задач с решениями, а также задач для самостоятельного решения, что отличает задачники;

4) систематизированный и автономно замкнутый материал, присущий справочникам;

5) наличие формализованных ссылок на установленные ранее свойства и введенные понятия, что характерно для компьютерных учебников.

Насколько эта попытка удалась авторам — судить читателю.

Несколько слов более подробно об этих отличительных чертах. Весь курс состоит из 18 параграфов, которые соответствуют темам примерно 18 лекциий и 18 практических занятий продолжительностью по два академических часа, и 6 параграфов, содержащих задачи для самостоятельного решения. Первые 16 тем соответствуют объему стандартного курса ТВ и МС для технических и экономических специальностей. Кроме того, книга содержит дополнительный раздел из двух тем, посвященный приложениям математической статистики, которые являются актуальными при решении прикладных задач. Весь материал удалось разместить на 14,5 печатных листах (п. л.). Заметим, что объемы известных учебников и задачников по ТВ и МС достигают более 20 п. л. каждый. Так как эти учебники содержат информацию, выходящую за рамки стандартной учебной программы, то студентам, как правило, трудно самостоятельно найти интересующий их материал или разобраться в нем. По мнению авторов, в лаконично изложенном пособии, имеющем четкую иерархическую структуру, студентам значительно проще ориентироваться. Кроме того, если курс читается по данному пособию, то студентам не требуется записывать «живые» лекции, и на лекциях остается лишь прояснить непонятые вопросы. Большинство учебников по ТВ и МС отличается от предлагаемого еще и тем, что начинающему преподавателю, даже с хорошей математической подготовкой, очень сложно прочитать по ним реальный курс лекций. Это связано с тем, что в учебниках нет дробления материала на последовательные лекции и семинарские занятия, и поэтому при ограниченном их числе преподавателю бывает трудно решить, какие разделы ТВ и МС следует прочитать, а какие нет, не нарушая при этом стройности изложения.

Данная книга содержит несколько больше материала, чем необходимо для прочтения 18 лекций и проведения 18 практических занятий. В частности, все утверждения аккуратно доказываются, но в реальных лекциях некоторые из этих доказательств могут быть опущены по усмотрению лектора. В конце каждого параграфа (темы) имеются типовые задачи с решениями, которые могут послужить основой для проведения практических занятий. В конце каждой главы приводятся задачи, предназначенные для самостоятельного решения, а также задачи повышенной сложности (отмеченные звездочкой). Ответы к задачам для самостоятельного решения даны в конце книги. Детальность доказательств и наличие дополнительных задач позволяют студенту самостоятельно изучить материал, не рассматривавшийся на лекциях или семинарах.

В обычном учебнике при доказательстве теорем часто отсутствуют ссылки на понятия или свойства, введенные или установленные в предыдущих разделах и главах. При этом предполагается, что студент усвоил весь предыдущий материал и все помнит. К сожалению, это предположение на практике не всегда выполняется. И тогда студенту, встретившему ссылку на материал, который он не помнит, остается перечитать весь учебник заново либо отложить его в сторону. В предлагаемом пособии вывод каждой формулы сопровождается не абстрактными «отсылками» к предыдущим разделам, а четкими ссылками на изученные свойства и введенные понятия. В пособии присутствует сравнительно немного символических объектно-ориентированных сокращений, тем не менее с ними лучше познакомиться заранее, до начала чтения пособия. Для удобства читателя все сокращения, символические записи и основные обозначения собраны вместе в отдельный список.

Следует отметить, что большинство учебников по ТВ и МС, опубликованных в нашей стране, либо вообще не содержат прикладных примеров, либо эти примеры имеют однобокую (например, военную) окраску. Но, очевидно, что для эффективного использования на практике полученных теоретических знаний студент должен уметь самостоятельно строить математические модели для конкретных прикладных задач. По этой причине в данное пособие вставлены разнообразные примеры технического и экономического характера, позволяющие студенту глубже понять физический и экономический смысл изучаемого им курса.

Пособие имеет четкую иерархическую структуру, роднящую его со справочниками. в частности, имеется подробный предметный указатель. Вся информация, содержащаяся в книге, подразделена на блоки, называемые замечаниями, примерами, теоремами или свойствами. Отметим, что «вольный» текст, отражающий мнение авторов, встречается только в замечаниях. Таким образом, каждый параграф (тема) состоит из пунктов (разделов), названия которых вынесены в оглавление, а каждый раздел состоит из этих блоков. В каждом параграфе нумерация блоков является автономной. Поэтому легко организуются ссылки из последующих пунктов на предыдущие.

На основании данного пособия разработан компьютерный учебник, который позволяет мгновенно находить отмеченные выше ссылки и получать многочисленные комментарии и пояснения. Комментарии можно получить как из оглавления и предметного указателя, так и из самого текста. Более детально с возможностями компьютерного учебника можно ознакомиться в [9].

При написании книги авторы ориентировались на известные учебники по ТВ и МС. в частности, многие технические примеры взяты из [17], экономические примеры из [22], а парадоксальные примеры из [18]. Лаконичность изложения в книгах [14], [19] служила образцом для авторов. Большая часть справочного материала заимствована из [12]. Структура пособия во многом повторяет учебники [1], [17]. Следует отметить, что настоящее пособие является не первой попыткой изложить курс ТВ и МС в таком виде. Авторы в своей работе в значительной мере опирались на предшествующие версии пособий по предлагаемому курсу [10], [5]. Но данное пособие было написано практически заново, в него были включены дополнительные примеры и усилена строгость изложения материала.

Авторы благодарят В.А. Ефремова, А.Р. Панкова, Е.Н. Платонова и К.В. Семенихина за замечания, критику и помощь при подготовке рукописи.

СПИСОК ОСНОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

1. Сокращения.

ММП — метод максимального правдоподобия
МНК — метод наименьших квадратов
МО — математическое ожидание
СВ — случайная величина
СП — случайная последовательность
п.н. — почти наверное
с.к. — среднее квадратическое
ЗБЧ — закон больших чисел
ЦПТ — центральная предельная теорема

2. Математические символы.

$A \backslash B$ — разность событий A и B
$A + B$ — сумма событий A и B
AB — произведение событий A и B
$\exp(x) \triangleq e^x$
$\mathrm{col}(x_1, \ldots, x_n)$ — вектор-столбец с компонентами $x_1, \ldots, x_n$
$\omega \in A$ — элемент ω принадлежит множеству A
$\omega \notin A$ — элемент ω не принадлежит множеству A
$A \subset B$ — событие A влечет появление события B
$k = \overline{1, n}$ — множество натуральных чисел от 1 до n
$\triangleq$ — равенство по определению
$\equiv$ — тождество
$\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ — сумма величин x_k, $k = \overline{1, n}$
$\sum\limits_{k=1}^{n} A_k$ — сумма событий A_k, $k = \overline{1, n}$
$\prod\limits_{k=1}^{n} x_k$ — произведение величин x_k, $k = \overline{1, n}$
$\prod\limits_{k=1}^{n} A_k$ — произведение событий A_k, $k = \overline{1, n}$
$\mathbf{M}[X]$ — математическое ожидание СВ X
$\mathbf{D}[X]$ — дисперсия СВ X
$\mathbf{P}(A)$ — вероятность события A
$\mathbb{R}^1$ — действительная ось
$\det K$ — определитель матрицы K

A^T — транспонированная матрица
I — единичная матрица

3. Обозначения.

A, B, C — случайные события
$\overline{A}$ — противоположное событие
ω — элементарное событие
Ω — пространство элементарных событий, достоверное событие
$\varnothing$ — невозможное событие
$W_n(A)$ — частота появления события A в n опытах
$\mathbf{P}(A)$ — вероятность события A
$\mathbf{P}(A|B)$ — условная вероятность события A относительно B
H_k — k-я гипотеза
C_n^m — число сочетаний из n по m
X, Y, Z — случайные величины
x, y, z — реализации СВ
$\{\omega : X(\omega) \leqslant x\}$ — множество ω, для которых $X(\omega) \leqslant x$
$F(x) \triangleq F_X(x)$ — функция распределения СВ X
$f(x) \triangleq f_X(x)$ — плотность распределения СВ X
$\mathbf{P}\{X \leqslant x\}$ — вероятность события $\{\omega : X(\omega) \leqslant x\}$
$p_i \triangleq \mathbf{P}\{X = x_i\}$ — вероятность события $\{X = x_i\}$
$m_X \triangleq \mathbf{M}[X]$ — математическое ожидание (МО) СВ X
ν_r, μ_r — начальный и центральный моменты порядка r
$d_X \triangleq \mathbf{D}[X]$ — дисперсия СВ X
σ_X — среднее квадратическое отклонение СВ X
$\overset{\circ}{X}$ — центрированная СВ
$\overset{*}{X}$ — нормированная СВ
$X \sim \mathbf{Bi}(n;p)$ — СВ X имеет биномиальное распределение с параметрами n и p
$X \sim \mathbf{\Pi}(a)$ — СВ X имеет распределение Пуассона с параметром a
$X \sim \mathbf{R}(a;b)$ — СВ X имеет равномерное распределение на отрезке $[a,b]$
$X \sim \mathbf{E}(\lambda)$ — СВ X имеет экспоненциальное распределение с параметром λ
$X \sim \mathbf{N}(m;\sigma^2)$ — СВ X имеет нормальное распределение с параметрами m и σ
$\Phi_0(x)$ — функция Лапласа
$\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера
x_α — квантиль уровня α функции распределения $F(x)$ СВ X
$F(x,y)$ — функция распределения двумерной СВ $Z \triangleq \mathrm{col}(X,Y)$
$f(x,y)$ — плотность распределения двумерной СВ $Z \triangleq \mathrm{col}(X,Y)$
k_{XY} — ковариация СВ X и Y

r_{XY} — коэффициент корреляции СВ X и Y
$\mathrm{M}[Y|X]$ — условное математическое ожидание Y относительно X
$Z_n \triangleq \mathrm{col}(X_1, \ldots, X_n)$ — вектор-столбец из элементов $X_1, \ldots, X_n$
$F(x_1, \ldots, x_n)$ — функция распределения СВ $Z \triangleq \mathrm{col}(X_1, \ldots, X_n)$
$f(x_1, \ldots, x_n)$ — плотность распределения СВ $Z \triangleq \mathrm{col}(X_1, \ldots, X_n)$
K — ковариационная матрица с элементами k_{ij}, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$
R — корреляционная матрица
$p_{ij} \triangleq \mathbf{P}\{X = x_i, Y = y_j\}$
$\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ — случайная последовательность (СП)
$X_n \xrightarrow{F} X$ — сходимость СП $\{X_n\}$ к СВ X по распределению
$X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$ — сходимость СП $\{X_n\}$ к СВ X по вероятности
$X_n \xrightarrow{\text{с.к.}} X$ — сходимость СП $\{X_n\}$ к СВ X в среднем квадратическом
$X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X$ — сходимость СП $\{X_n\}$ к СВ X почти наверное
$\widehat{\nu}_r$, $\widehat{\mu}_r$ — выборочные начальные и центральные моменты порядка r
$\widehat{m}_X \triangleq \widehat{\nu}_1$ — выборочное среднее
$\widehat{d}_X \triangleq \widehat{\mu}_2$ — выборочная дисперсия
$\widehat{s}_X \triangleq \dfrac{n}{n-1}\,\widehat{d}_X$ — несмещенная выборочная дисперсия
$Z_n \triangleq \mathrm{col}(X_1, \ldots, X_n)$ — выборка объема n
$z_n \triangleq \mathrm{col}(x_1, \ldots, x_n)$ — реализация выборки объема n
$X \sim \chi^2(n)$ — СВ X имеет распределение хи–квадрат
с n степенями свободы
$X \sim \mathbf{S}(n)$ — СВ X имеет распределение Стьюдента
с n степенями свободы
$X \sim \mathbf{F}(n; m)$ — СВ X имеет распределение Фишера
с n и m степенями свободы
$\widehat{\theta}(Z_n)$ — выборочная оценка параметра θ
$L(z_n, \theta)$ — функция правдоподобия

4. Ссылки.

Ai — i-я аксиома вероятности, $i = \overline{1, 4}$
i)A — i-е свойство случайных событий, $i = \overline{1, 12}$
i)P — i-е свойство вероятности, $i = \overline{1, 17}$
$i)F(x)$ — i-е свойство функции распределения, $i = \overline{1, 7}$
$i)f(x)$ — i-е свойство плотности вероятности, $i = \overline{1, 5}$
$i)g(t)$ — i-е свойство характеристической функции, $i = \overline{1, 4}$
$i)\,m_X$ — i-е свойство МО и дисперсии, $i = \overline{1, 9}$
$i)\,k_{XY}$ — i-е свойство ковариации, $i = \overline{1, 6}$
$i)\mathrm{M}[X]$ — i-е свойство моментов многомерных СВ, $i = \overline{1, 5}$
$i)\,\widehat{m}_X$ — i-е свойство выборочных моментов, $i = \overline{1, 7}$

ГЛАВА I

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

§ 1. Основные понятия

1.1. Пространство элементарных событий. *Теория вероятностей* — раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений, наблюдаемых при многократном повторении опыта.

Под *опытом* G понимается воспроизведение какого-либо комплекса условий для наблюдения исследуемого явления (*события*). Обычно считается, что *событие случайно* в опыте, если при неоднократном воспроизведении этого опыта оно иногда происходит, а иногда — нет, причем нельзя заранее предсказать возможный исход (событие) этого опыта. При этом наблюдается *свойство устойчивости частоты* случайного события: с увеличением числа повторений опыта значение частоты появления случайного события стабилизируется около некоторого неслучайного числа.

Пример 1.1. Пусть опыт G состоит в подбрасывании игральной кости и наблюдении числа выпавших очков X. Тогда можно ввести следующие случайные события: $\{X = 1\}$, $\{X = 2\}$, ..., $\{X = 6\}$, $\{X \leqslant 2\}$, $\{2 < X \leqslant 6\}$, $\{X$ – четно$\}$, $\{X$ – нечетно$\}$ и т. д.

Возможные исходы ω опыта G называются *элементарными событиями*, если они являются взаимно исключающими и в результате опыта G одно из них обязательно происходит. Совокупность Ω всех элементарных событий ω в опыте G называется *пространством элементарных событий.*

Пространство элементарных событий — это математическая модель опыта, в которой любому *событию* ставится в соответствие некоторое подмножество пространства Ω. В общем случае каждому опыту G можно сопоставить несколько математических моделей, т. е. пространств элементарных событий.

Пример 1.2. В примере 1.1 пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$, а элементарное событие ω_i состоит в том, что $\{X = i\}$, $i = \overline{1,6}$. Событие $\{X$ – четно$\} = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ является подмножеством пространства Ω.

Определение 1.1. Событие называется *невозможным* в опыте G, если при повторении опыта оно никогда не происходит. Ему соответствует пустое подмножество в Ω, которое обозначают $\varnothing$.

Определение 1.2. Событие называется *достоверным* в опыте G, если при повторении опыта оно происходит всегда. Ему соответствует пространство Ω.

События будем обозначать большими латинскими буквами A, B, C и т. д.

Определение 1.3. Говорят, что в опыте G событие A *влечет появление* события B, если из осуществления события A следует наступление события B, т. е. каждый элемент множества A принадлежит множеству B. Это обозначается так: $A \subset B$.

1.2. Алгебра событий.

Определение 1.4. События A и B называются *равными*, $A = B$, если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Определение 1.5. *Суммой событий* A и B называется событие $A + B$, состоящее в том, что в опыте произойдет хотя бы одно из этих событий. Событию $A + B$ соответствует множество, элементы которого принадлежат хотя бы одному из множеств A или B, т. е. объединение множеств A и B.

Определение 1.6. *Произведением событий* A и B называется событие AB, состоящее в одновременном появлении этих событий. Событию AB соответствует множество с элементами, принадлежащими одновременно множествам A и B, т. е. пересечение множеств A и B.

Определение 1.7. *Разностью событий* A и B называется событие $A \backslash B$, состоящее в том, что событие A произойдет, а событие B — нет, т. е. событию $A \backslash B$ соответствует множество, состоящее из элементов множества A, не принадлежащих множеству B.

Определение 1.8. Событие $\overline{A}$ называется *противоположным* событию A, если оно заключается в непоявлении события A. Событию $\overline{A}$ соответствует множество всех элементов пространства Ω, не принадлежащих множеству A, т. е. $\overline{A} = \Omega \backslash A$.

Пример 1.3. Пусть опыт G заключается в проведении стрельбы наугад по квадрату «Ω», точки которого являются элементарными событиями ω. Пусть попадание в квадрат «Ω» есть достоверное событие Ω, а попадание в области «A» и «B» — события A и B. Тогда события $\overline{A}$, $A + B$, AB, $A \backslash B$ представлены на рис. 1.1.

Графические изображения на плоскости соотношений между множествами называются *диаграммами Венна.*

Определение 1.9. События A и B называются *несовместными,* если они не могут произойти одновременно в одном опыте, т. е. $AB = \varnothing$.

Рассмотрим основные свойства операций над событиями (свойства событий).

Свойства событий

1) $\Omega + A = \Omega$;
2) $\Omega A = A$;
3) $AA = A$ (но не A^2);
4) $A + A = A$ (но не $2A$);
5) $A + \varnothing = A$;
6) $A\varnothing = \varnothing$;
7) $(A \backslash B)(B \backslash A) = \varnothing$;
8) $A + B = B + A$;
9) $AB = BA$;
10) $C(A + B) = CA + CB$;
11) $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$;
12) $A + \overline{A} = \Omega$, $\overline{\overline{A}} = A$.

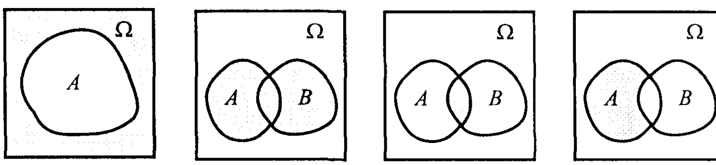

Рис. 1.1

Определение 1.10. Класс $\mathcal{F}$ подмножеств пространства Ω называется *алгеброй событий*, если $\Omega \in \mathcal{F}$ и если $AB \in \mathcal{F}$, $A + B \in \mathcal{F}$, $A \backslash B \in \mathcal{F}$ при любых $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$.

Замечание 1.1. Алгебру событий иногда называют также *алгеброй Буля*.

1.3. Вероятность события.

Определение 1.11. Пусть при n-кратном повторении опыта G событие A произошло m_A раз. *Частотой* $W_n(A)$ события A называется отношение $W_n(A) = m_A / n$.

Свойства частоты $W_n(A)$

1) $W_n(A) \geqslant 0$, так как $m_A \geqslant 0$ и $n > 0$;
2) $W_n(A) \leqslant 1$, так как $m_A \leqslant n$;
3) если при n-кратном повторении опыта несовместные события A и B появились соответственно m_A и m_B раз, то

$$W_n(A + B) \triangleq \frac{m_{A+B}}{n} = \frac{m_A + m_B}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} = W_n(A) + W_n(B).$$

Априори (заранее, до опыта) частота $W_n(A)$ является случайной, т. е. нельзя предсказать точное её значение до проведения данной серии из n опытов. Однако природа случайных событий такова, что на практике наблюдается эффект устойчивости частот. Его суть заключается в том, что при увеличении числа опытов значение частоты практически перестает быть случайным и стабилизируется около некоторого неслучайного числа $\mathbf{P}(A)$, соответствующего данному конкретному событию A в опыте G (точные формулировки приведены в § 13, теорема 13.6).

Замечание 1.2. Число $\mathbf{P}(A)$ первоначально при становлении теории вероятностей называлось *вероятностью* события A в опыте G. Введенное понятие указывает на то, что вероятность $\mathbf{P}(A)$ характеризует частоту появления события A при многократном повторении опыта G.

Но частотное определение вероятности было неудобно по двум причинам: 1) стремление частоты события A к вероятности события происходит не в общепринятом смысле, а в вероятностном; 2) вычисление предельного значения $\mathbf{P}(A)$, к которому стремится частота, может быть невозможным вследствие значительных трудностей при проведении большого числа опытов. Поэтому рассмотрим так называемое аксиоматическое определение вероятности.

Определение 1.12. Алгебра событий $\mathcal{F}$, включающая в себя результаты сложения и умножения *счетного* числа своих элементов (т. е. замкнутая относительно этих операций), называется *σ-алгеброй*. Элементы σ-алгебры $\mathcal{F}$ (т. е. подмножества пространства Ω) называются *случайными событиями* (или просто *событиями*).

Напомним, что множество A называется *счетным*, если между всеми элементами A и множеством натуральных чисел можно установить взаимно однозначное соответствие. Например, множество $\{1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$ является счетным.

Определение 1.13. *Вероятностью события* A называется числовая функция $\mathbf{P}(A)$, определенная на σ-алгебре $\mathcal{F}$ и удовлетворяющая следующим четырем *аксиомам теории вероятностей.*

Аксиомы теории вероятностей

A1 (*неотрицательность вероятности*). Каждому событию $A \in \mathcal{F}$ ставится в соответствие неотрицательное число $\mathbf{P}(A)$, т. е. $\mathbf{P}(A) \geqslant 0$ для любого $A \in \mathcal{F}$.

A2 (*нормировка вероятности*). Вероятность достоверного события равна единице, т. е. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

A3 (*конечная аддитивность вероятности*). Для любых несовместных событий A и B из $\mathcal{F}$ справедливо равенство

$$\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

A4 (*непрерывность вероятности*). Для любой убывающей последовательности $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ событий из $\mathcal{F}$, такой, что $A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_n \cdot \ldots = \varnothing$, имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = 0.$$

Аксиомы **A1**–**A3** тесно связаны со свойствами частоты. В дальнейшем аксиома **A4** и предположение о замкнутости алгебры событий $\mathcal{F}$ относительно счетного числа операций почти не используется. Отметим также, что аксиомы **A3**, **A4** о конечной аддитивности и непрерывности вероятности могут быть заменены на эквивалентную аксиому о счетной аддитивности вероятности (см. п. 3.2).

§ 2. Основные свойства вероятности

2.1. Аксиоматические свойства.

Определение 2.1. Если $\mathbf{P}(A) = 1$, но A не равно Ω, то говорят, что событие A в опыте G происходит *почти наверное* (п.н.).

Определение 2.2. Если $\mathbf{P}(A) = 0$, то говорят, что событие A *почти никогда не происходит в опыте* G.

Свойства P(A)

1) Пусть $\mathbf{P}(A) = 1$. По аксиоме **A2** $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, но из этого не следует, что $A = \Omega$ (т. е. что A является достоверным событием).

2) $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$, т. е. вероятность невозможного события равна нулю. Во-первых, $\varnothing \in \mathcal{F}$, поскольку σ-алгебре $\mathcal{F}$ принадлежит само событие Ω и его дополнение $\overline{\Omega} \triangleq \Omega \backslash \Omega = \varnothing$. Во-вторых, $\Omega + \varnothing = \Omega$. Поэтому, с одной стороны, по аксиоме **A2** получаем $\mathbf{P}(\Omega + \varnothing) = \mathbf{P}(\Omega) = 1$, с другой стороны, по аксиомам **A3** и **A2** имеем

$$\mathbf{P}(\Omega + \varnothing) = \left\| \begin{array}{l} \Omega \cdot \varnothing = \varnothing, \text{ так как собы-} \\ \text{тия } \Omega \text{ и } \varnothing \text{ несовместны} \end{array} \right\| = \mathbf{P}(\Omega) + \mathbf{P}(\varnothing) = 1 + \mathbf{P}(\varnothing).$$

Отсюда следует, что $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$.

3) Пусть $\mathbf{P}(A) = 0$. По свойству 2)P имеем $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$, но из этого не следует, что $A = \varnothing$, т. е. событие A не обязательно является невозможным.

4) Если $A \subset B$, то $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$, т. е. вероятность монотонна. Представим множество B как $B = A + B \backslash A$ (рис. 2.1). По построению

$A(B\backslash A) = \varnothing$, следовательно, события A и $B\backslash A$ несовместны. Поэтому по аксиомам **A3** и **A1** имеем $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B\backslash A) \geqslant \mathbf{P}(A)$.

5) $\mathbf{P}(A) \leqslant 1$ для любого $A \in \mathcal{F}$. Так как $A \subset \Omega$, то из свойства 4)Р и аксиомы **A2** следует $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(\Omega) = 1$.

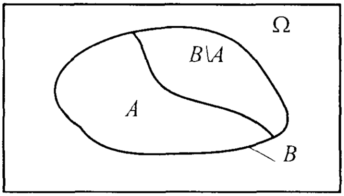

Рис. 2.1

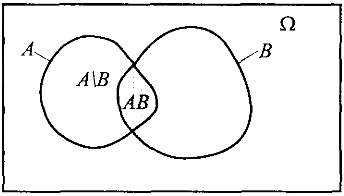

Рис. 2.2

6) $\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB)$ для любых $A, B \in \mathcal{F}$. Представим A в виде $A = A\backslash B + AB$ (рис. 2.2). Очевидно, что $(A\backslash B)(AB) = \varnothing$. Тогда по аксиоме **A3** имеем $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A\backslash B) + \mathbf{P}(AB)$, откуда

$$\mathbf{P}(A\backslash B) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB).$$

Аналогичным образом поступим с событием $A + B$ (рис. 2.2). Имеем $A + B = B + A\backslash B$, причем $B(A\backslash B) = \varnothing$. Тогда из аксиомы **A3** следует

$$\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(A\backslash B).$$

Подставляя в данное выражение формулу для $\mathbf{P}(A\backslash B)$, получаем требуемое.

7) $\mathbf{P}(A + B) \leqslant \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$ для любых A, $B \in \mathcal{F}$. Из аксиомы **A1** следует $\mathbf{P}(AB) \geqslant 0$, поэтому по свойству 6)Р получаем

$$\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB) \leqslant \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B).$$

По индукции можно получить неравенство для произвольных событий $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$:

$$\mathbf{P}(\sum_{i=1}^{n} A_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i).$$

8) на основе аксиомы **A3** по индукции можно показать, что если события $A_1, \ldots, A_n$ попарно несовместны, то

$$\mathbf{P}(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i).$$

9) Пусть события A и B несовместны, т.е. $AB = \varnothing$. Тогда верно $\mathbf{P}(C(A+B)) = \mathbf{P}(CA) + \mathbf{P}(CB)$. По предположению имеем $(CA)(CB) = \varnothing$, так как $AB = \varnothing$. И кроме того, по свойству событий 10) A имеем $C(A+B) = CA + CB$. Следовательно, по аксиоме **А3** получаем

$$\mathbf{P}(C(A+B)) = \mathbf{P}(CA + CB) = \mathbf{P}(CA) + \mathbf{P}(CB).$$

2.2. Свойства вероятности для полной группы событий.

Определение 2.3. События $H_1, \ldots, H_n$ в опыте G образуют *полную группу несовместных событий*, если они попарно несовместны ($H_iH_j = \varnothing$ при $i \neq j$) и в результате опыта произойдет хотя бы одно из событий H_i, $i = \overline{1,n}$, т.е. $H_1 + \ldots + H_n = \Omega$. События $H_1, \ldots, H_n$ называются *гипотезами*, если они образуют полную группу несовместных событий и $P(H_i) > 0$, $i = \overline{1,n}$.

Определение 2.4. Рассмотрим опыт G с конечным числом возможных исходов $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, где ω_i — элементарные события, образующие полную группу несовместных событий, появление которых равновероятно, т.е. $\mathbf{P}(\omega_i) = p$, $i = \overline{1,n}$. Такие события $\omega_1, \ldots, \omega_n$ называются *случаями*, а про опыт G говорят, что он *сводится к схеме случаев*.

Определение 2.5. Рассмотрим в опыте G, сводящемся к схеме случаев, произвольное событие A, которое можно представить в виде суммы m случаев, т.е. $A = \omega_{i_1} + \ldots + \omega_{i_m}$ при $m \leqslant n$. Тогда такие слагаемые $\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_m}$ называют *случаями, благоприятствующими событию* A (или *благоприятными случаями*).

Определение 2.6. *Условной вероятностью* $\mathbf{P}(A|B)$ события A относительно события B, если $\mathbf{P}(B) > 0$, называется вероятность осуществления события A при условии, что событие B уже произошло. Условная вероятность определяется формулой

$$\mathbf{P}(A|B) \triangleq \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Свойства P(A) (продолжение)

10) Если события $H_1, \ldots, H_n$ образуют полную группу несовместных событий, то

$$\mathbf{P}(H_1) + \ldots + \mathbf{P}(H_n) = \mathbf{P}(H_1 + \ldots + H_n) = 1.$$

Данное свойство непосредственно вытекает из определения 2.3, аксиомы **А2** и свойства 8)P.

11) $\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A})$. По определению $\overline{A} = \Omega \backslash A$, поэтому $A\overline{A} = \varnothing$. По свойству 12) A имеем $A + \overline{A} = \Omega$, т. е. события A и $\overline{A}$ образуют полную группу несовместных событий. Следовательно, по свойству 10)P: $\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(\overline{A}) = \mathbf{P}(A + \overline{A}) = 1$, откуда следует искомая формула.

12) $\mathbf{P}(A+B) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A} \cdot \overline{B})$. По свойству 11) A имеем $\overline{A + B} = \overline{A} \times \times \overline{B}$. Поэтому из свойства 11)P следует $\mathbf{P}(A + B) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A + B}) = = 1 - \mathbf{P}(\overline{A} \cdot \overline{B})$.

13) $\mathbf{P}(AB) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A} + \overline{B})$. Это следует из свойства 12)P, если вместо событий A и B рассмотреть соответственно события $\overline{A}$ и $\overline{B}$ и использовать свойство событий 12) A: $\overline{\overline{A}} = A$.

14) Если опыт G сводится к схеме случаев, то $\mathbf{P}(\omega_i) = p = 1/n$, $i = \overline{1, n}$. Действительно, так как события $\omega_1, \ldots, \omega_n$ несовместны, то по аксиоме **A2** и свойству вероятности 8)P имеем

$$1 = \mathbf{P}(\Omega) = \mathbf{P}(\omega_1 + \ldots + \omega_n) = \mathbf{P}(\omega_1) + \ldots + \mathbf{P}(\omega_n) = np.$$

15) Если событие A представимо в виде суммы m благоприятных случаев из общего числа n случаев, то вероятность такого события находится по *классической формуле вычисления вероятности*: $\mathbf{P}(A) = = m/n$. Действительно,

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\omega_{i_1} + \ldots + \omega_{i_m}) = \mathbf{P}(\omega_{i_1}) + \ldots + \mathbf{P}(\omega_{i_m}) = \frac{m}{n}.$$

Пример 2.1. Опыт состоит в подбрасывании игральной кости (см. пример 1.1). Требуется найти вероятность выпадения четного числа очков (события A). В данном случае опыт сводится к схеме случаев, если в качестве элементарного события ω_i выбрать выпадение на верхней грани игральной кости числа очков, равного i, $i = \overline{1, 6}$. Тогда $n = 6$, а $m = 3$, поскольку $A = \omega_2 + \omega_4 + \omega_6$. Таким образом, $\mathbf{P}(A) = 1/2$.

16) Рассмотрим опыт G, сводящийся к схеме случаев, и предположим, что событиям A, B, AB благоприятствуют соответственно m_A, $m_B > 0$, m_{AB} случаев из всех n возможных. Допустим, что событие B уже произошло. Это означает, что из всех возможных n случаев реально могло появиться только m_B случаев, причем из них только m_{AB} случаев благоприятствуют событию A. Тогда $\mathbf{P}(A|B) = = m_{AB}/m_B$. Действительно, получаем

$$\mathbf{P}(A|B) \triangleq \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{m_{AB}}{n} \frac{n}{m_B} = \frac{m_{AB}}{m_B}.$$

17) $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B)$. Данная формула следует из определения 2.6 и свойства коммутативности операции

умножения событий: $AB = BA$. Действительно,

$$\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(BA) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B|A).$$

Одной из основных формул для подсчета вероятности случайного события является классическая формула, приведенная в свойстве 15)Р. В схеме случаев предлагается следующий порядок решения задач с помощью этой формулы.

1) Определить элементарные события, сводя опыт к схеме случаев.

2) Подсчитать количество n всех случаев.

3) Описать событие A, вероятность которого требуется найти.

4) Подсчитать число m_A случаев, благоприятствующих событию A.

5) Воспользоваться классической формулой вычисления вероятности $\mathbf{P}(A) = m_A/n$.

Замечание 2.1. При выделении случаев исходят, как правило, из интуитивных соображений о симметрии исходов и их равновозможности. В данной главе во всех задачах будем рассматривать только такие модели опытов, которые сводятся к схеме случаев. Поэтому выбираемые далее элементарные события будем считать равновероятными.

2.3. Типовые задачи.

Задача 2.1. В отдел технического контроля поступила партия из 15 изделий, среди которых 5 бракованных. Для проверки качества партии наугад выбрано одно изделие. С какой вероятностью оно окажется бракованным?

Решение. Перенумеруем все изделия и определим элементарные события (случаи)

$$\omega_i = \{\text{выбор } i\text{-го изделия}\}, \quad i = \overline{1,\,15}.$$

Таких элементарных событий 15, т. е. $n = 15$. Опишем событие A, вероятность которого требуется найти:

$$A = \{\text{выбор бракованного изделия}\}.$$

Число элементарных событий, благоприятствующих событию A, равно количеству бракованных деталей, т. е. $m_A = 5$. Тогда согласно классической формуле вычисления вероятности

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

Ответ. $\mathbf{P}(A) = 1/3$.

Задача 2.2. Усложним предыдущую задачу. Предположим, что для проверки партии, состоящей из 15 деталей, среди которых находятся 5 бракованных, выбираются 3 детали. Партия считается бракованной, если бракуется хотя бы одна деталь. Требуется найти вероятность того, что партия будет забракована.

Решение. Следуя предложенному выше порядку решения задачи, определим элементарное событие в рассматриваемом опыте следующим образом:

$$\omega = \left\{ \begin{matrix} \text{последовательность из трех деталей,} \\ \text{выбранных из 15 деталей} \end{matrix} \right\}.$$

Все такие элементарные события равновероятны и образуют полную группу несовместных событий, т.е. опыт сведен к схеме случаев. Для того чтобы подсчитать количество n всех возможных случаев, используем так называемую *схему выбора без возвращения*. Первую деталь для проверки можно выбрать 15 способами (по количеству имеющихся в партии деталей). При проверке для каждого способа выбора первой детали существует 14 способов выбрать вторую деталь (так как одна деталь, выбранная первой, уже отсутствует). Таким образом, при проверке общее количество способов выбора 2-х деталей равняется $15 \cdot 14$. Рассуждая далее аналогичным образом, получаем $n = 15 \cdot 14 \cdot 13$.

Опишем теперь событие A, вероятность которого требуется найти:

$$A = \left\{ \begin{matrix} \text{в последовательности из трех выбранных} \\ \text{деталей окажется хотя бы одна бракованная} \end{matrix} \right\}.$$

Рассмотрим событие $\overline{A}$, противоположное событию A:

$$\overline{A} = \left\{ \begin{matrix} \text{в последовательности из трех выбранных} \\ \text{деталей не окажется ни одной бракованной} \end{matrix} \right\}.$$

Подсчитаем число элементарных событий, благоприятствующих событию $\overline{A}$. С этой целью повторим рассуждения, использованные для подсчета n. Выбирая детали только из 10 небракованных, получим $m_{\overline{A}} = 10 \cdot 9 \cdot 8$.

Тогда, используя классическую формулу вычисления вероятности, окончательно будем иметь

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{15 \cdot 14 \cdot 13} = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}.$$

Ответ. $\mathbf{P}(A) = 67/91$.

Задача 2.3. Для 20 участников конференции, среди которых 12 российских, в гостинице забронировано 20 номеров. Из этих номеров

12 — с видом на море. Портье наугад выдает участникам конференции ключи от номеров. Найти вероятность того, что номера с видом на море достанутся 12 российским участникам конференции.

Решение. Процедура выделения гостиничных номеров участникам конференции представляет собой присвоение каждой фамилии в списке участников номера, выбранного наугад портье. Определим элементарное событие

$$\omega = \left\{ \begin{array}{c} \text{последовательность из номеров аппартамен-} \\ \text{тов, образованная согласно упорядоченному} \\ \text{списку участников конференции} \end{array} \right\}.$$

Все такие элементарные события равновероятны и образуют полную группу несовместных событий, т. е. опыт сведен к схеме случаев. Для подсчета числа n всех таких случаев воспользуемся схемой выбора без возвращения. Получаем

$$n = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 20!\,.$$

Заметим, что мы получили известную в комбинаторике величину $k!$, равную количеству всех способов сформировать различные последовательности из k элементов, т. е. *числу всех возможных перестановок k элементов.*

Опишем событие A, вероятность которого требуется найти:

$$A = \left\{ \begin{array}{c} \text{двенадцати российским участникам конференции доста-} \\ \text{нутся номера с видом на море, а остальные номера} \\ \text{будут распределены между оставшимися участниками} \end{array} \right\}.$$

Найдем число m_A случаев, благоприятствующих событию A. Для этого распределим сначала номера с видом на море среди российских участников конференции. Это можно сделать 12! способами, согласно рассуждениям, приведенным при подсчете n. На каждый способ распределить указанные номера среди российских участников конференции существует 8! способов распределить оставшиеся номера среди остальных участников. Таким образом, общее количество элементарных событий, благоприятствующих событию A равняется $12! \cdot 8!$. Следовательно, $m_A = 12! \cdot 8!$.

Для нахождения $\mathbf{P}(A)$ воспользуемся классической формулой

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{8!12!}{20!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 1}{20 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 13} \approx 7{,}9 \cdot 10^{-6}\,.$$

Ответ. $\mathbf{P}(A) \approx 7{,}9 \cdot 10^{-6}$.

Задача 2.4. Подбрасывают K игральных костей. Найти вероятность получения суммы очков, равной: *а*) K; *б*) $K+1$.

Решение. *а*) Предположим, что в данной задаче все кости занумерованы от 1 до K. Будем понимать под элементарным событием

$$\omega = \left\{\begin{matrix}\text{последовательность из } K \text{ цифр, соответству-}\\ \text{ющих числу выпавших очков на каждой кости}\end{matrix}\right\}.$$

Все такие элементарные события равновероятны и образуют полную группу несовместных событий, т. е. опыт сведен к схеме случаев. При подсчете числа n всех случаев воспользуемся схемой выбора с возвращением. На первой игральной кости число очков может появиться 6 способами (любая цифра от 1 до 6). Для каждого способа появления числа очков на первой кости существует 6 способов появления числа очков на второй игральной кости и т. д. (см. задачу 2.2). Таким образом, общее число всех возможных элементарных событий $n = 6^K$.

Опишем событие A, вероятность которого нужно найти:

$$A = \{\text{сумма очков на } K \text{ подброшенных костях равна } K\}.$$

Заметим, что появление этого события эквивалентно тому, что на всех игральных костях выпало по одному очку. Очевидно, что это может произойти единственным способом, т. е. число элементарных событий, благоприятствующих событию A, равно единице ($m_A = 1$).

Следовательно, согласно классической формуле вычисления вероятности

$$\mathbf{P}(A) \triangleq \frac{m_A}{n} = \frac{1}{6^K}.$$

б) Поскольку опыт не изменился, элементарные события и величина n остаются прежними. Изменяется лишь событие, вероятность которого требуется найти:

$$B = \{\text{сумма очков на } K \text{ подброшенных костях равна } K+1\}.$$

Событие B эквивалентно тому, что на $K-1$ игральной кости выпадет по одному очку, а на одной игральной кости выпадет два очка. Подсчет числа элементарных событий, благоприятствующих событию B, сводится, таким образом, к нахождению количества способов выбрать одну игральную кость из K, на которой должно выпасть два очка. Очевидно, что есть K таких способов. Следовательно, $m_B = K$. Таким образом,

$$\mathbf{P}(B) = \frac{K}{6^K}.$$

Ответ. *а*) $1/6^K$; *б*) $K/6^K$.

Задача 2.5. Три студента МАИ, два студента МЭИ и четыре студента МГУ наугад рассаживаются в три вагона. Для каждого пассажира вероятность оказаться в любом из вагонов одинакова. Найти вероятности следующих событий:

а) три студента МАИ окажутся в разных вагонах;

б) два студента МЭИ окажутся в разных вагонах.

Решение. *а*) Определим элементарное событие для рассматриваемого в задаче опыта следующим образом:

$$\omega = \left\{ \begin{array}{c} \text{последовательность из номеров вагонов, образован-} \\ \text{ная согласно упорядоченному списку пассажиров} \end{array} \right\}.$$

Все такие элементарные события равновероятны и образуют полную группу несовместных событий, т. е. опыт сведен к схеме случаев. Для подсчета числа n всех случаев воспользуемся процедурой, описанной в предыдущей задаче. В результате получим $n = 3^9$.

Нас интересует вероятность события

$$A = \{\text{три студента МАИ окажутся в разных вагонах}\}.$$

Распределим сначала имеющиеся у нас три билета с номерами различных вагонов среди студентов МАИ. Действуя аналогично процедуре, описанной в задаче 2.3, получаем, что это можно сделать $3!$ способами. На каждый такой способ существует 3^6 способов приписать номера вагонов всем оставшимся пассажирам. Таким образом, $m_A = 3!\,3^6$.

В результате получаем

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{3!\,3^6}{3^9} = \frac{3!}{3^3} = \frac{2}{9}.$$

б) в этой задаче нас интересует вероятность следующего события:

$$B = \{\text{два студента МЭИ окажутся в разных вагонах}\}.$$

Число всех случаев, связанных с опытом остается без изменения: $n = 3^9$. Для подсчета числа случаев, благоприятствующих событию B, воспользуемся сначала процедурой, предложенной в задаче 2.2, а именно, первый студент МЭИ может выбрать вагон тремя способами, а второй — двумя. Таких способов $3 \cdot 2$. Оставшиеся пассажиры могут получить номера своих вагонов 3^7 способами. Поэтому $m_B = 3 \cdot 2 \cdot 3^7$.

Таким образом,

$$\mathbf{P}(B) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 3^7}{3^9} = \frac{2}{3}.$$

Ответ. *а*) 2/9; *б*) 2/3.

Задача 2.6. Предположим, что в каждом из трех вагонов есть ровно k мест, и каждый из трех студентов МАИ может занять любое из имеющихся мест. Найти вероятность того, что три студента МАИ окажутся в разных вагонах.

Решение. Определим элементарное событие в рассматриваемом опыте следующим образом:

$$\omega = \left\{ \begin{array}{c} \text{последовательность из номеров мест, образованная} \\ \text{согласно упорядоченному списку студентов МАИ} \end{array} \right\}.$$

Все такие элементарные события равновероятны и образуют полную группу несовместных событий, т. е. опыт сведен к схеме случаев. Для подсчета всех возможных случаев воспользуемся схемой выбора без возвращения. Тогда число n всех случаев, связанных с опытом, равно

$$n = 3k \cdot (3k-1) \cdot (3k-2).$$

Нас по-прежнему интересует вероятность события

$$A = \{\text{три студента МАИ окажутся в разных вагонах}\}.$$

Однако число элементарных событий, благоприятствующих событию A, теперь равно

$$m_A = 3k \cdot 2k \cdot k = 6k^3.$$

В результате получаем

$$\mathbf{P}(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{6k^3}{3k \cdot (3k-1) \cdot (3k-2)} = \frac{2k^2}{(3k-1) \cdot (3k-2)}.$$

Заметим, что при неограниченном увеличении числа мест в вагоне, т. е. при $k \longrightarrow \infty$, имеем

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \mathbf{P}(A) = \lim_{k \longrightarrow \infty} \frac{2}{(3 - \frac{1}{k}) \cdot (3 - \frac{2}{k})} = \frac{2}{9}.$$

Сравните полученный результат с ответом в *задании а*) задачи 2.5.

Ответ. $\dfrac{2k^2}{(3k-1) \cdot (3k-2)}$.

Задача 2.7. В розыгрыше лотереи участвуют 100 билетов, среди которых 25 выигрышных. Какова вероятность остаться без выигрыша, приобретя 3 билета лотереи?

Решение. Рассмотрим два способа решения этой задачи, отличающиеся определением элементарного события.

Способ I. Определим элементарное событие следующим образом:

$$\omega = \{\text{последовательность из номеров купленных билетов}\}.$$

Все такие элементарные события равновероятны и образуют полную группу несовместных событий, т. е. опыт сведен к схеме случаев. Рассуждая так же, как в задаче 2.2, получим, что число всех случаев $n = 100 \cdot 99 \cdot 98$.

Опишем событие A, вероятность которого нужно найти:

$$A = \{\text{все три билета окажутся без выигрыша}\}.$$

Тогда число случаев, благоприятствующих событию A, выражается следующим образом: $m_A = 75 \cdot 74 \cdot 73$.

В результате имеем

$$\mathbf{P}(A) = \frac{75 \cdot 74 \cdot 73}{100 \cdot 99 \cdot 98} \approx 0{,}418.$$

Способ II. Определим в этой задаче элементарное событие по-другому. Для этого введем следующее понятие: *под совокупностью будем понимать множество элементов, на котором не вводится порядок следования элементов.*

Рассмотрим в качестве элементарного события следующее

$$\omega = \{\text{совокупность из трех лотерейных билетов}\}.$$

Такой способ выбора элементарного события в данной задаче возможен, так как нас не интересует порядок, в котором приобретались лотерейные билеты, а интересует только их качественный состав (количество выигрышных среди них). Все такие элементарные события равновероятны и образуют полную группу несовместных событий, т. е. опыт сведен к схеме случаев.

Поскольку из одной совокупности трех элементов (согласно результату, полученному в задаче 2.3) можно получить 3! последовательностей, то общее число всех элементарных событий, определенных таким способом, будет в 3! раз меньше, чем было получено при использовании первого способа решения задачи, т. е.

$$n = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{3!}.$$

Полученная величина может быть представлена в следующем виде:

$$n = \frac{100!}{3!\,(100-3)!}.$$

Мы получили известную в комбинаторике *формулу для числа сочетаний из k элементов по l*:

$$C_k^l = \frac{k!}{l!\,(k-l)!},$$

т. е. для числа всех возможных способов выбрать l элементов из k имеющихся, если порядок выбора несуществен.

Аналогичные рассуждения приводят к нахождению числа случаев, благоприятствующих определенному выше событию A:

$$m_A = C_{75}^3 = \frac{75!}{3!\,(75-3)!}.$$

Окончательно получаем

$$\mathbf{P}(A) = \frac{C_{75}^3}{C_{100}^3} = \frac{75\cdot 74\cdot 73}{100\cdot 99\cdot 98} \approx 0{,}418.$$

Ответ. $\approx 0{,}418$.

Задача 2.8. Усложним, по сравнению с предыдущей задачей, правила лотереи. Пусть в лотерее осуществляется розыгрыш 6 номеров из 49. Порядок выпадения выигрышных номеров неважен. Участник лотереи выбирает 6 номеров из 49. Выигрыш выплачивается угадавшим 4, 5 или все 6 номеров. Определить вероятность угадывания ровно четырех выигрышных номеров.

Решение. Определим элементарное событие в данной задаче:

$$\omega = \{\text{совокупность 6 номеров из 49}\}.$$

Все такие элементарные события равновероятны и образуют полную группу несовместных событий, т. е. опыт сведен к схеме случаев. Тогда получим (аналогично тому, как это сделано в предыдущей задаче) количество всех случаев $n = C_{49}^6$.

Опишем событие, вероятность которого требуется найти:

$$A = \{\text{угадано 4 выигрышных номера}\}.$$

После розыгрыша лотереи 49 участвующих в розыгрыше номеров делятся на две группы: 6 номеров — выигрышные и 43 номера — без выигрыша.

Найдем число случаев m_A, благоприятствующих событию A. Существует C_6^4 способов выбрать 4 номера из 6 выигрышных, и для каждого такого способа существует $C_4^2 3$ способов выбрать остальные 2 номера из 43, оставшихся без выигрыша. Таким образом,

$$m_A = C_6^4 \cdot C_{43}^2.$$

Воспользовавшись классической формулой, получим

$$\mathbf{P}(A) = \frac{C_6^4\, C_{43}^2}{C_{49}^6} \approx 9{,}7\cdot 10^{-4}.$$

Ответ. $\mathbf{P}(A) = C_6^4 C_{43}^2 / C_{49}^6 \approx 9{,}7 \cdot 10^{-4}$.

Задача 2.9. Пусть $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 1/2$. Верно ли, что $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(B|A)$?

Решение. Пользуясь определением условной вероятности, получим

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}, \qquad \mathbf{P}(B|A) = \frac{\mathbf{P}(BA)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Поскольку в данном случае совпадают и числители, и знаменатели, то $\mathbf{P}(A|B) = \mathbf{P}(B|A)$.

Ответ. Верно.

Задача 2.10. Пусть H_1, H_2, H_3, H_4 — равновероятные гипотезы. Являются ли гипотезами события $H_1 + H_2$ и $H_3 + H_4$?

Решение. Необходимо проверить, выполняются ли для событий $H_1 + H_2$ и $H_3 + H_4$ свойства, которым должны удовлетворять гипотезы. Проверим попарную несовместность этих событий:

$$(H_1 + H_2)(H_3 + H_4) = H_1 H_3 + H_1 H_4 + H_2 H_3 + H_2 H_4 = \varnothing,$$

так как H_1, H_2, H_3, H_4 — гипотезы, и поэтому они несовместны. Проверим, образуют ли эти события полную группу:

$$(H_1 + H_2) + (H_3 + H_4) = H_1 + H_2 + H_3 + H_4 = \Omega.$$

Таким образом, $(H_1 + H_2)$ и $(H_3 + H_4)$ образуют полную группу несовместных событий и $\mathbf{P}(H_1 + H_2) \geqslant \mathbf{P}(H_1) > 0$, $\mathbf{P}(H_3 + H_4) \geqslant \mathbf{P}(H_3) > 0$. Следовательно, эти события являются гипотезами.

Ответ. Да, являются.

Задача 2.11. Пусть $\mathbf{P}(B) > 0$. Доказать, что $\mathbf{P}(\overline{A}|B) = 1 - \mathbf{P}(A|B)$.

Решение. По свойствам событий 2) A, 12) A, 10) A и аксиоме **А3**:

$$1 = \frac{\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(\Omega B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}((\overline{A} + A)B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}(\overline{A}B + AB)}{\mathbf{P}(B)} = \mathbf{P}(\overline{A}|B) + \mathbf{P}(A|B).$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(\overline{A}|B) = 1 - \mathbf{P}(A|B).$$

Что и требовалось доказать.

§ 3. Основные формулы вычисления вероятностей

3.1. Формула умножения вероятностей. Основной задачей теории вероятностей является вычисление вероятностей сложных событий с использованием вероятностей более простых событий.

Теорема 3.1. *Вероятность одновременного появления событий $A_1, \ldots, A_n$ выражается* ***формулой умножения вероятностей***:

$$\mathbf{P}(A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(A_n|A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}),$$

в которой вероятность каждого следующего по порядку события вычисляется при условии, что в рассматриваемом опыте произошли все предыдущие события.

Доказательство. Проведем доказательство по индукции. Если $n = 2$, то утверждение верно по определению условной вероятности. Предположим, что формула справедлива для любых $n \leqslant k$. Тогда, рассматривая произведение $k+1$ события, получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_k A_{k+1}) &= \mathbf{P}((A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_k) A_{k+1}) = \\ &= \mathbf{P}(A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_k)\mathbf{P}(A_{k+1}|A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_k) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1) \times \ldots \\ &\ldots \times \mathbf{P}(A_k|A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_{k-1})\mathbf{P}(A_{k+1}|A_1 A_2 \cdot \ldots \cdot A_k).\end{aligned}$$

Таким образом, формула оказывается верной и для $k+1$ сомножителя. По индукции заключаем, что формула умножения вероятности верна.

Определение 3.1. События A и B называются *независимыми*, если $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$. В противном случае события называются зависимыми.

Определение 3.2. Если любые два события из $A_1, \ldots, A_n$ независимы, то события $A_1, \ldots, A_n$ называются *попарно независимыми*. События $A_1, \ldots, A_n$ называются *независимыми в совокупности*, или просто *независимыми*, если для любых $k = \overline{2, n}$ и $1 \leqslant i_1 < \ldots \ldots < i_k \leqslant n$ верно равенство

$$\mathbf{P}(A_{i_1} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}) = \mathbf{P}(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(A_{i_k}).$$

Независимость событий не следует из их попарной независимости, но обратное утверждение верно.

Пример 3.1. Пусть имеется тетраэдр, у которого первая грань выкрашена в красный цвет, вторая — в синий, третья — в желтый, а четвертая грань выкрашена частями в красный, синий и желтый. Тетраэдр бросается на стол. Пусть случаи $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ состоят в падении тетраэдра одной из граней на стол. Событие A состоит в том, что грань, на которую упал тетраэдр содержит красный цвет, событие B — синий, и событие C — желтый цвет. Тогда $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\omega_1 + \omega_4) = 1/2$. Аналогично, $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = 1/2$. Далее, $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(\omega_4) = 1/4$. В то же время $\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = 1/4$, т.е. $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$. Это значит, что события A и B независимы. Аналогично устанавливается, что события A и C, а также события B и C независимы. Таким образом, события A, B, C являются попарно независимыми. Однако эти события не являются независимыми в совокупности. Действительно,

$$\mathbf{P}(ABC) = \mathbf{P}(\omega_4) = 1/4,$$

но

$$\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C) = 1/8.$$

Пример 3.2. Если события A и B независимы, то независимы также события A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B. Для событий A и $\overline{B}$ имеем

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A\Omega) = \mathbf{P}(A(B + \overline{B})) = \mathbf{P}(AB + A\overline{B}) = \mathbf{P}(AB) + \mathbf{P}(A\overline{B}).$$

Поэтому $\mathbf{P}(A\overline{B}) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB)$. Так как A и B независимы, то

$$\mathbf{P}(A\overline{B}) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(\overline{B}),$$

т.е., согласно определению 3.1, события A и $\overline{B}$ независимы. Независимость остальных событий доказывается аналогично. Утверждение справедливо и для произвольного количества независимых событий.

Пример 3.3. Если несовместные события A и B имеют ненулевые вероятности, то они зависимы. Действительно, по условию $AB = \varnothing$. Если бы A и B были независимыми, тогда было бы верно

$$\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(\varnothing) = 0,$$

но левая часть равенства по условию нулю не равна. Следовательно, A и B зависимы.

3.2. Формула сложения вероятностей.

Теорема 3.2. *Вероятность появления в опыте хотя бы одного из событий $A_1, \ldots, A_n$ выражается* ***формулой сложения вероятностей***:

$$\mathbf{P}(A_1 + \ldots + A_n) = p_1 - p_2 + \ldots + (-1)^{n-1}p_n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}p_i,$$

где $p_1 = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$, $p_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \mathbf{P}(A_iA_j)$, $\ldots$, $p_n = \mathbf{P}(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n)$.

Данная формула доказывается по индукции на основе свойства 6)P, из которого следует формула сложения вероятностей для $n = 2$. При $n = 3$ эта формула принимает вид

$$\mathbf{P}(A_1 + A_2 + A_3) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \mathbf{P}(A_3) - \\ - \mathbf{P}(A_1 A_2) - \mathbf{P}(A_2 A_3) - \mathbf{P}(A_1 A_3) + \mathbf{P}(A_1 A_2 A_3).$$

Если события $A_1, \ldots, A_n$ попарно несовместны, то вероятность произведения любой комбинации из этих событий равняется нулю и формула сложения вероятностей принимает вид (см. свойство 8)P)

$$\mathbf{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i).$$

Если события A_i в бесконечной последовательности $A_1, \ldots$ $\ldots, A_i, \ldots$ попарно несовместны, то выполняется следующее равенство:

$$\mathbf{P}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i).$$

Действительно, пусть $A \triangleq \sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Представим событие A в виде

$$A \triangleq \sum_{i=1}^{n} A_i + B_n, \quad \text{где} \quad B_n \triangleq \sum_{i=n+1}^{\infty} A_i.$$

Тогда $\mathbf{P}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i) + \mathbf{P}(B_n)$. Так как по построению $B_1 \supset$ $\supset B_2 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots$ и $\prod\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$, то по аксиоме **A4** получаем $\mathbf{P}(B_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Откуда и вытекает требуемое равенство, которое называется *свойством счетной аддитивности вероятности*. Можно доказать и обратное утверждение, что при выполнении этого свойства выполняются также аксиомы **A3**, **A4**.

Предположим, что события $A_1, \ldots, A_n$ являются независимыми (согласно примеру 3.3 такие события не могут быть попарно несовместными). Тогда

$$\mathbf{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} A_i\Big) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\overline{A}_i).$$

Действительно, пусть $n = 2$. По свойству 11)P имеем $\mathbf{P}(A + B) =$ $= 1 - \mathbf{P}(\overline{A} \cdot \overline{B})$. Так как A и B независимы, а значит $\overline{A}$ и $\overline{B}$ независимы также, то $\mathbf{P}(A + B) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}(\overline{B})$. Общая формула доказывается по методу математической индукции.

3.3. Формула полной вероятности.

Теорема 3.3. *Пусть с опытом G связаны гипотезы $H_1, \ldots, H_n$. Тогда вероятность появления произвольного события A в опыте G выражается* ***формулой полной вероятности****:*

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A|H_i),$$

где $\mathbf{P}(H_i)$ — вероятность гипотезы, $\mathbf{P}(A|H_i)$ — условная вероятность события A при условии, что справедлива гипотеза H_i, $i = \overline{1,n}$.

Доказательство. Теорема доказывается следующим образом:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A\Omega) = \mathbf{P}(A(H_1 + \ldots + H_n)) = \mathbf{P}(AH_1 + \ldots + AH_n) =$$
$$= \mathbf{P}(AH_1) + \ldots + \mathbf{P}(AH_n) = \mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(A|H_1) + \ldots + \mathbf{P}(H_n)\mathbf{P}(A|H_n).$$

Замечание 3.1. Формула полной вероятности позволяет выразить вероятность сложного события A через вероятности составляющих его более простых событий AH_i, $i = \overline{1,n}$. Данная формула используется в опытах, не сводящихся к схеме случаев.

3.4. Формула Байеса.

Теорема 3.4. *Пусть с опытом G связаны гипотезы $H_1, \ldots, H_n$. Предположим, что при проведении опыта произошло событие A, вероятность которого была $\mathbf{P}(A) > 0$. Пусть до опыта G были известны лишь* ***априорные*** *вероятности гипотез $\mathbf{P}(H_i)$, $i = \overline{1,n}$, и соответствующие им условные вероятности $\mathbf{P}(A|H_i)$, $i = \overline{1,n}$, события A. В этом случае условная (****апостериорная****) вероятность $\mathbf{P}(H_i|A)$ гипотезы H_i при условии, что событие A произошло, вычисляется по* ***формуле Байеса****:*

$$\mathbf{P}(H_i|A) = \frac{\mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A|H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{P}(H_k)\mathbf{P}(A|H_k)}.$$

Доказательство. Данная формула вытекает из свойств условной вероятности. Действительно, по свойству 17)Р имеем $\mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A|H_i) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(H_i|A)$, откуда следует, что

$$\mathbf{P}(H_i|A) = \frac{\mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A|H_i)}{\mathbf{P}(A)}.$$

Далее остается заменить $\mathbf{P}(A)$ формулой полной вероятности.

Замечание 3.2. Формула Байеса предназначена для вычисления апостериорных вероятностей гипотез после проведения опыта с учетом полученной информации (событие A уже произошло).

3.5. Формула Бернулли. Рассмотрим последовательность из n независимых испытаний (опытов) с двумя исходами (событиями) A и $\overline{A}$, которые называются соответственно «*успехом*» и «*неуспехом*», причем $\mathbf{P}(A) = p \in (0,1)$, $\mathbf{P}(\overline{A}) = q \triangleq 1 - p$. Построенная схема испытаний называется *схемой Бернулли*, а сам опыт — *опытом Бернулли*.

Теорема 3.5. *Пусть опыт G производится по схеме Бернулли. Тогда вероятность $P_n(m)$ события $A_n(m)$, состоящего в том, что при n повторениях опыта G событие A произойдет ровно m раз, вычисляется по* ***формуле Бернулли***:

$$P_n(m) \triangleq \mathbf{P}(A_n(m)) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Продемонстрируем справедливость этой формулы для частного случая, когда $n = 3$ и $m = 1$. В этом случае

$$P_3(1) \triangleq \mathbf{P}(A_3(1)) = C_3^1 p^1 (1-p)^2 = 3p(1-p)^2.$$

Представим событие $A_3(1)$ в виде суммы несовместных событий:

$$A_3(1) = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3,$$

где события A_i и $\overline{A}_i$ состоят в том, что в i-м опыте, $i = 1,2,3$, наблюдается или не наблюдается «успех». Покажем, что события в этой сумме несовместны. Например,

$$(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)(\overline{A}_1 A_2\overline{A}_3) = (A_1\overline{A}_1)(\overline{A}_2 A_2)(\overline{A}_3\overline{A}_3) = \varnothing.$$

Поэтому получаем

$$P_3(1) \triangleq \mathbf{P}(A_3(1)) = \mathbf{P}(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) + \mathbf{P}(\overline{A}_1 A_2\overline{A}_3) + \mathbf{P}(\overline{A}_1\overline{A}_2 A_3).$$

Так как события A_1, A_2, A_3, а также $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ независимы, то

$$P_3(1) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(\overline{A}_2)\mathbf{P}(\overline{A}_3) + \mathbf{P}(\overline{A}_1)\mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(\overline{A}_3) + \mathbf{P}(\overline{A}_1)\mathbf{P}(\overline{A}_2)\mathbf{P}(A_3).$$

Но $\mathbf{P}(A_i) = p$ и $\mathbf{P}(\overline{A}_i) = 1 - p$ при $i = 1,2,3$. Поэтому $P_3(1) = 3p(1-p)^2 = C_3^1 p(1-p)^2$. В общем случае формула Бернулли доказывается аналогично.

Пример 3.4. Монету подбрасывают 5 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет ровно три раза. В этом случае $n = 5$, $m = 3$, $p = 1/2$, $q \triangleq 1 - p = 1/2$. Тогда по формуле Бернулли

$$P_5(3) = C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}.$$

3.6. Типовые задачи.

Задача 3.1. Из колоды карт (52 карты) наугад вынимается одна. Являются ли зависимыми события

$$A = \{\text{эта карта — туз}\} \text{ и } B = \{\text{эта карта имеет пиковую масть}\}\,?$$

Решение. По определению операции произведения событий

$$AB = \{\text{эта карта — туз пик}\}.$$

Следовательно, по классической формуле теории вероятностей

$$\mathbf{P}(AB) = \frac{1}{52}, \quad \mathbf{P}(A) = \frac{4}{52}, \quad \mathbf{P}(B) = \frac{13}{52}.$$

Так как выполняется равенство $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$, то события A и B независимы.

Ответ. События A и B независимы.

Задача 3.2. Пусть $\mathbf{P}(C) = 1/2$. Сравнить вероятности

$$\mathbf{P}(A + B|C) \text{ и } \mathbf{P}(A|C) + \mathbf{P}(B|C).$$

Решение. Пользуясь определением условной вероятности и формулой сложения вероятностей, получаем

$$\mathbf{P}(A + B|C) = \frac{\mathbf{P}((A + B)C)}{\mathbf{P}(C)} = \frac{\mathbf{P}(AC + BC)}{\mathbf{P}(C)} =$$
$$= \frac{\mathbf{P}(AC) + \mathbf{P}(BC) - \mathbf{P}(ABC)}{\mathbf{P}(C)} = \mathbf{P}(A|C) + \mathbf{P}(B|C) - \mathbf{P}(AB|C).$$

Но поскольку вероятность $\mathbf{P}(AB|C)$ неотрицательна, то

$$\mathbf{P}(A + B|C) \leqslant \mathbf{P}(A|C) + \mathbf{P}(B|C).$$

Ответ. $\mathbf{P}(A + B|C) \leqslant \mathbf{P}(A|C) + \mathbf{P}(B|C)$.

Задача 3.3. Пусть $\mathbf{P}(A) = 1/7$, $\mathbf{P}(B) = 4/21$. Верно ли, что $\mathbf{P}(A + B) \leqslant 1/3$. Ответ требуется обосновать.

Решение. Согласно формуле сложения вероятностей имеем

$$\mathbf{P}(A + B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB) \leqslant \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = \frac{1}{7} + \frac{4}{21} = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}.$$

Ответ. Верно.

Задача 3.4. Пусть H_1, H_2, H_3 — равновероятные гипотезы. Произошло событие $A = H_2 + H_3$. Образуют ли систему гипотез события $H_1 + H_2$ и H_3? Если да, то найдите их апостериорные вероятности.

Решение. Необходимо проверить, выполняются ли для событий $H_1 + H_2$ и H_3 свойства, которым должны удовлетворять гипотезы.

Проверим попарную несовместность этих событий:

$$(H_1 + H_2)H_3 = H_1H_3 + H_2H_3 = \varnothing,$$

так как H_1, H_2, H_3 — гипотезы, и поэтому они несовместны.

Проверим, образуют ли эти события полную группу:

$$(H_1 + H_2) + H_3 = H_1 + H_2 + H_3 = \Omega.$$

Таким образом, $(H_1 + H_2)$ и H_3 образуют полную группу несовместных событий и $\mathbf{P}(H_1 + H_2) \geqslant \mathbf{P}(H_1) > 0$, $\mathbf{P}(H_3) > 0$. Следовательно, эти события являются гипотезами.

Апостериорными вероятностями этих гипотез являются $\mathbf{P}(H_1 + H_2|A)$ и $\mathbf{P}(H_3|A)$. Найдем эти условные вероятности.

$$\mathbf{P}(H_1 + H_2|A) = \frac{\mathbf{P}((H_1 + H_2)A)}{\mathbf{P}(A)} = \\ = \frac{\mathbf{P}((H_1 + H_2)(H_2 + H_3))}{\mathbf{P}(H_2 + H_3)} = \frac{\mathbf{P}(H_2)}{\mathbf{P}(H_2 + H_3)}.$$

Аналогично получим

$$\mathbf{P}(H_3|A) = \frac{\mathbf{P}(H_3)}{\mathbf{P}(H_2 + H_3)}.$$

В силу равновероятности гипотез H_1, H_2, H_3

$$\mathbf{P}(H_1) = \mathbf{P}(H_2) = \mathbf{P}(H_3) = \frac{1}{3},$$

$$\mathbf{P}(H_2 + H_3) = \mathbf{P}(H_2) + \mathbf{P}(H_3) = \frac{2}{3}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(H_1 + H_2|A) = \mathbf{P}(H_3|A) = \frac{1/3}{2/3} = 0{,}5.$$

Ответ. События $H_1 + H_2$ и H_3 образуют систему гипотез, апостериорные вероятности этих гипотез равны: $\mathbf{P}(H_1 + H_2|A) = \mathbf{P}(H_3|A) = 0{,}5$.

Задача 3.5. Система состоит из двух элементов с надежностями p_1 и p_2 соответственно. Элементы соединены параллельно и выходят из строя независимо друг от друга. Работоспособность системы сохраняется, если работает хотя бы один элемент. Система работает. Найти вероятность того, что неисправен первый элемент.

Решение. Рассмотрим следующие случайные события:

$A = \{$первый элемент работает нормально$\}$,

$B = \{$второй элемент работает нормально$\}$,

$C = \{$система работает$\}$.

