Кватернионы

$$X = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \bar{x} \end{bmatrix} = |x| \cdot \begin{bmatrix} \frac{x_0}{|x|} \\ \frac{\bar{x}}{|x|} \end{bmatrix} = |x| \cdot \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \bar{\xi}\cdot\sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$\|X\| = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$\left(\frac{x_0}{|x|}\right)^2 + \frac{(\bar{x})^2}{|x|^2} = \frac{x_0^2 + \ldots + x_3^2}{|x|^2} = \frac{\|X\|}{\|X\|} = 1$$

$$\underbrace{}_{\cos^2\varphi} \quad \underbrace{}_{\sin^2\varphi}$$

В другом виде:

$$X = x_0 + \bar{x} = x_0\bar{i}_0 + x_1\bar{i}_1 + \ldots + x_3\bar{i}_3$$

гиперкомплексное число

Умножение Кватернионов:

$$X \circ Y = \begin{bmatrix} x_0 \\ \bar{x} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} y_0 \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 y_0 - (\bar{x},\bar{y}) \\ x_0\bar{y} + y_0\bar{x} + [\bar{x},\bar{y}] \end{bmatrix}$$

есть все свойства
кроме коммутативности

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} x_0 \\ -\bar{x} \end{bmatrix}$$

$$X \circ \tilde{X} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \bar{x} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} x_0 \\ -\bar{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0^2 - (\bar{x},-\bar{x}) \\ x_0\bar{x} - x_0\bar{x} + [\bar{x},-\bar{x}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$
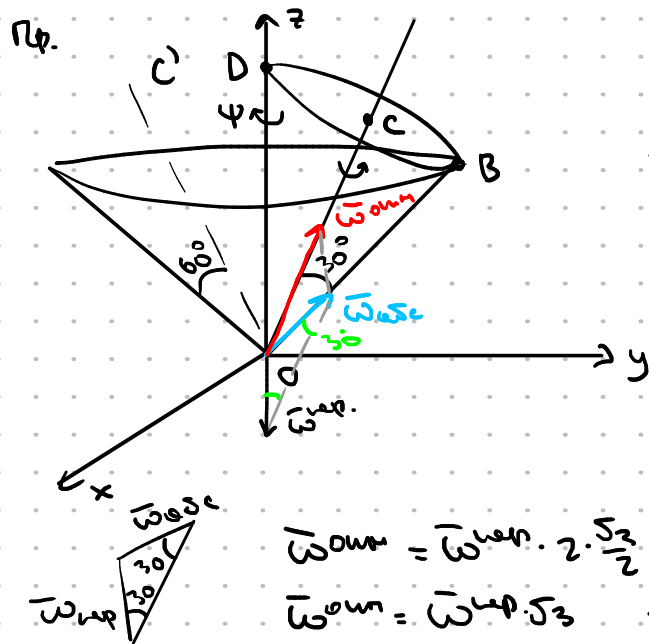
$$X \circ \frac{\tilde{X}}{\|X\|} = 1 \qquad \Rightarrow \quad X^{-1} = \frac{\tilde{X}}{\|X\|}$$

Пр. Д-во. $X \circ (Y \circ Z) = (X \circ Y) \circ Z$

Реш: честно расписали

Пусть

Th. Поворот тела вокруг оси описывается кватернионом Λ
то есть $\bar{\xi}' = \Lambda \circ \bar{\xi} \circ \tilde{\Lambda}$

Th. Композиция двух поворотов X_1, X_2 равна: $X_{12} = X_2 \circ X_1$

Пр.

$$\bar{\omega}^{абс} = \bar{\omega}^{пер} + \bar{\omega}^{отн} \qquad \bar{\omega}^{абс} \parallel OB$$

т.и.

I-ое: переносн.   OB — мгновенная
II-ое: относ.   ось вращения

$$\psi(t) = \int_0^t \omega_{пер}(t)\,dt \qquad \text{т.к. } \dot\psi = \omega_{пер}.$$
$$\dot\varphi = \omega_{отн}.$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \cos\psi/2 \\ -\bar{i}_3\sin\psi/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\psi=\delta} \begin{bmatrix} \cos\delta/2 \\ -\bar{i}_3\sin\frac{\delta}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\omega}^{отн} = \bar{\omega}^{пер} \cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\bar{\omega}^{отн} = \bar{\omega}^{пер}\cdot\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \sqrt{3}\delta$$

$$N = M = \Lambda$$

$$X = \frac{\tilde{X}}{|x|} \qquad M^{отн} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}\delta \\ \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\sqrt{3}\delta}{2} \\ 0 \\ -1/2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\delta \\ \sqrt{3}/2\sin\frac{\sqrt{3}\delta}{2} \end{bmatrix}$$

писс. м. зр:
собств. Ивект-ы —
Ивект. в собств. осях