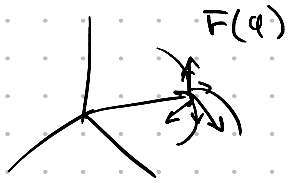
Прошлые лекции:



$$\bar w\cdot \bar g_k = \ddot{\bar r}\cdot \bar r_{,k} = (\dot{\bar r}\cdot \bar r_{,k})^{\cdot} - \dot{\bar r}\cdot\dot{\bar r}_{,k}$$

$$\cdot = \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot q^i \frac{\partial}{\partial q_i} = \quad \left| \ \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \right.$$

$$= \partial_t + \dot q^i \partial_i$$

$$\bar r_{,k} \xrightarrow{d/dt} \bar r_{,k}\dot q^i$$

$$\dot{\bar r} = \bar r_{,i}\dot q^i \qquad \dot{\bar r}_{,k} = \bar r_{,ki}\dot q^i$$

$\Rightarrow$ диф. по времени и коорд. перестановочны

Таким образом: $\dot{\bar r}\cdot\dot{\bar r}_{,k} = (v^2/2)_{,k}$ $\qquad \dot{\bar r} = \bar v$, $\quad v^2 = \bar v\cdot\bar v$

$$\dot{\bar r} = \bar r_{,i}(q)\dot q^i \Rightarrow \frac{\partial\dot{\bar r}}{\partial\dot q_k} = \dot{\bar r}_{,\dot k} = \bar r_{,k}$$

$$\dot{\bar r}\cdot\bar r_{,k} = \dot{\bar r}\cdot\dot{\bar r}_{,\dot k} = (v^2/2)_{,\dot k}$$

$$\Rightarrow \bar w\cdot\bar g_k = \frac{d}{dt}(v^2/2)_{,\dot k} - (v^2/2)_{,k}$$

$\mathcal{E}_k = \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial\dot q_k} - \frac{\partial}{\partial q_k}$ — оператор Эйлера-Лагранжа

$$\bar w\cdot\bar g_k = \mathcal{E}_k(v^2/2)$$

$|\bar g_k| = H_k$ — коэф. Ламе

$$\bar e_k = \frac{\bar g_k}{H_k} \Rightarrow \bar w\cdot\bar e_a = \bar w\cdot\frac{\bar g_a}{H_a} \Rightarrow \bar w\cdot\bar e_a = \frac{1}{H_a}\left[\frac{d}{dt}(v^2/2)_{,\dot a} - (v^2/2)_{,a}\right]$$

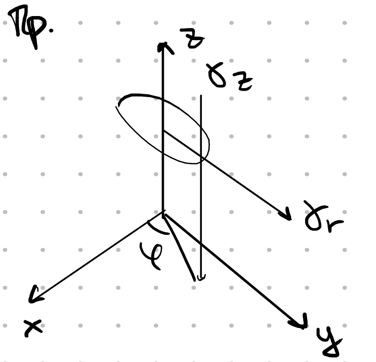
Геом. смысл коэф. Ламе и его использование для вычисления

$q^a \to q^a + dq^a$ — только одна коорд-та q

тогда $d\bar r_a \simeq \bar r_{,a} dq^a$

$|\cdot| \Rightarrow |d\bar r_a| \simeq \underbrace{|\bar r_{,a}|}_{H_a} dq^a \Rightarrow H_a$ — коэф. пропорциональности между $|d\bar r_a|$ и dq^a

Пр.



$q^1 = r$; $q^2 = \varphi$ $\quad q^3 = z$

$|d\bar r_r| = dr$ $\qquad H_r = 1$

$|d\bar r_\varphi| \simeq r\,d\varphi \Rightarrow H_\varphi = r$

$|d\bar r_z| = dz$ $\qquad H_z = 1$

Вычисление $\bar w\cdot\bar g_k$ и $w\cdot e_k$ для цил. коорд.

$v^2 = \sum H_i^2 \dot q^{i2}$ (ортог. сист.)

$= \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 + \dot z^2$

$\bar w\cdot\bar g_r = ?$ $\quad (v^2/2)_{,r} = r\dot\varphi^2$; $(v^2/2)_{,\dot r} = \dot r$; $\frac{d}{dt}(v^2/2)_{,\dot r} = \ddot r$

$\bar w\cdot\bar g_r = \ddot r - r\dot\varphi^2$ $\qquad$ остальное аналогично...

Алгоритм:
1. СК
2. H_k
3. $v^2 = ?$
4. $\bar w\cdot\bar g_k = ?$
5. диффер...

2-ой закон Ньютона в криволин. коорд.

