Дифуры 11.10 ~~матан~~

Контрпример: дискр. кривая реш., но не особое:

$y'^2 = y^2$ $y=0$ — реш., но не особ.

Контрпример: дискр. кривая не явл. реш.

$(1+y')^2 = y'(y-x)^2$

р.кр. $\begin{cases} (1+p)^2 = p(y-x)^2 \\ 2(1+p) = (y-x)^2 \end{cases} \Rightarrow p = \pm 1$ $p=-1$ $y=x$ — не явл. реш.

$p=1$ $y-x=\pm 2$ — реш.

Кр:

1. ур-ие 1 ~~порядка~~ порядка
2. высшего порядка
3. задача Коши 1 порядка } инд. задачи
4. ~~...~~ особые реш. дискр. кривые

Теорема сущ. и ед. реш. з. Коши для ур-ия n-го порядка

$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots y^{(n-1)})$

$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

Если f непр. дифф. в обл. $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$(x_0, y_0, \dots y_{n-1}) \in G$

то $\exists \delta > 0$ реш. з. Коши сущ. и ед. на $[x_0-\delta, x_0+\delta]$

Пр. Могут ли графики двух реш. ур-ия — " — касаться друг друга в т. (x_0, y_0)

а) $y' = x + y^2$ y_0 x_0 Ответ: нет. по т. о сущ. и ед. $\exists$ реш. уд. $y(x_0) = y_0$

б) $y'' = x + y^2$ Ответ: нет $\exists$ реш. уд. з. Коши $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$

в) $y''' = x + y^2$ Ответ: да. могут быть разные значения $y''(x_0)$

$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, $y''(x_0) = y_2$

Ф-231

Сколько сущ. реш. ур-ия $y^{(n)} = x + y^2$, уд. усл.: $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$

$n = 1, 2, 3$

$n=1$

$y' = x + y^2$

$y(0) = 1$ $y'(0) = 2$

$2 = 0 + 1^2$

$\Rightarrow$ ~~..~~ реш. нет

$n=2$

$y'' = x + y^2$

1 реш.

т.к. з. Коши, поставлена единожды

$n=3$

$y''' = x + y^2$ $y(0) = 1$ $y'(0) = 2$

Беск. много

y'' может быть любой

Ф-233 При каких n ур-ие $y^{(n)} = f(x,y)$, (f, f'_y непр.) может иметь среди своих реш. $y_1 = x$; $y_2 = x + x^2$

З. Коши: $y^{(n)} = f(x,y)$ $y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

$y_1(0) = 0$ $y_2(0) = 0$

$y_1'(0) = 1$ $y_2'(0) = 1$

$y_1''(0) = 0$ $y_2''(0) = 0$

$y_1'''(0) = 0$ $y_2'''(0) = 0$

$y_1^{(4)}(0) = 0 \neq y_2^{(4)}(0) = 0$

$1 \le n \le 4$ — 2 разных реш. З. Коши совпадают — невозможно

$\Rightarrow$ Ответ: $n = 5$ — обе ф-ции явл. реш. ур-ия $y^{(5)} = 0$

II задание.

Линейные ур-ия с постоянными коэффициентами

Лин. однородные ур-ия n-го порядка с пост. коэф.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n = 0$$

$a_i \in \mathbb{R}$

Характеристическое ур-ие

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

Мн-во реш. этого ур-ия — лин. пр-во разм. n

$y_1(x), \dots, y_n(x)$ — базис в нем (ФСР)

ОРОУ $y = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x)$

Как искать ФСР?