Согласно условию задачи $\mathbf{P}(A) = p_1$, $\mathbf{P}(B) = p_2$. Используя свойство противоположного события 11)P и формулу умножения вероятностей, получим вероятность события C:

$$\mathbf{P}(C) = 1 - \mathbf{P}(\overline{C}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A} \cdot \overline{B}) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2).$$

Требуется найти $\mathbf{P}(\overline{A}|C)$. Согласно определению условной вероятности случайного события

$$\mathbf{P}(\overline{A}|C) = \frac{\mathbf{P}(\overline{A}C)}{\mathbf{P}(C)} = \frac{\mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}(C|A)}{\mathbf{P}(C)} \quad \frac{(1-p_1)p_2}{1-(1-p_1)(1-p_2)}.$$

Ответ. Искомая вероятность равна $\dfrac{(1-p_1)p_2}{1-(1-p_1)(1-p_2)}$.

Задача 3.6. Некто нашел чужую пластиковую карточку банкомата. Найти вероятность того, что двух попыток, предоставляемых банкоматом, хватит для того, чтобы отгадать неизвестный ему четырехзначный код.

Решение. Рассмотрим событие

$A = \{$двух предоставленных попыток хватит, чтобы угадать код$\}$.

Это событие может быть представлено следующим образом:

$$A = A_1 + \overline{A}_1 A_2,$$

где $A_i = \{$код впервые угадан с i-й попытки$\}, i = 1, 2$. События A_1 и $\overline{A}_1$ — несовместны по определению противоположных событий. Множество элементарных событий, благоприятствующих событию $\overline{A}_1 A_2$, состоит из элементарных событий, одновременно благоприятствующих событиям $\overline{A}_1$ и A_2. Следовательно, это множество не пересекается с множеством элементарных событий, благоприятствующих событию A_1. Таким образом, события A_1 и $\overline{A}_1 A_2$ несовместны.

Для нахождения $\mathbf{P}(A)$ воспользуемся формулой сложения вероятностей для несовместных событий:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(\overline{A}_1 A_2).$$

Вероятность события A_1 находим, используя схему выбора с возвращением (см. задачу 2.4): $\mathbf{P}(A_1) = 1/10^4$.

По формуле умножения вероятностей

$$\mathbf{P}(\overline{A}_1 A_2) = \mathbf{P}(\overline{A}_1)\mathbf{P}(A_2|\overline{A}_1),$$

где $\quad \mathbf{P}(\overline{A}_1) = 1 - \mathbf{P}(A_1) = 1 - \dfrac{1}{10^4}, \quad \mathbf{P}(A_2|\overline{A}_1) = \dfrac{1}{10^4 - 1}.$

Число $n = 10^4 - 1$ есть количество всевозможных четырехзначных кодов, за исключением одного, проверенного при первой попытке. Таким образом,

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{10^4} + \left(1 - \frac{1}{10^4}\right)\frac{1}{10^4 - 1} = \frac{2}{10^4}.$$

Ответ. $\mathbf{P}(A) = 2/10^4$.

Задача 3.7. Средний процент невозвращения в срок кредита, выдаваемого банком, составляет 5%. Найти вероятность того, что при выдаче банком 100 кредитов проблемы с возвратом денег возникнут не менее, чем в двух случаях. Предполагается, что различные кредиты выдаются и возвращаются независимо друг от друга.

Решение. Воспользуемся схемой Бернулли. Это возможно, так как различные кредиты выдаются и возвращаются независимо друг от друга. Под опытом понимается получение кредита, который был выдан банком. В каждом опыте событие

$$A = \{\text{кредит не возвращается в срок}\}$$

происходит с вероятностью $p = 0{,}05$. Назовем наступление события A «*успехом*». Указанный опыт проводится $n = 100$ раз в одних и тех же условиях. Требуется определить вероятность события

$$B = \{\text{кредит не будет возвращен в срок хотя бы в двух случаях}\}.$$

В этой задаче

$$\overline{B} = \{\text{кредит не будет возвращен в срок менее, чем в двух случаях}\}.$$

Событие $\overline{B}$ может быть представлено в виде следующей суммы событий:

$$\overline{B} = A_{100}(0) + A_{100}(1),$$

где $\quad A_{100}(m) = \left\{\begin{matrix}\text{ровно в } m \text{ случаях из 100 кредит} \\ \text{не будет возвращен в срок}\end{matrix}\right\}, \quad m = \overline{0, 1}.$

События $A_{100}(0)$ и $A_{100}(1)$ несовместны. Воспользуемся формулой сложения вероятностей

$$\mathbf{P}(\overline{B}) = \mathbf{P}(A_{100}(0)) + \mathbf{P}(A_{100}(1)),$$

где вероятности событий $A_{100}(0)$ и $A_{100}(1)$ вычисляются по формуле Бернулли

$$\mathbf{P}(A_{100}(m)) = C_{100}^{m}(0{,}05)^{m}(0{,}95)^{100-m}, \quad m = \overline{0,\,1}. \qquad (3.1)$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}(\overline{B}) = C_{100}^{0}(0{,}05)^{0}(0{,}95)^{100} + C_{100}^{1}(0{,}05)^{1}(0{,}95)^{99} = (0{,}95)^{100} + 5\cdot(0{,}95)^{99}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(B) = 1 - \mathbf{P}(\overline{B}) = 1 - (0{,}95)^{100} - 5\cdot(0{,}95)^{99} \approx 0{,}96.$$

Ответ. $\mathbf{P}(B) \approx 0{,}96$.

Задача 3.8. В торговую фирму поступают телевизоры от трех фирм изготовителей в соотношении 2:5:3. Телевизоры, поступающие от первой фирмы, требуют ремонта в течение гарантийного срока в 15% случаев, от второй и третьей — соответственно в 8% и 6% случаев. Найти вероятность того, что проданный телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока.

Решение. в опыте, рассматриваемом в задаче, можно выделить два этапа. На первом этапе осуществляется продажа торговой фирмой телевизора, изготовленного в одной из трех фирм, упомянутых в условии задачи. Второй этап представляет собой эксплуатацию телевизора, в результате чего он либо ломается в течение гарантийного срока, либо нет.

Построим систему гипотез как возможных исходов первого этапа опыта:

$$H_i = \{\text{проданный телевизор был произведен } i\text{-й фирмой}\},\ i = \overline{1,\,3}.$$

Очевидно, что построенная система событий удовлетворяет требованиям, предъявляемым к гипотезам, так как эти события являются несовместными (телевизор не может быть изготовлен двумя фирмами одновременно), и никакие другие исходы первого этапа опыта невозможны (так как в продажу поступают телевизоры только указанных фирм).

Определим событие, вероятность которого требуется найти:

$$A = \{\text{проданный телевизор потребует гарантийного ремонта}\}.$$

Согласно условию задачи телевизоры поступают в продажу от трех фирм в пропорции 2:5:3. Обозначим через x количество телевизоров, приходящихся на одну долю в указанной пропорции. Тогда общее количество телевизоров, поступающих в продажу:

$$2x + 5x + 3x = 10x.$$

При этом количество телевизоров, поступивших от первой фирмы равно $2x$, следовательно, согласно классической формуле вычисления вероятностей:

$$\mathbf{P}(H_1) = \frac{2x}{10x} = \frac{1}{5}.$$

Аналогично найдем вероятности остальных гипотез:

$$\mathbf{P}(H_2) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbf{P}(H_3) = \frac{3}{10}.$$

Условные вероятности события A относительно каждой из гипотез заданы в условии задачи:

$$\mathbf{P}(A|H_1) = 0{,}15, \qquad \mathbf{P}(A|H_2) = 0{,}08, \qquad \mathbf{P}(A|H_3) = 0{,}06.$$

Воспользовавшись формулой полной вероятности, получаем

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A|H_i) = \frac{1}{5} \cdot 0{,}15 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}08 + \frac{3}{10} \cdot 0{,}06 = 0{,}088.$$

Ответ. $\mathbf{P}(A) = 0{,}088$.

Задача 3.9. После осмотра больного врач считает, что равновозможно одно из двух заболеваний C или D. Для уточнения диагноза больного направляют на анализ, исход которого дает положительную реакцию при заболевании C в 30 процентах случаев, а при заболевании D — в 20 процентах случаев. Анализ дал положительную реакцию. Какое заболевание становится более вероятным?

Решение. В данной задаче опыт, так же, как и в предыдущей задаче, может быть разбит на два этапа. На первом этапе врач ставит диагноз. Систему гипотез можно сформулировать следующим образом:

$$H_1 = \{\text{пациент имеет заболевание C}\},$$
$$H_2 = \{\text{пациент имеет заболевание D}\}.$$

Для ответа на поставленный в задаче вопрос нужно найти апостериорные вероятности гипотез. Априорные вероятности гипотез, согласно условию задачи, равны:

$$\mathbf{P}(H_1) = 0{,}5, \quad \mathbf{P}(H_2) = 0{,}5.$$

Рассмотрим событие

$$A = \{\text{анализ дал положительную реакцию}\}.$$

Для нахождения апостериорных вероятностей гипотез, т. е. $\mathbf{P}(H_1|A)$ и $\mathbf{P}(H_2|A)$, воспользуемся формулой Байеса. Для того чтобы воспользоваться формулой Байеса, необходимо найти условные вероятности события A относительно каждой из гипотез. Согласно условию задачи они равны соответственно:

$$\mathbf{P}(A|H_1) = 0{,}3, \qquad \mathbf{P}(A|H_2) = 0{,}2.$$

Воспользуемся формулой Байеса:

$$\mathbf{P}(H_1|A) = \frac{\mathbf{P}(H_1)\mathbf{P}(A|H_1)}{\sum\limits_{i=1}^{2} \mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A|H_i)} = \frac{0{,}15}{0{,}25} = 0{,}6,$$

$$\mathbf{P}(H_2|A) = \frac{\mathbf{P}(H_2)\mathbf{P}(A|H_2)}{\sum\limits_{i=1}^{2} \mathbf{P}(H_i)\mathbf{P}(A|H_i)} = \frac{0{,}1}{0{,}25} = 0{,}4.$$

Так как $\mathbf{P}(H_1|A) > \mathbf{P}(H_2|A)$, то заболевание С становится более вероятным.

Ответ. Более вероятно заболевание С.

§ 4. Задачи для самостоятельного решения

1. Пончик отправился в путешествие на воздушном шаре. Через каждые 10 минут полета у Пончика возникает желание подкрепиться, и он начинает в случайном порядке просматривать свои карманы до тех пор, пока не найдет съестное. Найти вероятность того, что:

а) поиск k-го пряника начнется с пустого кармана, если у Пончика 17 карманов, в которых изначально лежало по одному прянику;

б) Пончик первые два раза будет подкрепляться пряниками, если в двух из имеющихся у него 17 карманов лежит по одному прянику, а в 15 — по одной конфете;

в) Пончик первые два раза будет подкрепляться пряниками, если у него 10 карманов, в одном из которых — два пряника, а в остальных — по две конфеты.

2. Владелец пластиковой карточки банкомата забыл последние три цифры кода и набрал их наугад. Какова вероятность набора верного номера, если известно, что все эти три цифры различны?

3. Из десяти вариантов контрольной работы, написанных на отдельных карточках, наугад выбирают восемь и раздают восьми студентам, сидящим в одном ряду. Найти вероятность следующих событий:

$A = \{$варианты 1 и 2 останутся неиспользованными$\}$,
$B = \{$варианты 1 и 2 достанутся рядом сидящим студентам$\}$,
$C = \left\{\begin{matrix}\text{номера распределенных вариантов можно расположить} \\ \text{в порядке возрастания без пропусков}\end{matrix}\right\}$.

4. Полная колода карт (52 листа) делится наугад на две равные части по 26 карт. Найти вероятность следующих событий:
$A = \{$в каждой пачке по два туза$\}$,
$B = \{$все тузы в одной пачке$\}$,
$C = \{$в одной пачке будет один туз, а в другой — три$\}$.

5. В предположении, что день рождения любого человека равновероятен в любой день года, найти вероятность того, что все люди в компании из r человек родились в различные дни. Подсчитать эту вероятность для $r = 23$.

6. Из шести букв разрезной азбуки составлено слово АНАНАС. Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получится слово АНАНАС.

7. Компания занимается организацией отдыха для любителей рыбной ловли. На озере, где находится туристическая база компании, оборудовано для рыбной ловли 30 мест. Набрана группа из 5 отдыхающих, которым, независимо друг от друга, предоставлено право выбора места рыбной ловли. В предположении, что все места одинаково привлекательны для любого отдыхающего, вычислить вероятность того, что все отдыхающие выберут различные места.

8. Из цифр 1, 2, 3 наугад составляется шестизначное число. Найти вероятность того, что в этом числе цифра 1 будет встречаться один раз, цифра 2 — два раза, цифра 3 — три раза.

9. Из цифр 1, 2, 3 наугад составляется шестизначное число. Найти вероятность того, что получится четное число, содержащее всего одну цифру 2.

10. Рассмотрим карточную игру, когда колода из 32 карт (без шестерок) раздается трем игрокам, получающим по 10 карт, а 2 карты откладываются в сторону. Какова вероятность того, что отложенные в сторону карты окажутся тузами?

11. В гостинице имеется шесть одноместных номеров. На эти номера имеется 10 претендентов: 6 мужчин и 4 женщины. Гостиница следует правилу FIFO: пришедшие раньше облуживаются раньше. Все претенденты пребывают в гостиницу в случайном порядке. Какова вероятность того, что номера получат:
а) все шесть претендентов мужского пола;
б) четверо мужчин и две женщины;
в) по крайней мере одна из четырех женщин?

12*. *Парадокс де Мере.* Подбрасывают три игральные кости и подсчитывают сумму выпавших очков. Де Мере заметил, что появление одиннадцати очков возможно при шести комбинациях (6-4-1, 6-3-2, 5-5-1, 5-4-2, 5-3-3, 4-4-3) и появление двенадцати очков возможно при шести комбинациях (6-5-1, 6-4-2, 6-3-3, 5-5-2, 5-4-3, 4-4-4). Объяснить парадоксальность ситуации, которая состоит в том, что вероятности появления в сумме 11 и 12 очков не равны.

13. Восемнадцать команд, участвующих в турнире, по жребию разбиваются на две подгруппы по девять команд в каждой. Найти вероятность того, что

а) все шесть лидирующих команд окажутся в одной подгруппе;

б) шесть лидирующих команд распределятся по три в разные группы.

14. При проведении фуршета на стол поставили пять бокалов шампанского, три бокала белого вина и два бокала красного вина. К столу подошли семь человек и взяли по одному бокалу. Найти вероятность того, что на столе осталось по одному бокалу каждого напитка. (Будем предполагать, что для каждого из гостей все напитки одинаково привлекательны.)

15. Каждый из 50 штатов представлен в сенате США двумя сенаторами. Предстоит выбрать некоторый комитет из 50 сенаторов. Найти вероятности следующих событий:

а) штат Айова будет представлен в комитете;

б) все штаты будут представлены в комитете.

(Будем предполагать, что все сенаторы имеют равные шансы быть избранными в этот комитет.)

16*. В городе проживает $n+1$ человек. Один из них, узнав новость, сообщает ее другому, тот — третьему и т. д., причем каждый человек передает новость наугад выбранному жителю города, за исключением того, от кого он ее услышал. Найти вероятность того, что новость будет передана r раз без возвращения к человеку, который узнал ее первым.

17. Для рекламы своей продукции производитель решил снабдить специальными купонами 10 000 изделий из произведенных 500 000 изделий. Покупатель, отославший в адрес компании 3 купона, получает 1 дополнительный экземпляр продукции, 4 купона — 2 дополнительных экземпляра, более четырех купонов — 3 дополнительных экземпляра. Покупатель одновременно приобрел пять экземпляров продукции компании и решил участвовать в предложенной рекламной акции. Найти вероятность того, что он получит дополнительно не менее двух экземпляров продукции.

18. При формировании группы для проведения специального социологического опроса необходимо отобрать 10 человек, удовлетворяющих определенным требованиям. Вероятность того, что наугад выбранный человек удовлетворяет этим требованиям, равна 0,2. Найти вероятность того, что при отборе придется тестировать ровно 20 человек.

19. Игральная кость подброшена дважды. Зависимы ли случайные события $A = \{$число очков при первом бросании равно 5$\}$ и $B = \{$сумма очков при двух бросаниях равна 9$\}$? Ответ обосновать.

20. Пусть $\mathbf{P}(A) = 1/2$, $\mathbf{P}(B) = 1/3$. Верно ли, что $\mathbf{P}(AB) \leqslant 3/8$? Ответ обосновать.

21. События A и B независимы, $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 1/4$. Найти $\mathbf{P}(A + \overline{B})$.

22. Вакансия, предлагаемая безработному биржей труда, удовлетворяет его с вероятностью 0,01. Сколько нужно обслужить безработных, чтобы вероятность того, что хотя бы один из них найдет работу, была бы не ниже 0,95?

23. Из 25 вопросов, включенных в программу экзамена, студент подготовил 20. На экзамене студент наугад выбирает 5 вопросов из 25. Для сдачи экзамена достаточно ответить правильно хотя бы на 3 вопроса. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен.

24. Некоторая система состоит из шести элементов, отказы которых независимы (рис. 4.1). Вероятности безотказной работы (надежности) элементов равны соответственно

$$p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 1/2,$$
$$p_1 = 2/3, \ p_6 = 3/4.$$

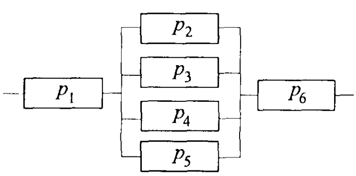

Рис. 4.1

Найти вероятность отказа ровно двух элементов в параллельном соединении при условии, что система работает нормально.

25. Отдел надзора отделения центрального банка курирует деятельность ряда коммерческих банков. При сдаче квартальной отчетности серьезные финансовые нарушения обнаруживаются в среднем у 5% банков. На проверку выбрано три банка. Найти наиболее вероятное число банков с серьезными нарушениями финансовой отчетности среди выбранных.

26. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. На семейном совете постановили, что дети в семье будут рождаться до появления второго мальчика. Найти вероятность того, что в семье будет четверо детей.

27. Отдел технического контроля предприятия бракует каждую партию из 100 деталей, если из 5 деталей, наугад выбранных из партии, хотя бы одна окажется бракованной. Партия содержит 5% брака. Найти вероятность для одной партии деталей быть забракованной. (Решить задачу двумя способами: используя формулу умножения вероятностей и используя только классическую формулу вычисления вероятностей.)

28. Пусть $\mathbf{P}(A) = 1/2$. Найдется ли такое событие B, чтобы $\mathbf{P}(AB) > 1/2$? Ответ обосновать.

29. Пусть $\mathbf{P}(A) = 1/2$. Можно ли найти такое событие B, чтобы $\mathbf{P}(A|B) > \mathbf{P}(A)$? Ответ обосновать.

30. Пусть $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 1/2$. Верно ли, что $\mathbf{P}(A|B) \geqslant \mathbf{P}(B|A)$? Ответ обосновать.

31. Пусть события A и B — независимы и $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(B) = 1/4$. Найти $\mathbf{P}(A + B)$.

32. Пусть $\mathbf{P}(A) = 1/2$, $\mathbf{P}(B) = 2/3$. Верно ли, что $\mathbf{P}(A + B) \geqslant \geqslant 1/6$? Ответ обосновать.

33. Пусть $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 1/4$. Верно ли, что $\mathbf{P}(A + B)$ будет больше в том случае, когда A и B независимы, чем когда A и B несовместны? Ответ обосновать.

34. Пусть $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = 2/3$. Чему равна сумма $\mathbf{P}(\overline{A + B}) + \mathbf{P}(\overline{A} + \overline{B})$?

35. События A и B несовместны, причем $\mathbf{P}(A) > 0$. Совместны или несовместны события A и $\overline{B}$? Ответ обосновать.

36. Монета подбрасывается до первого выпадения герба. Чему равно наиболее вероятное число подбрасываний?

37. Из колоды карт (36 карт) подряд вытаскиваются две карты. Рассматриваются события: $A = \{$первая карта имеет пиковую масть$\}$, $B = \{$обе карты красного цвета$\}$. Зависимы ли события A и B? Ответ обосновать.

38. В ящике имеется две партии по 100 деталей, в каждой из которых по 10 бракованных деталей. Из ящика извлечена одна деталь. Рассмотрим следующие события: $A = \{$извлеченная деталь — из первой партии$\}$, $B = \{$извлеченная деталь — бракованная$\}$. Зависимы ли события A и B? Ответ обосновать.

39. В ящике имеются две партии по 100 деталей. В первой партии — 10 бракованных деталей, во второй — 20 бракованных. Из ящика извлечена одна деталь. Зависимы ли случайные события

$A=\{$извлеченная деталь — из первой партии$\}$ и $B=\{$извлеченная деталь — бракованная$\}$? Ответ обосновать.

40. Схема электрической цепи представлена на рис. 4.2, где p_i, $i=\overline{1,3}$, является вероятностью безотказной работы (надежностью) i-го элемента. Пусть надежности элементов схемы равны

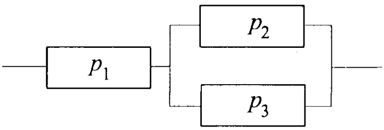

Рис. 4.2

$$p_1=0{,}8,\ p_2=0{,}7,\ p_3=0{,}6.$$

Элементы отказывают независимо друг от друга. Найти вероятность безотказной работы (надежность) схемы.

41. Три независимых эксперта равной квалификации делают правильный прогноз стоимости акции некорой компании с равной вероятностью p. По статистике вероятность того, что хотя бы один из экспертов ошибается, равна 0,271. Найти вероятность p.

42. В шкафу находится 9 однотипных новых приборов. Для проведения опыта берут наугад три прибора и после работы возвращают их в шкаф. Внешне новые и использованные приборы не отличаются. Найти вероятность того, что после проведения трех опытов в шкафу не останется новых приборов.

43. Зададим надежности работы элементов электрической цепи: $p_1=0{,}8$, $p_2=0{,}7$, $p_3=0{,}6$, $p_4=0{,}5$, $p_5=0{,}4$, $p_6=0{,}3$. Элементы отказывают независимо друг от друга.

а) Найти надежность схемы, приведенной на рис. 4.3;

б) Найти надежность схемы, приведенной на рис. 4.4.

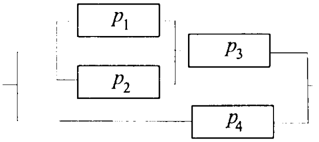

Рис. 4.3

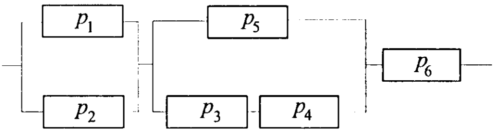

Рис. 4.4

44. Вероятность превысить личный рекорд с одной попытки для данного спортсмена равна p. Найти вероятность того, что на соревнованиях спортсмен превысит свой личный рекорд, если он может использовать две попытки, причем, превысив личный рекорд с первой попытки, спортсмен вторую попытку не использует.

45. В группе учатся 10 студентов. Для решения задачи у доски любого из них могут вызвать с равной вероятностью один раз в течение занятия. В группе три отличника. Найти вероятность того, что вторую задачу к доске пойдет решать отличник, при условии, что первую задачу тоже решал отличник.

46*. По данным переписи населения Англии и Уэльса (1891 г.) установлено, что темноглазые отцы и темноглазые сыновья (событие AB) составили 5% обследованных пар, темноглазые отцы и светлоглазые сыновья (событие $A\overline{B}$) — 7,9% пар, светлоглазые отцы и темноглазые сыновья (событие $\overline{A}B$) — 8,9% пар, светлоглазые отцы и светлоглазые сыновья (событие $\overline{AB}$) — 78,2% пар. Найти связь между цветом глаз отца и сына, то есть найти $\mathbf{P}(B|A)$, $\mathbf{P}(\overline{B}|A)$, $\mathbf{P}(B|\overline{A})$, $\mathbf{P}(\overline{B}|\overline{A})$.

47. Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у которого раньше выпадет «герб». Определить вероятности выигрыша для каждого из игроков.

48*. После экзамена на столе преподавателя осталось n зачеток тех студентов, которые не сдали экзамен. Какова вероятность того, что, наугад забирая зачетки, хотя бы один студент возьмет свою зачетку?

49*. *Задача Банаха.* Для прикуривания Банах пользовался двумя коробками спичек, доставая наугад ту или иную коробку. Через некоторое время он обнаружил, что одна коробка пуста. Найти вероятность того, что во второй коробке осталось k спичек, если изначально в каждой коробке было по n спичек?

50. В кармане лежат 5 монет достоинством в 50 коп., 4 монеты по 10 коп. и 1 монета — 5 коп. Наугад берут 3 монеты. Какова вероятность того, что в сумме они составляют не более одного рубля?

51. Фирма рассылает рекламные проспекты восьми потенциальным партнерам. В результате такой рассылки в среднем у каждого пятого потенциального партнера возникает интерес к фирме. Найти вероятность того, что это произойдет: *а*) в трех случаях; *б*) не более чем в трех.

52. Лицензия отбирается у любого торгового предприятия, как только торговая инспекция в третий раз обнаружит серьезное нарушение правил торговли. Найти вероятность того, что лицензия будет отобрана после пятой проверки. Известно, что вероятность обнаружения нарушения при одной проверке равна 0,2 и не зависит от результатов предыдущих проверок.

53. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Найти вероятность того, что в семье, где четверо детей, не менее двух девочек.

54. В микрорайоне девять машин технической службы. Для бесперебойной работы необходимо, чтобы не меньше восьми машин были в исправном состоянии. Считая вероятность исправного состояния для всех машин одинаковой и равной $0{,}9$, найти вероятность бесперебойной работы технической службы в микрорайоне.

55. В среднем каждый десятый договор страховой компании завершается выплатой по страховому случаю. Компания заключила пять договоров. Найти вероятность того, что страховой случай наступит: *а*) один раз; *б*) хотя бы один раз.

56. Подбросили две игральные кости. Какие из представленных ниже наборов событий образуют систему гипотез?

1. $H_1 = \{$на 1-й кости выпало одно очко$\}, \ldots,$
   $H_6 = \{$на 1-й кости выпало шесть очков$\}$.
2. $H_1 = \{$на обеих костях выпало по одному очку$\}, \ldots,$
   $H_6 = \{$на обеих костях выпало по шесть очков$\}$.
3. $H_1 = \{$на 1-й кости выпало четное число очков$\}$,
   $H_2 = \{$на 2-й кости выпало нечетное число очков$\}$.
4. $H_1 = \{$на 2-й кости выпало четное число очков$\}$,
   $H_2 = \{$на 2-й кости выпало нечетное число очков$\}$.

57. Из 30 билетов, включенных в программу экзамена, студент знает 5. Когда ему выгоднее сдавать экзамен первым или вторым (с точки зрения увеличения вероятности сдачи экзамена)?

58. Две компании X и Y производят однотипную продукцию и конкурируют на рынке сбыта. Перед каждой из них стоит задача модификации производства. Существует два возможных пути изменения технологии: A и B. Вероятность того, что компания X выберет путь A, равна $0{,}4$. Для компании Y эта вероятность равна $0{,}7$. Компании выбирают пути изменения технологии независимо друг от друга. В табл. приведены оцененные экспертами шансы на победу в конкурентной борьбе для компании X в соответствии с выбором компаниями путей изменения технологии. Найти вероятность победы компании X в конкурентной борьбе.

Таблица 4.1

$X\backslash Y$	A	B
A	5:3	2:1
B	1:2	1:2

59. Надежности блоков системы, представленной на рис. 4.5, равны соответственно

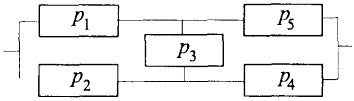

Рис. 4.5

$$p_1 = 0{,}7,\ \ p_2 = 0{,}7,\ \ p_3 = 0{,}6,$$

$$p_4 = 0{,}5,\ \ p_5 = 0{,}5.$$

Элементы отказывают независимо друг от друга. Найти вероятность безотказной работы заданной схемы соединения блоков.

60. Подбрасываются две игральные кости. Образуют ли систему гипотез следующие события: $A=\{$на первой кости выпало одно очко$\}$, $B=\{$сумма очков на двух костях равна 9$\}$?

61. Пусть события $H_1, \ldots, H_{10}$ образуют систему равновероятных гипотез. Найти $\mathbf{P}(H_1 + H_{10})$.

62. Может ли априорная вероятность гипотезы быть больше соответствующей апостериорной? Ответ обосновать.

63*. Два независимых претендента Z и L на пост губернатора края завершают предвыборную кампанию. Каждый из них, независимо от действий другого, может успеть выступить только в одном из городов P и M. Эксперты-политологи считают, что выступления претендентов обязательно состоятся, и оценивают вероятность того, что L предпочтет город P, как равную 2/3. Вероятности выбора городов P и M другим претендентом одинаковы. В табл. 4.2 показано как, по мнению экспертов, распределяются шансы L по отношению к Z одержать победу на выборах в зависимости от города выступления. Найти вероятность того, что победу одержит L.

Таблица 4.2

$L \backslash Z$	P	M
P	3:1	2:1
M	1:1	1:2

64. В ящике лежит 20 теннисных мячей, в том числе 12 новых и 8 игранных. Из ящика извлекают наугад два мяча для игры. После игры мячи возвращают обратно в ящик. После этого из ящика вынимают еще два мяча для следующей игры. Оба мяча оказались неигранными. Найти вероятность того, что первый раз тоже играли новыми мячами.

65. За истекший период в торговую фирму поступали телевизоры от трех фирм-поставщиков в следующей пропорции: 1:3:6. Каждая фирма дает на свои телевизоры гарантию, идентифицируя их по серийному номеру и дате поставки. Телевизоры первой фирмы-поставщика требуют ремонта в течение гарантийного срока в 15% случаев, второй и третьей — соответственно в 10% и 7% случаев. Проданный телевизор требует гарантийного ремонта, однако потеряны документы, идентифицирующие фирму-поставщика. В какую фирму имеет смысл обратиться в первую очередь?

66. Можно ли для нахождения вероятности события, связанного с опытом, сводящимся к схеме случаев, использовать формулу полной вероятности? Ответ обосновать.

67. Может ли сумма всех априорных вероятностей гипотез оказаться больше суммы всех апостериорных вероятностей этих гипотез? Ответ обосновать.

68. Могут ли апостериорные вероятности всех гипотез, кроме одной, оказаться нулевыми, если априорные вероятности этих гипотез одинаковы? Ответ обосновать.

69. Пусть события H_1, H_2, H_3 образуют систему равновероятных гипотез. Произошло событие H_1. Вычислить апостериорные вероятности всех гипотез.

70. Вывести из формулы *полной вероятности классическую* формулу вычисления вероятности.

71. Завод изготавливает изделия, каждое из которых с вероятностью p имеет дефект. в цехе изделия осматриваются с равными вероятностями одним из двух контролеров. Первый обнаруживает имеющиеся дефекты с вероятностью p_1, а второй — с вероятностью p_2. Известно, что одно из изделий забраковано. Найти вероятность того, что оно забраковано: *а*) первым контролером; *б*) вторым контролером.

72. Для подготовки к экзамену студенту предложено 20 вопросов. Билет содержит два вопроса. Комплектование билетов вопросами осуществляется случайным образом. Студент подготовил 15 вопросов. Найти вероятность того, что он сдаст экзамен, если для этого достаточно ответить правильно на два вопроса своего билета или на один вопрос своего билета и один вопрос по выбору преподавателя.

73. На предприятии работают 10 рабочих шестого разряда, 15 рабочих пятого разряда и 5 рабочих четвертого разряда. Вероятность того, что изделие, изготовленное рабочим соответствующего разряда, будет одобрено ОТК равна соответственно 0,95, 0,9 и 0,8. Найти вероятность того, что изделие, проверенное ОТК, будет одобрено, при условии, что производительность всех рабочих одинакова.

74. Представители двух фракций Государственной Думы (R и L) претендуют на пост председателя вновь создаваемого комитета. Согласно утвержденному регламенту, выборы должны проводиться альтернативным голосованием по двум кандидатурам (по одной от каждой фракции). У каждой фракции есть по две кандидатуры, обладающие равными шансами быть выдвинутыми в качестве претендента на этот пост. Эксперты оценили шансы фракции R по отношению к L получить пост председателя комитета в зависимости от предложенных кандидатур L_i, R_i, $i = \overline{1, 2}$ (см. табл. 4.3). Найти вероятность того, что победу одержит фракция L.

Таблица 4.3

$R\backslash L$	L_1	L_2
R_1	1:3	3:2
R_2	2:1	1:2

75. На склад поступила однотипная продукция с трех фабрик. Объемы поставок относятся соответственно как 1:2:7. Известно, что нестандартных изделий среди продукции первой фабрики — 3%, второй — 2%, третьей — 1%. Найти вероятности следующих событий: *а*) взятое наугад со склада изделие окажется нестандартным;

б) взятое наугад со склада изделие произведено первой фабрикой, если известно, что оно оказалось нестандартным.

76. Имеется ящик, в котором лежат 20 коробок по 10 карандашей. При вскрытии ящика 4 коробки уронили, и грифели карандашей в них сломались. Однако все 20 коробок были сданы на склад, откуда затем взяли 2 коробки и раздали карандаши ученикам. Найти вероятность того, что доставшийся ученику карандаш имеет сломаный грифель.

77. Две машинистки печатали рукопись, посменно заменяя друг друга. Первая в конечном итоге напечатала 1/3 всей рукописи, а вторая — остальное. Первая машинистка делает ошибки с вероятностью 0,15, а вторая — с вероятностью 0,1. При проверке на 13-й странице обнаружена ошибка. Найти вероятность того, что ошиблась первая машинистка.

78. Пассажир может обратиться за получением билета в одну из трех касс. Вероятности обращения в каждую кассу зависят от их местоположения и равны соответственно $p_1 = 1/3$, $p_2 = 1/6$, $p_3 = 1/2$. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира билеты, имевшиеся в кассе, будут распроданы, для первой кассы равна $P_1 = 3/4$, для второй кассы — $P_2 = 1/2$, для третьей кассы — $P_3 = 2/3$. Пассажир направился в одну из касс и приобрел билет. Найти вероятность того, что это была первая касса.

79. На экзамен пришли 10 студентов. Трое из них подготовлены отлично, четверо — хорошо, двое — удовлетворительно, один — плохо. В экзаменационных билетах имеется 20 вопросов. Отлично подготовленный студент может ответить на все 20 вопросов, хорошо подготовленный — на 16, удовлетворительно — на 10, плохо — на 5. Студент, сдавший экзамен, ответил на все три заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент подготовлен: *а*) отлично; *б*) плохо.

80. Среди пациентов туберкулезного диспансера 15% принадлежат к первой категории больных, 66% — ко второй и 19% — к третьей. Вероятности возникновения заболевания, в зависимости от категории больных, равны соответственно 0,12, 0,09, 0,2. Найти:

а) вероятность возникновения заболевания у наугад выбранного пациента диспансера;

б) вероятность принадлежности к третьей категории больных пациента диспансера, у которого обнаружено заболевание.

81. Два независимых претендента Z и L на пост губернатора края завершают предвыборную компанию. Каждый из них, независимо от действий другого, может успеть выступить только в одном из городов: P или M. Эксперты-политологи считают, что выступления претендентов обязательно состоятся, и оценивают вероятность того, что L предпочтет город P как $2/3$. Вероятности выбора городов P и M другим претендентом одинаковы.

Таблица 4.4

$L\backslash Z$	P	M
P	4:3	3:1
M	1:1	1:3

В табл. 4.4 показано, как, по мнению экспертов, распределяются шансы L по отношению к Z одержать победу на выборах в зависимости от города выступления. Найти вероятность того, что оба претендента выступили в городе P, если известно, что победу одержал Z.

82. В урне находятся 4 белых и 6 черных шаров. Из нее три раза наугад вынимают по одному шару. Требуется найти вероятность того, что все три вынутых шара окажутся белыми (событие A), при выполнении двух разных условий:

а) извлеченные из урны шары обратно не возвращаются;

б) после каждого извлечения шар возвращается обратно.

83. Три радиостанции, независимо друг от друга, передают самолету один и тот же сигнал. Вероятности того, что самолетом будут приняты эти сигналы, соответственно равны: $0,9$, $0,8$, $0,75$. Найти вероятность того, что самолет примет посылаемый ему сигнал.

84. Пусть имеется пять урн. В двух из них лежит по одному белому и трем черным шарам, а в трех урнах — по два белых и два черных шара. Наугад выбирается некоторая урна и из нее вынимается шар. Найти вероятность того, что шар окажется белым.

85. Известно, что в некоторой партии, состоящей из 100 деталей, имеется 5 бракованных. Для проверки качества этой партии выбирают наугад 10 деталей. Найти вероятность того, что партия будет забракована, если для этого достаточно, чтобы не менее двух деталей из выбранных оказались бракованными.

86. Игральная кость подбрасывается до тех пор, пока не выпадет 6 очков. Найти вероятность того, что кость придется подбрасывать не менее 3 раз.

ГЛАВА II

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§ 5. Основные понятия

5.1. Функция распределения. Пусть на пространстве элементарных событий Ω определена σ-алгебра $\mathcal{F}$.

Определение 5.1. *Случайной величиной* (СВ) $X(\omega)$ называется функция элементарного события ω с областью определения Ω и областью значений $\mathbb{R}^1$ такая, что событие $\{\omega : X(\omega) \leqslant x\}$ принадлежит σ-алгебре $\mathcal{F}$ при любом действительном $x \in \mathbb{R}^1$. Значения x функции $X(\omega)$ называются *реализациями* СВ $X(\omega)$.

Случайные величины будем обозначать прописными (большими) латинскими буквами X, Y, Z, а их возможные значения (реализации) — соответствующими строчными (малыми) буквами x, y, z.

Определение 5.2. *Законом распределения* СВ называется любое правило (таблица, функция), позволяющее находить вероятности всех возможных событий, связанных с СВ.

Рассмотрим вероятность $\mathbf{P}\{\omega : X(\omega) \leqslant x\}$ для различных $x \in \mathbb{R}^1$.

Определение 5.3. Функция

$$F_X(x) \triangleq \mathbf{P}\{\omega : X(\omega) \leqslant x\},$$

определенная для всех $x \in \mathbb{R}^1$, называется *функцией распределения* СВ $X(\omega)$.

Данная вероятность $F_X(x)$ определена, поскольку рассматриваемые события принадлежат классу $\mathcal{F}$ (см. определение 1.13). Далее для простоты записи мы будем обозначать $X \triangleq X(\omega)$, $\{X \leqslant x\} \triangleq \{\omega : X(\omega) \leqslant x\}$, $F(x) \triangleq F_X(x) \triangleq \mathbf{P}\{X \leqslant x\}$.

Замечание 5.1. Функция распределения является одной из форм закона распределения для СВ всех типов и однозначно определяет СВ. Далее вместо фразы «СВ, имеющая функцию распределения $F(x)$» будем говорить для краткости: «СВ с *распределением* $F(x)$».

Свойства $F(x)$

1) $F(x)$ определена для всех $x \in \mathbb{R}^1$ по определению 5.3.

2) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ для всех $x \in \mathbb{R}^1$. Так как $F(x)$ — вероятность, то данное свойство следует из свойства 5)P и аксиомы **A1**.

3) $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$. Пусть $B_n \triangleq \{X \leqslant -n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ Очевидно, что $\{X \leqslant -\infty\} = \prod\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$. Поэтому по аксиоме **A4**: $F(-\infty) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(B_n) = 0$. Пусть теперь $A_n \triangleq \{X \leqslant n\}$ и $B_n \triangleq \Omega \backslash A_n$, где $n = 1, 2, \ldots$ Тогда B_n удовлетворяет аксиоме **A4**, и поэтому по аксиоме **A3** получаем $F(+\infty) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) = 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(B_n) = 1$.

4) $F(x_2) - F(x_1) = \mathbf{P}\{x_1 < X \leqslant x_2\}$, если $x_2 > x_1$. Поскольку

$$\{X \leqslant x_2\} = \{X \leqslant x_1\} + \{x_1 < X \leqslant x_2\} \text{ и } \{X \leqslant x_1\}\{x_1 < X \leqslant x_2\} = \varnothing,$$

то по аксиоме **A3**: $F(x_2) \triangleq \mathbf{P}\{X \leqslant x_2\} = F(x_1) + \mathbf{P}\{x_1 < X \leqslant x_2\}$. Отсюда и следует утверждение.

5) $F(x_2) \geqslant F(x_1)$ для $x_2 > x_1$, т. е. $F(x)$ не убывает. Это следует из свойства 4)$F(x)$: $F(x_2) = F(x_1) + \mathbf{P}\{x_1 < X \leqslant x_2\} \geqslant F(x_1)$, так как $\mathbf{P}\{x_1 < X \leqslant x_2\} \geqslant 0$ по аксиоме **A1**.

6) $F(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} F(x+\varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$, т. е. $F(x)$ — непрерывная справа функция. Это свойство мотжно доказать, основываясь на аксиоме **A4**.

7) Если $F(x)$ непрерывна, то

$$F(x_2) - F(x_1) = \mathbf{P}\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\}.$$

По аксиоме **A4** имеем

$$\mathbf{P}\{X = x\} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \mathbf{P}\{x - \varepsilon < X \leqslant x\} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \Big(F_X(x) - F_X(x-\varepsilon)\Big) = 0.$$

Таким образом по свойству 4) $F(x)$:

$$F(x_2) - F(x_1) = \mathbf{P}\{x_1 < X \leqslant x_2\} + \mathbf{P}\{X = x\} = \mathbf{P}\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\}.$$

Отметим, что любая функция $G(x)$, обладающая свойствами 3) $F(x)$, 5) $F(x)$ и 6) $F(x)$ является функцией распределения некоторой случайной величины.

5.2. Дискретные случайные величины.

Определение 5.4. СВ называется *дискретной*, если множество ее возможных значений конечно или счетно.

Пример 5.1. Пусть опыт G состоит в подбрасывании двух монет, а элементарным событием ω является положение упавших монет. Тогда число выпавших «гербов» есть СВ $X(\omega)$ с конечным числом возможных значений $\{0,1,2\}$, т.е. является дискретной случайной величиной.

Определение 5.5. Простейшей формой закона распределения дискретной СВ с конечным множеством значений является *ряд распределения* $p_k \triangleq \mathbf{P}\{X = x_k\}$, $k = \overline{0,n}$, который задается аналитически или таблицей (см. табл. 5.1).

Таблица 5.1

X	x_0	$\ldots$	x_n
$\mathbf{P}$	p_0	$\ldots$	p_n

Замечание 5.2. В данной таблице в верхней строке расположены по возрастанию все возможные различные значения $x_0, \ldots, x_n$ дискретной СВ X, а в нижней — соответствующие им вероятности $p_0, \ldots, p_n$. Имеет место равенство $p_0 + \ldots + p_n = 1$, так как события $\{X = x_0\}, \ldots, \{X = x_n\}$ несовместны и образуют полную группу. Это равенство называют *условием нормировки*. Графическое изображение ряда распределения называют *многоугольником распределения* (см. рис. 5.1).

Замечание 5.3. Распределение вероятностей аналогично понятию «распределение единичной массы вдоль бесконечного стержня Ox», используемому в механике (этим, в частности, можно объяснить использование в теории вероятностей термина «распределение»). Для дискретного распределения возможна следующая механическая интерпретация: на оси Ox распределена единичная масса так, что массы $p_0, \ldots, p_n$ сосредоточены в отдельных точках $x_0, \ldots, x_n$ соответственно.

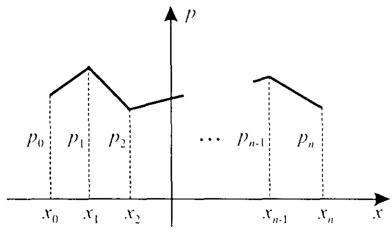

Рис. 5.1

Определение 5.6. *Единичной ступенчатой функцией* или *функцией Хевисайда* называется функция вида (рис. 5.2).

$$l(x) \triangleq \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Для дискретной СВ с конечным множеством значений, используя ряд распределения и $l(x)$, можно построить функцию распределения:

$$F(x) = p_0 l(x - x_0) + \ldots + p_n l(x - x_n).$$

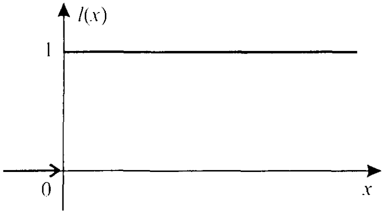

Рис. 5.2

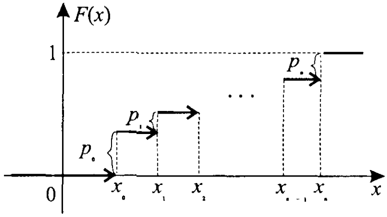

Рис. 5.3

Функция распределения дискретной СВ является ступенчатой (рис. 5.3), причем в точках разрыва $F(x)$ величины скачков равны вероятностям $p_0, \ldots, p_n$ соответствующих реализаций $x_0, \ldots, x_n$ СВ X.

5.3. Непрерывные случайные величины.

Определение 5.7. СВ X с непрерывной функцией распределения $F_X(x)$ называется *непрерывной.*

Определение 5.8. *Плотностью распределения* (*плотностью вероятности*) СВ X называется неотрицательная кусочно-непрерывная функция $f_X(x)$, для которой при любом $x \in \mathbb{R}^1$ выполняется соотношение

$$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt.$$

Для простоты дальнейших обозначений будем писать $f(x) \triangleq f_X(x)$.

Определение 5.9. СВ, у которой существует плотность вероятности, называется *абсолютно непрерывной.*

Замечание 5.4. Кроме абсолютно непрерывных СВ существуют непрерывные СВ, называемые *сингулярными*, которые не имеют плотности вероятности. В дальнейшем такие СВ не рассматриваются, а под непрерывными СВ будем подразумевать абсолютно непрерывные СВ. Плотность вероятности является одной из форм закона распределения для непрерывных СВ.

Пример 5.2. Пусть СВ X непрерывна. Тогда $\mathbf{P}\{X = x\} = 0$ для произвольного фиксированного $x \in \mathbb{R}^1$. Действительно, при доказательстве свойства 7) $F(x)$ было показано, что по аксиоме **A4**:

$$\mathbf{P}\{X = x\} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \mathbf{P}\{x - \varepsilon < X \leqslant x\} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon > 0}} \Big(F_X(x) - F_X(x - \varepsilon)\Big) = 0.$$

Таким образом, для непрерывной СВ вероятность того, что она примет в опыте некоторое наперед заданное значение, равна 0.

Свойства $f(x)$

1) $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^1$, т. е. выполняется *условие неотрицательности плотности.* Это свойство следует из определения 5.8.

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$, т.е. выполняется *условие нормировки плотности.* Поскольку $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$, то согласно свойству 3) $F(x)$ получаем $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = F(\infty) = 1$.

3) $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \mathbf{P}\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\}$. По свойству 4) $F(x)$ и согласно примеру 5.2 имеем

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{x_2} f(x)\,dx - \int\limits_{-\infty}^{x_1} f(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1) = \mathbf{P}\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\}.$$

4) $F'(x) = f(x)$ в точках непрерывности плотности $f(x)$. Это свойство можно получить из определения 5.8, используя правило дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом.

5) Рассмотрим СВ $Y \triangleq \varphi(X)$, где $\varphi(x)$ — гладкая строго возрастающая функция скалярного аргумента x, а X — непрерывная СВ с плотностью $f_X(x)$. Тогда плотность распределения СВ Y имеет вид $f_Y(y) = f_X(\psi(y))\psi'(y)$, где $\psi(y) \triangleq \varphi^{-1}(y)$ — обратная по отношению к $\varphi(x)$ функция. Действительно, по определению 5.3 имеем

$$F_Y(y) \triangleq \mathbf{P}\{\varphi(X) \leqslant y\} = \left\| \begin{array}{l} \varphi(x) \text{ и } \psi(y) - \\ \text{строго возрастающие} \end{array} \right\| = \mathbf{P}\{X \leqslant \psi(y)\} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\psi(y)} f_X(x)\,dx = \left\| \begin{array}{l} \text{замена переменной} \\ x \text{ на } y:\ x = \psi(y) \end{array} \right\| = \int\limits_{-\infty}^{y} f_X(\psi(y))\psi'(y)\,dy.$$

Наконец,

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{d}{dy}\Big(\int\limits_{-\infty}^{y} f_X(\psi(y))\psi'(y)\,dy\Big) = f_X(\psi(y))\psi'(y).$$

Пусть теперь $\varphi(x)$ — гладкая строго убывающая функция. Тогда

$$F_Y(y) \triangleq \mathbf{P}\{\varphi(X) \leqslant y\} = \mathbf{P}\{X \geqslant \psi(y)\} = \int\limits_{\psi(y)}^{+\infty} f_X(x)\,dx =$$
$$= \int\limits_{y}^{\infty} f_X(\psi(y))\psi'(y)\,dy = 1 - \int\limits_{-\infty}^{y} f_X(\psi(y))\psi'(y)\,dy,$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\Big(1 - \int\limits_{-\infty}^{y} f_X(\psi(y))\psi'(y)\,dy\Big) = -f_X(\psi(y))\psi'(y).$$

Таким образом, для гладкой строго монотонной функции $\varphi(x)$ находим: $f_Y(y) = f_X(\psi(y))|\psi'(y)|$.

Отметим, что любая функция $q(x)$, обладающая свойствами 1) $f(x)$ и 2) $f(x)$, является плотностью распределения некоторой СВ.

Пример 5.3. Рассмотрим СВ $Y \triangleq aX + b$, где СВ X имеет плотность $f_X(x)$, причем $a \neq 0$. В данном случае $\psi(y) = (y-b)/a$. Поэтому $\psi'(y) = 1/a$. Пользуясь свойством 5) $f(x)$, получаем

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|}\, f_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

5.4. Числовые характеристики случайных величин. Определение 5.10. Пусть плотность $f(x)$ непрерывной СВ X такая, что сходится интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\,dx$. Тогда число $m_X \triangleq \mathbf{M}[X] \triangleq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ будем называть *математическим ожиданием* (МО) непрерывной СВ X.

Если интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\,dx$ расходится, то МО у СВ X может не существовать или равняться бесконечности.

Замечание 5.5. В механике число $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$ соответствует координате центра масс тела, имеющего единичную массу, распределенную по оси Ox с плотностью $f(x)$. По аналогии величину $\mathbf{M}[X]$ иногда называют *средним значением* СВ X. Физическая размерность $\mathbf{M}[X]$ совпадает с размерностью СВ X.

Для дискретной СВ X с конечным числом значений математическое ожидание определяется следующим образом:

$$m_X \triangleq \mathbf{M}[X] \triangleq \sum_{k=0}^{n} p_k x_k, \qquad \text{где} \quad p_k \triangleq \mathbf{P}\{X = x_k\}.$$

Аналогично определяется МО дискретной СВ со счетным числом значений.

Пусть СВ X непрерывна, а $\varphi(x)$ – некоторая скалярная функция скалярного аргумента. Тогда для СВ $Y \triangleq \varphi(X)$ МО СВ Y вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{M}[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f(x)\, dx,$$

если интеграл абсолютно сходится. Если X — дискретная СВ с конечным множеством значений, то

$$\mathbf{M}[\varphi(X)] = \sum_{i=0}^{n} \varphi(x_i) p_i.$$

Доказательство этого факта основано на сведениях, изложенных в курсе математического анализа.

Определение 5.11. *Начальными* ν_r и *центральными* μ_r *моментами порядка* r непрерывной СВ X называются числа

$$\nu_r \triangleq \mathbf{M}[X^r] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\, dx, \quad r = 1, 2, \ldots,$$

$$\mu_r \triangleq \mathbf{M}[(X - m_X)^r] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^r f(x)\, dx, \quad r = 2, 3, \ldots$$

Для дискретной СВ с конечным числом значений интегралы в определении 5.11 заменяются суммами:

$$\nu_r \triangleq \sum_{k=0}^{n} x_k^r p_k, \qquad \mu_r \triangleq \sum_{k=0}^{n} (x_k - m_X)^r p_k.$$

Определение 5.12. Центральный момент второго порядка μ_2 называется *дисперсией* СВ X и обозначается как $d_X \triangleq \mathbf{D}[X] \triangleq \mu_2$.

Определение 5.13. *Средним квадратическим отклонением* (СКО) СВ X называют величину $\sigma_X \triangleq \sqrt{d_X}$.

Дисперсия d_X (так же, как и СКО σ_X) характеризует степень рассеивания реализаций СВ X около ее МО.

Определение 5.14. СВ $\overset{\circ}{X} \triangleq X - m_X$ называется *центрированной*, а СВ $\overset{*}{X} \triangleq \overset{\circ}{X} \Big/ \sigma_X$, если $\sigma_X > 0$, называется *нормированной*.

Свойства m_X и d_X

1) $\mathbf{M}[c] = c$ и $\mathbf{D}[c] = 0$, если c — константа. Действительно, пусть X — дискретная СВ, принимающая с вероятностью 1 значение c, т.е. $\mathbf{P}\{X = c\} = 1$. Тогда $\mathbf{M}[X] \triangleq c\mathbf{P}\{X = c\} = c$. Аналогично, $\mathbf{D}[X] \triangleq (c - \mathbf{M}[c])^2 \mathbf{P}\{X = c\} = 0$.

2) $\mathbf{M}[cX] = c\mathbf{M}[X]$, если c — константа. Действительно, пусть, например, X — непрерывная СВ, тогда

$$\mathbf{M}[cX] \triangleq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} cx f(x)\,dx = c \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx \triangleq c m_X.$$

3) $\mathbf{M}[X + c] = m_X + c$, если c — константа. Очевидно, что, например, для непрерывной СВ можно получить

$$\mathbf{M}[X + c] \triangleq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x + c) f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} c f(x)\,dx = m_X + c.$$

4) $|\mathbf{M}[X]| \leqslant \mathbf{M}[|X|]$, поскольку, например, для непрерывной СВ

$$|\mathbf{M}[X]| \triangleq \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx \right| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\,dx = \mathbf{M}[|X|].$$

5) $\mathbf{M}[\overset{*}{X}] = 0$, $\mathbf{D}[\overset{*}{X}] = 1$. Действительно, $\mathbf{M}[\overset{*}{X}] \triangleq \mathbf{M}\left[\dfrac{X - m_X}{\sigma_X}\right]$, поэтому по свойствам $2) m_X$ и $3) m_X$ получаем $\mathbf{M}[\overset{*}{X}] = 0$ и

$$\mathbf{D}[\overset{*}{X}] \triangleq \mathbf{M}[(\overset{*}{X} - \mathbf{M}[\overset{*}{X}])^2] = \frac{1}{\sigma_X^2} \mathbf{M}[(X - m_X)^2] = \frac{\mathbf{D}[X]}{\sigma_X^2} = 1.$$

6) Пусть функция $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)$. Тогда, если $\mathbf{M}[\varphi_k(X)]$ существуют для всех $k = \overline{1,n}$, то $\mathbf{M}[\varphi(X)] = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \mathbf{M}[\varphi_k(X)]$.

Действительно, в случае непрерывной СВ X, используя линейные свойства интеграла, получаем

$$\mathbf{M}[\varphi(X)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)) f(x)\, dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(x) f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbf{M}[\varphi_k(X)].$$

7) $\mathbf{D}[X] = \mathbf{M}[X^2] - m_X^2$. Действительно, по свойству 6) m_X имеем

$$\mathbf{D}[X] \triangleq \mathbf{M}[(X - m_X)^2] = \mathbf{M}[X^2] - 2\mathbf{M}[X] m_X + m_X^2 = \mathbf{M}[X^2] - m_X^2.$$

8) $\mathbf{D}[cX] = c^2 \mathbf{D}[X]$, $\mathbf{D}[c + X] = \mathbf{D}[X]$, где c — константа.

9) Пусть СВ X имеет конечное математическое ожидание и распределение СВ обладает свойством симметрии, т. е. график плотности вероятности (для непрерывной СВ X) или многоугольник распределения (для дискретной СВ X) симметричен относительно прямой $x = c$ для некоторого $c \in \mathbb{R}^1$. Тогда $\mathbf{M}[X] = c$.

Например, для непрерывной СВ X с плотностью $f_X(x)$ рассмотрим СВ $Y = X - c$ с плотностью $f_Y(y) = f_X(y - c)$ такой, что $f_Y(y) = f_Y(-y)$. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{0} y f_Y(y) dy = - \int\limits_{0}^{+\infty} y f_Y(y) dy.$$

Таким образом $\mathbf{M}[Y] = 0$. Но по свойству 3) m_X имеем $\mathbf{M}[X] = \mathbf{M}[Y] + c = c$.

Аналогично можно показать, что свойства 2) $m_X, \ldots$, 6) m_X, доказанные выше для непрерывных СВ, справедливы также и для дискретных СВ.

5.5. Характеристическая функция.

Определение 5.15. *Характеристической функцией* СВ X называется комплекснозначная функция вида

$$g_X(t) \triangleq \mathbf{M}\left[e^{itX}\right],$$

где $t \in \mathbb{R}^1$, $i^2 = -1$. Если СВ X — непрерывная, то

$$g_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x)\,dx,$$

если СВ X — дискретная с конечным числом значений, то

$$g_X(t) = \sum_{k=0}^{n} p_k e^{itx_k}.$$

Аналогично определяется $g_X(t)$ для дискретной СВ со счетным числом значений.

Характеристическая функция представляет собой преобразование Фурье плотности вероятности $f_X(x)$ непрерывной СВ X. Поэтому обратное преобразование Фурье приводит к соотношению

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} g_X(t)\,dt.$$

Таким образом, для непрерывной СВ задание $g_X(t)$ равносильно заданию $f_X(x)$, и наоборот. Для простоты обозначений в дальнейшем будем писать $g(t) \triangleq g_X(t)$.

Рассмотрим основные свойства характеристической функции. Для простоты изложения доказательство этих свойств будем проводить только для непрерывных СВ.

Свойства $g(t)$

1) $|g(t)| \leqslant 1$ для всех $t \in \mathbb{R}^1$. Так как $e^{itx} = \cos tx + i \sin tx$, то $|e^{itx}|^2 = \cos^2 tx + \sin^2 tx = 1$, поэтому $|g(t)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx}| f(x)\,dx = 1$.

2) $g(0) = 1$, поскольку $e^{it0} = 1$ и $g(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

3) $\nu_r \triangleq \mathbf{M}[X^r] = \dfrac{1}{i^r} \dfrac{d^r}{dt^r} g(t)\Big|_{t=0}$. Продифференцируем r раз функцию $g(t)$:

$$\frac{d^r}{dt^r} g(t) \triangleq \frac{d^r}{dt^r} \left(\mathbf{M}\left[e^{itX}\right]\right) = \frac{d^r}{dt^r} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^r}{dt^r} e^{itx}\right) f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} i^r x^r e^{itx} f(x)\,dx = i^r \mathbf{M}\left[X^r e^{itX}\right].$$

Отсюда при $t = 0$ получаем указанную формулу.

4) Пусть $Y = aX + b$, где X — СВ с плотностью $f_X(x)$ и характеристической функцией $g_X(t)$. Тогда

$$g_Y(t) \triangleq \mathbf{M}\left[e^{it(aX+b)}\right] = e^{itb}\mathbf{M}\left[e^{itaX}\right] = e^{itb}g_X(at).$$

Замечание 5.6. Обратим внимание, что согласно определению 5.11 формулы вычисления начального момента ν_r для дискретных и непрерывных СВ различны. Но если использовать характеристическую функцию для нахождения ν_r, то формула вычисления оказывается одной и той же для обоих случаев.

5.6. Квантиль.

Определение 5.16. *Квантилью уровня* p функции распределения $F(x)$ СВ X называется минимальное значение x_p, при котором функция распределения $F(x)$ не меньше значения p, где $p \in (0,1)$, т. е.

$$x_p \triangleq \min\{x\colon\ F(x) \geqslant p\}, \qquad p \in (0,1).$$

На рис. 5.4 указаны квантили уровней α, β и γ некоторой функции распределения $F(x)$.

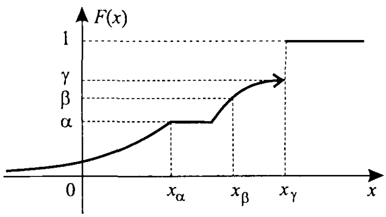

Рис. 5.4

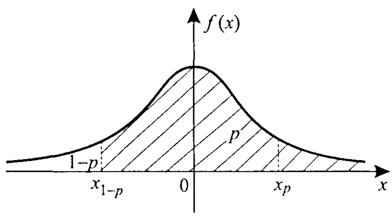

Рис. 5.5

Если функция распределения строго монотонна и непрерывна, то квантиль является единственным решением уравнения $F(x_p) = p$.

Определение 5.17. Квантиль уровня $p = 1/2$ называется *медианой*.

Если плотность распределения существует, симметрична относительно оси Oy и строго положительна на связном множестве (отрезке или оси Ox), то $x_p = -x_{1-p}$. Действительно, пусть СВ $Y \triangleq -X$. При сделанных предположениях $F_Y(x) \equiv F_X(x)$, поэтому $y_p = x_p$

для любого p. Далее, так как $f_Y(x) \equiv f_X(x)$ и $\int\limits_{x_{1-p}}^{\infty} f_X(x)\,dx = p$, то $y_p = -x_{1-p}$. Поэтому $x_p = -x_{1-p}$ (рис. 5.5).

Замечание 5.7. Квантиль является одной из основных статистических характеристик, используемых в математической статистике (см. гл. V, VI).

5.7. Типовые задачи.

Задача 5.1. Известно, что $\mathbf{P}\{X > 3\} = 1/3$. Найти $F_X(3)$.

Решение. По определению функции распределения: $F_X(x) \triangleq \mathbf{P}\{X \leqslant x\}$. Следовательно, $F_X(3) = 1 - \mathbf{P}\{X > 3\}$. Поэтому $F_X(3) = 1 - 1/3 = 2/3$.

Ответ. $F_X(3) = 2/3$.

Задача 5.2. Для СВ Y и X заданы ряды распределений в виде табл. 5.2 и 5.3.

Таблица 5.2

X	-1	0
$\mathbf{P}$	$1/2$	$1/2$

Таблица 5.3

Y	0	1
$\mathbf{P}$	$1/2$	$1/2$

Сравнить $F_X(F_Y(1/2))$ и $F_Y(F_X(1/2))$.

Решение. Используя ряды распределений, соответственно получаем:

$$F_Y(1/2) \triangleq \mathbf{P}\{Y \leqslant 1/2\} = \mathbf{P}\{Y = 0\} = 1/2,$$

$$F_X(1/2) \triangleq \mathbf{P}\{X \leqslant 1/2\} = \mathbf{P}\Big(\{X = -1\} + \{X = 0\}\Big) = \\ = \mathbf{P}\{X = -1\} + \mathbf{P}\{X = 0\} = 1.$$

Аналогично, $F_X(F_Y(1/2)) = F_X(1/2) = 1$,

$$F_Y(F_X(1/2)) = F_Y(1) = \mathbf{P}\{Y \leqslant 1\} = \mathbf{P}\Big(\{Y = 0\} + \{Y = 1\}\Big) = 1.$$

Ответ. $F_X(F_Y(1/2)) = F_Y(F_X(1/2))$.

Задача 5.3. Даны функции:

$$1)\ f_1(x) = -x^2; \quad 2)\ f_2(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}; \quad 3)\ f_3(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{(1+x^2)}.$$

Являются ли эти функции плотностями вероятности?

Решение. Здесь необходимо проверить выполнение условий 1) $f(x)$ и 2) $f(x)$ неотрицательности и нормировки плотности. У первой функции не выполнено условие неотрицательности, так как существует такое значение x, что $f_1(x) < 0$, так как $f_1(x) < 0$ для всех $x \neq 0$. У второй функции не выполнено условие нормировки, так как интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}(1+\sin x)\,dx$ расходится. Наконец, третья функция является плотностью, так как она неотрицательна и

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_3(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1.$$

Ответ. Плотностью распределения является только $f_3(x)$.

Задача 5.4. Известно, что случайная величина X, принимающая два значения $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$, имеет математическое ожидание, равное 2,2. Построить ряд распределения СВ X, найти дисперсию и построить график функции распределения.

Решение. Пусть $\mathbf{P}\{X = 2\} = p$, тогда, согласно условию нормировки, $\mathbf{P}\{X = 3\} = 1 - p$. Используя определение математического ожидания

$$\mathbf{M}[X] = 2p + 3(1-p) = 3 - p,$$

получаем уравнение $3 - p = 2{,}2$, откуда находим $p = 0{,}8$. Ряд распределения представлен в табл. 5.4. Теперь вычисляем дисперсию: $\mathbf{D}[X] = (2-2{,}2)^2 \cdot 0{,}8 + (3-2{,}2)^2 \cdot 0{,}2 = 0{,}16$.

Таблица 5.4

X	2	3
P	0,8	0,2

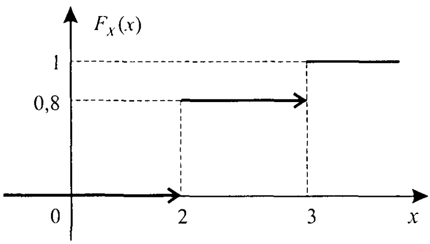

Рис. 5.6

Ответ. Ряд распределения приведен в табл. 5.4, $\mathbf{D}[X] = 0{,}16$, график функции распределения приведен на рис. 5.6.

Задача 5.5. Сделано два высокорисковых вклада — 20 млн руб. в компанию A и 18 млн руб. в компанию B. Компания A обещает 40% годовых, но может обанкротиться с вероятностью 0,3, компания B обещает 30% годовых, но может обанкротиться с вероятностью 0,2.

Будем считать, что банкротства компаний независимы. Составить ряд распределения случайной величины X, равной сумме вкладов, полученных от двух компаний через год. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

Решение. Согласно условию задачи СВ X может принимать следующие значения:

$x_1 = 0$, если обе компании обанкротятся;

$x_2 = 20 + 0{,}4 \cdot 20 = 28$, если обанкротится только компания B;

$x_3 = 18 + 0{,}3 \cdot 18 = 23{,}4$, если обанкротится только компания A;

$x_4 = 28 + 23{,}4 = 51{,}4$, если ни одна из компаний не обанкротится.

Для построения ряда распределения случайной величины X достаточно найти вероятности событий $\{X = x_i\}$, $i = \overline{1, 4}$.

Рассмотрим дополнительно события:

$$A = \{\text{Компания A обанкротится}\}, \quad B = \{\text{Компания B обанкротится}\}.$$

Тогда $\mathbf{P}\{X = x_1\} = \mathbf{P}(A \cdot B)$. Согласно формуле умножения вероятностей, а также учитывая независимость событий A и B, будем иметь: $\mathbf{P}\{X = x_1\} = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06$.

Аналогично найдем вероятности оставшихся событий. Имея ввиду, что события $\overline{A}$ и $\overline{B}$ независимы, получим

$$\mathbf{P}\{X = x_2\} = \mathbf{P}(\overline{A} \cdot B) = \mathbf{P}(\overline{A}) \cdot \mathbf{P}(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}14,$$

$$\mathbf{P}\{X = x_3\} = \mathbf{P}(A \cdot \overline{B}) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(\overline{B}) = 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}24,$$

$$\mathbf{P}\{X = x_4\} = \mathbf{P}(\overline{A} \cdot \overline{B}) = \mathbf{P}(\overline{A}) \cdot \mathbf{P}(\overline{B}) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56.$$

Таблица 5.5

X	0	23,4	28	51,4
P	0,06	0,24	0,14	0,56

Таким образом, имеем ряд распределения случайной величины X (см. табл. 5.5). По определению математическое ожидание СВ X может быть найдено следующим образом:

$$\mathbf{M}[X] = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 38{,}32.$$

Найдем также дисперсию СВ X:

$$\mathbf{D}[X] = \sum_{i=1}^{4} (x_i - \mathbf{M}[X])^2 p_i = 252{,}25.$$

Ответ. $\mathbf{M}[X] = 38{,}32$, $\mathbf{D}[X] = 252{,}25$.

