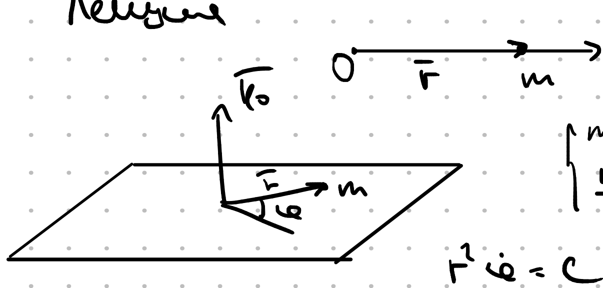
Лекция



$\vec{F} \parallel \vec{r}$

$$\begin{cases} m(\ddot r - r\dot\varphi^2) = F \quad \left(\vec F = F\cdot\frac{\vec r}{r}\right) \\ \frac{m}{r}(r^2\dot\varphi)^{\cdot} = 0 \end{cases}$$

$r^2\dot\varphi = C$ — II з-н Кеплера

Потенциальность центральных сил

$$\delta A = F dr \overset{?}{=} -\Pi_{,r}dr - \Pi_{,\varphi}d\varphi \Rightarrow \Pi_{,\varphi} = 0 \Rightarrow \Pi = \Pi(r);\ F = F(r)$$

F - потенц. $\Leftrightarrow F = F(r)$

$$\Pi = \int F(r)dr$$

v^2 в пол. коорд.

Если F - пот. $\Rightarrow \begin{cases} \frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) + \Pi(r) = E = const \\ r^2\dot\varphi = C \end{cases}$

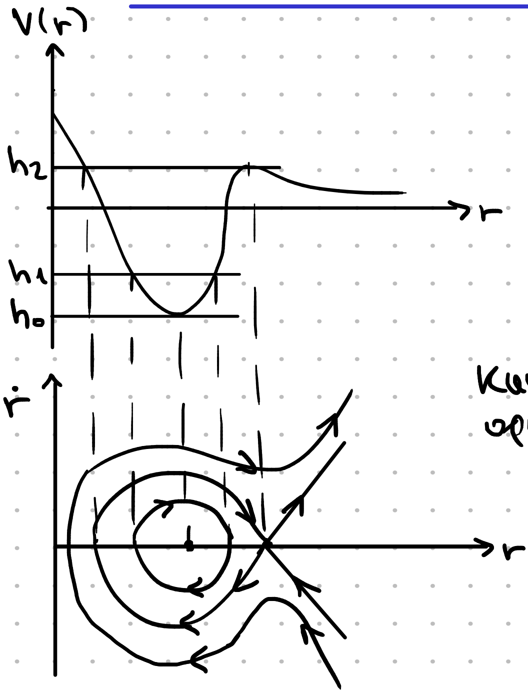
$$\Rightarrow \dot r^2 + \underbrace{\frac{C^2}{r^2} + \frac{2\Pi}{m}}_{V(r)\text{ - приведенный (эфф.) потенциал}} = \frac{2E}{m} = h \text{ - приведенная энергия}$$

Интегрирование в квадратурах

$$\pm\int\frac{dr}{\sqrt{h - V(r)}} = t + const \longrightarrow \text{отсюда можно получить } r(t)$$

$$\dot\varphi = \frac{C}{r^2(t)} \Rightarrow \varphi(t) = \int\frac{C\,dt}{r(t)} + const$$

Изображение на фазовой плоскости



Кач. картина на фазовой плоскости

Уравнение Бине

$$\ddot r - r\dot\varphi^2 = F/m$$
$$r^2\dot\varphi = c \quad \Rightarrow \quad \ddot r - \frac{c^2}{r^3} = \frac{F}{m}$$

Подстановка Бине:

$u = 1/r$, $\quad t \to \varphi$

$r = 1/u$

$$\dot r = -\frac{u'}{u^2}\dot\varphi = -c\,u'$$

$' = d/d\varphi$

$r' = \frac{dr}{d\varphi}$

$$\ddot r = -cu''\cdot\dot\varphi = -c^2u^2u''$$

$$-cu^2u'' - c^2u^3 = \frac{F}{m} \quad \Rightarrow \quad u'' + u = -\frac{F}{mc^2u^2} \quad (1)$$

Ур-ие Бине

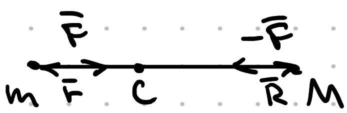
Если $F = F(r) = F(u^{-1})$, то (1) интегр.

