Ду. 13.09.24

y – незав. перем.

Пр.

$(1+y^2)\,dx + (2xy-1)\,dy = 0$

$(1+y^2)\frac{dx}{dy} = 1-2xy$ $y = C$ не явл. реш.

$\frac{dx}{dy} = -\frac{2y}{1+y^2}x + \frac{1}{1+y}$

ОУ: $\frac{dx}{dy} = -\frac{2yx}{1+y^2}$ $\frac{dx}{x} = \frac{-2y\,dx}{1+y^2}$ $x = \frac{C}{1+y^2}$

Вариац. постоян.: $x = \frac{C(y)}{1+y^2}$

$\frac{C'(y)(1+y^2) - 2yC(y)}{(1+y^2)^2} = -\frac{2C(y)y}{(1+y^2)^2} + \frac{1}{1+y^2}$

Ур-ие Бернулли

$y' + a(x)y = b(x)y^n$, $n \in \mathbb{R}$

$n=0$ → Лин. у

$n=1$ → Однородн. у.

при $n>0$: $y=0$ – реш.

$n \le 0$: $y=0$ – не реш.

$\frac{y'}{y^n} + \frac{a(x)}{y^{n-1}} = b(x)$

новая неизв. ф-ция: $z = \frac{1}{y^{n-1}} = y^{1-n}$

$z' = (1-n)y^{-n}\cdot y' = (1-n)\frac{y'}{y^n}$

$(1-n)^{-1}z' + a(x)z = b(x)$ – лин. у

Пр.

$y' - y + 2xy^3 = 0$ $y=0$ – реш.

$\frac{y'}{y^3} - \frac{1}{y^2} + 2x = 0$ $z = \frac{1}{y^2}$ $z' = -\frac{2}{y^3}y'$

$-\frac{z'}{2} - z + 2x = 0$ ОЛУ: $\frac{dz}{dx} + 2z = 4x$

$\frac{dz}{z} = -2dx$ $\ln|z| = -2x + C$ $z = Ce^{-2x}$ $y^2 = \frac{1}{(2x-1)e^{2x} + Ce^{3x}}$

Вар. $z = C(x)e^{-2x}$ . . . .   Ответ. $y = 0$

Ур-ие Риккати

$y' + a(x)y + b(x)y^2 = f(x)$

Пусть y_0 — реш.

Тогда $y = z + y_0$, z — новая неизв. ф-ия

Получим ур-ие Бернулли

$x^2y' - 5xy + x^2y^2 + 8 = 0$

$y = \frac{k}{x}$

$x^2\left(-\frac{k}{x^2}\right) - 5x\frac{k}{x} + x^2\frac{k^2}{x^2} + 8 = 0$

$-k - 5k + k^2 + 8 = 0$

$k^2 - 6k + 8 = 0$

$k = 2;\ k = 4$

$y = z + \frac{2}{x}$

$x^2\left(z' - \frac{2}{x^2}\right) - 5x\left(z + \frac{2}{x}\right) + x^2\left(z + \frac{2}{x}\right)^2 + 8 = 0$

$z'x^2 - 2 - 5xz - 10 + z^2x^2 + 4zx + 4 + 8 = 0$

$x^2z' - xz + z^2x^2 = 0$

$xz' - z + z^2x = 0$

$\frac{xz' - z}{z^2} = -x \qquad \left(\frac{x}{z}\right)' = x \qquad \frac{x}{z} = \frac{1}{2}x^2 + C$

$\frac{x}{y - \frac{2}{x}} = \frac{x^2}{2} + C$

$\left[\begin{array}{l} \frac{x^2}{xy - 2} = \frac{x^2}{2} + C \\ y = \frac{2}{x} \end{array}\right.$

$C = 0$

$\frac{x^2}{xy - 2} = \frac{x^2}{2}$

$y = \frac{4}{x}$

Ур-ие в полных диффер.

$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$

Пусть $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = dF(x,y)$

$\exists F:\ P = \frac{\partial F}{\partial x} \qquad Q = \frac{\partial F}{\partial y} \qquad F(x,y) = C$

Th. Пусть $F(x,y)$ — непр. диф. в G

Если $\exists P = \frac{\partial F}{\partial x},\ Q = \frac{\partial F}{\partial y}$ $\qquad F$ — потенциал

$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

Необх. усл-ие ~~полного~~ наличия потенциала

Усл-ие явл. достаточным, если область G односвязна

Пр. $\overbrace{(1 + 3x^2\ln y)}^{P}dx + \overbrace{\left(3y^2 + \frac{x^3}{y}\right)}^{Q}dy = 0$

$G = \{y > 0\}$ — односвязна

$\exists F:\ \frac{\partial F}{\partial x} = P,\ \frac{\partial F}{\partial y} = Q$

Угадаем: $d(x + y^3 + x^3\ln y) = 0$

$\rightarrow$ Ответ: $x + y^3 + x^3\ln y$

Не угадали:

$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 3x^2\ln y \qquad F = x + x^3\ln y + C(y)$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + \frac{x^3}{y} \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x^3}{y} + C'(y) \Rightarrow C'(y) = 3y^2$

$C(y) = y^3 + C$

$\Rightarrow$ Ответ $F = x + x^3\ln y + y^2$

Интегрирующий множитель

$\mu(x,y)$

$\mu \cdot P = \frac{\partial F}{\partial x},\ \mu Q = \frac{\partial F}{\partial y}$

Пр. $\overbrace{(y-3x^2y^3)}^{P}dx - \overbrace{(x+x^3y^2)}^{Q}dy = 0$

$\frac{\partial P}{\partial y} = 1-9x^2y^2$ $\qquad y\,dx - x\,dy - 3x^2y^3dx - x^3y^2dy = 0$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = -1-3x^2y^2$ $\qquad y=0$ — реш.

$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = 3x^2y\,dx + x^3dy$

$d\left(\frac{x}{y}\right) = d(x^3y)$ $\qquad \left[\begin{array}{l} x/y = yx^3 + C \\ y=0,\ x=0 \end{array}\right.$

Уравнения высших порядков

$F(x, y, y', \dots y^{(n)}) = 0$

Методы понижения порядка:

① Ур-ие не содержит явно y:

$F(x, y', \dots y^{(n)}) = 0$

$y' = z$

$F(y, z, z', \dots z^{(n-1)}) = 0$

Пр. $xy'' + xy'^2 + y' = 0 \qquad x>0$

$y' = z \quad xz' + xz^2 + z = 0$ $\qquad$ ур. Бернулли

$z=0$ — реш

$y = c$

$x\frac{z'}{z^2} + x + \frac{1}{z} = 0$

$\frac{1}{z} = u \quad u' = -\frac{z'}{z^2}$

$-xu' + x + u = 0 \quad | \cdot x^2$

$\frac{u - xu'}{x^2} + \frac{1}{x} = 0$

$\left(\frac{u}{x}\right)' = \frac{1}{x} \qquad \frac{u}{x} = \ln|x| + C$

$\frac{1}{zx} = \ln x + C$

$z = \frac{1}{x(\ln x + c)} = y'$

$y = \int \frac{dx}{x(\ln x + c)}$

$\ln x + c = t$

$y = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$

$\left[\begin{array}{l} y = \ln|\ln x + c| + C_1 \\ y = c \end{array}\right.$

Ответ.

② Ур-ие не сод. явно x

$F(y, y', \dots y^{(n)}) = 0$

y — новая нез. перем.

$y' = z(y)$ — новая ф-ия

$y'' = (y')'_y = (y'_x)'_y = (y'_x)'_y \cdot y'_x = z \cdot z'_y$

$y''' = (y''_{xx})'_x = (y''_{xx})'_y \cdot y'_x = (z \cdot z'_y)'_y\, y'_x = \cancel{\dots}$

$= (z'_y \cdot z'_y + z \cdot z''_{yy})\,z = z \cdot z'^2_y + z^2 \cdot z''_{yy}$

Матанализ. 13.09.24.

Экстремумы нескольких переменных

$u = f(x_1, \dots x_n)$

Т. Необх. усл-ие.

Если в т. лок. экстр. f дифф, то $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$

(стац. точка)

Дост. усл-ие:

$f(x_1, \dots x_n)$ дваж. непр. дифф. в ~~Uδ(x̄₀…)~~ $U_\delta(\bar{x}_0)$

~~…~~ $\qquad$ рассмотрим кв. форму $(dx_1, \dots dx_n)$

$d^2f(\bar{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} f''_{x_ix_i}(\bar{x}_0)\,dx_i^2 + 2\sum_{j,i=1}^{n} f''_{x_ix_j}(\bar{x}_0)\,dx_i dx_j$

$(f''_{x_ix_j} = f''_{x_jx_i})$

1) кв. форма полож. $\Rightarrow \bar{x}_0$ — лок. мин.

2) отр. $\Rightarrow \bar{x}_0$ — лок. макс.

3) неопр. $\Rightarrow \bar{x}_0$ не лок. экстр.

полуопр.? $\Rightarrow$ ~~…~~ неизвестно кв. формы $K(x) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2 + 2\sum_{i<j}^{n} b_{ij} x_i x_j$

полож., если $\forall x \ne 0$ $K(x) > 0$

отр., если $\forall x \ne 0$ $K(x) < 0$

неопр., если $\exists x_1, x_2 : K(x_1) > 0$ $K(x_2) < 0$

полуопр. полож., если $\forall x$ $K(x) \ge 0$, но $\exists x \ne 0 : K(x) = 0$

полуопр. отр, если $\forall x$ $K(x) \le 0$, но $\exists x \ne 0 : K(x) = 0$

Канонический вид

$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i'^2$, $\varepsilon_i = 0, \pm 1$