Задача 5.6. Плотность вероятности случайной величины X выглядит следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x^2, & |x| \leqslant h, \\ 0, & |x| > h. \end{cases}$$

Найти h, $\mathbf{M}[X]$, $F(x)$, $\mathbf{D}[2X+3]$, $\mathbf{M}[X^2-3X+2]$.

Решение. Для нахождения h воспользуемся условием нормировки, согласно которому $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$. В данном случае

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{3}{2}\int\limits_{-h}^{h} x^2\,dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_{-h}^{h} = h^3.$$

Таким образом, $h^3 = 1$, и поэтому $h = 1$. Для нахождения функции распределения воспользуемся формулой, связывающей плотность $f(x)$ с функцией распределения $F(x)$:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

Тогда $F(x) = 0$, если $x \in (-\infty, -1)$.

Если $x \in [-1, 1)$, то $F(x) = F(-1) + \int\limits_{-1}^{x} \frac{3}{2}t^2\,dt = \frac{1}{2}(x^3+1)$.

Если $x \in [1, +\infty)$, то $F(x) = F(-1) + \int\limits_{-1}^{1} \frac{3}{2}t^2\,dt + \int\limits_{1}^{x} 0\,dt = 1$.

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -1), \\ \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{1}{2}, & x \in [-1, 1), \\ 1, & x \in [1, \infty). \end{cases} \tag{5.1}$$

Для нахождения $\mathbf{M}[X^2 - 3X + 2]$ и $\mathbf{D}[2X + 3]$ воспользуемся свойствами математического ожидания и дисперсии. Получим

$$\mathbf{M}[X^2 - 3X + 2] = \mathbf{M}[X^2] - 3\mathbf{M}[X] + 2, \quad \mathbf{D}[2X+3] = 4\mathbf{D}[X]. \tag{5.2}$$

Выразив $\mathbf{M}[X^2]$ через $\mathbf{M}[X]$ и $\mathbf{D}[X]$, получим

$$\mathbf{M}[X^2] = (\mathbf{M}[X])^2 + \mathbf{D}[X].$$

Таким образом,

$$\mathbf{M}[X^2 - 3X + 2] = \mathbf{D}[X] + (\mathbf{M}[X])^2 - 3\mathbf{M}[X] + 2. \qquad (5.3)$$

Вычислим

$$\mathbf{M}[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \frac{3}{2}\int\limits_{-1}^{1} x^3\,dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{x^4}{4}\bigg|_{-1}^{1} = 0,$$

$$\mathbf{D}[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbf{M}[X])^2 f(x)\,dx = \frac{3}{2}\int\limits_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{x^5}{5}\bigg|_{-1}^{1} = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{3}{5}.$$

Заметим, что математическое ожидание случайной величины X можно было не вычислять, так как график плотности $y = f(x)$ симметричен относительно прямой $x = 0$, и следовательно, согласно свойству 9)m_X имеем $\mathbf{M}[X] = 0$.

Подставив найденные значения $\mathbf{M}[X]$ и $\mathbf{D}[X]$ в формулы (5.2) и (5.3), получим

$$\mathbf{M}[X^2 - 3X + 2] = \frac{3}{5} + 2 = 2{,}6, \quad \mathbf{D}[2X + 3] = 4\cdot\frac{3}{5} = 2{,}4.$$

Ответ. $h = 1$, $\mathbf{M}[X] = 0$, выражение для $F(x)$ приведено в (5.1), $\mathbf{M}[X^2 - 3X + 2] = 2{,}6$, $\mathbf{D}[2X + 3] = 2{,}4$.

Задача 5.7. Найти квантиль уровня $p = 2/3$ для следующих СВ:

Таблица 5.6

X	0	1	2	3
P	0,25	0,25	0,25	0,25

а) случайная величина X имеет ряд распределения, указанный в табл. 5.6;

б) случайная величина Y имеет плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Решение. *а*) По определению должно выполняться неравенство $2/3 \leqslant F(x_{2/3})$ и $x_{2/3}$ должно быть минимальным среди всех чисел, удовлетворяющих этому условию. Непосредственные вычисления дают следующий результат:

$$F(0) = \mathbf{P}\{X \leqslant 0\} = \mathbf{P}\{X = 0\} = 1/4 < 2/3,$$
$$F(1) = \mathbf{P}\{X \leqslant 1\} = \mathbf{P}\{X = 0\} + \mathbf{P}\{X = 1\} = 1/2 < 2/3,$$
$$F(2) = \mathbf{P}\{X \leqslant 2\} = \mathbf{P}\{X = 0\} + \mathbf{P}\{X = 1\} + \mathbf{P}\{X = 2\} = 3/4 > 2/3.$$

Таким образом, $x_{2/3} = 2$.

б) В данном случае на отрезке $[0,1]$ функция распределения СВ X имеет вид

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt = \int\limits_0^x 2t\,dt = x^2, \quad x \in [0,1],$$

и поэтому является непрерывной и строго монотонной на отрезке $[0,1]$. В соответствии со свойством квантили находим $x_{2/3}$ из уравнения $F(x_{2/3}) = 2/3$, откуда $x_{2/3} = \sqrt{2/3} \approx 0{,}8165$.

Ответ. *а*) $x_{2/3} = 2$; *б*) $x_{2/3} = \sqrt{2/3} \approx 0{,}8165$.

§ 6. Основные дискретные распределения

6.1. Биномиальное распределение.

Определение 6.1. Дискретная СВ X с реализациями $x_k = k$, $k = \overline{0,n}$, имеет *биномиальное распределение* с параметрами n и $p \in (0,1)$, что символически записывается как $X \sim \mathbf{Bi}(n;p)$, если вероятность события $\{X = x_k\}$ определяется формулой Бернулли:

$$p_k \triangleq \mathbf{P}\{X = x_k\} \triangleq P_n(k) \triangleq C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p.$$

Ряд распределения представлен в табл. 6.1.

Пусть опыт G повторяется независимо n раз в одних и тех же условиях, при этом событие A появляется при каждом повторении опыта с одной и той же вероятностью $p \triangleq \mathbf{P}(A)$. Тогда по теореме 3.5 вероятность появления события A ровно k раз при n независимых повторениях опыта определяется формулой Бернулли: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, т.е. случайная величина X, являющаяся числом появления события A при n повторениях опыта, имеет биномиальное распределение.

Таблица 6.1

X	0	1	$\ldots$	k	$\ldots$	$n-1$	n
$\mathbf{P}$	q^n	npq^{n-1}	$\ldots$	$C_n^k p^k q^{n-k}$	$\ldots$	nqp^{n-1}	p^n

Замечание 6.1. Такое распределение называется биноминальным, так как правая часть формулы Бернулли совпадает с выражением для $(k+1)$-го слагаемого в разложении бинома Ньютона $(p+q)^n$

и, кроме того,

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = (p+q)^n = 1.$$

Свойства $\mathbf{Bi}(n;p)$

1) Характеристическая функция СВ $X \sim \mathbf{Bi}(n;p)$ равна

$$g(t) \triangleq \sum_{k=0}^{n} p_k e^{itk} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pe^{it})^k q^{n-k} = \|\text{бином Ньютона}\| = (q+pe^{it})^n.$$

2) Из свойства 3) $g(t)$ получаем значение математического ожидания и дисперсии:

$$m_X \triangleq \nu_1 = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}g(t)\bigg|_{t=0} = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}\left[(q+pe^{it})^n\right]\bigg|_{t=0} = \\ = np(q+pe^{it})^{n-1}e^{it}\bigg|_{t=0} = np(q+p)^{n-1} = np,$$

$$\nu_2 = \frac{1}{i^2}\frac{d^2}{dt^2}g(t)\bigg|_{t=0} = \frac{np}{i}\frac{d}{dt}\left[(q+pe^{it})^{n-1}e^{it}\right]\bigg|_{t=0} = np^2(n-1)\times \\ \times e^{2it}(q+pe^{it})^{n-2}\bigg|_{t=0} + np(q+pe^{it})^{n-1}e^{it}\bigg|_{t=0} = n^2p^2 + npq.$$

Учитывая свойство 7) m_X, получаем

$$d_X \triangleq \mu_2 = \nu_2 - m_X^2 = n^2p^2 + npq - n^2p^2 = npq.$$

3) Наиболее вероятное значение k^* СВ $X \sim \mathbf{Bi}(n;p)$ удовлетворяет неравенству

$$(n+1)p - 1 \leqslant k^* \leqslant (n+1)p.$$

Пример 6.1. Монету подбрасывают три раза. Требуется найти ряд распределения числа X выпавших «гербов». СВ X распределена по биномиальному закону с параметрами $n=3$, $p=1/2$. Поэтому СВ X может принимать значения 0, 1, 2, 3 с вероятностями

Таблица 6.2

X	0	1	2	3
$\mathbf{P}$	1/8	3/8	3/8	1/8

$$p_0 = C_3^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8},\ p_2 = p_1 = C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8},\ p_3 = 1-(p_0+p_1+p_2) = \frac{1}{8}$$

соответственно. Таким образом, получаем ряд распределения, представленный в табл. 6.2.

Пример 6.2. Предположим, требуется оценить экономическую целесообразность ежедневного открытия магазина в 8 часов утра в течение 5 рабочих дней. Пусть вероятность появления покупателей в это время суток известна и равна p. Тогда вероятность прихода покупателей в это время k раз за неделю выражается формулой Бернулли. При этом, если, например, для $k = 4$ эта вероятность $P_5(4)$ окажется близкой к единице, то следует ожидать экономический эффект от открытия магазина в 8 часов утра.

6.2. Распределение Бернулли.

Определение 6.2. Биномиальное распределение $\mathbf{Bi}(1;p)$ с параметрами $n = 1$ и $p \in (0,1)$ называется *распределением Бернулли.*

Для распределения $\mathbf{Bi}(1;p)$ согласно свойству 1) $\mathbf{Bi}(n;p)$ имеем: $g(t) = q + pe^{it}$, а согласно свойству 2) $\mathbf{Bi}(n;p)$ получаем $m_X = p$, $d_X = p(1-p)$.

Замечание 6.2. Распределение Бернулли $\mathbf{Bi}(1;p)$ играет фундаментальную роль в теории вероятностей и математической статистике, являясь математической моделью опыта с двумя исходами.

Если X_m, $m = \overline{1,n}$, — независимые СВ (см. определение 11.5) с распределением $\mathbf{Bi}(1;p)$, тогда СВ $X \triangleq \sum\limits_{m=1}^{n} X_m$ имеет распределение $\mathbf{Bi}(n;p)$. Действительно, рассмотрим события $A_m \triangleq \{X_m = 1\}$, $m = \overline{1,n}$. Тогда, в силу независимости СВ X_m, все A_m независимы, и, кроме того, $\mathbf{P}(A_m) = p$. Тогда события A_m, $m = \overline{1,n}$, можно интерпретировать как появление одного и того же события A при n независимых повторениях опыта. Поэтому вероятность k появлений этого события A выражается формулой Бернулли: $\mathbf{P}\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Пример 6.3. Пусть имеется партия некоторой продукции, в которой некачественная продукция встречается с вероятностью $1-p$, а продукция без дефектов — с вероятностью p. Положим $x_0 = 1$, если попалась продукция без дефектов, и $x_1 = 0$, если продукция с дефектом. Тогда «качество» продукции можно описать случайной величиной, имеющей распределение Бернулли $\mathbf{Bi}(1;p)$.

6.3. Распределение Пуассона.

Определение 6.3. Дискретная СВ X с реализациями $x_k = k$, $k = 0, 1, \ldots$, имеет *распределение Пуассона* с параметром $a > 0$, что символически записывается как $X \sim \mathbf{\Pi}(a)$, если

$$p_k \triangleq \mathbf{P}\{X = x_k\} = \frac{a^k}{k!}\, e^{-a}.$$

Ряд распределения представлен в табл. 6.3.

Таблица 6.3

X	0	1	$\ldots$	k	$\ldots$
$\mathbf{P}$	e^{-a}	ae^{-a}	$\ldots$	$\frac{a^k}{k!}e^{-a}$	$\ldots$

Свойства $\mathbf{\Pi}(a)$

1) Найдем характеристическую функцию СВ $X \sim \mathbf{\Pi}(a)$:

$$g(t) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} p_k e^{itk} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}\, e^{-a} e^{itk} = e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ae^{it})^k}{k!} = e^{-a} e^{ae^{it}} = e^{a(e^{it}-1)}.$$

2) По свойству 3) $g(t)$ получаем математическое ожидание и дисперсию:

$$m_X \triangleq \nu_1 = \frac{1}{i}\frac{d}{dt} g(t)\Big|_{t=0} = \frac{1}{i}\left[aie^{it}e^{a(e^{it}-1)}\right]\Big|_{t=0} = a,$$

$$\nu_2 = \frac{1}{i^2}\frac{d^2}{dt^2} g(t)\Big|_{t=0} = \frac{a}{i}\frac{d}{dt}\left[ie^{it}e^{a(e^{it}-1)}\right]\Big|_{t=0} = a(1+a),$$

$$d_X = \nu_2 - m_X^2 = a.$$

3) Наиболее вероятное значение k^* СВ $X \sim \mathbf{\Pi}(a)$ удовлетворяет неравенству $a - 1 \leqslant k^* \leqslant a$.

Для распределения Пуассона выполняется числовое равенство $m_X = d_X = a$.На практике СВ имеет, как правило, физическую размерность. В этом случае физические размерности МО и дисперсии не совпадают, хотя их числовые значения для распределения Пуассона равны.

Если X_m, $m = \overline{1, n}$, — независимые СВ (см. определение 11.5) с распределением $\mathbf{\Pi}(a)$, тогда СВ $X \triangleq \sum\limits_{m=1}^{n} X_m$ имеет распределение $\mathbf{\Pi}(na)$.

Замечание 6.3. Распределение Пуассона широко используется в теории массового обслуживания. Приведем пример типичной ситуации, когда возникает такое распределение.

Пример 6.4. Пусть на телефонную станцию в произвольные моменты времени случайным образом поступают заявки на переговоры с городом $\mathcal{N}$ так, что выполняются три условия:

а) вероятность появления любого количества заявок за какой-либо отрезок времени не зависит от того, сколько их поступило за любой другой, не пересекающийся с ним отрезок, т.е. заявки распределяются на оси времени t независимо друг от друга. Это *условие независимости*;

б) вероятность появления за достаточно малый интервал времени Δt двух и более заявок пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью поступления в течение этого интервала времени одной заявки. Это *условие ординарности*;

в) вероятность появления фиксированного числа заявок в интервале времени τ зависит лишь от длины этого интервала, но не зависит от его расположения на оси t. Это *условие стационарности*.

В данном случае можно показать, что СВ X, равная числу заявок, поступивших на телефонную станцию за единицу времени, имеет распределение $\mathbf{\Pi}(a)$, где a — среднее число заявок, поступающих в единицу времени.

Пример 6.5. Пусть машина проехала некоторое расстояние и X — число проколов шины на этом расстоянии, которые по ходу движения устраняются. Тогда вероятность того, что у шины появится k проколов может быть найдена по формуле Пуассона (с соответствующим параметром a).

Между биномиальным распределением $\mathbf{Bi}(n;p)$ и распределением Пуассона $\mathbf{\Pi}(a)$ имеется следующая связь.

Теорема 6.1. (*Теорема Пуассона*). *Пусть* $n \to \infty$, $p \to 0$ *и при этом* $np \equiv a = \text{const}$. *Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{a^k}{k!}e^{-a}, \qquad \text{где } P_n(k) \triangleq C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = \overline{0,n}.$$

Доказательство. Докажем это утверждение, пользуясь вторым замечательным пределом $(1-a/n)^n \to e^{-a}$ при $n \to \infty$. Так как здесь $p = a/n$, $q = 1 - a/n$, то

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{a}{n}\right)^k \left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-k} =$$
$$= \frac{a^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}\frac{(1-a/n)^n}{(1-a/n)^k} = \frac{a^k}{k!}e^{-a}.$$

Таким образом, при больших n и малых p (при редких явлениях) двухпараметрическое биномиальное распределение $\mathbf{Bi}(n;p)$

можно приближенно заменить однопараметрическим распределением Пуассона $\mathbf{\Pi}(a)$, где $a = np$. При этом ошибка от такой замены не превышает np^2 для всех $k = \overline{0, n}$, т. е.

$$\left| C_n^k p^k q^{n-k} - \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} \right| \leqslant np^2.$$

Если условия теоремы Пуассона не выполняются, т. е. p достаточно велико, то применяется другая оценка $P_n(k)$ (см. теорему 14.2).

6.4. Типовые задачи.

Задача 6.1. Случайная величина $X \sim \mathbf{Bi}(1; 0{,}1)$. Как распределена СВ X^n при условии, что $n \neq 0$?

Решение. Для СВ X по определению имеем ряд распределения, который представлен табл. 6.4. Поскольку X принимает только два возможных значения 0 и 1, то множество возможных значений СВ X^n также состоит из 0 и 1. Поэтому для построения ряда распределения остается вычислить соответствующие вероятности. Очевидно, что $\{X^n = 0\} = \{X = 0\}$ и, следовательно, искомые вероятности равны

Таблица 6.4

X	0	1
P	0,9	0,1

$$\mathbf{P}\{X^n = 0\} = \mathbf{P}\{X = 0\} = 0{,}9, \quad \mathbf{P}\{X^n = 1\} = 1 - \mathbf{P}\{X^n = 0\} = 0{,}1.$$

Таким образом, $X^n \sim \mathbf{Bi}(1; 0{,}1)$.

Ответ. $X^n \sim \mathbf{Bi}(1; 0{,}1)$.

Задача 6.2. Пусть X и Y — число «успехов» и «неуспехов» в 100 опытах, проводимых по схеме Бернулли. Вероятность «успеха» в одном опыте равна $1/2$. Сравнить $\mathbf{M}[X]$ и $\mathbf{M}[Y]$, $\mathbf{D}[X]$ и $\mathbf{D}[Y]$.

Решение. Для определенности будем считать, что под «успехом» в одном опыте понимается появление некоторого случайного события A, а, соответственно, «неуспех» состоит в том, что происходит событие $\overline{A}$. Тогда для СВ X по определению получаем $X \sim \mathbf{Bi}(100; 1/2)$, где $n = 100$, $p = \mathbf{P}(A) = 1/2$.

Для того чтобы получить закон распределения СВ Y поступим следующим образом: назовем теперь «успехом» в опыте появление события $\overline{A}$, а «неуспехом» — событие A. В этом случае Y — число «успехов» в $n = 100$ опытах, а вероятность «успеха» теперь: $q = \mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A) = 1 - p = 1/2$. Таким образом, $Y \sim \mathbf{Bi}(100; 1/2)$.

После этого решение задачи получается просто:

$$\mathbf{M}[X] = \mathbf{M}[Y], \quad \mathbf{D}[X] = \mathbf{D}[Y].$$

Ответ. $\mathbf{M}[X] = \mathbf{M}[Y]$, $\mathbf{D}[X] = \mathbf{D}[Y]$.

Задача 6.3. СВ $X \sim \mathbf{\Pi}(a)$, $a = 2$. Найти: *а*) $\mathbf{P}\{X < \mathbf{M}[X]\}$; *б*) наиболее вероятное значение k^* СВ X и $\mathbf{P}\{X = k^*\}$; *в*) $\mathbf{P}\{X > > 0\}$; *г*) $\mathbf{M}[X^2]$.

Решение. *а*) По формуле связи математического ожидания с параметром a закона распределения $\mathbf{\Pi}(a)$ имеем $\mathbf{M}[X] = a$. Тогда

$$\mathbf{P}\{X < \mathbf{M}[X]\} = \mathbf{P}\{X < 2\} = \mathbf{P}\Big(\{X = 0\} + \{X = 1\}\Big) =$$
$$= \mathbf{P}\{X = 0) + \mathbf{P}\{X = 1\} = \frac{a^0}{0!}\,e^{-a} + \frac{a^1}{1!}\,e^{-a} = (a+1)e^{-a} = 3e^{-2} \approx 0{,}406.$$

б) Согласно свойству 3)$\Pi(a)$ распределения Пуассона, наиболее вероятное значение k^* для СВ $X \sim \mathbf{\Pi}(a)$ лежит в интервале $a - 1 \leqslant k^* \leqslant a$. Следовательно, в нашем случае $1 \leqslant k^* \leqslant 2$. Таким образом, наиболее вероятных значений два: $k_1^* = 1$ и $k_2^* = 2$. Найдем соответствующие им вероятности:

$$\mathbf{P}\{X = k_1^*\} = \mathbf{P}\{X = 1\} = \frac{a^1}{1!}e^{-a} = 2e^{-2},$$
$$\mathbf{P}\{X = k_2^*\} = \mathbf{P}\{X = 2\} = \frac{a^2}{2!}e^{-a} = 2e^{-2} \approx 0{,}2707.$$

в) Случайная величина $X \sim \mathbf{\Pi}(a)$ принимает значения $0, 1, 2, \ldots$ Следовательно,

$$\mathbf{P}\{X > 0\} = 1 - \mathbf{P}\{X = 0\} = 1 - \frac{1}{e^2} \approx 0{,}865.$$

г) Воспользуемся формулой связи второго начального момента, который нужно найти, с $\mathbf{M}[X]$ и $\mathbf{D}[X]$:

$$\mathbf{M}[X^2] = \mathbf{D}[X] + (\mathbf{M}[X])^2 = a + a^2 = 2 + 2^2 = 6.$$

Ответ. *а*) $\mathbf{P}\{X < \mathbf{M}[X]\} \approx 0{,}4063$; *б*) наиболее вероятные значения: 1 и 2, $\mathbf{P}\{X = 1\} = \mathbf{P}\{X = 2\} \approx 0{,}2707$; *в*) $\mathbf{P}\{X > 0\} \approx 0{,}865$; *г*) $\mathbf{M}[X^2] = 6$.

Задача 6.4. Страховая компания заключает однотипные договоры, причем страховая премия (сумма, вносимая страхователем при заключении договора) составляет 4 тыс. рублей. При наступлении страхового случая компания должна выплатить страхователю

20 тыс. рублей. Известно, что страховой случай наступает у 4% застрахованных клиентов. Фирме удалось застраховать 200 клиентов. Ответить на вопросы:

а) Каков средний доход фирмы и среднеквадратическое отклонение дохода фирмы?

б) Какова вероятность того, что доход фирмы будет находиться в пределах от 710 до 750 тыс. рублей?

Решение. Обозначим через X случайную величину, равную количеству клиентов, которым страховая компания будет делать выплаты по страховому случаю. Так как страховой случай наступает у 4% застрахованных клиентов, то вероятность того, что он наступит при работе с одним конкретным клиентом составляет 0,04. Поэтому случайная величина X имеет биномиальный закон распределения с параметрами $n = 200$ и $p = 0{,}04$, т.е. $X \sim \mathbf{Bi}(200; 0{,}04)$. Обозначим через Y случайную величину, равную доходу фирмы. Согласно условию задачи СВ Y связана с X следующим образом: $Y = 200 \cdot 4000 - 20\,000\,X$.

а) Воспользуемся свойствами математического ожидания и дисперсии для нахождения $\mathbf{M}[Y]$ и $\mathbf{D}[Y]$:

$$\mathbf{M}[Y] = \mathbf{M}[800\,000 - 20\,000\,X] = 800\,000 - 20\,000\,\mathbf{M}[X],$$
$$\mathbf{D}[Y] = \mathbf{D}[800\,000 - 20\,000\,X] = 4 \cdot 10^8\,\mathbf{D}[X].$$

Известно, что для биномиального закона распределения

$$\mathbf{M}[X] = np = 200 \cdot 0{,}04 = 8,$$
$$\mathbf{D}[X] = np(1-p) = 200 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96 = 7{,}68.$$

Получаем

$$\mathbf{M}[Y] = 800\,000 - 20\,000 \cdot 8 = 640\,000,$$
$$\mathbf{D}[Y] = 4 \cdot 10^8 \cdot 7{,}68 = 3072 \cdot 10^6.$$

Таким образом, среднеквадратическое отклонение дохода фирмы равно $\sqrt{3072 \cdot 10^6} \approx 55\,426$ руб.

б) Используя формулу сложения вероятностей и формулу Бернулли, получаем

$$\mathbf{P}\{710\,000 \leqslant Y \leqslant 750\,000\} = \mathbf{P}\{2{,}5 \leqslant X \leqslant 4{,}5\} =$$
$$= \mathbf{P}\Big(\{X = 3\} + \{X = 4\}\Big) = \mathbf{P}\{X = 3\} + \mathbf{P}\{X = 4\} =$$
$$= C_{200}^3 (0{,}04)^3 (1 - 0{,}04)^{200-3} + C_{200}^4 (0{,}04)^4 (1 - 0{,}04)^{200-4} \approx 0{,}0823.$$

Ответ. *а*) Средний доход фирмы равен 40 тыс. рублей, а среднеквадратическое отклонение — $55{,}426 \cdot 10^3$ руб.; *б*) вероятность приблизительно равна 0,0823.

Задача 6.5. Вероятность того, что в течение часа на станцию скорой помощи не поступит ни одного вызова, равна 0,00248. Считая, что число X вызовов, поступивших в течение часа на станцию, имеет распределение Пуассона, найти математическое ожидание и дисперсию X.

Решение. По условию СВ $X \sim \mathbf{\Pi}(a)$, следовательно $\mathbf{P}\{X = 0\} = e^{-a} = 0{,}00248$. Отсюда $a = 5{,}9994$. Так как $X \sim \mathbf{\Pi}(a)$, то $\mathbf{M}[X] = a = 5{,}9994$, $\mathbf{D}[X] = a = 5{,}9994$.

Ответ. $\mathbf{M}[X] = 5{,}9994$, $\mathbf{D}[X] = 5{,}9994$.

Задача 6.6. Вероятность попадания баскетболистом в корзину при штрафном броске равна $p = 1/3$. На тренировке баскетболист выполняет штрафные броски до тех пор, пока не попадет в корзину, а затем передает мяч другому игроку. Пусть X — количество бросков, сделанных баскетболистом. Требуется построить ряд распределения СВ X, найти ее наиболее вероятное значение, $\mathbf{M}[X]$, $\mathbf{D}[X]$.

Решение. До попадания в корзину баскетболист может сделать $1, 2, 3, \ldots$ бросков. Значит, множество возможных значений СВ X имеет вид $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Случайное событие $\{X = k\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, означает то, что первые $k - 1$ бросков были неудачными, а k-й бросок — успешным. Тогда по формуле умножения вероятностей для независимых событий получаем: $\mathbf{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1}p = q^{k-1}p$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, где $q = 1 - p$.

Таким образом, ряд распределения СВ X задается табл. 6.5. Говорят, что СВ X, ряд распределения которой задается табл. 6.5, имеет *геометрическое распределение с параметром* p. Символически это записывается как $X \sim G(p)$.

Таблица 6.5

X	1	2	3	...	k	...
$\mathbf{P}$	p	qp	q^2p	...	$q^{k-1}p$	...

Очевидно, что наиболее вероятное значение такой СВ есть $k^* = 1$, так как $\mathbf{P}(X = 1) = p$, а при любом $k > 1$, $\mathbf{P}\{X = k\} = q^{k-1}p < p$. Вычислим

$$\mathbf{M}[X] = 1p + 2pq + \ldots + kq^{k-1}p + \ldots = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} =$$

$$= p\sum_{k=1}^{\infty} \frac{dq^k}{dq} = p\frac{d}{dq}\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right) = p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right) = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Аналогично вычисляется

$$\nu_2 = p\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty}\left(k(k-1)+k\right)q^{k-2}q = pq\frac{d^2}{dq^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right) + \\ + p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = pq\frac{d^2}{dq^2}\left(\frac{q}{1-q}\right) + \frac{1}{p} = \frac{2pq}{(1-q)^3} + \frac{1}{p} = \frac{1+q}{(1-q)^2}.$$

Таким образом, дисперсия

$$d_X = \nu_2 - m_X^2 = \frac{1+q}{(1-q)^2} - \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{q}{p^2}.$$

В данной задаче $p = 1/3$, следовательно $\mathbf{M}[X] = 3$, $\mathbf{D}[X] = 6$.

Ответ. Ряд распределения приведен в табл. 6.5, $k^* = 1$, $\mathbf{M}[X] = 3$, $\mathbf{D}[X] = 6$.

§ 7. Основные непрерывные распределения

7.1. Равномерное распределение.

Определение 7.1. СВ X распределена *равномерно на отрезке* $[a, b]$ ($X \sim \mathbf{R}(a; b)$), если плотность вероятности имеет вид (рис. 7.1)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Свойства $\mathbf{R}(a; b)$

1) Нетрудно убедиться в том, что функция распределения имеет вид (рис. 7.2)

$$F(x) \triangleq \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x < b, \\ 1, & x \geqslant b. \end{cases}$$

2) Характеристическая функция СВ $X \sim \mathbf{R}(a; b)$ равна

$$g(t) \triangleq \mathbf{M}[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{itx}\,dx = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}.$$

3) МО и дисперсия по определению равны

$$m_X \triangleq \nu_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int\limits_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2},$$

$$\nu_2 \triangleq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ba+a^2}{3},$$

$$d_X \triangleq \mu_2 = \nu_2 - m_X^2 = \frac{b^2+ba+a^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

В данном случае МО можно было бы найти проще, воспользовавшись свойством 9) m_X, так как график плотности вероятности равномерного закона симметричен относительно прямой $x = (a+b)/2$.

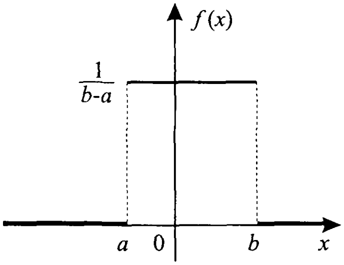

Рис. 7.1

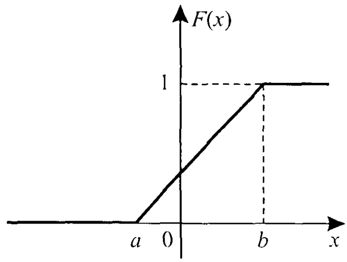

Рис. 7.2

4) Линейное преобразование $Y \triangleq \dfrac{X-a}{b-a}$ переводит СВ $X \sim \mathbf{R}(a;b)$ в СВ $Y \sim \mathbf{R}(0;1)$. Действительно, согласно примеру 5.3

$$f_Y(y) = (b-a) f_X(y(b-a)+a) = \begin{cases} 1, & y \in [0,1], \\ 0, & y \notin [0,1]. \end{cases}$$

5) Если СВ Y имеет непрерывную строго возрастающую функцию распределения $F_Y(y)$, то СВ $X \triangleq F_Y(Y)$ имеет распределение $\mathbf{R}(0;1)$. Действительно, в этом случае функция $x = F_Y(y)$ имеет обратную функцию $y = F_Y^{-1}(x)$ и эти функции являются взаимно обратными. Поэтому для всех $x \in [0,1]$ получаем

$$F_X(x) \triangleq \mathbf{P}\{F_Y(Y) \leqslant x\} = \mathbf{P}\{Y \leqslant F_Y^{-1}(x)\} = F_Y(F_Y^{-1}(x)) = x.$$

Кроме того, $F_X(x) = \mathbf{P}(\varnothing) = 0$, если $x < 0$, и $F_X(x) = \mathbf{P}(\Omega) = 1$, если $x > 1$. Таким образом, СВ $Y \triangleq F_Y^{-1}(X)$ будет иметь требуемую функцию распределения $F_Y(y)$, если $X \sim \mathbf{R}(0;1)$.

Замечание 7.1. Свойство 5) $\mathbf{R}(0;1)$, верное и в более общем случае, когда функция распределения лишь непрерывна, используется для моделирования СВ с произвольно заданным законом распределения.

Замечание 7.2. Равномерное распределение является непрерывным аналогом дискретного распределения вероятностей для опытов с равновероятными исходами.

Пример 7.1. СВ X, являющаяся погрешностью приближенных вычислений каких-либо параметров при округлении до ближайших целых чисел, удовлетворительно описывается распределением $\mathbf{R}(-1/2;1/2)$.

7.2. Экспоненциальное распределение.

Определение 7.2. СВ X имеет *экспоненциальное* (*показательное*) *распределение* с параметром $\lambda > 0$, т.е. $X \sim \mathbf{E}(\lambda)$, если плотность вероятности имеет вид (рис. 7.3)

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Свойства $\mathbf{E}(\lambda)$

1) Функция распределения СВ $X \sim \mathbf{E}(\lambda)$ равна (рис. 7.4) $F(x) = 0$, если $x < 0$, и

$$F(x) \triangleq \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \left\| \begin{array}{l} f(t) = 0, \\ \text{если } t < 0 \end{array} \right\| = \lambda \int_{0}^{x} e^{-\lambda t}\,dt = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geqslant 0.$$

2) Характеристическая функция СВ $X \sim \mathbf{E}(\lambda)$:

$$g(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,dx = \lambda \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x} e^{itx}\,dx =$$

$$= \lambda \int_{0}^{+\infty} e^{-x(\lambda - it)}\,dx = \frac{\lambda}{it - \lambda} e^{-x(\lambda - it)}\Big|_{x=0}^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

3) Найдем МО и дисперсию СВ $X \sim \mathbf{E}(\lambda)$:

$$m_X \triangleq \nu_1 = \frac{1}{i}\frac{d}{dt} g(t)\Big|_{t=0} = \frac{\lambda}{(\lambda - it)^2}\Big|_{t=0} = \frac{1}{\lambda},$$

$$\nu_2 = \frac{1}{i^2}\frac{d^2}{dt^2} g(t)\Big|_{t=0} = \frac{2\lambda}{(\lambda - it)^3}\Big|_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2},$$

$$d_X = \nu_2 - \nu_1^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Замечание 7.3. Экспоненциальное распределение является одним из основных распределений, используемых в теории надежности.

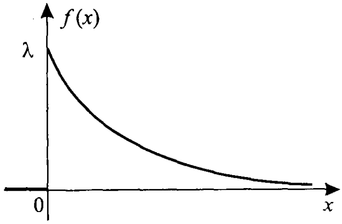

Рис. 7.3

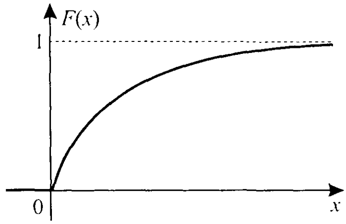

Рис. 7.4

Пример 7.2. Продолжительность безотказной работы многих технических устройств, а также время задержки вылета самолета по вине технических служб аэропорта удовлетворительно описываются соответствующими экспоненциальными распределениями.

7.3. Нормальное распределение.

Определение 7.3. СВ X имеет *нормальное* (*гауссовское*) *распределение* с параметрами m и $\sigma^2 > 0$, т.е. $X \sim \mathrm{N}(m; \sigma^2)$, если

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

При этом СВ называется *нормальной* (*гауссовской*). График плотности нормального распределения, называемый *кривой Гаусса*, имеет единственный максимум в точке $x = m$ (см. примеры на рис. 7.5).

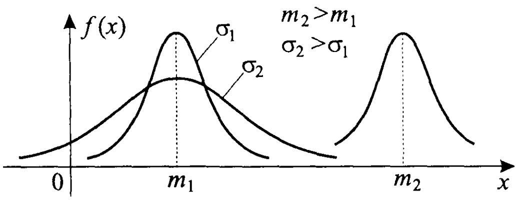

Рис. 7.5

Свойства $\mathbf{N}(m;\sigma^2)$

1) Найдем выражение для функции распределения СВ $X \sim \sim \mathbf{N}(m;\sigma^2)$:

$$F(x) \triangleq \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right\} dt =$$

$$= \left\| y \triangleq \frac{t-m}{\sigma};\; dy = \frac{1}{\sigma}\,dt \right\| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-y^2/2}\,dy = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right).$$

Здесь введено обозначение $\Phi(y) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{y} e^{-t^2/2}\,dt$ для функции распределения *стандартной нормальной* СВ $X \sim \mathbf{N}(0;1)$. График функции распределения $F(x)$ представлен на рис. 7.6. Вместо $\Phi(y)$ в справочниках встречается также *функция Лапласа*

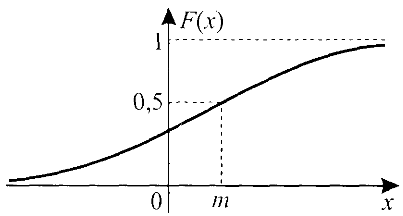

Рис. 7.6

$$\Phi_0(y) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{y} e^{-t^2/2}\,dt.$$

Легко убедиться в том, что $\Phi_0(-y) = -\Phi_0(y)$ и $\Phi(y) = 1/2 + \Phi_0(y)$.

2) Характеристическая функция СВ $X \sim \mathbf{N}(0;1)$ имеет вид $g(t) = = e^{-t^2/2}$. Действительно,

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}e^{itx}dx = \|\text{формула Эйлера}\| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\cos tx\,dx + \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\sin tx\,dx =$$

$$= \left\| \begin{array}{ll} \sin tx, & \text{— нечетная} \\ e^{-x^2/2} & \text{— четная} \\ \text{пределы симметр.} & \end{array} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\cos tx\,dx.$$

Применяя метод интегрирования по частям, имеем

$$g'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2/2} \sin tx\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-x^2/2} \sin tx \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} \cos tx\, dx \right] = -t\, g(t).$$

Решая это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными при начальном условии $g(0) = 1$, находим $\ln g(t) = -t^2/2$. Рассмотрим СВ $X \sim \mathbf{N}(m; \sigma^2)$. Тогда нормированная СВ $\overset{*}{X} \triangleq \dfrac{X - m}{\sigma}$ имеет нормальное распределение $\mathbf{N}(0; 1)$ и, следовательно, характеристическую функцию $g(t) = e^{-t^2/2}$. Далее, согласно свойству 4) $g(t)$ для СВ $X \triangleq \sigma \overset{*}{X} + m$ имеем

$$g_X(t) = e^{itm} g_{\overset{*}{X}}(\sigma t) = \exp(itm - t^2\sigma^2/2).$$

3) МО и дисперсия СВ $X \sim \mathbf{N}(m; \sigma^2)$ равны

$$m_X = \nu_1 = \frac{1}{i} \frac{d}{dt} g(t) \Big|_{t=0} = \frac{(im - t\sigma^2)}{i} \exp(itm - t^2\sigma^2/2) \Big|_{t=0} = m,$$

$$\nu_2 = \frac{1}{i^2} \frac{d^2}{dt^2} g(t) \Big|_{t=0} = \frac{1}{i^2} \Big[-\sigma^2 \exp(itm - t^2\sigma^2/2) +$$

$$+ (im - t\sigma^2)^2 \exp(itm - t^2\sigma^2/2) \Big] \Big|_{t=0} = -\frac{\sigma^2 + m^2}{i^2} = \sigma^2 + m^2,$$

$$d_X = \nu_2 - \nu_1^2 = \sigma^2.$$

В данном случае МО можно было бы найти проще, воспользовавшись свойством 9) m_X, так как график плотности вероятности нормального закона распределения симметричен относительно прямой $x = m$.

4) С помощью линейного преобразования $\overset{*}{X} \triangleq (X - m)/\sigma$ нормальное распределение $\mathbf{N}(m; \sigma^2)$ переходит в стандартное нормальное $\mathbf{N}(0; 1)$ с функцией распределения $F_{\overset{*}{X}}(x) = \Phi(x)$.

5) Нормально распределенная СВ с большой вероятностью принимает значения, близкие к своему МО, что описывается *«правилом k сигм»*:

$$\mathbf{P}\{|X - m| \leqslant k\sigma\} = \Phi_0(k) - \Phi_0(-k) = 2\Phi_0(k) = \begin{cases} 0{,}6827, & k = 1, \\ 0{,}9545, & k = 2, \\ 0{,}9973, & k = 3. \end{cases}$$

Замечание 7.4. Нормальное распределение имеет широкое распространение в прикладных задачах. Это связано с тем, что в реальности многие исследуемые СВ являются следствием различных случайных событий. В частности, при достаточно общих предположениях сумма большого числа независимых СВ имеет распределение, близкое к нормальному (см. теорему 14.2).

Пример 7.3. Рост людей хорошо описывается нормальным распределением (см. задачи 16.2 и 20.4). Это, по-видимому, связано с тем, что на рост влияет суперпозиция разнообразных независимых случайных факторов: климата, экологии, экономических условий, болезней и т. д. Хотя, конечно, «бесконечно» большие люди (великаны) и «бесконечно» маленькие люди (гномы) бывают только в сказках. Это говорит о том, что «хвосты» истинного распределения роста людей отличаются от нормального распределения.

7.4. Распределение Вейбулла.

Определение 7.4. СВ X имеет *распределение Вейбулла с параметрами* α и λ, где $\alpha > 0$ и $\lambda > 0$, если плотность имеет вид (рис. 7.7)

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha\lambda x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^\alpha}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Свойства распределения Вейбулла

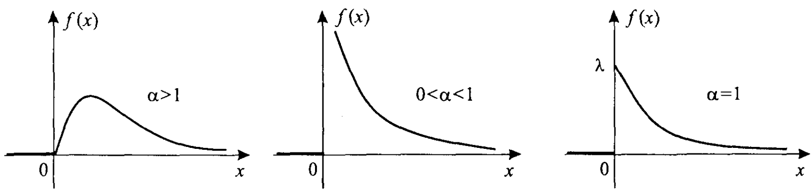

Рис. 7.7

1) Непосредственные вычисления показывают, что (рис. 7.8)

$$F_X(x) \triangleq \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x^\alpha}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

2) Приведем формулы для МО и дисперсии:

$$m_X = \lambda^{-1/\alpha}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right), \quad d_X = \lambda^{-2/\alpha}\left\{\frac{2}{\alpha}\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha^2}\left[\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2\right\},$$

где $\Gamma(x) \triangleq \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ — *гамма-функция*, значения которой задаются таблично.

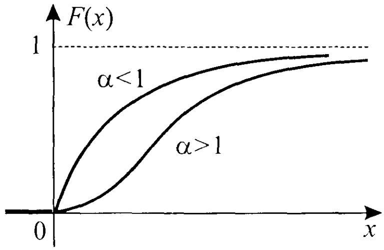

Рис. 7.8

3) Если $\alpha = 1$, то распределение Вейбулла превращается в экспоненциальное распределение с показателем λ.

Замечание 7.5. СВ, имеющая распределение Вейбулла, встречается в задачах надежности при оценке времени безотказной работы прибора.

7.5. Логарифмически нормальное распределение.

Определение 7.5. СВ $Y \triangleq e^X$, где $X \sim \mathrm{N}(m;\sigma^2)$, имеет *логарифмически нормальное (логнормальное) распределение* с параметрами m и $\sigma^2 > 0$.

Свойства логнормального распределения

1) Так как e^x — строго возрастающая функция, то учитывая выражение для плотности нормального распределения и свойство 5) $f(x)$, находим плотность логнормального распределения:

$$f_Y(y) = f_X(\psi(y))\psi'(y) = \left\| \begin{array}{l} \psi(y) = \ln y \\ \psi'(y) = 1/y \end{array} \right\| =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln y - m)^2}{2\sigma^2}\right), & y > 0, \\ 0, & y \leqslant 0. \end{cases}$$

График функции $f_Y(y)$ (рис. 7.9) асимметричен с максимумом в точке $y = e^{m-\sigma^2}$.

2) Найдем МО и дисперсию СВ Y. По определению

$$\mathbf{M}[Y] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(\ln y - m)^2}{2\sigma^2}} dy = \left\| \begin{array}{l} \text{замена перем.} \\ y = e^{\sigma(t+\sigma)+m} \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{e^{m+\sigma^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = e^{m+\sigma^2/2}.$$

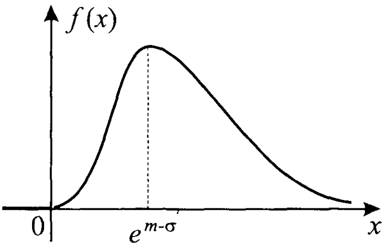

Рис. 7.9

Аналогично можно найти $\mathbf{M}[Y^2] = e^{2(\sigma^2+m)}$. Поэтому

$$\mathbf{D}[Y] = \mathbf{M}[Y^2] - \left(\mathbf{M}[Y]\right)^2 = e^{\sigma^2+2m}\left(e^{\sigma^2} - 1\right).$$

Замечание 7.6. Логнормальное распределение имеет широкое распространение в экономической статистике, статистической физике и биологии.

7.6. Типовые задачи.

Задача 7.1. Случайная величина $X \sim \mathbf{R}(0; a)$, $\mathbf{P}\{X > 1/3\} = 1/3$. Найти a и $\mathbf{M}[X^2]$.

Решение. Построив график плотности вероятности $f_X(x)$, нетрудно вычислить вероятность $\mathbf{P}\{X > 1/3\}$ как площадь прямоугольника со сторонами $1/a$ и $a - 1/3$. Разрешая получаемое уравнение

$$\frac{1}{a}\left(a - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

относительно a, находим $a = 1/2$. Используя теперь формулы математического ожидания и дисперсии для равномерного распределения

$\mathbf{R}(0;1/2)$, вычисляем

$$\mathbf{M}[X] \triangleq \frac{a+b}{2} = \frac{1}{4}, \qquad \mathbf{D}[X] \triangleq \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(1/2-0)^2}{12} = \frac{1}{48}.$$

Наконец,

$$\mathbf{M}[X^2] = \mathbf{D}[X] + (\mathbf{M}[X])^2 = \frac{1}{48} + \frac{1}{16} = \frac{1}{12}.$$

Ответ. $a = 1/2$, $\mathbf{M}[X^2] = 1/12$.

Задача 7.2. Случайная величина $X \sim \mathbf{E}(10)$. Вычислить $\mathbf{P}\{X > 100|X > 99\}$.

Решение. Воспользуемся определением условной вероятности:

$$\mathbf{P}\{X > 100|X > 99\} = \frac{\mathbf{P}\Big(\{X > 100\} \cdot \{X > 99\}\Big)}{\mathbf{P}\{X > 99\}}.$$

Поскольку $\{X > 100\} \subset \{X > 99\}$, то $\{X > 100\} \cdot \{X > 99\} = \{X > 100\}$. Следовательно,

$$\mathbf{P}\{X > 100|X > 99\} = \frac{\mathbf{P}\{X > 100\}}{\mathbf{P}\{X > 99\}}.$$

В числителе и знаменателе перейдем к противоположным событиям. Вероятности этих событий найдем, используя функцию распределения экспоненциального закона,

$$\mathbf{P}\{X > 100\} = 1 - \mathbf{P}\{X \leqslant 100\} = 1 - F_X(100) = e^{-10\cdot 100},$$

$$\mathbf{P}\{X > 99\} = 1 - \mathbf{P}\{X \leqslant 99\} = 1 - F_X(99) = e^{-10\cdot 99}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}\{X > 100|X > 99\} = \frac{e^{-1000}}{e^{-990}} = e^{-10} = 1 - F(1) = \mathbf{P}\{X > 1\}.$$

Ответ. $\mathbf{P}\{X > 100|X > 99\} = \mathbf{P}\{X > 1\} = e^{-10} = 4{,}68 \cdot 10^{-5}$.

Задача 7.3. Случайная величина $X \sim \mathbf{N}(10;20)$. При каких h равенство

$$\mathbf{P}\left\{|X - \mathbf{M}[X]| < h\sqrt{\mathbf{D}[X]}\right\} = \mathbf{P}\left\{|X - \mathbf{M}[X]| \geqslant h\sqrt{\mathbf{D}[X]}\right\}$$

будет верно?

Решение. Пусть $A = \left\{|X - \mathbf{M}[X]| < h\sqrt{\mathbf{D}[X]}\right\}$, тогда

$$\overline{A} = \left\{|X - \mathbf{M}[X]| \geqslant h\sqrt{\mathbf{D}[X]}\right\},$$

и потому имеем

$$\mathbf{P}\left\{|X - \mathbf{M}[X]| \geqslant h\sqrt{\mathbf{D}[X]}\right\} = 1 - \mathbf{P}\left\{|X - \mathbf{M}[X]| < h\sqrt{\mathbf{D}[X]}\right\}.$$

Вероятность $\mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}[X]| < h\sqrt{\mathbf{D}[X]}\}$ согласно свойству 5) $\mathbf{N}(m; \sigma^2)$, может быть вычислена с помощью функции Лапласа:

$$\mathbf{P}\left\{|X - \mathbf{M}[X]| < h\sqrt{\mathbf{D}[X]}\right\} = \mathbf{P}\left\{|X - \mathbf{M}[X]| < h\sigma\right\} = 2\Phi_0(h).$$

Таким образом, исходное уравнение сводится к виду $2\Phi_0(h) = 1 - 2\Phi_0(h)$, откуда $\Phi_0(h) = 1/4$. По табл. 1 функции Лапласа (с. 225) находим $h \approx 0{,}678$.

Ответ. $h \approx 0{,}678$.

Задача 7.4. Если соблюдается график движения трамваев, то среднее время ожидания пассажиром трамвая равно 3,5 минуты. Известно, что время ожидания имеет равномерный закон распределения. Минимальное время ожидания равно 0. Найти вероятность того, что пассажир будет ожидать трамвай от двух до пяти минут.

Решение. Обозначим время ожидания трамвая через X. Согласно условию задачи $X \sim \mathbf{R}(a; b)$, где $a = 0$, а $\mathbf{M}[X] = 3{,}5$. Найдем параметры закона распределения, решив следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{M}[X] = \dfrac{a+b}{2} = 3{,}5; \\ a = 0. \end{cases}$$

Получаем, что второй параметр закона распределения $b = 7$. Тогда

$$\mathbf{P}\{2 \leqslant X \leqslant 5\} = \int_2^5 f(x)\,dx,$$

где

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{7}, & x \in [0, 7], \\ 0, & x \notin [0, 7]. \end{cases}$$

Получаем $\mathbf{P}\{2 \leqslant X \leqslant 5\} = 3/7$.

Ответ. $\mathbf{P}\{2 \leqslant X \leqslant 5\} = 3/7$.

Задача 7.5. Время ремонта и обслуживания автомобиля после одной поездки случайно и удовлетворительно описывается экспоненциальным законом распределения. Было замечено, что в текущем сезоне на ремонт и обслуживание автомобиля после одной поездки тратилось в среднем 5 минут. Найти вероятность того, что при очередной поездке это время не превысит 30 минут.

Решение. Пусть X — время ремонта и обслуживания автомобиля после одной поездки. По условию задачи $X \sim \mathbf{E}(\lambda)$ и $\mathbf{M}[X] = 5$. По формуле связи $\mathbf{M}[X]$ и λ получаем, что $\mathbf{M}[X] = \frac{1}{\lambda} = 5$. Отсюда находим $\lambda = 1/5$. Требуется найти $\mathbf{P}\{X \leqslant 30\}$. Плотность вероятности СВ X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-x/5}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Следовательно, получаем

$$\mathbf{P}\{X \leqslant 30\} = \int_0^{30} \frac{1}{5} e^{-x/5} dx = -e^{-x/5}\Big|_0^{30} = 1 - e^{-6} \approx 0{,}998.$$

Ответ. $\mathbf{P}\{X \leqslant 30\} = 1 - e^{-6} \approx 0{,}998$.

Задача 7.6. Рост взрослого мужчины удовлетворительно описывается нормальным законом распределения. По статистике средний рост составляет 175 см, а среднеквадратическое отклонение равно 7 см. Найти вероятность того, что рост наугад взятого мужчины будет отличаться от среднего роста не больше чем на 7 см.

Решение. Обозначим рост наугад взятого взрослого мужчины через X. По условию задачи $X \sim \mathbf{N}(175; 49)$. Требуется найти $\mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}[X]| \leqslant 7\}$. Так как интервал $(\mathbf{M}[X] - 7, \mathbf{M}[X] + 7)$ симметричен относительно $\mathbf{M}[X]$, то

$$\mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}[X]| \leqslant 7\} = 2\Phi_0\left(\frac{7}{\sqrt{\mathbf{D}[X]}}\right) = 2\Phi_0(1) \approx 2 \cdot 0{,}3413 = 0{,}6826.$$

Ответ. Искомая вероятность приблизительно равна 0,6826.

§ 8. Задачи для самостоятельного решения

1. Функция распределения СВ X непрерывна. Может ли СВ X быть дискретной СВ?

2. СВ X принимает два значения -10 и 10 с вероятностями $1/3$ и $2/3$ соответственно. Является ли она непрерывной СВ?

3. СВ X принимает только два различных значения a $(a > 0)$ и $-a$ с вероятностью $1/2$. Верно ли, что $\mathbf{M}[X] > a$ и $\mathbf{D}[X] < a^2$?

4. Закон распределения случайной величины X выглядит следующим образом (см. табл. 8.1). Построить ряды распределения и найти математические ожидания следующих случайных величин:

Таблица 8.1

X	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$
$\mathbf{P}$	$0{,}1$	$0{,}4$	$0{,}1$	$0{,}3$	$0{,}1$

а) $Y = 10X - 1$; *б*) $Y = -X^2$; *в*) $Y = 2^X$.

5. СВ $X \sim \mathbf{Bi}(4; 1/3)$. Найти наиболее и наименее вероятные значения X.

6. СВ $X \sim \mathbf{Bi}(n; p)$, $Y \sim \mathbf{\Pi}(\lambda)$. Сравнить $\mathbf{M}[X] \cdot \mathbf{D}[Y]$ и $\mathbf{M}[Y] \times \times \mathbf{D}[X]$.

7. СВ $X \sim \mathbf{Bi}(7; 1/3)$, $Y \sim \mathbf{\Pi}(1{,}3)$. Вычислить разность между наиболее вероятными значениями СВ X и Y.

8*. Для СВ X и Y заданы ряды распределений (см. табл. 8.2 и 8.3).

Таблица 8.2

X	-1	0
$\mathbf{P}$	$1/2$	$1/2$

Таблица 8.3

Y	0	1
$\mathbf{P}$	$1/2$	$1/2$

Найти все x, для которых справедливо равенство $F_X(F_Y(x)) = F_Y(F_X(x))$.

9. СВ X принимает только два различных значения 1 и -1 с вероятностью $1/2$. Вычислить $F_X(1/2)$ и $F_X(-1/2)$.

10. СВ $X \sim \mathbf{Bi}(1; 0{,}2)$. Как распределена СВ $Y = 1 - X^n$?

11. СВ $X \sim \mathbf{Bi}(1; 1/2)$. Сравнить $(\mathbf{M}[X])^2$ и $\mathbf{D}[X]$.

12. СВ $X \sim \mathbf{Bi}(4; 0{,}1)$. Найти $F_X(-10)$.

13. Существуют ли такие законы распределений дискретных случайных величин, для которых:

а) дисперсия всегда меньше математического ожидания (для любых параметров закона распределения)?

б) $\mathbf{D}[X] = \mathbf{M}[X]$?

14. СВ $X \sim \mathbf{Bi}(3; 0{,}2)$. Вычислить $\mathbf{P}\{X > 0\}$.

15. СВ $X \sim \mathbf{\Pi}(1)$. Найти наиболее вероятное значение X.

16. СВ $X \sim \mathbf{\Pi}(23)$, а $Y = 1 - X$. Вычислить $F_Y(2)$.

17. СВ $X \sim \mathbf{\Pi}(\mathbf{M}[Y])$, а СВ $Y \sim \mathbf{\Pi}(\mathbf{M}[X])$. Сравнить $\mathbf{D}[X]$ и $\mathbf{D}[Y]$.

18. Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ являются плотностями вероятностей. Является ли функция $f_3(x) = (f_1(x) + 2f_2(x))/3$ плотностью вероятности?

19. Функции $G(x)$ и $H(x)$ являются функциями распределений некоторых СВ. Является ли функция $F(x) = H(x) + G(x)$ функцией распределения некоторой СВ?

20. СВ $X \sim \mathbf{R}(-1;1)$. Сравнить $\mathbf{P}\{X < \mathbf{M}[X]\}$ и $\mathbf{P}\{X > \mathbf{M}[X]\}$. Найти $\mathbf{P}\left\{|X - \mathbf{M}[X]| < \sqrt{\mathbf{D}[X]}\right\}$.

21. СВ $X \sim \mathbf{R}(-1;0)$, а $Y \sim \mathbf{R}(0;1)$. Сравнить $F_X(F_Y(1/2))$ и $F_Y(F_X(1/2))$.

22. СВ $X \sim \mathbf{E}(1)$. Сравнить $\mathbf{P}\{X < \mathbf{M}[X]\}$ и $\mathbf{P}\{X < \mathbf{D}[X]\}$.

23. СВ $X \sim \mathbf{E}(\mathbf{M}[Y])$, $Y \sim \mathbf{E}(\mathbf{D}[X])$. Найти $\mathbf{M}[X]$, $\mathbf{D}[X]$, $\mathbf{M}[Y]$ и $\mathbf{D}[Y]$.

24. СВ $X \sim \mathbf{N}(0;1)$, а $Y \sim \mathbf{R}(0;1)$. Сравнить $\mathbf{P}\{0 < X < 1\}$ и $\mathbf{P}\{0 < Y < 1\}$.

25. Пятнадцать раз подбрасывали три игральных кости. Пусть случайная величина X — число подбрасываний, при которых ровно на двух костях появилось по одному очку. Определить закон распределения случайной величины X.

26. После полета самолет проходит технический осмотр и обслуживание. Число незначительных неисправностей, появившихся во время полета самолета, удовлетворительно описывается распределением Пуассона с параметром a. Предположим, что $a = 1$. Если неисправностей не обнаружено, то техническое обслуживание продолжается в среднем два часа. Если обнаружены одна или две неисправности, то на устранение каждой из них тратится еще по полчаса. Если обнаружено больше двух неисправностей, то самолет ставится на профилактический ремонт, где он находится в среднем четыре часа, и таким образом общее время его технического обслуживания и ремонта составляет 6 часов. Найти закон распределения времени T технического обслуживания и ремонта самолета, математическое ожидание СВ T. Построить график функции распределения T.

27. В среднем каждый второй автомобиль ВАЗ способен пройти первые 10 тыс. км без серьезных поломок, требующих гарантийного ремонта. Организация, торгующая автомобилями, заключила договор с автосервисом на гарантийное обслуживание проданных автомобилей. Согласно договору, организация выплачивает сервису 10 тыс.

рублей по факту каждого обращения. Последующее гарантийное обслуживание берет на себя сервис. Прибыль компании от продажи одного автомобиля составляет 15 тыс. рублей без учета отчислений на гарантийный ремонт. Дать ответы на вопросы:

а) Какова средняя прибыль компании от продажи десяти автомобилей?

б) Какое минимальное количество автомобилей нужно продать организации за месяц, чтобы средняя месячная прибыль (с учетом выплат по гарантии) была бы не ниже 300 тыс. рублей?

в) Какова наиболее вероятная окончательная прибыль компании (с учетом выплат по гарантии) от продажи 10 автомобилей?

28. У торгового агента имеется пять адресов потенциальных покупателей, к которым он обращается по списку с предложением приобрести реализуемый фирмой товар. Вероятность согласия потенциальных покупателей оценивается соответственно как $0{,}5$, $0{,}4$, $0{,}4$, $0{,}3$ и $0{,}25$. Покупатели принимают решение о покупке товара независимо друг от друга. Агент обращается к ним в указанном порядке пока кто-нибудь из них не согласится приобрести товар. Составить ряд распределения СВ X — числа покупателей, к которым обратится агент. Найти математическое ожидание и дисперсию этой величины.

29. Заявки, рассылаемые фирмой, удовлетворяются примерно в 30% случаев независимо друг от друга. Фирма разослала 200 заявок. Найти:

а) математическое ожидание и дисперсию числа удовлетворенных заявок X;

б) $\mathbf{P}\{X = [m_X]\}$, где $[\cdot]$ — целая часть числа.

30. Случайным образом из колоды карт (36 карт) последовательно выкладывают на стол карты лицевой стороной вверх. На карты первой колоды таким же образом кладут сверху карты второй колоды (36 карт). Найти среднее число совпадений карт верхней и нижней колоды.

31. Вероятность того, что при трех независимых выстрелах стрелок попадет в цель хотя бы один раз, равна $0{,}992$. Найти математическое ожидание и дисперсию числа попаданий при двадцати выстрелах.

32. Лотерея заключается в розыгрыше трех номеров из шести. Порядок выпадения выигрышных номеров неважен. Выигрыш при угадывании одного номера из трех составляет 20 рублей, двух номеров из трех — 100 рублей, всех трех номеров — 500 рублей. Найти средний выигрыш при покупке одного билета лотереи. Построить график функции распределения размера выигрыша.

33. Необходимо исследовать 10 тыс. проб руды. Вероятность промышленного содержания металла в каждой пробе руды равна

0,2. Определить математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение числа проб с промышленным содержанием металла.

34. Плотность вероятности случайной величины X имеет следующий вид:

$$f(x) = \begin{cases} 3h, & x \in [-1, 0], \\ h, & x \in [1, 2], \\ 0 \text{ — } & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти h, функцию распределения $F(x)$ СВ X, $\mathbf{M}[(2-X)(X-3)]$ и $\mathbf{D}[2-3X]$.

35. Станок-автомат изготавливает валики. Контролируется их диаметр X, удовлетворительно описываемый гауссовским законом распределения со средним значением $m = 10$ мм. Каково среднеквадратическое отклонение диаметра валика, если с вероятностью 0,99 он заключен в интервале (9,7, 10,3)?

36. Время X безотказной работы станка имеет экспоненциальное распределение. Вероятность того, что станок не откажет за 5 часов работы, равна 0,60653. Найти $\mathbf{M}[X]$, $\mathbf{D}[X]$, $\mathbf{M}[X^2]$.

37. Случайная величина X имеет гауссовское распределение вероятностей со средним значением 25. Вычислить вероятность попадания этой СВ в интервал $(35, 40)$, если она попадает в интервал $(20, 30)$ с вероятностью 0,2.

38. Найти p-квантиль распределения $\mathbf{R}(a; b)$.

39. Если $f(x)$ — плотность вероятности, то будет ли функция $f(-x)$ плотностью вероятности?

40. СВ $X \sim \mathbf{R}(-1; 0)$, а $Y \sim \mathbf{R}(0; 1)$. Сравнить $F_X(f_Y(\mathbf{M}[X]))$ и $F_Y(f_X(\mathbf{M}[Y]))$.

41. СВ $X \sim \mathbf{E}(1)$. Вычислить $\mathbf{P}\{0 < X < 1\}$.

42. СВ $X \sim \mathbf{E}(1)$. Сравнить $F_X(\mathbf{M}[X])$ и $f_X(\mathbf{M}[X])$, $F_X(-\mathbf{M}[X])$ и $f_X(-\mathbf{M}[X])$.

43. СВ $X \sim \mathbf{N}(0; 1)$. Вычислить $\mathbf{M}[X^3]$.

44. СВ $X \sim \mathbf{N}(2; 1)$. Сравнить $\mathbf{P}\{X < \mathbf{M}[X]\}$ и $\mathbf{P}\{X > \mathbf{D}[X]\}$.

45. СВ $X \sim \mathbf{N}(\pi; e)$. Вычислить $F_X(\mathbf{M}[X])$.

46. Функция распределения СВ X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Найти $\mathbf{M}[(X-4)(5-X)]$, $\mathbf{P}\{X \leqslant \mathbf{M}[X]\}$ и $\mathbf{D}[3-2X]$.

47. Плотность вероятности СВ X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} cx, & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

Найти константу c, $\mathbf{M}[X]$, $\mathbf{D}[X]$, $\mathbf{P}\{0{,}5 < X < 2\}$. Построить график функции распределения $F_X(x)$.

48. Заданы две СВ $X \sim \mathbf{R}(0;1)$ и $Y \sim \mathbf{E}(1)$. Сравнить вероятности того, что каждая из них не превышает по модулю 2.

49. СВ X имеет плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-12)^2}{18}\right\}.$$

Какова вероятность того, что X попадет в интервал $(0,12)$? Чему равен второй начальный момент этой СВ? Найти $\mathbf{D}[5-3X]$.

50. Известно, что среднее время ожидания очередного покупателя, подошедшего к кассе, равно 0,2 минуты. Время ожидания кассиром очередного покупателя можно считать СВ, имеющей показательный закон распределения. Кассиру нужно сменить ленту кассового аппарата. На это ему требуется две минуты. Какова вероятность того, что за это время не образуется очередь, т. е. к кассе не подойдет ни один покупатель?

51. Автомат изготавливает шарики для подшипников. Шарик считается принятым, если отклонение X диаметра шарика от заданного размера по абсолютной величине меньше 0,7 мм. СВ X можно считать нормально распределенной с нулевым средним и среднеквадратическим отклонением $\sigma = 0{,}4$ мм. Сколько в среднем будет годных шариков из 50 изготовленных?

52. СВ $X \sim \mathbf{R}(-1;8)$. Найти точку, в которой функция распределения равна 1/3.

53. СВ X имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 1 - 1/x, & x \geqslant 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

Найти a, для которого $\mathbf{P}\{X > a\} = 1/3$.

54. Найти p-квантиль экспоненциального закона распределения с параметром λ.

55. Функция распределения непрерывной СВ X определяется формулой

$$F(x) = c + b \operatorname{arctg} x.$$

Найти:

а) постоянные b и c;

б) плотность вероятности СВ X.

56. Вероятность изготовления сверла повышенной хрупкости (бракованного) равна 0,02. Сверла укладываются в коробки по 100 штук. Воспользовавшись теоремой Пуассона, определить вероятность того, что количество бракованных сверел в коробке не превышает двух.

57. Вероятность изготовления бракованной детали на станке равна 0,05. Пусть X — число деталей, изготавливаемых на станке с начала его работы до появления первой бракованной детали. Найти: *а*) $\mathbf{M}[X]$; *б*) $F_X(2)$.

58. Из колоды, состоящей из 36 карт, последовательно достают по одной карте, каждый раз возвращая обратно. Найти: *а*) среднее число извлеченных карт до появления туза пик; *б*) вероятность того, что до появления туза пик придется извлекать не менее 3 карт.

59. При проведении операции срочно потребовался донор с редкой группой крови. По статистике такая группа крови встречается у 5 % людей. Требуется ответить на вопросы:

а) Сколько в среднем придется опросить людей, чтобы найти человека с такой группой крови?

б) Какова вероятность того, что из 10 сотрудников, работающих в операционной, найдется хотя бы один с такой группой крови?

60. В группе из 10 студентов 8 москвичей и двое иногородних. Для социологического опроса случайным образом выбирают двух студентов из этой группы. Пусть X — число москвичей среди выбранных. Построить ряд распределения СВ X и найти ее математическое ожидание.

61*. В стае 1000 птиц, из которых 50 окольцованных. Орнитологами поймано 100 птиц.

а) Каково среднее число окольцованных птиц среди пойманных?

б) Какова вероятность того, что среди пойманных нет окольцованных птиц?

