Ф-ла Грина

$$\oint_{\partial G^+}(P\,dx+Q\,dy)=\iint_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$P,Q\in C^1(\bar G)$

∂G^+ – кусочн.

$$S_G=-\int_{\partial G^+} y\,dx=\int_{\partial G^+} x\,dy=\frac12\int_{\partial G^+}(x\,dy-y\,dx)$$

Пр. Найти площадь, огр. кривой

$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{12}=xy$

$x=r\cos^4\varphi$
$y=r\sin^4\varphi$ $\quad 0\le\varphi\le\pi/2$

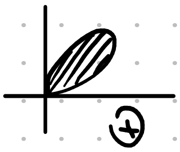
$(\sqrt{r})^{12}=r^2\cos^4\varphi\sin^4\varphi=r^6$

$r^2=\cos^4\varphi\sin^4\varphi$

$r=\cos\varphi\sin\varphi$

$x=\cos^5\varphi\sin\varphi$

$y=\sin^5\varphi\cos\varphi$



$$S=\frac12\int_0^{\pi/2}\left[\cos^5\varphi\sin\varphi(5\sin^4\varphi\cos^2\varphi-\sin^6\varphi)-\sin^5\varphi\cos\varphi(-5\cos^4\varphi\sin^2\varphi+\cos^6\varphi)\right]d\varphi=$$

$$=\frac12\int_0^{\pi/2}\left[4\cos^7\varphi\sin^5\varphi+4\cos^5\varphi\sin^7\varphi\right]d\varphi=2\int_0^{\pi/2}\cos^5\varphi\sin^5\varphi\,d\varphi=\frac1{16}\int_0^{\pi/2}\sin^5 2\varphi\,d\varphi=$$

$$=\underset{2\varphi=t}{\frac1{32}\int_0^{\pi}\sin^5 t\,dt}=\underset{u=\cos t}{\frac1{32}\int_{-1}^{1}(1-u^2)^2\,du}=\ldots=\frac1{16}\left(\frac1{3}+\frac15\right)=\underline{\frac1{30}}$$

Пр. Вычислить $\oint_\gamma\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$; γ – простая замкн. кус.-гл. кривая не сод. $(0,0)$

$P=-\frac{y}{x^2+y^2}\quad Q=\frac{x}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\qquad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

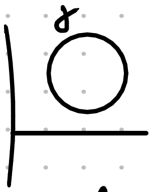
$\gamma=\partial G\quad \oint_\gamma=0$ по ф-ле Грина

$\gamma_a=\{x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ 0\le t\le 2\pi\}$

$$\oint=\int_0^{2\pi}\frac{a\cos t\,a\cos t-a\sin t(-a\sin t)}{a^2}dt=\int_0^{2\pi}dt=2\pi$$

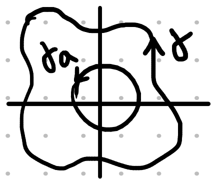
P и Q не явл. непр. дифф. в $\bar G$

Ф-лу Грина можно применить, если $(0,0)$ – вне γ



$\oint = 0$

А если $(0,0)$ внутри γ?



$\oint_{\gamma_a} = 2\pi$

G – неодносвязная обл. между γ и γ_a
$P, Q \in C^1(\bar G)$

$\Rightarrow$ к G применима ф-ла Грина

$$0 = \iint_G = \int_{\partial G^+} P dx + Q dy = \oint_\gamma + \oint_{\gamma_a} = \oint_\gamma - \oint_{\gamma_a}$$

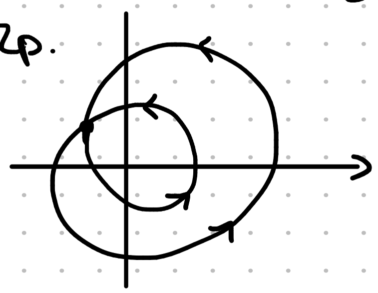
Отв: $\oint_\gamma \frac{x dy - y dx}{x^2+y^2} = \begin{cases} 0, & (0,0) \text{ вне } \gamma \\ 2\pi, & (0,0) \text{ внутри } \gamma \end{cases}$

Замечание: $\frac{x dy - y dx}{x^2+y^2} = d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = d\varphi$

$\oint_\gamma d\varphi = \Delta_\gamma \varphi$ – полное изм. φ на контуре γ $= \begin{cases} 0, & (0,0) \text{ вне } \gamma \\ 2\pi, & (0,0) \text{ внутри } \gamma \end{cases}$

– не строгое док-во, т.к. $\operatorname{arctg} y/x$ неоднозначна

Пр.



