$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$
$y' = z(y)$

Пр.

$yy'' = 2y'^3 - 4y^2y'^3$
$yzz' = 2z^2 - 4y^2z^3$
$z = 0 \Rightarrow \begin{matrix} y' = 0 \\ y = C \end{matrix}$ — реш
$yz' = 2z - 4y^2z^2 \quad |:z^2$
$\frac{y}{z^2}z' = \frac{2}{z} - 4y^2$
$\frac{1}{z} = u \quad u' = -\frac{1}{z^2}z'$
$-u'y = 2u - 4y^2$
$u = u(y)$

$2u + u'y = 4y^2$
ОУ: $2u + u'y = 0$
$2u = -\frac{du}{dy}y$
$\frac{du}{u} = -2\frac{dy}{y}$
$\ln|u| = -2\ln|y| + C$
$u = \frac{C}{y^2}$

ВП: $u = \frac{C(y)}{y^2}$
$-y\left(\frac{C'(y)y^2 - 2yC(y)}{y^4}\right) = 2\frac{C(y)}{y^2} - 4y^2 \quad -\frac{C'(y)}{y} = -4y^2$
$C'(y) = 4y^3 \Rightarrow C(y) = y^4 + C$
$u(y) = \frac{y^4 + C}{y^2} = \frac{1}{z(y)} \quad z(y) = \frac{y^2}{y^4 + C}$
$\Rightarrow y' = \frac{y^2}{y^4 + C} \quad \left(y^2 + \frac{C}{y^2}\right)dy = dx \quad \frac{y^3}{3} - \frac{C}{y} = x + C_1$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} y^3/3 + C/y = x + C_1 \\ y = C \end{array}\right.$

Задача Коши для ур-ия n-го порядка
$F(x, y, y', \dots y^{(n)}) = 0$; $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

1 способ: Найти общее решение с $C_1, \dots C_n$, получить систему n ур-ий, n неизв.

2 способ: Находить постоянные последовательно после каждого понижения порядка

Пр. $yy'' - y'^2 = y^4 \quad y(1) = 2 \quad y'(1) = -4$
$y' = z(y) \quad y'' = z \cdot z'_y$ $\qquad$ $y = 0$ — реш., но не реш. з. Коши
$y(zz') - z^2 = y^4$
Пусть $u = z^2 \quad u' = 2zz'$
$y\frac{u'}{2} - u = y^4 \quad y\frac{du}{dy} = 2u \quad \frac{du}{u} = 2\frac{dy}{y} \Rightarrow u = y^2C$
ВП: $u = y^2C(y) \quad u' = 2yC + y^2C'$
$\frac{y(2y \cdot C(y) + y^2 \cdot C'(y))}{2} - y^2 \cdot C(y) = y^4$
$\frac{y^3}{2}C'(y) = y^4$
$C'(y) = 2y$
$C(y) = y^2 + C \Rightarrow u = y^4 + Cy^2$
$z^2 = y^4 + Cy^2$

$z(2) = -4$
$16 = 16 + 4C \Rightarrow C = 0$
$z^2 = y^4$
$y' = \pm y^2$
$y' < 0$ в окр. $x = 1 \Rightarrow y' = -y^2$
$\frac{dy}{y^2} = -dx \quad \frac{1}{y} = x + C_1 \quad \frac{1}{y} = x - \frac{1}{2}$
$\Rightarrow$ Ответ: $\frac{1}{y} = x - \frac{1}{2}$

III Ур-ие однородное отн. $y, y', \dots y^{(n)}$

метод понижения порядка

$$F(x, y, y', \dots y^{(n)}) = 0$$

однородн. многочлен с коэфф., завис. от x

Например, $(\sin x + 1) y^2 y' y''^3 - \sqrt{1-x^2}\, y^4 y''^2 + \cos x \cdot y y' y'' y'''^2 = 0$

Как решить?

y – реш.

$z = \frac{y'}{y}$ $\quad y' = yz \quad y'' = y \cdot z' + y'z = yz' + yz^2 = y(z^2 + z')$

$y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z'')$

Пр. $yy'' - y'^2 + y^2 \sin x = 0$

$y = 0$ – реш.