ГЛАВА III

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕКТОРЫ

§ 9. Двумерные случайные величины

9.1. Функция распределения.

Определение 9.1. *Двумерным случайным вектором* (*или двумерной СВ*) $Z \triangleq \mathrm{col}(X, Y)$ называется вектор, компонентами которого являются СВ $X = X(\omega)$ и $Y = Y(\omega)$, определенные на одном и том же пространстве Ω элементарных событий ω.

Пример 9.1. Скорость ветра в текущий момент времени в конкретной точке на поверхности Земли можно представить в виде двумерной СВ.

Определение 9.2. Функция

$$F(x, y) \triangleq \mathbf{P}(\{\omega : X(\omega) \leqslant x\}\,\{\omega : Y(\omega) \leqslant y\}) \triangleq \mathbf{P}\{X \leqslant x,\ Y \leqslant y\},$$

определенная для всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, называется *функцией распределения* двумерной СВ $Z = \mathrm{col}(X, Y)$.

Пример 9.2. Пусть опыт G состоит в одновременном подбрасывании двух монет. Элементарным событием будем считать положение упавших монет. Пусть СВ $X(\omega)$ — число выпавших «гербов», а СВ $Y(\omega)$ — расстояние между монетами. В этом случае $X(\omega)$ — дискретная СВ со значениями $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, а $Y(\omega)$ — непрерывная СВ с реализациями в $\mathbb{R}^1$.

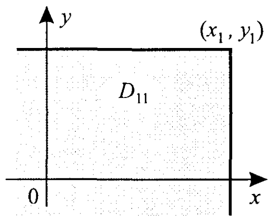

Рис. 9.1

Значение функции распределения $F(x_1, y_1)$ равно вероятности попадания двумерной СВ (X, Y) в квадрант D_{11} с вершиной в точке (x_1, y_1) и сторонами, параллельными осям координат (рис. 9.1).

Свойства $F(x,y)$

1) $F(x,y)$ определена для всех $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, так как вероятность $\mathbf{P}\{X \leqslant x,\ Y \leqslant y\}$ определена для всех $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2) $0 \leqslant F(x,y) \leqslant 1$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^1$. По аксиоме **A1** и свойству 5)P для любого события A выполняется $0 \leqslant \mathbf{P}(A) \leqslant 1$, поэтому $F(x,y) \in [0,1]$.

3) $F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = F(-\infty,-\infty) = 0$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^1$. Действительно, рассмотрим следующую последовательность событий $B_n \triangleq \{\omega\colon\ X(\omega) \leqslant -n\}$, где $n = 1, 2, \ldots$ По аналогии с доказательством свойства 3) $F(x)$ устанавливаем, что

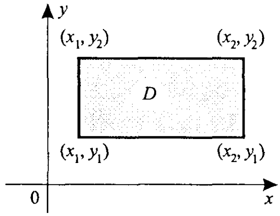

Рис. 9.2

$$F(-\infty,y) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(B_n) = \mathbf{P}(\varnothing) = 0.$$

4) $F_Y(y) = F(+\infty,y),\ F_X(x) = F(x,+\infty)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^1$, где $F_X(y)$ и $F_Y(x)$ — функции распределения СВ X и Y соответственно. Это свойство можно установить, следуя доказательству свойства 3) $F(x)$, так как $\{\omega : X(\omega) \leqslant +\infty\} = \{\omega : Y(\omega) \leqslant +\infty\} = \Omega$.

5) $F(+\infty,+\infty) = 1$. В силу свойств 4) $F(x,y)$ и 3) $F(x)$ имеем

$$F(+\infty,+\infty) = F_X(+\infty) = 1.$$

6) $F(x,y)$ — монотонно неубывающая по каждому из аргументов. Так для $\Delta x > 0$ имеем

$$F(x+\Delta x,y) \triangleq \mathbf{P}\{X \leqslant x+\Delta x,\ Y \leqslant y\} =$$
$$= \mathbf{P}\{X \leqslant x,\ Y \leqslant y\} + \mathbf{P}\{x < X \leqslant x+\Delta x,\ Y \leqslant y\} \geqslant F(x,y),$$

Монотонность $F(x,y)$ по y доказывается аналогично.

7) Вероятность попадания СВ Z в прямоугольник $D = \{x_1 < x \leqslant x_2,\ y_1 < y \leqslant y_2\}$ равна

$$\mathbf{P}(D) = F(x_2,y_2) + F(x_1,y_1) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1),$$

где $F(x_i,y_j)$, $i,j = 1,2$, — вероятности попадания СВ Z в квадранты D_{ij} с соответствующими вершинами (x_i,y_j), $i,j = 1,2$ (рис. 9.2).

Представим квадранты D_{22} и D_{12} в виде суммы непересекающихся множеств:

$$D_{22} = D + D_{12}\backslash D_{11} + D_{21}, \quad D_{12} = D_{12}\backslash D_{11} + D_{11}.$$

Тогда по формуле сложения вероятностей имеем

$$\mathbf{P}(D_{22}) = \mathbf{P}(D) + \mathbf{P}(D_{12}\backslash D_{11}) + \mathbf{P}(D_{21}),$$
$$\mathbf{P}(D_{12}) = \mathbf{P}(D_{12}\backslash D_{11}) + \mathbf{P}(D_{11}).$$

Вычитая из первого уравнения второе и преобразовывая его, получаем

$$\mathbf{P}(D) = \mathbf{P}(D_{22}) + \mathbf{P}(D_{11}) - \mathbf{P}(D_{12}) - \mathbf{P}(D_{21}).$$

Но $\mathbf{P}(D_{ij}) = F(x_i, y_j)$, $i = \overline{1,2}$, $j = \overline{1,2}$. Подставляя данные значения функции распределения $F(x,y)$ в формулу для $\mathbf{P}(D)$, приходим к требуемому утверждению.

Если функция распределения $F(x,y)$ непрерывна, то доказанная формула верна и для замкнутого прямоугольника $D = \{x_1 \leqslant x \leqslant x_2, y_1 \leqslant y \leqslant y_2\}$.

Определение 9.3. Двумерная СВ $Z = \mathrm{col}(X,Y)$ называется *дискретной*, если СВ X и Y дискретны.

Простейшим способом задания закона распределения дискретной двумерной СВ Z является таблица распределения (см. табл. 9.1).

Таблица 9.1

$X\backslash Y$	y_0	y_1	$\cdots$	y_m
x_0	p_{00}	p_{01}	$\cdots$	p_{0m}
x_1	p_{10}	p_{11}	$\cdots$	p_{1m}
$\vdots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_n	p_{n0}	p_{n1}	$\cdots$	p_{nm}

Здесь $p_{ij} \triangleq \mathbf{P}(\{X = x_i\}\{Y = y_j\}) = \mathbf{P}\{X = x_i, Y = y_j\}$, $i = \overline{0,n}$, $j = \overline{0,m}$, с условием нормировки: $\sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{m} p_{ij} = 1$. Функция распределения имеет вид

$$F(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} p_{ij} l(x - x_i) l(y - y_j),$$

где $l(\cdot)$ — единичные ступенчатые функции (см. определение 5.6).

Определение 9.4. СВ X и Y называются *независимыми*, если

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \text{ для всех } x \in \mathbb{R}^1, y \in \mathbb{R}^1.$$

Пусть $Z = \mathrm{col}(X,Y)$ — дискретная СВ, т.е. X и Y — одномерные дискретные СВ с реализациями $x_0, \ldots, x_n$ и $y_0, \ldots, y_m$. Можно показать, что СВ X и Y независимы тогда и только тогда, когда для всех $i = \overline{0,n}$; $j = \overline{0,m}$

$$\mathbf{P}\{X = x_i, Y = y_j\} = \mathbf{P}\{X = x_i\}\mathbf{P}\{Y = y_j\}.$$

9.2. Плотность распределения.

Определение 9.5. Неотрицательная кусочно-непрерывная функция $f(x,y)$ называется *плотностью распределения* (*плотностью вероятности*) двумерной СВ $Z = \mathrm{col}(X,Y)$, если

$$F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(t,\tau)\,dt\,d\tau,$$

где использована символическая запись для двойного интеграла по области $D \triangleq \{t \leqslant x, \tau \leqslant y\}$. Такая двумерная СВ Z называется *непрерывной*.

Свойства $f(x,y)$

1) $f(x,y) \geqslant 0$ для всех $x,y \in \mathbb{R}^1$. Это вытекает из определения 9.5.

2) Во всех точках непрерывности функции $f(x,y)$:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}.$$

Этот факт вытекает из свойств интеграла с переменным верхним пределом и определения $f(x,y)$.

3) $\mathbf{P}(D) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \Big(\int\limits_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy \Big)\,dx$, где $D \triangleq \{x_1 \leqslant x \leqslant x_2,\ y_1 \leqslant y \leqslant y_2\}$.

По свойству 7) $F(x,y)$ и определению 9.5 имеем

$$\mathbf{P}(D) = F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) + F(x_1,y_1) \triangleq$$
$$\triangleq \int\limits_{-\infty}^{x_2} \Big(\int\limits_{-\infty}^{y_2} f(x,y)\,dy \Big) dx - \int\limits_{-\infty}^{x_2} \Big(\int\limits_{-\infty}^{y_1} f(x,y)\,dy \Big) dx - \int\limits_{-\infty}^{x_1} \Big(\int\limits_{-\infty}^{y_2} f(x,y)\,dy \Big) dx +$$
$$+ \int\limits_{-\infty}^{x_1} \Big(\int\limits_{-\infty}^{y_1} f(x,y)\,dy \Big) dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} \Big(\int\limits_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dy \Big) dx.$$

4) $\mathbf{P}(D) = \iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy$, где D — произвольная квадрируемая область на плоскости $\mathbb{R}^2$. Доказательство проведем для непрерывной $f(x,y)$. Рассмотрим бесконечно малый прямоугольник $\Delta D \triangleq \{x \leqslant X \leqslant x + \Delta x,\ y \leqslant Y \leqslant y + \Delta y\}$. Согласно свойству 3) $f(x,y)$ можно записать

$$\mathbf{P}(\Delta D) = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} \Big(\int\limits_{y}^{y+\Delta y} f(t,\tau)\,d\tau \Big)\,dt = \left\| \begin{array}{l} \text{по теореме} \\ \text{о среднем} \\ \text{значении} \end{array} \right\| = f(\widetilde{x},\widetilde{y})\Delta y \Delta x,$$

где $\widetilde{x} \in (x, x + \Delta x)$, $\widetilde{y} \in (y, y + \Delta y)$. При этом $f(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \to f(x, y)$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Таким образом, элемент вероятности $f(x, y)\,dx\,dy$ с точностью до бесконечно малых второго порядка равен вероятности попадания двумерной СВ $Z = \mathrm{col}(X, Y)$ в бесконечно малый прямоугольник, прилегающий к точке (x, y), со сторонами, параллельными осям координат. Так как квадрируемую область $D \subset \mathbb{R}^2$ можно представить с любой степенью точности в виде объединения конечного числа непересекающихся бесконечно малых прямоугольников ΔD, то из аксиомы **А3** следует формула для вероятности попадания СВ (X, Y) в D.

5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx\,dy = 1$, поскольку по свойству 5) $F(x, y)$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx\,dy \triangleq F(+\infty, +\infty) = 1.$$

6) $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x}\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t, y)\,dy\Big)\,dt$, $F_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{y}\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, \tau)\,dx\Big)\,d\tau$,

где $F_X(x)$, $F_Y(y)$ — функции распределения СВ X и Y. Например, по свойству 4) $F(x, y)$

$$F_X(x) = F(x, +\infty) \triangleq \int\limits_{-\infty}^{x}\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t, y)\,dy\Big)\,dt.$$

Для $F_Y(y)$ утверждение доказывается аналогично.

7) $f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dy$, $f_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx$. Это вытекает из свойства 6) $f(x, y)$ и определения 5.8. Свойство 7) $f(x, y)$ позволяет по плотности вероятности двумерной СВ Z найти плотности вероятности одномерных СВ X и Y.

8) Пусть СВ $V \triangleq \varphi(X, Y)$, где X, Y — непрерывные СВ с совместной плотностью $f(x, y)$, а $\varphi(x, y)$ — заданная скалярная функция аргументов $x, y \in \mathbb{R}^1$, такая, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int |\varphi(x, y)| f(x, y)\,dx\,dy < < \infty$. Тогда, пользуясь линейными свойствами интеграла, можно показать, что

$$\mathbf{M}[V] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y) f(x, y)\,dx\,dy.$$

Причем, если $\varphi(x,y) \triangleq \sum\limits_{k=1}^{m} \varphi_k(x,y)$, то, пользуясь линейными свойствами интеграла, можно показать, что $\mathbf{M}[V] = \sum\limits_{k=1}^{m} \mathbf{M}[V_k]$, где $V_k \triangleq \varphi_k(X,Y)$, $k = \overline{1,m}$.

9) Для независимости непрерывных СВ X и Y достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

во всех точках непрерывности этих функций. Действительно, по определению плотности

$$\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(t,\tau)\,dt\,d\tau = F(x,y) = \left\| \begin{array}{l} \text{в силу незави-} \\ \text{симости } X \text{ и } Y \end{array} \right\| = F_X(x)F_Y(y) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \int\limits_{-\infty}^{y} f_Y(\tau)\,d\tau = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f_X(t) f_Y(\tau)\,dt\,d\tau.$$

Откуда и следует данное свойство.

10) Если непрерывные СВ X и Y независимы, то справедлива *формула свертки плотностей*, т. е. плотность распределения СВ $V \triangleq X + Y$ имеет вид

$$f_V(v) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(v-x)\,dx,$$

где $f_X(x)$, $f_Y(y)$ — плотность распределения СВ X и Y. Действительно, пусть $D \triangleq \{x,y\colon\ x + y \leqslant v\}$. Тогда по свойствам 2) $f(x,y)$ и 8) $f(x,y)$ получаем

$$F_V(v) \triangleq \mathbf{P}\{X + Y \leqslant v\} = \iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{D} f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \Big(\int\limits_{-\infty}^{v-x} f_Y(y)\,dy \Big)\,dx = \| y \triangleq t - x \| =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \Big(\int\limits_{-\infty}^{v} f_Y(t-x)\,dt \Big)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{v} \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(t-x)\,dx \Big)\,dt.$$

Отсюда, согласно определению 5.8, вытекает формула свертки.

Можно показать также, что верно равенство

$$f_V(v) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(v-y) f_Y(y)\, dy.$$

Пример 9.3. Пусть имеются равномерно распределенные СВ $X \sim \mathbf{R}(a;b)$ и $Y \sim \mathbf{R}(a;b)$, которые независимы.

Пользуясь формулой свертки, найдем плотность вероятности СВ $Z \triangleq X + Y$. Учтем, что в данном случае подынтегральное выражение отлично от нуля лишь когда $2a \leqslant v \leqslant 2b$, а именно

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad \text{если } a \leqslant x \leqslant b,$$

$$f_Y(v-x) = \frac{1}{b-a}, \quad \text{если } a \leqslant v-x \leqslant b.$$

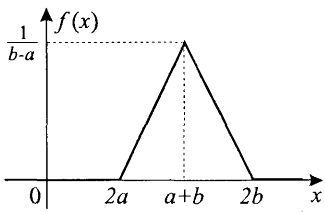

Рис. 9.3

Рассматривая два случая взаимного расположения отрезков, на которых плотности одновременно отличны от нуля, получаем

$$f_V(v) = \frac{1}{(b-a)^2} \int\limits_{a}^{v-a} dx = \frac{v-2a}{(b-a)^2}, \quad \text{если } 2a \leqslant v \leqslant a+b,$$

$$f_V(v) = \frac{1}{(b-a)^2} \int\limits_{v-b}^{b} dx = \frac{2b-v}{(b-a)^2}, \quad \text{если } a+b < v \leqslant 2b.$$

Таким образом, получаем выражение для плотности *треугольного распределения* (*распределения Симпсона*) (рис. 9.3):

$$f_V(v) = \begin{cases} 0, & v < 2a, \ v > 2b, \\ \dfrac{v-2a}{(b-a)^2}, & 2a \leqslant v \leqslant a+b, \\ \dfrac{2b-v}{(b-a)^2}, & a+b \leqslant v \leqslant 2b. \end{cases}$$

Пример 9.4. Пусть имеются СВ $X \sim \mathbf{N}(m_X; \sigma_X^2)$ и $Y \sim \mathbf{N}(m_X; \sigma_X^2)$, которые независимы. Найдем плотность вероятности СВ $Z = X + Y$.

Пользуясь формулой свертки, получаем

$$f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2} - \frac{(z-x-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right\} dx.$$

Из интегрального исчисления известно, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-ax^2-2bx-c\right\}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left\{-\frac{ac-b^2}{a}\right\}.$$

В нашем случае

$$a = \frac{1}{2}\,\frac{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}{\sigma_X^2\sigma_Y^2}, \quad b = \frac{m_X}{2\sigma_X^2} + \frac{z-m_Y}{2\sigma_Y^2}, \quad c = \frac{m_X^2}{2\sigma_X^2} + \frac{(z-m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}.$$

Таким образом, из структуры плотности следует, что СВ Z имеет нормальное распределение $\mathbf{N}(m_Z;\sigma_Z^2)$, где параметры m_Z и σ_Z^2 можно найти из условия нормировки плотности, но проще это сделать, основываясь на свойствах МО и дисперсии, а именно: $m_Z = \mathbf{M}[X + Y] = m_X + m_Y$, $\sigma_Z^2 = \mathbf{D}[X+Y] = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$.

9.3. Типовые задачи.

Задача 9.1. Предприятие имеет две поточные линии по сборке некоторой продукции. Технологические процессы на линиях связаны между собой. Рассмотрим случайные величины: X — количество единиц продукции, собранной за день на первой линии, а Y — на второй линии. Совместное распределение этих величин задано табл. 9.2.

Таблица 9.2

$Y\backslash X$	0	1
0	1/8	0
1	1/4	1/8
2	1/8	3/8

Найти:

а) частные распределения случайных величин X и Y;

б) распределение, математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = X + Y$ — суммарного количества единиц продукции, выпускаемой предприятием за день.

Решение. *а*) Согласно правилам построения частных распределений компонент случайного вектора, получим

$$\mathbf{P}\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{3}\mathbf{P}\{X = x_i, Y = y_j\}, \qquad i = \overline{1,\,2}. \tag{9.1}$$

Таблица 9.3

X	0	1
$\mathbf{P}$	1/2	1/2

Таблица 9.4

Y	0	1	2
$\mathbf{P}$	1/8	3/8	1/2

Таким образом, получаем ряд распределения СВ X, представленный в табл. 9.3. Аналогичным образом строим ряд распределения для случайной величины Y (см. табл. 9.4).

б) Случайная величина Z может принимать целые значения от 0 до 3. Определим вероятности, с которыми Z принимает эти значения:

$$\mathbf{P}\{Z=0\} = \mathbf{P}\{X=0, Y=0\} = \frac{1}{8},$$

$$\mathbf{P}\{Z=1\} = \mathbf{P}\Big(\{X=1, Y=0\} + \{X=0, Y=1\}\Big).$$

Так как события $\{X=1, Y=0\}$ и $\{X=0, Y=1\}$ несовместны, то согласно формуле сложения вероятностей имеем

$$\mathbf{P}\{Z=1\} = \mathbf{P}\{X=1, Y=0\} + \mathbf{P}\{X=0, Y=1\} = \frac{1}{4}.$$

Аналогично, для других возможных значений Z

$$\mathbf{P}\{Z=2\} = \mathbf{P}\{\{X=0, Y=2\} + \{X=1, Y=1\}\} =$$
$$= \mathbf{P}\{X=0, Y=1) + \mathbf{P}\{X=1, Y=1\} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4},$$

$$\mathbf{P}\{Z=3\} = \mathbf{P}\{X=1, Y=2\} = \frac{3}{8}.$$

Таким образом, ряд распределения случайной величины Z может быть представлен табл. 9.5.

Таблица 9.5

Z	0	1	2	3
$\mathbf{P}$	1/8	1/4	1/4	3/8

Найдем математическое ожидание и дисперсию СВ Z:

$$\mathbf{M}[Z] = \sum_{i=1}^{4} z_i p_i = 1\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{3}{8} = \frac{15}{8} = 1{,}875,$$

$$\mathbf{D}[Z] = \sum_{i=1}^{4} (z_i - \mathbf{M}[Z])^2 p_i =$$
$$= \left(-\frac{15}{8}\right)^2\frac{1}{8} + \left(1-\frac{15}{8}\right)^2\frac{1}{4} + \left(2-\frac{15}{8}\right)^2\frac{1}{4} + \left(3-\frac{15}{8}\right)^2\frac{3}{8} = \frac{71}{64} \approx 1{,}145.$$

Ответ. *а*) Ряд распределения СВ X имеет вид табл. 9.3, а ряд распределения СВ Y имеет вид табл. 9.4; *б*) ряд распределения СВ Z имеет вид табл. 9.5, $\mathbf{M}[Z] = 1{,}875$, $\mathbf{D}[Z] \approx 1{,}145$.

Задача 9.2. Пусть двухмесячные объемы продаж продукции некоторого предприятия удовлетворительно описываются двумерным случайным вектором $Z = \mathrm{col}(X, Y)$ с плотностью распределения вероятности

$$f(x,y) = \begin{cases} c, & 100 \leqslant x \leqslant 150,\ 50 \leqslant y \leqslant 100, \\ 0 - & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти:

а) константу c;

б) функцию распределения $F(x,y)$;

в) исследовать случайные величины X и Y на независимость.

Решение. *а*) Для нахождения константы c воспользуемся условием нормировки

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \Big)\,dy = 1.$$

Вычисляя интеграл, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \Big)\,dy = \int\limits_{50}^{100} \Big(\int\limits_{100}^{150} c\,dx \Big)\,dy = \int\limits_{50}^{100} 50c\,dy = 2500c.$$

Следовательно, $c = \dfrac{1}{2500} = 4 \cdot 10^{-4}$.

б) По определению

$$F(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{y} \Big(\int\limits_{-\infty}^{x} f(t,\tau)\,dt \Big)\,d\tau.$$

В нашем случае при $x < 100$ или $y < 50$ имеем $f(x,y) = 0$, а следовательно, и $F(x,y) = 0$.

Если $100 \leqslant x < 150$ и $50 \leqslant y < 100$, то, подставив найденную плотность вероятности в выражение для $F(x,y)$, получим

$$\int\limits_{50}^{y} \Big(\int\limits_{100}^{x} \frac{1}{2500}\,d\tau \Big)\,dt = \int\limits_{50}^{y} \frac{1}{2500}\,(x-100)\,d\tau = \frac{1}{2500}\,(x-100)(y-50).$$

Если $100 \leqslant x < 150$, а $y \geqslant 100$, то

$$F(x,y) = \int\limits_{100}^{x} \Big(\int\limits_{50}^{y} f(t,\tau)\,d\tau \Big)\,dt =$$

$$= \int\limits_{100}^{x} \Big(\int\limits_{50}^{100} \frac{1}{2500}\,d\tau \Big)\,dt + \int\limits_{100}^{x} \Big(\int\limits_{100}^{y} 0\,d\tau \Big)\,dt = \frac{1}{50}(x-100).$$

Если $x \geqslant 150$, а $50 < y \leqslant 100$, имеем

$$F(x,y) = \int\limits_{100}^{x}\Big(\int\limits_{50}^{y} f(t,\tau)\,d\tau\Big)\,dt =$$
$$= \int\limits_{100}^{150}\Big(\int\limits_{50}^{y} \frac{1}{2500}\,d\tau\Big)\,dt + \int\limits_{150}^{x}\Big(\int\limits_{50}^{y} 0\,d\tau\Big)\,dt = (y-50)\frac{1}{50}.$$

При $x \geqslant 150, y \geqslant 100$

$$F(x,y) = \int\limits_{100}^{150}\Big(\int\limits_{50}^{100} \frac{1}{2500}\,d\tau\Big)\,dt + \int\limits_{150}^{x}\Big(\int\limits_{100}^{y} 0\,d\tau\Big)\,dt = 1.$$

Таким образом,

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 100 \quad \text{или} \quad y \leqslant 50, \\ (x-100)(y-50)/2500, & 100 \leqslant x < 150, 50 < y \leqslant 100, \\ (x-100)/50, & 100 \leqslant x < 150, y \geqslant 100, \\ (y-50)/50, & 50 \leqslant y < 100, x \geqslant 150, \\ 1, & 150 \leqslant x, 100 \leqslant y. \end{cases} \tag{9.2}$$

в) Чтобы исследовать компоненты случайного вектора Z на независимость, найдем их частные распределения:

$$F_X(x) = F(x,+\infty) = \begin{cases} 0, & x < 100, \\ (x-100)/50, & 100 \leqslant x < 150, \\ 1, & x \geqslant 150, \end{cases}$$

$$F_Y(y) = F(+\infty,y) = \begin{cases} 0, & y < 50, \\ (y-50)/50, & 50 \leqslant y < 100, \\ 1, & y \geqslant 100. \end{cases}$$

Очевидно, что $F(x,y) = F_X(x)\cdot F_Y(y)$ для всех $x,y \in \mathbb{R}^1$. Следовательно, СВ X и Y независимы.

Ответ. *а*) $c = 4\cdot 10^{-4}$; *б*) см. формулу (9.2); *в*) СВ X и Y независимы.

Задача 9.3. Случайные величины X и Y независимы. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $m_X = 0$, $\sigma_X^2 = 1/2$. Случайная величина Y равномерно распределена на отрезке $[0,1]$. Требуется найти:

а) плотность вероятности случайного вектора $Z = \mathrm{col}(X,Y)$;

б) функцию распределения случайного вектора Z;

в) вероятность попадания СВ Z в область $D = \{-1 \leqslant X \leqslant 1,\ |Y| \leqslant 0,5\}$.

Решение. *а*) Плотности вероятностей СВ X и Y выглядят следующим образом:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 1, & y \in [0,1], \\ 0, & y \notin [0,1]. \end{cases}$$

Так как СВ X и Y независимы, то плотность вероятности случайного вектора Z представляется в виде $f_Z(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. В данном случае

$$f_Z(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, & y \in [0,1], \\ 0, & y \notin [0,1]. \end{cases} \tag{9.3}$$

б) Найдем функцию распределения. Двумерная функция распределения независимых случайных величин, по определению, имеет вид: $F_Z(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$. Выпишем одномерные функции распределения СВ X и Y

$$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt, \qquad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ y, & 0 \leqslant y < 1, \\ 1, & y \geqslant 1. \end{cases}$$

Тогда

$$F_Z(x,y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ y \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt, & 0 \leqslant y < 1, \\ \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt, & y \geqslant 1. \end{cases} \tag{9.4}$$

Пользуясь представлением гауссовской функции распределения через функцию Лапласа, можно записать выражение (9.4) следующим образом:

$$F_Z(x,y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ y\left(\Phi_0(\sqrt{2}x) + \dfrac{1}{2}\right), & 0 \leqslant y < 1, \\ \Phi_0(\sqrt{2}x) + \dfrac{1}{2}, & y \geqslant 1. \end{cases} \tag{9.5}$$

в) Область $D = \{-1 \leqslant x \leqslant 1,\ |y| \leqslant 0,5\}$ представляет собой прямоугольник. Вероятность попадания в него вычисляется следующим образом:

$$\mathbf{P}\{Z \in D\} = \int\limits_{-1}^{1} \Big(\int\limits_{-0,5}^{0,5} f_Z(x,y)\,dy \Big) dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}\,dx \int\limits_{0}^{0,5} 1\,dy =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 2\Phi_0 \left(\sqrt{2} \cdot 1\right) = \Phi_0 \left(\sqrt{2}\right) \approx 0{,}42.$$

Вероятность попадания СВ Z в прямоугольник может быть найдена и другим способом:

$$\mathbf{P}\{-1 \leqslant X \leqslant 1, -0{,}5 \leqslant Y \leqslant 0{,}5\} = \mathbf{P}\{X \leqslant 1, Y \leqslant 0{,}5\} -$$
$$- \mathbf{P}\{X \leqslant -1, Y \leqslant 0{,}5\} - \mathbf{P}\{X \leqslant 1, Y \leqslant -0{,}5\} + \mathbf{P}\{X \leqslant -1, Y \leqslant -0{,}5\} =$$
$$= F_Z(1,\ 0{,}5) - F_Z(-1,\ 0{,}5) - F_Z(1,\ -0{,}5) + F_Z(-1,\ -0{,}5) =$$
$$= \frac{1}{2} \left(\Phi_0(1 \cdot \sqrt{2}) + 0{,}5\right) - \frac{1}{2} \left(0{,}5 - \Phi_0(1 \cdot \sqrt{2})\right) = \Phi_0 \left(\sqrt{2}\right) \approx 0{,}42.$$

Ответ. *а*) Плотность распределения СВ Z имеет вид (9.3); *б*) функция распределения СВ Z имеет вид (9.5); *в*) $\mathbf{P}\{Z \in D\} \approx \approx 0{,}42$.

§ 10. Условные распределения

10.1. Условная функция распределения. Рассмотрим следующую задачу: найти закон распределения двумерной СВ $Z \triangleq \triangleq \mathrm{col}(X, Y)$, зная законы распределения двух одномерных СВ X и Y. Оказывается, что в общем случае эту задачу решить нельзя, так как необходимо знать связь между СВ X и Y, которая характеризуется условным распределением. Заметим, что свойства 6) $f(x,y)$ и 4) $F(x,y)$ позволяют решить обратную задачу: найти законы распределения одномерных СВ X и Y, зная закон распределения двумерной СВ $Z = \mathrm{col}(X, Y)$.

Определение 10.1. Пусть СВ Y является дискретной с реализациями y_j такими, что $\mathbf{P}\{Y = y_j\} \neq 0$, $j = \overline{0, m}$. *Условной функцией распределения* СВ X при условии, что СВ $Y = y_j$, называется условная вероятность

$$F_X(x|y_j) \triangleq \frac{\mathbf{P}\{X \leqslant x, Y = y_j\}}{\mathbf{P}\{Y = y_j\}}, \quad j = \overline{0, m},\ x \in \mathbb{R}^1,$$

(см. определение 2.6).

Рассмотрим двумерную СВ $Z = \mathrm{col}(X, Y)$ с плотностью распределения $f(x, y)$.

Определение 10.2. Пусть для всех $x \in \mathbb{R}^1$ плотности $f(x, y)$ и $f_Y(y)$ непрерывны в точке $y \in \mathbb{R}^1$ и $f_Y(y) \neq 0$. *Условной функцией распределения* СВ X при условии, что СВ $Y = y$, называется предел при $\Delta y > 0$ следующей условной вероятности:

$$F_X(x|y) \triangleq \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\mathbf{P}\{X \leqslant x, |Y - y| \leqslant \Delta y\}}{\mathbf{P}\{|Y - y| \leqslant \Delta y\}}.$$

Аналогично определяется условная функция распределения $F_Y(y|x)$ СВ Y при условии, что СВ $X = x$. Убедимся в корректности определения 10.2. Пусть СВ $Z \triangleq \mathrm{col}(X, Y)$ непрерывна, причем плотности $f(x, y)$, $f_Y(y)$ непрерывны в точке y для всех $x \in \mathbb{R}^1$ и $f_Y(y) \neq 0$. Покажем, что в этом случае предел предел в этом определении существует и он равен

$$F_X(x|y) = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^{x} f(t, y)\, dt.$$

Рассмотрим вероятность

$$\mathbf{P}(D) \triangleq \mathbf{P}\{X \leqslant x, |Y - y| \leqslant \Delta y\}$$

попадания СВ Z в полуполосу D (рис. 10.1). По свойству 17)P получаем

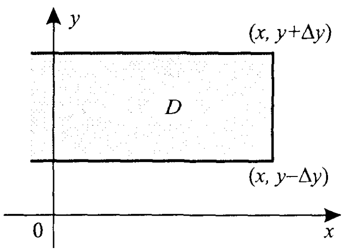

Рис. 10.1

$$\mathbf{P}(D) = \mathbf{P}\{|Y - y| \leqslant \Delta y\} \cdot \mathbf{P}\{X \leqslant x | y - \Delta y \leqslant Y \leqslant y + \Delta y\}.$$

Тогда, из свойств 2) $f(x, y)$, 3) $f_X(x)$ вытекает, что

$$\mathbf{P}\{X \leqslant x | y - \Delta y \leqslant Y \leqslant y + \Delta y\} = \frac{\mathbf{P}\{X \leqslant x, |Y - y| \leqslant \Delta y\}}{\mathbf{P}\{|Y - y| \leqslant \Delta y\}} =$$

$$= \frac{\int\limits_{-\infty}^{x} \left(\int\limits_{y-\Delta y}^{y+\Delta y} f(t, \tau)\, d\tau \right) dt}{\int\limits_{y-\Delta y}^{y+\Delta y} f_Y(\tau)\, d\tau} = \left\| \begin{matrix} \text{по теореме} \\ \text{о среднем} \\ \text{значении} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{f_Y(\widetilde{\widetilde{y}})} \int_{-\infty}^{x} f(t, \widetilde{y})\, dt,$$

где $\tilde{y}$ и $\tilde{\tilde{y}}$ — некоторые точки из интервала $(y - \Delta y, y + \Delta y)$. Учитывая непрерывность $f(x,y)$ и $f(y)$ и переходя к пределу при $\Delta y \to 0$, имеем

$$\tilde{y} \to y, \quad \tilde{\tilde{y}} \to y, \quad \mathbf{P}\{X \leqslant x | y - \Delta y \leqslant Y \leqslant y + \Delta y\} \to F_X(x|y).$$

Отсюда следует требуемая формула, которая определяет условную функцию распределения через плотности распределения двумерной СВ и одномерной СВ.

Свойства $F(x|y)$

1) $F_X(x|y)$ определена для всех $x \in \mathbb{R}^1$ и в случае непрерывности СВ Z при $f_Y(y) \neq 0$ выражается формулой: $F_X(x|y) = \dfrac{1}{f_Y(y)} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t,y)\,dt$. Это следует из определения 10.2, так как по доказанному выше соответствующий предел существует.

2) $0 \leqslant F_X(x|y) \leqslant 1$ для всех $x \in \mathbb{R}^1$. Это объясняется тем, что условная вероятность принимает значения из отрезка $[0,1]$, а значит, и ее предел при $\Delta y \to 0$ также лежит в данном отрезке.

3) $F_X(-\infty|y) = 0$ по определению 10.2.

4) $F_X(+\infty|y) = 1$, так как из свойства 1) $F(x|y)$ вытекает

$$F_X(+\infty|y) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,y)\,dt}{f_Y(y)} = \frac{f_Y(y)}{f_Y(y)} = 1.$$

5) $F(x|y)$ — функция монотонно неубывающая по $x \in \mathbb{R}^1$ для любого фиксированного y. Действительно, в силу свойства 1) $F(x|y)$ имеем

$$F_X(x + \Delta x|y) = \frac{\int_{-\infty}^{x+\Delta x} f(t,y)\,dt}{f_Y(y)} \geqslant \frac{\int_{-\infty}^{x} f(t,y)\,dt}{f_Y(y)} = F_X(x|y).$$

Аналогичные свойства имеет условная функция распределения $F_Y(y|x)$ СВ Y при условии, что СВ $X = x$.

10.2. Условная плотность распределения.

Определение 10.3. *Условной плотностью распределения* (*вероятности*) непрерывной СВ X при условии, что непрерывная СВ Y с плотностью $f_Y(y) \neq 0$ приняла значение y, называется функция

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, \qquad x \in \mathbb{R}^1.$$

Аналогично определяется условная плотность вероятности $f(y|x)$ СВ Y при условии, что $X = x$.

Для построения двумерной плотности распределения в общем случае требуется знание не только плотностей распределения одномерных СВ, но еще и условных плотностей, например $f(x,y) = f_Y(y)f_X(x|y)$.

Свойства $f(x\,|y)$

1) $f_X(x|y) \geqslant 0$, так как $f(x,y) \geqslant 0$, $f_Y(y) > 0$.

2) $F_X(x|y) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t|y)\,dt$, если плотности $f(x,y)$, $f_Y(y)$ непрерывны. В этом можно убедиться, сравнивая выражения для условной плотности и условной функции распределения, представленной согласно свойству 1) $F(x|y)$.

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X(t|y)\,dt = 1$ по свойствам 2) $f(x|y)$ и 4) $F(x|y)$.

4) $f_X(x|y) = \dfrac{\partial F_X(x|y)}{\partial x}$, если плотности $f(x,y)$, $f_Y(y)$ непрерывны. Действительно, по свойству 1) $F(x|y)$ имеем

$$\frac{\partial F_X(x|y)}{\partial x} = \frac{1}{f_Y(y)}\,\frac{\partial}{\partial x}\Big(\int\limits_{-\infty}^{x} f(t,y)\,dt\Big) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

5) Если непрерывные СВ X и Y независимы, то $f_X(x|y) = f_X(x)$. Согласно свойству 9) $f(x,y)$ для независимых СВ X и Y имеем равенство $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, из которого следует по определению условной плотности, что $f_X(x|y) = f_X(x)$.

6) $\mathbf{P}\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\Big(\int\limits_{x_1}^{x_2} f_X(x|y)\,dx\Big)\,dy.$

Действительно, по свойствам 3) $f(x)$, 7) $f(x,y)$ и определению условной плотности имеем

$$\mathbf{P}\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\} = \int\limits_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx = \int\limits_{x_1}^{x_2}\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\Big)\,dx =$$
$$= \int\limits_{x_1}^{x_2}\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)f_X(x|y)\,dy\Big)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\Big(\int\limits_{x_1}^{x_2} f_X(x|y)\,dx\Big)\,dy.$$

Последнее свойство аналогично формуле полной вероятности в случае дискретных СВ X и Y (см. теорему 3.3):

$$\mathbf{P}\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2\} = \sum_{j=0}^{m} \mathbf{P}\{Y = y_j\}\mathbf{P}\{x_1 \leqslant X \leqslant x_2 | Y = y_j\}.$$

Такие же свойства имеет условная плотность распределения $f_Y(y|x)$ СВ Y при условии, что $X = x$.

Пример 10.1. Пусть имеется СВ $Z = \mathrm{col}(X, Y)$, где X — время появления первого покупателя в понедельник, а Y — время появления первого покупателя во вторник. Положим, что $f(x,y) = e^{-x-y}$, $x, y \geqslant 0$. Требуется найти:

1) $F(x,y)$; 2) $F_X(x)$, $F_Y(y)$; 3) $f_X(x)$, $f_Y(y)$; 4) $F_X(x|y)$, $F_Y(y|x)$; 5) $f_X(x|y)$, $f_Y(y|x)$.

Установить, зависимы ли СВ X и Y.

Решение.

1) $F(x,y) = \int\limits_0^y \Bigl(\int\limits_0^x f(t,\tau)\,dt\Bigr)\,d\tau = \int\limits_0^y e^{-\tau}\,d\tau \int\limits_0^x e^{-t}\,dt = (1-e^{-x})(1-e^{-y})$ при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$; $F(x,y) = 0$ в остальных случаях.

2) $F_X(x) = F(x,\infty) = 1 - e^{-x}$ при $x > 0$, $F_Y(y) = 1 - e^{-y}$ при $y > 0$.

3) $f_X(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx} = e^{-x}$ при $x > 0$, $f_Y(y) = \dfrac{dF_Y(y)}{dy} = e^{-y}$ при $y > 0$.

4) $F_X(x|y) = \dfrac{1}{f_Y(y)} \int\limits_0^x f(t,y)\,dt = e^y \int\limits_0^x e^{-t}e^{-y}\,dt = 1 - e^{-x}$ при $x > 0$.

Аналогично, $F_Y(y|x) = 1 - e^{-y}$ при $y > 0$.

5) $f_X(x|y) = \dfrac{\partial}{\partial x} F_X(x|y) = e^{-x}$ при $x > 0$, $f_Y(y|x) = e^{-y}$ при $y > 0$.

Так как $f_X(x|y) = f_X(x) = e^{-x}$ и $f_Y(y|x) = f_Y(y) = e^{-y}$, то $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. Поэтому СВ X и Y независимы. Это означает, что появление первого покупателя во вторник не зависит от того, когда пришел первый покупатель в понедельник.

10.3. Условное математическое ожидание.

Определение 10.4. *Условным математическим ожиданием* непрерывной СВ X при условии, что непрерывная СВ Y приняла значение y, называется число

$$\mathbf{M}[X|y] \triangleq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x|y)\,dx.$$

Условное МО существует, если последний интеграл сходится абсолютно. Если рассматривать различные $y \in \mathbb{R}^1$, то условное МО оказывается функцией y.

В случае дискретных СВ X и Y условное МО СВ X при условии, что $Y = y_j$, $j = \overline{0, m}$, определяется формулой

$$\mathbf{M}[X|y_j] \triangleq \sum_{i=0}^{n} x_i \frac{p_{ij}}{p_j}, \quad j = \overline{0, m},$$

где $p_{ij} \triangleq \mathbf{P}\{X = x_i, Y = y_j\}$, $p_j \triangleq \mathbf{P}\{Y = y_j\}$.

Определение 10.5. Условное математическое ожидание $\mathbf{M}[X|y]$ СВ X как функция параметра $y \in \mathbb{R}^1$ называется *регрессией X на y*. График функции $x = \mathbf{M}[X|y]$ называется *кривой регрессии X на y*.

Аналогично определяется условное МО СВ $V \triangleq \psi(X)$ при условии, что $Y = y$. Например, для непрерывных X и Y:

$$\mathbf{M}[\psi(X)|y] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) f_X(x|y)\, dx.$$

Рассмотрим функцию $\varphi(y) \triangleq \mathbf{M}[X|y]$.

Определение 10.6. *Условным математическим ожиданием* СВ X относительно СВ Y называется СВ $V \triangleq \varphi(Y) \triangleq \mathbf{M}[X|Y]$.

Аналогично можно определить и другие, более высокого порядка, условные моменты СВ.

Свойства $\mathbf{M}[X|y]$

1) $\mathbf{M}[\psi(Y)|y] = \psi(y)$, где $\psi(y)$ — некоторая функция.

2) $\mathbf{M}[\psi(Y)X|y] = \psi(y)\mathbf{M}[X|y]$. Действительно, например, в случае непрерывных СВ X и Y имеем

$$\mathbf{M}[\psi(Y)X|y] = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y) x f_X(x|y)\, dx = \psi(y)\mathbf{M}[X|y].$$

3) $\mathbf{M}[X + \psi(Y)|y] = \mathbf{M}[X|y] + \psi(y)$. Это свойство доказывается аналогично свойству 2)M$[X|y]$.

4) $\mathbf{M}[X|y] = \mathbf{M}[X]$, если X и Y — независимы. Пусть, например, СВ X и Y — непрерывны, тогда по свойству 5) $f(x|y)$

$$\mathbf{M}[X|y] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x|y)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx \triangleq \mathbf{M}[X].$$

5) $\mathbf{M}[X] = \mathbf{M}\big[\mathbf{M}[X|Y]\big]$ — это равенство называется *формулой полного математического ожидания*. Пусть СВ X и Y непрерывны, тогда по свойству 7) $f(x,y)$

$$\mathbf{M}[X] \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy\Big)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y) f_X(x|y)\,dy\Big)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x|y)\,dx\Big)\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(y)\mathbf{M}[X|y]\,dy = \mathbf{M}\left[\mathbf{M}[X|Y]\right].$$

В случае дискретной СВ Y с конечным множеством значений формула полного МО приобретает следующий вид:

$$\mathbf{M}[X] = \sum_{j=0}^{m} p_j \mathbf{M}[X|y_j], \quad \text{где } p_j \triangleq \mathbf{P}\{Y = y_j\},\ j = \overline{0,m}.$$

Пример 10.2. Число N радиотехнических приборов, сдаваемых покупателями в гарантийную мастерскую в течении дня, можно представить в виде СВ, хорошо описываемой распределением Пуассона $\mathbf{\Pi}(a)$, где a является средним числом радиоприборов, сданных за день. Вероятность того, что сданный прибор потребует длительного ремонта, равна p. Найдем среднее число сданных приборов, требующих длительного ремонта. Так как при фиксированном числе n поступивших приборов количество приборов, требующих капитального ремонта, представляет собой СВ X с биномиальным распределением $\mathbf{Bi}(n;p)$, то $\mathbf{M}[X|n] = np$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Поскольку СВ X имеет распределение Пуассона $\mathbf{\Pi}(a)$, то $\mathbf{M}[N] = a$. Тогда по формуле полного МО

$$\mathbf{M}[X] = \mathbf{M}\left[\mathbf{M}[X|N]\right] = \mathbf{M}[pN] = p\,\mathbf{M}[N] = p\,a.$$

10.4. Корреляционная зависимость.

Определение 10.7. *Ковариацией* (*корреляционным моментом*) k_{XY} СВ X и Y называется второй центральный смешанный момент

$$k_{XY} \triangleq \mathbf{M}[(X - m_X)(Y - m_Y)].$$

Ковариация k_{XY} непрерывных СВ X и Y равна

$$k_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)(y - m_Y) f(x,y)\,dx\,dy.$$

Ковариация k_{XY} дискретных СВ X и Y с конечными множествами возможных значений равна

$$k_{XY} \triangleq \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} (x_i - m_X)(y_j - m_Y)p_{ij}.$$

Величина k_{XY} зависит от единиц измерения СВ X и Y. Во избежание этого неудобства ковариацию часто вычисляют не для X и Y, а для соответствующих им *нормированных* СВ $\overset{*}{X} \triangleq \dfrac{X - m_X}{\sigma_X}$, $\overset{*}{Y} \triangleq \dfrac{Y - m_Y}{\sigma_Y}$, если у СВ X и Y существуют дисперсии $\sigma_X^2 > 0$ и $\sigma_Y^2 > 0$.

Определение 10.8. Ковариация нормированных СВ $\overset{*}{X}$ и $\overset{*}{Y}$ называется *коэффициентом корреляции*:

$$r_{XY} \triangleq k_{\overset{*}{X}\overset{*}{Y}} = \mathbf{M}[\overset{*}{X}\overset{*}{Y}] = \frac{\mathbf{M}[(X - m_X)(Y - m_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y} \triangleq \frac{k_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Определение 10.9. СВ X и Y называют *коррелированными* (*корреляционно зависимыми*), если $k_{XY} \neq 0$, и *некоррелированными*, если $k_{XY} = 0$.

Определение 10.10. СВ X и Y называют *положительно коррелированными*, если если $k_{XY} > 0$, и *отрицательно коррелированными*, если $k_{XY} < 0$.

Пример 10.3. Рассмотрим две СВ X и $Y \triangleq X^2$, где $X \sim \sim \mathbf{R}(-a; a)$. Тогда ковариация между X и Y равна

$$k_{XY} = \mathbf{M}[(X - m_X)(Y - m_Y)] = \mathbf{M}[X(Y - m_Y)] =$$
$$= \mathbf{M}[X(X^2 - m_Y)] = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{a} x(x^2 - m_Y)\,dx = 0.$$

Таким образом, СВ X и Y некоррелированы. В то же время СВ X и Y связаны самой «жесткой» зависимостью — функциональной.

Свойства k_{XY}

1) $\mathbf{D}[X + Y] = \mathbf{D}[X] + \mathbf{D}[Y] + 2k_{XY}$. Действительно,

$$\mathbf{D}[X + Y] = \mathbf{M}[((X - m_X) + (Y - m_Y))^2] = \mathbf{D}[X] + \mathbf{D}[Y] + 2k_{XY};$$

2) $|r_{XY}| \leqslant 1$, т.е. $|k_{XY}| \leqslant \sigma_X \sigma_Y$. Пусть $\sigma_X > 0$ и $\sigma_Y > 0$. Рассмотрим СВ $\overset{*}{X}$ и $\overset{*}{Y}$. Для них по свойству 5)m_X имеем $\mathbf{D}[\overset{*}{X}] = \mathbf{D}[\overset{*}{Y}] = 1$, и по определению $k_{\overset{*}{X}\overset{*}{Y}} = r_{XY}$. Поэтому по свойству

1) k_{XY} получаем $0 \leqslant \mathbf{D}[\overset{*}{X} + \overset{*}{Y}] = \mathbf{D}[\overset{*}{X}] + \mathbf{D}[\overset{*}{Y}] + 2k_{\overset{*}{X}\overset{*}{Y}} = 2 + 2r_{XY}$. Значит, $r_{XY} \geqslant -1$. Аналогично получаем неравенство $0 \leqslant \mathbf{D}[\overset{*}{X} - \overset{*}{Y}] = 2 - 2r_{XY}$. Откуда следует, что $r_{XY} \leqslant 1$. Объединяя эти два неравенства, получаем требуемое свойство.

3) Если $Y = aX + b$, где a, b — постоянные, $a \neq 0$, $\sigma_X > 0$, то $r_{XY} = 1$, если $a > 0$, и $r_{XY} = -1$, если $a < 0$. Действительно,

$$m_Y \triangleq \mathbf{M}[Y] = \mathbf{M}[aX + b] = a\mathbf{M}[X] + b = am_X + b,$$

$$\mathbf{D}[Y] \triangleq \mathbf{M}[(Y - m_Y)^2] = a^2 d_X, \quad \sigma_Y = \sqrt{d_Y} = |a|\sqrt{d_X} = |a|\sigma_X,$$

$$k_{XY} \triangleq \mathbf{M}[(X - m_X)(Y - m_Y)] = \mathbf{M}[a(X - m_X)^2] \triangleq a\mathbf{D}[X] = a\sigma_X^2,$$

$$r_{XY} \triangleq \frac{k_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{a\sigma_X^2}{\sigma_X^2 |a|} = \frac{a}{|a|}, \quad \text{т. е.} \quad |r_{XY}| = 1.$$

Следовательно, если $a > 0$, то $r_{XY} = 1$ и, если $a < 0$, то $r_{XY} = -1$.

4) Из независимости СВ X и Y с конечными дисперсиями следует их некоррелированность. Пусть, например, СВ X и Y непрерывны, тогда по свойствам 9) $f(x,y)$ и 5) m_X имеем

$$k_{XY} \triangleq \mathbf{M}[(X - m_X)(Y - m_Y)] = \int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)(y - m_Y) f(x,y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X) f_X(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_Y) f_Y(y)\, dy \triangleq \mathbf{M}[\overset{\circ}{X}]\mathbf{M}[\overset{\circ}{Y}] = 0.$$

5) $k_{XY} = \mathbf{M}[XY] - m_X m_Y$. Пусть, например, СВ $Z \triangleq (X,Y)$ непрерывна. Тогда, согласно свойству 8) $f(x,y)$, имеем

$$k_{XY} \triangleq \mathbf{M}[(X - m_X)(Y - m_Y)] =$$
$$= \mathbf{M}[XY] + m_X m_Y - 2m_X m_Y = \mathbf{M}[XY] - m_X m_Y.$$

6) Если СВ X и Y некоррелированы, то $\mathbf{D}[X + Y] = \mathbf{D}[X] + \mathbf{D}[Y]$. Это свойство вытекает из свойства 1) k_{XY}.

10.5. Двумерное нормальное распределение.

Определение 10.11. Плотность *двумерной нормально распределенной* СВ Z с параметрами c_{11}, c_{22}, c_{12} и m_1, m_2, где $c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0$, $c_{11} > 0$, $c_{22} > 0$, определяется формулой

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}}{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}[c_{11}(x-m_1)^2 + 2c_{12}(x-m_1)(y-m_2) + c_{22}(y-m_2)^2]}.$$

Свойства двумерного нормального распределения

1) В соответствии со свойством 6) $f(x,y)$ плотность СВ X имеет вид

$$f_X(x) = \sqrt{\frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{2\pi c_{22}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\,\frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{c_{22}}\,(x - m_1)^2\right\}.$$

Сравнивая эту формулу с определением 7.3, заключаем, что СВ X имеет нормальное распределение $\mathbf{N}(m_X;\sigma_X^2)$ с параметрами

$$m_X = m_1, \qquad \mathbf{D}[X] \triangleq \sigma_X^2 = \frac{c_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}.$$

По аналогии можно получить плотность СВ Y:

$$f_Y(y) = \sqrt{\frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{2\pi c_{11}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\,\frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{c_{11}}\,(y - m_2)^2\right\},$$

т.е. $Y \sim \mathbf{N}(m_Y;\sigma_Y^2)$, где $m_Y = m_2$, $\mathbf{D}[Y] \triangleq \sigma_Y^2 = c_{11}/(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)$.

2) Вычисляя коэффициент корреляции СВ X и Y, получаем

$$r_{XY} \triangleq \frac{1}{\sigma_X\sigma_Y} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)(y - m_Y) f(x,y)\,dx\,dy = -\frac{c_{12}}{\sqrt{c_{11}c_{22}}}.$$

3) Условная плотность имеет вид

$$f_X(x|y) \triangleq \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \sqrt{\frac{c_{11}}{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}c_{11}\left[x - m_1 + \frac{c_{12}}{c_{11}}(y - m_2)\right]^2\right\}.$$

Сравнивая эту формулу с определением 7.3, приходим к выводу, что $f_X(x|y)$ является нормальной плотностью, причем

$$\mathbf{M}[X|y] = m_1 - \frac{c_{12}}{c_{11}}(y - m_2),\ \ \mathbf{D}[X|y] = \frac{1}{c_{11}}.$$

Используя выражения, полученные выше для σ_X, σ_Y, r_{XY}, условное МО $\mathbf{M}[X|y]$ можно представить в виде соотношения

$$\mathbf{M}[X|y] = \mathbf{M}[X] + r_{XY}\,\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\,(y - \mathbf{M}[Y]),$$

которое называется *теоремой о нормальной корреляции.*

4) Пусть СВ X и Y независимы. Тогда

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}\exp\left\{-\frac{(x - m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y}\exp\left\{-\frac{(y - m_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right\}.$$

5) Если СВ X и Y некоррелированы, то они и независимы, при этом $\mathbf{M}[X|y] = \mathbf{M}[X]$. Пусть СВ X и Y некоррелированы т. е. $r_{XY} = 0$. Поэтому, $c_{12} = 0$ и тогда $\sigma_X^2 = 1/c_{11}$, $\sigma_Y^2 = 1/c_{22}$. Поэтому, $f_X(x|y) = f_X(x)$, откуда вытекает, что $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, т. е. СВ X и Y независимы. Из свойства 3) двумерного нормального распределения получаем $\mathbf{M}[X|y] = \mathbf{M}[X]$, так как $c_{12} = 0$ в данном случае.

Пример 10.4. Двумерное нормальное распределение хорошо описывает, например, скорость ветра в районе аэропорта, прогнозируемые координаты падения метеорита на поверхность Земли и т. п.

10.6. Типовые задачи.

Задача 10.1. Пусть случайный вектор $Z = \mathrm{col}(X, Y)$ равномерно распределен в круге радиуса R:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/(\pi R^2), & x^2 + y^2 \leqslant R^2, \\ 0, & x^2 + y^2 > R^2. \end{cases}$$

Требуется найти r_{XY} и ответить на вопрос: зависимы ли СВ X и Y?

Решение. Пользуясь свойством 7) $f(x,y)$, находим $f_X(x) = 0$, если $|x| > R$, а в случае $|x| \leqslant R$ получаем

$$f_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy = \frac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - x^2}.$$

Исходя из этого,

$$m_X = \frac{2}{\pi R^2} \int\limits_{-R}^{R} x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = -\frac{2}{3\pi R^2}\,(R^2 - x^2)^{3/2}\Big|_{-R}^{R} = 0.$$

Аналогично можно показать, что $f_Y(y) = 0$, если $|y| > R$, и $f_Y(y) = \dfrac{2}{\pi R^2}\sqrt{R^2 - y^2}$, если $|y| \leqslant R$, поэтому $m_Y = 0$. Можно было бы заметить, что равенства $m_X = m_Y = 0$ следуют из симметрии графиков плотностей вероятности СВ X и Y относительно оси ординат. Таким образом, $k_{XY} = \mathbf{M}[XY]$ и следовательно

$$k_{XY} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\,dx\,dy = \frac{2}{\pi R^2} \int\limits_{-R}^{R} x\Bigg(\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y\,dy\Bigg)\,dx = 0,$$

т. е. $k_{XY} = r_{XY} = 0$. Следовательно, СВ X и Y некоррелированы. При этом СВ X и Y зависимы, так как плотность $f(x,y)$ нельзя представить в данном случае в виде произведения $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^1$.

Ответ. $r_{XY} = 0$, но СВ X и Y зависимы.

Задача 10.2. Пусть существуют дисперсии случайных величин X и Y такие, что $\mathbf{D}[X] = \mathbf{D}[Y]$. Чему равна ковариация случайных величин $X_1 = (X+Y)$ и $X_2 = (X-Y)$?

Решение. Вычислим $k_{X_1X_2}$. По определению $k_{X_1X_2} = \mathbf{M}[X_1X_2] - \mathbf{M}[X_1]\mathbf{M}[X_2]$, следовательно,

$$k_{X_1X_2} = \mathbf{M}[(X+Y)(X-Y)] - \mathbf{M}[X+Y]\mathbf{M}[X-Y] = \\ = \mathbf{M}[X^2 - XY + XY - Y^2] - \\ - \Big((\mathbf{M}[X])^2 - \mathbf{M}[X]\mathbf{M}[Y] + \mathbf{M}[X]\mathbf{M}[Y] - (\mathbf{M}[Y])^2\Big).$$

Пользуясь свойствами математического ожидания, имеем

$$k_{X_1X_2} = \mathbf{M}[X^2] - (\mathbf{M}[X])^2 - (\mathbf{M}[Y^2] - (\mathbf{M}[Y])^2) = \mathbf{D}[X] - \mathbf{D}[Y] = 0.$$

Ответ. $k_{X_1X_2} = 0$.

Задача 10.3. Шесть футбольных команд, участвующие в турнире, разбиты на две группы по три команды. Победители групп выходят в финал. Пусть X и Y — СВ, соответствующие номерам команд претендентов, вышедших в финал из первой и второй групп. Эксперты оценивают вероятности появления финальных пар согласно данным табл. 10.1. Найти наиболее вероятных претендентов на выход в финал и коэффициент корреляции между СВ X и Y.

Таблица 10.1

$X\backslash Y$	1	2	3
1	2/9	1/9	0
2	1/9	0	1/9
3	2/9	1/9	1/9

Решение. Чтобы определить наиболее вероятных претендентов, найдем частные распределения компонент X (номер команды в первой подгруппе) и Y (номер команды во второй подгруппе). Для этого воспользуемся правилами построения компонент случайного вектора (см. решение задачи 9.1). Ряды распределения случайных величин X и Y заданы соответственно в табл. 10.2 и 10.3.

Таблица 10.2

X	1	2	3
$\mathbf{P}$	1/3	2/9	4/9

Таблица 10.3

Y	1	2	3
$\mathbf{P}$	5/9	2/9	2/9

Таким образом, наиболее вероятным претендентом на выход в финал из первой подгруппы является третья команда, а из второй подгруппы — первая.

Для нахождения коэффициента корреляции найдем дисперсии случайных величин X и Y и их ковариацию:

$$\mathbf{M}[X] = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{2}{9} + 3 \cdot \frac{4}{9} = \frac{19}{9},$$

$$\mathbf{M}[Y] = \sum_{i=1}^{3} y_i p_i = 1 \cdot \frac{5}{9} + 2 \cdot \frac{2}{9} + 3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{5}{3},$$

$$\mathbf{D}[X] = \sum_{i=1}^{3} (x_i - \mathbf{M}[X])^2 p_i = \\ = \left(1 - \frac{19}{9}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + \left(2 - \frac{19}{9}\right)^2 \cdot \frac{2}{9} + \left(3 - \frac{19}{9}\right)^2 \cdot \frac{4}{9} \approx 0{,}765,$$

$$\mathbf{D}[Y] = \sum_{i=1}^{3} (y_i - \mathbf{M}[Y])^2 p_i = \\ = \left(1 - \frac{5}{3}\right)^2 \cdot \frac{5}{9} + \left(2 - \frac{5}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{9} + \left(3 - \frac{5}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{9} \approx 0{,}667,$$

$$\sigma_X = \sqrt{\mathbf{D}[X]} \approx 0{,}875, \quad \sigma_Y = \sqrt{\mathbf{D}[Y]} \approx 0{,}817,$$

$$k_{XY} = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} (x_i - \mathbf{M}[X])(y_j - \mathbf{M}[Y]) p_{ij} \approx 0{,}148.$$

Коэффициент корреляции r_{XY} вычисляется следующим образом:

$$r_{XY} = k_{XY} / (\sigma_X \sigma_Y) \approx 0{,}207.$$

Ответ. Наиболее вероятным претендентом на выход в финал из первой подгруппы является третья команда, а из второй подгруппы — первая. Искомый коэффициент корреляции $r_{XY} \approx 0{,}207$.

Задача 10.4. Пусть $Y_1 = aX_1 + b, Y_2 = cX_2 + d$, где a, b, c и d — некоторые константы, а X_1 и X_2 — некоторые случайные величины. Доказать, что $k_{Y_1 Y_2} = a\,c\,k_{X_1 X_2}$,

Решение. Для решения этой задачи воспользуемся определением:

$$\overset{\circ}{Y}_1 = aX_1 + b - \mathbf{M}[aX_1 + b] = a(X_1 - \mathbf{M}[X_1]) = a\overset{\circ}{X}_1,$$

$$\overset{\circ}{Y}_2 = cX_2 + d - \mathbf{M}[cX_2 + d] = c(X_2 - \mathbf{M}[X_2]) = c\overset{\circ}{X}_2 .$$

Используя свойство 7) m_X математического ожидания, получим

$$k_{Y_1Y_2} = \mathbf{M}[\overset{\circ}{Y}_1\overset{\circ}{Y}_2] = \mathbf{M}[a\,c\,\overset{\circ}{X}_1\overset{\circ}{X}_2] = a\,c\,k_{X_1X_2},$$

что и требовалось доказать.

Задача 10.5. Игральная кость размечена таким образом, что сумма очков на противоположных гранях равна 7 (т.е. 1 и 6, 2 и 5, 3 и 4). Пусть X — число очков на верхней грани; Y — число очков на нижней грани. Построить совместный закон распределения случайных величин X и Y и найти коэффициент корреляции между ними.

Решение. Ясно, что выполняется равенство $X + Y = 7$, и поэтому $\mathbf{P}\{X + Y \neq 7\} = 0$. Следовательно, для построения таблицы распределения случайного вектора $Z = \mathrm{col}(X, Y)$ остается вычислить следующие вероятности:

$$\mathbf{P}\{X = 1, Y = 6\} = \mathbf{P}(\{X = 1\} \cdot \{Y = 6\}) =$$
$$= \mathbf{P}(\{X = 1\} \cdot \{7 - X = 6\}) = \mathbf{P}(\{X = 1\}) = 1/6,$$

$$\mathbf{P}\{X = 6, Y = 1\} = \mathbf{P}\{X = 6\} = 1/6.$$

Аналогично можно показать, что

$$\mathbf{P}\{X = 2, Y = 5\} = \mathbf{P}\{X = 5, Y = 2\} = \mathbf{P}\{X = 2\}) = 1/6,$$

$$\mathbf{P}\{X = 3, Y = 4\} = \mathbf{P}\{X = 4, Y = 3\} = \mathbf{P}\{X = 3\} = 1/6.$$

Таблица 10.4

$X\backslash Y$	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	1/6
2	0	0	0	0	1/6	0
3	0	0	0	1/6	0	0
4	0	0	1/6	0	0	0
5	0	1/6	0	0	0	0
6	1/6	0	0	0	0	0

Таблица распределения случайного вектора Z представлена в табл. 10.4.

Поскольку между случайными величинами X и Y имеется линейная связь $X = 7 - Y$, то, согласно свойству 3) k_{XY}, $r_{XY} = -1$.

Ответ. $r_{XY} = -1$.

Задача 10.6. Случайные величины X и Y независимы и распределены по нормальному закону. Известно, что $\mathbf{M}[X] = a$, $\mathbf{M}[Y] = b$, $\mathbf{D}[X] = \mathbf{D}[Y] = \sigma^2$. Найти радиус R круга с центром в точке (a, b), вероятность попадания в который случайной точки (X, Y) равна 0,997.

Решение. Обозначим $Z \triangleq \mathrm{col}(X, Y)$. Поскольку СВ X и Y независимы, то

$$f_Z(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-b)^2}{2\sigma^2}}.$$

В этом случае искомая вероятность $\mathbf{P}(D)$, где $D = B_R(a, b)$ — круг радиуса R с центром в (a, b), вычисляется согласно свойству 4) $f(x, y)$:

$$\mathbf{P}(B_R(a,b)) = \iint\limits_{B_R(a,b)} f_Z(t, \tau)\,dt\,d\tau = \iint\limits_{(t-a)^2+(\tau-b)^2 \leqslant R^2} f_X(t) f_Y(\tau)\,dt\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{2\pi} \iint\limits_{(t-a)^2+(\tau-b)^2 \leqslant R^2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left((t-a)^2 + (\tau-b)^2\right)\right\} dt\,d\tau =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} u = \dfrac{t-a}{\sigma}, \\ v = \dfrac{\tau - b}{\sigma} \end{array} \right\| = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{u^2+v^2 \leqslant (R/\sigma)^2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right)\right\} du\,dv =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} u = r\cos\varphi, \\ v = r\sin\varphi \end{array} \right\| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{R/\sigma} \left(\int\limits_0^{2\pi} r\, e^{-r^2/2}\, d\varphi \right) dr =$$

$$= \int\limits_0^{R/\sigma} e^{-r^2/2}\, d\left(\frac{r^2}{2}\right) = 1 - \exp\left\{\frac{-R^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Теперь, решая уравнение $1 - \exp\left\{-R^2/(2\sigma^2)\right\} \approx 0{,}997$, получим $R^2 = -2\sigma^2 \cdot \ln 0{,}003 \approx 11{,}6\,\sigma^2$. Отсюда $R \approx 3{,}41\sigma$.

Ответ. $R \approx 3{,}41\sigma$.

§ 11. Многомерные случайные величины

11.1. Основные характеристики многомерных СВ.

Определение 11.1. Для непрерывной *n-мерной случайной величины* (*случайного вектора*) $X \triangleq \mathrm{col}(X_1, \ldots, X_n)$, где $X_1, \ldots, X_n$ — скалярные СВ, определенные на одном и том же пространстве элементарных событий, *функция распределения* $F(x_1, \ldots, x_n)$ и *плотность распределения* $f(x_1, \ldots, x_n)$, которая неотрицательна, определяются следующим образом:

$$F(x_1, \ldots, x_n) \triangleq \mathbf{P}\{X_1 \leqslant x_1, \ldots, X_n \leqslant x_n\},$$

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \ldots \int\limits_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n.$$

Основные результаты, полученные для двумерной СВ, переносятся и на n-мерную СВ. В частности, в точках непрерывности плотности выполнено равенство

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} F(x_1, \ldots, x_n).$$

Определение 11.2. *Математическим ожиданием* (МО) случайного вектора X называется вектор $\mathbf{M}[X] \triangleq m_X \triangleq \mathrm{col}(m_1, \ldots$ $\ldots, m_n)$, где $m_i \triangleq \mathbf{M}[X_i]$, $i = \overline{1,n}$.

Замечание 11.1. МО случайного вектора X есть вектор координат «средней» точки $(m_1, \ldots, m_n)$ в n-мерном пространстве $\mathbb{R}^n$, вокруг которой группируются реализации случайного вектора X.

