Решить ур-ие, исследовать особ. реш., нарис. инт. кривые

Пр. $4yy' = xy'^2 + x^3 \qquad y' = p$

$4yp = xp^2 + x^3$

$y = \frac{1}{4p}(xp^2 + x^3) = \frac{1}{4}\left(xp + \frac{x^3}{p}\right)$

$\underset{\| \, pdx}{dy} = \frac{1}{4}\left(x\,dp + p\,dx + \frac{3x^2}{p}dx - \frac{x^3}{p^2}dp\right)$

$\left(4p - p - \frac{3x^2}{p}\right)dx = \left(x - \frac{x^3}{p^2}\right)dp$

$3\left(p - \frac{x^2}{p}\right)dx = x\left(1 - x^2/p^2\right)dp$

$3 \cdot \frac{1}{p}(p^2 - x^2)\,dx = x/p^2\,(p^2 - x^2)\,dp$

1) $p^2 - x^2 = 0$

$p = \pm x \Rightarrow y = \frac{1}{\pm 4x}(x^3 + x^3) = \pm\frac{x^2}{2}$

2) $\frac{dp}{p} = \frac{3dx}{x} \qquad p = Cx^3 \quad C \neq 0$

$y = \frac{1}{4}\left(Cx^4 + \frac{x^3}{Cx^3}\right) = \frac{1}{4}\left(Cx^4 + \frac{1}{C}\right)$

$\left[\begin{array}{l} y = \frac{1}{4}\left(Cx^4 + \frac{1}{C}\right) \quad C \neq 0 \\ y = \pm\frac{x^2}{2} \end{array}\right.$

Необх. усл. особ. реш (p – дискр. кривая)

$\begin{cases} F(x,y,p) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial p}(x,y,p) = 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi(x,y) = 0$

$\begin{cases} 4yp = xp^2 + x^3 \\ 4y = 2xp \end{cases} \rightarrow p = \frac{2y}{x}$

$\frac{8y^2}{x} = 4\frac{y^2}{x} + x^3 \qquad \frac{4y^2}{x} - x^3 = 0 \qquad y = \pm\frac{x^2}{2}$ — только эти реш. могут быть особ.

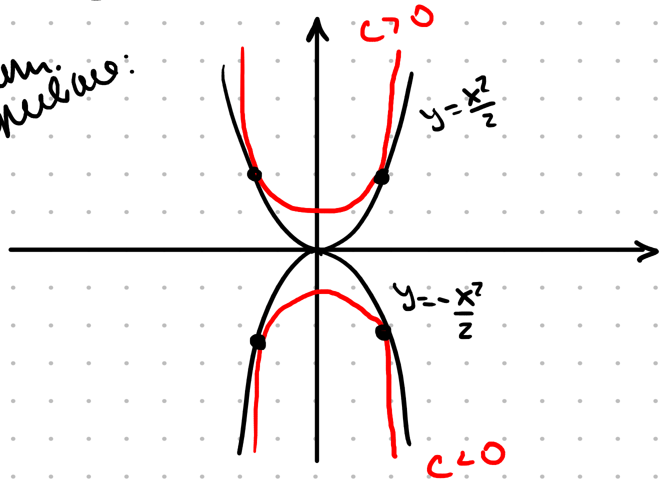
Проверим касание

$\begin{cases} y_c(x) = y(x) \\ y_c'(x) = y'(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x^2}{2} = \frac{1}{4}\left(Cx^4 + \frac{1}{C}\right) \\ x = Cx^3 \end{cases} \qquad x^2 = \frac{1}{C}$

$\frac{x^2}{2} = \frac{1}{4}(x^2 + x^2)$

$y_c(x)$ кас $y = x^2/2$ в т. $x = \pm\frac{1}{\sqrt{C}}$

инт. кривые:



$C > 0 - \forall \quad \Rightarrow x \neq 0 - \forall$

в т. $x = 0$ $y = x^2/2$ и $y = -x^2/2$ – кас. $\Rightarrow y = \frac{x^2}{2}$ – особ. реш.

