Орт. матрицы:

$A^TA=E$ => Свойства:

1. $\det A = \pm 1$
2. $A^{-1} = A^T$
3. $\forall$ орт.м. A, B $C=AB$ – орт. матрица
   $C^TC = B^T \underbrace{A^TA}_{E} B = E$ ч.т.д
4. Орт.м. образуют группу

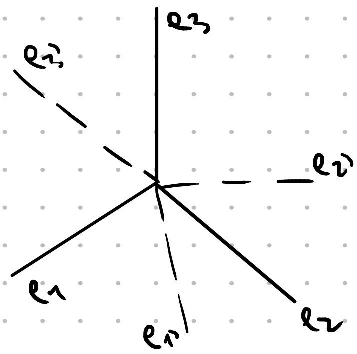
опр: G – группа:

1. $\forall A,B \in G$ $C=AB\in G$
2. $A(BC)=(AB)C$
3. $\exists E\in G:$ $AE=EA$ $\forall A\in G$
4. $\forall A\in G: \exists A^{-1}\in G: A^{-1}A = AA^{-1}=E$

Обозн: $O(3)$ – группа орт матриц, таких что $A^TA=E$
$SO(3)$ – спец. орт. группа: $\forall A\in SO(3)$ $\det A = 1$
↑ размерность пространства

аналогично: $O(n)$, $SO(n)$

5. $SO(3)$ – основная мат. модель тв. тела с неподвижной точкой



$\bar e_{i'} = a^i_{i'} \cdot \bar e_i$ столбец / строка

$$A = \begin{bmatrix} a^1_{1'} & \\ a^2_{1'} & \dots \\ a^3_{1'} & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{1'} & e_{2'} & e_{3'} \end{bmatrix}$$

↑ коорд. $e_{1'}$ в баз. e — в базисе e

$\bar e_i \cdot \bar e_{j'} = a^i_{j'} \cdot \underbrace{\bar e_i \cdot \bar e_j}_{\delta_{ij}} = a^j_{i'}$

$j \to i$
=> $a^i_{i'} = \cos(e_i \hat{,} e_{i'})$

=> A – матр. напр. косинусов

Таким образом, вз-однозн. соответствие между положениями тв. тела и $A\in SO(3)$

$A = [\bar a_1 \; \bar a_2 \; \bar a_3]$

$\left\{ \begin{array}{l} \bar a_i \cdot \bar a_j = \delta_{ij} \text{ т.к. столбцы взаимно ортогональны} \\ \text{6 независимых формул} \end{array} \right.$

=> $A\in SO(3)$ – 3^x мерное многообразие в $9^{\text{мерн.}}$ пр-ве матриц.

6. $a^i_{i'} = \Delta^i_{i'}$
   ↑ эл-т матрицы ↑ алг. доп. $a^i_{i'}$

$A^{-1} = \dfrac{[\Delta^i_{i'}]^T}{\det A = 1} = A^T$ => ч.т.д

Собств. векторы и собств. числа орт. матриц.

$A\bar r = \lambda \bar r$ => $\det(\lambda E - A) = 0$

=> $\lambda^3 - \lambda^2 \cdot \operatorname{tr} A + \lambda \cdot \operatorname{tr} A - 1 = 0$, $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{3} a^i_i$

$\lambda_1 = 1$ => всегда $\exists \bar r_1: A\bar r_1 = 1$

↖ инвариантный вектор в любом пр-ве

$A\bar r_a = \lambda_a \bar r_a$ $\qquad$ $A^+ = \overline{A^T}$ — эрмит. сопряж. — комплексное сопряж. + транспонирование

$$\underbrace{\bar r_a^+ \underbrace{A^+ A}_{E} \bar r_a}_{|r_a|^2} = \underbrace{\lambda_a^+ \lambda_a}_{|\lambda_a|^2} \underbrace{\bar r_a^+ \bar r_a}_{p^Tp+q^Tq=|r_a|^2>0}$$

$\Rightarrow |\lambda_a| = 1$

все собств. числа имеют модуль 1

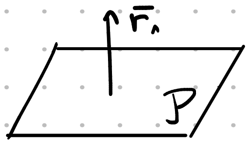
$$\lambda_{2,3} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi = \frac{trA-1}{2} \pm i\sqrt{1-\frac{(trA-1)^2}{4}}$$

док-во дальше

пара сопряж. $\quad$ нормир.

