Задание 1 по диф. ур-ям, 3 сем

Халиши Виктории Б01-302

I

С1 №1.13

$$x^2=(c+y)e^y$$
$$c=\frac{x^2}{e^y}-y$$
$$0=\frac{2xe^y-e^y\cdot y'\cdot x^2}{e^{2y}}-y'$$
$$y'\cdot e^{2y}=2x\cancel{e^y}-y'\cdot x^2\cdot\cancel{e^y} \Rightarrow$$

Ответ: $y'(e^y+x^2)=2x$

С2 №2.7

$$yy'\cos x=(1-y)\sin x$$
$$\frac{y\,dy}{1-y}=\frac{\sin x\,dx}{\cos x} \Rightarrow \int\frac{-1+y+1}{1-y}dy=\int\frac{-d(\cos x)}{\cos x}$$
$$-\int dy-\int\frac{dy}{y-1}=\ln|\cos x|+C$$
$$-y=\ln|\cos x|+\ln|y-1|+C$$
$$\Rightarrow$$ Ответ: $y+\ln|y-1|+\ln|\cos x|+C=0$

№2.10

$$x(y+1)\,dy=(1-y^2)\,dx$$
$$\frac{(y+1)\,dy}{1-y^2}=\frac{dx}{x} \Rightarrow$$ $x=0$ – реш. $y=\pm1$ – реш.
$$\frac{dy}{1-y}=\frac{dx}{x} \Rightarrow -\ln|1-y|=\ln|x|+C$$
$$x(1-y)=C$$
$\Rightarrow$ Ответ: $x(1-y)=C$; $y=-1$

№2.44

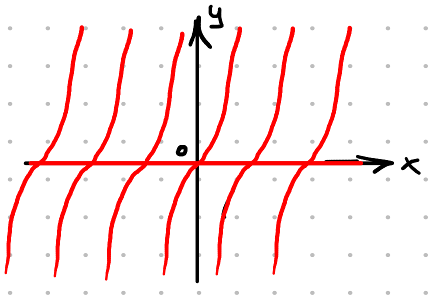
$y(1+Ce^x)=1$ орт. траектории?

$$1+Ce^x=\frac{1}{y}$$
$$C=\left(\frac{1}{y}-1\right)/e^x \quad C=\frac{1}{ye^x}-\frac{1}{e^x} \Rightarrow 0=-\frac{y'e^x+ye^x}{y^2e^{2x}}-\frac{e^x}{e^{2x}}=\frac{y'+y}{y^2e^x}-\frac{1}{e^x}$$
$$\Rightarrow y'-y^2+y=0=F(x,y,y')$$
$$F\left(x,y,-\frac{1}{y'}\right)=-\frac{1}{y'}-y^2+y=0$$
$$\frac{dx}{dy}=-y^2+y \qquad dx=-y^2dy+ydy$$
$$x=-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2+C \Rightarrow$$ Ответ: $x=\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3+C$

Ф №55

$$y'=3\sqrt[3]{y^2} \qquad y(2)=0$$
$$\frac{dy}{3y^{2/3}}=dx \rightarrow y=0 \text{ – реш.}$$
$$\frac{1}{3}\int\frac{dy}{y^{2/3}}=x \Rightarrow 3y^{1/3}=3x+C \Rightarrow y=(x+C)^3$$
в т. $y(2)=0$ $\quad C=-2 \Rightarrow y=(x-2)^3$; $y=0$

Инт. кривые



Ответ: $y=(x+C)^3$; $y=0$

частное: $y=(x-2)^3$; $y=0$

№62 $\quad y' = \cos(y-x)$

$z(x) = z = y - x \quad z' = y' - x' \quad y' = z' + x' \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} + 1$

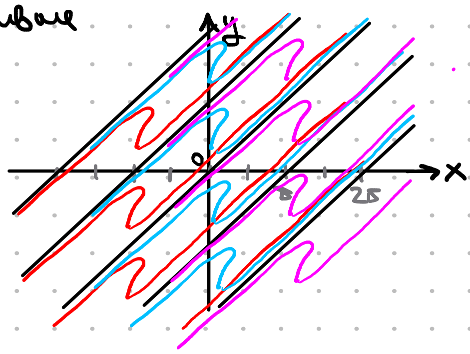
$\frac{dz}{dx} = \cos z - 1 \quad \leftarrow \quad y - x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ — реш.