$\oint_\gamma \frac{x dy - y dx}{x^2+y^2} = \underline{4\pi}$

Поверхностные интегралы I рода

Простые гладкие поверхности (ПГП)

$G \subset \mathbb{R}^2_{u,v}$

$\Phi: \bar G \to \mathbb{R}^3_{xyz}$ $\quad$ Φ взаим. однозн. отобр. $\bar G$ на $S \subset \mathbb{R}^3$

S – пов-ть

простые – биективное отобр

$x = x(u,v)$
$y = y(u,v)$ $\quad (u,v) \in \bar G$
$z = z(u,v)$

$\bar r = \bar r(u,v)$ – вектор ф-ия

$\bar r(u,v) \subset C^1(\bar G)$

$[\bar r_u, \bar r_v] \neq \bar 0$ – гладкие

Поверх. инт. 1-го рода

S – ПГП, $\bar r = \bar r(u,v)$, $(u,v)\in \bar G$

$f(x,y,z)$ непр. на S

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_G f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot|[\bar r_u,\bar r_v]|\,du\,dv$$

из алгебры: $|[\bar a,\bar b]|^2 = |\bar a|^2\cdot|\bar b|^2 - (\bar a,\bar b)^2$

$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$

Пусть $|\bar r_u|^2=E$, $|\bar r_v|^2=G$, $(\bar r_u,\bar r_v)=F$

$\Rightarrow$ $|[\bar r_u,\bar r_v]| = \sqrt{EG-F^2}$ – аналогичное опр.

График непр. дифф. ф-ии $z=f(x,y)$; $(x,y)\in G$

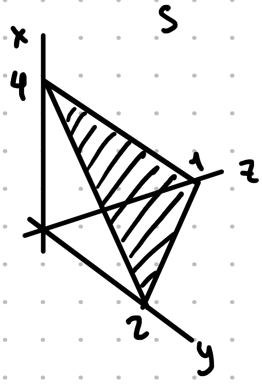
$x=x,\ y=y,\ z=f(x,y)$

$$[\bar r_x,\bar r_y] = \begin{vmatrix} \bar e_1 & \bar e_2 & \bar e_3 \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x\bar e_1 - f_y\bar e_2 + \bar e_3 \qquad \underline{|[\bar r_x,\bar r_y]| = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

Аналогично $x=f(y,z)$ $\quad |[\bar r_y,\bar r_z]| = \sqrt{1+f_y^2+f_z^2}$

(переход не важен)

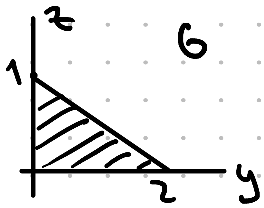
Пр. $\iint\limits_S (x+y+z)\,dS$ $\quad$ S – часть плоскости $x+2y+4z=4$, $x,y,z\geq 0$



$\underbrace{x=4-2y-4z}_{}$ $f(y,z)$

$y=y$

$z=z$



$$|[\bar r_y,\bar r_z]| = \sqrt{1+2^2+(-4)^2} = \sqrt{21}$$

$$\int_0^2 dy\int_0^{1-y/2}[4-2y-4z+y+z]\sqrt{21}\,dz = \sqrt{21}\int_0^2 dy\int_0^{1-y/2}[4-y-3z]\,dz =$$

$$=\sqrt{21}\int_0^2 dy\left((4-y)(1-y/2)-3/2(1-y/2)^2\right) = \sqrt{21}\int_0^2 4-y-2y+\frac{y^2}{2}-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}y-\frac{3}{8}y^2 =$$

$$=\sqrt{21}\left(\frac{5}{2}\cdot 2-\frac{3}{4}\cdot 4+\frac{1}{3}\right) = \underline{\frac{7}{3}\sqrt{21}}$$

Сфера

$x = R\cos\psi\cos\varphi \qquad 0 \le \varphi < 2\pi$

$y = R\cos\psi\sin\varphi \qquad -\pi/2 \le \psi \le \pi/2$

$z = R\sin\psi$

$[\bar{r}_\varphi, \bar{r}_\psi] = \ldots = R^2\cos\psi$

Пр. $\iint\limits_S (x+y+z)\,dS \qquad S$ – верхн. полусфера $x^2+y^2+z^2=1, \; z \geq 0$

$x = R\cos\psi\cos\varphi \qquad 0 \le \varphi < 2\pi$

$y = R\cos\psi\sin\varphi \qquad -\pi/2 \le \psi \le \pi/2 \qquad \left|[\bar{r}_\varphi, \bar{r}_\psi]\right| = \overset{=1}{R^2}\cos\psi = \cos\psi$

$z = R\sin\psi$

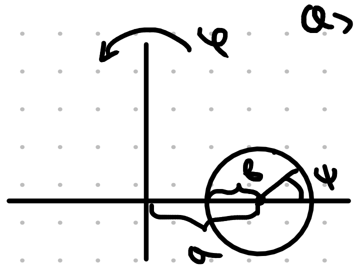
$\iint\limits_S (x+y+z)\,dS = \int\limits_0^{\pi/2} d\psi \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left[\cos\psi\cancel{\cos\varphi} + \cos\psi\cancel{\sin\varphi} + \sin\psi\right]\cdot\cos\psi =$

$\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi = 0$

$= 2\pi\int\limits_0^{\pi/2}\cos\psi\cdot\sin\psi\,d\psi = \pi\int\limits_0^{\pi/2}\sin 2\psi\,d\psi = \frac{-\pi\cos 2\psi}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \underline{\pi}$

пл. $S = \iint 1\,dS = \iint\limits_G \left|[\bar{r}_u, \bar{r}_v]\right| du\,dv$

Тор



$a > b$

$x = (a + b\cos\psi)\cos\varphi \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$y = (a + b\cos\psi)\sin\varphi \qquad 0 \le \psi \le 2\pi$

$z = b\sin\psi$

$[\bar{r}_\varphi, \bar{r}_\psi] = ab4\pi^2$