$y = -\frac{x^2}{2} \qquad -\frac{x^2}{2} = \frac{1}{4}\left(Cx^4 + \frac{1}{C}\right) \quad -x = Cx^3 \quad x^2 = -\frac{1}{C},\ C < 0$

$y_c(x)$ кас. $y = -x^2/2$ в т. $x = \pm\frac{1}{\sqrt{-C}}$ $\quad C < 0 - \forall \Rightarrow x \neq 0 - \forall$

в т. $x = 0$ $y = x^2/2$ и $y = -x^2/2$ – кас. $\Rightarrow y = -\frac{x^2}{2}$ – особ. реш.

$\Rightarrow$ Ответ: —//—

$x = f(y, y')$

$y' = p \quad x = f(y, p)$

$dx = f'_y dy + f'_p dp$

$\;\; '' \; \frac{dy}{p}$

$\left(\frac{1}{p} - f'_y\right) dy = f'_p dp$

Если знач. в виде $y = y(p, c)$

$x = f(y(p,c), p) = x(p,c)$

Пр. $2xy' - y = y' \ln(yy')$

$y' = p$

...

1) $p = y$

$x = \ln|y| + \frac{1}{2}$

2) $-\frac{dy}{y} = \frac{dp}{p}$

$pdy + ydp = 0$

$py = C \quad p = \frac{C}{y}$

$x = \frac{1}{2}\ln C + \frac{y^2}{2C} \quad C > 0.$

p - дискр. кривая

$$\begin{cases} 2xp - y = p\ln(py) \\ 2x = \ln(py) + 1 \end{cases} \qquad 2xp - y = p(2x-1) \quad y = p$$

$2x = 2\ln|y| + 1$

$x = 1/2 + \ln|y|$ — видимо это реш. может быть особ.

Ищем касание

$$\begin{cases} x_c(y) = x(y) \\ x'_c(y) = x'(y) \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2/2c + 1/2 \ln C = \frac{1}{2} + \ln|y| \\ y/c = 1/y \end{cases} \quad y^2 = C \quad C > 0$$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln C = \frac{1}{2} + \ln C$

верно

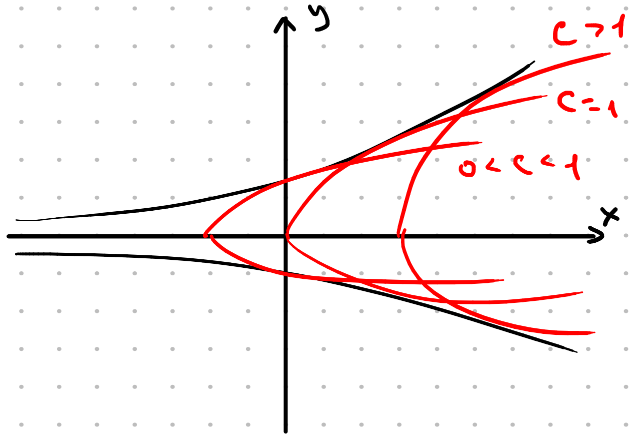
$x_c(y)$ кас $x(y)$ в т. $y = \pm\sqrt{C}$ $C > 0$

$C > 0 - \forall \Rightarrow y \neq 0 - \forall$

$x = \frac{1}{2} + \ln|y|$ — особ. реш.

$y = \pm e^{-x/2}$

$\Rightarrow$ Ответ: ...



Пр $y = xy' - y'^2$ $\quad y' = p$

$y = xy' + \varphi(y')$

Ур-ие Клеро

$y = xp - p^2$

$dy = \underbrace{p\,dx}_{\text{"}p\,dx} + x\,dp - 2p\,dp$

$dp(x - 2p) = 0$

1) $p = \frac{x}{2}$

$y = x^2/2 - x^2/4 = x^2/4$

дискр. кривая

$\begin{cases} y = xp - p^2 \\ 0 = x - 2p \end{cases} \Rightarrow y = \frac{x^2}{4}$