$\frac{dz}{\cos z - 1} = dx \quad \Rightarrow \quad \operatorname{ctg}\frac{z}{2} + C = x \quad \Rightarrow$

Ответ:

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{ctg}\frac{y-x}{2} + C = x \\ y - x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Инт. кривые



С2

№2.59 $\quad x\,dy = \left(y + \sqrt{x^2+y^2}\right)dx, \quad x \geq 0$

$z = \frac{y}{x} \quad y = zx \quad dy = z\,dx + x\,dz$

$xz\,dx + x^2 dz = \left(zx + \sqrt{x^2(1+z^2)}\right)dx$

$\cancel{xz\,dx} + x^2 dz = \cancel{xz\,dx} + x\sqrt{1+z^2}\,dx \quad \leftarrow \quad x = 0$ — реш.

$x\,dz = \sqrt{1+z^2}\,dx$

$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}$

$\ln|x| = \ln|z + \sqrt{z+1}| + C$

$x = C(z + \sqrt{z+1})$

$x = C\left(\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y}{x} + 1}\right) \quad \Rightarrow$ Ответ: $\left[\begin{array}{l} y + \sqrt{y^2+x^2} = Cx^2 \\ x = 0 \end{array}\right.$

№2.73

$(2x - y - 2)\,dx + (x + y - 4)\,dy = 0$

$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} u = x - 2 \\ v = y - 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} x = u + 2 \\ y = v + 2 \end{array} \quad v = v(u)$

$-(v - 2u)\,du + (u + v)\,dv = 0$

$\frac{dv}{du} = \frac{v - 2u}{v + u} = \frac{v/u - 2}{v/u + 1} \qquad z(u) = \frac{v}{u} \qquad v = zu$

$\frac{dv}{du} = v' = z'u + z = \frac{z-2}{z+1}$

$\frac{dz}{du}u = \frac{z - 2 - z^2 - z}{z+1} = -\frac{z^2+2}{z+1}$

$\int \frac{-(z+1)\,dz}{z^2+2} = \int \frac{du}{u}$

$-\ln|u| = \int \frac{z\,dz}{z^2+2} + \int \frac{dz}{z^2+2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(z^2+2)}{z^2+2} + \int \frac{dz}{z^2+2} = \frac{1}{2}\ln|z^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}} + C_0$

$\ln|z^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{2}} = -2\ln|u| + C_0$

$(z^2+2)\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arctg} z/\sqrt{2}\right) = \frac{G}{u^2}$

$u^2\left(\frac{v^2}{u^2} + 2\right)\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arctg}\frac{v}{\sqrt{2}u}\right) = G$

$\left((y-2)^2 + 2(x-2)^2\right)\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arctg}\frac{y-2}{\sqrt{2}(x-2)}\right) = G$

$C \cdot \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{arctg}\frac{y-2}{\sqrt{2}(x-2)}\right) = y^2 - 4y + 2x^2 - 8x + 12$

Ответ:

$C \cdot \exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{y-2}{\sqrt{2}(x-2)}\right) = y^2 - 4y + 2x^2 - 8x + 12$

№2.80 $\quad y' = \dfrac{y-2x}{x+2y} \qquad y(1)=0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y/x - 2}{2y/x + 1} \qquad z(x) = \frac{y}{x} \qquad y = zx \quad y' = z'x + x'z = z'x + z$$

$$z'x + z = \frac{z-2}{2z+1}$$

$$\frac{dz}{dx}x = \frac{z-2-2z^2-z}{2z+1} = -\frac{2(z^2+1)}{2z+1}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{(2z+1)dz}{(z^2+1)} = -\frac{dx}{x}$$

$$-\ln|x| + c = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{d(z^2+1)}{z^2+1} + \frac{1}{2}\int\frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2}\ln|z^2+1| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} z$$

$$\ln|z^2+1| + \operatorname{arctg} z = -2\ln|x| + c$$

$$(z^2+1)\cdot\exp(\operatorname{arctg} z) = C/x^2$$

$$x^2(z^2+1)\exp(\operatorname{arctg} z) = C$$

$$(y^2+x^2)\exp\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = C$$

$y(1)=0 \Rightarrow e^{\operatorname{arctg} 0} = C \;;\; C = 1 \Rightarrow$ Ответ: $(y^2+x^2)\exp\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = 1$