Если $F = F(t, r, \varphi, \dot r, \dot\varphi) \to F(t, u^{-1}, \varphi, -cu', cu^2)$

препятствует интегрированию

⇒ подст. Бине имеет смысл только если F не зависит явно от t

Задача двух тел



по т. о движ. ц. масс:

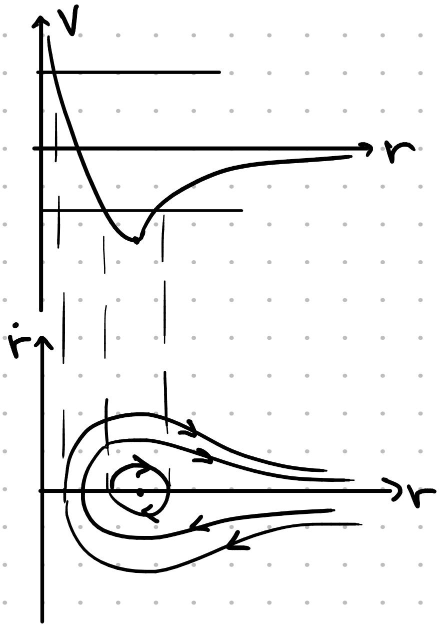
$$m\bar r + M\bar R = 0$$
$$\bar F = -\gamma m M\frac{\bar r - \bar R}{|\bar r - \bar R|^3}$$

$$\Rightarrow \bar F = -\frac{\gamma m M}{(1+\frac{m}{M})^2}\cdot\frac{\bar r}{r^3} = -km\cdot\frac{\bar r}{r^3}$$

движ. в центральном поле

Представление движ. на фаз. пл-ти

$$F = -\frac{mk}{r^2} \to \Pi = -\frac{mk}{r} \Rightarrow \dot r^2 + \frac{c^2}{r^2} - \frac{2k}{r} = h$$



Реш. ур-ие Бине

$F = -mku^2$

$u'' + u = \frac{k}{c^2} \Rightarrow$

$u = \frac{k}{c^2} + A\cos(\varphi + \varphi_0)$

$\Leftrightarrow \; r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi+\varphi_0)}$ — ур-ие конического сечения

$p = \frac{c^2}{k}$ — параметр орбиты (фокальный)

e — эксцентриситет орбиты

(2) $e < 1$ — эллипс; $e = 1$ — парабола; $e > 1$ — гипербола — $1^{\text{й}}$ закон Кеплера: планеты движ. по эллипсам, в фокусе которых Солнце.

Выражение для e

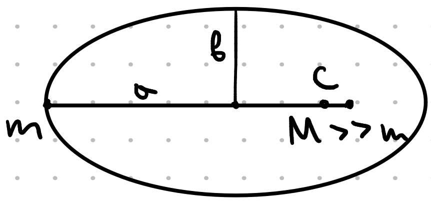
$\cancel{\dot r^2}^{\,0} + \frac{c^2}{r^2} - \frac{2k}{r} = h \,\Big|_{r = r_{min}}$

$\frac{c^2(1+e)^2}{p^2} - \frac{2k(1+e)}{p} = h$

$p = c^2/k \Rightarrow \frac{k^2(1+e)^2}{c^2} - \frac{2k^2(1+e)}{c^2} = h$

$1 + 2e + e^2 - 2 - 2e = \frac{hc^2}{k^2} \Rightarrow e = \sqrt{1 + \frac{hc^2}{k^2}} \Rightarrow (2)$

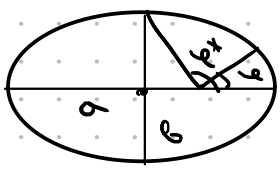
Третий закон Кеплера



$\frac{T^3}{a^3}$ — ?