$\bar r_{2,3} = p \mp iq$ $\qquad$ $\{\bar r_1, \bar p, \bar q\}$ — правый ОНБ без док-ва.

Пусть $P \perp \bar r_1$; Тогда P — инвар. подпр-во



▷ $\exists \bar r \in P$ $\quad P \perp \bar r_1$ $\quad A\bar r$ - ?

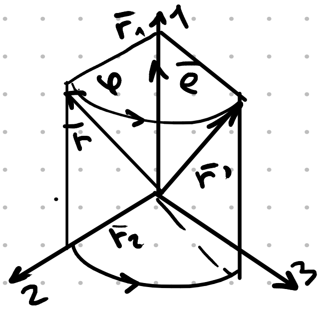
$$\underbrace{(A\bar r)^T \bar r_1 = \bar r^T \underbrace{A^T \bar r_1}_{\bar r_1}}_{0} \qquad A\bar r_1 = \bar r_1 \Rightarrow A^T\bar r_1 = \bar r_1$$

$\Rightarrow A\bar r \in P$ ◁

Теорема Эйлера о конечном повороте

$\forall$ двух полож. тела с неподв. точкой $\exists \bar e$ и угол φ конечного поворота, совмещающие положения тела.

Связь орт. матрицы и параметров Эйлерова поворота



$\bar r = \bar r_1 + \bar r_2$; $\quad \bar r_1 = \langle \bar r \cdot \bar e \rangle \bar e$

$\bar r_2 = \bar r - \langle \bar r \cdot \bar e \rangle \bar e$

$\bar e_2 = \frac{\bar r_2}{r_2}$ — проекция вектора на ось 2

$\bar r_1, \bar e_2, \bar e_3$ — базис; $\bar e_1 = \bar e$

$$\bar e_3 = \bar e_1 \times \bar e_2 = \bar e \times \frac{\bar r - \langle \bar r \bar e \rangle \bar e}{r_2} = \frac{\bar e \times \bar r}{r_2}$$

$$\bar r' = \bar r_1 + r_2\cos\varphi\, \bar e_2 + r_2 \sin\varphi\, \bar e_3 = \langle \bar r \bar e \rangle \bar e + (\bar r - \langle \bar r \bar e \rangle \bar e)\cos\varphi + \hat e \bar r \sin\varphi =$$
$$= \left(E\cos\varphi + \hat e \sin\varphi + (1-\cos\varphi)\bar e \bar e^T\right)\bar r$$

$$ee^T = \begin{bmatrix} (e^1)^2 & e^1e^2 & e^1e^3 & \dots \\ e^2e^1 & & \dots & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

$\hat e \bar r = \bar e \times \bar r$; $\quad \hat e = \begin{bmatrix} 0 & -e^3 & e^2 \\ e^3 & 0 & -e^2 \\ -e^2 & e^2 & 0 \end{bmatrix}$

оператор векторного произведения

симм. $\quad$ кососимм. $\quad$ симм.

$$\Rightarrow \quad A = E\cos\varphi + \hat e \sin\varphi + (1-\cos\varphi)\bar e \bar e^T \quad (2)$$

$$\bar e(\bar e \times \bar r) = \langle \bar e \cdot \bar r \rangle \bar e - \bar r(\bar e \bar e = 1) = (ee^T - E)\bar r$$

$$A = E + \hat e \sin\varphi + \hat e^2 (1-\cos\varphi)$$

* Пусть $\bar\varphi = \bar e\varphi$ — вектор Эйлера

$\bar\varphi \to \hat\varphi$

Тогда: $A = e^{\hat\varphi}$ — доказывается разложением в ряд Т-ра

Выражение парам. Эйлерова поворота через эл-ты матрицы

Из (2) $\Rightarrow$ $\mathrm{tr}\,E = 3$; $\mathrm{tr}\,\hat e = 0$; $\mathrm{tr}\,\bar e\bar e^T = 3$

$\Rightarrow$ $\mathrm{tr}\,A = 3\cos\varphi + 1 - \cos\varphi$ $\Rightarrow$ $\cos\varphi = \dfrac{\mathrm{tr}A - 1}{2}$;

φ — угол Эйл-го поворота

$A = [a^i_j]$ (строка, столбец) $\quad a^3_2 - a^2_3 = 2e^1\sin\varphi$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^1 = \dfrac{a^3_2 - a^2_3}{\sin\varphi} \\ e^2 = \dfrac{a^1_3 - a^3_1}{\sin\varphi} \\ e^3 = \dfrac{a^2_1 - a^1_2}{\sin\varphi} \end{cases}$$

$\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi}$

Получили, что $\varphi \in [0, \pi]$!