$\frac{mV^2}{2}=T$ — кин. энергия

$m\ddot{\bar r}=\bar F \quad |\cdot \bar g_k \;\Rightarrow\; m\,\xi_k\!\left(V^2/2\right)=\bar F\cdot\bar g_k = Q_k \qquad \parallel \bar F\,\bar g_k$

запись 2 з.н. в любых коорд.: $\boxed{\frac{d}{dt}T_{,\dot k}-T_{,k}=Q_k}$

Для базиса $\bar e_k$:

$m\ddot{\bar r}=\bar F \quad |\cdot \bar e_a$

$$\frac{1}{H_a}\left[\frac{d}{dt}T_{,\dot a}-T_{,a}\right]=\bar F\cdot\bar e_a$$

Понятие о тензорах

$F(q) \qquad q(q') \qquad \boxed{\dot q = J\dot q'}$

$\dot q^i = q^i_{,i'}\dot q^{i'}$ — контравариантный вектор (тензор 1-го ранга) типа $(1,0)$ — набор из n чисел, которые при смене базиса меняются именно образом

матр. Якоби
$$q^i_{,i'}=\begin{bmatrix}\frac{\partial q^1}{\partial q^{1'}} & \frac{\partial q^1}{\partial q^{2'}} & \\ \frac{\partial q^2}{\partial q^{1'}} & \vdots & \\ \frac{\partial q^3}{\partial q^{1'}} & & \end{bmatrix}$$

Законы преобразования к новому базису

$f(q)$ — скал. ф-ия

$f(q(q')) \qquad f_{,i'}=f_{,i}\,q^i_{,i'}$ — ковариантный вектор (тензор 1-го ранга) типа $(0,1)$

$\nabla' f=\nabla f J \qquad \nabla' f^T = J^T\nabla f^T$

$$\boxed{\nabla f^T=\underbrace{(J^T)^{-1}}_{=J\text{ если ОНБ}}\nabla' f^T}$$

$g_k = r_{,k}$

$F(q(q')) \Rightarrow g_{k'}=\underbrace{\bar r_{,k}}_{\bar g_k}q^k_{,k'}=\bar g_k q^k_{,k'}$ — такой же закон преобр., как у ковар. тензора

Метрический тензор

$\bar V=\dot q^i\bar g_i \;\Rightarrow\; V^2=\underbrace{g_i\cdot g_k}\,\dot q^i\cdot\dot q^k$

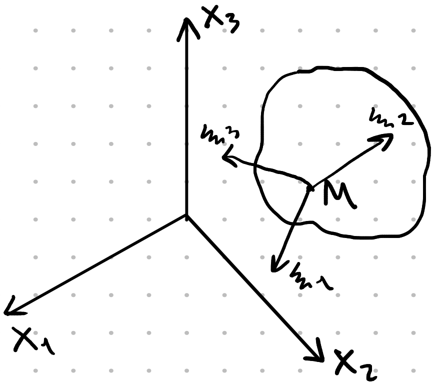
g_{ik} – метрический тензор

$g_{i'k'}=q^i_{,i'}q^k_{,k'}\cdot g_{ik}$ — ковар. тензор 2-го ранга типа $(0,2)$

Тензоры относятся к законам преобраз.

Кинематика твердого тела.

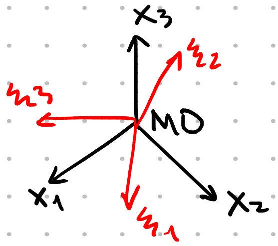
Твердое тело — совокупность мат. точек, расст. между которыми не изменяется.



$M \in$ тело — полюс тела

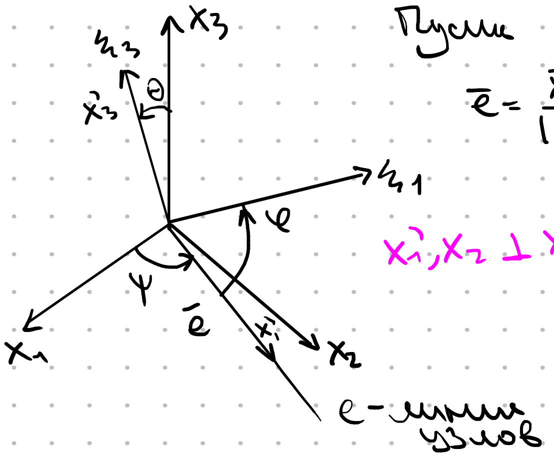
изменяемые точки

Движ. твердого тела = [движ. полюса M] + [движ. отн. полюса] (вращение)



1. Углы конечного вращения.

Углы Эйлера.