Определение 11.3. Матрицу K размерности $n \times n$ с элементами $k_{ij} \triangleq \mathbf{M}[(X_i - m_i)(X_j - m_j)]$ называют *ковариационной матрицей*. Элементы k_{ij} ковариационной матрицы являются ковариациями СВ X_i и X_j при $i \neq j$, а диагональные элементы k_{ii} — дисперсиями СВ X_i, т.е.

$$k_{ii} \triangleq d_i \triangleq \sigma_i^2 = \mathbf{M}[(X_i - m_i)^2], \quad i = \overline{1,n}.$$

Дисперсии d_i, $i = \overline{1,n}$, характеризуют степень рассеивания реализаций компонент случайного вектора относительно средней точки $m_X \triangleq \mathrm{col}(m_1, \ldots, m_n)$, а $k_{ij}/(\sigma_i\sigma_j)$ характеризуют степень линейной зависимости между СВ X_i и X_j. В частности, по свойству 3) k_{XY} при линейной связи между X_i и X_j ковариация между ними равна $k_{ij} = \pm\sigma_i\sigma_j$, а по свойству 2) k_{XY} всегда $|k_{ij}| \leqslant \sigma_i\sigma_j$.

Определение 11.4. Нормированную ковариационную матрицу R, элементами которой являются коэффициенты корреляции r_{ij}, называют *корреляционной матрицей*.

Матрицы K и R неотрицательно определены и, кроме того симметричны, так как

$$k_{ij} \triangleq \mathbf{M}[(X_i - m_i)(X_j - m_j)] = \mathbf{M}[(X_j - m_j)(X_i - m_i)] \triangleq k_{ji}.$$

Определение 11.5. СВ $X_1, \ldots, X_n$ называются *независимыми*, если для любых $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^1$: $F(x_1, \ldots, x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} F_i(x_i)$, где $F_i(x)$ — функция распределения СВ X_i.

Определение 11.6. СВ $X_1, \ldots, X_n$ называются *попарно некоррелированными*, если $k_{ij} = 0$ при всех $i \neq j$.

Если СВ $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют конечные дисперсии, то они являются и попарно некоррелированными. Обратное утверждение неверно.

Если СВ $Z \triangleq \mathrm{col}(X_1, \ldots, X_n)$ является непрерывной, то для независимости $X_1, \ldots, X_n$ достаточно, чтобы $f(x_1, \ldots, x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ во всех точках непрерывности этих функций. Этот факт доказывается по индукции на основе свойства 9) $f(x,y)$ для двух случайных величин.

Свойства $\mathrm{M}[X]$ и $\mathrm{D}[X]$

1) $\mathrm{M}[\sum\limits_{i=1}^{n} X_i] = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{M}[X_i]$. Пусть $Z \triangleq \mathrm{col}(X, Y)$ — непрерывная двумерная СВ, где $X \triangleq X_1$, $Y \triangleq X_2$. По свойствам 8) $f(x,y)$ и 7) $f(x,y)$ имеем

$$\mathrm{M}[X+Y] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x+y) f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy\Big)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y\Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\Big)\,dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy \triangleq \mathrm{M}[X] + \mathrm{M}[Y].$$

Аналогично доказывается формула и для дискретных СВ X и Y. Общая формула доказывается по индукции.

2) Если СВ X_i, $i = \overline{1,n}$, независимы, то $\mathrm{M}[\prod\limits_{i=1}^{n} X_i] = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathrm{M}[X_i]$.

Пусть $Z \triangleq \mathrm{col}(X, Y)$ — непрерывная двумерная СВ, тогда по свойствам 8) $f(x,y)$ и 9) $f(x,y)$ имеем

$$\mathrm{M}[XY] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xy f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xy f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy = \mathrm{M}[X]\mathrm{M}[Y].$$

Общая формула доказывается по индукции.

3) $\mathbf{D}[\sum\limits_{i=1}^{n} X_i] = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{D}[X_i] + 2\sum\limits_{i=1}^{n-1} \sum\limits_{j=i+1}^{n} k_{ij}$. Данное свойство доказывается по индукции на основании свойства 1) k_{XY}.

4) Если СВ X_i, $i = \overline{1,n}$, попарно некоррелированы, т. е. $k_{ij} = 0$ при $i \neq j$, то из свойства 3)M$[X]$ следует

$$\mathbf{D}\Big[\sum_{i=1}^{n} X_i\Big] = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}[X_i].$$

5) $|r_{ij}| \leqslant 1$ при $i \neq j$. Это свойство вытекает из свойства 2) k_{XY}.

11.2. Многомерное нормальное распределение.

Определение 11.7. Говорят, что n-мерная СВ $X \triangleq \mathrm{col}(X_1, \ldots, X_n)$ имеет *нормальное (гауссовское) распределение*, $X \sim \mathbf{N}(m; K)$, если ее плотность распределения есть

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det K}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-m)^T K^{-1}(x-m)\right\},$$

где $\det K$ — определитель положительно определенной матрицы K, $m \triangleq \mathrm{col}(m_1, \ldots, m_n)$, $x \triangleq \mathrm{col}(x_1, \ldots, x_n)$.

Плотность нормального распределения можно задать также через элементы обратной матрицы K^{-1} таким образом, как это сделано в определении 10.11 при рассмотрении двумерной СВ.

Свойства нормального распределения $\mathbf{N}(m; K)$

1) $\mathbf{M}[X] = m$, ковариационная матрица СВ X равна $\mathbf{M}[(X-m)(X-m)^T] = K$.

2) Так как матрица K — невырожденная, то каждая i-я компонента X_i вектора X распределена нормально.

3) Если $X \sim \mathbf{N}(m; K)$, то случайный вектор $Y \triangleq AX + b$, где A — матрица размерности $n \times k$, имеющая ранг, равный k, и b — вектор размерности n, имеет распределение $\mathbf{N}(m_Y; K_Y)$, где $m_Y = Am + b$, $K_Y = AKA^T$.

4) Пусть СВ $Y \triangleq a_1X_1 + \ldots + a_nX_n$, где $X_1, \ldots, X_n$ распределены нормально, а коэффициенты $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^1$ не все равны нулю. Тогда СВ Y распределена нормально.

5) Если случайный вектор имеет нормальное распределение, а его компоненты попарно некоррелированны, то

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x_1 - m_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\} \times \ldots$$
$$\ldots \times \frac{1}{\sigma_n\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x_n - m_n)^2}{2\sigma_n^2}\right\} = f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n),$$

т.е. СВ $X_1, \ldots, X_n$ независимы. Но из независимости следует некоррелированность (см. свойство 4) k_{XY}), поэтому для нормального распределения условия некоррелированности и независимости эквивалентны.

11.3. Биржевой парадокс. Рассмотрим любопытный экономический пример. Пусть имеется начальный капитал K, который требуется увеличить. Для этого имеются две возможности: вкладывать деньги в надежный банк и покупать на бирже акции некоторой компании. Пусть u — доля капитала, вкладываемая в банк, а v — доля капитала, расходуемая на приобретение акций. Очевидно, что $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$ и $0 \leqslant u + v \leqslant 1$. Предположим, банк гарантирует $b \times 100\% > 0$ годовых, а акции приносят $X \times 100\%$ годовых. Так как предполагается, что банк абсолютно надежен, то b является неслучайной величиной. Стоимость акций, как правило, меняется в течение года, т.е. X является случайной величиной. Допустим, что приобретение акций в среднем более прибыльно, чем вложение средств в банк, т.е. $m_X \triangleq \mathbf{M}[X] > b > 0$. Но при этом имеется ненулевая вероятность того, что акции обесценятся и мы потеряем все деньги, вложенные в акции, $\mathbf{P}\{X \leqslant -1\} = \varepsilon > 0$.

Таким образом, мы можем надеяться, что через год капитал составит величину $K_1 = K(1 + bu + Xv)$, которая является случайной. Рассмотрим также ожидаемое через год среднее значение капитала:

$$K_0(u, v) \triangleq \mathbf{M}[K(1 + bu + Xv)] = K(1 + bu + m_X v).$$

Поставим задачу распределить капитал таким образом, чтобы максимизировать средний доход за год:

$$K_0(u_0, v_0) = \max_{u+v\leqslant 1,\, u\geqslant 0,\, v\geqslant 0} K_0(u, v).$$

Нетрудно найти решение этой простой *задачи линейного программирования*. Так как по условию задачи $m_X > b > 0$, то, очевидно, все деньги нужно вкладывать в акции, которые в среднем более прибыльны, чем вложение в банк, т.е. $u_0 = 0$, $v_0 = 1$. При такой стратегии среднее значение капитала через год будет максимально: $K_0(u_0, v_0) = K(1 + m_X)$.

Выясним, к чему приведет такая стратегия управления капиталом, если применять ее многократно. Пусть X_i, $i = \overline{1,n}$, — ежегодный прирост капитала за счет приобретения акций. Предположим, что СВ X_i, $i = \overline{1,n}$, независимы. Пусть $u_i = 0$, $v_i = 1$, $i = \overline{1,n}$, т. е. ежегодно покупаются только акции, которые в среднем более прибыльны, чем вложение в банк, $\mathbf{M}[X_i] = m_X > b > 0$. Тогда среднее значение капитала через n лет составит величину

$$K_n \triangleq \mathbf{M}\Big[K \prod_{i=1}^{n} (1 + X_i)\Big] = K \prod_{i=1}^{n} (1 + \mathbf{M}[X_i]) = K(1 + m_X)^n.$$

Здесь использовалось свойство 2)M[X]. Так как по предположению $m_X > 0$, то $1 + m_X > 1$. Поэтому при $n \to \infty$ получаем $K_n \to \infty$. Образно говоря, при таком управлении капиталом можно стать неограниченно богатым «в среднем».

Посмотрим, что происходит с вероятностью нашего разорения при выбранной стратегии

$$\mathbf{P}(B_n) \triangleq \mathbf{P}(A_1 + \ldots + A_n),$$

где событие $A_i \triangleq \{X_i : 1 + X_i \leqslant 0\}$ характеризует разорение в i-й год, а событие $B_n \triangleq A_1 + \ldots + A_n$ — возможность разорения хотя бы один раз за n лет.

Рассмотрим противоположное событие $\overline{B}_n = \Omega \backslash B_n$. Воспользовавшись свойством $11)A$, находим

$$\overline{B}_n = \prod_{i=1}^{n} \overline{A}_i, \quad \text{где} \quad \overline{A}_i = \{X_i : 1 + X_i > 0\}.$$

Так как СВ X_i независимы, то независимы также события A_i, $i = \overline{1,n}$. Поэтому имеем

$$\mathbf{P}(\overline{B}_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\overline{A}_i) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}\{X_i + 1 > 0\}.$$

Но по предположению $\mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}\{X_i \leqslant -1\} = \varepsilon > 0$, т. е. с ненулевой вероятностью можно потерять весь капитал в каждый i-й год. Поэтому $\mathbf{P}(\overline{A}_i) = 1 - \mathbf{P}(A_i) = 1 - \varepsilon < 1$. Отсюда следует, что

$$\mathbf{P}(\overline{B}_n) = (1 - \varepsilon)^n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

А следовательно, $\mathbf{P}(B_n) = 1 - \mathbf{P}(\overline{B_n}) \to 1$ при $n \to \infty$, т. е. вероятность разорения при выбранной стратегии стремится к единице.

И это несмотря на то, что средний доход стремится к бесконечности. В этом и состоит *биржевой парадокс*, к которому мы пришли, решив покупать лишь одни акции, пренебрегая возможностью получения в банке хоть и небольшой, но зато гарантированной, прибыли. Это значит, что не следует «складывать все яйца в одну корзину».

На практике, чтобы избежать этого парадокса, используют так называемую *логарифмическую стратегию*, которая определяется из следующего условия:

$$L_0(u_L, v_L) = \max_{u+v\leqslant 1,\, u\geqslant 0,\, v\geqslant 0} \mathbf{M}[\ln(1 + bu + Xv)],$$

т. е. из условия максимизации средней скорости роста капитала. В частности, иногда предполагают, что СВ $Y \triangleq 1 + X$ имеет логнормальное распределение (см. определение 7.5). При логарифмической стратегии капитал распределяется, как правило, в некоторых пропорциях между покупкой акций и вложением в банк.

Следует также отметить, что рассмотренный пример хорошо иллюстрирует особенность поведения случайной последовательности

$$Z_n \triangleq K \prod_{i=1}^{n} (1 + bu_i + X_i v_i)$$

при $n \to \infty$. В отличие от детерминированной последовательности случайная последовательность может сходится в разных смыслах и к разным значениям. В данном примере если $u_i > 0$ и $v_i = 1$, то $Z_n \to \infty$ в среднем и в то же время $Z_n \to 0$ по вероятности. Эти понятия будут введены в следующем разделе (см. определение 13.4).

11.4. Типовые задачи.

Задача 11.1. Для случайных величин X и Y, рассмотренных в задаче 9.1, проверить справедливость следующих равенств:

$$\mathbf{M}[X + Y] = \mathbf{M}[X] + \mathbf{M}[Y],\ \mathbf{D}[X + Y] = \mathbf{D}[X] + \mathbf{D}[Y] + 2k_{XY}. \quad (11.1)$$

Решение. Для проверки указанных равенств найдем необходимые значения $\mathbf{M}[X]$, $\mathbf{M}[Y]$, $\mathbf{D}[X]$, $\mathbf{D}[Y]$, k_{XY}, воспользовавшись полученными в задаче 9.1 рядами распределения СВ X и Y:

$$\mathbf{M}[X] = \sum_{i=1}^{2} x_i p_i = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{M}[Y] = \sum_{j=1}^{3} y_j p_j = 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{8},$$

$$\mathbf{D}[X] = \sum_{i=1}^{2} (x_i - \mathbf{M}[X])^2 p_i = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$\mathbf{D}[Y] = \sum_{j=1}^{3}(y_j - \mathbf{M}[Y])^2 p_j =$$
$$= \left(-\frac{11}{8}\right)^2 \cdot \frac{1}{8} + \left(1 - \frac{11}{8}\right)^2 \cdot \frac{3}{8} + \left(2 - \frac{11}{8}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{31}{64},$$

$$r_{XY} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}(x_i - \mathbf{M}[X])(y_j - \mathbf{M}[Y])p_{ij} =$$
$$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} x_i y_i p_{ij} - \mathbf{M}[X]\mathbf{M}[Y] = 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{8} = \frac{3}{16}.$$

Таким образом, имеем

$$\mathbf{M}[X] + \mathbf{M}[Y] = \frac{1}{2} + \frac{11}{8} = \frac{15}{8},$$
$$\mathbf{D}[Y] + \mathbf{D}[X] + 2k_{XY} = \frac{1}{4} + \frac{31}{64} + 2 \cdot \frac{3}{16} = \frac{71}{64}.$$

Согласно задаче 9.1, $\mathbf{M}[Z] = \dfrac{15}{8}$, $\mathbf{D}[Z] = \dfrac{71}{64}$, где $Z \triangleq X + Y$. Следовательно, справедливы равенства (11.1).

Ответ. Равенства (11.1) верны.

Задача 11.2. Дана ковариационная матрица случайного вектора $Z = \mathrm{col}(X_1, X_2, X_3)$:

$$K_Z = \|k_{ij}\| = \begin{pmatrix} 16 & -14 & 12 \\ -14 & 49 & -21 \\ 12 & -21 & 36 \end{pmatrix}.$$

Составить корреляционную матрицу $R_Z = \|r_{ij}\|$.

Решение. Поскольку по определению

$$r_{ij} = \frac{k_{ij}}{\sqrt{k_{ii} \cdot k_{jj}}},$$

то

$$r_{11} = r_{22} = r_{33} = 1; \qquad r_{12} = r_{21} = \frac{-14}{\sqrt{16 \cdot 49}} = -\frac{14}{28} = -\frac{1}{2};$$
$$r_{13} = r_{31} = \frac{12}{\sqrt{16 \cdot 36}} = \frac{12}{24} = -\frac{1}{2}; \quad r_{23} = r_{32} = \frac{-21}{\sqrt{49 \cdot 36}} = -\frac{21}{42} = -\frac{1}{2}.$$

Ответ. $\|r_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 11.3. Известно, что $\mathbf{D}[X] = 1$, $\mathbf{D}[Y] = 2$, $\mathbf{D}[X+Y] = 3$. Найти k_{XY}.

Решение. Используя формулу для дисперсии суммы, получаем

$$\mathbf{D}[X+Y] = \mathbf{D}[X] + \mathbf{D}[Y] + 2 \cdot k_{XY},$$

откуда

$$k_{XY} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{D}[X+Y] - \mathbf{D}[X] - \mathbf{D}[Y]\right) = \frac{3-1-2}{2} = 0.$$

Ответ. $k_{XY} = 0$.

Задача 11.4. На столе налогового инспектора лежат три декларации от представителей различных групп населения. Вероятности сокрытия доходов при заполнении декларации для одного представителя каждой группы равны соответственно 0,05, 0,1 и 0,15. Предположим, что сокрытие доходов обнаруживается при проверке в 100% случаев. Найти средний доход государства от проверки этих деклараций, если сумма налагаемого штрафа при обнаружении сокрытия дохода составляет по группам населения 100, 250 и 500 минимальных окладов соответственно.

Решение. Рассмотрим случайную величину X, равную доходу государства от проверки трех деклараций. В задаче требуется найти *средний доход*, т.е. математическое ожидание СВ X. Можно найти $\mathbf{M}[X]$, построив ряд распределения СВ X и воспользовавшись определением математического ожидания. Однако процедура построения ряда распределения СВ X представляется достаточно трудоемкой. Данная задача допускает более простое решение, основанное на использовании распределения Бернулли. Случайная величина X может быть представлена следующим образом:

$$X = 100X_1 + 250X_2 + 500X_3,$$

где $X_i \sim \mathbf{Bi}(1; p_i)$, $i = \overline{1,3}$, $p_1 = 0{,}05$, $p_2 = 0{,}1$, $p_3 = 0{,}15$.

Случайная величина X_i, имеющая распределение Бернулли, принимает значение 1, если i-й подавший декларацию скрывает доход, и 0 — в противном случае, причем $\mathbf{M}[X_i] = p_i$, $i = \overline{1,3}$. Воспользуемся свойствами математического ожидания для вычисления $\mathbf{M}[X]$:

$$\mathbf{M}[X] = 100\,\mathbf{M}[X_1] + 250\,\mathbf{M}[X_2] + 500\,\mathbf{M}[X_3] = \\ = 100p_1 + 250p_2 + 500p_3 = 105.$$

Ответ. Средний доход государства от проверки поданных трех деклараций составит 105 минимальных окладов.

Задача 11.5. Известно, что случайный вектор $Z = \mathrm{col}(X, Y)$, где СВ X — рост наугад взятого взрослого мужчины и СВ Y — его вес, удовлетворительно описывается двумерным нормальным законом распределения с математическим ожиданием $m_Z = \mathrm{col}(175, 74)$ и ковариационной матрицей

$$K_Z = ||k_{ij}|| = \begin{pmatrix} 49 & 28 \\ 28 & 36 \end{pmatrix}.$$

Считается, что человек страдает избыточным весом, если выполняется неравенство $X - Y \leqslant 90$. Найти: *а*) математическое ожидание и дисперсию характеристики избыточного веса $X - Y$; *б*) вероятность того, что наугад выбранный мужчина страдает избыточным весом.

Решение. *а*) Так как вектор $Z = \mathrm{col}(X, Y)$ распределен нормально, то по свойству 2) $\mathbf{N}(m; K)$ нормально распределены и его координаты: $X \sim \mathbf{N}(175; 49)$, $Y \sim \mathbf{N}(74; 36)$. Теперь, согласно свойству 4) $\mathbf{N}(m; K)$, разность $X - Y$ распределена нормально. Вычислим параметры этого закона распределения:

$$\mathbf{M}[X - Y] = 175 - 74 = 101;$$

$$\mathbf{D}[X - Y] = \mathbf{D}[X] + \mathbf{D}[Y] - 2k_{XY} = 49 + 36 - 2 \cdot 28 = 29.$$

б) Таким образом, $X - Y \sim \mathbf{N}(101; 29)$, и следовательно

$$\mathbf{P}\{X - Y \leqslant 90\} = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{90 - 101}{\sqrt{29}}\right) \approx 0{,}5 - \Phi_0(2{,}04) \approx 0{,}021.$$

Ответ. *а*) $\mathbf{M}[X - Y] = 101$, $\mathbf{D}[X - Y] = 29$; *б*) $\mathbf{P}\{X - Y \leqslant 90\} \approx$ $\approx 0{,}021$.

§ 12. Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть $F(x, y)$ — функция распределения случайного вектора $Z = \mathrm{col}(X, Y)$. Будет ли $F(x, 0)$ функцией распределения некоторой случайной величины?

2. СВ $X \sim \mathbf{Bi}(1; 0{,}2)$, $Y \sim \mathbf{Bi}(1; 0{,}8)$. Для СВ $Z = X + Y$ вычислить $F_Z(1)$, считая, что СВ X и Y независимы.

3. Случайные величины $X \sim \mathbf{N}(0; 1)$, $Y \sim \mathbf{E}(1)$. Вычислить $\mathbf{M}[X^3 - Y^2]$.

4. Подбрасывают три игральные кости. Рассматриваются случайные величины: X — количество костей, на которых выпало шесть очков, Y — количество костей, на которых выпало пять очков. Найти $\mathbf{M}[X+Y]$ и закон распределения СВ $Z = X + Y$.

5. Задан закон распределения случайного вектора $Z = \mathrm{col}(X, Y)$ (см. табл. 12.1). Требуется:

Таблица 12.1

$Y \backslash X$	-1	1
1	1/6	1/3
2	0	1/6
3	1/3	0

а) найти закон распределения случайной величины $X + Y$;

б) проверить справедливость равенств:

$$\mathbf{M}[X+Y] = \mathbf{M}[X] + \mathbf{M}[Y],$$

$$\mathbf{D}[X+Y] = \mathbf{D}[X] + \mathbf{D}[Y] + 2k_{XY}.$$

6. Найти ковариацию k_{cX}, где X — некоторая СВ, а c — константа.

7. В продукции завода брак вследствие дефекта А составляет 3%, а вследствие дефекта В — $4,5\%$. Годная продукция составляет 95%. Найти коэффициент корреляции дефектов А и В.

8. Случайный вектор $Z = \mathrm{col}(X, Y)$ имеет совместную плотность вероятности $f(x, y) = \dfrac{a}{(1 + x^2 + x^2y^2 + y^2)}$. Требуется:

а) найти неизвестную константу a;

б) исследовать величины X и Y на независимость и некоррелированность.

9. Случайный вектор $Z = \mathrm{col}(X, Y)$ имеет функцию распределения

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 + e^{-(\lambda x + \mu y)} - e^{-\lambda x} - e^{-\mu y}, & x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0 - & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти частные распределения СВ X и Y. Исследовать эти величины на независимость и некоррелированность.

10. Является ли функция $F(x, y) = x \cdot y$, где x, $y \in \mathbb{R}^1$, функцией распределения некоторого случайного вектора?

11. Является ли функция

$$F(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}\, x\right)\left(\frac{\pi}{2} + \mathrm{arctg}\, y\right), \quad x,\ y \in \mathbb{R}^1,$$

функцией распределения некоторого случайного вектора?

12. Известно, что $\mathbf{M}[X] = 1$, $\mathbf{M}[X^2] = 2$. Найти k_{XX}.

13. Известно, что СВ $X \sim \mathbf{E}(1)$, $\mathbf{D}[Y] = 2$, $\mathbf{D}[X - Y] = 3$. Найти k_{XY}.

14. Найти коэффициент корреляции между случайными величинами: *а*) X и $Y \triangleq 18X$; *б*) X и $Y \triangleq 7 - 2X$.

15. Известно, что СВ $X \sim \mathbf{R}(-1; 1)$. Пусть $Y \triangleq \cos X$. Найти k_{XY}.

16. Компания решила осуществить три независимых проекта по созданию уникальной продукции в единственном экземпляре. Затраты на осуществление каждого проекта одинаковы и равны 1000 у.е. Цена экземпляра продукции, полученного в результате осуществления первого проекта, в 3 раза превышает затраты на его создание. Для оставшихся двух проектов соотношение цены к затратам равно соответственно 5 и 7. Вероятности того, что полученные три экземпляра при установленных ценах найдут сбыт, равны соответственно 0,9, 0,7, 0,55. Найти, во сколько раз средний доход от продажи всей продукции превысит суммарные затраты на ее производство (при условии неизменности цен).

17. У каждого из двух основных предвыборных блоков партий и объединений имеется список из трех наиболее вероятных кандидатур на выдвижение в качестве претендента на пост президента. Рассмотрим случайный вектор $Z = \mathrm{col}(X, Y)$, где X — номер претендента, выдвигаемого для финального тура голосования в списке первого блока, а Y — аналогичный номер претендента в списке второго блока. Вероятность появления различных пар в финальном туре голосования, согласно оценкам экспертов-политологов, отражена в табл. 12.2. Определить наиболее вероятных претендентов от каждого блока и коэффициент корреляции между номерами претендентов в финальном туре голосования.

Таблица 12.2

$X \backslash Y$	1	2	3
1	1/3	1/3	1/27
2	1/27	1/9	1/27
3	1/27	1/27	1/27

18. Брак в продукции завода вследствие дефекта А составил 6%, причем среди забракованной по признаку А продукции в 4% случаев встречается дефект В, а в продукции, свободной от дефекта А, дефект В встречается в 1% случаев. Найти вероятность встретить дефект В во всей продукции и коэффициент корреляции между признаками А и В.

19. Распределение случайного вектора задано табл. 12.3. Найти закон распределения случайной величины

$$U = X^2 + Y^2 - 1.$$

Таблица 12.3

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0,07	0,1	0,13
1	0,2	0,23	0,27

20. Две независимые случайные величины X и Y подчинены показательному закону: $X \sim \mathbf{E}(\lambda)$, $Y \sim \mathbf{E}(\mu)$. Написать выражение совместной плотности вероятности. Подсчитать вероятность попадания СВ $Z = \mathrm{col}(X, Y)$ в квадрат с вершинами $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$, $D(1,1)$.

21. Найти вероятность того, что случайно брошенная точка с координатами (X, Y) попадет на область D, определенную неравенствами $\{1 \leqslant x \leqslant 2, 1 \leqslant y \leqslant 2\}$, если функция распределения координат этой точки равна

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x^2} - 2^{-2y^2} + 2^{-x^2-2y^2}, & x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0 - & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

22. Случайный вектор $Z = \mathrm{col}(X, Y)$ имеет плотность вероятности

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xye^{-(x^2+y^2)}, & x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0 - & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти корреляционную матрицу случайного вектора Z.

23. Плотность распределения вероятностей случайного вектора $Z = \mathrm{col}(X, Y)$ имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} c(xy + y^2), & 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 2, \\ 0 - & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти:

а) постоянную c;

б) вероятность $\mathbf{P}\{X + Y < 2\}$;

в) функцию распределения СВ X.

24. Задана функция распределения случайного вектора $Z = \mathrm{col}(X, Y)$:

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}, & x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0 - & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти:

а) двумерную плотность распределения случайного вектора Z;

б) вероятность попадания случайной точки с координатами (X, Y) в треугольник с вершинами $A(1,3)$, $B(3,3)$, $C(2,8)$.

ГЛАВА IV

СЛУЧАЙНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 13. Закон больших чисел

13.1. Виды сходимости последовательностей СВ. В п. 1.3 при определении вероятности указывался эмпирический факт, состоящий в устойчивости частоты появления события A в исследуемом опыте G при последовательном его повторении. Этот экспериментальный факт может быть обоснован математически с помощью закона больших чисел. Но для этого нам понадобятся некоторые понятия, характеризующие сходимость последовательности СВ.

Определение 13.1. Бесконечная последовательность СВ X_n, $n = 1, 2, \ldots$, определенная на одном пространстве элементарных событий Ω, называется *случайной последовательностью* (СП) и обозначается $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$

Замечание 13.1. Если последовательность состоит из детерминированных величин x_n, то говорят, что последовательность сходится к величине x (это обозначается $x_n \to x$ или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N > 0$, что $|x_n - x| < \varepsilon$ для всех $n \geqslant N$. Попробуем уточнить смысл этого понятия для случайной последовательности. Так как для любого n, вообще говоря, может найтись такое $\varepsilon > 0$, что случайное событие $\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geqslant \varepsilon\} \neq \varnothing$, то нельзя говорить о сходимости случайной последовательности X_n к X в приведенном выше детерминированном смысле. Мы рассмотрим четыре вида сходимости последовательностей СВ. В дальнейшем для краткости записи мы по-прежнему не будем указывать зависимость СВ $X_n(\omega)$ от элементарного события ω.

Определение 13.2. Пусть $F_n(x)$ — функция распределения СВ X_n, где $n = 1, 2, \ldots$, и $F(x)$ — функция распределения СВ X. СП $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *сходится по распределению* к СВ X при $n \to \infty$, если последовательность функций $F_n(x)$ сходится к функции $F(x)$ в каждой точке x непрерывности функции $F(x)$, т. е. $F_n(x) \to F(x)$ при $n \to \infty$. Этот вид сходимости будем обозначать $X_n \xrightarrow{F} X$.

Пример 13.1. Поясним на примере случай, когда $F_n(x)$ сходится к $F(x)$ во всех точках, за исключением точек разрыва функции $F(x)$. Пусть с вероятностью 1 выполняется $X_n = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, и $X = 0$. Для них

$$F_n(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 1/n, \\ 0, & x < 1/n, \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $F_n(x) \to F(x)$ при $n \to \infty$ для всех $x \neq 0$. Но $F_n(0) = 0$ для всех n, а $F(0) = 1$, поэтому последовательность $\{F_n(0)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, не сходится к $F(0)$. Но точка $x = 0$ является точкой разрыва функции $F(x)$, поэтому согласно определению 13.2 $X_n \xrightarrow{F} X$.

Определение 13.3. Случайная последовательность $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *сходится почти наверное* (п.н.) к СВ X при $n \to \infty$, что записывается как $X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X$, если

$$\mathbf{P}\left\{\omega\colon \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\} = 1.$$

Очевидно, что если $X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X$, то вероятность события, состоящего из таких ω, что последовательность $\{x_n\}$ реализаций СВ $X_n(\omega)$ не сходится к реализации x СВ $X(\omega)$, равна нулю:

$$\mathbf{P}\left\{\omega\colon \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\right\} = 0.$$

Таким образом, сходимость почти наверное случайной последовательности понимается по реализациям СВ X_n и X и в этом смысле похожа на сходимость детерминированной последовательности.

Кроме того, можно показать, что сходимость $X_n \xrightarrow{\text{п.н.}} X$ равносильна тому, что для всех $\varepsilon > 0$ имеет место

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{m\geqslant n} |X_m - X| \leqslant \varepsilon\right\} = 1.$$

Определение 13.4. Случайная последовательность $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *сходится по вероятности* к СВ X при $n \to \infty$, что записывается как $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$, если для всех $\varepsilon > 0$ справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{|X_n - X| \leqslant \varepsilon\} = 1.$$

Очевидно, что условие сходимости $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$ в вышеприведенном определении эквивалентно следующему: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\} = 0$.

Сходимость п.н. для случайной последовательности влечет за собой и сходимость по вероятности. Действительно,

$$\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \leqslant \varepsilon\} \supseteq \left\{\omega : \sup_{m \geqslant n} |X_m(\omega) - X(\omega)| \leqslant \varepsilon\right\}.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{|X_n - X| \leqslant \varepsilon\} \geqslant \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\sup_{m\geqslant n} |X_m - X| \leqslant \varepsilon\right\} = 1.$$

Из сходимости по вероятности не следует сходимость п.н.

Если $X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$, то можно доказать, что и $X_n \xrightarrow{F} X$. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Замечание 13.2. В биржевом парадоксе мы имели сходимость $Z_n \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$.

Теорема 13.1. (*Неравенство Чебышева, усиленный вариант*). *Пусть r-й абсолютный момент СВ X конечен, т. е.* $\mathbf{M}[|X|^r] < \infty$. *Тогда для всех $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство* $\mathbf{P}\{|X| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \mathbf{M}[|X|^r]/\varepsilon^r$.

Доказательство. Для простоты доказательства предположим, что у СВ X существует плотность распределения $f_X(x)$. Тогда, используя свойство 3) $f(x)$, имеем

$$\mathbf{M}[|X|^r] \triangleq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^r f_X(x)\,dx \geqslant \int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon} |x|^r f_X(x)\,dx \geqslant$$
$$\geqslant \varepsilon^r \int\limits_{|x|\geqslant\varepsilon} f_X(x)\,dx = \varepsilon^r \mathbf{P}\{|X| \geqslant \varepsilon\},$$

откуда следует доказываемое утверждение.

Рассмотрим важный частный случай приведенного неравенства. Пусть СВ $Y \triangleq X - m_X$, где $m_X \triangleq \mathbf{M}[X]$. Тогда, полагая в неравенстве Чебышева $r = 2$, получим

$$\mathbf{P}\{|X - m_X| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathbf{M}[|X - m_X|^2]}{\varepsilon^2} \triangleq \frac{\mathbf{D}[X]}{\varepsilon^2}.$$

Замечание 13.3. Данное неравенство, позволяющее оценить сверху вероятность отклонения СВ от ее МО на основе информации лишь о ее дисперсии, широко используется в теории оценивания и управления стохастическими системами. В литературе чаще всего именно последнее неравенство называют неравенством Чебышева.

Определение 13.5. Случайная последовательность $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится к СВ X *в среднем квадратическом* при $n \to \infty$, что записывается как $X_n \xrightarrow{\text{с.к.}} X$, если $\mathbf{M}[|X_n - X|^2] \to 0$ при $n \to \infty$.

Покажем, что если $X_n \xrightarrow{\text{с.к.}} X$, то $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$. Действительно, рассмотрим СВ $Y_n \triangleq X_n - X$. В силу неравенства Чебышева для СВ Y_n имеем

$$\mathbf{P}\{|Y_n| > \varepsilon\} \leqslant \mathbf{P}\{|Y_n| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathbf{M}[Y_n^2]}{\varepsilon^2} \triangleq \frac{\mathbf{M}[|X_n - X|^2]}{\varepsilon^2}.$$

Поэтому, если $X_n \xrightarrow{\text{с.к.}} X$, т.е. $\mathbf{M}[|X_n - X|^2] \to 0$ при $n \to \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ выполняется $\mathbf{P}\{|Y_n| > \varepsilon\} \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. $X_n \xrightarrow{\text{P}} X$. Из сходимости по вероятности не следует сходимость в среднем квадратическом.

Связь между различными видами сходимости удобно представить в виде логической схемы (рис. 13.1).

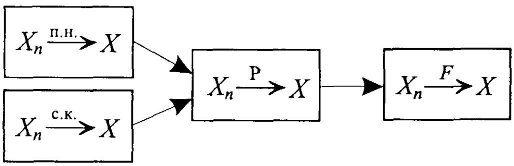

Рис. 13.1

13.2. Сходимость усредненной суммы независимых СВ.

Определение 13.6. Будем говорить, что случайная последовательность $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, является *последовательностью независимых СВ* X_n, если при любом n СВ $X_1, \ldots, X_n$ независимы.

Определение 13.7. СВ $Y_n \triangleq \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ называется *усредненной суммой* СВ X_k, $k = \overline{1,n}$.

Пусть СВ X_k, $k = \overline{1,n}$, независимы. Обозначим $m_k \triangleq \mathbf{M}[X_k]$, $d_k \triangleq \mathbf{D}[X_k]$, $k = \overline{1,n}$. Тогда, используя свойства 1)M$[X]$ и 4)M$[X]$, получим

$$\mathbf{M}[Y_n] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} m_k, \quad \mathbf{D}[Y_n] = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}[X_k] \triangleq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} d_k.$$

Определение 13.8. Будем говорить, что к последовательности $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, независимых СВ применим *закон больших чисел* (ЗБЧ), если $|Y_n - \mathbf{M}[Y_n]| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 13.2. (*Теорема Маркова*). *Если для последовательности* $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *независимых СВ выполняется условие* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{D}[Y_n] = 0$, *то к этой последовательности применим закон больших чисел.*

Доказательство. Утверждение теоремы равносильно тому, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{|Y_n - \mathbf{M}[Y_n]| > \varepsilon\} = 0.$$

По неравенству Чебышева при $r = 2$ имеем

$$\mathbf{P}\{|Y_n - \mathbf{M}[Y_n]| > \varepsilon\} \leqslant \mathbf{P}\{|Y_n - \mathbf{M}[Y_n]| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathbf{D}[Y_n]}{\varepsilon^2}.$$

Согласно условию теоремы, получаем $|Y_n - \mathbf{M}[Y_n]| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$.

Утверждение теоремы остается верным, если СВ $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, являются лишь попарно некоррелированными, так как свойство 4)M$[X]$ сохраняется и для некоррелированных СВ.

Теорема 13.3. (*Теорема Чебышева*). *Если последовательность* $\{X_n\}$ *образована независимыми СВ, дисперсии которых равномерно ограничены, т. е. существует такая константа* c, *что* $\mathbf{D}[X_n] \leqslant c$ *для всех* $n = 1, 2, \ldots$, *то к этой последовательности применим закон больших чисел.*

Доказательство. Так как $\mathbf{D}[X_k] \leqslant c$ для всех $k = 1, 2, \ldots$, то, используя свойство 4)M$[X]$, получим

$$\mathbf{D}[Y_n] = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{D}[X_k] \leqslant \frac{c}{n}.$$

Но $c/n \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. условие теоремы 13.2 выполнено и к последовательности $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, применим закон больших чисел.

Теорема 13.4. *Если последовательность* $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *образована независимыми СВ с одинаковыми распределениями и конечной дисперсией* $D[X] < +\infty$, *то к этой последовательности применим закон больших чисел, причем* $Y_n \xrightarrow{\mathrm{P}} m_X$, где $m_X = m_k \triangleq \mathbf{M}[X_k]$, $k = 1, 2, \ldots$

Доказательство. В данном случае $\mathbf{D}[X_k] = d_X < \infty$ для всех $k = 1, 2, \ldots$ Поэтому условие теоремы Чебышева выполнено.

Следовательно $|Y_n - \mathbf{M}[Y_n]| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$ при $n \to \infty$. Кроме того, $\mathbf{M}[X_k] \triangleq m_k = m_X$ для всех $k = 1, 2, \ldots$ Таким образом,

$$\mathbf{M}[Y_n] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} m_k = m_X,$$

откуда следует, что $|Y_n - m_X| \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$.

Определение 13.9. Будем говорить, что к последовательности $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, независимых СВ применим *усиленный закон больших чисел*, если $|Y_n - \mathbf{M}[Y_n]| \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$ при $n \to \infty$.

Из усиленного закона больших чисел следует закон больших чисел, так как из сходимости почти наверное следует сходимость по вероятности.

Теорема 13.5. (*Теорема Колмогорова*). *К последовательности $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, независимых одинаково распределенных СВ, у которых m_X конечно, применим усиленный закон больших чисел, причем $Y_n \xrightarrow{\text{п.н.}} m_X$.*

Замечание 13.4. В данной теореме, в отличие от теоремы 13.4, не требуется существования дисперсии СВ X_n и при этом утверждение оказывается более сильным. Но доказательство этой теоремы значительно сложнее, чем доказательство теоремы 13.4, поэтому мы не приводим его в данной книге.

Замечание 13.5. Закон больших чисел — это, по сути, свойство случайной последовательности $\{X_n\}, n = 1, 2, \ldots$, состоящее в том, что случайные отклонения отдельных независимых СВ X_n от их общего среднего значения m_X при большом n в своей массе взаимно погашаются. Поэтому, хотя сами величины X_n случайны, их среднее арифметическое значение при достаточно большом n практически уже не случайно и близко к m_X. Таким образом, если МО m_X СВ X_n заранее неизвестно, то, согласно теореме 13.5, его можно вычислить с любой «степенью точности» с помощью среднего арифметического $Y_n \triangleq \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$. Но при этом встает вопрос: в каком смысле понимать точность приближения $Y_n \approx m_X$? Ответ на этот вопрос будет дан в следующем параграфе.

Рассмотрим опыты, проводимые по схеме Бернулли, в результате которых событие A («успех») происходит с вероятностью $p \triangleq \mathbf{P}(A)$. Рассмотрим частоту «успехов» $W_n(A) \triangleq M/n$, где M есть число «успехов» при n испытаниях. Случайная величина M имеет биномиальное распределение $\mathbf{Bi}(n; p)$.

Теорема 13.6. (*Теорема Бернулли, усиленный вариант*). *Частота «успехов» сходится почти наверное к вероятности «успеха», т. е.* $W_n(A) \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbf{P}(A) \triangleq p$.

Доказательство. Так как M имеет биномиальное распределение, то частоту успехов $W_n = M/n$ можно представить в виде усредненной суммы независимых одинаково распределенных СВ X_k, $k = \overline{1,n}$, имеющих распределение Бернулли, со значениями $x_0 = 1$ и $x_1 = 0$. Причем $\mathbf{P}\{X_k = 1\} = p$, $\mathbf{P}\{X_k = 0\} = q$. Поэтому

$$Y_n = \frac{M}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad \text{где } \mathbf{M}[X_k] = p,\ \mathbf{D}[X_k] = pq,\ k = 1, 2, \ldots$$

Тогда по теореме 13.5, так как выполнено условие $m_X = p < \infty$, получаем $M/n \xrightarrow{\text{п.н.}} p$.

Замечание 13.6. Самому Якову Бернулли принадлежит доказательство более слабого утверждения, что $W_n(A) \xrightarrow{\text{P}} \mathbf{P}(A)$. Теорема Бернулли объясняет смысл свойства устойчивости частоты $W_n(A) = M/n$, которое мы ранее принимали как экспериментальный факт. Таким образом, теорема Бернулли является «переходным мостиком» от теории вероятностей к ее приложениям.

13.3. Типовые задачи.

Задача 13.1. Суточный расход электроэнергии для личных нужд в населенном пункте составляет в среднем 4000 кВт·ч. Оценить вероятность того, что в ближайшие сутки расход электроэнергии в этом населенном пункте не превысит 10 000 кВт·ч.

Решение. Пусть случайная величина X — расход электроэнергии в течение суток. По условию $\mathbf{M}[X] = 4000$. Поскольку СВ X неотрицательна и $\mathbf{M}[X]$ конечно, то, применяя неравенство Чебышева для $r = 1$, получаем

$$\mathbf{P}\{X > \varepsilon\} \leqslant \mathbf{P}\{X \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{\mathbf{M}[X]}{\varepsilon}.$$

Таким образом, $\mathbf{P}\{X > 10\,000\} \leqslant 4000/10\,000 = 0{,}4$. Следовательно, $\mathbf{P}\{X \leqslant 10\,000\} = 1 - \mathbf{P}\{X > 10\,000\} \geqslant 0{,}6$.

Ответ. Оцениваемая вероятность не меньше 0,6.

Задача 13.2. Некоторый период времени на бирже сохранялся относительно стабильный курс валюты. На основании данных биржевой статистики за этот период была составлена следующая таблица возможных значений изменения курса валют:

Таблица 13.1

Возможное изменение курса, %	-1	$-0,5$	0	0,5	1
Вероятность изменения	0,1	0,3	0,5	0,05	0,05

С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что произойдет изменение курса валюты не больше чем на 0,6%, и сравнить полученную оценку с точным значением вероятности.

Решение. Пусть СВ X — изменение курса валюты (в процентах). Требуется оценить вероятность: $\mathbf{P}\{|X| < 0{,}6\}$. Воспользуемся для этого неравенством Чебышева:

$$\mathbf{P}\{|X| < 0{,}6\} = 1 - \mathbf{P}\{|X| \geqslant 0{,}6\} \geqslant 1 - \frac{\mathbf{M}[X^2]}{(0{,}6)^2}\,.$$

Чтобы вычислить $\mathbf{M}[X^2]$, построим ряд распределения СВ X^2 (см. табл. 13.2). Тогда

Таблица 13.2

X^2	0	0,25	1
P	0,5	0,35	0,15

$$\mathbf{M}[X^2] = 0{,}25 \cdot 0{,}35 + 1 \cdot 0{,}15 = 0{,}2375.$$

Таким образом, имеем

$$\mathbf{P}\{|X| < 0{,}6\} \geqslant 1 - \frac{0{,}2375}{(0{,}6)^2} \approx 0{,}34.$$

Заметим, что можно вычислить точное значение этой вероятности, так как нам известен ряд распределения СВ X. Действительно,

$$\mathbf{P}\{|X| < 0{,}6\} = 1 - \mathbf{P}\Big(\{X = -1\} + \{X = 1\}\Big) = 1 - 0{,}1 - 0{,}05 = 0{,}85.$$

Отметим, что получаемая с помощью неравенства Чебышева оценка оказывается весьма грубой.

Ответ. Нижняя граница оценки вероятности равна 0,34, а истинное значение вероятности равно 0,85.

Задача 13.3. Задана последовательность независимых СВ $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, причем ряд распределения СВ X_n представлен табл. 13.3. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел?

Таблица 13.3

X_n	$-\sqrt{n}$	0	$\sqrt{n}$
P	$1/(2n)$	$1 - 1/n$	$1/(2n)$

Решение. Проверим, выполняются ли условия теоремы Чебышева. Для этого найдем дисперсию СВ X_n. Очевидно, что математическое ожидание X_n равно 0, поэтому $\mathbf{D}[X_n] = \mathbf{M}[X_n^2] = (\sqrt{n})^2 \cdot 1/n = 1$.

Таким образом, дисперсии случайных величин X_n, $n = 1, 2, \ldots$, ограничены в совокупности константой $c = 1$. Следовательно, согласно теореме Чебышева, к последовательности $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ применим ЗБЧ.

Ответ. К последовательности $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ применим ЗБЧ.

Задача 13.4. Вероятность того, что при опускании одного жетона приемник игрального автомата сработает правильно, равна 0,95. Найти минимальное число жетонов, при опускании которых в игральный автомат, частота правильной работы автомата была бы заключена в границах от 0,93 до 0,97 включительно с вероятностью не менее 0,93. Применить неравенство Чебышева.

Решение. Пусть случайная величина X_i принимает значение 0, если приемник игрального автомата сработает неправильно при i-м опускании жетона, и 1, если при i-м опускании жетона приемник игрального автомата сработает правильно, $i = \overline{1, n}$. Ряд распределения такой СВ X_i, при любом $i = \overline{1, n}$, дан в табл. 13.4.

Для распределения Бернулли

$$\mathbf{M}[X_i] = 0{,}95, \quad \mathbf{D}[X_i] = 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 0{,}0475.$$

Обозначим частоту правильной работы игрального автомата W_n. Тогда $W_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Считая случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимыми, получаем

Таблица 13.4

X_i	0	1
P	0,05	0,95

$$\mathbf{M}[W_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}[X_i] = \mathbf{M}[X_i] = 0{,}95,$$

$$\mathbf{D}[W_n] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{D}[X_i] = \frac{1}{n}\, \mathbf{D}[X_i] = \frac{0{,}0475}{n}.$$

Искомую вероятность можно записать как

$$\mathbf{P}\{0{,}93 \leqslant W_n \leqslant 0{,}97\} = \mathbf{P}\{0{,}93 - \mathbf{M}[W_n] \leqslant \\ \leqslant W_n - \mathbf{M}[W_n] \leqslant 0{,}97 - \mathbf{M}[W_n]\} = \mathbf{P}\{|W_n - \mathbf{M}[W_n]| \leqslant 0{,}02\}.$$

По неравенству Чебышева получаем

$$\mathbf{P}\{|W_n - \mathbf{M}[W_n]| > 0{,}02\} \leqslant \frac{\mathbf{D}[W_n]}{(0{,}02)^2} = \frac{1}{n}\, \frac{0{,}0475}{(0{,}02)^2} = \frac{118{,}75}{n}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{|W_n - \mathbf{M}[W_n]| \leqslant 0{,}02\} = 1 - \mathbf{P}\{|W_n - \mathbf{M}[W_n]| > 0{,}02\} \geqslant 1 - \frac{118{,}75}{n}.$$

Таким образом, искомая вероятность будет не менее $0{,}93$, если будет выполнено неравенство $1 - 118{,}75/n \geqslant 0{,}93$. Разрешая это неравенство, получим: $n \geqslant 118{,}75/0{,}07 = 1696{,}4$.

Ответ. Используя неравенство Чебышева, получаем оценку минимального числа жетонов, равную 1697 жетонам.

§ 14. Центральная предельная теорема

14.1. Сходимость нормированной суммы независимых СВ. Рассмотрим *нормированную сумму* Z_n независимых СВ X_k, $k=\overline{1,n}$:

$$Z_n \triangleq \frac{1}{s_n}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_k - \mathbf{M}\Big[\sum_{i=1}^{n} X_k\Big]\Big) = \frac{1}{s_n}\sum_{i=1}^{n}(X_k - m_k),$$

где по свойству 4)M$[X]$ имеет место соотношение

$$s_n^2 \triangleq \mathbf{D}\Big[\sum_{i=1}^{n} X_k\Big] = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{D}[X_k] = \sum_{i=1}^{n}\sigma_k^2,$$

так как $\sigma_k^2 \triangleq \mathbf{D}[X_k]$, $m_k \triangleq \mathbf{M}[X_k]$. В связи с тем что Z_n является нормированной СВ, то по свойству 5)m_X: $\mathbf{M}[Z_n]=0$, $\mathbf{D}[Z_n]=1$. Изучим поведение последовательности СВ Z_n при $n\to\infty$.

Определение 14.1. Будем говорить, что к последовательности $\{X_n\}$, $n=1,2,\ldots$, независимых СВ применима *центральная предельная теорема* (ЦПТ), если последовательность СВ Z_n сходится по распределению к СВ U, имеющей стандартное нормальное распределение, $U\sim \mathrm{N}(0;1)$, т. е. $Z_n \xrightarrow{F} U$.

Замечание 14.1. Как отмечалось выше, закон больших чисел — это, по сути, свойство последовательности независимых СВ X_n (см. замечание 13.5), которое выполняется при определенных условиях. Аналогичную интерпретацию имеет и центральная предельная теорема. Название «центральная предельная теорема», на наш взгляд, не очень точное, так как по смыслу — это свойство, а не теорема. Но так как в литературе это понятие закрепилось, то и мы будем его придерживаться.

Определение 14.2. Будем говорить, что последовательность $\{X_n\}$, $n=1,2,\ldots$, независимых СВ удовлетворяет *условию Ляпунова*, если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n^3}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}[|X_k-m_k|^3]=0.$$

Поясним смысл условия Ляпунова. Рассмотрим для произвольного $\delta>0$ случайные события $A_k \triangleq \{|X_k-m_k|/s_n \geqslant \delta\}$, $k=\overline{1,n}$. Тогда по свойству 7)P получаем

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{s_n}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|X_k-m_k|\geqslant\delta\right\}=\mathbf{P}\Big(\sum_{k=1}^{n}A_k\Big)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(A_k)\triangleq$$

$$\triangleq\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}\{|X_k-m_k|\geqslant\delta s_n\}\leqslant\left\|\begin{array}{l}\text{теор. } 13.1\\ \varepsilon=s_n\delta,\ r=3\end{array}\right\|\leqslant\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbf{M}[|X_k-m_k|^3]}{\delta^3 s_n^3}.$$

По условию Ляпунова последнее выражение стремится к нулю при $n\to\infty$. Таким образом, все слагаемые в нормированной сумме Z_n равномерно малы в том смысле, что вероятность хотя бы одного из них превзойти величину $\delta>0$ стремится к нулю при возрастании числа слагаемых.

Теорема 14.1. (*Теорема Ляпунова*). *Если последовательность* $\{X_n\}$, $n=1,2,\ldots$, *независимых СВ удовлетворяет условию Ляпунова и СВ* X_n, *ее образующие, имеют конечные МО и дисперсии, т. е.* $m_n<\infty$, $\sigma_n^2<\infty$, *то к случайной последовательности* $\{X_n\}$, $n=1,2,\ldots$, *применима центральная предельная теорема.*

Доказательство. Пусть

$$s_n^2=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2,\quad Z_n\triangleq\frac{1}{s_n}\sum_{k=1}^{n}\overset{\circ}{X}_k,\qquad\text{где } \sigma_k^2\triangleq D[X_k],\ \overset{\circ}{X}\triangleq X_k-m.$$

Найдем характеристическую функцию $g_k(t)$ СВ $\overset{\circ}{X}_k$, учитывая, что $i^2=-1$ и согласно свойствам 2) и 5)m_X: $\mathbf{M}[(\overset{\circ}{X}_k)^2]=\sigma_k^2$, $\mathbf{M}[\overset{\circ}{X}_k]=0$. Имеем

$$g_k(t)\triangleq\mathbf{M}\left[\exp\left\{it\,\overset{\circ}{X}_k\right\}\right]=\left\|\begin{array}{l}\text{По формуле}\\ \text{Тейлора}\end{array}\right\|=$$

$$=\mathbf{M}\left[1+it\,\overset{\circ}{X}_k+\frac{(it\,\overset{\circ}{X}_k)^2}{2}\right]+R_k(t)=1-\frac{\sigma_k^2t^2}{2}+R_k(t),$$

где для остаточного члена $R_k(t)$ справедлива оценка

$$|R_k(t)|\leqslant Ct^3\mathbf{M}\left[|\,\overset{\circ}{X}_k\,|^3\right].$$

Тогда для СВ Z_n характеристическая функция будет иметь следующий вид:

$$g_{Z_n}(t) \triangleq \mathbf{M}[\exp\{itZ_n\}] = \mathbf{M}\left[\exp\left\{it \sum_{k=1}^{n} \frac{\overset{\circ}{X}_k}{s_n}\right\}\right] =$$

$$= \mathbf{M}\left[\prod_{k=1}^{n} \exp\left\{\frac{it\,\overset{\circ}{X}_k}{s_n}\right\}\right] = \left\| \begin{array}{l} \text{СВ } \overset{\circ}{X}_k \\ \text{независимы} \end{array} \right\| =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \mathbf{M}\left[\exp\left\{\frac{it\,\overset{\circ}{X}_k}{s_n}\right\}\right] = \prod_{k=1}^{n} g_k\left(\frac{t}{s_n}\right).$$

Подставляя выражение для $g_k(t/s_n)$, получаем

$$g_{Z_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} g_k\left(\frac{t}{s_n}\right) = \prod_{k=1}^{n}\left[1 - \frac{\sigma_k^2 t^2}{2s_n^2} + R_k\left(\frac{t}{s_n}\right)\right].$$

Поэтому

$$\ln g_{Z_n}(t) = \sum_{k=1}^{n} \ln g_k\left(\frac{t}{s_n}\right) = \Big\| \ln(1+\alpha) = \alpha + o(\alpha) \Big\| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[-\frac{\sigma_k^2 t^2}{2s_n^2} + R_k\left(\frac{t}{s_n}\right)\right] = -\frac{t^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} R_k\left(\frac{t}{s_n}\right).$$

Но согласно полученной оценке для $R_k(t/s_n)$ и по условию Ляпунова остаточный член в разложении $\ln g_{Z_n}(t)$ стремится к нулю. Таким образом, заключаем, что $\ln g_{z_n}(t) \to -t^2/2$ при $n \to \infty$. Следовательно, $g_{z_n}(t) \to \exp\{-t^2/2\}$ при $n \to \infty$. Но $g_U(t) = \exp\{-t^2/2\}$ является характеристической функцией для СВ U, имеющей нормальное распределение $\mathrm{N}(0;1)$. Характеристическая функция однозначно определяет закон распределения. Поэтому $Z_n \xrightarrow{F} U \sim \mathrm{N}(0;1)$.

Замечание 14.2. Фундаментальная роль ЦПТ в теории вероятностей состоит в том, что при весьма общих предположениях сумма большого числа независимых (относительно малых, см., например, условие Ляпунова) СВ удовлетворительно описывается нормальным законом. Этим фактом и объясняется очень широкое распространение нормального закона на практике. Отметим, что существуют и другие условия, отличные от условия Ляпунова, при которых к последовательности СВ применима ЦПТ. Но эти условия имеют общую черту: все слагаемые в нормированной сумме равномерно малы.

Пример 14.1. Рассмотрим последовательность $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots,$ независимых одинаково распределенных СВ X_n

с конечными МО, дисперсией и третьим абсолютным моментом. Тогда

$$s_n = \sqrt{n}\sigma_X, \quad \frac{1}{s_n^3}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}[|X_k - m_X|^3] = \frac{\mathbf{M}[|X_k - m_X|^3]}{\sigma_X^3\sqrt{n}} \to 0.$$

Таким образом, условие Ляпунова выполнено. Поэтому к последовательности независимых одинаково распределенных СВ в данном случае применима ЦПТ. В действительности это утверждение верно при более слабых предположениях. По *теореме Леви* для применимости ЦПТ в данном примере достаточно существования конечных МО и дисперсии.

14.2. Сходимость частоты. Рассмотрим частоту «успехов» $W_n(A) \triangleq M/n$ в серии из n последовательных независимых испытаний в схеме Бернулли. При доказательстве теоремы 13.6 (Бернулли) показано, что частоту успехов можно представить в виде суммы $W_n(A) \triangleq \dfrac{M}{n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, где $\mathbf{M}[X_k] = p$, $\mathbf{D}[X_k] = pq$. Тогда по свойствам 1)M$[X]$ и 4)M$[X]$ получаем

$$\mathbf{M}[W_n(A)] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}[X_k] = p, \quad \mathbf{D}[W_n(A)] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{D}[X_k] = \frac{pq}{n}.$$

Рассмотрим нормированную частоту успешных испытаний

$$\overset{*}{W}_n \triangleq \frac{W_n - \mathbf{M}[W_n]}{\sqrt{\mathbf{D}[W_n]}} = (W_n - p)\sqrt{\frac{n}{pq}} = \frac{M - np}{\sqrt{npq}}.$$

Так как согласно свойству 2) $\mathbf{Bi}(n;p)$ выполняется $\mathbf{M}[M] = np$, $\mathbf{D}[M] = npq$, то $\overset{*}{W}_n$ можно рассматривать также как нормированное число успешных испытаний.

Теорема 14.2. (*Теорема Муавра–Лапласа*). *Последовательность* $\{\overset{*}{W}_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *нормированных частот «успехов» сходится по распределению к нормальной СВ* $U \sim \mathbf{N}(0;1)$.

Доказательство. Проверим условие Ляпунова. СВ X_k, $k = 1, 2, \ldots$, независимы и одинаково распределены, а именно: X_k принимают значения $x_0 = 1$, $x_1 = 0$ с вероятностями $\mathbf{P}\{X_k = 1\} = p$, $\mathbf{P}\{X_k = 0\} = q$, причем $\mathbf{M}[X_k] = p$. Поэтому в данном случае

$$s_n^2 \triangleq \sum_{k=1}^{n}\mathbf{D}[X_k] = n^2\mathbf{D}[W_n] = npq,$$

и, кроме того,

$$\mathbf{M}[|X_k - \mathbf{M}[X_k]|^3] = p|x_0 - \mathbf{M}[X_k]|^3 + q|x_1 - \mathbf{M}[X_k]|^3 = qp(p^2 + q^2),$$

поэтому

$$\frac{1}{s_n^3} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}[|X_k - \mathbf{M}[X_k]|^3] = \frac{1}{(npq)^{3/2}} \sum_{k=1}^{n} qp(p^2 + q^2) = \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{npq}}.$$

Последнее выражение стремится к нулю при $n \to \infty$, т.е. условие Ляпунова выполняется. Следовательно, к последовательности $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, применима ЦПТ, т.е. $Z_n \xrightarrow{F} U$. Но

$$Z_n \triangleq \frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^{n} (X_k - m_k) = \left\| \begin{array}{l} s_n^2 = npq,\ m_k = p, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{X_k}{n} = W_n \end{array} \right\| = (W_n - p)\sqrt{\frac{n}{pq}} \triangleq \overset{*}{W}_n.$$

Замечание 14.3. Попутно мы доказали, что к последовательности независимых СВ $X_n \sim \mathbf{Bi}(1; p)$, $n = 1, 2, \ldots$, применима ЦПТ.

В соответствии с теоремой Муавра–Лапласа $\overset{*}{W}_n \xrightarrow{F} U$, т.е. при больших n можно считать, что $\overset{*}{W}_n \approx U$. Но $\overset{*}{W}_n = (W_n - p)\sqrt{n/pq}$, откуда следует, что $W_n = \sqrt{pq/n}\ \overset{*}{W}_n + p$. Таким образом, при больших n в первом приближении можно считать, что частота W_n является нормально распределенной СВ $W_n \approx U\sqrt{pq/n} + p$ с параметрами $\mathbf{M}[W_n] = p$, $\mathbf{D}[W_n] = pq/n$.

Поскольку $\overset{*}{W}_n = (M - np)/\sqrt{npq}$, то $M \approx U\sqrt{pqn} + np$ и можно приближенно считать, что распределение СВ M является нормальным с $\mathbf{M}[X] = np$ и $\mathbf{D}[X] = npq$.

Таким образом, мы получаем *локальную теорему Муавра–Лапласа*, в соответствии с которой

$$\mathbf{P}\{M = k\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \exp\left\{-\frac{(k - np)^2}{2npq}\right\}.$$

Кроме того, вероятность $\mathbf{P}\{l \leqslant M \leqslant k\}$ может быть оценена согласно *интегральной теореме Муавра–Лапласа*:

$$\mathbf{P}\{l \leqslant M \leqslant k\} \approx \Phi_0\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{l - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi_0(x)$ — функция Лапласа.

Напомним, что СВ M имеет биномиальное распределение, вероятности $P_n(k)$ для которой сложно вычислять при больших n. Поэтому при больших n для оценки соответствующих вероятностей удобно пользоваться локальной (интегральной) теоремой Муавра–Лапласа.

Если n велико, а p мало, то в схеме Бернулли можно получить другую приближенную оценку для $\mathbf{P}\{l \leqslant M \leqslant k\}$. Согласно теореме 6.1 (Пуассона) при условии $np \equiv a > 0$ биномиальное распределение сходится по распределению при $n \to \infty$ к распределению Пуассона, т. е.

$$\mathbf{P}\{M = k\} = C_n^k p^k q^{n-k} \to \frac{a^k}{k!} e^{-a},$$

и следовательно,

$$\mathbf{P}\{l \leqslant M \leqslant k\} \approx \sum_{i=l}^{k} \frac{a^i}{i!} e^{-a}.$$

Таким образом, в схеме Бернулли могут быть использованы две аппроксимации.

Пусть СВ $X \sim \mathbf{Bi}(n; p)$, тогда для вычисления соответствующих вероятностей можно пользоваться аппроксимациями, описанными в следующей таблице:

Таблица 14.1

Приближение	$P_n(k)$	$\sum\limits_{i=l}^{k} P_n(i)$
Пуассона	$\dfrac{(np)^k}{k!} e^{-np}$	$\sum\limits_{i=l}^{k} \dfrac{(np)^i}{i!} e^{-np}$
Муавра–Лапласа	$\dfrac{\exp\left\{-\dfrac{(k-np)^2}{2npq}\right\}}{\sqrt{2\pi npq}}$	$\Phi_0\left(\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\dfrac{l-np}{\sqrt{npq}}\right)$

Погрешности этих приближений даны в табл. 14.2.

Таблица 14.2

Приближение	Погрешность
Пуассона	np^2
Муавра–Лапласа	$\dfrac{p^2+q^2}{\sqrt{npq}}$

14.3. Типовые задачи.

Задача 14.1. Согласно данным статистической службы области 5,5% трудоспособного населения составляют безработные. Оценить вероятность того, что в случайно отобранной группе из 1000 трудоспособных доля безработных будет заключена в границах от 0,045 до 0,065 . Решить задачу с помощью неравенства Чебышева и теоремы Муавра–Лапласа. Объяснить различие в результатах.

Решение. Пусть СВ X_i принимает значение 1, если i-й выбранный человек — безработный, и значение 0 — в противном случае; $i = \overline{1, 1000}$. Согласно определению, СВ $X_i \sim \mathbf{Bi}(1; 0{,}055)$, $\mathbf{M}[X_i] = p = 0{,}055$, $\mathbf{D}[X_i] = p(1-p) = 0{,}0519$. Доля безработных может быть представлена случайной величиной

$$M = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} X_i.$$

Согласно свойству 2) $\mathbf{Bi}(n;p)$

$$\mathbf{M}[M] = p = 0{,}055, \quad \mathbf{D}[M] = p(1-p) = 5,19 \cdot 10^{-5}.$$

Теперь необходимо оценить вероятность $\mathbf{P}\{0{,}045 \leqslant M \leqslant 0{,}065\}$.

Проведем очевидные преобразования:

$$\mathbf{P}\{0{,}045 \leqslant M \leqslant 0{,}065\} = \mathbf{P}\{0{,}045 - \mathbf{M}[M] \leqslant M - \mathbf{M}[M] \leqslant \leqslant 0{,}065 - \mathbf{M}[M]\} = \mathbf{P}\{|M - \mathbf{M}[M]| \leqslant 0{,}01\}.$$

Согласно неравенству Чебышева, имеем

$$1 - \mathbf{P}\{|M - \mathbf{M}[M]| \geqslant 0{,}01\} \geqslant 1 - \frac{\mathbf{D}[M]}{0{,}01^2} = 1 - 0{,}519 = 0{,}481.$$

Согласно интегральной теореме Муавра–Лапласа, имеем

$$\mathbf{P}\{0{,}045 \leqslant M \leqslant 0{,}065\} = \\ = \mathbf{P}\left\{\frac{0{,}045 - \mathbf{M}[M]}{\sqrt{\mathbf{D}[M]}} \leqslant \frac{M - \mathbf{M}[M]}{\sqrt{\mathbf{D}[M]}} \leqslant \frac{0{,}065 - \mathbf{M}[M]}{\sqrt{\mathbf{D}[M]}}\right\} = \\ = \mathbf{P}\left\{-\frac{0{,}01}{0{,}72 \cdot 10^{-2}} \leqslant \frac{M - 1000p}{\sqrt{1000p(1-p)}} \leqslant \frac{0{,}01}{0{,}72 \cdot 10^{-2}}\right\} \approx \\ \approx 2\Phi_0\left(\frac{0{,}01}{0{,}75 \cdot 10^{-2}}\right) = 2\Phi_0(1,33) = 0{,}8164.$$

Ответ. Оценка нижней границы вероятности, полученная с помощью неравенства Чебышева, равна 0,481 . Оценка, полученная с помощью теоремы Муавра–Лапласа, равна 0,8164 .

Задача 14.2. Вероятность того, что при опускании одного жетона приемник игрального автомата сработает правильно, равна

0,95. Найти минимальное число жетонов, такое, чтобы при опускании их в игральный автомат, частота правильной работы автомата была бы заключена в границах от 0,93 до 0,97 включительно с вероятностью не менее 0,93. Уточнить полученную в задаче 13.4 оценку с помощью теоремы Муавра–Лапласа.

Решение. Используя результаты решения задачи 13.4, искомую вероятность можно записать как

$$\mathbf{P}\{0{,}93 \leqslant W_n \leqslant 0{,}97\} = \mathbf{P}\{0{,}93 - \mathbf{M}[W_n] \leqslant W_n - \mathbf{M}[W_n] \leqslant \leqslant 0{,}97 - \mathbf{M}[W_n]\} = \mathbf{P}\{|W_n - \mathbf{M}[W_n]| \leqslant 0{,}02\},$$

где $\mathbf{M}[W_n] = 0{,}95$, $\mathbf{D}[W_n] = 0{,}0475/n$.