С3

№3.25 $\quad xy' - 3y = 4x^2$

$$xy' - 3y = 0$$

$$\frac{x\,dy}{dx} = 3y \;;\; \frac{dy}{3y} = \frac{dx}{x} \;;\; \ln|y| = 3\ln|x| + c \;;\; y = c\cdot x^3$$

ВП: $\quad y = C(x)\cdot x^3$

$$x\left(C'(x)\cdot x^3 + \cancel{3x^2 C(x)}\right) - 3\cancel{C(x)}x^3 = 4x^2$$

$$C'(x)\cdot x^4 = 4x^2$$

$$C'(x) = 4/x^2 \Rightarrow C(x) = -\frac{4}{x} + C \Rightarrow y = -4x^2 + C\cdot x^3$$

Ответ: $y = C\cdot x^3 - 4x^2$

№3.59 $\quad xy' - y + 4y^3 = 0$

$$\frac{xy'}{y^3} - \frac{1}{y^2} + 4 = 0 \;;\quad z = \frac{1}{y^2} = y^{-2} \;;\; z' = -\frac{2}{y^3}\cdot y' = -\frac{2y'}{y^3}$$

$$-\frac{x}{2}z' - z + 4 = 0$$

$$\frac{dz}{dx}\cdot\frac{x}{2} + z = 4 \;;\quad \frac{dz}{2}\cdot\frac{x}{dx} = -z \qquad \frac{dz}{z} = \frac{-2dx}{x} \qquad z = \frac{c}{x^2}$$

ВП: $\quad z = C(x)\cdot x^{-2} \qquad z' = C'(x)\cdot x^{-2} - 2C(x)\cdot x^{-3}$

$$z'\cdot\frac{x}{2} + z - 4 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot C'(x)\cdot x^{-1} - \cancel{C(x)x^{-2}} + \cancel{C x^{-2}} - 4 = 0$$

$$C'(x) = 8x \Rightarrow C(x) = 4x^2 + A \;;\; z = \frac{A}{x^2} + 4 = \frac{1}{y^2}$$

$\Rightarrow$ Ответ: $\dfrac{1}{y^2} = \dfrac{A}{x^2} + 4$

№3.68 $y\,dx + (2x^2y - 3x)dy = 0$ $\quad y = 0$ — реш.

$\frac{dx}{dy} = \frac{3x - 2x^2y}{y}$; $x'y + 2x^2y - 3x = 0$; $x' + 2x^2 - 3\frac{x}{y} = 0$; $\frac{x'}{x^2} - \frac{3}{yx} + 2 = 0$

$z = \frac{1}{x}$ $\quad z' = -\frac{x'}{x^2}$; $z' + \frac{3z}{y} - 2 = 0$; $z' = -\frac{3z}{y}$ $\quad \frac{dz}{z} = -3\frac{dy}{y}$ $\quad z = Cy^{-3}$

ВП: $z = C(y)\cdot y^{-3}$ $\quad z' = C'(y)\cdot y^{-3} - 3y^{-4}\cdot C(y)$

$C'(y)\cdot y^{-3} - \cancel{3y^{-4}C(y)} - 3\cancel{C(y)\cdot y^{-4}} - 2 = 0 \Rightarrow C'(y) = 2y^3$ $\quad C(y) = \frac{1}{2}y^4 + A$

$z = \frac{1}{x} = C(y)\cdot y^{-3}$ $\quad \frac{y^3}{x} = \frac{1}{2}y^4 + A$; $y^3 = \frac{x}{2}y^4 + Ax$; $2y^3 = x(y^4 + C)$

$\Rightarrow$ Ответ: $x(y^4 + C) = 2y^3$; $y = 0$

№3.94 $x^2y' - 5xy + x^2y^2 + 8 = 0$

$y' - 5\frac{y}{x} + y^2 + \frac{8}{x^2} = 0$ (*)

$y = \frac{k}{x}$ $\quad y' = -k/x^2$; $\frac{-k}{x^2} - \frac{5k}{x^2} + \frac{k^2}{x^2} + \frac{8}{x^2} = 0$ $\quad k^2 - 6k + 8 = 0$ $\quad k = 4; 2$

$\Rightarrow y_0 = \frac{2}{x}$ — частное реш.

