Кватернионы

$$\Lambda = \lambda_0 + \bar\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \bar\lambda \end{bmatrix}$$

$\|\Lambda\| = 1 \Rightarrow \Lambda = \cos\frac{\varphi}{2} + \bar e \sin\frac{\varphi}{2}$; $|\bar e| = 1$

$\Lambda = r_0 + \bar r$

$\tilde\Lambda = r_0 - \bar r$

Если Λ нормиров.:

$R' = Ad R = \Lambda \circ R \circ \tilde\Lambda$ – присоед. отобр.

Свойства $Ad R$. $\exists R = \bar r_0 + \bar r$

1. $r_0' = r_0$
2. $\bar r' = A\bar r$, $A \in O(3)$ – орт. группа

$$R' = r_0' + \bar r' = \Lambda \circ (r_0 + \bar r)\tilde\Lambda = r_0 + \underbrace{\Lambda \circ \bar r \circ \tilde\Lambda}_{\text{линейно}}$$

$$\widetilde{\Lambda \circ \bar r \circ \tilde\Lambda} = \Lambda \circ \tilde{\bar r} \circ \tilde\Lambda = -\Lambda \circ \bar r \circ \tilde\Lambda$$

$\Rightarrow \operatorname{vect} \Lambda \circ \bar r \circ \tilde\Lambda = \bar 0 \Rightarrow r_0' = r_0$

$\Lambda \circ \bar r \circ \tilde\Lambda = A\bar r = \bar r' \Rightarrow \|\bar r'\| = \|\Lambda \circ \bar r \circ \tilde\Lambda\| = \|\Lambda\| \cdot \|\bar r\| \cdot \|\tilde\Lambda\| = \|\bar r\|$

$\|\bar r'\| = \|\bar r\| \Rightarrow A \in O(3)$

Замечание. $\exists \Lambda(t) \in \mathbb{H}$, $\|\Lambda\| = 1$

$\Lambda(0) = 1$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Lambda \circ \tilde\Lambda = 1 \Rightarrow \dot\Lambda(0) + \dot{\tilde\Lambda}(0) = 0 \Rightarrow \dot\Lambda(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar x \end{pmatrix} \quad \bar r \in \mathbb{R}$$

Кв-ни вида $\begin{bmatrix} 0 \\ \bar r \end{bmatrix}$ в истинно отожд. с векторами.

здесь $\begin{bmatrix} 0 & \bar x \end{bmatrix}$

<u>Теорема.</u> Преобр-ие $\bar r' = \Lambda \circ \bar r_0 \circ \tilde\Lambda$, где $\Lambda = \cos\varphi/2 + \bar e \sin\varphi/2$ задает эйлеров поворот вокруг $\bar e$ на угол φ (только для норм. кв-ов, $|\bar e| = 1$)

$\triangleright$ $\Lambda \circ \bar r - \bar r \circ \Lambda$

$\Lambda \circ M = \lambda_0\mu_0 - \bar\lambda \cdot \bar\mu + \lambda_0\bar\mu + \mu_0\bar\lambda + \bar\lambda \times \bar\mu$ — ф-ла

$\Lambda \circ \bar r = \bar r \circ \Lambda + 2\bar\lambda \times \bar r \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar r' = \bar r + 2(\bar\lambda \times \bar r) \circ \tilde\Lambda = \bar r + 2\lambda_0 \bar\lambda \times \bar r + 2\bar\lambda \times (\bar\lambda \times \bar r) = (E + 2\lambda_0\hat\lambda + 2\hat\lambda^2)\bar r \Rightarrow$

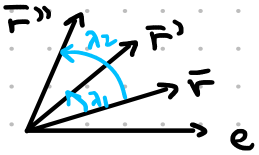
$\Rightarrow A = E + 2\lambda_0\hat\lambda + 2\hat\lambda^2$ — связь орт. матрицы с норм. кват-на

$$A = E + \underbrace{2\cos\varphi/2 \sin\varphi/2\, \hat e}_{\sin\varphi} + \underbrace{2\sin^2\varphi/2\, \hat e^2}_{1-\cos\varphi}$$