Пусть $\bar{X}_3 \nparallel \bar{\xi}_3$

$$\bar{e} = \frac{\bar{X}_3 \times \bar{\xi}_3}{|\bar{X}_3 \times \bar{\xi}_3|}$$

$x_1', X_2 \perp X_3$

Система углов Эйлера

$$\underset{\text{базис}}{X} \xrightarrow[3]{\psi} X' \xrightarrow[1']{\theta} X'' \xrightarrow[3'']{\varphi} \xi$$

ψ – угол прецессии

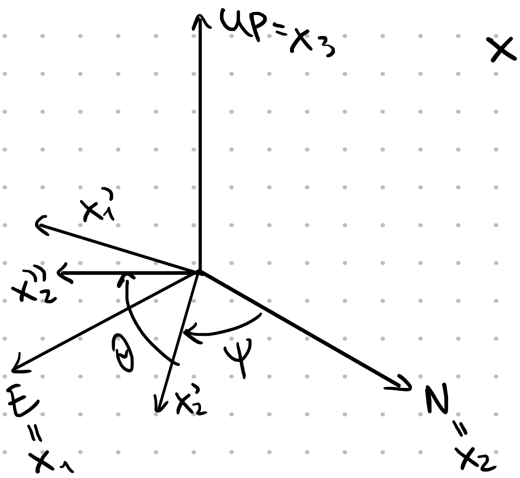
θ – угол нутации

φ – угол собств. вращ.

Парам. ψ, θ, φ находятся во взаимно-однозначн. соотв. с положением тв. тела везде кроме положения $\theta = 0$ или $\theta = \pi$

Вырождение системы угл. Эй-ра

Самолетные (корабельные) углы



$$X \xrightarrow[3]{\psi} X' \xrightarrow[1']{\theta} X'' \xrightarrow[2'']{\gamma} \xi$$

ψ – курс

θ – тангаж

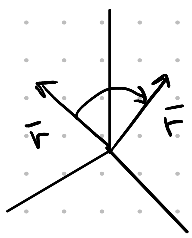
γ – крен

Вырождение при $\theta = \pm \pi/2$

Th. $\forall$ системы углов конечного вращ. будут иметь вырождение

Ортогональные матрицы

(те, что не меняют расстояния)



$$\bar{r}' = A r \qquad |\bar{r}'|^2 = |\bar{r}|^2 \quad \forall \bar{r}$$

$$|\bar{r}'|^2 = \bar{r}'^{T} \cdot \bar{r}' = r^T A^T A \bar{r} = |\bar{r}|^2 = \bar{r}^T \cdot \bar{r} \quad \forall \bar{r}$$

$$\Rightarrow \quad A^T A = 1$$ – опр. орт преобр

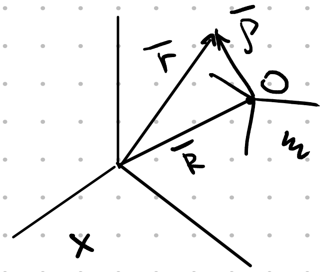
Св-ва орт. матриц:

1. $\det(AB) = \det A \cdot \det B \Rightarrow \det(A^T A) = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1$

повороты без измен ориентации

зеркальные повороты

Семинар



$\bar r = \bar R + \bar\rho$ $\quad$ $\bar\rho$ отсчитывается от полюса

$\bar\rho = A(t)\bar\rho_0$

$\bar R(t)$, $A(t)$ – задано $\Rightarrow$ движ. т. задано

$A^T A = E \quad \det A = 1$

$A(t)$: $\quad A(0) = E$

$A^T A = E \Rightarrow \dot A^T(0)\underbrace{A(0)}_{E} + \underbrace{A(0)}_{E}\dot A^T(0) = 0 \Rightarrow \dot A(0) = \hat\omega : \quad \hat\omega^T = -\hat\omega$ – кососимм.

Будем считать что $dt \ll 1$: $\quad A(dt) \simeq E + \hat\omega\, dt$

$\bar v = \dot{\bar r} = \underbrace{\dot{\bar R}}_{\bar v_0} + \dot{\bar\rho}$; $\rho = A\rho_0$; $\rho(dt) \simeq (E + \hat\omega\, dt)\tilde\rho_0$

$\Rightarrow \dot\rho|_{t=0} = \hat\omega\rho|_{t=0} \qquad \dot{\bar\rho} = \hat\omega\bar\rho$

в $\mathbb{R}^n$

$\bar v = \bar v_0 + \hat\omega\rho$ $\quad$ в $\mathbb{R}^3$

$$\hat\omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat\omega\bar\rho = \bar\omega \times \bar\rho$$