$y = z + y_0$ $\quad z = y - \frac{2}{x} = z(y)$ $\quad z' = y' + 2/x^2$

(*) $z' - \frac{2}{x^2} - \frac{5}{x}\left(z + \frac{2}{x}\right) + \left(z + \frac{2}{x}\right)^2 + \frac{8}{x^2} = 0$

$z' + \cancel{\frac{6}{x^2}} - \frac{10}{x^2} - \frac{5z}{x} + z^2 + \frac{4z}{x} + \cancel{\frac{4}{x^2}} = 0$

$z' + z^2 - \frac{z}{x} = 0$ $\quad |:z^2$

$\frac{z'}{z^2} - \frac{1}{xz} + 1 = 0$ $\quad$ Замена $q = \frac{1}{z}$ $\quad q' = -\frac{z'}{z^2}$

$-q' - q/x + 1 = 0$

$\frac{dq}{dx} = -\frac{q}{x} + 1$ $\quad \frac{dq}{dx} = -\frac{q}{x}$ $\quad \frac{dq}{q} = -\frac{dx}{x}$ $\quad q = \frac{C}{x}$

$q = \frac{C(x)}{x}$ $\quad q' = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2}$

$\frac{C'(x)}{x} - \cancel{\frac{C(x)}{x^2}} + \cancel{\frac{C(x)}{x^2}} - 1 = 0 \Rightarrow C'(x) = x$ $\quad C(x) = \frac{1}{2}x^2 + A$

$q = \frac{1}{2}x + \frac{A}{x}$ $\Rightarrow \frac{1}{y - 2/x} = \frac{1}{2}x + \frac{A}{x}$ $\Rightarrow \frac{x^2}{yx - 2} = \frac{1}{2}x^2 + A$

Ответ. $\left[\begin{array}{l} \frac{x^2}{yx - 2} = \frac{x^2}{2} + A \\ y = \frac{2}{x} \end{array}\right.$

Ф. №146

$(2e^y - x)y' = 1$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2e^y - x}$ $\quad \frac{dx}{dy} = 2e^y - x$ $\Rightarrow x' = 2e^y - x$

$\frac{dx}{dy} = -x$ $\quad \frac{dx}{x} = -dy$ $\Rightarrow x = \frac{C}{e^y}$

ВП: $x = \frac{C(y)}{e^y}$ $\quad x' = \frac{C'(y)e^y - C(y)\cdot e^y}{e^{2y}}$; $\frac{C'(y)}{e^y} - \cancel{\frac{C(y)}{e^y}} = 2e^y - \cancel{\frac{C(y)}{e^y}}$

$\Rightarrow C'(y) = 2e^{2y}$ $\quad C(y) = e^{2y} + A$ $\Rightarrow x = e^y + Ae^{-y}$

Ответ: $x = e^y + Ae^{-y}$

С4

№4.4 $\overset{Q}{(y-\sin x)}dx + \overset{P}{(x+e^y)}dy = 0$

$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} = 1$; задано на всей плоскости; => ур-ие в полн. диф.

$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = y - \sin x & u = xy + \cos x + \varphi(y) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = x + e^y & \varphi'(y) = e^y \quad \varphi(y) = e^y + c \end{cases}$ $\Rightarrow u = xy + \cos x + e^y + c$

Ответ: $xy + \cos x + e^y + c$

№4.20 $2xy\,dx - (x^2 - 2y^3)dy$: y — реш.