то есть $\sin\varphi > 0$

Оператор малого поворота

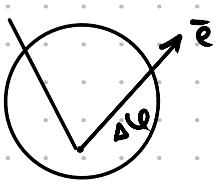
Если $\varphi \ll 1$, то $A \approx E + \hat\varphi$ — оператор малого поворота

* Пусть $A(t) \in SO(n)$ $\quad A(0) = E$

$A^TA = E \,\Big|\, \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}$ $\Rightarrow$ $\dot A^T\underbrace{A}_{E} + \underbrace{A^T}_{E}\dot A\,\Big|_{t=0} = 0$ $\Rightarrow$ $\dot A^T(0) = -\underbrace{\dot A(0)}_{\hat\omega}$

$\Rightarrow$ $A \approx E + \Delta t\,\hat\omega$ — в n-мерном случае

Угловая скорость тв. тела



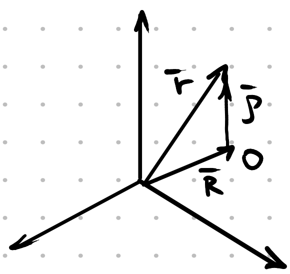
$\Delta\bar\varphi = \bar e\Delta\varphi$

$\bar\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta\bar\varphi}{\Delta t}$ — угловая скорость тв. тела

только в 3-мерном.

* Угловая скорость не зависит от полюса

Распределение скоростей и ускорений в тв. теле.



$\bar r = \bar R + \bar\rho$

$\bar v = \dot{\bar r} = \underbrace{\dot{\bar R}}_{\bar v_0} + \dot{\bar\rho}$

$[t, t+\Delta t]$:

$\bar\rho(t+\Delta t) = (E + \Delta\hat\varphi)\bar\rho(t)$

$\Rightarrow$ $\dot{\bar\rho} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta\hat\varphi}{\Delta t}\bar\rho = \hat\omega\bar\rho = \bar\omega \times \bar\rho$

$\Rightarrow$ $\bar v = \bar v_0 + \bar\omega\bar\rho$

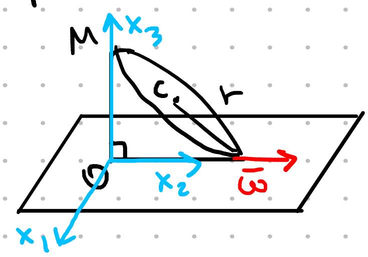
Ф-ла Эйлера

$\bar w = \dot{\bar v} = \bar w_0 + \bar\varepsilon \times \bar\rho + \bar\omega(\bar\omega \times \bar\rho)$ $\qquad \bar\varepsilon = \dot{\bar\omega}$

Ф-ла Ривальса

Семинар

№1



$\bar\omega$ находится на неподвижн. прямой

Дано: $r, \omega = const$; движ. без проскальз.

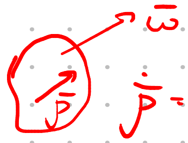
$\bar V_M, \bar W_M, \rho_M, \bar\omega, \bar\varepsilon$ - ?

$\bar V = \cancel{\bar V_0}^{\,0} + \bar\omega \times \bar\rho$

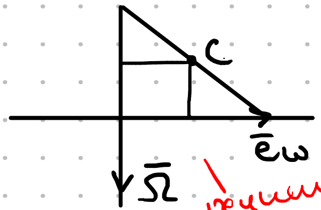
$$\bar\omega = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar V_M = \bar\omega \times \bar\rho_M = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt2 r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt2 \omega r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\bar\omega = \omega \bar e_\omega, \quad \bar e_\omega = \frac{\bar\omega}{\omega}$

$\bar\varepsilon = \dot\omega \bar e_\omega + \omega \dot{\bar e}_\omega \Rightarrow \bar\varepsilon = \omega \bar\Omega \times \bar e_\omega$