однозначен с точностью до перестановки ε_i

p: $\varepsilon_i = +1$ — полож. индекс инерции

q: $\varepsilon_i = -1$ — отриц. индекс инерции

r: $r = p + q$ — ранг

кв. формы полож. $\Leftrightarrow$ все $\varepsilon_i = 1$ $p = n$ $q = 0$

отр. $\Leftrightarrow$ все $\varepsilon_i = -1$ $p = 0$ $q = n$

неопр $\Leftrightarrow$ $\exists \varepsilon_i = 1$, $\exists \varepsilon_i = -1$ $1 \le p \le n-1$, $1 \le q \le n-1$

полуопр. полож $\Leftrightarrow$ все $\varepsilon_i \ge 0$, $\exists \varepsilon_i = 0$

полуопр. отр $\Leftrightarrow$ все $\varepsilon_i \le 0$, $\exists \varepsilon_i = 0$

Критерий Сильвестра

$B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n}$

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots \Delta_n$

кв. формы полож. опр $\Leftrightarrow$ все $\Delta_i > 0$

отр. опр $\Leftrightarrow$ $\operatorname{sign} \Delta_i = (-1)^i$

для $n=2$

$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ полож: $A > 0$, $AC - B^2 > 0$

отр: $A < 0$, $AC - B^2 > 0$

неопр: $AC^2 - B^2 < 0$

— только для $n=2$!

Пр. Исслед. на лок. экстр. $u = 3x^2y + y^3 - 12x - 15y + 3$

$u'_x = \dots$ $u''_{xx} = \dots$ $u''_{xy} = \dots$ $u'_y = \dots$ $u''_{yy} = \dots$

Пр. $u = xyz(16 - x - y - 2z)$ $x, y, z > 0$

$d^2u = u''_{xx}dx^2 + u''_{yy}dy^2 + u''_{zz}dz^2 + 2u''_{xy}dx\,dy + 2u''_{xz}dx\,dz + 2u''_{yz}dy\,dz$

$u = 16xyz - x^2yz - xy^2z - 2xyz^2$

$u = x^4 + y^4 - 2x^2$

$\begin{cases} u'_x = 4x^3 - 4x \\ u'_y = 4y^3 \end{cases} \Rightarrow (0,0), (\pm 1, 0)$

$u''_{xx} = 12x^2 - 4$ $u''_{xy} = 0$

$u''_{yy} = 12y^2$

$d^2u = (12x^2 - 4)dx^2 + (12y^2)dy^2$

$d^2u(0,0) = -4dx^2$ $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ — отр. полуопр.

$u(\Delta x, \Delta y) - u(0,0) = \Delta x^4 + \Delta y^4 - 2\Delta x^2 - 0 =$

$= \Delta x^2(\Delta x^2 - 2) + \Delta y^4$

$\Delta x = 0$ $\Delta y \ne 0$ > 0

$0 < \Delta x < \sqrt{2}$ $\Delta y = 0$ < 0

экстр. нет

$d^2u(\pm 1, 0) = 8dx^2$ — полож. полуопр

$u(\pm 1 + \Delta x, \Delta y) - u(\pm 1, 0) = (\pm 1 + \Delta x)^4 + (\Delta y)^4 - 2(\pm 1 + \Delta x)^2 + 1 =$

$= 1 \pm 4\Delta x + 6\Delta x^2 \pm 4\Delta x^3 + \Delta x^4 + \Delta y^4 - 2 \mp 4\Delta x - 2\Delta x^2 + 1 =$

$= \Delta x^4 \pm 4\Delta x^3 + 4\Delta x^2 + \Delta y^4 = \Delta x^2(\Delta x \pm 2)^2 + \Delta y^4 > 0$

$\Rightarrow$ min в $(\pm 1, 0)$

T5 В стац. точке неяв. функции 2 дифф. положит. полуопр.

а) Может ли это быть минимум?

Ответ: да

б) Может ли это быть максимум?

Ответ: нет

в) Может ли это не быть экстремум?

Ответ: да

Пр.

$x^2+y^2+u^2-2x-2y+4u-3=0$ Иссл. на экстр. неявно заданную ф-цию, заданную ур-ем

$du=0$ – стац. точка

$2x\,dx+2y\,dy+2u\,du-2\,dx-2\,dy+4\,du=0$

$(u+2)du+(x+1)dx+(y-1)dy=0$

$du=\frac{(y-1)dy+(x+1)dx}{u+2}=0 \qquad x=-1 \;;\; y=1$

$1+1+u^2-2-2+4u-3=0$

$u^2+4u-5=0$

$u=1\;;-5 \Rightarrow (-1,1,1)$, $(-1,1,-5)$

$(u+2)d^2u+\cancel{du^2}^{=0}+dx^2+dy^2=0$

$d^2u=\frac{-dx^2-dy^2}{u+2}$

$d^2u(-1,1,1)=-\frac{dx^2}{3}-\frac{dy^2}{3}$ – отр. опр. max

$d^2u(-1,1,-5)=\frac{dx^2}{3}+\frac{dy^2}{3}$ – положит. опр. min