1) Все λ_i действ. и различны

ФСР: $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$

Пр. $y'' - 6y' + 8y = 0$

$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$

$\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = 4$

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$ — Ответ

Пр. $y''' - y'' - y' + y = 0$

$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$

$(\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0$

$\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 1$ кр. 2

$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 x e^{x}$

— // —

лист 2

2) λ - действ. корень хар. ур. кратности k
в ФСР $k_1+k_2+\ldots+k_m=n$ реш.
$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots x^{k-1}e^{\lambda x}$

Пр. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$
$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$
$(\lambda-2)^3 = 0$
$\lambda = 2$ — кр. 3
Отв: $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3x^2e^{2x}$

3) Сущ. комплексных корней $\lambda = \alpha + \beta i$ $\beta \neq 0$
$\bar\lambda = \alpha - \beta i$ — тоже корень

$y_1 = e^{\lambda x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$
$y_2 = e^{\bar\lambda x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x)$

$$\underbrace{\frac{y_1+y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad \frac{y_1-y_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x}_{\text{действ. ФСР}}$$

Пр. $y'' + \omega^2 y = 0$ $\omega > 0$
$\lambda^2 + \omega^2 = 0$ $\lambda = \pm\omega i$ $\alpha = 0$ $\beta = \omega$
ФСР $e^{i\omega x}, e^{-i\omega x}$
В действ. виде $\cos\omega x, \sin\omega x$
$y = C_1\cdot\cos\omega x + C_2\cdot\sin\omega x$ — Отв.

Кратные компл. корни.
$\lambda = \alpha + \beta i$, $\beta \neq 0$ — корень кр. k
~~ФСР содержит~~ дают в ФСР $2k$ реш.
$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$
$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Пр. $y^{(4)} + 18y'' + 81y = 0$
$\lambda^4 + 18\lambda^2 + 81 = 0$
$(\lambda^2+9)^2 = 0$ $\lambda^2 = -9$ $\lambda = \pm 3i$
оба кр. 2 $\alpha = 0$ $\beta = 3$
Отв: $y = C_1\cos3x + C_2\sin3x + C_3x\cos3x + C_4x\sin3x$

Пр. $y'' + 6y' + 10y = 0$
$\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$
$(\lambda+3)^2 = -1$
$\lambda = -3 \pm i$ $y = C_1e^{-3x}\cos x + C_2e^{-3x}\sin x$

Линейные неоднородные ДУ с пост. коэфф.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x)$$

ОРНУ = ОРОУ + ЧРНУ

Пусть $f(x) = P_m(x) e^{\mu x}$ — квазимногочлен, $P_m(x)$ — многочлен степ. m

Как искать ЧРНУ?

I случай: μ не явл. корнем хар. ур.

ЧРНУ ищем в виде $Q_m(x) e^{\mu x}$ с неопр. коэфф.

Пр. $y'' - 4y' + 4y = 32x e^{-2x}$ $P(x) = 32x e^{-2x}$ $m = 1$, $\mu = -2$

$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ $(\lambda - 2)^2 = 0$ $\lambda = 2$ кр. 2

ОРОУ: $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$

ЧРНУ: $(Ax + B) e^{-2x} = y$

$y' = A e^{-2x} - 2e^{-2x}(Ax + B) = e^{-2x}(-2Ax + A - 2B)$

$y'' = -2e^{-2x}(-2Ax + A - 2B) - 2A e^{-2x} = e^{-2x}(4Ax - 4A + 4B)$

$y'' = 4Ax - 4A + 4B$
$y' = 8Ax - 4A + 8B$
$y = 4Ax + 4B = 32x$

$16A = 32 \Rightarrow A = 2$
$-16 + 16B = 0 \Rightarrow B = 1$

$y_ч = (2x + 1) e^{-2x}$

ОРНУ

Ответ: $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + (2x + 1) e^{-2x}$

Компл. корни

$P_m(x) e^{\alpha x} \cos \beta x$
или $P_m(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$ (обе степени $\le m$)
или лин. комб. их

и $\mu = \alpha + \beta i$ не явл. реш. хар. ур-ия

Тогда $y = Q_m^{(1)}(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_m^{(2)}(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$

$Q^{(1)}, Q^{(2)}$ степени $\le m$

Пр. $y'' - y' - 2y = (2x + 1) \cos 3x$ $m = 1$, $\mu = 3i$ — не является корнем хар. ур-ия

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$
$(\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$
$\lambda_1 = -1$ $\lambda_2 = 2$ $\rightarrow$ ОРОУ $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$

ЧРНУ: $y = (Ax + B) \cos 3x + (Cx + D) \sin 3x$

~~$y' = A \cos 3x - (Ax + B)$~~