$\underbrace{cT}_{2S} = 2\pi ab \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{c^2}$

$\Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 b^2}{a c^2}$ $(\Rightarrow)$



$\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = 2a \Rightarrow a = \frac{p}{1-e^2}$

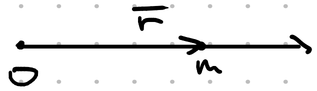
$r(\varphi^*) = a = \frac{p}{1 + e\cos\varphi^*} = \frac{p}{1-e^2}$

$\Rightarrow \cos\varphi^* = -e; \quad b = a\sin\varphi^* = a\sqrt{1-e^2} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$

$(\Rightarrow) \; \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 \frac{p^2}{1-e^2}}{\frac{p}{1-e^2}c^2} = \left[p = c^2/k\right] = \frac{4\pi^2}{k}$ $\quad k = \frac{\gamma m}{(1+\frac{m}{M})^2} \simeq \gamma m$

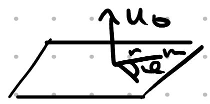
$\Rightarrow \frac{T_1^2}{a_1^3} \simeq \frac{T_2^2}{a_2^3} \simeq \ldots$

Семинар



$\bar F \parallel \bar r$

$\bar{\mathcal{K}}_0 = const$



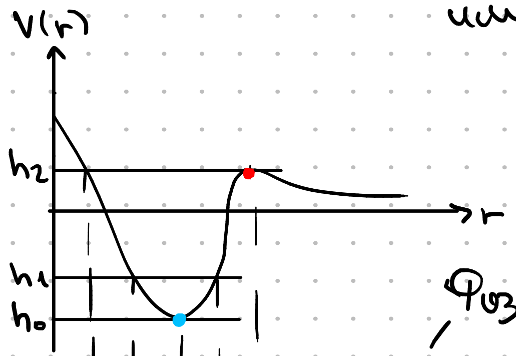
$$\begin{cases} m(\ddot r - r\dot\varphi^2) = F & \left(\bar F \cdot \frac{\bar r}{r}\right) \\ \frac{m}{r}(r^2\dot\varphi)' = 0 \end{cases}$$

$$\delta A = F\,dr + 0\,d\varphi = -\Pi_{,r}\,dr - \underbrace{\Pi_{,\varphi}}_{0}\,d\varphi$$

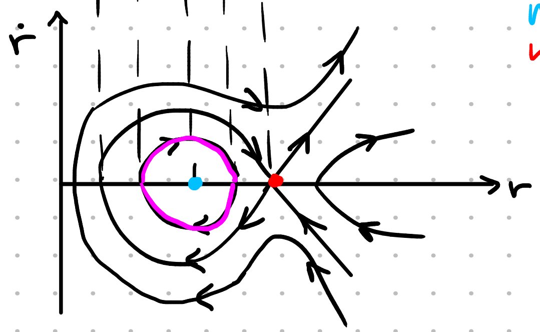
$$\Pi = \Pi(r) = -\int F(r)\,dr$$

Интеграл энергии: $\frac{m}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) + \Pi(r) = E = const$

или $\dot r^2 + \underbrace{\frac{c^2}{r^2} + \Pi(r)}_{V(r)} = h = \frac{2E}{m} = const$



Фазовый портрет



полож. равновесия

период стремится к ∞ (сепаратриса)

период. движение

Ситуация общего положения:
в $m(x,y)$ $f' = 0$, $f'' \neq 0$
(экстремум)

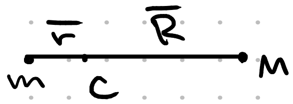
Ур-ие Бине

$u = 1/r$ $t \to \varphi$ $r^2\dot\varphi = c \Rightarrow \varphi(t)$ - монотонн
$\Rightarrow$ можно заменить t на φ

$m(\ddot r + r\dot\varphi^2) = F$

$$\Rightarrow u'' + u = -\frac{F}{mc^2u^2}$$

Задача 2х тел.



сведение к движ. 1 точки в поле:

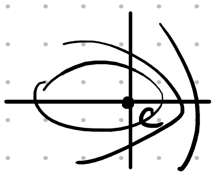
$$\bar F = -\frac{mk\bar r}{r^3}\ ; \ k = \frac{\gamma M}{\left(1+\frac{m}{M}\right)^2}$$

Из ур-ия Бине:

$$F = -mku^2 \Rightarrow u'' + u = \frac{k}{c^2}$$

$$u = \frac{p}{1+e\cos\varphi}\ ;\ p = \frac{c^2}{k}\ ;$$

$$r = \sqrt{1 + h\cdot\frac{c^2}{k^2}}$$

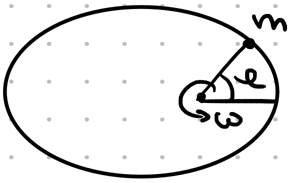


Задача из ДЗ про заряд:
все, что поменялось:

$$u'' + u = -\frac{k}{c^2}$$

$$u = \frac{p}{1+e\cos\varphi} - e > 1$$

Пр. 8.8. m, e $\quad \lambda = \frac{\omega_{max}}{\omega_{min}}$ - ?