$\frac{2x}{y}dx - \frac{x^2}{y^2}dy + 2y\,dy = 0$

$\frac{2xy\,dx - x^2dy}{y^2} + 2y\,dy = 0$

$d\left(\frac{x^2}{y}\right) = d(-y^2) \Rightarrow$ Ответ: $\frac{x^2}{y} = -y^2 + c$; $y = 0$

№4.59 $x^2yy' + x^3 = (x^2+y^2)^2$

$z = x^2 + y^2 \quad z' = 2x + 2yy'$

$\frac{1}{2}x^2z' = z^2$

$x^2dz = 2z^2dx$

$\frac{dz}{z^2} = 2\frac{dx}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{2}{x} + c \quad z = \frac{x}{2+cx} = x^2 + y^2$

$\Rightarrow$ Ответ: $(x^2+y^2)(2+cx) = x$

Т1. $y' = \frac{y^2}{x^4} - 2\frac{y}{x} + 4x^2$

$y' = \frac{y^2 - 2yx^3 + 4x^6}{x^4} = \frac{(y-x^3)^2}{x^4} + 3x^2$

$z = y - x^3 \quad z' = y' - 3x^2$

$z' + \cancel{3x^2} = \frac{z^2}{x^4} + \cancel{3x^2}$; $\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x^4}$; $\frac{1}{z} = \frac{1}{3x^3} + c$;

$z = \frac{3x^2}{1+3x^2c} = y - x^3 \Rightarrow$ Ответ: $(y-x^3)(1+3x^2c) = 3x^2$

II С7

№7.1 $xy'' + xy'^2 + y' = 0 \quad x \neq 0 \quad \Rightarrow y = c$ — реш

$z = y'$

$xz' + xz^2 + z = 0$

$z' + z^2 + \frac{z}{x} = 0 \quad |: z^2$

$\frac{z'}{z^2} + \frac{1}{xz} + 1 = 0 \quad u = \frac{1}{z} \quad u' = -\frac{z'}{z^2}$

$u' - \frac{u}{x} - 1 = 0$; $\frac{du}{dx} = \frac{u}{x} \quad \frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \quad u = cx$

$c'x + c - c - 1 = 0 \quad c' = \frac{1}{x} \quad c = \ln|x| + A$

$\Rightarrow u = x\ln x + Ax$; $z = \frac{1}{x\ln|x| + Ax} = y'$; $y = \ln|x\ln|x| + C_1x| + C_2$

$\Rightarrow$ Ответ: $e^y = C_1 \cdot \ln(C_2x)$; $y = c$

№7.5

$yy'' - y'^2 = y'y^2 \Rightarrow \underline{y = c} -$ реш. (включено в ответ)

$y' = \dfrac{yy'' - y'^2}{y^2}$; $y' = \left(\dfrac{y'}{y}\right)' \Rightarrow y = \dfrac{y'}{y} + c$; $y' = y^2 + cy$

$c = 0 \Rightarrow y' = y^2 \quad \left(-\dfrac{1}{y}\right)' = 1 \Rightarrow -\dfrac{1}{y} = x + c \Rightarrow \underline{y(c - x) = 1}$

$c \neq 0 \Rightarrow \dfrac{y'}{y^2 + cy} = 1$; $\dfrac{1}{c}\left(\ln\left|\dfrac{y}{c+y}\right|\right)' = 1 \Rightarrow \ln\left|\dfrac{y}{c_1 + y}\right| = xc_1 + c_2$;

$\dfrac{y}{c_1 + y} = c_2 \cdot e^{xc_1}$; $y = c_1c_2e^{xc_1} + yc_1e^{xc_1}$; $y(1 - c_2e^{xc_1}) = c_1c_2e^{xc_1}$;

$y(c_2e^{-xc_1} - 1) = c_1 \Rightarrow$ Ответ: $y(1 + c_2e^{xc_1}) = c_1$;
$y(c - x) = 1$

№7.28

$2yy'' = y'^2(3 - 4yy'^2) \qquad y(4) = 1, \quad y'(4) = -1$

$y' = z(y) \quad y'' = z \cdot z'_y$

$2yz \cdot z' = z^2(3 - 4yz^2)$

$2yzz' + 4yz^4 - 3z^2 = 0 \rightarrow z = 0 -$ реш $\Rightarrow \underline{y = c -\text{реш.}}$, но не з. Коши