$\dot{\bar\rho} = \bar\omega \times \bar\rho$



фиктивное тело

$\bar V_C = \bar\omega \times \bar\rho_C = \bar\Omega \cdot \bar\rho_C$

$x_1: \ \omega \frac{r}{\sqrt2} = \Omega \cdot \frac{r}{\sqrt2} \Rightarrow \Omega = \omega \qquad \bar\Omega = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \bar\varepsilon = \omega^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar W_M = \underbrace{\bar\varepsilon \times \bar\rho_M}_{\perp \tau} + \underbrace{\bar\omega \times (\bar\omega \times \bar\rho_M)}_{V_M \ \perp \tau}$$

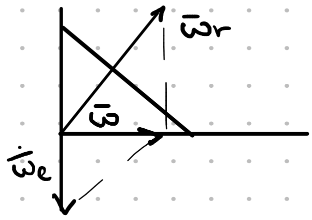
$$\bar W_M = \dot W_M^\tau \bar\tau + \frac{V_M^2}{\rho_M} \bar n$$

$\bar V_M \parallel x_1 \Rightarrow \bar\tau = \bar x_1$

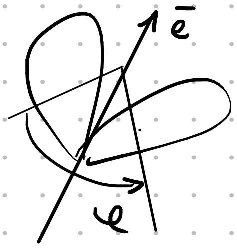
$\Rightarrow \bar W_M = \bar W_{Mn} = \frac{V_M^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \dots$

$\Rightarrow$ Ответ: ...

Представление движения как сложного



Ортогональные матрицы



$A \qquad \bar r_1, \bar e$ - ?

$A \bar r_1 = \bar r_1 \Rightarrow \bar r_1$

$A = E\cos\varphi + \hat e \sin\varphi + (1 - \cos\varphi)\bar e \bar e^T$

$\mathrm{tr} A = 3\cos\varphi + 0 + 1 - \cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\mathrm{tr} A - 1}{2}$

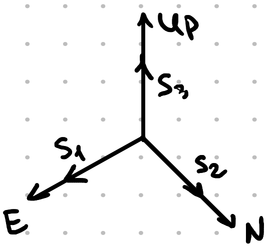
$$\hat e = \begin{bmatrix} 0 & -e^3 & e^2 \\ e^3 & 0 & -e^1 \\ -e^2 & e^1 & 0 \end{bmatrix}$$

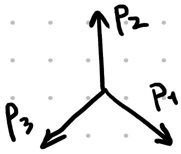
$$e^1 = \frac{1}{2\sin\varphi}(a_2^3 - a_3^2)$$

$$e^2 = \frac{1}{2\sin\varphi}(a_3^1 - a_1^3)$$

$$e^3 = \frac{1}{2\sin\varphi}(a_1^2 - a_2^1)$$

№2 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $\bar e, \varphi$ - ?

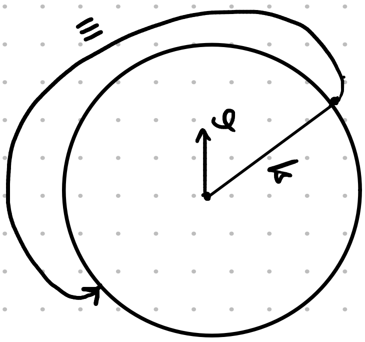




$\cos\varphi = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$

$\sin\varphi = \frac{\sqrt3}{2}$

$e^1 = \frac{1}{\sqrt3}$ $e^2 = \frac{1}{\sqrt3}$ $e^3 = \frac{1}{\sqrt3}$ $\Rightarrow$ $\bar e = \frac{1}{\sqrt3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

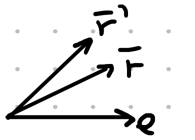


шар со всеми склеенными по краям друг с другом точками

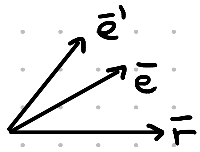
Геом. интерпретация SO(3)

Сложение поворотов

Повороты → Активные – преобр. вектора



Повороты → Пассивные – преобр. базиса



Акт $\bar r' = A\bar r$

Пасс $\bar e_{i'} = a^i_{i'}\bar e_i$

$\bar e_{i'} = A\bar e_i$

считаем отношения, что меняем базис, а вектор неизменным

$\bar r^{(1)} = r^{i'} \cdot e_{i'} = r^{i'} a^i_{i'} e_i = r^i \bar e_i$

$r^i = a^i_{i'} \cdot r^{i'} \Leftrightarrow \bar r = A r^{(1)} \Rightarrow r^{(1)} = A^T r$