$z = \frac{y'}{y} \quad y' = yz \quad y'' = y(z^2 + z')$

$y^2(z^2 + z') - z^2 y^2 + y^2 \sin x = 0$

$z^2 + z' - z^2 + \sin x = 0$

$\frac{dz}{dx} = -\sin x \Rightarrow z = \cos x + C = \frac{y'}{y}$

$\ln y = \sin x + Cx + C_1 \quad y = G e^{\sin x + Cx} \quad G, C \in \mathbb{R}$

$y = 0 \Rightarrow G = 0$

Пр. $2x^2 y^2 y'' - 2xyy'^2 + 2xy'^3 = y'y^2 \qquad y(1) = y'(1) = -1$

$y = 0$ – реш., но не задачи Коши

$y' = yz, \quad y'' = y(z^2 + z')$

$2x^2 y^3 (z^2 + z') - 2xy^3 z^2 + 2xy^3 z^3 = y^3 z$

$2xz^2 + 2xz' - 2xz^2 + 2xz^3 = z$

$2xz' + 2xz^3 = z \qquad z = 0$ не реш. з. Коши

$z(1) = 1$

$2x \frac{z'}{z^3} + 2x = \frac{1}{z^2}$

$u = \frac{1}{z^2} \quad u' = -2\frac{z'}{z^3}$

$-xu' + 2x = u, \quad u = u(x)$

$(u + xu') = 2x$

$(xu)' = 2x$

$xu = x^2 + C \Rightarrow C = 0$

$u = x$

$z^2 = 1/x$

$z = 1/\sqrt{x}$

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \ln|y| = 2\sqrt{x} + C$

$0 = 2 + C$

$C = -2$

$y = -e^{2\sqrt{x} - 2}$

$y(1) = -1 \quad y < 0$

$\Rightarrow$ Ответ: $y = -e^{2\sqrt{x} - 2}$

Обобщенная однородность

Пусть $\exists k \in \mathbb{R}$ такое, что $x \to \lambda x \quad y \to \lambda^k y \quad y' = \lambda^{k-1} y' \dots y^{(n)} = \lambda^{k-n} y^{(n)}$ ур-ие не изменяется. (т.е. λ сокращается)

В таком случае:

нов. перем. t $\qquad x = e^t, \; x > 0$; $\; -e^t, \; x < 0$

новая ф-ция $z(t)$ $\qquad y = z e^{kt}$

После замены ур-е не содержит явно перем. t

Пр. №7.65 а,б

$$x^2y'' + 2x^2yy' + 2xy^2 - 2y = 0 \qquad y(1) = -1, \quad y'(1) = 1$$

$x \to \lambda x$

$y \to \lambda^k x \quad y' \to \lambda^{k-1} y' \quad y'' \to \lambda^{k-2} y''$

$$\lambda^2 x^2 \cdot \lambda^{k-2} \cdot y'' + 2\lambda^2 x^2 \lambda^k y \lambda^{k-1} y' + 2\lambda x \lambda^{2k} y^2 - 2\lambda^k y = 0$$

$2+k-2 = 2+k+k-1 = 1+2k = k$

$k = 1+2k = 1+2k = k \quad \Rightarrow \quad k=-1$

$x = e^t \quad y = ze^{-t}$

y, y'_x, y''_{xx} выразим через z, z'_t, z''_{tt}

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{z'_t e^{-t} + e^{-t}(-1)z}{e^t} = e^{-2t}(z'_t - z)$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = e^{-3t}(-2z'_t + 2z + z''_{tt} - z'_t) = e^{-3t}(z''_{tt} - 3z'_t + 2z)$$

$$e^{2t} \cdot e^{-3t}(z''_{tt} - 3z'_t + 2z) + 2e^{2t} z e^{-t} \cdot e^{-2t}(z'_t - z) + 2e^t z^2 e^{-2t} - 2ze^{-t} = 0$$

$z'' - 3z' + 2zz' = 0 \qquad x=1 \quad y=-1 \quad y'=1$

$\Rightarrow \quad z'' + z'(2z-3) = 0 \qquad t=0 \quad z=-1 \quad \Rightarrow \quad z(0)=-1$

$z = z(t)$

$\underset{1}{y'_x} = \underset{1}{e^{-2t}}(z'_t - \underbrace{z}_{-1}) \quad \Rightarrow \quad z'(0)=0$

$z=-1$ — решение з.к.

других реш. нет по теореме о сущ. и единств.

т.к. $z'' = -z'(2z-3)$ непр. дифф.

$z(0)=-1$ $z'(0)=0$ сущ. и ед. на $[-\delta,\delta]$

$\Rightarrow$ Ответ: $z=-1$

Теорема сущ. и единств. задачи Коши.

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots y^{(n-1)}) \quad (*)$$

f непр. дифф. в окр. $(x_0, y_0, \dots y_{n-1})$

Тогда реш. задачи Коши * + нач. усл-ие $y(x_0)=y_0, \dots y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ существует и единств. на некотором $[x_0-\delta, x_0+\delta]$