– выр. $A \in SO(3)$ через парам. эйл. пов. $\triangleleft$

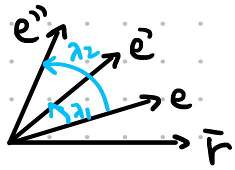
Сложение поворотов в кватернионах

1. Акт. т. зр.



$$r' = \Lambda_1 \circ r \circ \tilde{\Lambda}_1 \;; \quad r'' = \Lambda_2 \circ r' \circ \tilde{\Lambda}_2 =$$
$$= \Lambda_2 \circ \Lambda_1 \circ r \circ \widetilde{\Lambda_2 \circ \Lambda_1}$$
$$\Lambda = \Lambda_2 \circ \Lambda_1 \Rightarrow \quad \Lambda = \Lambda_n \circ \ldots \circ \Lambda_1$$

2. Пасс. т. зр.



$$\bar{e}'_k = \Lambda_1 \circ \bar{e}_k \circ \tilde{\Lambda}_1$$
$$\bar{r} = r'_k \bar{e}'_k = \Lambda_1 \circ \underbrace{r'_k \bar{e}_k}_{\begin{bmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \end{bmatrix}} \circ \tilde{\Lambda}_1$$

В базисе e: $r = \bar{r}_e$

$$\Rightarrow \bar{r}_e = \Lambda_1 \circ \bar{r}_{e'} \circ \tilde{\Lambda}_1$$
$$\Rightarrow \bar{r}_{e'} = \tilde{\Lambda}_1 \circ \bar{r}_e \circ \Lambda_1$$

$*$ – р/ш в данном базисе

$\Lambda_1^* \circ \ldots \circ \Lambda_n^*$

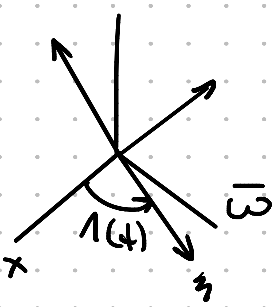
$$\bar{r}_{e''} = \tilde{\Lambda}_2 \circ \bar{r}_{e'} \circ \Lambda_2 = \widetilde{\Lambda_1 \circ \Lambda_2} \circ \bar{r}_e \circ \underbrace{\Lambda_1 \circ \Lambda_2}_{\Lambda}$$

$$\Lambda = \Lambda_1 \circ \ldots \circ \Lambda_n$$

Замечание: коорд. кв-ни Λ одинаковы в базисах e и e_n, т.к. $\Lambda = \cos \varphi/2 + \bar{e} \sin \varphi/2$, φ – скаляр, коорд. $\bar{e}$ одинаковы в данных базисах

Коорд. кват-а в собств. базисе наз. параметрами Родрига–Гамильтона

Уравнения Пуассона в кватернионах



$$\Lambda(t+\Delta t) = \begin{cases} \Lambda_x(\Delta t) \circ \Lambda(t) \\ \Lambda(t) \circ \Lambda_z(\Delta t) \end{cases} \Rightarrow$$

Кват. малого поворота

$$\Lambda_*(\Delta t) = \cos \Delta\varphi/2 + \bar{e}_* \sin \Delta\varphi/2 \approx 1 + \bar{e}_* \frac{\Delta\varphi}{2}$$

$* \in \{x, z\}$

кв. м. пов.

$$\Rightarrow \quad \dot{\Lambda} = \begin{cases} 1/2\, \bar{\omega}_x \circ \Lambda \\ 1/2\, \Lambda \circ \bar{\omega}_z \end{cases}$$

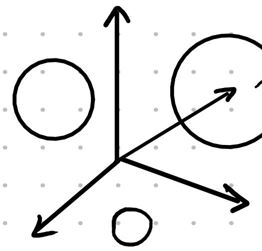
Ур-ие Пуассона в кват. форме.

Ур-ия Пуассона имеют размерность 4;
линейны,
вырожденные нет,
общего аналит. реш. нет.