Согласно интегральной теореме Муавра–Лапласа

$$\mathbf{P}\{0{,}93 \leqslant W_n \leqslant 0{,}97\} = \mathbf{P}\left\{\frac{0{,}93 - \mathbf{M}[W_n]}{\sqrt{\mathbf{D}[W_n]}} \leqslant \frac{W_n - \mathbf{M}[W_n]}{\sqrt{\mathbf{D}[W_n]}} \leqslant \frac{0{,}97 - \mathbf{M}[W_n]}{\sqrt{\mathbf{D}[W_n]}}\right\} \approx$$

$$\approx \Phi_0\left(\frac{0{,}97 - \mathbf{M}[W_n]}{\sqrt{\mathbf{D}[W_n]}}\right) - \Phi_0\left(\frac{0{,}93 - \mathbf{M}[W_n]}{\sqrt{\mathbf{D}[W_n]}}\right) = \Phi_0(9{,}1766 \cdot 10^{-2}\sqrt{n}) - \Phi_0(-9{,}1766 \cdot 10^{-2}\sqrt{n}) = 2\Phi_0(9{,}1766 \cdot 10^{-2}\sqrt{n}).$$

Выполнение условия $\mathbf{P}\{0{,}93 \leqslant W_n \leqslant 0{,}97\} \geqslant 0{,}93$ означает, что $2\Phi_0\,(9,1766\sqrt{n}/100) \geqslant 0{,}93$. Воспользовавшись таблицей для функции Лапласа, получим

$$9{,}1766 \cdot 10^{-2}\sqrt{n} \geqslant 1{,}8119, \quad \text{или} \quad n \geqslant \left(\frac{1,8119}{9,1766 \cdot 10^{-2}}\right)^2 = 389{,}86.$$

Ответ. Оценка минимального числа жетонов, полученная с помощью теоремы Муавра–Лапласа, равна 390 жетонам.

Задача 14.3. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 200 выстрелах мишень будет поражена: *а*) 160 раз; *б*) не менее 140 раз.

Решение. *а*) В данном случае опыт проводится по схеме Бернулли. Здесь один опыт Бернулли — один выстрел по мишени; «успех» — поражение мишени; вероятность «успеха» $p = 0{,}75$; количество опытов Бернулли $n = 200$. Точное значение вероятности того, что при 200 выстрелах мишень будет поражена ровно 160 раз, вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_{200}\{k = 160\} = C_{200}^{160}(0{,}75)^{160}(0{,}25)^{40} = \frac{200!}{160!\,40!}(0{,}75)^{160}(0{,}25)^{40} \approx 1{,}7346 \cdot 10^{-2}.$$

б) Точное значение вероятности того, что при 200 выстрелах мишень будет поражена не менее 140 раз, соответственно равно:

$$P_{200}\{k \geqslant 140\} = \sum_{i=140}^{200} P_{200}\{k = i\} = \sum_{i=140}^{200} C_{200}^{i}(0{,}75)^{i}(0{,}25)^{200-i} =$$
$$= \sum_{i=140}^{200} \frac{200!}{i!\,(200-i)!}(0{,}75)^{i}(0{,}25)^{200-i} \approx 0{,}95461.$$

При вычислении этих вероятностей можно также пользоваться аппроксимацией Муавра–Лапласа (см. далее).

а) Приближенное значение вероятности того, что при 200 выстрелах мишень будет поражена ровно 160 раз, вычисляется с помощью локальной теоремы Муавра–Лапласа:

$$P_{200}\{k = 160\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{200 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}} \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(160 - 200 \cdot 0{,}75)^2}{200 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}\right) \approx 1{,}7173 \cdot 10^{-2}.$$

б) Приближенное значение вероятности того, что при 200 выстрелах мишень будет поражена не менее 140 раз, вычисляется с помощью интегральной теоремы Муавра–Лапласа:

$$P_{200}\{k \geqslant 140\} = P_{200}\{140 \leqslant k \leqslant 200\} \approx$$
$$\approx \Phi_0\left(\frac{200 - 200 \cdot 0{,}75}{\sqrt{200 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}}\right) - \Phi_0\left(\frac{140 - 200 \cdot 0{,}75}{\sqrt{200 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}}\right).$$

Воспользовавшись таблицами для функции Лапласа, получим $P_{200}\{k \geqslant 140\} \approx 0{,}94876$.

Ответ. *а*) $P_{200}\{k = 160\} \approx 1{,}7346 \cdot 10^{-2}$; *б*) $P_{200}\{k \geqslant 140\} \approx$ $\approx 0{,}95461$.

§ 15. Задачи для самостоятельного решения

1. Количество воды, необходимое в течение суток предприятию для технических нужд, является случайной величиной, математическое ожидание которой равно 125 м^3. Оценить вероятность того, что в ближайшие сутки расход воды на предприятии будет меньше 500 м^3.

2. Опыт работы рекламной компании показывает, что адресная реклама приводит к заявке в одном из 20 случаев. Компания разослала 1000 рекламных проспектов. Покажите, что с помощью неравенства Чебышева нельзя оценить вероятность того, что число заявок окажется больше 30 и меньше 60. Измените верхнюю границу так, чтобы применение неравенства Чебышева стало возможным, и оцените соответствующую вероятность. Уточните полученный результат с помощью теоремы Муавра–Лапласа.

3. Размер выплаты каждому клиенту банка случаен. Средняя выплата одному клиенту составляет 5000 единиц, а среднеквадратическое отклонение — 2000 единиц. Выплаты отдельным клиентам независимы. Сколько должно быть наличных денег в банке, чтобы с вероятностью 0,95 денег хватило на обслуживание 60 клиентов?

4. Задана последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ Ряд распределения СВ X_n имеет вид табл. 15.1. Проверить, применим ли к этой последовательности ЗБЧ.

Таблица 15.1

X_n	$-5n$	0	$5n$
P	$1/(2n^2)$	$1-1/n^2$	$1/(2n^2)$

5. Торговая фирма продала 1000 единиц товара, получая при этом прибыль по 50 рублей с каждой единицы. Гарантийный ремонт фирма осуществляет своими силами и терпит при этом убыток в 200 рублей. Найти границы минимального по длине интервала, внутри которого с вероятностью 0,9545 заключен доход фирмы, если в среднем гарантийный ремонт приходится делать в каждом десятом случае.

6. Скорость ветра в течение суток в данной местности является случайной величиной, математическое ожидание которой равно 6 м/с. Оценить вероятность p того, что в ближайшие сутки скорость ветра в этой местности будет не меньше 16 м/с.

7. Дисперсия отдельного результата измерения случайной величины не превосходит 3. Производится 1000 независимых измерений этой величины. Какие границы можно гарантировать с вероятностью 0,95 для результата измерения среднего арифметического этих величин? Дать ответ с помощью неравенства Чебышева.

8. Среднее изменение курса акций компании в течение одних биржевых торгов составило 1%, а среднеквадратическое отклонение оценивается как 0,5%. Оценить вероятность p того, что на ближайших торгах курс изменится менее чем на 2%.

9. Задана последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, где $X_n \sim \mathbf{R}(-1/n; 1/n)$. Применим ли к этой последовательности закон больших чисел?

10. Предположим, что среднее время опоздания студента на лекцию составляет одну минуту. Оценить вероятность p того, что студент опоздает на лекцию не менее чем на пять минут.

11. Предположим, что в условиях предыдущей задачи дополнительно известно, что среднеквадратическое отклонение времени опоздания студента на лекцию составляет также одну минуту. Оценить минимальное значение x, при котором $\mathbf{P}\{X \geqslant x\} \geqslant p$, где X — случайное время опоздания студента на лекцию, $p = 0{,}1$ — заданный уровень вероятности.

12. В среднем каждая 30-я видеокассета, записываемая на студии, оказывается бракованной. Оценить вероятность p того, что из 900 кассет, записанных на студии, число бракованных окажется в пределах от 25 до 35. Решить задачу с помощью неравенства Чебышева и интегральной теоремы Муавра–Лапласа. Сравнить полученные результаты.

13. Выход цыплят в инкубаторе составляет 75% от числа заложенных яиц. Оценить вероятность p того, что из 1000 заложенных яиц вылупятся:

а) ровно 750 цыплят;

б) от 720 до 780 цыплят.

14. В среднем каждый 30-й телевизор, выпускаемый заводом, выходит из строя до окончания гарантийного срока. Оценить с помощью теоремы Муавра–Лапласа вероятность p того, что из 300 выпущенных заводом телевизоров не более 10 поступит в гарантийный ремонт.

15. Пусть в условии задачи 3 известно, что в начале операционного дня в банке было 350 000 единиц наличных денег. Каков будет гарантированный с вероятностью 0,95 остаток n наличных денег в банке после выплаты всем 60 клиентам?

16. Складываются 10^4 чисел, каждое из которых округлено с точностью 10^{-m}. Предполагая, что погрешности от огругления независимы и равномерно распределены в интервале $(-0{,}5 \cdot 10^{-m}, 0{,}5 \cdot 10^{-m})$, найдите границы, в которых с вероятностью, не меньшей 0,99, находится суммарная ошибка. Найдите также оценку этих границ, используя неравенство Чебышева. Сравните полученные результаты.

ГЛАВА V

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

§ 16. Основные выборочные характеристики

16.1. Основные понятия. *Математическая статистика* — наука о математических методах, позволяющих по статистическим данным, например по реализациям случайной величины (СВ), построить теоретико-вероятностную модель исследуемого явления. Задачи математической статистики являются, в некотором смысле, обратными к задачам теории вероятностей. Центральным понятием математической статистики является выборка.

Определение 16.1. *Однородной выборкой* (*выборкой*) *объема* n при $n \geqslant 1$ называется случайный вектор $Z_n \triangleq \mathrm{col}(X_1, \ldots \ldots, X_n)$, компоненты которого X_i, $i = \overline{1, n}$, называемые *элементами выборки*, являются независимыми СВ с одной и той же функцией распределения $F(x)$. Будем говорить, что выборка Z_n *соответствует* функции распределения $F(x)$.

Определение 16.2. *Реализацией выборки* называется неслучайный вектор $z_n \triangleq \mathrm{col}(x_1, \ldots, x_n)$, компонентами которого являются реализации соответствующих элементов выборки X_i, $i = \overline{1, n}$.

Из определений 16.1 и 16.2 вытекает, что реализацию выборки z_n можно также рассматривать как последовательность $x_1, \ldots, x_n$ из n реализаций одной и той же СВ X, полученных в серии из n независимых одинаковых опытов, проводимых в одинаковых условиях. Поэтому можно говорить, что выборка Z_n *порождена наблюдаемой* СВ X, имеющей распределение $F_X(x) \triangleq F(x)$.

Определение 16.3. Если компоненты вектора Z_n независимы, но их распределения $F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)$ различны, то такую выборку называют *неоднородной*.

Определение 16.4. Множество S всех реализаций выборки Z_n называется *выборочным пространством*.

Выборочное пространство может быть всем n-мерным евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$ или его частью, если СВ X непрерывна, а также может состоять из конечного или счетного числа точек из $\mathbb{R}^n$, если СВ X дискретна.

На практике при исследовании конкретного эксперимента распределения $F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)$ СВ $X_1, \ldots, X_n$ редко бывают известны полностью. Часто априори (до опыта) можно лишь утверждать, что распределение $F_{Z_n}(z_n) = F_1(x_1) \cdot \ldots \cdot F_n(x_n)$ случайного вектора Z_n принадлежит некоторому классу (семейству) $\mathcal{F}$.

Определение 16.5. Пара $(S, \mathcal{F})$ называется *статистической моделью* описания серии опытов, порождающих выборку Z_n.

Определение 16.6. Если распределения $F_{Z_n}(z_n, \theta)$ из класса $\mathcal{F}$ определены с точностью до некоторого векторного параметра $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^s$, то такая статистическая модель называется *параметрической* и обозначается $(S_\theta, F_{Z_n}(z_n, \theta))$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^s$.

В некоторых случаях выборочное пространство может не зависеть от неизвестного параметра θ распределения $F_{Z_n}(z_n, \theta)$.

В зависимости от вида статистической модели в математической статистике формулируются соответствующие задачи по обработке информации, содержащейся в выборке.

Определение 16.7. СВ $Z \triangleq \varphi(Z_n)$, где $\varphi(z_n)$ — произвольная функция, определенная на выборочном пространстве S и не зависящая от распределения $F_{Z_n}(z_n, \theta)$, называется *статистикой.*

16.2. Вариационный ряд.

Определение 16.8. Упорядочим элементы реализации выборки $x_1, \ldots, x_n$ по возрастанию: $x^{(1)} \leqslant x^{(2)} \leqslant \ldots \leqslant x^{(n)}$, где верхний индекс соответствует номеру элемента в упорядоченной последовательности. Обозначим через $X^{(k)}$, $k = \overline{1,n}$, случайные величины, которые при каждой реализации z_n выборки Z_n принимают k-е (по верхнему номеру) значения $x^{(k)}$. Упорядоченную последовательность СВ $X^{(1)} \leqslant \ldots \leqslant X^{(n)}$ называют *вариационным рядом выборки.*

Определение 16.9. Элементы $X^{(k)}$ вариационного ряда называются *порядковыми статистиками*, а крайние члены вариационного ряда $X^{(1)}$, $X^{(n)}$ — *экстремальными порядковыми статистиками.*

Например, для $k = 1$ функция $\varphi(z_n)$ для статистики $X^{(1)} = \varphi(Z_n)$ определяется следующим образом:

$$\varphi(z_n) = \min\left\{x_k \colon\ k = \overline{1,n}\right\}.$$

Если однородная выборка Z_n соответствует распределению $F(x)$, то, воспользовавшись формулой Бернулли, можно показать [8], что

k-я порядковая статистика $X^{(k)}$ имеет следующую функцию распределения:

$$F_{(k)}(x) = \mathbf{P}\left\{X^{(k)} \leqslant x\right\} = \sum_{i=k}^{n} C_n^i [F(x)]^i [1 - F(x)]^{n-i}.$$

В частности, для $k = 1$ и $k = n$ имеем

$$F_{(1)}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n, \qquad F_{(n)}(x) = [F(x)]^n.$$

Если функция распределения $F(x)$ имеет плотность $f(x)$, то порядковая статистика $X^{(k)}$ имеет следующую плотность распределения:

$$f_{(k)}(x) = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!}\,[F(x)]^{k-1}[1 - F(x)]^{n-k} f(x).$$

Определение 16.10. Порядковая статистика $X^{([np]+1)}$ с номером $[np] + 1$, где $[\,\cdot\,]$ — целая часть числа, называется *выборочной квантилью уровня* p.

Теорема 16.1. (*Теорема Мостеллера*).

Если в некоторой окрестности точки x_p *плотность распределения* $f(x)$ *СВ* X *непрерывно-дифференцируема и, кроме того,* $f(x_p) > 0$, *то*

$$\left(X^{([np]+1)} - x_p\right)\sqrt{\frac{nf^2(x_p)}{p(1-p)}} \xrightarrow{F} U \qquad \text{при } n \to \infty,$$

где СВ U *имеет распределение* $\mathbf{N}(0; 1)$.

Доказательство этого утверждения можно найти, например, в [8]. Таким образом, при больших n можно считать, что выборочная квантиль $X^{([np]+1)}$ близка к x_p, и, более того, распределение статистики $X^{([np]+1)}$ может быть аппроксимировано нормальным распределением $\mathbf{N}\left(x_p; \dfrac{p(1-p)}{nf^2(x_p)}\right)$.

16.3. Выборочная функция распределения.

Пусть серия из n испытаний проводится по схеме Бернулли, т. е. испытания проводятся независимо друг от друга и некоторое событие A при каждом испытании появляется с одной и той же вероятностью $p \triangleq \mathbf{P}(A)$. Пусть $M_n(A)$ — случайное число появлений события A в этой серии, а $W_n(A) \triangleq M_n(A)/n$ — частота события A в серии из n испытаний.

Рассмотрим выборку Z_n, порожденную СВ X с функцией распределения $F_X(x)$. Определим для каждого $x \in \mathbb{R}^1$ событие

$A_x \triangleq \{X \leqslant x\}$, для которого $\mathbf{P}(A_x) = F_X(x)$. Тогда $M_n(A_x)$ — случайное число элементов выборки Z_n, не превосходящих x.

Определение 16.11. Частота $W_n(A_x)$ события A_x, как функция $x \in \mathbb{R}^1$, называется *выборочной (эмпирической) функцией распределения* СВ X и обозначается

$$\widehat{F}_n(x) \triangleq W_n(A_x).$$

Для каждого фиксированного $x \in \mathbb{R}^1$ СВ $\widehat{F}_n(x)$ является статистикой, реализациями которой являются числа 0, $1/n$, $2/n$, ..., n/n, и при этом

$$\mathbf{P}\left\{\widehat{F}_n(x) = \frac{k}{n}\right\} = \mathbf{P}\{M_n(A_x) = k\}, \quad k = \overline{1,n}.$$

Любая реализация $\overline{F}_n(x)$ выборочной функции $\widehat{F}_n(x)$ является ступенчатой функцией, характерный вид которой показан на рис. 16.1. В точках $x^{(1)} < \ldots < x^{(n)}$, где $x^{(k)}$ — реализация порядковой статистики $X^{(k)}$, функция $\overline{F}_n(x)$ имеет скачки величиной $1/n$ и является непрерывной справа.

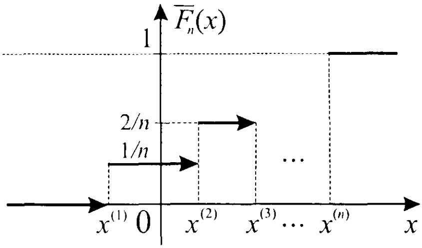

Рис. 16.1

Свойства $\widehat{F}_n(x)$

1) $\mathbf{M}\left[\widehat{F}_n(x)\right] = F(x)$, для любого $x \in \mathbb{R}^1$ и любого $n \geqslant 1$. Действительно, при фиксированном x выборочная функция распределения $\widehat{F}_n(x)$ является частотой $W_n(A_x)$, МО которой равно $\mathbf{P}(A_x) = F(x)$ (см. доказательсто *теоремы Муавра–Лапласа*).

2) $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^1}\left|\widehat{F}_n(x) - F(x)\right| \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$ при $n \to \infty$. Доказательство данного свойства, называемого *теоремой Гливенко–Кантелли*, можно найти в [20].

3) $d_n(x) \triangleq \mathbf{M}\left[\left(\widehat{F}_n(x) - F(x)\right)^2\right] = \dfrac{F(x)(1-F(x))}{n} \leqslant \dfrac{1}{4n}$. Действительно, при фиксированном x выборочная функция распределения $\widehat{F}_n(x)$ является частотой $W_n(A_x)$, дисперсия которой равна

$\mathbf{P}(A_x)(1-\mathbf{P}(A_x))/n$ (см. доказательство *теоремы Муавра–Лапласа*), а максимум величины $\mathbf{P}(A_x)(1-\mathbf{P}(A_x))$ достигается при $\mathbf{P}(A_x) = 1/2$ и равен $1/4$.

4) $\left(\widehat{F}_n(x) - F(x)\right)\Big/\sqrt{d_n(x)} \xrightarrow{F} U$ при $n \to \infty$, где СВ U имеет распределение $\mathbf{N}(0;1)$. Так как $d_n(x)$ является дисперсией СВ $\widehat{F}_n(x)$, то данное свойство вытекает из *теоремы Муавра–Лапласа*.

Первые два свойства свидетельствуют о том, что при увеличении числа испытаний n происходит сближение выборочной функции распределения $\widehat{F}_n(x)$ с функцией распределения $F(x)$ СВ X. Свойство 2)$\widehat{F}_n(x)$ обобщает усиленный вариант теоремы Бернулли. Последние два свойства позволяют оценить скорость этого сближения в зависимости от объема n выборки Z_n.

16.4. Гистограмма. Рассмотрим процедуру *группировки* выборки. Для этого действительную ось $\mathbb{R}^1 = (-\infty,\infty)$ разделим точками $\alpha_0,\ldots,\alpha_{l+1}$ на $l+1$ непересекающийся полуинтервал (*разряд*) $\Delta_k = [\alpha_k,\alpha_{k+1})$, $k=\overline{0,l}$, таким образом, что $-\infty = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots \ldots < \alpha_l < \alpha_{l+1} = +\infty$, $\alpha_1 \leqslant x^{(1)}$, $\alpha_l \geqslant x^{(n)}$. Обычно длина разрядов Δ_k, $k=\overline{1,l-1}$, выбирается одинаковой, т. е. равной $h_k \triangleq (\alpha_l-\alpha_1)/(l-1)$. Используя реализацию вариационного ряда $x^{(1)} < \ldots < x^{(n)}$, для каждого k-го разряда Δ_k, $k=\overline{1,l-1}$, вычислим частоту попадания элементов реализации выборки в этот разряд. Получаем $\overline{p}_k \triangleq n_k/n$, где n_k — число элементов реализации выборки z_n, попавших в k-й разряд. Если рассмотреть априорную выборку Z_n и случайное число N_k элементов этой выборки, попавших в k-й разряд, то получим набор случайных величин $\widehat{p}_k = N_k/n$.

Таблица 16.1

$[\alpha_1,\alpha_2)$	$\cdots$	$[\alpha_{l-1},\alpha_l]$
$\overline{p}_1$	$\cdots$	$\overline{p}_{l-1}$

Определение 16.12. Последовательность пар $(\Delta_k,\widehat{p}_k)$, $k=\overline{1,l-1}$, называется *статистическим рядом*, а его реализация $(\Delta_k,\overline{p}_k)$, $k=\overline{1,l-1}$, представляется в виде табл. 16.1.

Изобразим графически статистический ряд.

Определение 16.13. На оси Ox отложим разряды и на них, как на основании, построим прямоугольники с высотой, равной $\overline{p}_k/h_k$, $k=\overline{1,l-1}$. Тогда площадь каждого прямоугольника будет равна $\overline{p}_k$. Полученная фигура называется *столбцовой диаграммой*, а кусочно-постоянная функция $\overline{f}_n(x)$, образованная верхними гранями полученных прямоугольников, — *гистограммой* (рис. 16.2).

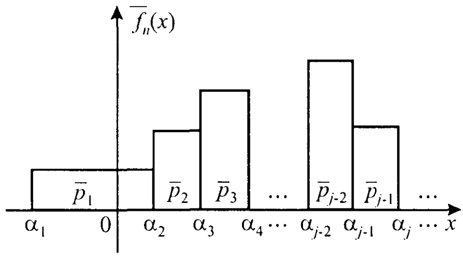

Рис. 16.2

При этом полагают $\overline{f}_n(x) = 0$ для всех $x < \alpha_1$ и $x \geqslant \alpha_l$, так как $n_0 = 0$ и $n_l = 0$.

Пусть плотность распределения $f(x)$ непрерывна и ограничена, а количество разрядов $l_n + 1$ зависит от объема n выборки таким образом, что $l_n \to \infty$, но при этом $n/l_n \to \infty$ (например, можно выбрать $l_n = c_1 + c_2 \ln n$, где c_1, c_2 — некоторые положительные константы). Тогда выборочная плотность распределения $\widehat{f}_n(x)$, реализациями которой служат гистограммы $\overline{f}_n(x)$, сходится по вероятности к плотности $f(x)$ наблюдаемой СВ, т. е. $\widehat{f}_n(x) \xrightarrow{\mathrm{P}} f(x)$ при $n \to \infty$ для любого $x \in \mathbb{R}^1$. Таким образом, при достаточно «мелком» разбиении отрезка $[\alpha_1, \alpha_l]$ и при большом объеме выборки n высоты построенных прямоугольников можно принимать в качестве приближенных значений плотности $f(x)$ в средних точках соответствующих интервалов. Из этого следует, что гистограмму можно рассматривать как статистический аналог плотности распределения наблюдаемой СВ X. Используя гистограмму, неизвестную плотность можно аппроксимировать кусочно-постоянной функцией. Но из математического анализа известно, что если функция является достаточно гладкой, то кусочно-линейная аппроксимация оказывается, как правило, лучше кусочно-постоянной.

Определение 16.14. Сглаженную гистограмму в виде ломаной, у которой прямые линии последовательно соединяют середины верхних граней прямоугольников, образующих столбцовую диаграмму, называют *полигоном частот.*

16.5. Выборочные моменты. Пусть имеется выборка $Z_n = \mathrm{col}(X_1, \ldots, X_n)$, которая порождена СВ X с функцией распределения $F_X(x)$.

Определение 16.15. Для выборки Z_n объема n *выборочными начальными* и *центральными моментами порядка* r СВ X называются следующие СВ:

$$\widehat{\nu}_r(n) \triangleq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k)^r, \quad r = 1, 2, \ldots;$$

$$\widehat{\mu}_r(n) \triangleq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \widehat{\nu}_1(n))^r, \quad r = 2, 3, \ldots$$

Определение 16.16. *Выборочным средним* и *выборочной дисперсией* СВ X называются соответственно

$$\widehat{m}_X(n) \triangleq \widehat{\nu}_1(n) \triangleq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k,$$

$$\widehat{d}_X(n) \triangleq \widehat{\mu}_2(n) \triangleq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \widehat{m}_X(n))^2.$$

В дальнейшем мы будем использовать сокращенные обозначения $\widehat{m}_X \triangleq \widehat{m}_X(n)$, $\widehat{d}_X \triangleq \widehat{d}_X(n)$, если это не будет приводить к путанице. Пусть имеется также выборка $V_n \triangleq \mathrm{col}(Y_1, \ldots, Y_n)$, порожденная СВ Y с функцией распределения $F_Y(y)$.

Определение 16.17. *Выборочным коэффициентом корреляции* СВ X и Y называют

$$\widehat{r}_{XY} \triangleq \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - \widehat{m}_X)(Y_k - \widehat{m}_Y)}{n\sqrt{\widehat{d}_X \widehat{d}_Y}}.$$

Пусть существуют исследуемые моменты ν_r, μ_r. Тогда справедливы следующие свойства.

Свойства выборочных моментов $\widehat{m}_X$

1) $\mathbf{M}[\widehat{\nu}_r(n)] = \nu_r$ для любого $n \geqslant 1$ и для всех $r = 1, 2, \ldots$ Действительно,

$$\mathbf{M}[\widehat{\nu}_r(n)] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}[X_k^r] = \frac{1}{n}(n\nu_r) = \nu_r.$$

2) $\widehat{\nu}_r(n) \xrightarrow{\text{п.н.}} \nu_r$ при $n \to \infty$ для всех $r = 1, 2, \ldots$ Это свойство вытекает из теоремы Колмогорова.

3) $\widehat{\mu}_r(n) \xrightarrow{\text{п.н.}} \mu_r$ при $n \to \infty$ для всех $r = 2, 3, \ldots$ Используя

разложение бинома Ньютона, получим

$$\widehat{\mu}_r(n) \triangleq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \widehat{\nu}_1(n))^r = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{r} C_r^i X_k^i (-\widehat{\nu}_1(n))^{r-i} =$$
$$= \sum_{i=0}^{r} C_r^i (-\widehat{\nu}_1(n))^{r-i}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^i\right) = \sum_{i=0}^{r} C_r^i (-\widehat{\nu}_1(n))^{r-i}\widehat{\nu}_i(n).$$

Используя свойство 2) $\widehat{m}_X$, устанавливаем, что $\widehat{\nu}_i(n) \xrightarrow{\text{п.н.}} \nu_i$, $i = 1, \ldots, r$. Проводя обратное преобразование по биному Ньютона, получаем требуемое утверждение.

4) $\mathbf{D}[\widehat{m}_X(n)] = d_X/n$, где $d_X \triangleq \mathbf{D}[X]$. В самом деле, воспользовавшись независимостью СВ X_k, $k = 1, \ldots, n$, по свойству 4)M$[X]$ находим

$$\mathbf{D}[\widehat{m}_X(n)] = \mathbf{D}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{D}[X_k] = \frac{1}{n^2}(nd_X) = \frac{d_X}{n}.$$

5) $\mathbf{M}\left[\widehat{d}_X\right] = \dfrac{n-1}{n}d_X$. Пользуясь определениями $\widehat{d}_X$ и $\widehat{m}_X$ и свойством 4)M$[X]$, получаем

$$\mathbf{M}\left[\widehat{d}_X\right] = \mathbf{M}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \widehat{m}_X(n))^2\right] = \mathbf{M}\left[(X_1 - \widehat{m}_X(n))^2\right] =$$
$$= \mathbf{D}[X_1 - \widehat{m}_X(n)] = \mathbf{D}\left[X_1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \mathbf{D}\left[\frac{n-1}{n}X_1 - \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} X_k\right] =$$
$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 d_X + \frac{1}{n^2}(n-1)d_X = \frac{n-1}{n}d_X.$$

6) $(\widehat{m}_X - m_X)\Big/\sqrt{d_X/n} \xrightarrow{F} U_1$ при $n \to \infty$, где СВ U_1 имеет распределение $\mathbf{N}(0;1)$. Поскольку последовательность X_i, $i = 1, 2, \ldots$, образована независимыми одинаково распределенными СВ, $\mathbf{M}[\widehat{m}_X(n)] = m_X$ по свойству 1) $\widehat{m}_X$, и $\mathbf{D}[\widehat{m}_X(n)] = d_X/n$ по свойству 4) $\widehat{m}_X$, то по теореме Леви (см. пример 14.1) к случайной последовательности

$$Z_n \triangleq \frac{1}{\sqrt{d_X n}}\sum_{k=1}^{n}(X_k - m_X) = \frac{1}{\sqrt{d_X/n}}(\widehat{m}_X - m_X)$$

применима ЦПТ.

7) $\left(\widehat{d}_X - d_X\right) \Big/ \sqrt{(\mu_4 - \mu_2^2)/n} \xrightarrow{F} U_2$ при $n \to \infty$, где СВ U_2 имеет распределение $\mathbf{N}(0;1)$. Данное свойство доказывается аналогично доказательству свойства 6) $\widehat{m}_X$.

Второе и третье свойства указывают на то, что с увеличением объема выборки выборочные моменты будут сколь угодно близки к соответствующим теоретическим моментам. Пример нахождения объема выборки, гарантирующего в определенном смысле близость выборочной характеристики к ее истинному значению, приведен в § 23.

Из первого свойства вытекает, что математические ожидания (МО) выборочных начальных моментов совпадают с соответствующими значениями начальных моментов СВ X, т. е. в этом смысле обладают свойством «несмещенности». А МО выборочной дисперсии $\widehat{d}_X$ не совпадает с дисперсией d_X СВ X, т. е. в этом смысле СВ $\widehat{d}_X$ является «смещенной» выборочной характеристикой d_X. Поэтому часто вместо $\widehat{d}_X$ используют «*исправленную*» выборочную дисперсию $\widehat{s}_X \triangleq \dfrac{n}{n-1}\,\widehat{d}_X$, для которой $\mathbf{M}[\widehat{s}_X] = d_X$.

16.6. Типовые задачи.

Задача 16.1. В метеорологии принято характеризовать температуру месяца ее средним значением (среднее значение температуры месяца равно сумме температур всех дней данного месяца, деленной на число дней в этом месяце). В табл. 16.2 приведены значения средней температуры января в г. Саратове и г. Алатыре.

Таблица 16.2

Год	1891	1892	1893	1894	1895	1896	1897
Саратов	−19,2	−14,8	−19,6	−11,1	−9,4	−16,9	−13,7
Алатырь	−21,8	−15,4	−20,8	−11,3	−11,6	−19,2	−13,0
Год	1899	1911	1912	1913	1914	1915	
Саратов	−4,9	−13,9	−9,4	−8,3	−7,9	−5,3	
Алатырь	−7,4	−15,1	−14,4	−11,1	−10,5	−7,2	

Требуется по данным реализациям найти: *а*) выборочное среднее и выборочную дисперсию средней температуры января в г. Саратове и г. Алатыре; *б*) выборочный коэффициент корреляции средней температуры января в г. Саратове и средней температуры января в г. Алатыре.

Решение. Пусть СВ X — средняя температура января в г. Саратове, а СВ Y — средняя температура января в г. Алатыре. В табл.

приведена реализация $x_1, \ldots, x_{13}$ выборки $X_1, \ldots, X_{13}$, порожденной СВ X, и реализация $y_1, \ldots, y_{13}$ выборки $Y_1, \ldots, Y_{13}$, порожденной СВ Y. Выборочное среднее $\widehat{m}_X$ СВ X для данной реализации $x_1, \ldots, x_{13}$ равно

$$\widehat{m}_X = \frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13} x_i \approx -11{,}87,$$

а выборочное среднее $\widehat{m}_Y$ СВ Y равно

$$\widehat{m}_Y = \frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13} y_i \approx -13{,}75.$$

Выборочная дисперсия $\widehat{d}_X$ СВ X для данной реализации $x_1, \ldots$ $\ldots, x_{13}$ равна

$$\widehat{d}_X = \frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13} (x_i - (-11{,}87))^2 \approx 22{,}14,$$

а выборочная дисперсия $\widehat{d}_Y$ СВ Y равна

$$\widehat{d}_Y = \frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13} (y_i - (-13{,}75))^2 \approx 20{,}09.$$

Выборочный коэффициент корреляции СВ X и Y:

$$\widehat{r}_{XY} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{13} (x_i - (-11{,}87))\,(y_i - (-13{,}75))}{13\sqrt{22{,}14}\sqrt{20{,}09}} \approx 0{,}95.$$

Ответ. $\widehat{m}_X \approx -11{,}87$, $\widehat{m}_Y \approx -13{,}75$, $\widehat{d}_X \approx 22{,}14$, $\widehat{d}_Y \approx 20{,}09$, $\widehat{r}_{XY} \approx$ $\approx 0{,}95$.

Задача 16.2. В 1889–1890 гг. был измерен рост 1000 взрослых мужчин (рабочих московских фабрик). Результаты измерений представлены в табл. 16.3 (данные взяты из [6]). По имеющимся наблюдениям требуется построить гисторамму.

Решение. Пусть СВ X — рост взрослого мужчины.

В данной задаче группировка выборки уже проведена: действительная ось $\mathbb{R}^1$ разделена на 17 полуинтервалов Δ_k, $k = \overline{0, 16}$, где $\Delta_0 = (-\infty, 143)$, $\Delta_{16} = [188, +\infty)$, а остальные 15 полуинтервалов имеют одинаковую длину $h = 3$. Во второй строке таблицы приведены числа n_k, $k = \overline{1, 15}$, равные количеству элементов выборки, попавших в k-й разряд. Вычислим частоту попадания в k-й полуинтервал, $k =$ $= \overline{1, 15}$: $\overline{p}_k = n_k/1000$, и построим реализацию статистического ряда (см. табл. 16.4).

Теперь на оси OX отложим разряды Δ_k, $k = \overline{1, 15}$, и на них, как на основании, построим прямоугольники высотой $\overline{p}_k/h$ (рис. 16.3).

Таблица 16.3

рост [см]	143–146	146–149	149–152	152–155	155–158
число мужчин	1	2	8	26	65
рост [см]	158–161	161–164	164–167	167–170	170–173
число мужчин	120	181	201	170	120
рост [см]	173–176	176–179	179–182	182–185	185–188
число мужчин	64	28	10	3	1

Таблица 16.4

Δ_k	143–146	146–149	149–152	152–155	155–158
$\overline{p}_k$	0,001	0,002	0,008	0,026	0,065
Δ_k	158–161	161–164	164–167	167–170	170–173
$\overline{p}_k$	0,12	0,181	0,201	0,17	0,12
Δ_k	173–176	176–179	179–182	182–185	185–188
$\overline{p}_k$	0,064	0,028	0,01	0,003	0,001

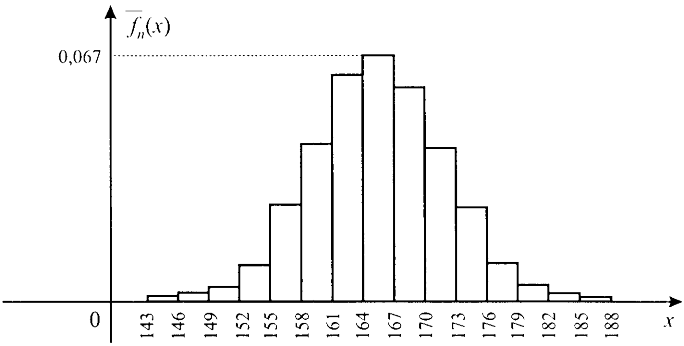

Рис. 16.3

§ 17. Основные распределения в статистике

17.1. Распределение хи-квадрат.

Определение 17.1. Пусть U_k, $k = \overline{1,n}$, — набор из n независимых нормально распределенных СВ, $U_k \sim \mathbf{N}(0;1)$. Тогда СВ

$$X_n \triangleq \sum_{k=1}^{n} U_k^2$$

имеет *распределение хи-квадрат* (χ^2*-распределение*) с n *степенями свободы*, что обозначается как $X_n \sim \chi^2(n)$.

Свойства распределения хи-квадрат $\chi^2(n)$

1) СВ X_n имеет следующую плотность распределения:

$$f(x,n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{(n/2)}\Gamma(n/2)}\, x^{(n/2)-1} e^{-x/2}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

где $\Gamma(m) \triangleq \int\limits_0^{+\infty} y^{m-1} e^{-y}\, dy$ — гамма-функция. Графики функций $f(x,n)$ (рис. 17.1), называемые *кривыми Пирсона*, асимметричны и начиная с $n > 2$ имеют один максимум в точке $x = n - 2$.

2) Характеристическая функция СВ X_n имеет вид

$$g(t,n) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x,n)\, dx = (1 - 2ti)^{-n/2}.$$

3) СВ $X_n \sim \chi^2(n)$ имеет следующие моменты:

$$\mathbf{M}[X_n] = n, \qquad \mathbf{D}[X_n] = 2n.$$

4) Сумма любого числа m независимых СВ X_k, $k = \overline{1,m}$, имеющих распределение хи-квадрат с n_k степенями свободы, имеет распределение хи-квадрат с $n \triangleq \sum\limits_{k=1}^{m} n_k$ степенями свободы.

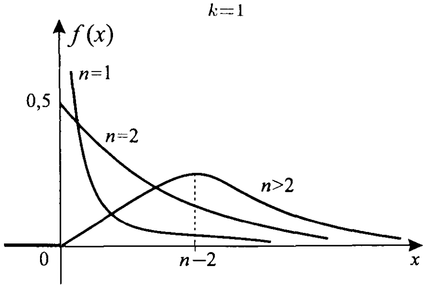

Рис. 17.1

5) Распределение хи-квадрат обладает свойством *асимптотической нормальности*:

$$\frac{X_n - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{F} U \qquad \text{при } n \to \infty,$$

где СВ U имеет распределение $\mathbf{N}(0;1)$. Это означает, что при достаточно большом объеме n выборки можно приближенно считать $X_n \sim \mathbf{N}(n;2n)$. Фактически эта аппроксимация имеет место уже при $n \geqslant 30$.

Пример 17.1. Приведем пример, в котором возникает распределение хи-квадрат. Пусть выборка Z_n соответствует нормальному распределению $\mathbf{N}(m;\sigma^2)$. Рассмотрим выборочную дисперсию

$$\widehat{d}_X = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \widehat{m}_X)^2,$$

где $\widehat{m}_X$ — выборочное среднее. Тогда СВ $Y_n \triangleq n\widehat{d}_X \big/ \sigma^2$ имеет распределение $\chi^2(n-1)$ и не зависит от $\widehat{m}_X$.

17.2. Распределение Стьюдента.

Определение 17.2. Пусть U и X_n — независимые СВ, $U \sim \mathbf{N}(0;1)$, $X_n \sim \chi^2(n)$. Тогда СВ $T_n \triangleq U \Big/ \sqrt{X_n/n}$ имеет *распределение Стьюдента с n степенями свободы*, что обозначают как $T_n \sim \mathbf{S}(n)$.

Свойства распределения Стьюдента $\mathbf{S}(n)$

1) СВ T_n имеет плотность распределения

$$f(t,n) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Графики плотностей $f(t,n)$ (рис. 17.2), называемые *кривыми Стьюдента*, симметричны при всех $n = 1, 2, \ldots$ относительно оси ординат.

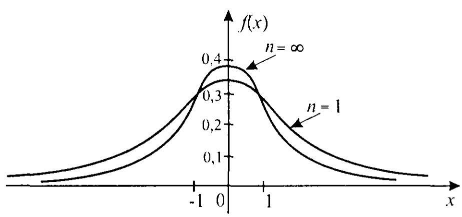

Рис. 17.2

2) СВ T_n имеет МО, равное $\mathbf{M}[T_n] = 0$ для всех $n \geqslant 2$, и дисперсию $\mathbf{D}[T_n] = n/(n-2)$ при $n > 2$. При $n = 2$ дисперсия $\mathbf{D}[T_n] = +\infty$.

3) При $n = 1$ распределение Стьюдента называется *распределением Коши*, плотность которого равна

$$f(t,1) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}.$$

Математическое ожидание и дисперсия СВ T_1, имеющей распределение Коши, не существуют, так как бесконечен предел

$$\lim_{a\to\infty} I(a) = +\infty,$$

где $I(a) \triangleq \frac{1}{\pi}\int\limits_0^a \frac{t}{t^2+1}\,dt.$

4) Можно показать, что при $n \to \infty$ распределение $\mathbf{S}\,(n)$ асимптотически нормально, т. е. $T_n \xrightarrow{F} U$, где СВ U имеет распределение $\mathrm{N}(0;1)$. При $n \geqslant 30$ распределение Стьюдента $\mathbf{S}\,(n)$ практически не отличается от $\mathrm{N}(0;1)$.

Пример 17.2. Приведем пример, в котором встречается распределение Стьюдента. Пусть выборка Z_n соответствует нормальному распределению $\mathrm{N}(m;\sigma^2)$. Пусть $\widehat{m}_X$ — выборочное среднее, а $\widehat{d}_X$ — выборочная дисперсия. Тогда СВ

$$T_n = \sqrt{n-1}\,\frac{\widehat{m}_X - m}{\sqrt{\widehat{d}_X}}$$

имеет распределение Стьюдента $\mathbf{S}\,(n-1)$.

17.3. Распределение Фишера.

Определение 17.3. Пусть независимые СВ X_n и X_m имеют распределения хи-квадрат соответственно с n и m степенями свободы. Тогда СВ $V_{n,m} \triangleq \dfrac{X_n/n}{X_m/m}$ имеет *распределение Фишера с n и m степенями свободы*, что записывают как $V_{n,m} \sim \mathbf{F}\,(n;m)$.

Свойства распределения Фишера $\mathbf{F}(n;m)$

1) СВ $V_{n,m}$ имеет плотность $f(v,n,m) = 0$ при $v \leqslant 0$ и

$$f(v,n,m) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\, n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}} \frac{v^{\frac{n}{2}-1}}{(m+nv)^{\frac{n+m}{2}}} \qquad \text{при } v > 0.$$

Графики функции $f(v,n,m)$, называемые *кривыми Фишера*, асимметричны и при $n > 2$ достигают максимальных значений в точках

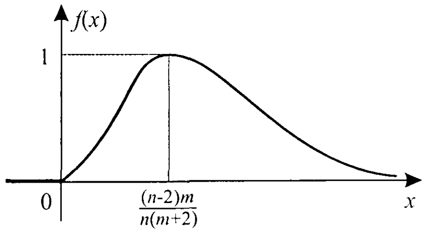

Рис. 17.3

$v = \dfrac{(n-2)m}{(m+2)n}$, близких к единице при больших значениях m и n. Типовой вид кривой Фишера приведен на рис. 17.3.

2) СВ $V_{n,m}$ имеет следующие моменты:

$$\mathbf{M}[V_{n,m}] = \frac{m}{m-2} \text{ при } m > 2, \ \mathbf{D}[V_{n,m}] = \frac{2m^2(m+n-2)}{n(m-2)^2(m-4)} \text{ при } m > 4.$$

Пример 17.3. Пусть $Z_n = \mathrm{col}(X_1, \ldots, X_n)$ — выборка объема n, порожденная СВ X с нормальным распределением $\mathbf{N}(m_X; \sigma^2)$, а $W_n = \mathrm{col}(Y_1, \ldots, Y_m)$ — выборка объема m, порожденная СВ Y с нормальным распределением $\mathbf{N}(m_Y; \sigma^2)$, и СВ Z_n и W_n независимы. Тогда СВ $V_{n,m}$, образованная отношением "исправленных"выборочных дисперсий СВ X и Y, т. е.

$$V_{n,m} \triangleq \frac{\frac{1}{n-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - \widehat{m}_X)^2}{\frac{1}{m-1}\sum\limits_{j=1}^{m}(Y_j - \widehat{m}_Y)^2},$$

имеет распределение $\mathbf{F}(n-1; m-1)$.

§ 18. Точечные оценки

18.1. Основные понятия.

Определение 18.1. *Параметром распределения* $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1$ СВ X называется любая числовая характеристика этой СВ (математическое ожидание, дисперсия и т. п.) или любая константа, явно входящая в выражение для функции распределения.

В общем случае будем предполагать, что параметр распределения θ может быть векторным, т. е. $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^s$.

В случае параметрической статистической модели $(S_\theta, F_{Z_n}(z_n,\theta))$ таким параметром распределения может служить неизвестный вектор $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^s$, характеризующий распределение $F_{Z_n}(z_n,\theta)$.

Пусть имеется выборка $Z_n = \mathrm{col}(X_1, \ldots, X_n)$ с реализацией $z_n = \mathrm{col}(x_1, \ldots, x_n)$.

Определение 18.2. *Точечной* (*выборочной*) *оценкой* неизвестного параметра распределения $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^s$ называется произвольная статистика $\widehat{\theta}(Z_n)$, построенная по выборке Z_n и принимающая значения в множестве Θ.

Замечание 18.1. Реализацию $\widehat{\theta}(z_n)$ оценки $\widehat{\theta}(Z_n)$ принимают, как правило, за приближенное значение неизвестного параметра θ.

Ясно, что существует много разных способов построения точечной оценки, которые учитывают тип статистической модели. Для параметрической и непараметрической моделей эти способы могут быть различны. Рассмотрим некоторые свойства, которые характеризуют качество введенной оценки.

Определение 18.3. Оценка $\widehat{\theta}(Z_n)$ параметра θ называется *несмещенной*, если ее МО равно θ, т. е. $\mathbf{M}\left[\widehat{\theta}(Z_n)\right] = \theta$ для любого $\theta \in \Theta$.

Определение 18.4. Оценка $\widehat{\theta}(Z_n)$ параметра θ называется *состоятельной*, если она сходится по вероятности к θ, т. е. $\widehat{\theta}(Z_n) \xrightarrow{\mathrm{P}} \theta$ при $n \to \infty$ для любого $\theta \in \Theta$.

Определение 18.5. Оценка $\widehat{\theta}(Z_n)$ параметра θ называется *сильно состоятельной*, если она сходится почти наверное к θ, т. е. $\widehat{\theta}(Z_n) \xrightarrow{\text{п.н.}} \theta$ при $n \to \infty$ для любого $\theta \in \Theta$.

Очевидно, что если оценка сильно состоятельная, то она является также состоятельной.

Пример 18.1. Оценка $\widehat{\theta}_1(Z_n) \triangleq \widehat{m}_X$ неизвестного МО $\theta_1 \triangleq m_X$ СВ X является несмещенной (по свойству 1) $\widehat{m}_X$), а оценка $\widehat{\theta}_2(Z_n) \triangleq \widehat{d}_X$ неизвестной дисперсии $\theta_2 \triangleq d_X$ — смещенной, так как $\mathbf{M}\left[\widehat{d}_X\right] = \dfrac{n-1}{n}\, d_X$ (по свойству 5) $\widehat{m}_X$). Оценка $\widehat{\theta}_2(Z_n) \triangleq \widehat{s}_X$ является несмещенной оценкой d_X по определению $\widehat{s}_X$. Если существуют моменты m_X, d_X, то сильная состоятельность оценок $\widehat{m}_X$, $\widehat{d}_X$ гарантируется свойствами 2), 3) $\widehat{m}_X$.

Свойствами состоятельности и несмещенности могут обладать сразу несколько оценок неизвестного параметра θ.

Определение 18.6. Несмещенная оценка $\widehat{\theta}^*(Z_n)$ скалярного параметра θ называется *эффективной*, если $\mathbf{D}\left[\widehat{\theta}^*(Z_n)\right] \leqslant \mathbf{D}\left[\widehat{\theta}(Z_n)\right]$

для всех несмещенных оценок $\widehat{\theta}(Z_n)$ параметра θ, т.е. ее дисперсия минимальна по сравнению с дисперсиями других несмещенных оценок при одном и том же объеме n выборки Z_n.

Вообще говоря, дисперсии несмещенных оценок могут зависеть от параметра θ. В этом случае под эффективной оценкой понимается такая, для которой вышеприведенное неравенство является строгим хотя бы для одного значения параметра θ.

В классе параметрических моделей $(S_\theta, F_{Z_n}(z_n,\theta))$, $\theta \in \Theta \subset \subset \mathbb{R}^s$, рассмотрим подкласс статистических моделей, удовлетворяющих некоторым естественным условиям регулярности. С этой целью введем следующие понятия.

Определение 18.7. *Функцией правдоподобия* для неизвестного параметра $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^s$ называется: в случае непрерывной наблюдаемой СВ X — плотность распределения

$$L(z_n,\theta_1, \ldots ,\theta_s) \triangleq f_{Z_n}(z_n,\theta_1, \ldots ,\theta_s) = \prod_{k=1}^{n} f_X(x_k,\theta_1, \ldots ,\theta_s),$$

где $f_X(x,\theta_1, \ldots ,\theta_s)$ — плотность распределения СВ X, а в случае дискретной наблюдаемой СВ X — произведение вероятностей

$$L(z_n,\theta_1, \ldots ,\theta_s) \triangleq \prod_{k=1}^{n} P_X(x_k,\theta_1, \ldots ,\theta_s),$$

где $P_X(x_k,\theta_1, \ldots ,\theta_s)$ — вероятность события $\{X = x_k\}$.

Аналогично определяется функция правдоподобия $L(z_n,\theta_1, \ldots$ $\ldots ,\theta_s)$ при неоднородной выборке $Z_n \triangleq \mathrm{col}(X_1, \ldots ,X_n)$, когда СВ X_k, $k = \overline{1,n}$, по-прежнему независимы, но имеют различные плотности распределения $f_{X_k}(x_k,\theta_1, \ldots ,\theta_s)$, зависящие от одного и того же набора неизвестных параметров $\theta_1, \ldots ,\theta_s$.

Определение 18.8. *Логарифмической функцией правдоподобия* для неизвестного параметра $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^s$ называется функция $\ln L(z_n,\theta_1, \ldots ,\theta_s)$.

Определение 18.9. Параметрическая статистическая модель $(S_\theta, F_{Z_n}(z_n,\theta))$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1$, называется *регулярной*, если выполняются следующие условия:

1) функция правдоподобия $L(z_n,\theta) > 0$ для всех $\theta \in \Theta$ и $z_n \in S_\theta$ дифференцируема по параметру $\theta \in \Theta$;

2) для любого измеримого множества $A \subset S$ выполняется условие

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_A L(z_n,\theta)\, dz_n = \int_A \frac{\partial}{\partial\theta}L(z_n,\theta)\, dz_n.$$

Из условия 2) вытекает, в частности, что в случае регулярной модели выборочное пространство $S_\theta = S$, т. е. не зависит от неизвестного параметра θ.

Пример 18.2. Пусть выборка Z_n соответствует равномерному распределению $\mathbf{R}(0;b)$ с неизвестным параметром $\theta \triangleq b$. В этом случае параметрическая статистическая модель $(S_\theta, F_{Z_n}(z_n,\theta))$ не является регулярной, так как выборочное пространство S_θ определяется на отрезках $[0,b]$, а следовательно, зависит от параметра b.

Определение 18.10. В случае регулярной статистической модели $(S, F_{Z_n}(z_n,\theta))$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1$, величина

$$I_n(\theta) \triangleq \mathbf{M}\left[\left(\frac{\partial \ln L(Z_n,\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right]$$

называется *информацией Фишера* о параметре $\theta \in \Theta$, содержащейся в выборке Z_n.

В случае регулярной модели $(S, F_{Z_n}(z_n,\theta))$ для любой несмещенной оценки $\widehat{\theta}(Z_n)$ параметра $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1$ справедливо *неравенство Рао–Крамера*

$$\mathbf{D}\left[\widehat{\theta}(Z_n)\right] \geqslant \frac{1}{I_n(\theta)}.$$

Это неравенство дает нижнюю границу для дисперсии несмещенной оценки.

Определение 18.11. Несмещенная оценка $\widehat{\theta}(Z_n)$ параметра $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1$ называется *R-эффективной оценкой*, если для этой оценки в неравенстве Рао–Крамера достигается равенство, т. е. $\mathbf{D}\left[\widehat{\theta}(Z_n)\right] = 1/I_n(\theta)$.

Если R-эффективная оценка существует, то она является также эффективной в смысле минимума дисперсии (см. определение 18.6).

Способ построения R-эффективных оценок вытекает из *критерия эффективности*, состоящего в следующем. Оценка $\widehat{\theta}(Z_n)$ параметра θ является R-эффективной тогда и только тогда, когда существует некоторая функция $a(\theta)$ такая, что выполняется равенство

$$\widehat{\theta}(Z_n) - \theta = a(\theta)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \ln f(X_k,\theta)}{\partial\theta}.$$

Пример 18.3. Пусть СВ X имеет нормальное распределение $\mathbf{N}(m_X;\sigma_X^2)$ с неизвестным параметром $\theta \triangleq m_X$. Найдем R-

эффективную оценку параметра θ. С этой целью вычислим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \ln f(X_k,\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{\sigma_X^2} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \theta) = \\ = \frac{n}{\sigma_X^2} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k - \theta \right) = \frac{n}{\sigma_X^2} (\widehat{m}_X - \theta).$$

В этом случае $a(\theta) = n/\sigma_X^2$ и R-эффективной оценкой m_X является выборочное среднее $\widehat{m}_X$. Как отмечалось выше, R-эффективная оценка является также эффективной. Поэтому $\widehat{m}_X$ является эффективной оценкой m_X.

Таблица 18.1

Модель	$I_n(\theta)$	$\widehat{\theta}(Z_n)$	$\mathbf{D}[\widehat{\theta}(Z_n)]$
$\mathbf{N}(\theta;\sigma_X^2)$	$\frac{n}{\sigma_X^2}$	$\widehat{m}_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	$\frac{\sigma_X^2}{n}$
$\mathbf{N}(m_X;\theta)$	$\frac{n}{2\theta^2}$	$\widehat{d}_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m_X)^2$	$\frac{2\theta^2}{n}$
$\mathbf{Bi}(k;\theta)$	$\frac{kn}{\theta(1-\theta)}$	$\frac{\widehat{m}_X}{k} = \frac{1}{nk}\sum_{i=1}^{n} X_i$	$\frac{\theta(1-\theta)}{kn}$
$\Pi(\theta)$	$\frac{n}{\theta}$	$\widehat{m}_X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	$\frac{\theta}{n}$

Пример 18.4. Приведем примеры R-эффективных (а следовательно, и эффективных) оценок $\widehat{\theta}(Z_n)$ неизвестных параметров θ некоторых распространенных распределений, их дисперсии $\mathbf{D}\left[\widehat{\theta}(Z_n)\right]$, а также значения информации Фишера $I_n(\theta)$ (см. табл. 18.1). Из таблицы видно, что $\mathbf{D}\left[\widehat{\theta}(Z_n)\right] = 1/I_n(\theta)$, следовательно, согласно определению 18.11, эти оценки являются R-эффективными.

Пример 18.5. Приведем пример, когда эффективная оценка неизвестного параметра существует, а R-эффективная оценка не существует. Пусть выборка Z_n соответствует распределению $\mathbf{N}(m;\sigma^2)$ с неизвестными параметрами $\theta_1 \triangleq m$, $\theta_2 \triangleq \sigma^2$. В данном случае параметрическая модель является регулярной. Из п. 16.5 следует, что статистика

$$\widehat{s}_X(Z_n) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \widehat{m}_X)^2$$

является несмещенной оценкой неизвестной дисперсии $d_X = \sigma^2$. Как указано в примере 17.1 из п. 17.1, СВ

$$Y_n \triangleq \frac{(n-1)\widehat{s}_X(Z_n)}{\sigma^2}$$

имеет распределение хи-квадрат $\chi^2(n-1)$, а следовательно, её дисперсия равна $\mathbf{D}[Y_n] = 2(n-1)$. Поэтому

$$\mathbf{D}\,[\widehat{s}_X(Z_n)] = \frac{2\sigma^4}{n-1}.$$

Согласно неравенству Рао-Крамера нижняя граница дисперсии любой несмещенной оценки в этой статистической модели равна $2\sigma^4/n$. Таким образом, $\widehat{s}_X(Z_n)$ не является R-эффективной оценкой. Но можно показать, что эта оценка является эффективной, т. е. $\widehat{s}_X(Z_n)$ имеет минимальную дисперсию. Таким образом, нижняя граница в неравенстве Рао-Крамера не достигается, а следовательно, R-эффективной оценки не существует.

18.2. Метод максимального правдоподобия. Как уже отмечалось выше, на практике часто удается предсказать вид распределения наблюдаемой СВ с точностью до неизвестных параметров $\theta \triangleq \mathrm{col}(\theta_1, \ldots, \theta_s)$, т. е. для непрерывной СВ X оказывается известной плотность $f(x,\theta)$, а для дискретной СВ X — вероятности $p(x_i,\theta) \triangleq \mathbf{P}_\theta\{X = x_i\}$, $i = \overline{1,m}$, где x_i, $i = \overline{1,m}$, — возможные значения СВ X. Например, может быть $\theta_1 = m_X$, $\theta_2 = d_X$ при $s = 2$. Эти неизвестные параметры требуется оценить по имеющейся выборке Z_n.

Рассмотрим параметрическую статистическую модель $(S_\theta, F_{Z_n}(z_n,\theta))$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^s$, для которой известна функция правдоподобия $L(z_n, \theta_1, \ldots, \theta_s)$ (см. определение 18.7).

Определение 18.12. *Оценкой максимального правдоподобия* (МП-*оценкой*) параметра $\theta \in \Theta$ называется статистика $\widehat{\theta}(Z_n)$, максимизирующая для каждой реализации z_n функцию правдоподобия, т. е.

$$\widehat{\theta}(z_n) = \arg\max_{\theta \in \Theta} L(z_n, \theta).$$

Способ построения МП-оценки называется *методом максимального правдоподобия.*

Поскольку функция правдоподобия $L(z_n,\theta)$ и её логарифм $\ln L(z_n,\theta)$ достигают максимума при одних и тех же значениях θ, то часто вместо $L(z_n,\theta)$ рассматривают логарифмическую функцию правдоподобия $\ln L(z_n,\theta)$.

В случае дифференцируемости функции $\ln L(z_n, \theta)$ по θ МП-оценку можно найти, решая относительно $\theta_1, \ldots, \theta_s$ систему *уравнений правдоподобия*

$$\frac{\partial \ln L(z_n, \theta_1, \ldots, \theta_s)}{\partial \theta_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \ln L(z_n, \theta_1, \ldots, \theta_s)}{\partial \theta_s} = 0.$$

Отметим, что в тех случаях, когда существует R-эффективная оценка параметра θ, она совпадает с МП-оценкой.

Пример 18.6. Если, например, СВ X имеет нормальное распределение $\mathbf{N}(m_X; \sigma_X^2)$ с неизвестным математическим ожиданием $\theta \triangleq m_X$, то легко установить, что оценкой максимального правдоподобия параметра $\theta = m_X$ при любых σ_X является выборочное среднее $\widehat{m}_X$. Действительно, в этом случае

$$L(z_n, m_X) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left\{-\frac{(x_k - m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\} = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma_X^n} \exp\left\{-\sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k - m_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\}.$$

Дифференцируя функцию $\ln L(z_n, m_X)$ по m_X и приравнивая нулю получаемое выражение, находим уравнение, решение которого

$$\widehat{\theta}(Z_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \triangleq \widehat{m}_X.$$

Пример 18.7. Пусть СВ X имеет равномерное распределение $\mathbf{R}(a; b)$ с неизвестными параметрами $\theta_1 \triangleq a$, $\theta_2 \triangleq b$. В данном случае плотность распределения $f(x, a, b) = 1/(b - a)$, если $x \in [a, b]$, и $f(x, a, b) = 0$, если $x \notin [a, b]$. Оценим параметры a и b методом максимального правдоподобия. Функция правдоподобия в данном случае имеет вид

$$L(x_1, \ldots, x_n, a, b) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k, a, b) = \left(\frac{1}{b - a}\right)^n,$$

если $a \leqslant x_k \leqslant b$ для всех $k = \overline{1, n}$, и $L(x_1, \ldots, x_n, a, b) = 0$ в остальных случаях. Таким образом, функция правдоподобия отлична от нуля, если неизвестные параметры a и b удовлетворяют неравенствам

$$b \geqslant x^{(n)} \triangleq \max_{k=\overline{1,n}} x_k, \qquad a \leqslant x^{(1)} \triangleq \min_{k=\overline{1,n}} x_k.$$

При этом функция $L(x_1, \ldots, x_n, a, b)$ достигает максимума по a и b, когда разность $b - a$ оказывается минимально возможной, не нарушающей полученные неравенства, т. е. в случае достижения в них равенств. Таким образом получаем МП-оценки неизвестных параметров a и b:

$$\widehat{a}(Z_n) = X^{(1)}, \qquad \widehat{b}(Z_n) = X^{(n)},$$

где $X^{(n)}$ и $X^{(1)}$ — крайние члены вариационного ряда.

Как отмечалось выше, данная параметрическая модель не является регулярной, поэтому в данной модели R-эффективные оценки не существуют.

Пример 18.8. Пусть случайная величина X имеет распределение Пуассона $\mathbf{\Pi}(a)$ с неизвестным параметром $\theta = a$. Построим МП-оценку параметра a. Функция правдоподобия в этом случае равна

$$L(z_n, a) = \prod_{k=1}^{n} \frac{a^{x_k} e^{-a}}{x_k!},$$

поэтому логарифмическая функция правдоподобия равна

$$\ln L(z_n, a) = \sum_{k=1}^{n} x_k \ln a - na - \ln(x_1! \cdot \ldots \cdot x_n!).$$

Решая соответствующее уравнение правдоподобия

$$\frac{\partial}{\partial a} \ln L(z_n, a) = 0,$$

находим МП-оценку неизвестного параметра a:

$$\widehat{a}(Z_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \triangleq \widehat{m}_X.$$

Пример 18.9. Найдем МП-оценку для вероятности p «успеха» в схеме испытаний Бернулли. В этом случае имеем распределение Бернулли $\mathbf{Bi}(1; p)$ с неизвестным параметром $\theta = p$. Поэтому

$$L(z_n, a) = \prod_{k=1}^{n} p^{x_k} (1 - p)^{1 - x_k},$$

где $x_k = 1$, если в k-м испытании был «успех», и $x_k = 0$ — в противном случае. Решая уравнение правдоподобия

$$\frac{\partial}{\partial p} \ln L(z_n, p) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{p} - \frac{1 - x_k}{1 - p} \right) = 0$$

относительно параметра p, находим МП-оценку:

$$\widehat{p}(Z_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \triangleq \widehat{m}_X .$$

18.3. Метод моментов. Исторически первым для оценивания неизвестных параметров был предложен следующий метод. Пусть имеется параметрическая статистическая модель $(S_\theta, F_{Z_n}(z_n,\theta))$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^s$. Предположим, что у наблюдаемой СВ X, порождающей выборку Z_n, существуют начальные моменты $\nu_i = \mathrm{M}[X^i]$, $i = \overline{1,s}$. Тогда в общем случае от неизвестных параметров будут зависеть и начальные моменты, т. е. $\nu_i = \nu_i(\theta)$.

Пусть $\widehat{\nu}_i$, $i = \overline{1,s}$, — выборочные начальные моменты. Рассмотрим систему уравнений

$$\nu_i(\theta) = \widehat{\nu}_i, \quad i = \overline{1,s}$$

и предположим, что её можно разрешить относительно параметров $\theta_1, \ldots, \theta_s$, т. е. найти функции $\widehat{\theta}_i = \varphi_i(\widehat{\nu}_1, \ldots, \widehat{\nu}_s)$, $i = \overline{1,s}$.

Определение 18.13. Решение полученной системы уравнений $\widehat{\theta}_i = \varphi_i(\widehat{\nu}_1, \ldots, \widehat{\nu}_s)$, $i = \overline{1,s}$, называется *оценкой* параметра θ, найденной по *методу моментов*, или ММ-*оценкой*.

Если функции $\varphi_1(\cdot)$, $\ldots$,$\varphi_s(\cdot)$ непрерывны, то ММ-оценки являются состоятельными.

Замечание 18.2. Уравнения метода моментов часто оказываются более простыми по сравнению с уравнениями правдоподобия, и их решение не связано с большими вычислительными трудностями.

Пример 18.10. Пусть $Z_n \triangleq \mathrm{col}(X_1, \ldots, X_n)$ — выборка, соответствующая нормальному распределению $\mathrm{N}(m;\sigma^2)$ с неизвестными параметрами $\theta_1 \triangleq m$ и $\theta_2 \triangleq \sigma^2$. Оценим параметры m и σ^2 с помощью метода моментов. В данном случае $\nu_1 = m$, $\nu_2 = m^2 + \sigma^2$ и система уравнений для метода моментов принимает вид

$$\begin{cases} m = \widehat{\nu}_1 \triangleq \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k, \\ m^2 + \sigma^2 = \widehat{\nu}_2 \triangleq \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k^2. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим ММ-оценки

$$\widehat{\theta}_1(Z_n) = \widehat{\nu}_1, \qquad \widehat{\theta}_2(Z_n) = \widehat{\nu}_2 - \widehat{\nu}_1^2.$$

Пример 18.11. Пусть $Z_n = \mathrm{col}(X_1, \ldots, X_n)$ — выборка, соответствующая равномерному распределению $\mathbf{R}(a;b)$ с неизвестными параметрами $\theta_1 \triangleq a$ и $\theta_2 \triangleq b$. Оценим параметры a и b с помощью метода моментов. Поскольку для данного распределения

$$\nu_1 = \frac{a+b}{2}, \qquad \nu_2 = \frac{(b-a)^2}{12} + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

то система уравнений метода моментов принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = \widehat{\nu}_1 \triangleq \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k, \\ \dfrac{(b-a)^2}{12} + \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 = \widehat{\nu}_2 \triangleq \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k^2. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем ММ-оценки неизвестных параметров:

$$\widehat{a}(Z_n) = \widehat{\nu}_1 - \sqrt{3\widehat{d}_X}, \qquad \widehat{b}(Z_n) = \widehat{\nu}_1 + \sqrt{3\widehat{d}_X},$$

где $\widehat{d}_X \triangleq \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - \widehat{m}_X)^2$.

Оценки, полученные в примере 18.10 с помощью метода моментов, совпадают с МП-оценками, найденными в примере 18.6 из п. 18.2, а ММ-оценки в примере 18.11 не совпадают с МП-оценками, построенными в примере 18.7 из того же пункта.

§ 19. Интервальные оценки

19.1. Основные понятия. Пусть имеется параметрическая статистическая модель $(S_\theta, F_{Z_n}(z_n, \theta))$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1$, и по выборке $Z_n = \mathrm{col}(X_1, \ldots, X_n)$, соответствующей распределению $F(x,\theta)$ наблюдаемой СВ X, требуется оценить неизвестный параметр θ. Вместо точечных оценок, рассмотренных ранее, рассмотрим другой тип оценок неизвестного параметра $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1$.