$2yz' + 4yz^3 - 3z = 0 \quad | : z^3$

$\dfrac{2yz'}{z^3} - \dfrac{3}{z^2} + 4y = 0$

$u = \dfrac{1}{z^2} \quad u' = -2 \cdot \dfrac{z'}{z^3}$

$-yu' - 3u + 4y = 0$

$yu' + 3u - 4y = 0$

$yu' = -3u$; $\dfrac{du}{u} = -\dfrac{3dy}{y} \quad u = C \cdot y^{-3}$

$y(C \cdot -3 \cdot y^{-4} + C' \cdot y^{-3}) + 3C \cdot y^{-3} - 4y = 0$

$C' \cdot y^{-2} - 4y = 0 \quad C' = 4y^3 \quad C = y^4 + C_2 \Rightarrow u = y + Cy^{-3}$

$u = \dfrac{1}{y'^2} = y + Cy^{-3} \quad u(4) = 1 = y(4) + C \cdot y^{-3}(4) = 1 + C \rightarrow C = 0 \Rightarrow u = y$

$\dfrac{1}{y'^2} = y \quad y'^2 = \dfrac{1}{y} \quad \left[\begin{array}{l} y' = -1/\sqrt{y} - \text{подх.} \\ y' = 1/\sqrt{y} - \text{не подх, т.к. } -1 \neq 1 \end{array}\right.$

$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{y}}$; $y'\sqrt{y} = -1$; $y^{1/2}dy = -dx$; $\dfrac{2}{3}y^{3/2} = -x + C$

$y(4) = 1 \Rightarrow \dfrac{2}{3} = -4 + C$; $C = \dfrac{2 + 12}{3} = \dfrac{14}{3}$

$\Rightarrow y^{3/2} = -\dfrac{3}{2}x + 7$; $y = (7 - 3/2x)^{2/3}$

Ответ: $y = (7 - 3/2x)^{2/3}$

№7.46

$yy'' + yy'\,\mathrm{tg}\,x + 2y'^2 = 0 \Rightarrow \underline{y = C}$ – реш.

Пусть $y' = zy$

$y'' = y(z' + z^2)$

$y^2(z' + z^2) + y^2 z\,\mathrm{tg}\,x + 2y^2 z^2 = 0 \quad |: y^2$

$z' + z^2 + z\,\mathrm{tg}\,x + 2z^2 = 0$

$z' + z\,\mathrm{tg}\,x + 3z^2 = 0 \quad |\cdot \cos x$

$z'\cos x + z\sin x + 3z^2\cos x = 0 \quad |: z^2$

$\dfrac{z'\cos x + z\sin x}{z^2} = -3\cos x \Rightarrow \left(\dfrac{\cos x}{z}\right)' = (3\sin x)' \Rightarrow \dfrac{\cos x}{z} = 3\sin x + C$

$z = \dfrac{\cos x}{3\sin x + C} = \dfrac{y'}{y} \qquad \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx\cos x}{3\sin x + C}\ ; \ \ln|y| = \dfrac{1}{3}\ln|\sin x + C_1| + C_2$

$\Rightarrow y = (\sin x + C_1)^{1/3}\cdot C_2 \Rightarrow$ Ответ: $y = \sqrt[3]{C_1 + C_2\sin x}$

№7.65 а)

$x^2y'' + 2x^2yy' + 2xy^2 - 2y = 0 \quad (*) \qquad y(1) = 2 \quad y'(1) = 0$

$x \to \lambda x$

$y \to \lambda^k y \quad y' \to \lambda^{k-1}y' \quad y'' \to \lambda^{k-2}y''$

$\lambda^2x^2\lambda^{k-2}y'' + 2\lambda^2x^2\lambda^k y\,\lambda^{k-1}y' + 2\lambda x\,\lambda^{2k}y^2 - 2\lambda^k y = 0$

$2 + k - 2 = 2 + k + k - 1 = 1 + 2k = k$

$k = 2k + 1 \Rightarrow k = -1$

$x = e^t\ ;\ y = ze^{-t}$

$y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = e^{-2t}(z'_t - z)\ ;$

$y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t} = e^{-3t}(z''_{tt} - 3z'_t + 2z)$