Они позволяют
а) найти $\Lambda(t)$, если изв. $\Lambda(0)$ и $\omega_*(t)$, $* \in \{x, z\}$
б) найти $\bar{\omega}_*$, если задан $\Lambda(t)$: $\bar{\omega}_x = 2\dot{\Lambda} \circ \tilde{\Lambda}$; $\bar{\omega}_z = 2\tilde{\Lambda} \circ \dot{\Lambda}$

Замечание: Норм. кв-ни не находятся во взаимно-однозн. соотв. с полож. тв. тела, т.к. Λ и $(-\Lambda)$ задают один и тот же поворот.

Основные положения и законы динамики



$m = const$

$$I=\int f(\bar r,\dot{\bar r},t)\,dm = \lim_{\substack{\Delta m_i\to 0\\ \Delta m_i = const}}\sum f(\bar r_i,\dot{\bar r}_i,t)\,\Delta m_i$$

интеграл по массе

$m=\int dm$ – масса

$\bar r_c = \frac{1}{m}\int \bar r\, dm$ – центр масс

$\bar p = \int \bar v\, dm$ – импульс

$$\dot I = \int \dot f\, dm \Rightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{\int \bar r\, dm}_{m\bar v_c} \Rightarrow \bar p = m\bar v_c$$

Семинар

$R' = \Lambda\circ R\circ\tilde\Lambda$

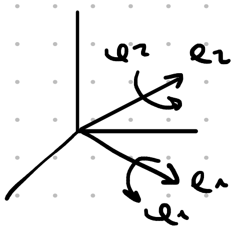
$\|\Lambda\| = 1 \qquad \Lambda = \cos\varphi/2 + \bar e\sin\varphi/2$

$|\bar e| = 1$

$R = \begin{bmatrix} 0\\ \bar r\end{bmatrix} \approx \bar r \Rightarrow \bar r' = \Lambda\circ\bar r\circ\tilde\Lambda$ – поворот отн. $\bar e$ на φ

Акт. поворот: $\bar r'' = \Lambda_2\circ\Lambda_1\circ\bar r\circ\widetilde{\Lambda_2\circ\Lambda_1} = \Lambda\circ\bar r\circ\tilde\Lambda$

Пасс. поворот: $\bar r = \widetilde{\Lambda_1\circ\Lambda_2}\circ r_e\circ\Lambda_1\circ\Lambda_2 = \tilde\Lambda\circ r_e\circ\Lambda$

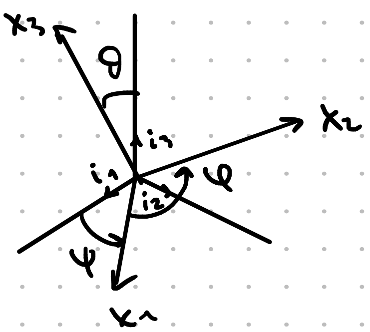


$\Lambda_1 = \cos\varphi_1/2 + \bar e_1\sin\varphi_1/2$

$\Lambda_2 = \cos\varphi_2/2 + \bar e_2\sin\varphi_2/2$

$$\Lambda = \Lambda_2\circ\Lambda_1 = \underbrace{\cos\varphi_1/2\cos\varphi_2/2 - \bar e_1\cdot\bar e_2\sin\varphi_1/2\sin\varphi_2/2}_{\cos\varphi/2} + \underbrace{\sin\varphi_1/2\cos\varphi_2/2\,\bar e_1 + \sin\varphi_2/2\cos\varphi_1/2\,\bar e_2 + \underbrace{\bar e_2\times\bar e_1\sin\varphi_1/2\sin\varphi_2/2}_{\text{некоммутат. член}}}_{\bar e\sin\varphi/2}$$

Выражение кв. поворота через углы Эйлера.



пасс. т.зр.

