Лекция 15.10

$\overline{P} = \int \overline{v}\,dm \qquad \overline{K_0} = \int (\overline{r}-\overline{r_0})\times \overline{v}\,dm$

$T = 1/2 \int v^2\,dm$

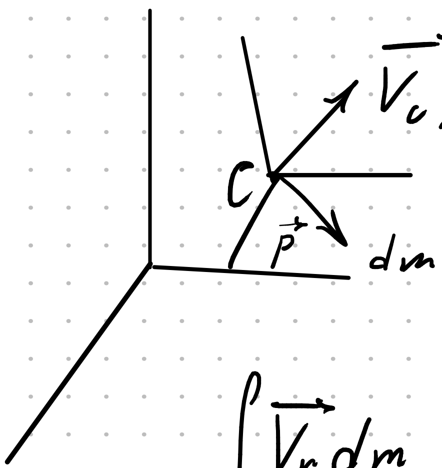
$P = m\overline{v}_c$

$$\vec{K}_{0'} = \int (\vec r - \vec r_{0'}) \times \vec V\,dm = \int (\vec r - \vec r_0 + \vec r_0 - \vec r_{0'})\times \vec V\,dm = \vec K_0 + \vec{O'O}\times \vec P$$

$$\boxed{\vec K_{0'} = \vec K_0 + \vec{O'O}\times\vec P}$$ — ф-ла переноса полюса

$$\vec K_{0'} = \vec K_0 + \vec P \times \vec{OO'} \quad \Big| \quad \vec V_{0'} = \vec V_0 + \vec w \times \vec{OO'}$$

Теорема Кенига



$\vec V_c / \vec w = 0$

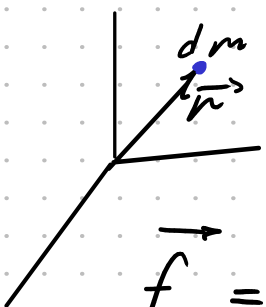
$$\vec V = \vec V_c + \vec V_r = \vec V_c + \vec V_r$$

$$T = \frac{1}{2}\int \left(V_c^2 + 2\vec V_c\cdot \vec V_r + V_r^2\right) dm$$

$$\int \vec V_r\,dm = \frac{d}{dt}\int \vec\rho\,dm = \cancel{m\dot{\vec\rho}_c}^{\,0}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{1}{2}\int \vec V_r^{\,2}\,dm}$$ — т. Кенига

$m\ddot{\vec r} = \vec F$ — основа механики



$$dm \to d\vec F = \underbrace{\vec f}_{\text{плотность силы}}\,dm$$

$$\vec f = \underset{\text{внеш}}{\vec f^{\,e}} + \underset{\text{внутр}}{\vec f^{\,i}}$$

$$\ddot{\vec r} = \vec f^{\,e} + \vec f^{\,i}$$

Теорема об изменении основных динамических величин

$$\dot{\vec{P}} = \int \dot{\vec{V}}\, dm = \int(\vec{f}^e + \vec{f}^i)\, dm = \int \vec{f}^e dm = \vec{R}^e$$

$$\boxed{\dot{\vec{P}} = \vec{R}^e}$$

$\vec{R}^e$ — главный в-р внеш. сил.

$\bar{P} = m\bar{V}_c \Rightarrow m\dot{\bar{V}}_c = \bar{R}^e$

$\underline{m\ddot{\bar{r}}_c = \bar{R}^e}$ — т. о дв. центра масс

$$\dot{\bar{K}}_o = \underbrace{\int(\bar{v}-\bar{v}_o)\times\bar{v}\, dm}_{-m\bar{v}_o\times\bar{v}_c} + \underbrace{\int(\bar{r}-\bar{r}_o)\times(f^e+f^i)\, dm}_{\bar{M}_o^e}$$

$\Rightarrow \underline{\dot{\bar{K}}_o = \bar{M}_o^e - m\bar{v}_o\times\bar{v}_c}$

$T = \frac{1}{2}\int\bar{v}^2 dm \Rightarrow \dot{T} = \int\bar{v}\cdot\dot{\bar{v}}\, dm = \int\bar{v}\cdot(\bar{f}^e+\bar{f}^i)\, dm = N^e + N^i$

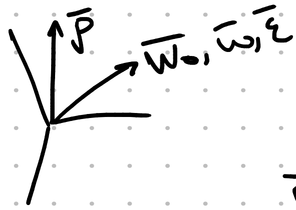
$\Rightarrow \underline{\dot{T} = N^e + N^i}$

Основные т. динамики в неинерц. СО

3. Ньютона: $\ddot{\bar{r}} = \bar{W} = \bar{W}^r + \bar{W}^e + \bar{W}^c = \bar{f}^e + \bar{f}^i$

$\bar{W}^r = f^e + f^i \underbrace{- \bar{W}^e}\underbrace{- \bar{W}^c}$

плотности переносн. и кориолис. сил инерции



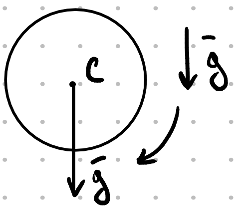
$\bar{j}^e = -\bar{W}_o - \bar{\varepsilon}\times\bar{\rho} - \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{\rho})$

$\bar{j}^c = -2\bar{\omega}\times\bar{v}^r$

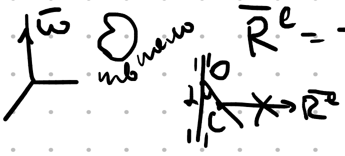
$\dot{\bar{P}} = \underbrace{\bar{R}^{ex}}_{\text{внешн.}} + \bar{R}^e + \bar{R}^c$; $\dot{\bar{K}}_o = \bar{M}_o^{ex} + \bar{M}_o^e + \bar{M}_o^c - m\bar{v}_o^r\times\bar{v}_c^r$

$\dot{T} = N^{ex} + N^e + N^i$

$j^c = -2\bar{\omega}\times\bar{v}^r \quad n: \bar{v}^r\cdot\bar{j}^c = 0 \Rightarrow N^i = 0 \Rightarrow \underline{\dot{T} = N^e + N^i}$

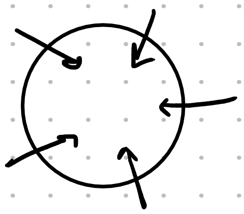


но! Замечание: при реш. задач не следует делать необоснов. допущений о точках прилож. и линиях действия сил инерции.