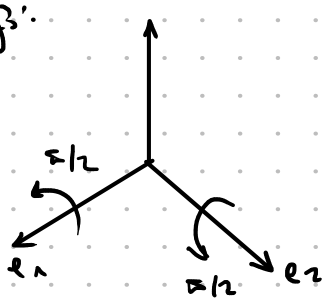
Слож. акт. поворотов

$r' = A_1\bar r$; $\bar r'' = A_2\bar r'$ $\Rightarrow$ $\bar r'' = \underbrace{A_2A_1}_{A}\bar r$ $\Rightarrow$ $A = A_n\cdots A_1$

Слож. пасс поворотов

$\bar r^{(1)} = A_1^T\bar r$; $\bar r^{(11)} = A_2^T r^{(1)} = (\underbrace{A_1A_2}_{A})^T\bar r$ $\Rightarrow$ $A = A_1\cdots A_n$

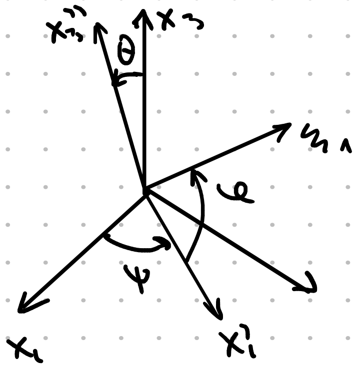
Из дз:



Базис вращается

$A = A_2 \cdot A_1$

Из ДЗ: Углы Эйлера



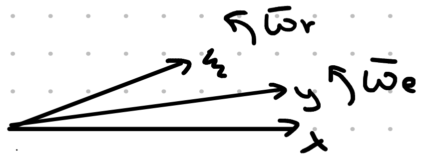
$A(\psi, \theta, \varphi)$?

$A = A_\psi \cdot A_\theta \cdot A_\varphi$

$$A_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

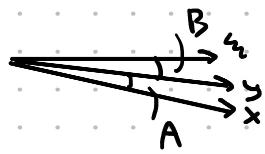
Сложение угловых скоростей



$\bar\omega$ – ? абсолют.

$t=0 \longrightarrow x, y, \xi$

Δt



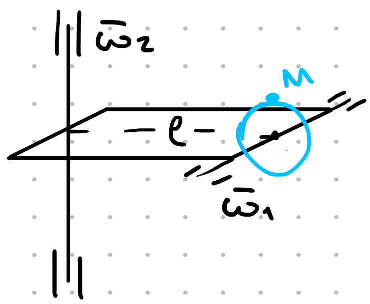
$A \simeq E + \hat\omega_e \Delta t$

$B \simeq E + \hat\omega_r \Delta t$

$C = AB \simeq E + \underbrace{(\hat\omega_e + \hat\omega_r)}_{\hat\omega} \Delta t$

$\Rightarrow$ доказали теор. о сложении угл. скоростей – $\bar\omega = \bar\omega_e + \bar\omega_r$

Пр.



ω_1, ω_2 – const

$\bar\omega, \bar\varepsilon, \bar V_M, \bar W_M$ – ?

$\bar\omega = \bar\omega_e + \omega_r^i \bar y_i$

$\bar\varepsilon = \dot{\bar\omega}_e + \dot\omega_r^i \bar y_i + \underbrace{\omega_r^i \bar\omega_e \times \bar y_i}_{\bar\omega_e \times \bar\omega_r} \Rightarrow \bar\varepsilon = \bar\varepsilon_e + \bar\varepsilon_r + \bar\omega_e \times \bar\omega_r$

$\bar\omega = \bar\omega_1 + \bar\omega_2$

$\bar\varepsilon = \bar\omega_2 \times \bar\omega_1$

$\bar V_M = \underbrace{\bar V_O}_{\bar\omega_2 \times \overline{PO}} + \bar\omega \times \overline{OM}$

$\bar W_M = \bar W_O + \bar\varepsilon \times \overline{OM} + \bar\omega \times (\bar\omega \times \overline{OM})$

$\bar W_O = \bar\omega_2 \times (\bar\omega_2 \times \overline{PO}) = -\omega_2^2 \overline{PO}$

$\Rightarrow$ Ответ: ...