$\Lambda_\psi = \cos\psi/2 + \bar i_3\sin\psi/2$

$\Lambda_\theta = \cos\theta/2 + \bar i_1\sin\theta/2$

$\Lambda_\varphi = \cos\varphi/2 + \bar i_3\sin\varphi/2$

$\Lambda = \Lambda_\psi\circ\Lambda_\theta\circ\Lambda_\varphi$

Ур-ие Пуассона

$\dot\Lambda = \frac{1}{2}\omega_x\circ\Lambda$

$\dot\Lambda = \frac{1}{2}\Lambda\circ\omega_\xi$

Динамика

$I = \int f(\bar r, \dot{\bar r}, t)\, dm$

$m = \int dm$

$\bar r_c = \frac{1}{m}\int \bar r\, dm$

$P = \int \bar v\, dm = m\bar V_c$

кинет. моменты или моменты импульса

$\bar K_o = \int (\bar r - \bar r_o) \times \bar v\, dm$ — момент импульса

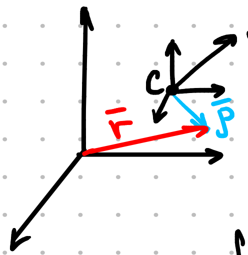
$\bar K_{o'} = \int (\bar r - \bar r_{o'}) \times \bar v\, dm = \int (\bar r - \bar r_o + \bar r_o - \bar r_{o'}) \times \bar v\, dm =$

$= \bar K_o + \overline{O'O} \times \bar P$

ф-ла переноса полюса

похоже на: $\bar V_{o'} = \bar V_o + \bar\omega \times \overline{OO'}$ для тв. тела

$T = \frac{1}{2}\int V^2 dm$ — кин. энергия



$\bar V_c,\ \bar\omega = 0$ — Кёнигова СО.

$\bar V = \bar V_c + \bar V_r$

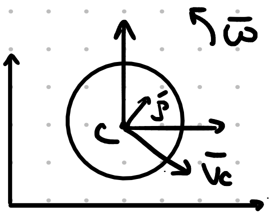
$T = \frac{1}{2}\int (V_c^2 + 2\bar V_c \cdot \bar V_r + \bar V_r^2)\, dm$

C – центр масс

$\int \bar V_r\, dm = \frac{d}{dt}\int \bar\rho\, dm = 0$ ($\bar\rho_c = 0$) $\Rightarrow$ $T = \frac{1}{2} m V_c^2 + \frac{1}{2}\int V_r^2\, dm$

Теорема Кёнига

Случай плоских тел.



$\bar V_r = \bar\omega \times \bar\rho$

$V_r^2 = \omega^2 \rho^2,\quad \bar\omega \perp \rho$

$\frac{1}{2}\int v_r^2\, dm = \frac{\omega^2}{2}\int \rho^2 dm = \frac{J_c \omega^2}{2}$ $\Rightarrow$ $T = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{J_c\omega^2}{2}$

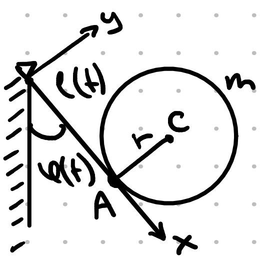
момент инерции, проход. через центр. масс $\perp$ телу

$\bar K_o = \bar K_c + \overline{OC} \times \bar P$

$\bar K_c = \int (\bar r - \bar r_c) \times \bar v\, dm = \int \bar\rho \times (\bar V_c + \bar\omega \times \bar\rho)\, dm = \int \bar\rho \times (\bar\omega \times \bar\rho)\, dm = \bar\omega \int \rho^2 dm = J_c \bar\omega$

$\Rightarrow\ \bar K_o = \underbrace{J_c\bar\omega}_{\bar K_c} + \overline{OC} \times \underbrace{\bar P}_{m\bar V_c}$

Пр.



«рулон бумаги разматывается»

$\boxed{\bar P, \bar K_A, T}$

$\bar P = m\bar V_c$

$\bar V_c = \bar V_c^e + \bar V_c^r = \underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\\dot\varphi\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\ell\\r\\0\end{bmatrix}}_{\omega\times\rho} + \begin{bmatrix}\dot\ell\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dot\ell - r\dot\varphi\\ \ell\dot\varphi\\ 0\end{bmatrix}$

$T = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{mr^2}{4}\omega^2$ $\Rightarrow$ $\bar P = m\bar V_c = \ldots$ Ответ

$\bar\omega = \begin{bmatrix}0\\0\\\dot\varphi\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\-\dot\ell/r\end{bmatrix} \Rightarrow \omega^2 = (\dot\varphi - \dot\ell/r)^2 \Rightarrow T = \ldots$ Ответ

переносн. $\rightarrow \bar\omega^e$ $\quad \bar\omega^r \leftarrow$ отн.