2) $dp = 0$

$p = C$

$y = Cx - C^2$

Касание

$\begin{cases} Cx - C^2 = x^2/4 \\ C = \frac{x}{2} \end{cases}$ верно

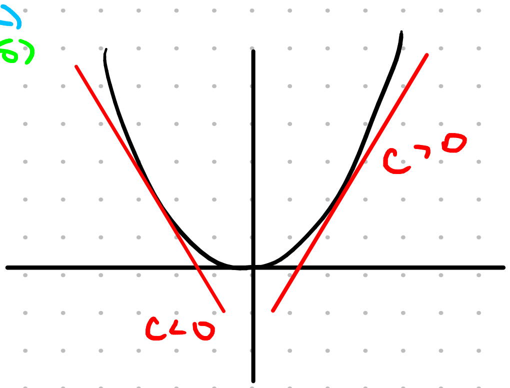
$x = 2C$

$y_c(x)$ кас. $y(x)$ в т. $x = 2C$

$C\ \forall \Rightarrow x\ \forall$

$y = \frac{x^2}{4}$ - особ. реш.

а)
б)



Задача Коши

$y(x_0) = y_0$

Если $y_0 < x^2/4$ - 2 реш.

$y_0 > x^2/4$ - нет реш.

$y_0 = x^2/4$ - беск. много реш.

Решить задачи: а) $y(0) = -1$; $y(5) = 6$

б) $y(0) = -1$; $y(4) = 4$

а) $(0,-1), (5,6) \notin$ параболе

Проведем через них прямые $y = Cx - C^2$

$-1 = -C^2 \quad C = \pm 1 \Rightarrow y = \pm x - 1$

$6 = 5C - C^2 \quad C = 2, 3 \Rightarrow y = 2x - 4$; $y = 3x - 9$

Где они касаются параболы?

$x - 1 = x^2/4$

$x^2 - 4x + 4 = 0$ $\quad (2,1)$

$-x - 1 = x^2/4$

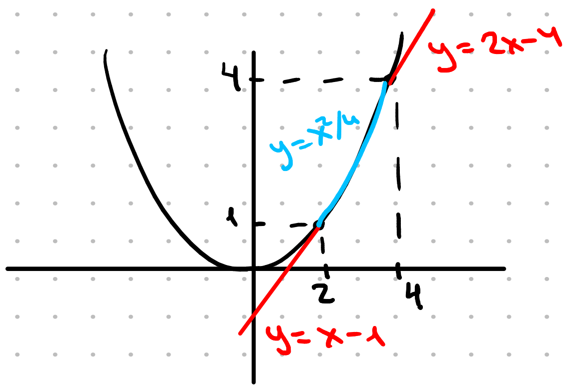
$x^2 + 4x + 4 = 0$ $\quad (-2,1)$ - не подх (уходим в сторону)

$2x - 4 = x^2/4$

$x^2 - 8x + 16 = 0$ $\quad (4,4)$

$3x - 9 = x^2/4$

$x^2 - 12x + 36 = 0$ $\quad (6,9)$ - не подх. $(6 > 5)$



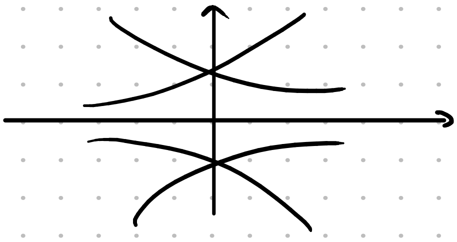
Отв: $\begin{cases} y = 2x - 4 & x \geq 4 \\ y = x^2/4 & 2 \leq x \leq 4 \\ y = x - 1 & x \leq 2 \end{cases}$

б) $(0,-1) \notin$ параболе
$(4,4) \in$ параболе - беск. много реш.

$\begin{cases} x - 1, & x \leq 2 \\ x^2/4, & 2 \leq x \leq A \quad A \geq 4 \\ A(x - A^2/4, & x \geq A \end{cases}$

Пример, когда ветви дискр. кривой яв. неособ. реш.

$y'^2 = y^2 \quad y' = \pm y \quad y = Ce^{\pm x}$



дискр. кривая: $\begin{cases} p^2 = y^2 \\ 2p = 0 \end{cases}$ $\underline{y=0}$ - реш., но не особое