Определение 19.1. Интервал $[\theta_1(Z_n), \theta_2(Z_n)]$ со случайными концами, «накрывающий» с вероятностью $1-\alpha$, $0 < \alpha < 1$, неизвестный параметр θ, т. е.

$$\mathbf{P}\{\theta_1(Z_n) \leqslant \theta \leqslant \theta_2(Z_n)\} = 1 - \alpha,$$

называется *доверительным интервалом* (или *интервальной оценкой*) уровня надежности $1-\alpha$ параметра θ.

Аналогично определяется доверительный интервал для произвольной функции от параметра θ.

Определение 19.2. Число $\delta \triangleq 1-\alpha$ называется *доверительной вероятностью* или *уровнем доверия (надежности)*.

Определение 19.3. Доверительный интервал $[\theta_1(Z_n), \theta_2(Z_n)]$ называется *центральным*, если выполняются следующие условия:

$$\mathbf{P}\{\theta \geqslant \theta_2(Z_n)\} = \frac{\alpha}{2}, \qquad \mathbf{P}\{\theta_1(Z_n) \geqslant \theta\} = \frac{\alpha}{2}.$$

Часто вместо двусторонних доверительных интервалов рассматривают односторонние доверительные интервалы, полагая $\theta_1(Z_n) = -\infty$ или $\theta_2(Z_n) = +\infty$.

Определение 19.4. Интервал, границы которого удовлетворяют условию:

$$\mathbf{P}\{\theta \geqslant \theta_2(Z_n)\} = \alpha \qquad (\text{или} \quad \mathbf{P}\{\theta_1(Z_n) \geqslant \theta\} = \alpha),$$

называется соответственно *правосторонним* (или *левосторонним*) *доверительным интервалом.*

Рассмотрим два способа построения доверительных интервалов в разделах 19.2, 19.3.

19.2. Использование центральной статистики.

Определение 19.5. Функция $Y \triangleq G(Z_n, \theta)$ случайной выборки Z_n, такая, что её распределение $F_Y(y)$ не зависит от параметра θ и при любом значении z_n функция $G(z_n, \theta)$ является непрерывной и строго монотонной по θ, называется *центральной статистикой* для параметра θ.

Зная распределение $F_Y(y)$ центральной статистики $Y \triangleq G(Z_n, \theta)$, можно найти числа g_1 и g_2, удовлетворяющие условию

$$\mathbf{P}\{g_1 \leqslant G(Z_n, \theta) \leqslant g_2\} = 1-\alpha.$$

Тогда границы доверительного интервала $[\theta_1(Z_n), \theta_2(Z_n)]$ для параметра θ могут быть найдены, если разрешить, учитывая свойства функции $G(z_n, \theta)$, следующие неравенства:

$$g_1 \leqslant G(Z_n, \theta) \leqslant g_2.$$

В частности, если $G(z_n, \theta)$ — монотонно возрастающая по θ функция, то

$$\theta_1(Z_n) = G^{-1}(Z_n, g_1), \qquad \theta_2(Z_n) = G^{-1}(Z_n, g_2),$$

где $G^{-1}(z_n, g_1)$ — функция, обратная по отношению к $G(z_n, \theta)$. Если $G(z_n, \theta)$ — монотонно убывающая по θ функция, то

$$\theta_1(Z_n) = G^{-1}(Z_n, g_2), \qquad \theta_2(Z_n) = G^{-1}(Z_n, g_1).$$

Применим данный метод для построения доверительных интервалов неизвестных параметров нормального распределения $\mathbf{N}(m_X; \sigma_X^2)$. С этой целью сформулируем утверждение, с помощью которого можно определить центральные статистики для неизвестых параметров m_X, σ_X^2. Но перед его формулировкой напомним следующее понятие из линейной алгебры.

Матрица C размерности $n \times n$ с элементами c_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, называется *ортогональной*, если $C^T C = I$, где I — единичная матрица размерности $n \times n$, а C^T — *транспонированная матрица* с элементами $c_{ij}^T = c_{ji}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$.

Рассмотрим ортогональную матрицу C специального вида, у которой первая строка состоит из элементов $c_{1i} = 1/\sqrt{n}$, $i = \overline{1,n}$, а остальные строки — произвольные, ненарушающие ортогональность матрицы C. Такая матрица всегда существует. Рассмотрим свойства введенной матрицы.

Свойства матрицы C

1) $\sum\limits_{j=1}^{n} c_{kj} c_{ij} = 0$ для всех $k \neq i$, так как $C^T C = I$ и у единичной матрицы все элементы, кроме диагональных, равны нулю.

2) $\sum\limits_{j=1}^{n} c_{kj}^2 = 1$ для всех $k = \overline{1,n}$, так как $C^T C = I$ и диагональные элементы матрицы I равны единице.

3) Если $y = Cx$, где $y = \mathrm{col}(y_1, \ldots, y_n)$ и $x = \mathrm{col}(x_1, ..., x_n)$, то $\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2$. Действительно,

$$\sum_{k=1}^{n} y_k^2 = y^T y = (Cx)^T Cx = x^T C^T C x = x^T x = \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

4) $\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} = 0$ для всех $i = \overline{2,n}$. Из свойства 1) C для первой строки $(k = 1)$ при $i > 1$ имеем

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = \sqrt{n} \sum_{j=1}^{n} c_{1j} c_{ij} = 0.$$

Теорема 19.1. (*Теорема Фишера, усиленный вариант*). *Пусть* $Z_n \triangleq \mathrm{col}(X_1, \ldots, X_n)$ — *выборка, порожденная СВ* $X \sim \mathbf{N}(m_X; \sigma_X^2)$, *а* $\widehat{m}_X$ *и* $\widehat{d}_X$ — *выборочные среднее и дисперсия. Тогда*

1) *СВ* $\overset{*}{M}_X \triangleq (\widehat{m}_X - m_X)\sqrt{n} \big/ \sigma_X$ *имеет распределение* $\mathbf{N}(0;1)$;

2) *СВ* $\overset{*}{D}_X \triangleq n\widehat{d}_X / \sigma_X^2$ *имеет распределение* $\chi^2(n-1)$;

3) $\overset{\circ}{M}_X \triangleq (\widehat{m}_X - m_X)\sqrt{(n-1) \big/ \widehat{d}_X}$ *имеет распределение* $\mathbf{S}(n-1)$;

4) *СВ* $\widehat{m}_X$ *и* $\widehat{d}_X$ *независимы.*

Доказательство. 1) Докажем вначале первое утверждение. Так как сумма нормальных СВ является нормальной, то $\widehat{m}_X = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ является нормальной СВ. Кроме того, из свойства 1) $\widehat{m}_X$ вытекает $\mathbf{M}[\widehat{m}_X] = m_X$. Далее, так как СВ X_i, $i = \overline{1,n}$, независимы и одинаково распределены, то в силу свойства 4)M$[X]$ имеем $\mathbf{D}[\widehat{m}_X] = \sigma_X^2/n$. Таким образом, $(\widehat{m}_X - m_X)\sqrt{n}/\sigma_X \sim \mathbf{N}(0;1)$.

2) Докажем теперь второе утверждение. С этой целью введем новые случайные величины $Y_1, \ldots, Y_n$:

$$Y = \frac{1}{\sigma_X} C Z_n,$$

где $Y \triangleq \mathrm{col}(Y_1, \ldots, Y_n)$, $Z_n \triangleq \mathrm{col}(X_1, \ldots, X_n)$, C — ортогональная матрица, построенная выше, т. е. удовлетворяющая свойствам 1) C – 4) C. Тогда имеем

$$Y_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{kj}}{\sigma_X} X_j, Y_1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{1j}}{\sigma_X} X_j = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} X_j = \frac{\sqrt{n}}{\sigma_X} \widehat{m}_X.$$

Найдем моменты новых СВ. Учитывая свойства 1) $\widehat{m}_X$ и 4) C, имеем

$$\mathbf{M}[Y_1] = \frac{\sqrt{n}}{\sigma_X} m_X,$$

$$\mathbf{M}[Y_k] = \mathbf{M}\Big[\sum_{j=1}^{n} \frac{c_{kj}}{\sigma_X} X_j\Big] = \frac{m_X}{\sigma_X} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} = 0, \quad k = \overline{2,n}.$$

Учитывая свойства 4) $\widehat{m}_X$ и 2) C, получаем

$$\mathbf{D}[Y_k] = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_{kj}^2}{\sigma_X^2} \mathbf{D}[X_j] = \sum_{j=1}^{n} c_{kj}^2 = 1, \quad k = \overline{1,n}.$$

Пусть $k \neq i$, $k = \overline{2,n}$, $i = \overline{2,n}$. Тогда с учетом независимости СВ X_j, $j = \overline{1,n}$, и их одинаковой распределенности имеем

$$\sigma_X^2 k_{Y_k Y_i} = \sigma_X^2 \mathbf{M}[Y_k Y_i] = \mathbf{M}\Big[\sum_{j=1}^{n} c_{kj} X_j \sum_{l=1}^{n} c_{il} X_l\Big] =$$
$$= \sum_{j \neq l}^{n} c_{kj} c_{il} \mathbf{M}[X_j]\mathbf{M}[X_l] + \sum_{j=1}^{n} c_{kj} c_{ij} \mathbf{M}[X_j^2] =$$
$$= m_X^2 \sum_{j=1}^{n} c_{kj} \sum_{l=1}^{n} c_{il} - m_X^2 \sum_{j=1}^{n} c_{kj} c_{ij} + \mathbf{M}[X^2] \sum_{j=1}^{n} c_{kj} c_{ij} = 0,$$

так как каждая из этих сумм равна нулю в силу свойств 1)C, 4)C.

Аналогично устанавливается, что $k_{Y_1 Y_i} = k_{Y_k Y_1} = 0$ для всех $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,n}$. Таким образом, мы установили, что все СВ Y_k, $k = \overline{1,n}$, некоррелированы, но они имеют нормальное распределение, так как образованы суммой нормальных СВ X_j, $j = \overline{1,n}$. Поэтому, СВ Y_k, $k = \overline{1,n}$, независимы. Причем, $Y_k \sim \mathbf{N}(0;1)$, $k = \overline{2,n}$.

Рассмотрим выборочную дисперсию $\widehat{d}_X$ (см. определение 16.16). Тогда

$$\frac{n\widehat{d}_X}{\sigma_X^2} = \frac{1}{\sigma_X^2} \sum_{j=1}^{n} (X_j - \widehat{m}_X)^2 = \frac{1}{\sigma_X^2} \sum_{j=1}^{n} (X_j^2 - 2X_j \widehat{m}_X + \widehat{m}_X^2) =$$
$$= \frac{1}{\sigma_X^2} \Big(\sum_{j=1}^{n} X_j^2 - 2n\widehat{m}_X^2 + n\widehat{m}_X^2\Big) = \frac{1}{\sigma_X^2} \sum_{j=1}^{n} X_j^2 - \frac{n}{\sigma_X^2} \widehat{m}_X^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} Y_k^2 - Y_1^2 = \sum_{k=2}^{n} Y_k^2,$$

где $Y_k \sim \mathbf{N}(0;1)$, $k = \overline{2,n}$. Таким образом, мы доказали, что, согласно определению 17.1, $\overset{*}{D}_X \triangleq n\widehat{d}_X / \sigma_X^2 \sim \chi^2(n-1)$. Учитывая теперь, что

$$\widehat{d}_X = \frac{\sigma_X^2}{n} \sum_{k=2}^{n} Y_k^2, \qquad \widehat{m}_X = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} Y_1,$$

а также независимость СВ $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, приходим к выводу, что независимы также и СВ $\widehat{d}_X$, $\widehat{m}_X$, т. е. верно последнее утверждение теоремы.

3) Наконец, докажем третье утверждение. Рассмотрим СВ

$$\overline{Y}_1 \triangleq Y_1 - \frac{\sqrt{n}}{\sigma_X} m_X = \frac{\sqrt{n}}{\sigma_X} (\widehat{m}_X - m_X),$$

которая имеет распределение $\mathbf{N}(0;1)$, так как установлено выше, что $\mathbf{M}[Y_1] = \sqrt{n} m_X / \sigma_X$, $\mathbf{D}[Y_1] = 1$, $\mathbf{M}[\widehat{m}_X] = m_X$ и СВ Y_1 имеет нормальное распределение. Очевидно также, что СВ $\overline{Y}_1$ и $\widehat{d}_X$ независимы. Рассмотрим СВ T, имеющую распределение Стьюдента $\mathbf{S}(n-1)$. Согласно определению 17.2, используя полученные представления для $\widehat{m}_X$ и $\widehat{d}_X$, находим

$$T \triangleq \overline{Y}_1 \sqrt{\frac{n-1}{Y_2^2 + \ldots + Y_n^2}} = (\widehat{m}_X - m_X) \frac{\sqrt{n}}{\sigma_X} \sqrt{\frac{(n-1)\sigma_X^2}{n\widehat{d}_X}} \triangleq \overset{\circ}{M}_X .$$

Таким образом, $\overset{\circ}{M}_X \sim \mathbf{S}(n-1)$.

Пример 19.1. По выборке Z_n из нормального распределения требуется построить доверительный интервал для неизвестного МО m_X при известной дисперсии σ_X^2. Из приведенного выше утверждения следует, что СВ $\overset{*}{M}_X$ имеет нормальное распределение $\mathbf{N}(0;1)$, которое не зависит от m_X, и, кроме того, функция $G(Z_n, m_X) \triangleq \overset{*}{M}_X = (\widehat{m}_X - m_X)\sqrt{n}/\sigma_X$ является непрерывной и убывающей по m_X. Это значит, что СВ $\overset{*}{M}_X$ является центральной статистикой. Поэтому доверительный интервал для неизвестного m_X можно найти, если разрешить относительно m_X двойное неравенство

$$g_1 \leqslant \frac{(\widehat{m}_X - m_X)\sqrt{n}}{\sigma_X} \leqslant g_2,$$

где величины g_1 и g_2 подобраны таким образом, что это неравенство выполняется с вероятностью $1-\alpha$. Заметим, что данное условие неоднозначно определяет g_1, g_2. Выберем доверительный интервал минимальной длины. Учитывая симметрию относительно оси OY плотности стандартного нормального распределения, можно показать, что такой интервал будет иметь минимальную длину, если положить $g_1 = -g_2$, и при этом он оказывается центральным. Таким образом, получаем следующий доверительный интервал:

$$\widehat{m}_X - \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} u_\gamma \leqslant m_X \leqslant \widehat{m}_X + \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} u_\gamma,$$

где u_γ — квантиль уровня $\gamma \triangleq 1 - \alpha/2$ стандартного нормального распределения $\mathbf{N}(0;1)$. В данном случае длина доверительного интервала равна $\Delta = 2u_\gamma \sigma_X / \sqrt{n}$ и не случайна. Поэтому, задавшись значениями любых двух из трех величин Δ, α, n, можно определить значение третьей величины.

Пример 19.2. Используя утверждение 3) теоремы 19.1, можно построить аналогичный центральный доверительный интервал для неизвестного m_X СВ X, имеющей нормальное распределение $\mathbf{N}(m_X; \sigma_X^2)$, и в случае, когда величина σ_X неизвестна:

$$\widehat{m}_X - \sqrt{\frac{\widehat{d}_X}{n-1}}\, t_\gamma(n-1) \leqslant m_X \leqslant \widehat{m}_X + \sqrt{\frac{\widehat{d}_X}{n-1}}\, t_\gamma(n-1),$$

где $t_\gamma(n-1)$ — квантиль уровня $\gamma \triangleq 1-\alpha/2$ распределения Стьюдента $\mathbf{S}(n-1)$.

В отличие от предыдущего примера длина доверительного интервала случайна и зависит от СВ $\widehat{d}_X$. Но при $n \geqslant 30$ интервалы из примеров 19.1 и 19.2 практически совпадают, так как при $n \geqslant 30$ распределение Стьюдента близко к стандартному нормальному распределению.

Пример 19.3. Центральный доверительный интервал для неизвестного параметра σ_X^2 СВ $X \sim \mathbf{N}(m_X; \sigma_X^2)$ при неизвестном m_X можно получить, используя утверждение 2) теоремы 19.1,

$$\frac{n}{x_\gamma(n-1)}\, \widehat{d}_X \leqslant \sigma_X^2 \leqslant \frac{n}{x_{1-\gamma}(n-1)}\, \widehat{d}_X,$$

где $x_\gamma(n-1)$ и $x_{1-\gamma}(n-1)$ — квантили уровней $\gamma \triangleq 1-\alpha/2$ и $1-\gamma = \alpha/2$ для распределения хи-квадрат с $n-1$ степенью свободы.

Пример 19.4. Построим доверительный интервал для неизвестного параметра b равномерного распределения $\mathbf{R}(0; b)$. Можно показать, что СВ $G(Z_n, b) \triangleq \left(X^{(n)}/\, b\right)^n$ имеет распределение $\mathbf{R}(0;1)$ для любого $b > 0$. Кроме того, функция $G(z_n, b)$ — убывающая по b. Следовательно, $G(Z_n, b)$ является центральной статистикой. Тогда получаем условие

$$\mathbf{P}\left\{g_1 \leqslant \left(\frac{X^{(n)}}{b}\right)^n \leqslant g_2\right\} = 1-\alpha$$

для некоторых чисел g_1, g_2. Разрешая двойное неравенство в этом вероятностном условии относительно b, получаем следующий доверительный интервал:

$$\frac{X^{(n)}}{g_2^{1/n}} \leqslant b \leqslant \frac{X^{(n)}}{g_1^{1/n}}.$$

Отметим, что этот интервал будет иметь наименьшую длину, если $g_2 = 1$, а g_1 является квантилью уровня α распределения $\mathbf{R}(0;1)$, т. е. $g_1 = \alpha$.

19.3. Использование точечной оценки. Пусть $T \triangleq \widehat{\theta}(Z_n)$ — точечная оценка неизвестного параметра θ с функцией распределения $F_T(t,\theta)$, которая монотонна по θ. Пусть $t_n \triangleq \widehat{\theta}(z_n)$ — реализация оценки $T \triangleq \widehat{\theta}(Z_n)$. Пусть $\theta_1(z_n)$ и $\theta_2(z_n)$ — такие два числа, что

$$\theta_1(z_n) \triangleq \max\left\{\theta : F_T(t_n,\theta) = \frac{\alpha}{2}\right\},$$
$$\theta_2(z_n) \triangleq \min\left\{\theta : F_T(t_n - 0,\theta) = 1 - \frac{\alpha}{2}\right\},$$

если $F_T(t,\theta)$ — возрастающая по θ, и

$$\theta_1(z_n) \triangleq \max\left\{\theta : F_T(t_n - 0,\theta) = 1 - \frac{\alpha}{2}\right\},$$
$$\theta_2(z_n) \triangleq \min\left\{\theta : F_T(t_n,\theta) = \frac{\alpha}{2}\right\},$$

если $F_T(t,\theta)$ — убывающая по θ.

Интервал $[\theta_1(Z_n),\theta_2(Z_n)]$ со случайными концами, определенными выше, является центральным доверительным интервалом, «накрывающим» с вероятностью $1-\alpha$ неизвестный параметр θ.

Во многих случаях такой доверительный интервал совпадает с интервалом, построенным на основе центральной статистики. Например, этот факт имеет место в случае нормального распределения. Действительно, в частности, при неизвестном m_X и известном σ_X в качестве точечной оценки m_X можно принять $T \triangleq \widehat{m}_X$, которая имеет распределение $\mathbf{N}(m_X;\sigma_X^2/n)$. Очевидно, что распределение $F_T(t,m_X)$ является в данном случае убывающей по m_X функцией. Поэтому, если строить центральный доверительный интервал с помощью распределения точечной оценки, то он совпадет с доверительным интервалом минимальной длины, найденным в примере 19.1 предыдущего п. 19.2. Но в ряде случаев вообще не удается построить доверительный интервал на основе центральной статистики, тогда как доверительный интервал, основанный на распределении точечной оценки, существует. Рассмотрим несколько таких примеров. Отметим также, что в примере 19.4 из предыдущего п. 19.2 наблюдается противоположная ситуация.

П р и м е р 19.5. Пусть СВ X имеет распределение Бернулли $\mathbf{Bi}(1;p)$ с неизвестным параметром p и $Z_n = \mathrm{col}(X_1,\ldots,X_n)$ — соответствующая выборка. МП-оценкой для p является выборочное среднее (см. пример 18.9)

$$\widehat{\theta}(Z_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

СВ $T \triangleq \widehat{\theta}(Z_n)$ может принимать значения $0, 1/n, 2/n, \ldots, n/n$, а ее функция распределения имеет вид

$$F_T\left(\frac{k}{n}, p\right) = \sum_{i=0}^{k} C_n^i p^i (1-p)^{n-i}.$$

Дифференцируя по p функцию $F_T(k/n, p)$, можно убедиться, что

$$\frac{d}{dp} F_T\left(\frac{k}{n}, p\right) = -nC_{n-1}^k p^k (1-p)^{n-k-1} < 0.$$

Таким образом, $F_T(k/n, p)$ является монотонно убывающей по p при $k < n$. Поэтому можно применить описанную выше методику для построения доверительного интервала для p. Таким образом, границы центрального доверительного интервала $[\theta_1(z_n), \theta_2(z_n)]$ находятся из решения следующих уравнений:

$$1 - F_T\left(\frac{k-1}{n}, \theta_1\right) = \sum_{i=k}^{n} C_n^i \theta_1^i (1-\theta_1)^{n-i} = \frac{\alpha}{2},$$

$$F_T\left(\frac{k}{n}, \theta_2\right) = \sum_{i=0}^{k} C_n^i \theta_2^i (1-\theta_2)^{n-i} = \frac{\alpha}{2}.$$

Отметим, что при построении одностороннего доверительного интервала для p можно положить, например, $\theta_2 = 1$, и тогда получаем следующее уравнение для определения θ_1:

$$1 - F_T\left(\frac{k-1}{n}, \theta_1\right) = \sum_{i=k}^{n} C_n^i \theta_1^i (1-\theta_1)^{n-i} = \alpha.$$

Пример 19.6. Пусть СВ X имеет распределение Пуассона $\mathbf{\Pi}(a)$ с неизвестным параметром a. МП-оценкой параметра a является выборочное среднее (см. пример 18.8)

$$\widehat{\theta}(Z_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Оценка $T \triangleq \widehat{\theta}(Z_n)$ принимает значения k/n при $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Так как функция распределения СВ $\sum_{i=1}^{n} X_i$ имеет распределение $\mathbf{\Pi}(na)$, то функция распределения T имеет вид

$$F_T\left(\frac{k}{n}, a\right) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(na)^i}{i!} e^{-na}.$$

Производная данной функции оказывается отрицательной, так как

$$\frac{d}{da}F_T\left(\frac{k}{n},a\right) = -ne^{-na}\frac{(na)^k}{k!} < 0.$$

Поэтому функция $F_T(k/n, a)$ является монотонно убывающей по a, и можно воспользоваться описанным выше способом построения центрального доверительного интервала $[\theta_1(z_n), \theta_2(z_n)]$. В данном случае для определения θ_1 и θ_2 получаем следующие уравнения:

$$1 - F_T\left(\frac{k-1}{n},\theta_1\right) = \sum_{i=k}^{\infty}\frac{(n\theta_1)^i}{i!}e^{-n\theta_1} = \frac{\alpha}{2},$$

$$F_T\left(\frac{k}{n},\theta_2\right) = \sum_{i=0}^{k}\frac{(n\theta_2)^i}{i!}e^{-n\theta_2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Правая граница одностороннего доверительного интервала находится из уравнения

$$F_T\left(\frac{k}{n},\theta_2\right) = \sum_{i=0}^{k}\frac{(n\theta_2)^i}{i!}e^{-n\theta_2} = \alpha.$$

19.4. Типовые задачи.

Задача 19.1. Используя данные типовой задачи 16.1, построить центральный доверительный интервал уровня доверия 0,95 для неизвестного математического ожидания средней температуры января в г. Саратове (СВ X). Будем предполагать, что СВ X имеет гауссовское распределение.

Решение. Согласно примеру 19.2 центральный доверительный интервал для неизвестного математического ожидания m_X уровня доверия 0,95 имеет вид

$$\widehat{m}_X - \sqrt{\frac{\widehat{d}_X}{n-1}}\,t_{0,975}(n-1) \leqslant m_X \leqslant \widehat{m}_X + \sqrt{\frac{\widehat{d}_X}{n-1}}\,t_{0,975}(n-1),$$

где объем выборки $n = 13$, $\widehat{m}_X = -11{,}87$, $\widehat{d}_X = 22{,}14$ (результат решения задачи 16.1), а квантиль распределения Стьюдента $t_{0,975}(12) = 2{,}18$ находится по таблице.

Сделав необходимые вычисления, получаем доверительный интервал для m_X: $[-14{,}43, -8{,}9]$.

Ответ. $[-14{,}43, -8{,}9]$.

Задача 19.2. Используя данные типовой задачи 16.1, построить центральный доверительный интервал уровня доверия 0,95 для неизвестной дисперсии средней температуры января в г. Саратове

(СВ X). Будем предполагать, что СВ X имеет гауссовское распределение.

Решение. Согласно примеру 19.3 центральный доверительный интервал для неизвестной дисперсии σ_X^2 уровня доверия 0,95 имеет вид

$$\frac{n}{x_{0,975}(n-1)}\widehat{d}_X \leqslant \sigma_X^2 \leqslant \frac{n}{x_{0,025}(n-1)}\widehat{d}_X,$$

где объем выборки $n = 13$, $\widehat{d}_X = 22{,}14$ (результат решения задачи 16.1), а $x_{0,975}(12) = 23{,}3$, $x_{0,025}(12) = 4{,}4$ — квантили распределения $\chi^2(12)$, которые находятся по таблице.

Таким образом, получаем доверительный интервал для σ_X^2 : [11,4, 60,38].

Ответ. [11,4, 60,38].

§ 20. Проверка статистических гипотез

20.1. Основные понятия.

Определение 20.1. *Статистической гипотезой* H или просто *гипотезой* называется любое предположение относительно параметров или закона распределения СВ X, проверяемое по выборке Z_n.

Определение 20.2. Проверяемая гипотеза называется *основной* (или *нулевой*) и обозначается H_0. Гипотеза, конкурирующая с H_0, называется *альтернативной* и обозначается H_1.

Определение 20.3. Статистическая гипотеза H_0 называется *простой*, если она однозначно определяет параметр или распределение СВ X. В противном случае гипотеза H_0 называется *сложной*.

Пример 20.1. По выборке Z_n требуется проверить гипотезу H_0 о том, что $m_X = m_0$, где m_0 — некоторое фиксированное число, против гипотезы H_1 о том, что $m_X \neq m_0$. Или проверить гипотезу H_0 против гипотезы H_2 о том, что $m_X > m_0$.

Одна из основных задач математической статистики состоит в проверке соответствия результатов эксперимента предполагаемой гипотезе H_0. С этой целью выбирается некоторая статистика $Z = \varphi(Z_n)$, для которой предполагается известным условное распределение $F(z|H_0)$ относительно проверяемой гипотезы H_0. С помощью этой статистики строится процедура (правило) проверки гипотезы.

Определение 20.4. *Статистическим критерием* (*критерием согласия, критерием значимости* или *решающим правилом*) проверки гипотезы H_0 называется правило, в соответствии с которым по реализации $z \triangleq \varphi(z_n)$ статистики Z гипотеза H_0 принимается или отвергается.

Определение 20.5. *Критической областью* $\overline{G}$ статистического критерия называется область реализаций z статистики Z, при которых гипотеза H_0 отвергается.

Определение 20.6. *Доверительной областью* G статистического критерия называется область значений z статистики Z, при которых гипотеза H_0 принимается.

Например, в качестве статистического критерия можно использовать правило:

1) если значение $z = \varphi(z_n)$ статистики $Z = \varphi(Z_n)$ лежит в критической области $\overline{G}$, то гипотеза H_0 отвергается и принимается альтернативная гипотеза H_1;

2) если реализация $z = \varphi(z_n)$ статистики $Z = \varphi(Z_n)$ лежит в доверительной области G, то гипотеза H_0 принимается.

При реализации этого правила возникают ошибки двух видов.

Определение 20.7. *Ошибкой 1-го рода* называется событие, состоящее в том, что гипотеза H_0 отвергается, когда она верна.

Определение 20.8. *Ошибкой 2-го рода* называется событие, состоящее в том, что принимается гипотеза H_0, когда верна гипотеза H_1.

Определение 20.9. *Уровнем значимости* статистического критерия называется вероятность ошибки 1-го рода $\alpha \triangleq \mathbf{P}\{Z \in \in \overline{G}|H_0\}$. Вероятность ошибки 1-го рода α может быть вычислена, если известно распределение $F(z|H_0)$ статистики Z.

Вероятность ошибки 2-го рода равна $\beta \triangleq \mathbf{P}\{Z \in G|H_1\}$ и может быть вычислена, если известно условное распределение $F(z|H_1)$ статистики Z при справедливости гипотезы H_1.

Ясно, что с уменьшением вероятности α ошибки 1-го рода возрастает вероятность β ошибки 2-го рода, и наоборот, т. е. при выборе критической и доверительной областей должен достигаться определенный компромисс. Поэтому часто при фиксированной вероятности ошибки 1-го рода критическая область выбирается таким образом, чтобы вероятность ошибки 2-го рода была минимальна.

Проверка статистической гипотезы может быть подразделена на следующие этапы:

1) сформулировать проверяемую гипотезу H_0 и альтернативную к ней гипотезу H_1;

2) выбрать уровень значимости α;

3) выбрать статистику Z для проверки гипотезы H_0;

4) найти распределение $F(z|H_0)$ статистики Z при условии, что гипотеза H_0 верна;

5) построить, в зависимости от формулировки гипотезы H_1 и уровня значимости α, критическую область $\overline{G}$;

6) получить выборку наблюдений $x_1, \ldots, x_n$ и вычислить выборочное значение $z = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ статистики Z критерия;

7) принять статистическое решение на уровне доверия $1 - \alpha$: если $z \in \overline{G}$, то отклонить гипотезу H_0 как не согласующуюся с результатами наблюдений, а если $z \in G$, то принять гипотезу H_0 как не противоречащую результатам наблюдений.

20.2. Проверка гипотезы о значении параметра. Пусть имеется параметрическая статистическая модель $(S_\theta, F_{Z_n}(z_n, \theta))$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1$, т.е. выборка Z_n соответствует распределению $F(x, \theta)$ с неизвестным параметром θ. Проверим простую гипотезу H_0, состоящую в том, что $\theta = \theta_0$, где θ_0 — некоторое фиксированное число из множества Θ.

Формулировка альтернативной гипотезы H_1 и уровень значимости α определяют размер и положение критической области $\overline{G}$ на множестве значений статистики Z. Например, если альтернативная гипотеза H_1 формулируется как $\theta > \theta_0$ (или $\theta < \theta_0$), то критическая область размещается на правом (или левом) «хвосте» распределения статистики Z, т.е.

$$\overline{G} = \{z > z_{1-\alpha}\} \quad (\text{или } \overline{G} = \{z < z_\alpha\}),$$

где $z_{1-\alpha}$ и z_α — квантили уровней $1 - \alpha$ и α, соответственно, распределения $F(z|H_0)$ статистики Z при условии, что верна гипотеза H_0. В этом случае статистический критерий называется *односторонним*. Если альтернативная гипотеза H_1 формулируется как $\theta \neq \theta_0$, то критическая область $\overline{G}$ размещается на обоих «хвостах» распределения статистики Z, т.е. определяется совокупностью неравенств

$$\overline{G} = \left\{z < z_{\alpha/2}\right\} \bigcup \left\{z > z_{1-\alpha/2}\right\},$$

где $z_{\alpha/2}$ и $z_{1-\alpha/2}$ — квантили уровней $\alpha/2$ и $1 - \alpha/2$, соответственно, распределения $F(z|H_0)$. В этом случае критерий называется *двусторонним*.

Пример 20.2. Пусть известно, что СВ X имеет нормальное распределение. Требуется, используя реализацию выборки z_n, проверить гипотезу H_0, состоящую в том, что $m_X = m_0$ (m_0 — некоторое фиксированное число), против альтернативной гипотезы H_1 о том, что $m_X \neq m_0$. Возможны два случая: дисперсия σ_X^2 известна или неизвестна. Статистики Z для обоих случаев можно выбрать, используя утверждение из п. 19.2. Представим эти случаи в виде табл. 20.1.

Таблица 20.1

Предположение	Статистика Z критерия	Распределение $F(z\|H_0)$	Доверительная область G критерия
σ_X^2 известна	$\dfrac{(\widehat{m}_X - m_0)\sqrt{n}}{\sigma_X}$	$\mathbf{N}(0;1)$	$[-u_\gamma, u_\gamma]$
σ_X^2 неизвестна	$\dfrac{(\widehat{m}_X - m_0)\sqrt{n-1}}{\sqrt{\widehat{d}_X}}$	$\mathbf{S}(n-1)$	$[-t_\gamma(n-1), t_\gamma(n-1)]$

Для каждого случая в соответствии с утверждениями 1) и 3) теоремы 19.1 получаем свою доверительную область, где u_γ, $t_\gamma(n-1)$ — квантили уровня $\gamma \triangleq 1-\alpha/2$ распределений $\mathbf{N}(0;1)$ и $\mathbf{S}\,(n-1)$ соответственно.

Пример 20.3. Пусть СВ X нормально распределена, а ее дисперсия неизвестна. Требуется на основе реализации z_n выборки Z_n, порожденной СВ X, проверить гипотезу H_0 о том, что $\sigma_X^2 = \sigma_0^2$ (σ_0 — некоторое фиксированное число), против альтернативной гипотезы H_1, состоящей в том, что $\sigma_X^2 \neq \sigma_0^2$. Возможны два случая: m_X — известно или m_X — неизвестно. Представим эти случаи в виде следующей таблицы:

Таблица 20.2

Предположение	Статистика Z критерия	Распределение $F(z\|H_0)$	Доверительная область G критерия
m_X известно	$\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - m_X)^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n)$	$[x_{1-\gamma}(n), x_\gamma(n)]$
m_X неизвестно	$\dfrac{n\widehat{d}_X}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n-1)$	$[x_{1-\gamma}(n-1), x_\gamma(n-1)]$

Здесь $x_\gamma(k)$, $x_{1-\gamma}(k)$ — квантили уровня $\gamma \triangleq 1-\alpha/2$ и $1-\gamma$ распределения $\chi^2(k)$ с k степенями свободы, где $k=n$, $n-1$.

Замечание 20.1. На практике обычно задают $\alpha \in [0{,}01,\ 0{,}05]$.

20.3. Проверка гипотезы о виде закона распределения. Пусть имеется реализация z_n выборки Z_n, порожденной СВ X с неизвестной функцией распределения $F(x)$. Требуется проверить гипотезу H_0, состоящую в том, что СВ X имеет определенный закон распределения $\overline{F}(x, \theta)$ (например, нормальный, равномерный и т. д.). Истинный закон распределения $F(x)$ неизвестен. Для проверки такой гипотезы можно использовать *статистический критерий хи-квадрат* (*критерий Пирсона*). Правило проверки заключается в следующем.

1) Формулируется гипотеза H_0, состоящая в том, что СВ X имеет распределение определенного вида $\overline{F}(x, \theta_1, \ldots, \theta_s)$ с s неизвестными параметрами $\theta_1, \ldots, \theta_s$ (например, m и σ^2 для нормального распределения, a и b — для равномерного и т. д.).

2) По реализации z_n выборки Z_n методом максимального правдоподобия находятся оценки $\widehat{\theta}_1, \ldots, \widehat{\theta}_s$ неизвестных параметров $\theta_1, \ldots, \theta_s$.

3) Действительная ось $\mathbb{R}^1$ разбивается на $l+1$ непересекающийся полуинтервал (разряд) $\Delta_0, \ldots, \Delta_l$ следующим образом. Действительная ось $\mathbb{R}^1 = (-\infty, \infty)$ разделяется точками $\alpha_0, \ldots, \alpha_{l+1}$, образуя таким образом $l+1$ непересекающийся полуинтервал $\Delta_k = [\alpha_k, \alpha_{k+1})$, $k = \overline{0, l}$, при этом $-\infty = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots$ $\ldots < \alpha_l < \alpha_{l+1} = +\infty$. Обычно выбирают $\alpha_1 \leqslant x^{(1)}$, $\alpha_l \geqslant x^{(n)}$ так, как это сделано при построении гистограммы в п. 16.4. Подсчитывается число n_k элементов выборки, попавших в каждый k-й разряд Δ_k, $k = \overline{1, l-1}$, за исключением Δ_0 и Δ_l. Полагается $n_0 = n_l = 0$.

4) Вычисляются гипотетические вероятности p_k попадания СВ X в полуинтервалы Δ_k, $k = \overline{0, l}$. Если у распределения $\overline{F}(x, \theta_1, \ldots, \theta_s)$ имеется плотность $\overline{f}(x, \theta_1, \ldots, \theta_s)$, то вероятности p_k могут быть вычислены следующим образом:

$$p_k = \int\limits_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \overline{f}\left(x, \widehat{\theta}_1, \ldots, \widehat{\theta}_s\right) dx,$$

где $\alpha_0 = -\infty$, $\alpha_{l+1} = +\infty$, или приближенно по формуле

$$p_k \cong \overline{f}\left(\overline{x}_k, \widehat{\theta}_1, \ldots, \widehat{\theta}_s\right)(\alpha_{k+1} - \alpha_k), \quad k = \overline{1, l-1},$$

где $\overline{x}_k \triangleq (\alpha_{k+1} + \alpha_k)/2$ — середина разряда Δ_k.

5) Вычисляется реализация статистики критерия хи-квадрат по формуле

$$z \triangleq \varphi(z_n) \triangleq np_0 + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k} + np_l.$$

6) Известно, что при соблюдении некоторых естественных условий регулярности и достаточно большом объеме n выборки Z_n распределение $F(z|H_0)$ статистики $Z = \varphi(Z_n)$ хорошо аппроксимируется

распределением $\chi^2(l-s)$ с $l-s$ степенями свободы, где s — количество неизвестных параметров предполагаемого закона распределения $\overline{F}(x,\theta_1,\ldots,\theta_s)$, а $l+1$ — количество разрядов, вероятность попадания в которые ненулевая. Тогда критическая область $\overline{G}$ принимает вид: $\overline{G}=(x_{1-\alpha}(l-s),+\infty)$, где $x_{1-\alpha}(l-s)$ — квантиль уровня $1-\alpha$ распределения $\chi^2(l-s)$, α — заданный уровень значимости (обычно $\alpha=0{,}05$).

7) В соответствии с критерием хи-квадрат гипотеза H_0 принимается (т.е. реализация выборки z_n согласуется с гипотезой H_0) на уровне надежности $1-\alpha$, если $\varphi(z_n)\in G=[0,x_{1-\alpha}(l-s)]$. Если же $\varphi(z_n)\in\overline{G}$, то гипотеза H_0 отвергается.

Замечание 20.2. Если при разбиении на полуинтервалы Δ_k оказалось, что $np_k<5$ для $k=\overline{1,l-1}$, то рекомендуется объединить соседние полуинтервалы.

Если при обработке наблюдений имеется только реализация статистического ряда, то вычисляя выборочные моменты, считают все выборочные значения, попавшие в k-й интервал, равными середине этого интервала. Это вносит известную ошибку, особенно заметную при малом числе интервалов. Для уменьшения ошибок, вносимых группировкой, применяют *поправки Шеппарда*. Если все интервалы Δ_k имеют длину, равную h, то с учетом поправок Шеппарда первые четыре выборочных момента $\widehat{\nu}_i'$, $i=\overline{1,4}$, соответственно равны:

$$\widehat{\nu}_1'=\widehat{\nu}_1,\qquad \widehat{\nu}_2'=\widehat{\nu}_2-\frac{1}{12}\,h^2,$$

$$\widehat{\nu}_3'=\widehat{\nu}_3-\frac{1}{4}\,\widehat{\nu}_1h^2,\qquad \widehat{\nu}_4'=\widehat{\nu}_4-\frac{1}{2}\,\widehat{\nu}_2h^2+\frac{7}{240}\,h^4.$$

20.4. Проверка гипотезы о независимости двух СВ. Пусть имеется случайный вектор $V\triangleq\mathrm{col}(X,Y)$ с функцией распределения $F_V(x,y)$. Компонентами V являются СВ X и Y с функциями распределения $F_X(x)$ и $F_Y(y)$ соответственно. Пусть имеется выборка $Z_n\triangleq\mathrm{col}(V_1,\ldots,V_n)$, где $V_k=\mathrm{col}(X_k,Y_k)$. Здесь выборка $X_1,\ldots,X_n$ соответствует распределению $F_X(x)$ СВ X, а выборка $Y_1,\ldots,Y_n$ соответствует распределению $F_Y(y)$ СВ Y. Требуется проверить гипотезу H_0 о независимости СВ X и Y, т.е. что $F_V(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$ для всех $x\in\mathbb{R}^1$, $y\in\mathbb{R}^1$. Для проверки этой гипотезы используем критерий хи-квадрат, процедура применения которого состоит в следующих действиях.

1) Множество значений СВ X разбивается на s непересекающихся интервалов (разрядов) $\Delta_{x,1},\ldots,\Delta_{x,s}$, а множество значений СВ Y — на r непересекающихся интервалов $\Delta_{y,1},\ldots,\Delta_{y,r}$.

2) Для каждого $i = \overline{1,s}$ и каждого $j = \overline{1,r}$ вычисляется число n_{ij} элементов выборки z_n, принадлежащих прямоугольнику $\Delta_{x,i} \times \Delta_{y,j}$.

3) Вычисляется суммарное число $n_{x,i}$ элементов выборки z_n, первая компонента которой попала в i-й разряд $\Delta_{x,i}$ для СВ X, и аналогично — число $n_{y,j}$ элементов той же выборки z_n, вторая компонента которой попала в j-й разряд $\Delta_{y,j}$ для СВ Y:

$$n_{x,i} = \sum_{j=1}^{r} n_{ij}, \quad n_{y,j} = \sum_{i=1}^{s} n_{ij}, \quad n = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} n_{ij}.$$

4) Вычисляется значение статистики критерия хи-квадрат по формуле

$$z \triangleq \varphi(z_n) = n\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} \frac{n_{ij}^2}{n_{x,i}n_{y,j}} - 1\right).$$

5) При справедливости гипотезы H_0 и достаточно большом n распределение статистики $Z \triangleq \varphi(Z_n)$ хорошо аппроксимируется распределением хи-квадрат с $m = (s-1)(r-1)$ степенями свободы. Поэтому критическая область имеет вид

$$\overline{G} = (x_{1-\alpha}(m), +\infty),$$

где $x_{1-\alpha}(m)$ — квантиль уровня $1-\alpha$ распределения $\chi^2(m)$.

6) Принимается статистическое решение на уровне доверия $1-\alpha$: отклонить гипотезу H_0, если $\varphi(z_n) \in \overline{G}$, и принять гипотезу H_0 — в противном случае.

20.5. Проверка гипотезы об однородности наблюдений. Рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть имеется опыт с r возможными исходами $A_1, \ldots, A_r$, имеющими вероятности $p_j \triangleq \mathbf{P}(A_j)$, $j = \overline{1,r}$. Осуществляется s-кратное повторение серий из n_i, $i = \overline{1,s}$, независимых повторений опыта. В данном случае выборку z_n образуют наблюдавшиеся исходы в этих сериях, где $n = n_1 + \ldots + n_s$ — общее число опытов. Требуется проверить гипотезу H_0 о том, что во всех этих сериях наблюдалась одна и та же совокупность вероятностей p_j, $j = \overline{1,r}$. Для решения этой задачи вновь применим критерий хи-квадрат. Последовательность проверки этого критерия состоит в следующем.

1) В каждой i-й серии, $i = \overline{1,s}$, подсчитываются числа n_{ji} появлений событий A_j, $j = \overline{1,r}$.

2) Подсчитывается суммарное число N_j появлений события A_j, $j = \overline{1,r}$, во всех сериях, а также числа n_i, $i = \overline{1,s}$, и n:

$$N_j = \sum_{i=1}^{s} n_{ji}, \quad n_i = \sum_{j=1}^{r} n_{ji}, \quad n = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r} n_{ji}.$$

3) Вычисляется значение z статистики критерия хи-квадрат по формуле:

$$z \triangleq \varphi(z_n) = n\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} \frac{n_{ji}^2}{n_i N_j} - 1\right).$$

4) Известно, что при больших n распределение статистики $Z \triangleq \varphi(Z_n)$ хорошо аппроксимируется распределением хи-квадрат $\chi^2(m)$ с $m = (s-1)(r-1)$ степенями свободы. Формируется критическая область $\overline{G} = (x_{1-\alpha}(m), +\infty)$, где $x_{1-\alpha}(m)$ — квантиль уровня $1-\alpha$ распределения $\chi^2(m)$.

5) Принимается статистическое решение: отклонить гипотезу H_0, если $\varphi(z_n) \in \overline{G}$ и принять гипотезу H_0, если $\varphi(z_n) \in G$.

Пример 20.4. В частном случае, при $r = 2$, т. е. когда опыт имеет два исхода $A_1 = A$ и $A_2 = \overline{A}$, для которых $p = \mathbf{P}(A)$, $q = \mathbf{P}(\overline{A})$, описанная процедура проверяет гипотезу о том, что во всех сериях наблюдений вероятность p остается неизменной.

Пример 20.5. Описанная процедура может быть применена и во многих других случаях. Например, пусть имеется выборка $X_1, \ldots, X_n$, соответствующая функции распределения $F_X(x)$ СВ X и, кроме того, имеется выборка $Y_1, \ldots, Y_m$, соответствующая функции распределения $F_Y(y)$ СВ Y. Требуется проверить гипотезу H_0 об *однородности выборок* $X_1, \ldots, X_n$ и $Y_1, \ldots, Y_m$, т. е. что $F_Y(t) = F_X(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}^1$. Для того чтобы применить приведенную выше процедуру, достаточно предварительно использовать метод группировки данных, разделяя множества возможных значений СВ X и Y на одни и те же разряды, попадания в которые интерпретируется как события A_j, $j = \overline{1,r}$. В данном случае $s = 2$, и статистика критерия принимает следующий вид:

$$z \triangleq \varphi(z_n) = n \cdot m \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{n_{j1} + n_{j2}} \left(\frac{n_{j1}}{n} - \frac{n_{j2}}{m}\right)^2.$$

20.6. Типовые задачи.

Задача 20.1. Используя данные типовой задачи 16.1, проверить на уровне доверия $1 - \alpha = 0{,}95$ гипотезу H_0, состоящую в том, что математическое ожидание m_X средней температуры января в г. Саратове (СВ X) равно $-13{,}75$, т.е. что $m_X = -13{,}75$, против альтернативной гипотезы H_1, состоящей в том, что $m_X \neq -13{,}75$. Будем предполагать, что СВ X имеет гауссовское распределение.

Решение. Дисперсия σ_X^2 СВ X неизвестна, поэтому выберем для проверки гипотезы H_0 статистику

$$Z = \frac{(\widehat{m}_X - m_0)\sqrt{n-1}}{\sqrt{\widehat{d}_X}}.$$

В данной задаче $n = 13$, $m_0 = -13{,}75$ а $\widehat{m}_X = -11{,}87$ и $\widehat{d}_X = 22{,}14$ (результат решения задачи 16.1). Согласно примеру 20.2 распределением $F(z|H_0)$ статистики Z при справедливости H_0 является распределение Стьюдента $\mathbf{S}(n-1)$.

Таким образом, доверительная область G имеет вид $G = [-t_{0,975}(12), t_{0,975}(12)] = [-2{,}18,\ 2{,}18]$. Вычисляя значение z статистики Z для данной реализации выборки, имеем

$$z = \frac{(-11{,}87 + 13{,}75)\sqrt{12}}{\sqrt{22{,}14}} \approx 1{,}38.$$

Таким образом, значение z статистики Z попадает в доверительную область G, и, следовательно, на уровне доверия $1 - \alpha = 0{,}95$ можно считать, что результаты наблюдений не противоречат гипотезе H_0, состоящей в том, что $m_X = -13{,}75$.

Ответ. Гипотеза H_0 принимается.

Задача 20.2. Используя данные типовой задачи 16.1, проверить на уровне доверия $1 - \alpha = 0{,}95$ гипотезу H_0, состоящую в том, что дисперсия σ_X^2 средней температуры января в г. Саратове (СВ X) равна 20, т.е. что $\sigma_X^2 = 20$, против альтернативной гипотезы H_1, состоящей в том, что $\sigma_X^2 \neq 20$. Будем предполагать, что СВ X имеет гауссовское распределение.

Решение. Математическое ожидание m_X СВ X неизвестно, поэтому выберем для проверки гипотезы H_0 статистику

$$Z = \frac{n\widehat{d}_X}{\sigma_0^2}.$$

В данной задаче $n = 13$, $\sigma_0^2 = 20$, а $\widehat{d}_X = 22{,}14$ (результат решения задачи 16.1). Согласно примеру 20.3 распределением $F(z|H_0)$ статистики Z при справедливости H_0 является распределение $\chi^2(12)$.

Таким образом, доверительная область G имеет вид $G = [x_{0,025}(12), x_{0,975}(12)] = [4{,}4,\ 23{,}3]$. Вычисляя значение z

статистики Z для данной реализации выборки, имеем

$$z = \frac{13 \cdot 22{,}14}{20} = 14{,}39.$$

Таким образом, значение z статистики Z попадает в доверительную область G, и, следовательно, на уровне доверия $1 - \alpha = 0{,}95$ можно считать, что результаты наблюдений не противоречат гипотезе H_0, состоящей в том, что $\sigma_X^2 = 20$.

Ответ. Гипотеза H_0 принимается.

Задача 20.3. В течение Второй мировой войны на южную часть Лондона упало 535 снарядов. Территория южного Лондона была разделена на 576 участков площадью 0,25 км^2. В следующей таблице приведены числа участков n_k, на каждый из которых упало по k снарядов:

Таблица 20.3

k	0	1	2	3	4	5
n_k	229	211	93	35	7	1

Требуется с помощью критерия хи-квадрат проверить на уровне доверия $1 - \alpha = 0{,}95$ гипотезу H_0, состоящую в том, что СВ X (число снарядов, упавших на один участок) распределена по закону Пуассона.

Решение. Распределение Пуассона $\mathbf{\Pi}(\theta)$ имеет один параметр, МП-оценка этого параметра $\widehat{\theta} = \widehat{m}_X \approx 0{,}93$ (см. пример 18.8).

В данной задаче действительная ось естественным образом разбивается на 8 непересекающихся полуинтервалов Δ_k: $(-\infty, 0)$, $[0, 1)$, $[1, 2)$, ..., $[5, 6)$, $[6, +\infty)$.

Гипотетические вероятности p_k попадания пуассоновской СВ X в k-й полуинтервал вычисляются по следующим формулам:

$$p_k = \frac{e^{-\widehat{\theta}}\widehat{\theta}^{k-1}}{(k-1)!} \qquad \text{для } k = \overline{1, 6},$$

$$p_7 = 1 - \sum_{k=1}^{6} p_k, \qquad p_0 = \mathbf{P}\{X < 0\} = 0.$$

Вычисленные значения вероятностей указаны в табл. 20.4.

Таблица 20.4

k	1	2	3	4	5	6	7
Δ_k	$[0, 1)$	$[1, 2)$	$[2, 3)$	$[3, 4)$	$[4, 5)$	$[5, 6)$	$[6, \infty)$
p_k	0,394	0,366	0,171	0,053	0,012	0,002	0,002

Вычисляя значения z статистики критерия хи-квадрат, получим

$$z = \sum_{k=1}^{6} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k} + np_7 \approx 2{,}2.$$

При справедливости гипотезы H_0 статистика Z имеет распределение $\chi^2(5)$. Тогда критическая область $\overline{G}$ имеет вид $\overline{G} = (x_{0,95}(5), +\infty) = (11{,}1, +\infty)$, а доверительная область — $G = [0, 11{,}1]$.

Так как вычисленное по выборке значение статистики попадает в доверительную область G, то с вероятностью 0,95 можно утверждать, что опытные данные согласуются с гипотезой H_0.

Ответ. Гипотеза H_0 принимается.

Задача 20.4. Используя данные задачи 16.2, проверить на уровне доверия $1 - \alpha = 0{,}95$ гипотезу H_0, состоящую в том, что рост взрослого мужчины (СВ X) имеет нормальное распределение.

Решение. Нормальное распределение $\mathbf{N}(\theta_1; \theta_2^2)$ имеет два неизвестных параметра: $\theta_1 = m_X$ и $\theta_2^2 = \sigma_X^2$. МП-оценкой параметра θ_1 является выборочное среднее $\widehat{m}_X$, а параметра θ_2^2 — выборочная дисперсия $\widehat{d}_X$. С учетом поправок Шеппарда получим

$$\widehat{m}_X = 165{,}77, \qquad \widehat{d}_X = 34{,}24.$$

Вычислим гипотетические вероятности p_k, $k = \overline{1, 15}$, попадания гауссовской СВ X в полуинтервалы Δ_k (которые определены в задаче 16.2) по приближенной формуле

$$p_k = h \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\widehat{d}_X}} \exp\left\{ -\frac{(\overline{x}_k - \widehat{m}_X)^2}{2\widehat{d}_X} \right\},$$

где $\overline{x}_k$ — середина интервала Δ_k, а h — длина интервала Δ_k, которая в данной задаче равна 3 для всех $k = \overline{1, 15}$. Результаты вычислений для $k = \overline{1, 15}$ приведены в табл. 20.5.

Таблица 20.5

Δ_k	143–146	146–149	149–152	152–155	155–158
p_k	0,0003	0,002	0,007	0,023	0,058
Δ_k	158–161	161–164	164–167	167–170	170–173
p_k	0,115	0,175	0,204	0,184	0,127
Δ_k	173–176	176–179	179–182	182–185	185–188
p_k	0,067	0,027	0,009	0,002	0,0004

Вероятность попадания в интервал $\Delta_0 = (-\infty, 143)$ равна $p_0 = 4 \times 10^{-5}$, а в интервал $\Delta_{16} = [188, +\infty)$ — $p_{16} = 4 \cdot 10^{-5}$. Вычисляя реализацию z статистики Z, получим

$$z = np_0 + \sum_{k=1}^{15} \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k} + np_{16} \approx 7{,}177.$$

При справедливости гипотезы H_0 статистика Z имеет распределение $\chi^2(14)$. Тогда критическая область $\overline{G}$ имеет вид $\overline{G} = (x_{0,95}(14), +\infty) = (23{,}7, +\infty)$, а доверительная область — $G = [0,\ 23{,}7]$.

Так как вычисленное по выборке значение статистики попадает в доверительную область G, то с вероятностью 0,95 можно утверждать, что опытные данные согласуются с гипотезой H_0.

Ответ. Гипотеза H_0 принимается.

Задача 20.5. По переписи населения Швеции 1936 г. из совокупности всех супружеских пар была получена выборка в 25 263 пары, вступивших в брак в течение 1931–1936 гг. В следующей таблице приведено распределение годовых доходов (в тыс. крон) и количество детей у супружеских пар в этой выборке (данные взяты из [13]):

Таблица 20.6

число детей \ доходы	0–1	1–2	2–3	> 3	Сумма
0	2 161	3 577	2 184	1 636	9 558
1	2 755	5 081	2 222	1 052	11 110
2	936	1 753	640	306	3 635
3	225	419	96	38	778
$\geqslant 4$	39	98	31	14	182
Сумма	6 116	10 928	5 173	3 016	25 263

Требуется установить с доверительной вероятностью $1 - \alpha = 0{,}95$ являются ли зависимыми количество детей в семье (СВ X) и уровень годового дохода этой семьи (СВ Y).

Решение. Для проверки гипотезы H_0 о независимости СВ X и СВ Y воспользуемся критерием хи-квадрат. В данной задаче множество значений СВ X (количество детей в семье) разбивается на 5 разрядов $\Delta_{x,i}$, $i = \overline{1,5}$, естественным образом: 0, 1, 2, 3 и не менее 4-х детей (см. первый столбец табл. 20.6). Множество значений СВ Y (годовой доход семьи) разбито на 4 разряда $\Delta_{y,j}$, $j = \overline{1,4}$, которые указаны в первой строке табл. 20.6). Вычисляя значение z (см. п. 20.4) по формуле

$$z = n\left(\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{r} \frac{n_{ij}^2}{n_{x,i}n_{y,j}} - 1\right),$$

где $n = 25\,263$, $s = 5$, $r = 4$, числа $n_{x,i}$, $i = \overline{1,5}$, приведены в последнем столбце таблицы, а числа $n_{y,j}$, $j = \overline{1,4}$, приведены в последней строке таблицы, получим $z = 568{,}5$.

При справедливости гипотезы H_0 статистика Z имеет распределение хи-квадрат с числом степеней свободы $m = (s-1)(r-1) = 4 \times \times 3 = 12$. Тогда критическая область $\overline{G}$ имеет вид $\overline{G} = (x_{0,95}(12), +\infty) = (21, +\infty)$, а доверительная область — $G = [0, 21]$.

Так как вычисленное по выборке значение статистики попадает в критическую область $\overline{G}$, то с вероятностью 0,95 гипотеза H_0 о независимости СВ X (количество детей в семье) и СВ Y (уровень годового дохода семьи) отвергается.

Ответ. Гипотеза H_0 о независимости СВ X (количество детей в семье) и СВ Y (уровень годового дохода семьи) отвергается.

Задача 20.6. В табл. 20.7 приведены данные о распределении доходов (в тыс. крон) всех промышленных рабочих и служащих Швеции в 1930 г. для возрастных групп 40–50 лет и 50–60 лет (данные взяты из [13]). Требуется проверить на уровне доверия $1 - \alpha = 0{,}95$ гипотезу H_0 о том, что доходы рабочих и служащих возрастной группы 40–50 лет (СВ X) и доходы рабочих и служащих возрастной группы 50–60 лет (СВ Y) распределены одинаково.

Таблица 20.7

доходы \ возраст	40–50 лет	50–60 лет
0–1	7 831	7 558
1–2	26 740	20 685
2–3	35 572	24 186
3–4	20 009	12 280
4–6	11 527	6 776
> 6	6 919	4 222
Сумма	108 598	75 707

Решение. Для проверки гипотезы H_0 об одинаковой распределенности (однородности) СВ X и СВ Y применим критерий хи-квадрат. В данной задаче количество серий испытаний $s = 2$. Тогда, согласно примеру 20.5 (см. п. 20.5), значение статистики критерия имеет вид

$$z = n \cdot m \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{n_{j1} + n_{j2}} \left(\frac{n_{j1}}{n} - \frac{n_{j2}}{m}\right)^2,$$

где $n = 108\,598$, $m = 75\,707$, количество разрядов $r = 6$, числа n_{j1}, $j = \overline{1,6}$, приведены во втором столбце таблицы, а числа n_{j2}, $j = \overline{1,6}$, приведены в третьем столбце таблицы.

Проведя необходимые вычисления, получим $z = 840{,}62$.

При справедливости гипотезы H_0 статистика Z имеет распределение хи-квадрат с числом степеней свободы $m = (s-1)(r-1) = 1 \times \times 5 = 5$.

Тогда критическая область $\overline{G}$ имеет вид $\overline{G} = (x_{0,95}(5), +\infty) = (11{,}1, +\infty)$, а доверительная область — $G = [0,\ 11{,}1]$.

Так как вычисленное по выборке значение статистики попадает в критическую область $\overline{G}$, то с вероятностью 0,95 гипотеза H_0 об однородности СВ X (доходы рабочих и служащих возрастной группы 40–50 лет) и СВ Y (доходы рабочих и служащих возрастной группы 50–60 лет) отвергается.

Ответ. Гипотеза H_0 об однородности СВ X (доходы рабочих и служащих возрастной группы 40–50 лет) и СВ Y (доходы рабочих и служащих возрастной группы 50–60 лет) отвергается.

§ 21. Задачи для самостоятельного решения

1. По данным типовой задачи 20.3 построить гистограмму числа снарядов, упавших на участок площадью 0,25 км^2.

2. Предполагая, что число снарядов, упавших на участок площадью 0,25 км^2 (см. задачу 20.3), имеет распределение Пуассона с неизвестным параметром θ, построить МП-оценку этого параметра.

3. По данным типовой задачи 16.2 найти, учитывая поправки Шеппарда, выборочное среднее и выборочную дисперсию роста взрослого мужчины (СВ X).

4. По данным типовой задачи 16.1 построить центральный доверительный интервал уровня доверия $1 - \alpha = 0{,}99$ для математического ожидания средней температуры января в г. Алатыре (СВ Y). Предполагается, что СВ Y имеет нормальное распределение.

5. По данным типовой задачи 16.1 построить центральный доверительный интервал уровня доверия $1 - \alpha = 0{,}95$ для дисперсии средней температуры января в г. Алатыре (СВ Y). Предполагается, что СВ Y имеет нормальное распределение.

6. По данным типовой задачи 16.1 проверить на уровне доверия $1 - \alpha = 0{,}99$ гипотезу H_0, состоящую в том, что математическое ожидание средней температуры января в г. Алатыре (СВ Y) равно $-11{,}87$, т. е. что $m_Y = -11{,}87$, против альтернативной гипотезы H_1 о том, что $m_Y \neq -11{,}87$, предполагая, что СВ Y имеет нормальное распределение.

7. По данным типовой задачи 16.1 проверить на уровне доверия $1 - \alpha = 0{,}95$ гипотезу H_0, состоящую в том, что дисперсия средней температуры января в г. Алатыре (СВ Y) равна 20, т. е. $\sigma_Y^2 = 20$, против альтернативной гипотезы $H_1 : \sigma_Y^2 \neq 20$, предполагая, что СВ Y имеет нормальное распределение.

8. В табл. 21.1 приведены результаты испытаний 200 ламп на продолжительность работы T [в часах].

Таблица 21.1

T [час]	0–300	300–600	600–900	900–1200
число ламп	53	41	30	22
T [час]	1200–1500	1500–1800	1800–2100	2100–2400
число ламп	16	12	9	7
T [час]	2400–2700	2700–3000	3000–3300	> 3300
число ламп	5	3	2	0

Пусть СВ X — продолжительность работы лампы. Используя критерий хи-квадрат, проверить гипотезу H_0 о том, что СВ X (реализация статистического ряда которой приведена в таблице) имеет экспоненциальный закон распределения с плотностью распределения вероятности $f(x) = \theta e^{-\theta x}$ при $x \geqslant 0$. Уровень доверия принять равным $1 - \alpha = 0{,}95$.

9. Утверждается, что результат действия лекарства зависит от способа его применения. Проверьте эту гипотезу по данным, представленным в табл. 21.2. Уровень доверия принять равным 0,95.

Таблица 21.2

результат \ способ применения	A	B	C
неблагоприятный	11	17	16
благоприятный	20	23	19

10. В табл. 21.3 приведены данные о распределении доходов (в тыс. крон) заводских мастеров Швеции в 1930 г. для возрастных групп 40–50 лет и 50–60 лет (данные взяты из [13]).

Таблица 21.3

доходы \ возраст	40–50 лет	50–60 лет
0–1	71	54
1–2	430	324
2–3	1 072	894
3–4	1 609	1 202
4–6	1 178	903
> 6	158	112

Требуется проверить на уровне доверия 0,95 гипотезу о том, что доходы заводских мастеров возрастной группы 40–50 лет (СВ X) и заводских мастеров возрастной группы 50–60 лет (СВ Y) распределены одинаково. Уровень доверия принять равным 0,95. Сравните полученный результат с ответом задачи 20.6.

11. В результате проведенного исследования было установлено, что у 782 светлоглазых отцов сыновья тоже имеют светлые глаза, а у 89 светлоглазых отцов сыновья — темноглазые. У 50 темноглазых отцов сыновья также темноглазые, а у 79 темноглазых отцов сыновья — светлоглазые. Проверить гипотезу о независимости между цветом глаз отцов (СВ X) и цветом глаз их сыновей (СВ Y). Уровень доверия принять равным 0,99.

12. Г. Мендель проводил опыты, в которых изучал наследование признаков у семян гороха. Одно из скрещиваемых растений имело гладкие (признак **A**) и желтые (признак **B**) семена, а другое — морщинистые (признак **a**) и зеленые (признак **b**). В первом поколении все растения имели гладкие желтые семена (фенотип **AB**). Во втором поколении произошло расщепление: кроме фенотипа **AB** появились также гладкие зеленые (фенотип **Ab**), морщинистые желтые (фенотип **aB**) и морщинистые зеленые (фенотип **ab**) семена. Согласно теории наследственности Менделя вероятности появления фенотипов (**AB**), (**Ab**), (**aB**), (**ab**) равны соответственно: $9/16$, $3/16$, $3/16$, $1/16$. Проведя скрещивание, Мендель получил во втором поколении: 315 гладких желтых семян, 108 гладких зеленых семян, 101 морщинистое желтое и 32 морщинистых зеленых семян. Используя критерий Пирсона, проверьте гипотезу о соответствии опытных данных указанному закону распределения на уровне доверия 0,99.

13. Пусть $Z_n = \mathrm{col}(X_1, \ldots, X_n)$ — выборка, соответствующая распределению с плотностью

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{2}{\theta} x e^{-x^2/\theta}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Оценить параметр θ методом максимального правдоподобия.

14. Пусть $Z_n = \mathrm{col}(X_1, \ldots, X_n)$ — выборка, соответствующая биномиальному распределению $\mathbf{Bi}(10; \theta)$. Оценить неизвестный параметр θ методом максимального правдоподобия.

ГЛАВА VI

ПРИЛОЖЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

§ 22. Регрессионный анализ

22.1. Модели регрессии. Пусть Y и X — зависимые СВ и требуется по результатам наблюдений $(x_1, \ldots, x_n)$ за вектором X и $(y_1, \ldots, y_n)$ за вектором Y сделать обоснованное заключение о характере зависимости Y от X.

Определение 22.1. Зависимость $Y = \varphi^*(X) \triangleq \mathbf{M}[Y|X]$, обеспечивающая наилучшее (в среднем квадратическом смысле) приближение СВ Y:

$$\mathbf{M}\left[(Y - \varphi^*(X))^2\right] \leqslant \mathbf{M}\left[(Y - \varphi(X))^2\right],$$

где $\varphi(X)$ — произвольная функция, называется *функцией теоретической регрессии.* При этом X называют *регрессором*, а Y — *откликом.*

Для вычисления условного МО необходимо знать совместную функцию распределения СВ X и Y, а такой информацией исследователь, как правило, не располагает. Для преодоления этого затруднения можно, например, ограничиться рассмотрением некоторого параметрического класса функций $\varphi(x) = \varphi(x, \theta)$, где $\theta \in \Theta \subset \subset \mathbb{R}^s$ — некоторый неизвестный параметр, который требуется оценить по имеющейся выборке наблюдений $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$.

Определение 22.2. Класс линейных по θ функций

$$\varphi(x, \theta) = \theta_1\varphi_1(x) + \ldots + \theta_s\varphi_s(x),$$

где $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_s(x)$ — известные функции, определяющие *план эксперимента*, называется *линейной регрессионной моделью.* При этом должно выполняться очевидное требование $s < n$.

Часто рассматривают модель наблюдений за СВ Y, в которой вектор X считается неслучайным и присутствуют случайные ошибки наблюдений W:

$$Y_k = \theta_1\varphi_1(x_k) + \ldots + \theta_s\varphi_s(x_k) + W_k, \quad k = \overline{1, n}.$$

В этой модели неизвестными по-прежнему являются параметры $\theta_1, \ldots, \theta_s$, а векторы $x_1, \ldots, x_n$ и распределения СВ W_k, $k = \overline{1,n}$, считаются известными.