$\bar K_A = J_c\bar\omega + \overline{AC} \times m\bar V_c = \begin{bmatrix}0\\0\\\frac{mr^2}{2}(\dot\varphi - \dot\ell/r)\end{bmatrix} + m\begin{bmatrix}0\\r\\0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}\dot\ell - r\dot\varphi\\ \ell\dot\varphi\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow \bar K_A = \begin{bmatrix}0\\0\\\frac{3}{2}mr^2(\dot\varphi - \dot\ell/r)\end{bmatrix}$

$\rightarrow$ Ответ

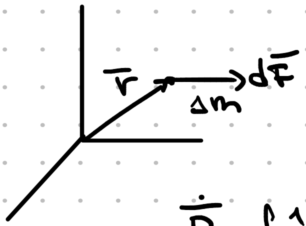
Пр

$T = \frac{1}{2}\int V^2 dm = \frac{1}{2}\int \omega^2 \rho^2 dm = \frac{J_p\omega^2}{2}$

$\bar K_p = \int \bar\rho \times (\bar\omega \times \bar\rho)\, dm = J_p \bar\omega$

З-ны изменения

индекс e – внешн. силы



$\Delta m \ddot{\bar r} = \Delta \bar F$

$\bar f = \lim\limits_{\Delta m \to 0} \dfrac{\Delta \bar F}{\Delta m}$ — уд. сила (плотность силы)

$\ddot{\bar r} = \bar f = \bar f^e + \bar f^i$

$\dot{\bar P} = \int \dot{\bar v}\, dm = \int (\bar f^e + \underbrace{\bar f^i) dm}_{0} = \bar R^e$ — гл. вектор внешн. сил

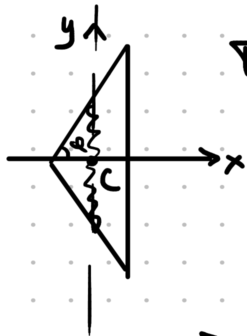
$\dot{\bar P} = \bar R^e$; $m\dot{\bar V}_c = \bar R^e$

$\bar K_o = \int (\bar r - \bar r_o) \times \bar v\, dm \rightarrow \dot{\bar K}_o = \underbrace{\int (\bar v - \bar v_o) \times \bar v\, dm}_{-m\bar v_o \times \bar v_c = -\bar v_o \times \bar P} + \int (\bar r - \bar r_o) \times (\bar f^e + \bar f^i)\, dm$

$\Rightarrow \dot{\bar K}_o = \bar M_o^e - m\bar v_o \times \bar v_c$

$\dot T = \int \bar v \cdot \dot{\bar v}\, dm = \underbrace{\int \bar v \cdot \bar f^e dm}_{N^e} + \underbrace{\int \bar v \cdot \bar f^i dm}_{N^i} \Rightarrow \dot T = N^e + N^i$

Пр.



Траектория концов стержня?

$\dot\varphi(\varphi) - ?$

$x = l/2 \cos\varphi$; $y = l\sin\varphi$; центр масс неподвижен

$\dfrac{x^2}{(l/2)^2} + \dfrac{y^2}{l^2} = 1$ — эллипс

$2T = const$, T – один стержень

$y_c = l/2 \sin\varphi \rightarrow V_c = \dfrac{l\dot\varphi}{2}\cos\varphi$

$T = \dfrac{m}{8} l^2 \dot\varphi^2 \cos^2\varphi + \dfrac{ml^2}{24}\dot\varphi^2 = const \Rightarrow \dot\varphi(\varphi) \rightarrow$ Ответ