$\omega = \dot\varphi$

$\lambda = \frac{\dot\varphi_{max}}{\dot\varphi_{min}}$

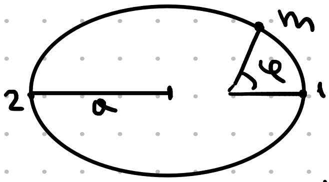
$r^2\dot\varphi = C$

$\dot\varphi_{max} = \frac{C}{r^2_{min}}$; $\dot\varphi_{min} = \frac{C}{r^2_{max}}$

$r_{min} = \frac{p}{1+e}$, $r_{max} = \frac{p}{1-e}$ $\Rightarrow$ $\lambda = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2$

Ответ

Пр.



a, m

E? — энергия спутника

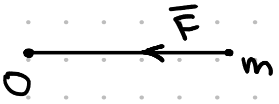
$r_{min} = \frac{p}{1+e}$ $\quad r_{max} = \frac{p}{1-e}$

$2a \overset{r_{min}+r_{max}}{=} \frac{2p}{1-e^2} = \frac{p}{1-1-h\frac{C^2}{k^2}} = -\frac{k}{h}$ $\Rightarrow$ $h = -\frac{k}{a}$

$E = \frac{m}{2}h = -\frac{mk}{2a}$

Ответ

Пр. $F = -\frac{\alpha}{r^2} - \frac{\beta}{r^3}$ $\quad$ Найти траекторию

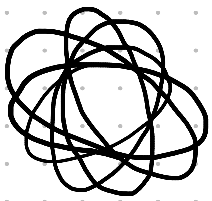


$u'' + u = -\frac{F}{mC^2u^2} = \frac{\alpha}{mC^2} + \frac{\beta u}{mC^2}$

$u'' + \left(1 - \frac{\beta u}{mC^2}\right)u = \frac{\alpha}{mC^2}$

$\omega^2 > 0 \Rightarrow$ $r = \frac{1}{u} = \frac{p}{1+e\cos(\omega\varphi)}$

$\exists\, \omega^2 = 1 - \frac{\beta}{mC^2} > 0$ и траектория финитна

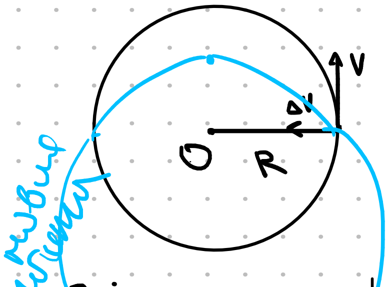


— прецессия эллипса $(T_r \neq T_\varphi)$

$\omega = \pi\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$

$\omega \neq \pi\frac{m}{n}$ $\Rightarrow$ тр. вида цветка в целом (зарисовываем всё кольцо $\forall$ т. $\exists\, t$: $m \in$ кольцо)

Пр. Найти перигел. новой орбиты



Орбита описывается: $r = \frac{p}{1+e\cos(\varphi+\varphi_0)}$ ← фаза

− до $\quad$ + после

$R = \frac{p^-}{1+0\cdot\cos(\varphi+\varphi_0)} \Rightarrow p^- = R$

$p = \frac{C^2}{k} \Rightarrow p^+ = p^- = R$

$r^2\dot\varphi = rV_\varphi = C$

$C = RV$

$e = \sqrt{1+h\frac{C^2}{k^2}}$ $\quad e^- = 0$

$h^- = V^2 - \frac{2k}{R}$; $h^+ = V^2 + \Delta V^2 - \frac{2k}{R}$

$h = \dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 - \frac{2k}{r}$

$\frac{V^2}{R} = \frac{k}{R^2} \Rightarrow k = RV^2$; $e^+ = \Delta V \cdot \frac{RV}{RV^2} = \frac{\Delta V}{V}$; $R = \frac{R}{1+\frac{\Delta V}{V}\cos\varphi_0} \Rightarrow \varphi_0 = \pm\pi/2$

$\dot r = \frac{Re^+\sin\varphi_0\,\dot\varphi_0}{(1+e^+\cos\varphi_0)^2} \overset{>0}{=} -\Delta V \Rightarrow \varphi_0 = -\pi/2$ — Ответ