22.2. Схема Гаусса–Маркова. Линейную модель наблюдений, приведенную в предыдущем разделе, можно записать в более компактном виде

$$Y = A\theta + W,$$

если ввести обозначения $Y \triangleq \mathrm{col}(Y_1, \ldots, Y_n)$ для вектора наблюдений, $\theta \triangleq \mathrm{col}(\theta_1, \ldots, \theta_s)$ — для вектора неизвестных параметров, $W \triangleq \mathrm{col}(W_1, \ldots, W_n)$ — для вектора случайных ошибок наблюдения, $A \triangleq \{a_{kj}\}$ — для матрицы, составленной из элементов $a_{kj} = \varphi_j(x_k)$, $j = \overline{1,s}$, $k = \overline{1,n}$. При этом часто матрицу A называют *матрицей плана* или *регрессионной матрицей*. Без ограничения общности изложения предположим, что $\mathbf{M}[W] = 0$ и $K_W = \sigma^2 I$, где I — единичная матрица размерности $n \times n$.

Определение 22.3. Оценкой вектора неизвестных параметров θ, найденной по *методу наименьших квадратов* (или *МНК-оценкой*), называют вектор

$$\widehat{\theta} = \arg\min_{\theta\in\Theta} S(\theta), \qquad \text{где } S(\theta) \triangleq (Y - A\theta)^T (Y - A\theta).$$

Сформулированную задачу называют *схемой Гаусса–Маркова.*

Теорема 22.1. (*Теорема Гаусса–Маркова*). *Пусть матрица $A^T A$ невырожденная. Тогда МНК-оценка $\widehat{\theta}$ обладает следующими свойствами:*

1) *МНК-оценка $\widehat{\theta}$ существует, она единственная и вычисляется по формуле*

$$\widehat{\theta} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T Y;$$

2) *МНК-оценка $\widehat{\theta}$ является несмещенной и ее компоненты имеют минимальные дисперсии в классе линейных относительно Y несмещенных оценок;*

3) *ковариационная матрица МНК-оценки $\widehat{\theta}$ имеет вид*

$$K_{\widehat{\theta}} = \sigma^2 \left(A^T A\right)^{-1}.$$

Теорема 22.2. *Если в схеме Гаусса–Маркова СВ W имеет нормальное распределение, то справедливо следующее утверждение:*

1) *МНК-оценка* $\widehat{\theta}$ *имеет* s*-мерное нормальное распределение* $\mathrm{N}\left(\theta; \sigma^2\left(A^T A\right)^{-1}\right)$;

2) *Взвешенная квадратическая ошибка оценивания* $R(\widehat{\theta}) \triangleq (\widehat{\theta}-\theta)^T A^T A(\widehat{\theta}-\theta)\Big/\sigma^2$ *имеет распределение хи-квадрат с* s *степенями свободы:* $\chi^2(s)$;

3) *МНК-оценка* $\widehat{\theta}$ *является также МП-оценкой;*

4) *Нормированная остаточная сумма квадратов* $S(\widehat{\theta})/\sigma^2$ *имеет распределение* $\chi^2(n-s)$ *с* $n-s$ *степенями свободы;*

5) *Случайные величины* $\widehat{\theta}$ *и* $S(\widehat{\theta})$, *а также* $S(\widehat{\theta})$ *и* $R(\widehat{\theta})$ *независимы.*

Доказательства последних двух теорем можно найти в [8].

Пример 22.1. Пусть требуется оценить зависимость

$$y=\theta_1+\theta_2 x+\ldots+\theta_m x^{m-1}$$

по результатам наблюдений

$$Y_k=\theta_1+\theta_2 x_k+\ldots+\theta_s x_k^{s-1}+W_k, \quad k=\overline{1,n}$$

в точках x_k, где W_k, $k=\overline{1,n}$, — случайные ошибки измерений. В данном случае элементы матрицы плана равны $a_{kj}=x_k^{j-1}$, $k=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,s}$. Тогда искомую зависимость можно определить в виде

$$\widehat{y}=\widehat{\theta}_1+\widehat{\theta}_2 x+\ldots+\widehat{\theta}_s x^{s-1},$$

где оценки $\widehat{\theta}_j$ параметров θ_j, $j=\overline{1,s}$, находятся по методу наименьших квадратов из условия минимума квадратической функции

$$Q(\theta_1,\ldots,\theta_s)=\sum_{k=1}^{n}\left(y_k-\sum_{j=1}^{s}\theta_j x_k^{j-1}\right)^2.$$

Приравнивая нулю частные производные по θ_j квадратической функции $Q(\theta_1,\ldots,\theta_s)$, можно получить систему линейных уравнений для определения оценок неизвестных параметров $\theta_1,\ldots,\theta_s$:

$$\frac{\partial Q(\theta_1,\ldots,\theta_s)}{\partial\theta_1}=\ldots=\frac{\partial Q(\theta_1,\ldots,\theta_s)}{\partial\theta_s}=0.$$

В частном случае, когда $s=3$ приходим к задаче построения *параболической регрессии.* В данном случае после несложных преобразований можно получить следующую систему линейных уравнений, определяющих оценки $\widehat{\theta}_1$, $\widehat{\theta}_2$, $\widehat{\theta}_3$:

$$\begin{cases} \alpha_2\widehat{\theta}_3 + \alpha_1\widehat{\theta}_2 + \alpha_0\widehat{\theta}_1 &= \beta_0, \\ \alpha_3\widehat{\theta}_3 + \alpha_2\widehat{\theta}_2 + \alpha_1\widehat{\theta}_1 &= \beta_1, \\ \alpha_4\widehat{\theta}_3 + \alpha_3\widehat{\theta}_2 + \alpha_2\widehat{\theta}_1 &= \beta_2, \end{cases}$$

где коэффициенты этих уравнений расчитываются по формулам

$$\alpha_j = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k^j, \quad j = \overline{0,4}, \qquad \beta_j = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k x_k^j, \quad j = \overline{0,2}.$$

Решая полученную систему линейных уравнений относительно оценок $\widehat{\theta}_1$, $\widehat{\theta}_2$, $\widehat{\theta}_3$ и подставляя их значения в приведенную выше формулу, получаем искомую зависимость $\widehat{y}(x)$.

Пример 22.2. Построим доверительные интервалы для параметров регрессии в случае, когда вектор случайных ошибок W имеет нормальное распределение с нулевым МО и ковариационной матрицей $K_W = \sigma^2 I$. Согласно утверждению 1) теоремы 22.2 оценка $\widehat{\theta}_j$ неизвестного параметра θ_j для любого $j = 1, \ldots, s$ имеет нормальное распределение с $M[\widehat{\theta}_j] = \theta_j$ и $D[\widehat{\theta}_j] = \sigma^2 c_{jj}$, где c_{jj} – элемент (j,j) матрицы $(A^T A)^{-1}$. Тогда функция $(\widehat{\theta}_j - \theta_j)/(\sigma\sqrt{c_{jj}})$ является центральной статистикой (см. определение 19.5) для параметра θ_j, так как она строго монотонна и непрерывна по θ_j, а ее распределение не зависит от θ_j.

Поэтому центральный доверительный интервал уровня надежности $1-\alpha$ можно найти, разрешая относительно θ_j двойное неравенство

$$-u_\gamma \leqslant \frac{\widehat{\theta}_j - \theta_j}{\sigma\sqrt{c_{jj}}} \leqslant u_\gamma,$$

где u_γ — квантиль уровня $\gamma = 1 - \alpha/2$ стандартного нормального распределения. Таким образом получим для любого $j = 1, \ldots, s$:

$$\widehat{\theta}_j - u_\gamma\sigma\sqrt{c_{jj}} \leqslant \theta_j \leqslant \widehat{\theta}_j + u_\gamma\sigma\sqrt{c_{jj}}.$$

Если дисперсия ошибок σ^2 неизвестна, то, используя утверждения 4), 5 теоремы 22.2 и определение распределения Стьюдента, получим соответствующий доверительный интервал для θ_j, $j = 1, \ldots, s$:

$$\widehat{\theta}_j - t_\gamma(n-s)\sqrt{\frac{S(\widehat{\theta})c_{jj}}{n-s}} \leqslant \theta_j \leqslant \widehat{\theta}_j + t_\gamma(n-s)\sqrt{\frac{S(\widehat{\theta})c_{jj}}{n-s}},$$

где $t_\gamma(n-s)$ — квантиль уровня $\gamma = 1 - \alpha/2$ распределения Стьюдента $S(n-s)$.

22.3. Простая линейная регрессия.

Пример 22.3. Рассмотрим модель *простой линейной регрессии.* Пусть скалярные СВ Y и W связаны уравнением $Y = ax + b + W$, где СВ W может быть интерпретирована, например, как погрешность вычисления детерминированной величины $y = ax + b$. Предположим, что в соотношении $y = ax + b$ параметры a и b неизвестны, а при каждом k-м наблюдении случайной величины Y детерминированная величина x принимает различные значения x_k, $k = \overline{1,n}$. Будем считать, что наблюдения независимы друг от друга, т. е. СВ W_k являются независимыми для разных k с одним и тем же распределением $\mathbf{N}(0;\sigma^2)$. Тогда СВ $Y_k = ax_k + b + W_k$, $k = \overline{1,n}$, будет иметь нормальное распределение $\mathbf{N}(ax_k + b;\sigma^2)$, так как $\mathrm{M}[Y_k] = ax_k + b$. В данном случае неоднородную выборку Z_n образуют наблюдения $Y_1, \ldots, Y_n$. Требуется по выборке Z_n и известным значениям $x_1, \ldots, x_n$ оценить неизвестные параметры a и b. Рассмотрим для реализации выборки $z_n = \mathrm{col}(y_1, \ldots, y_n)$ логарифмическую функцию правдоподобия $\ln L(z_n, a, b)$ с параметрами $\theta_1 \triangleq b$, $\theta_2 \triangleq a$, которая в данном случае имеет вид

$$\ln L(z_n, a, b) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(y_k - ax_k - b)^2 - n\ln\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right).$$

Необходимое условие максимума этой функции:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial a}\ln L(z_n, a, b) = \dfrac{1}{\sigma^2}\left[\sum\limits_{k=1}^{n} y_k x_k - a\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 - b\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right] = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial b}\ln L(z_n, a, b) = \dfrac{1}{\sigma^2}\left[\sum\limits_{k=1}^{n} y_k - a\sum\limits_{k=1}^{n} x_k - nb\right] = 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему из двух уравнений с двумя неизвестными a и b для каждой реализации выборки z_n, находим оценки параметров:

$$\widehat{a}(z_n) = \frac{n\sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k - \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \sum\limits_{k=1}^{n} y_k}{n\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^2}, \qquad \widehat{b}(z_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k - \frac{\widehat{a}(z_n)}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Затем, заменяя в полученных выражениях реализацию выборки z_n на выборку $Z_n = \mathrm{col}(Y_1, \ldots, Y_n)$, получаем точечные оценки неизвестных параметров $\widehat{a}(Z_n)$, $\widehat{b}(Z_n)$.

Пример 22.4. Рассмотрим модель простой линейной регрессии из примера 22.3, не предполагая, что ошибки W_k имеют нормальное распределение, и, кроме того, считая, что коэффициенты X_k случайны и наблюдаемы: $Y_k = aX_k + b + W_k$, $k = \overline{1,n}$. Пусть $\mathbf{M}[W_k] = 0$, $\mathbf{D}[W_k] = \sigma^2$ и неизвестна, СВ W_k, $k = \overline{1,n}$, независимы. Предположим, что СВ X_k и W_k, $k = \overline{1,n}$, независимы, причем X_k имеют одно и то же, но неизвестное распределение $F_X(x)$. По результатам наблюдений $(y_1, x_1), \ldots, (y_n, x_n)$ требуется оценить неизвестные параметры a и b в линейной регрессионной модели. Для неоднородной выборки $\overline{z}_n \triangleq \mathrm{col}(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n)$ рассмотрим квадратическую функцию

$$Q(\overline{z}_n, a, b) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (y_k - ax_k - b)^2,$$

характеризующую среднюю по n квадратическую ошибку предсказания того, что в n наблюдениях СВ Y примет значения y_k, $k = \overline{1,n}$.

Определение 22.4. *МНК-оценками*, полученными по *методу наименьших квадратов*, неизвестных параметров a и b в линейной регрессионной модели $Y_k = aX_k + b + W_k$, $k = \overline{1,n}$, называют оценки $\widehat{a}(\overline{Z}_n)$ и $\widehat{b}(\overline{Z}_n)$, значения которых минимизируют квадратическую функцию $Q(\overline{z}_n, a, b)$, построенную по реализации выборки $\overline{z}_n$.

Данное определение не противоречит определению 22.3, введенному для более общей линейной модели наблюдений.

Заметим, что функция $Q(\overline{z}_n, a, b)$ совпадает по форме с точностью до коэффициентов с логарифмической функцией правдоподобия из примера 22.3:

$$Q(\overline{z}_n, a, b) = -\frac{2\sigma^2}{n} \ln L(\overline{z}_n, a, b) - 2\sigma^2 \ln\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right).$$

Поэтому минимум функции $Q(\overline{z}_n, a, b)$ по параметрам a и b достигается при тех же значениях $\widehat{a}$ и $\widehat{b}$, что и в методе максимального правдоподобия (минимизация функции $Q(\overline{z}_n, a, b)$ по a и b эквивалентна максимизации функции $\ln L(z_n, a, b)$) и определяется соотношениями из примера 22.3. Заменяя в этих соотношениях $\overline{z}_n$ на $\overline{Z}_n$, получаем

$$\widehat{a}(Z_n) = \widehat{r}_{XY}\sqrt{\frac{\widehat{d}_Y}{\widehat{d}_X}}, \qquad \widehat{b}(Z_n) = \widehat{m}_Y - \widehat{a}(Z_n)\widehat{m}_X.$$

Найденные по методу наименьших квадратов оценки $\widehat{a}(\overline{Z}_n)$ и $\widehat{b}(\overline{Z}_n)$ неизвестных параметров a и b построены для произвольно распределенных случайных ошибок W_k и случайных коэффициентов X_k, тогда как по методу максимального правдоподобия аналогичные оценки получены в предположении о нормальности W_k

и для детерминированных значений x_k, $k = \overline{1,n}$. Иными словами, МНК-оценки оказываются более *робастными* (т.е. менее чувствительными к виду распределения случайных коэффициентов X_k и ошибок W_k) по сравнению с ММП-оценками.

Исследуем статистические свойства найденных МНК-оценок $\widehat{a}(\overline{Z}_n)$ и $\widehat{b}(\overline{Z}_n)$. Предполагая существование моментов у СВ Y и X и переходя к пределу в соотношениях для $\widehat{a}(\overline{Z}_n)$ и $\widehat{b}(\overline{Z}_n)$ при $n \to \infty$, по закону больших чисел получаем

$$\widehat{a}(\overline{Z}_n) \xrightarrow{\text{п.н.}} a^* \triangleq \frac{\mathbf{M}[XY] - m_X m_Y}{\mathbf{M}[x^2] - m_X^2} = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} r_{XY},$$

$$\widehat{b}(\overline{Z}_n) \xrightarrow{\text{п.н.}} b^* \triangleq m_Y - a^* m_X.$$

Пример 22.5. Пусть числовые характеристики СВ X и Y известны: $m_X, \sigma_X, m_Y, \sigma_Y, r_{XY}$, но функциональная связь между СВ X и Y неизвестна. Рассмотрим новую СВ $\widehat{Y} \triangleq aX + b$, где a и b — некоторые заданные параметры. *Задача предсказания* СВ Y заключается в том, чтобы по наблюдениям (реализациям) $x_1, \ldots, x_n$ предсказать значения наблюдаемой СВ Y на основе зависимости $\widehat{y}_k \triangleq ax_k + b$, $k = \overline{1,n}$, зная лишь числовые характеристики СВ X и Y. Ясно, что предсказываемые значения $\widehat{y}_k$ будут отличаться от реализаций y_k СВ Y, а точность предсказания определяется параметрами a и b. Зададимся целью выбрать параметры a и b так, чтобы *среднеквадратическая ошибка предсказания* была минимальна:

$$(a^*, b^*) = \arg\min_{a,b} \mathbf{M}\left[\left(Y - \widehat{Y}(X, a, b)\right)^2\right].$$

Обозначим

$$Q(a,b) \triangleq \mathbf{M}\left[\left(Y - \widehat{Y}(X, a, b)\right)^2\right] \triangleq \mathbf{M}\left[(Y - aX - b)^2\right].$$

Тогда можно установить, что

$$Q(a,b) = \sigma_Y^2(1 - r_{XY}^2) + (a\sigma_X - \sigma_Y r_{XY})^2 + (m_Y - am_X - b)^2.$$

Для того чтобы функция $Q(a,b)$ достигала минимума по a и b, достаточно выбрать

$$a^* = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} r_{XY}, \qquad b^* = m_Y - a^* m_X.$$

В этом случае

$$Q(a^*, b^*) = \sigma_Y^2(1 - r_{XY}^2).$$

Значения параметров a^* и b^* совпадают с предельными значениями оценок $\widehat{a}(\overline{Z}_n)$ и $\widehat{b}(\overline{Z}_n)$, полученными в примере 22.4.

Проанализируем минимальное значение функции

$$Q(a^*, b^*) = \mathbf{D}[Y - a^*X - b^*] = \sigma_Y^2(1 - r_{XY}^2),$$

так как $\mathbf{M}[Y - a^*X - b^*] = m_Y - a^*m_X - b^* = 0$. Таким образом, имеем

$$1 - r_{XY}^2 = \frac{\mathbf{D}[Y - a^*X - b^*]}{\sigma_Y^2}.$$

Отсюда следует, что коэффициент корреляции характеризует относительную (в единицах σ_Y^2) величину среднего квадратического отклонения СВ Y от линейной оценки наилучшего приближения $\widehat{Y}^* \triangleq a^*X + b^*$, т. е. r_{XY} численно характеризует степень линейной стохастической зависимости между СВ X и Y. Чем ближе $|r_{XY}|$ к единице, тем теснее будут группироваться выборочные точки (x_k, y_k) около прямой $\widehat{y} = a^*x + b^*$, называемой *прямой среднеквадратической регрессии СВ Y на СВ X*. При $r_{XY} = \pm 1$ имеем $\mathbf{D}[Y - aX - b] = 0$, поэтому, согласно свойствам МО, СВ X и Y с вероятностью 1 линейно зависимы: $Y = a^*X + b^*$.

Как отмечалось в п. 22.1, наилучшей среднеквадратической оценкой СВ Y по СВ X является условное МО $\widehat{Y}^* = \mathbf{M}[Y|X]$. В частности, если вектор $Z \triangleq \mathrm{col}(X, Y)$ — гауссовский, то из теоремы о нормальной корреляции следует, что

$$\widehat{Y}^* = \mathbf{M}[Y|X] = m_Y + \frac{\sigma_Y r_{XY}}{\sigma_X}(X - m_X),$$

т. е. наилучшая оценка $\widehat{Y}^*$ линейно зависит от X и совпадает с оценкой, полученной выше с помощью метода наименьших квадратов при условии, что функция $\varphi(X)$ линейна. График функции $\widehat{y}^* = \mathbf{M}[Y|x]$ называется *линией регрессии* СВ Y на СВ X. В гауссовском случае линия регрессии — прямая.

22.4. Типовые задачи.

Задача 22.1. Используя данные типовой задачи 16.1, построить линейную регрессионную модель

$$Y_k = aX_k + b + W_k, \qquad k = \overline{1, n},$$

описывающую зависимость между СВ Y (средняя температура января в г. Алатыре) и СВ X (средняя температура января в г. Саратове). Заметим, что распределение случайных ошибок W_k неизвестно.

Решение. Для оценивания неизвестных параметров a и b используем МНК. Согласно примеру 22.4, МНК-оценки имеют вид

$$\widehat{a}(Z_n) = \widehat{r}_{XY}\sqrt{\frac{\widehat{d}_Y}{\widehat{d}_X}}, \qquad \widehat{b}(Z_n) = \widehat{m}_Y - \widehat{a}(Z_n)\widehat{m}_X.$$

В данной задаче $\widehat{r}_{XY} = 0{,}95$, $\widehat{d}_Y = 20{,}09$, $\widehat{d}_X = 22{,}14$, $\widehat{m}_X = -11{,}87$, $\widehat{m}_Y = -13{,}75$ (результат решения задачи 16.1).

Проведя необходимые вычисления, получим $\widehat{a} = 0{,}91$, $\widehat{b} = -3$.

Ответ. $\widehat{a} = 0{,}91$, $\widehat{b} = -3$.

Задача 22.2. В «Основах химии» Д.И. Менделеев приводит следующие экспериментальные данные о количестве (Y) азотно-натриевой соли $NaNO_3$, которое можно растворить в 100 г воды в зависимости от температуры (X).

Таблица 22.1

X	0	4	10	15	21	29	36	51	68
Y	66,7	71,0	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4	113,6	125,1

Предполагая, что зависимость между X и Y описывается моделью простой линейной регрессии: $Y = b + aX + W$ с гауссовскими ошибками W, построить доверительные интервалы для параметров $\theta_1 = b$ и $\theta_2 = a$.

Решение. Построим сначала МНК-оценки неизвестных параметров уравнения регрессии. Согласно утверждению 3) теоремы 22.2, МНК-оценка совпадает с оценкой максимального правдоподобия, если погрешности имеют гауссовское распределение. Поэтому воспользуемся результатом примера 22.3, в котором явно выписаны МП-оценки параметров простой линейной регрессии. Подставляя экспериментальные данные в соответствующие выражения для $\widehat{a}(Z_n)$ и $\widehat{b}(Z_n)$, получим $\widehat{\theta}_1 = \widehat{b}(Z_n) = 67{,}53$, $\widehat{\theta}_2 = \widehat{a}(Z_n) = 0{,}87$.

В примере 22.2 построены доверительные интервалы параметров θ_j, $j = 1, \ldots, s$, при произвольной матрице плана A. В данной задаче $s = 2$, а матрицы A и $C \triangleq (A^T A)^{-1}$ имеют соответственно вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ 1 & x_n \end{pmatrix}; \quad C = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 & -\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \\ -\sum\limits_{k=1}^{n} x_k & n \end{pmatrix},$$

где

$$d \triangleq n\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2, \quad c_{11} = \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n} x_k^2, \quad c_{22} = \frac{n}{d}.$$

Неизвестная дисперсия погрешности W оценивается следующим образом:

$$\frac{1}{n-2}S(\widehat{\theta}) = \frac{1}{n-2}\sum_{k=1}^{n}(y_k - (\widehat{\theta}_1 + \widehat{\theta}_2 x_k))^2,$$

где $\widehat{\theta}_1$, $\widehat{\theta}_2$ — МНК-оценки параметров θ_1 и θ_2 соответственно. Таким образом, согласно примеру 22.2, получим доверительные интервалы уровня надежности $1-\alpha$ для параметров θ_1 и θ_2 в виде

$$\widehat{\theta}_1 - t_\gamma(n-2)\sqrt{S(\widehat{\theta})c_{11}/(n-2)} < \theta_1 < \widehat{\theta}_1 + t_\gamma(n-2)\sqrt{S(\widehat{\theta})c_{11}/(n-2)};$$

$$\widehat{\theta}_2 - t_\gamma(n-2)\sqrt{S(\widehat{\theta})c_{22}/(n-2)} < \theta_2 < \widehat{\theta}_2 + t_\gamma(n-2)\sqrt{S(\widehat{\theta})c_{22}/(n-2)},$$

где $t_\gamma(n-2)$ — квантиль уровня $\gamma = 1-\alpha/2$ распределения Стьюдента $S(n-2)$. В данном примере $n=9$, а

$$\left(\sum_{k=1}^{9} x_k\right)^2 = 234, \quad \sum_{k=1}^{9} x_k^2 = 10144.$$

Поэтому $c_{11} = 0{,}2776$, $c_{22} = 0{,}00025$, $S(\widehat{\theta}) = 88{,}9$. Выбрав уровень надежности равным $0{,}95$, найдем по таблице квантиль $t_{0,975}(7) = 2{,}365$. Таким образом, получим следующие доверительные интервалы уровня надежности $0{,}95$: $63{,}09 \leqslant \theta_1 \leqslant 71{,}97$, $0{,}737 \leqslant \theta_2 \leqslant 1{,}003$.

Ответ. $63{,}09 \leqslant \theta_1 \leqslant 71{,}97$, $0{,}737 \leqslant \theta_2 \leqslant 1{,}003$.

§ 23. Метод статистических испытаний

23.1. Основные понятия.

Определение 23.1. Метод вычисления некоторой детерминированной величины a как среднего арифметического Y_n независимых одинаково распределенных СВ $X_1, \ldots, X_n$, подобранных таким образом, чтобы $Y_n \xrightarrow{\text{п.н.}} a$, называется *методом статистических испытаний* (*методом Монте-Карло*) для вычисления a.

Замечание 23.1. В некоторых учебниках метод Монте-Карло называют также *методом статистического моделирования*, что, на наш взгляд, не совсем корректно. Дело в том, что термин *«моделирование»* используется также в *теории математического моделирования* для описания процесса создания математических моделей каких-либо явлений. Подчеркнем, что в методе Монте-Карло речь идет о *статистической имитации испытаний* (опытов), а не о процессе создания ститистических моделей опытов.

23.2. Вычисление вероятности события.

Пример 23.1. Рассмотрим применение метода статистических испытаний для оценивания неизвестной вероятности $p \triangleq \mathbf{P}(A)$ некоторого события A. В соответствии с усиленным законом больших чисел частота события A сходится почти наверное к вероятности события A, т.е. $W_n(A) \triangleq M(A)/n \xrightarrow{\text{п.н.}} p$ при $n \to \infty$. Кроме того, в соответствии с теоремой Муавра–Лапласа справедливо другое предельное соотношение при $n \to \infty$:

$$\overset{*}{W}_n \triangleq \frac{M(A) - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{F} U, \quad \text{где } U \sim \mathbf{N}(0;1).$$

Воспользуемся этими соотношениями для выбора *гарантирующего числа испытаний* N, при котором можно было бы сказать, что СВ $M(A)/N$ «близка» к оцениваемой вероятности p. Поступим следующим способом. Вначале зададим точность Δ оценки вероятности p: $|M/n - p| \leqslant \Delta$, где $M \triangleq M(A)$. Затем найдем надежность этой оценки, учитывая, что $\overset{*}{W}_n \approx U$,

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{M}{n} - p\right| \leqslant \Delta\right\} = \mathbf{P}\left\{\frac{|M - np|}{\sqrt{npq}} \leqslant \Delta\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\} \approx 2\Phi_0\left(\Delta\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Задав доверительную вероятность $\delta \triangleq 1 - \alpha$, получим трансцендентное уравнение $2\Phi_0\left(\Delta\sqrt{N/pq}\right) = \delta$, из которого можно найти

$$N_\delta = \left[\frac{x^2_{(1+\delta)/2}p(1-p)}{\Delta^2}\right] + 1,$$

где $x_{(1+\delta)/2}$ удовлетворяет условию: $\Phi_0(x_{(1+\delta)/2}) = \delta/2$, т.е. $x_{(1+\delta)/2}$ является квантилью уровня $(1+\delta)/2$ распределения $\mathbf{N}(0;1)$. Но величины p и $q \triangleq 1 - p$ заранее неизвестны, поэтому заменим величину $p(1-p)$ на ее максимальное значение, которое, очевидно, достигается при $p = 1/2$ и равно $1/4$. Поэтому выбираем

$$N_\delta = \left[\frac{(x^2_{(1+\delta)/2})}{(2\Delta)^2}\right] + 1.$$

В этом примере для вычисления N_δ необходимо задать уровень доверительной вероятности $\delta = 1 - \alpha$ (вторичный по отношению к p) и точность Δ вычисления p.

Замечание 23.2. При $p > 0{,}8$ обычно задают $\Delta = (1-p)/10$ и $\delta = 1 - \Delta$.

Пример 23.2. В предыдущем примере гарантирующее число испытаний было выбрано априори, т. е. до опыта, и одним и тем же для всех оцениваемых вероятностей p. Но интуитивно ясно, что N_δ должно быть различным в зависимости от значения p и от реализации числа успешных испытаний M. Например, пусть в серии из N испытаний все испытания оказались успешными, т. е. $M = N$. Найдем для этого случая зависимость $N_\delta(p)$ гарантирующего числа испытаний от доверительной вероятности $\delta = 1 - \alpha$ и оцениваемой вероятности p. С этой целью рассмотрим, как и в примере 23.1, нормированную СВ $\overset{*}{W}_N$, но потребуем выполнения другого вероятностного условия:

$$\mathbf{P}\left\{\overset{*}{W}_N \leqslant x_\delta\right\} = \delta,$$

где x_δ — квантиль уровня $\delta = 1 - \alpha$ для стандартного нормального распределения $\mathbf{N}(0;1)$. Это условие отражает наше желание добиться того, чтобы частота W_n была не меньше оцениваемой вероятности p с некоторой точностью, т. е.

$$\overset{*}{W}_N \overset{\Delta}{=} (W_N - p)\sqrt{\frac{N}{p(1-p)}} = \left(\frac{N-K}{N} - p\right)\sqrt{\frac{N}{p(1-p)}} \leqslant x_\delta,$$

где $K \overset{\Delta}{=} N - M$ есть случайное число неуспешных испытаний. Действительно, это неравенство эквивалентно следующему:

$$W_N \leqslant p + x_\delta\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}}.$$

Если последнее неравенство выполнено для конкретно реализовавшегося значения частоты, то можно надеяться (с доверительной вероятностью δ), что полученное значение W_N лишь незначительно меньше вычисляемой вероятности p (см. более подробно о понятии доверительного интервала в пункте 19.1). Выбирая минимальное N, удовлетворяющее полученному неравенству, т. е. решая соответствующее квадратное уравнение $(N - k - Np)^2 = Nx_\delta^2 p(1-p)$, где k — реализация K, находим

$$N_\delta(p,k) = \left[\frac{2k + x_\delta^2 p + x_\delta\sqrt{4kp + p^2x_\delta^2}}{2(1-p)}\right] + 1.$$

В частности, если все испытания оказались успешными (случай $k = 0$), то

$$N_\delta(p,0) = \left[\frac{x_\delta^2 p}{1-p}\right] + 1.$$

Например, если при вычислении вероятности $p = 0{,}99$ положить, как рекомендуется в примере 23.1, $\Delta = 0{,}001$, $\delta = 1 - \alpha = 0{,}999$, то по формуле из этого примера получаем априорное значение гарантирующего числа испытаний $N_\delta = 10\ 300\ 000$, так как в этом случае $x_\delta = 3{,}209$. При тех же данных апостериорное значение гарантирующего числа непрерывно успешных испытаний оказывается намного меньше: $N_\delta(p, 0) = 1030$.

Пример 23.3. Используем теперь другую предельную теорему для выбора гарантирующего числа испытаний. Предположим, что $p > 0{,}9$ и воспользуемся теоремой Пуассона. Пусть $q \triangleq 1 - p$ — вероятность неуспешных испытаний, а $W_N = K/N$ — частота неуспешных испытаний в серии из N испытаний, где K — случайное число неуспешных испытаний. В соответствии с теоремой Пуассона при больших N и малых q распределение частоты $T \triangleq W_N$ можно аппроксимировать распределением Пуассона $\mathbf{\Pi}(Nq)$, в соответствии с которым имеем

$$\mathbf{P}\left\{W_N \leqslant \frac{k}{N}\right\} \approx F_T\left(\frac{k}{N}\right) = \sum_{i=0}^{k} e^{-Nq}\frac{(Nq)^i}{i!}.$$

Воспользуемся результатом из примера 19.6, приведенного в пункте 19.3, для построения правостороннего доверительного интервала $[0, \theta_2]$, который «накрывал» бы неизвестный параметр q с доверительной вероятностью $\delta = 1 - \alpha$. Таким образом, получаем уравнение связи между параметрами N, θ_2, k, α:

$$F_T\left(\frac{k}{N}\right) = \sum_{i=0}^{k} e^{-N\theta_2}\frac{(N\theta_2)^i}{i!} = \alpha.$$

Можно показать, что функция в левой части этого уравнения монотонно убывает по k с ростом N. Поэтому корень данного уранения по N может быть легко найден, например с помощью метода дихотомии. В частном случае, когда в серии из N испытаний все испытания оказались успешными, т. е. $k = 0$, то данное уравнение принимает более простой вид $e^{-N\theta_2} = \alpha$. Отсюда находим гарантирующее число испытаний при условии, что все испытания успешны:

$$N_\delta = \left[-\frac{\ln(1-\delta)}{\theta_2}\right] + 1.$$

23.3. Вычисление определенного интеграла.

Пример 23.4. Рассмотрим определенный интеграл

$$a \triangleq \int_0^1 g(x)\,dx,$$

где $g(x)$ — ограниченная на отрезке $[0,1]$ функция ($|g(x)| \leqslant c < < \infty$ для всех $x \in [0,1]$). Рассмотрим также СВ X, равномерно распределенную на отрезке $[0,1]$, для которой $f_X(x) = 1$, если $x \in \in [0,1]$, и $f_X(x) = 0$, если $x \notin [0,1]$. Тогда очевидно, что

$$\mathbf{M}[g(X)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\, dx = \int\limits_0^1 g(x)\, dx \stackrel{\Delta}{=} a.$$

Таким образом, значение определенного интеграла можно найти как математическое ожидание СВ $\widetilde{X} \stackrel{\Delta}{=} g(X)$, где СВ X имеет равномерное распределение на отрезке $[0,1]$, $X \sim \mathbf{R}(0;1)$. Пусть теперь последовательность $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, состоит из СВ, независимых и равномерно распределенных на отрезке $[0,1]$. Можно убедиться, что в этом случае СВ $\widetilde{X}_n \stackrel{\Delta}{=} g(X_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, будут также независимы, одинаково распределены с конечными МО и дисперсиями. Так как МО СВ X_n ограничены, то по усиленному закону больших чисел (теорема Колмогорова) последовательность СВ $Y_n \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \widetilde{X}_k$ сходится почти наверное к величине $a = \mathbf{M}[g(X)]$, т.е. $Y_n \xrightarrow{\text{п.н.}} a$ при $n \to \infty$. Это значит, что, проведя большое количество испытаний, можно с высокой точностью вычислить значение интеграла a.

З а м е ч а н и е 23.3. Метод Монте-Карло имеет огромную область приложения. Наиболее сложной проблемой при его реализации является выбор необходимого числа испытаний n, такого, чтобы можно было считать, что СВ Y_n достаточно «близка» к a. Ясно, что из-за вычислительных трудностей желательно выбирать величину n с возможно меньшим гарантирующим значением. Обозначим это значение через N. Для выбора N обычно используют центральную предельную теорему, считая, что распределение нормированной суммы Z_N СВ X_k, $k = \overline{1, N}$, является стандартным нормальным распределением $\mathrm{N}(0;1)$. Рассмотрим на примерах, как выбирается величина N.

П р и м е р 23.5. Выберем гарантирующее число статистических испытаний N при вычислении значения a определенного интеграла из примера 23.4. Рассмотрим дисперсию СВ $\widetilde{X} \stackrel{\Delta}{=} g(X)$, предполагая, что $g(x) \not\equiv a$ и $g(x)$ — непрерывна,

$$\mathbf{D}[g(X)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (g(x) - a)^2 f_X(x)\, dx = \int\limits_0^1 (g(x) - a)^2\, dx \leqslant \int\limits_0^1 (|g(x)| + |a|)^2\, dx.$$

По условиям примера 23.4 имеем $|g(x)| \leqslant c$, тогда

$$|a| = \left|\int_0^1 g(x)\,dx\right| \leqslant c, \quad \mathbf{D}[g(X)] \leqslant \int_0^1 (|g(x)| + c)^2\,dx \leqslant 4c^2.$$

Покажем, что к последовательности СВ $g(X_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, применима центральная предельная теорема, в соответствии с которой последовательность нормированных СВ

$$Z_n \triangleq \frac{1}{s_n}\sum_{k=1}^{n}\left[g(X_k) - m_k\right],$$

где $s_n^2 \triangleq \mathbf{D}\Big[\sum\limits_{k=1}^{n} g(X_k)\Big]$, $m_k \triangleq \mathbf{M}\left[g(X_k)\right]$, сходится по распределению к СВ $U \sim \mathbf{N}(0;1)$, т.е. $Z_n \xrightarrow{F} U$ при $n \to \infty$. С этой целью проверим условие Ляпунова (см. определение 14.2), чтобы воспользоваться теоремой Ляпунова. Учитывая, что СВ X_k, $k = \overline{1,n}$, независимы и имеют одно и тоже распределение $\mathbf{R}(0,1)$, найдем

$$m_k \triangleq \mathbf{M}[g(X_k)] = \mathbf{M}[g(X)] = a,$$

$$s_n^2 \triangleq \mathbf{D}\left[\sum\nolimits_{k=1}^{n} g(X_k)\right] = \sum\nolimits_{k=1}^{n} \mathbf{D}[g(X_k)] = n\mathbf{D}[g(X)].$$

Тогда условие Ляпунова выполнено:

$$\frac{1}{s_n^3}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}[|g(X) - a|^3] \leqslant \frac{1}{(n\mathbf{D}[g(X)])^{3/2}}\sum_{k=1}^{n}(2c)^3 \leqslant \frac{(2c/\varepsilon)^3}{\sqrt{n}} \to 0,$$

так как $g(x) \not\equiv a$ и $g(x)$ непрерывна, и поэтому $\mathbf{D}[g(x)] \geqslant \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Подставляя в формулу для Z_n найденные выше значения s_n и m_k, получаем

$$Z_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(X_k) - a\right)\sqrt{\frac{n}{\mathbf{D}[g(X)]}} = (Y_n - a)\sqrt{\frac{n}{\mathbf{D}[g(X)]}},$$

где $Y_n \triangleq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(X_k)$.

Далее, по усиленному закону больших чисел,

$$Y_n \triangleq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(X_k) \xrightarrow{\text{п.н.}} a \triangleq \mathbf{M}[g(X)],$$

т. е. СВ Y_n сходится почти наверное к постоянной a. Это значит, что при больших n СВ Y_n «близка» к a. Предположим, что нужно вычислить a с точностью Δ: $|Y_n - a| \leqslant \Delta$. Поскольку Y_n является случайной величиной, выясним степень достоверности этой оценки:

$$\mathbf{P}\left\{|Y_n - a| \leqslant \Delta\right\} = \mathbf{P}\left\{|Y_n - a|\sqrt{\frac{n}{\mathbf{D}[g(X)]}} \leqslant \Delta\sqrt{\frac{n}{\mathbf{D}[g(X)]}}\right\}.$$

Так как $\mathbf{D}[g(X)] \leqslant 4c^2$, то

$$\mathbf{P}\{|Y_n - a| \leqslant \Delta\} \geqslant \mathbf{P}\left\{|Y_n - a|\sqrt{\frac{n}{\mathbf{D}[g(X)]}} \leqslant \Delta\frac{\sqrt{n}}{2c}\right\} = \mathbf{P}\left\{|Z_n| \leqslant \Delta\frac{\sqrt{n}}{2c}\right\}.$$

В соответствии с ЦПТ имеем $Z_n \xrightarrow{F} U$, т. е.

$$\mathbf{P}\left\{|Z_n| \leqslant \Delta\frac{\sqrt{n}}{2c}\right\} \approx 2\Phi_0\left(\Delta\frac{\sqrt{n}}{2c}\right),$$

где $\Phi_0(x) \triangleq \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$. Выберем некоторую доверительную вероятность $\delta = 1 - \alpha$, которая равна требуемой надежности выполнения неравенства $|Y_n - a| \leqslant \Delta$, т. е. $\mathbf{P}\{|Z_n| \leqslant \Delta\sqrt{n}/2\} = \delta$.

Замечание 23.4. На практике величину $\delta = 1 - \alpha$ обычно задают в пределах $0{,}95 \leqslant \delta < 1$.

Тогда, решая уравнение $2\Phi_0\left(\Delta\sqrt{N}\big/(2c)\right) = \delta$ относительно N, можно найти гарантирующее число испытаний N_δ. Функция $\Phi_0(x)$ задается таблично, и поэтому для доверительной вероятности δ можно найти такое значение $x_{(1+\delta)/2}$, что $\Phi_0(x_{(1+\delta)/2}) = \delta/2$. Число $x_{(1+\delta)/2}$ является квантилью уровня $(1+\delta)/2$ распределения $\mathbf{N}(0;1)$. Таким образом, получаем уравнение $\Delta\sqrt{N}\big/(2c) = x_{(1+\delta)/2}$, из которого легко найти искомое значение

$$N_\delta = \left[\left(\frac{2c\,x_{(1+\delta)/2}}{\Delta}\right)^2\right] + 1,$$

где символ $[\,\cdot\,]$ означает целую часть числа. Подчеркнем, что для вычисления N_δ необходимо задать точность Δ оценки величины a и уровень доверительной вероятности δ.

В данном примере рассмотрен случай вычисления $a \triangleq \mathbf{M}[g(X)]$ для равномерно распределенной СВ $X \sim \mathbf{R}(0;1)$. Аналогично можно поступить при вычислении $a \triangleq \mathbf{M}[g(X)]$ для произвольной СВ X такой, что $|a| < \infty$.

23.4. Типовые задачи.

Задача 23.1. Предвыборный штаб кандидата X в президенты проводит социологический опрос, чтобы оценить вероятность p того, что избиратели будут голосовать на предстоящих выборах за кандидата X. Сколько избирателей надо опросить, чтобы с доверительной вероятностью 0,95 отклонение полученной оценки от истинной вероятности p было не более 0,01?

Решение. В данной задаче определен уровень доверительной вероятности $\delta = 1 - \alpha = 0{,}95$ и точность оценки $\Delta = 0{,}01$.

Нам необходимо выбрать число избирателей N_δ, такое, чтобы выполнялось соотношение

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{M}{N_\delta} - p\right| < 0{,}01\right\} = 0{,}95.$$

Согласно примеру 23.1, имеем

$$N_\delta = \left[\frac{x^2_{(1+\delta)/2}p(1-p)}{\Delta^2}\right] + 1,$$

где $x_{(1+\delta)/2} = 1{,}96$ — квантиль уровня 0,975 стандартного гауссовского распределения $\mathbf{N}(0;1)$, а величина $p(1-p)$ заменяется ее максимальным значением, равным $1/4$.

Проведя необходимые вычисления, получим, что гарантирующее число опрошенных избирателей $N_\delta = 9605$.

Ответ. Нужно опросить $N_\delta = 9605$ избирателей.

§ 24. Задачи для самостоятельного решения

1. Антрополог собирается изучать обитателей некоторого острова. Он намерен оценить процент населения с 1-й группой крови, и будет удовлетворен, если этот процент окажется правильным в пределах $\pm 3\%$. Сколько островитян антрополог должен выбрать для изучения их группы крови, если он считает допустимым гарантировать свои выводы с доверительной вероятностью $1 - \alpha = 0{,}95$.

2. Известно, что 2% населения некоторого города больны туберкулезом. Сколько жителей этого города нужно обследовать, чтобы среди обследуемых больные туберкулезом составляли $2 \pm 0{,}2\%$ с вероятностью $1 - \alpha = 0{,}99$?

3. На химическом производстве получены следующие данные о зависимости выхода продукта Y [кг/час] от температуры реакции X [$^\circ C$]:

Таблица 24.1

X	51	32	80	73	64	45	83	44	93
Y	52,7	15,2	89,5	94,8	76,0	39,3	114,8	36,5	137,4
X	28	35	40	29	53	58	65	75	
Y	5,3	20,7	21,7	9,2	55,4	64,3	79,1	101,1	

Предполагая, что зависимость между X и Y описывается моделью простой линейной регрессии, построить МНК-оценки неизвестных параметров.

4. Результаты измерения температуры T корпуса работающего агрегата, производимые с интервалом 5 мин, представлены в табл. 24.2.

Таблица 24.2

t [мин]	5	10	15	20	25
T [°C]	59,3	59,8	60,1	64,9	70,2

Считая, что зависимость между этими переменными имеет вид $T = \theta_1 + \theta_2 t + \theta_3 t^2$, найти МНК-оценки неизвестных параметров θ_1, θ_2 и θ_3.

5. Опыт работы страховой компании показывает, что страховой случай приходится примерно на каждый восьмой договор. Оценить с помощью неравенства Чебышева необходимое количество n договоров, которые нужно заключить, чтобы с доверительной вероятностью, не меньшей чем 0,8, можно было утверждать, что частота страховых случаев отклонится от вероятности наступления страхового случая не более чем на 0,01 по абсолютной величине. Уточнить результат с помощью теоремы Муавра–Лапласа.

6. Цех завода выпускает шарики для подшипников. За смену производится 10 000 шариков. Вероятность того, что один шарик окажется дефектным, равна 0,05. Причины дефектов отдельных шариков независимы. Продукция проходит контроль сразу после изготовления, и дефектные шарики ссыпаются в бункер для переплавки. Определить, на какое количество шариков n должен быть рассчитан бункер, чтобы с доверительной вероятностью 0,99 он не оказался переполненным после смены.

ОТВЕТЫ

Глава № 1

1. *а*) $\frac{k-1}{17}$ при $1 \leqslant k \leqslant 18$ и 1 при $k \geqslant 18$; *б*) $\frac{1}{136}$; *в*) $\frac{1}{100}$. **2.** $\frac{1}{720}$. **3.** $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{45}$; $\mathbf{P}(B) = \frac{7}{45}$; $\mathbf{P}(C) = \frac{1}{15}$. **4.** $\mathbf{P}(A) = \frac{C_4^2 C_{48}^{24}}{C_{52}^{26}} \approx 0{,}39$; $\mathbf{P}(B) = \frac{C_{48}^{26} + C_{48}^{22}}{C_{52}^{26}} \approx 0{,}11$; $\mathbf{P}(C) = \frac{C_4^1 C_{48}^{25} + C_4^3 C_{48}^{23}}{C_{52}^{26}} \approx 0{,}499$. **5.** $\frac{365!}{(365-r)!365^r}$. **6.** $\frac{1}{60}$. **7.** $\approx 0{,}7037$. **8.** 0,082. **9.** 0,0439. **10.** $\frac{3}{248} \approx 0{,}012$. **11.** *а*) $\frac{1}{210}$; *б*) $\frac{3}{7}$; *в*) $\frac{209}{210}$. **12.** Указание: исследовать равновероятность предложенных комбинаций. **13.** *а*) 0,009; *б*) 0,38. **14.** 0,25. **15.** *а*) 0,753; *б*) $\frac{2^{50}}{C_{100}^{50}} \approx 10^{-14}$. **16.** $\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^{r-2}$. **17.** 0,0000011. **18.** 0,001. **19.** Зависимы. **20.** Верно. **21.** $\frac{13}{16}$. **22.** Не менее 298. **23.** 0,962. **24.** $\frac{2}{5}$. **25.** 0. **26.** 0,187. **27.** 0,2304. **28.** Нет. **29.** Можно. **30.** Верно. **31.** 1. **32.** Верно. **33.** В случае несовместных A и B. **34.** $\frac{2}{3}$. **35.** Совместны. **36.** 1. **37.** Зависимы, несовместны. **38.** Независимы. **39.** Зависимы. **40.** 0,704. **41.** 0,9. **42.** 0,0028. **43.** *а*) 0,782; *б*) 0,16356. **44.** $2p - p^2$. **45.** $\frac{2}{9}$. **46.** $\mathbf{P}(B|A) \approx 0{,}3876$; $\mathbf{P}(\overline{B}|A) \approx 0{,}6124$; $\mathbf{P}(B|\overline{A}) \approx 0{,}1022$; $\mathbf{P}(\overline{B}|\overline{A}) \approx 0{,}8978$. **47.** $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{3}$. **48.** $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$. **49.** $C_{2n-k}^{n-k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-k}$. **50.** 0,5. **51.** *а*) 0,1468; *б*) 0,9437. **52.** 0,0307. **53.** 0,6647. **54.** 0,7748. **55.** *а*) 0,3281; *б*) 0,4095. **56.** Гипотезами являются наборы событий 1 и 4. **57.** Безразлично, вероятность сдачи экзамена равна $\frac{1}{6}$. **58.** 0,455. **59.** 0,6405. **60.** Нет. **61.** $\frac{1}{5}$. **62.** Может. **63.** $\frac{11}{18}$. **64.** 0,2941. **65.** В 3-ю фирму. **66.** Можно. **67.** Нет. **68.** Могут. **69.** $\mathbf{P}(H_1|H_1) = 1$, $\mathbf{P}(H_2|H_1) = \mathbf{P}(H_3|H_1) = 0$. **71.** $\frac{p_1}{p_1+p_2}$; $\frac{p_2}{p_1+p_2}$. **72.** 0,8596. **73.** 0,8(9). **74.** 0,5375. **75.** *а*) 0,014. *б*) 0,2143; **76.** 0,2. **77.** 0,4286. **78.** $\frac{1}{4}$.

79. *а*) 0,5787; *б*) 0,0017. **80.** *а*) 0,1154; *б*) 0,3293. **81.** 0,3288. **82.** *а*) $\frac{1}{30}$; *б*) 0,064. **83.** 0,995. **84.** 0,4. **85.** ≈0,618. **86.** 11/36.

Глава № 2

1. Не является. **2.** Нет. **3.** Неверно. **4.** *а*) 3,5; *б*) −0,575; *в*) 1,495. **5.** Наиболее вероятное значение равно 1, наименее вероятное значение равно 4. **6.** $\mathbf{M}[X]\cdot\mathbf{D}[Y] > \mathbf{M}[Y]\cdot\mathbf{D}[X]$. **7.** 1. **8.** Для любых $x \geqslant 0$. **9.** $F_X(1/2) = F_X(-1/2) = 1/2$. **10.** $\mathbf{Bi}(1;0{,}8)$. **11.** Равны. **12.** 0. **13.** *а*) Да; *б*) Да. **14.** 0,488. **15.** 0 и 1. **16.** 1. **17.** Равны. **18.** Является. **19.** Не является. **20.** $\mathbf{P}\{X < \mathbf{M}[X]\} = \mathbf{P}\{[X] > \mathbf{M}[X]\}$; $\mathbf{P}\{|X - \mathbf{M}[X]| < \sqrt{\mathbf{D}[X]}\} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **21.** Они равны. **22.** Они равны. **23.** $\mathbf{M}[X] = \mathbf{D}[X] = \mathbf{M}[Y] = \mathbf{D}[Y] = 1$. **24.** $\mathbf{P}\{0 < X < 1\} < \mathbf{P}\{0 < Y < 1\}$. **25.** $X \sim \mathbf{Bi}(15;p)$, $p = \frac{5}{72}$; **26.** $\mathbf{M}[T] = 6 - \frac{9}{e}$. **27.** *а*) 100 тыс. руб.; *б*) 30; *в*) 100 тыс. руб. **28.** $\mathbf{M}[X] = 2{,}106$, $\mathbf{D}[X] = 1{,}9588$. **29.** *а*) $\mathbf{M}[X] = 60$, $\mathbf{D}[X] = 42$; *б*) $C_{200}^{60}(0{,}3)^{60}(0{,}7)^{140} \approx 0{,}0615$. **30.** 1. **31.** 16, 3,2. **32.** Средний выигрыш — 79 рублей. **33.** $\mathbf{M}[X] = 2000$, $\sigma_X = 40$. **34.** $h = 1/4$,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, -1], \\ 3(x+1)/4, & x \in (-1, 0], \\ 3/4, & x \in (0, 1], \\ 1/2 + x/4, & x \in (1, 2], \\ 1, & x \in (2, \infty], \end{cases} \qquad \mathbf{M}[(2 - X)(X - 3)] = -\frac{41}{6},$$

$\mathbf{D}[2 - 3X] = \frac{15}{2}$. **35.** 0,1168. **36.** $\mathbf{M}[X] = 10$, $\mathbf{D}[X] = 100$, $\mathbf{M}[X^2] = 200$. **37.** 0,082. **38.** $a(1-p) + pb$. **39.** Будет. **40.** $F_X(f_Y(\mathbf{M}[X])) > F_Y(f_X(\mathbf{M}[Y]))$. **41.** $1 - e^{-1}$. **42.** $F_X(\mathbf{M}[X]) > f_X(\mathbf{M}[X])$, $F_X(-\mathbf{M}[X]) = f_X(-\mathbf{M}[X])$. **43.** 0. **44.** $\mathbf{P}\{X < \mathbf{M}[X]\} < \mathbf{P}\{X > \mathbf{D}[X]\}$. **45.** $\frac{1}{2}$. **46.** -16, $1 - e^{-1}$, 1. **47.** 2, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{3}{4}$. **48.** $\mathbf{P}\{|X| \leqslant 2\} > \mathbf{P}\{|Y| \leqslant 2\}$. **49.** 0,5, 153, 81. **50.** e^{-10}. **51.** 45,99. **52.** 2. **53.** 3. **54.** $-\frac{\ln(1-p)}{\lambda}$. **55.** *а*) $b = \frac{1}{\pi}$, $c = \frac{1}{2}$; *б*) $f(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$. **56.** 0,677. **57.** *а*) 20; *б*) 0,0975. **58.** *а*) 36; *б*) 0,973. **59.** *а*) 20; *б*) 0,401. **60.** X принимает значения 0, 1, 2 с вероятностями соответственно 1/45, 16/45, 28/45; $\mathbf{M}[X] = 1{,}6$. **61.** *а*) 5; *б*) ≈≈4,4758 · 10−3.

Глава № 3

1. Вообще говоря, нет. **2.** 0,84. **3.** $\mathbf{M}[X^3 - Y^2] = -2$. **4.** $\mathbf{M}[X+Y] = 1$; $(X+Y) \sim \mathbf{Bi}\left(3; \frac{1}{3}\right)$. **5.** *б*) $\mathbf{M}[X] = 0$, $\mathbf{M}[Y] = \frac{11}{6}$, $\mathbf{M}[X + Y] = \frac{11}{6}$, $\mathbf{D}[X+Y] \approx 0{,}8055$, равенства справедливы. **6.** 0. **7.** 0,669.

8. *а*) $a = \dfrac{1}{\pi^2}$; *б*) СВ X и Y независимы, а коэффициент корреляции между ними неопределен. **9.** СВ $X \sim \mathbf{E}(\lambda)$, $Y \sim \mathbf{E}(\mu)$, СВ X, и Y независимы, а, следовательно, и некоррелированны. **10.** Нет. **11.** Является. **12.** $k_{XX} = 1$. **13.** $k_{XY} = 0$. **14.** *а*) $r_{XY} = 1$; *б*) $r_{XY} = -1$. **15.** $k_{XY} = 0$. **16.** 3,35. **17.** Наиболее вероятным претендентом от первого блока является первый претендент, а от второго — второй претендент, $r_{XY} \approx 0{,}27$. **18.** Вероятность встретить дефект $B \approx 0{,}0118$. Коэффициент корреляции $\approx 0{,}066$. **19.** $U \sim \mathbf{Bi}(1; 0{,}67)$.
20. $f(x,y) = \begin{cases} \lambda\mu e^{-(\lambda x+\mu y)}, & x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0 \text{ —} & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$

значение искомой вероятности равно $(1 - e^{-\lambda})(1 - e^{-\mu})$.
21. 0,1077. **22.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **23.** *а*) $\dfrac{3}{28}$; *б*) $\dfrac{3}{14}$.
24. *а*) $f(x,y) = \begin{cases} (\ln 2)^2 2^{-(x+y)}, & x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0 \text{ —} & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$ *б*) 0,0208.

Глава № 4

1. $\dfrac{3}{4}$. **2.** Измененная верхняя граница: 70; оценка, полученная с помощью неравенства Чебышева: 0,88125; уточненая оценка: 0,99626. **3.** 325 562. **4.** Применим. **5.** (26 205, 33 795). **6.** $\dfrac{3}{8}$. **7.** $p \leqslant 0{,}245$. **8.** $p \geqslant 0{,}6094$. **9.** Применим. **10.** $p \leqslant \dfrac{1}{5}$. **11.** $x \leqslant 4{,}16$. **12.** Оценка, полученная с помощью неравенства Чебышева: $p \geqslant 0$; уточненая оценка: $p \geqslant 0{,}64762$. **13.** *а*) 0,0291; *б*) 0,9715. **14.** $\dfrac{1}{2}$. **15.** Не менее 24 438 денежных единиц. **16.** Согласно ЦПТ суммарная ошибка принадлежит интервалу $[-74{,}478 \cdot 10^{-m}; 74{,}478 \cdot 10^{-m}]$. С помощью неравенства Чебышева можно получить интервал $[-288{,}7 \cdot 10^{-m}; 288{,}7 \cdot 10^{-m}]$.

Глава № 5

2. $\widehat{\theta} = 0{,}93$. **3.** $\widehat{m}_X = 165{,}77$, $\widehat{d}_X = 34{,}24$. **4.** $[-17{,}22, -10{,}28]$. **5.** $[10{,}35, 54{,}79]$. **6.** H_0 принимается. **7.** H_0 принимается. **8.** H_0 принимается. **9.** Гипотеза о независимости принимается. **10.** H_0 принимается. **11.** Гипотеза отвергается. **12.** Гипотеза принимается. **13.** $\sum_{i=1}^{n} X_i^2/n$. **14.** $\sum_{i=1}^{n} X_i/10n$.

Глава № 6

1. 1068. **2.** 32617. **3.** $y = -48{,}59 + 1{,}94x$. **4.** $T = 61{,}84 - 0{,}67t + 0{,}04t^2$. **5.** Оценка, полученная с помощью неравенства Чебышева: $n \geqslant 7031$; уточненая оценка: $n \geqslant 1792$. **6.** $n = 551$.

ТАБЛИЦЫ

1. Функция Лапласа $\Phi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2}\, dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	,0039	,0079	,0119	,0159	,0199	,0239	,0279	,0318	,0358
0,1	,0398	,0438	,0477	,0517	,0556	,0596	,0635	,0674	,0714	,0753
0,2	,0792	,0831	,0870	,0909	,0948	,0987	,1025	,1064	,1102	,1140
0,3	,1179	,1217	,1255	,1293	,1330	,1368	,1405	,1443	,1480	,1517
0,4	,1554	,1591	,1627	,1664	,1700	,1736	,1772	,1808	,1843	,1879
0,5	,1914	,1949	,1984	,2019	,2054	,2088	,2122	,2156	,2190	,2224
0,6	,2257	,2290	,2323	,2356	,2389	,2421	,2453	,2485	,2517	,2549
0,7	,2580	,2611	,2642	,2673	,2703	,2733	,2763	,2793	,2823	,2852
0,8	,2881	,2910	,2938	,2967	,2995	,3023	,3051	,3078	,3105	,3132
0,9	,3159	,3185	,3212	,3228	,3263	,3289	,3314	,3339	,3364	,3389
1,0	,3413	,3437	,3461	,3485	,3508	,3531	,3554	,3576	,3599	,3621
1,1	,3643	,3665	,3686	,3707	,3728	,3749	,3769	,3790	,3810	,3829
1,2	,3849	,3868	,3887	,3906	,3925	,3943	,3961	,3979	,3997	,4014
1,3	,4032	,4049	,4065	,4082	,4098	,4114	,4130	,4146	,4162	,4177
1,4	,4192	,4207	,4222	,4236	,4250	,4264	,4278	,4292	,4305	,4318
1,5	,4331	,4344	,4357	,4369	,4382	,4394	,4406	,4417	,4429	,4440
1,6	,4452	,4463	,4473	,4484	,4495	,4505	,4515	,4525	,4535	,4544
1,7	,4554	,4563	,4572	,4581	,4590	,4599	,4608	,4616	,4624	,4632
1,8	,4640	,4648	,4656	,4663	,4671	,4678	,4685	,4692	,4699	,4706
1,9	,4712	,4719	,4725	,4732	,4738	,4744	,4750	,4755	,4761	,4767
2,0	,4772	,4777	,4783	,4788	,4793	,4798	,4803	,4807	,4812	,4816
2,1	,4821	,4825	,4830	,4834	,4838	,4842	,4846	,4850	,4853	,4857
2,2	,4861	,4864	,4867	,4871	,4874	,4877	,4880	,4884	,4887	,4889
2,3	,4892	,4895	,4898	,4901	,4903	,4906	,4908	,4911	,4913	,4915
2,4	,4918	,4920	,4922	,4924	,4926	,4928	,4930	,4932	,4934	,4936
2,5	,4937	,4939	,4941	,4943	,4944	,4946	,4947	,4949	,4950	,4952
2,6	,4953	,4954	,4956	,4957	,4958	,4959	,4960	,4962	,4963	,4964
2,7	,4965	,4966	,4967	,4968	,4969	,4970	,4971	,4972	,4972	,4973
2,8	,4974	,4975	,4976	,4976	,4977	,4978	,4978	,4979	,4980	,4980
2,9	,4981	,4981	,4982	,4983	,4983	,4984	,4984	,4985	,4985	,4986
3,0	,49865									
3,5	,499767									
4,0	,4999683									
4,5	,4999966									
5,0	,49999971									

2. Квантили $x_\alpha(n)$ уровня α распределения $\chi^2(n)$:

$$\mathbf{P}\{X \leqslant x_\alpha(n)\} = \alpha$$

$n \setminus \alpha$	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	0,8	0,9	0,95
1	0,00	0,02	0,06	0,15	0,46	1,07	1,64	2,71	3,84
2	0,10	0,21	0,45	0,71	1,39	2,41	3,22	4,60	5,99
3	0,35	0,58	1,01	1,42	2,37	3,66	4,64	6,25	7,82
4	0,71	1,06	1,65	2,20	3,36	4,88	5,99	7,78	9,49
5	1,15	1,61	2,34	3,00	4,35	6,06	7,29	9,24	11,07
6	1,65	2,20	3,07	3,83	5,35	7,23	8,56	10,64	12,59
7	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,38	9,80	12,02	14,07
8	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,52	11,03	13,36	15,51
9	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,66	12,24	14,68	16,92
10	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,78	13,44	15,99	18,31
11	4,58	5,58	6,99	8,15	10,34	12,90	14,63	17,28	19,68
12	5,23	6,30	7,81	9,03	11,34	14,01	15,81	18,55	21,03
13	5,89	7,04	8,63	9,93	12,34	15,12	16,98	19,81	22,36
14	6,57	7,79	9,47	10,82	13,34	16,22	18,15	21,06	23,69
15	7,26	8,55	10,31	11,72	14,34	17,32	19,31	22,31	25,00
16	7,96	9,31	11,15	12,62	15,34	18,42	20,47	23,54	26,29
17	8,67	10,08	12,00	13,53	16,34	19,51	21,62	24,78	27,60
18	9,39	10,86	12,86	14,44	17,34	20,60	22,76	25,59	28,87
19	10,11	11,65	13,72	15,35	18,34	21,70	23,90	27,20	30,14
20	10,85	12,44	14,58	16,27	19,34	22,80	25,04	28,41	31,41
21	11,59	13,24	15,44	17,18	20,30	23,90	26,17	29,61	32,67
22	12,34	14,04	16,31	18,10	21,30	24,90	27,30	30,81	33,92
23	13,09	14,85	17,19	19,02	22,30	26,00	28,43	32,01	35,17
24	13,85	15,66	18,06	19,94	23,30	27,10	29,55	33,20	36,42
25	14,61	16,47	18,94	20,90	24,30	28,20	30,78	34,38	37,65
26	15,38	17,29	19,82	21,80	25,30	29,20	31,80	35,56	38,89
27	16,15	18,11	20,70	22,70	26,30	30,30	32,91	36,74	40,11
28	16,93	18,94	21,60	23,60	27,30	31,40	34,03	37,92	41,34
29	17,71	19,77	22,50	24,60	28,30	32,50	35,14	39,09	42,56
30	18,49	20,60	23,40	25,50	29,30	33,50	36,25	40,26	43,77

3. Квантили $t_{\frac{\alpha+1}{2}}(n)$ уровня $\dfrac{\alpha+1}{2}$ распределения $\mathbf{S}(n)$:

$$\mathbf{P}\left\{T \leqslant t_{\frac{\alpha+1}{2}}(n)\right\} = \frac{\alpha+1}{2}$$

$n \setminus \alpha$	0,2	0,6	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	0,325	1,376	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,289	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,277	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941
4	0,271	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,267	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,859
6	0,265	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,263	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	0,262	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,261	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,260	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,260	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,259	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,259	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,258	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,258	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,258	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,257	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,257	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,257	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,257	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,257	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,256	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,256	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,256	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,256	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,256	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,256	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,256	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,256	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,256	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,255	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,254	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,254	0,845	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,253	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. — М.: Наука, 1969.

2. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Прикладные задачи теории вероятностей. — М.: Радио и Связь, 1983.

3. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Высшая школа, 1998.

4. *Мешалкин Л.Д.* Сборник задач по теории вероятностей. — М.: Изд-во МГУ, 1963.

5. *Горяинова Е.Р., Наумов А.В., Сиротин А.Н.* Решение задач по теории вероятностей. — М.: МАИ, 2001.

6. *Емельянов Г.В., Скитович В.П.* Задачник по теории вероятностей и математической статистике. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1967.

7. *Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П.* Сборник задач по теории вероятностей. — М.: Наука, 1989.

8. *Ивченко Г.И., Медведев Ю.И.* Математическая статистика. — М.: Высшая школа, 1984.

9. *Кан Ю.С.* Методические указания к практическим занятиям по теории вероятностей на базе компьютерного курса. — М.: Изд-во МАИ, 1996.

10. *Кибзун А.И.* Курс лекций по теории вероятностей и математической статистике. — М.: МАИ, 1999.

11. *Кибзун А.И., Горяинова Е.Р., Наумов А.В., Сиротин А.Н.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 2002.

12. *Королюк В.С. и др.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Наука, 1985.

13. *Крамер Г.* Математические методы статистики. — М.: Мир, 1975.

14. *Лавренченко А.С.* Лекции по математической статистике и теории случайных процессов. — М.: МАИ, 1974.

15. *Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г.* Задачи по теории вероятностей. — М.: Наука, 1986.

16. *Пугачев В.С.* Введение в теорию вероятностей. — М.: Наука, 1968.

17. *Пугачев В.С.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: Наука, 1979.

18. *Секей Г.* Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. — М.: Мир, 1990.

19. *Чистяков В.П.* Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1987.

20. *Ширяев А.Н.* Вероятность. — М.: Наука, 1980.

21. Теория вероятностей. Под. ред. *В.С.Зарубина, А.П.Крищенко.* — М.: Изд-во МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1999.

22. *Hiller F.S., Lieberman G.J.* Introduction to Stochastic Models in Operations Research. McGraw-Hill, N.Y., 1990.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Учебное издание

КИБЗУН Андрей Иванович
ГОРЯИНОВА Елена Рудольфовна
НАУМОВ Андрей Викторович

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА. БАЗОВЫЙ КУРС С ПРИМЕРАМИ И ЗАДАЧАМИ

Редактор *Бартошевич-Жагель Н.Б.*
Оригинал-макет: *Ефремов В.А., Наумов А.В.*
Оформление переплета: *Логунов А.А.*

Подписано в печать 15.04.07. Формат 60x90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 14,5. Уч.-изд. л. 15,95. Тираж 3000 экз.
Заказ № 694

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ООО «Чебоксарская типография № 1»
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15

ISBN 978-5-9221-0836-2

9 785922 108362