$\bar\omega = \begin{bmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{bmatrix}$ – угловая скорость

$\Rightarrow \boxed{\bar v = \bar v_0 + \bar\omega \times \bar\rho}$ – в $\mathbb{R}^3$

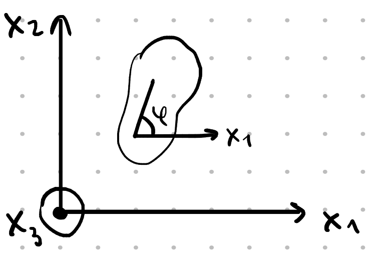
Ф-ла Эйлера

Поворот за Δt: $\quad \bar\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\bar e \Delta\varphi}{\Delta t}$, где $\Delta\varphi$ – вектор Эйлера

$\boxed{\bar W = \dot{\bar v} = \bar W_0 + \bar\varepsilon \times \bar\rho + \bar\omega \times (\bar\omega \times \bar\rho)}$, $\quad \bar\varepsilon = \dot{\bar\omega}$ – угловое ускорение

Ф-ла Ривальса

Плоское движение



$\bar\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\omega \end{bmatrix}$

$\omega = \dot\varphi$

$\bar\omega \times (\bar\omega \times \bar\rho) = \bar\omega(\cancel{\bar\omega\bar\rho})^{\to 0} - \omega^2\bar\rho \Rightarrow \boxed{\bar W = \bar W_0 + \bar\varepsilon \times \bar\rho - \omega^2\bar\rho}$

"BAC – CAB"

плоский случай

Мгновенные центры скорости и ускорения

Центр скорости P.

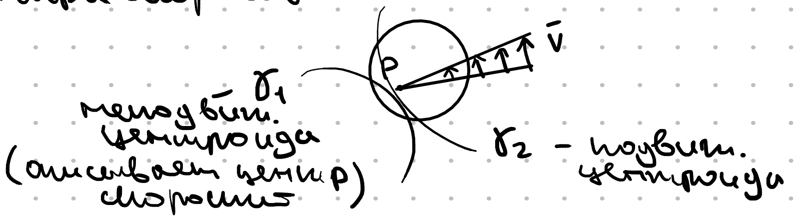
Найдем точку, где

$$\bar V_P = \bar 0 = \bar V_0 + \bar\omega\times\bar\rho \quad \Big|\cdot\bar\omega$$

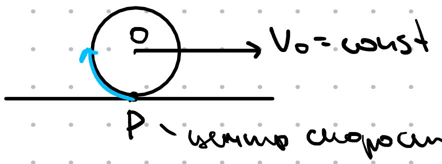
$$\bar\omega\times\bar V_0 - \omega^2\bar\rho_P = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\bar\rho_P = \frac{\bar\omega\times\bar V_0}{\omega^2}} \quad \Rightarrow$$

движение тела — вращение вокруг центра скорости



Пр.



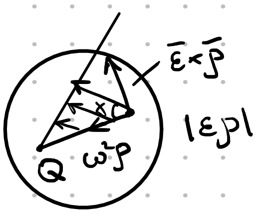
Качение без проскальз.

Центр ускорения Q

$$\bar w_Q = \bar 0 = \bar w_0 + \bar\varepsilon\times\bar\rho_Q - \omega^2\bar\rho_Q$$

$$\bar\varepsilon\times\bar w_0 - \bar\varepsilon^2\bar\rho_Q - \omega^2\,\bar\varepsilon\times\bar\rho_Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bar\rho_Q = \frac{\bar\varepsilon\times\bar w_0 + \omega^2\bar w_0}{\varepsilon^2+\omega^4}}$$

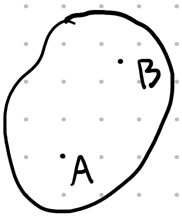
$$\bar\varepsilon\times\bar w_0 - \bar\varepsilon^2\bar\rho_Q - \omega^4\bar\rho_Q + \omega^2\bar w_0$$



$|\varepsilon\rho| = \varepsilon\rho$ $\quad$ $\operatorname{tg}\gamma = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$

Полезные факты для решения задач

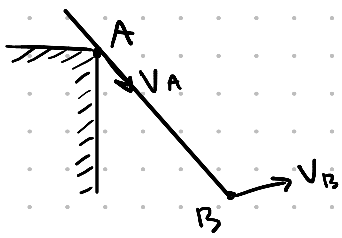
1.

