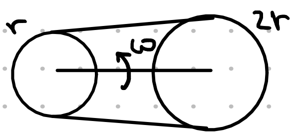
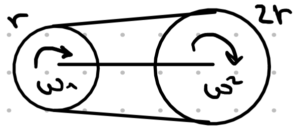
Из дз:



Откуда берется $r\omega = 2r\omega_n$?

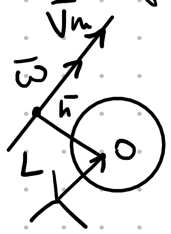
Лучше:

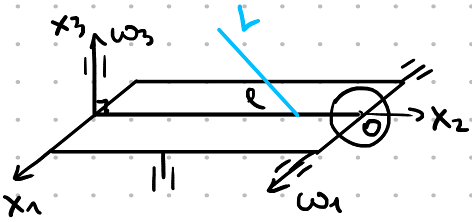
в СО шкивами:



«в СО, связанной с точкой...» — <u>некорректно</u>

Семинар:





Найти. кин. винт $\{\bar\omega, \bar V_{min}, L\}$

$$\bar\omega = \begin{bmatrix}\omega_1\\0\\\omega_3\end{bmatrix}$$

$$\bar V_m = \bar V_0 + \bar\omega\times\bar\rho \quad \Big|\cdot \bar e_\omega = \bar\omega/\omega$$

$$\bar V_m\cdot\bar e_\omega = \bar V_0\cdot\bar e_\omega$$

$$\bar V_0 = \bar\omega_3\times\bar l = \begin{bmatrix}\omega_3 l\\0\\0\end{bmatrix};$$

$$e_\omega = \frac{1}{\sqrt{\omega_1^2+\omega_3^2}}\begin{bmatrix}\omega_1\\0\\\omega_3\end{bmatrix}$$

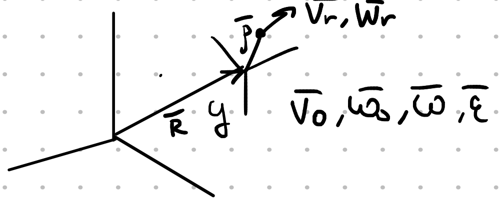
$$\bar V_m\cdot\bar e_\omega = \frac{\omega_1\omega_3 l}{\sqrt{\omega_1^2+\omega_3^2}}$$

$$\bar r = \bar r_0 + \frac{\omega\times V_0}{\omega^2} + \lambda\bar\omega$$

$$\bar r = \begin{bmatrix}0\\l\\0\end{bmatrix} \qquad \omega\times V_0 = \begin{bmatrix}\omega_1\\0\\\omega_3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\omega_3 l\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-\omega_3^2 l\\0\end{bmatrix}$$

$$\bar r = \begin{bmatrix}0\\ l\left(1-\frac{\omega_3^2}{\omega_1^2+\omega_3^2}\right)\\0\end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix}\omega_1\\0\\\omega_3\end{bmatrix}$$

Сложное движ. тела.



$$\bar r = \bar R + \bar\rho = R^i\bar x_i + \rho^i\bar y_i$$

$$\bar V = \dot{\bar r} = \underbrace{\dot R^i\bar x_i}_{\bar V_0} + \underbrace{\dot\rho^i\bar y_i}_{\frac{d'\bar\rho}{dt}=\bar V_r} + \underbrace{\rho^i\underbrace{\dot{\bar y}_i}_{\bar\omega\cdot\bar y_i}}_{\bar\omega\times\bar\rho}$$

Локальная производная — $\frac{d'\bar\rho}{dt}$

$$\dot{\bar\rho} = \frac{d\bar\rho}{dt} = \frac{d'\bar\rho}{dt} + \bar\omega\times\bar\rho$$

$\Rightarrow \bar V = \underbrace{\bar V_0 + \bar\omega\times\bar\rho}_{\bar V_e\text{ переносная скорость}} + \underbrace{\bar V_r}_{\text{отн. скорость}}$