Пр:  $\bar{R}^e = -\int\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{\rho})\, dm = -m\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{\rho}_c)$

$M_o^e \neq \frac{1}{2}R^e\cdot l\cdot\cos\alpha$ — так нельзя

О моменте сил, действ. на тв. тело



момент сил в т. O

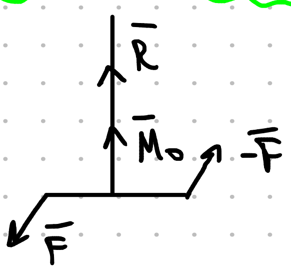
$$\bar M_O = \int (\bar r - \bar r_O)\times \bar f\, dm$$

$$\bar M_{O'} = \bar M_O + \bar{O'O}\times \underbrace{\bar R}_{\int \bar f\, dm}$$ — перенос полюса для момента

$$\bar M_{O'} = \bar M_O + \bar R \times \bar{OO'}$$
$$\bar V_{O'} = \bar V_O + \bar\omega \times \bar{OO'}$$
⇒ статико-кинематические отношения

Следствие: $\forall$ система сил, прилож. к тв. телу сводится к динам. винту или его ч. случаям.

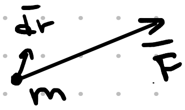
Динам. винт:



если $\bar M_O = 0$ ⇒ сист. сил сводится к равнодейств.

— „динамо"

Классификация сил.



$\delta A = \bar F\cdot\delta\bar r$ — элементарн. работа

$N = \bar F\cdot\bar v$ — мощность

1. Если $N = \bar F\cdot\bar v \le 0$, то $\bar F$ наз. диссипативной.
   Если $N < 0\ \forall \bar v \ne 0$, то $\bar F$ наз. строго диссипативной.
2. Если $N = \bar F\cdot\bar v \equiv 0$, то $\bar F$ наз. гироскопической
3. $\bar F$ наз. потенциальной, если $\exists\, \Pi(\bar r, t)$: $\bar F = -\nabla\Pi$

Th. Критерий потенциальности:

$\bar F(\bar r, t)$ — потенц. сила $\Leftrightarrow$ $\oint \bar F\cdot d\bar r\big|_{t=const} = 0$

▷ Если $F = -\nabla\Pi$ ⇒ $\oint \nabla\Pi\cdot d\bar r = 0$ — очевидно
$$\oint \nabla\Pi\cdot d\bar r = \Pi(\bar r_0, t) - \Pi(\bar r_0, t)$$

Если $\oint \ldots = 0$ ⇒ $A(r,t) = \int_0^{\bar r} \bar F\cdot d\bar r$ т.о. следуем

$\bar r \to r + \tau\cdot\bar e_i$, $\tau\in[0,\Delta h]$ ⇒ $\Delta A = \int_0^{\Delta h} F_i(\ldots, r_i+\tau\ldots)\,d\tau \overset{V}{=} F_i(\ldots r_i + \theta\ldots)\Delta h$

⇒ $F_i = \dfrac{\partial A}{\partial x_i}$ ⇒ $\Pi = -A$ ◁

Если $\bar F = -\nabla \Pi \Rightarrow F_i = -\Pi_{,i}$

$\Pi_{,ij} = \Pi_{,ji} \Rightarrow F_{i,j} = F_{j,i}$ (1) — критерий потенц. для односвязн. без особ.

В $\mathbb{R}^3$ усл. (1) $\Leftrightarrow \operatorname{rot} \bar F = \bar 0$

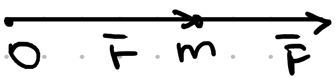
$F_{i,j} - F_{j,i}$ — инвариант потенциальности

Если $\bar F = -\nabla \Pi(\bar r)$ ← без t

$\delta T = \bar F \cdot \delta \bar r = -\nabla \Pi \cdot \delta \bar r = -d\Pi \Rightarrow T + \Pi = const$

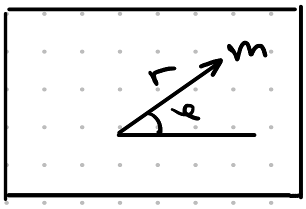
3. Сохранение энергии ← в смысл. смещение

Движ. точки в центральном поле.



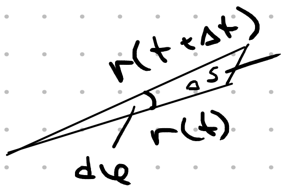
$\bar K_0 = const \quad \bar M_0^e = \bar 0$

$\bar K_0 = \bar r \times m \bar v$



$$\begin{cases} m(\ddot r - r\dot\varphi^2) = F = F \cdot \frac{\bar r}{r} \\ \frac{1}{r}(r^2 \dot\varphi)^{\cdot} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow r^2 \dot\varphi = C$$



$\Delta S \approx \frac{1}{2} r^2 \Delta\varphi \Rightarrow \dot S = \frac{1}{2} r^2 \dot\varphi = const$

2й закон Кеплера о постоянстве секториальной скорости