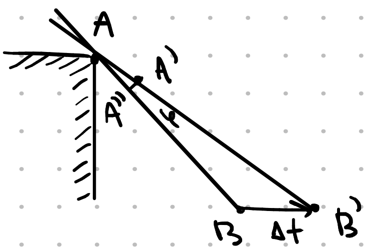


$$\bar V_B = \bar V_A + \bar\omega\times\bar{AB} \quad \Big|\cdot\bar e_{AB}$$

$\bar V_B\cdot\bar e_{AB} = \bar V_A\cdot\bar e_{AB}$ $\Rightarrow$ точки остаются на том же расст.

2.





$BB' \simeq \bar V_B\Delta t$

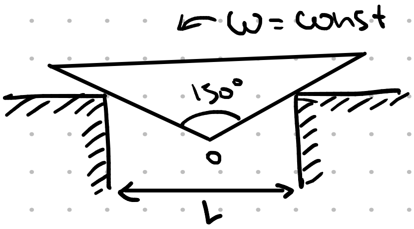
$$\bar{AA'} = \bar{AA''} + \bar{A''A'}$$

$$A''A' \simeq AA''\Delta\varphi$$

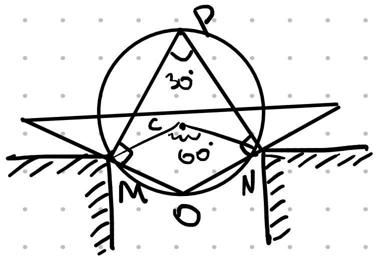
$$\bar V_A = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\bar{AA'}}{\Delta t} = \underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\bar{AA''}}{\Delta t}}_{V_A} + \underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\cancel{AA''\Delta\varphi}}{\Delta t}}_{V_A}$$

$\Rightarrow$ скорость в точке касания всегда направлена вдоль стержня

Пр.



$W_0 = ?$



$MN = L = 2R\sin 30 = R$

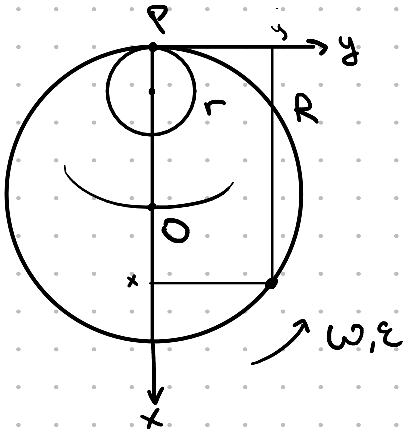
$PO = 2L$

$V_0 = 2\omega L$

т.О движется по окр. со ск. $V_0 = 2\omega L$

$$\Rightarrow \quad W_0 = \frac{V_0^2}{R} = 4\omega^2 L$$

Пр.

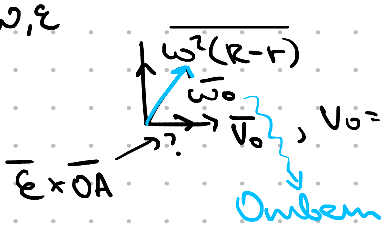


без проскальз.,
ω, ε — заданы

$$\bar V_0 = \bar\omega \times \bar\rho_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega R \\ 0 \end{bmatrix}$$
(геом. сообр.)

$$\bar V = \bar V_0 + \bar\omega \times \bar\rho \leftarrow \bar\rho = \begin{bmatrix} x \\ y - R \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar W = \bar W_0 + \bar\varepsilon \times \bar\rho - \omega^2 \bar\rho$$



, $V_0 = \omega R$

фиктивное тв. тело

Ω — угл.ск. АО

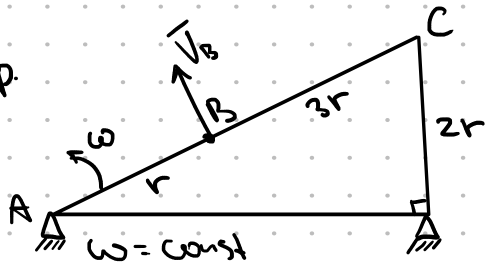
$V_0 = \omega R = \Omega(R - r)$

$\Omega = \frac{R}{R-r}\omega \;; \quad \varepsilon = \frac{R}{R-r}\varepsilon$

Как помнить $\bar a \times \bar b$?

$$\left\{ \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 b^3 - a^3 b^2 \\ a^3 b^1 - a^1 b^3 \\ a^1 b^2 - a^2 b^1 \end{bmatrix} \right.$$ — поочерёдно закрываем строчки и умн. по диагоналям }

Пр.



V_c?

ω_c?

$$\bar V_B \cdot \overline{BC} = 0 = \bar V_c \cdot \overline{BC} = \underbrace{V_c}_{0} \cdot BC \cdot \cos 30$$

$$\Rightarrow \quad V_c = 0$$