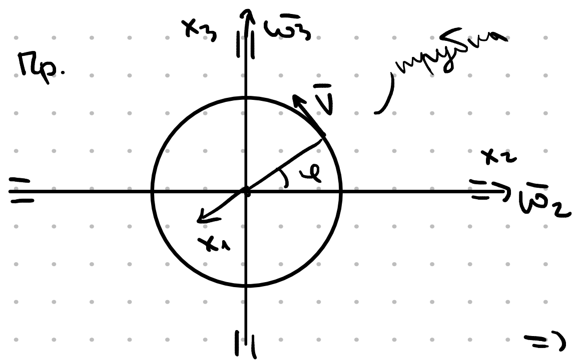
$\forall\, \bar a$ в базу верно: $\underbrace{\dot{\bar a}}_{\text{абс.}} = \frac{d'\bar a}{dt} + \underbrace{\bar\omega\times\bar a}_{\text{перенос.}}$

$$\bar W = \dot{\bar V} = \bar W_0 + \bar\varepsilon\times\bar\rho + \bar\omega\times\Big(\underbrace{\frac{d'\bar\rho}{dt}}_{\bar V_r} + \bar\omega\times\bar\rho\Big) + \frac{d'\bar V_r}{dt} + \bar\omega\times\bar V_r$$

$$\Rightarrow \bar W = \overbrace{\bar W_0 + \bar\varepsilon\times\bar\rho + \bar\omega\times(\bar\omega\times\bar\rho)}^{=\bar W_e\text{ перенос.}} + \overbrace{2\bar\omega\times\bar V_r}^{=\bar W_c\text{ Кориолис.}} + \overbrace{\bar W_r}^{\text{отн.}}$$

Ф-ла Кориолиса

Пр.



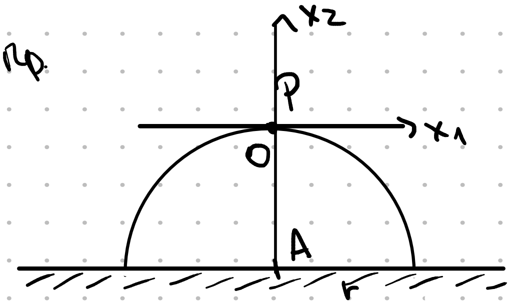
$\bar\omega = \begin{bmatrix}\omega_1\\0\\\omega_2\end{bmatrix}$ $\quad \bar\varepsilon = \bar\omega_3 \times \bar\omega_2 = \begin{bmatrix}\omega_1\omega_3\\0\\0\end{bmatrix}$

$\omega_i; V = const$

$\bar V_r = \begin{bmatrix}0\\-v\sin\varphi\\v\cos\varphi\end{bmatrix}; \quad \bar W_r = \begin{bmatrix}0\\-\frac{v^2}{r}\cos\varphi\\-\frac{v^2}{r}\sin\varphi\end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ ф-ла Кориолиса $\Rightarrow$ Ответ: ...

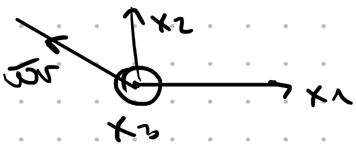
Пр.



$\omega = const$; без проск.; W_P - ?

$\bar W_c = 2\bar\omega\times\bar V_r = 2\begin{bmatrix}0\\0\\-\omega\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-\omega r\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\2\omega^2 r\\0\end{bmatrix}$

$\bar W_0 = \begin{bmatrix}0\\-\omega^2 r\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \bar W = \bar W_0 + \bar W_c = \begin{bmatrix}0\\\omega^2 r\\0\end{bmatrix}$



Кватернионы и их использ. в кин. тв. тела

$$\Lambda = \begin{bmatrix}\lambda_0\\\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{bmatrix} = \underbrace{\lambda_0}_{scal\Lambda} + \overbrace{\lambda_1\bar i_1+\lambda_2\bar i_2+\lambda_3\bar i_3}^{\bar\lambda = vect\Lambda} = \lambda_0 + \bar\lambda$$

$\{\bar i_k\}$ — ОНБ в $\mathbb{R}^3$

Умн. на $\alpha\in\mathbb{R}$ и "+" — покомпонентно

$1\circ\bar i_k = \bar i_k\circ 1 = \bar i_k, \quad 1\circ 1 = 1$

$\bar i_k\circ\bar i_m = \bar i_k\times\bar i_m - \underbrace{\bar i_k\cdot\bar i_m}_{\delta_{km}}$ $\longleftarrow$ из д/з, д-во через матрицы в Журавлеве

$$\Lambda\circ M = \underbrace{\lambda_0\mu_0 - \bar\lambda\cdot\bar\mu}_{scal} + \underbrace{\lambda_0\bar\mu + \mu_0\bar\lambda + \bar\lambda\times\bar\mu}_{vect}$$

$\tilde\Lambda = \lambda_0 - \bar\lambda$ — сопряж.

$\|\Lambda\| = \Lambda\circ\tilde\Lambda = \tilde\Lambda\circ\Lambda = \lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2$ — норма

$|\Lambda| = \sqrt{\|\Lambda\|}$ — модуль $\qquad \Lambda\circ M \ne M\circ\Lambda$

$\widetilde{\Lambda\circ M} = \tilde M\circ\tilde\Lambda$

$\|\Lambda\circ M\| = \|\Lambda\|\cdot\|M\|$

$\forall\Lambda\ne0\ \exists\Lambda' = \frac{\tilde\Lambda}{\|\Lambda\|}: \Lambda\circ\Lambda' = \Lambda'\circ\Lambda = 1$ — деление

Пр. $X^2 + X + \lambda = 0 \qquad X^2 = X\circ X$

$x_0^2 + |\bar x|^2 + 2x_0\bar x + x_0 + \bar x + \lambda = 0$

$\begin{cases} scal = 0\\ vect = 0\end{cases} \rightarrow \underset{(1)}{\begin{cases} x_0^2 - |\bar x|^2 + x_0 + X = 0\\ 2x_0 + 1 = 0\end{cases}}$ или $\underset{(2)}{\begin{cases} X^2 + X_0 + \lambda = 0\\ \bar x = 0\end{cases}}$

(1) $x_0 = -1/2$

$1/4 - |\bar{x}|^2 - 1/2 + \lambda = 0$

$|\bar{x}|^2 = \lambda - 1/4 \Rightarrow$ $\lambda > 1/4;\ |\bar{x}| = \sqrt{\lambda - 1/4}$ — бесц. много реш.

$\lambda = 1/4;\ |\bar{x}| = 0$

$\lambda < 1/4$ — нет реш.

(2) $x_0 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4\lambda}}{2} \Rightarrow$ $\lambda < 1/4$ — 2 реш

$\lambda = 1/4$ — 1 реш

$\lambda > 1/4$ — нет. реш.

$\|\Lambda\| = 1 \Rightarrow \exists$ представление

$\Lambda = \cos\varphi/2 + \bar{e} \cdot \sin\varphi/2$; $|\bar{e}| = 1$!

$\bar{r}' = \Lambda \circ \bar{r} \circ \tilde{\Lambda}$ — поворот вокруг $|\bar{e}|$ на φ

$\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \bar{r}' \end{smallmatrix}\right]$ $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \bar{r} \end{smallmatrix}\right]$

$\bar{r} \Rightarrow \tilde{\bar{r}} = -r$

$R = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \bar{r} \end{smallmatrix}\right]$ Покажем, что $\tilde{R}' = \Lambda \circ \bar{r} \circ \tilde{\Lambda} = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \bar{r}' \end{smallmatrix}\right]$

$\widetilde{\Lambda \circ \bar{r} \circ \tilde{\Lambda}} = \Lambda \circ \underbrace{\tilde{\bar{r}}}_{-\bar{r}} \circ \tilde{\Lambda} = -\Lambda \circ \bar{r} \circ \tilde{\Lambda}$

$\|\Lambda \circ r \circ \tilde{\Lambda}\| = \cancel{\|\Lambda\|}^{1} \cdot \|r\| \cdot \cancel{\|\tilde{\Lambda}\|}^{1} \Rightarrow \|\bar{r}'\| = \|\bar{r}\|$

$\Rightarrow \exists \underset{\substack{\cap \\ \text{орт. группа} \\ O(3)}}{A} : \bar{r}' = A\bar{r}$