$(*)\quad e^{2t}\cdot e^{-3t}(z''_{tt} - 3z'_t + 2z) + 2e^{2t}z\,e^{-t}e^{-2t}(z'_t - z) + 2e^t z^2 e^{-2t} - 2ze^{-t} = 0$

$z'' - 3z' + 2z = 0 \Rightarrow z'' + z'(2z - 3) = 0$

З.Коши: $x = 1 \quad y = 2 \quad y' = 0 \Rightarrow z(0) = 2$ – реш. з.Коши

$t = 0 \quad z = 2$

$\underset{=0}{y'_x} = \underset{=1}{e^{-2t}}(z'_t - \underset{=2}{z}) \Rightarrow z'(0) = 2$

других реш. нет по т. о сущ. и ед., т.к. $z'' = -z'(2z - 3)$ – непр. диф.

$z(0) = 2 \quad z'(0) = 2$

сущ. и единств. на $[-\delta, \delta]$

$\Rightarrow$ Ответ: $z(0) = 2\ ;\ z'(0) = 2$

№Ф.505

$y''\cos y + y'^2\sin y = y' \qquad y(-1) = \pi/6 \quad y'(-1) = 2$

$y' = z \quad y'' = z\cdot z'$

$z\cdot z'\cdot\cos y + z^2\sin y = z \quad z = 0 \Rightarrow \underline{y = C}$ – реш., но не з.Коши

$z'\cos y + z\sin y = 1 \quad |:\cos^2 y$

$\dfrac{z'}{\cos y} + \dfrac{z\sin y}{\cos^2 y} = \dfrac{1}{\cos^2 y}$

$\left(\dfrac{z}{\cos y}\right)' = (\mathrm{tg}\,y)' \Rightarrow \dfrac{z}{\cos y} = \mathrm{tg}\,y + C\ ;\ z = \sin y + C\cdot\cos y = y'$

$x = -1 \quad y = \pi/6 \quad y' = 2 \Rightarrow \sin\dfrac{\pi}{6} + C\cdot\cos\dfrac{\pi}{6} = 2 \qquad \dfrac{1}{2} + C\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2 \qquad C = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \dfrac{y'}{2} = \dfrac{1}{2}\sin y + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos y = \cos(y - \pi/6)\ ;\ \dfrac{dy}{\cos(y - \pi/6)} = 2dx$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{\cos(y-\pi/6)} = \left[t = y - \pi/6 \right] = \int \frac{dt}{\cos t} = \left[u = tg\, t/2 \right] = \int \frac{2du}{1-u^2} = \ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C$$

$$\frac{1+u}{1-u} = \frac{1+tg\, t/2}{1-tg\, t/2} = tg\left(t/2 + \pi/4\right) = tg\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\ln\left|tg\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\right| = 2x + C$$

$x=-1$, $y=\pi/6$ $\Rightarrow$ $\ln|tg(y/2+\pi/6)| = -2+C$

$0 = -2 + C \Rightarrow C = 2$

$\Rightarrow$ Ответ: $\ln tg\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = 2x+2$

№72

$xy^2y'' + x^2y'^3 - xyy'^2 - 15y^2y' = 0 \quad y(1)=1 \quad y'(1)=4$

$y' = zy \quad y'' = z'y + y'z = z'y + z^2y = y(z^2+z')$

$xy^3(z^2+z') + x^2 \cdot z^3 \cdot y^3 - x \cdot y \cdot z^2y^2 - 15y^2 \cdot zy = 0$

$xy^3(z^2+z') + x^2y^3z^3 - xy^3z^2 - 15y^3z = 0$ $\quad y=0$ – реш., но не з. Коши

$x(z^2+z') + x^2z^3 - xz^2 - 15z = 0$

$xz' + x^2z^3 - 15z = 0$

$-2xz' - 2x^2z^3 + 30z = 0 \quad | : z^3$

$u = 1/z^2 \quad u' = -2 \cdot 1/z^3 \Rightarrow xu' - 2x^2 + 30u = 0$

$xu' = -30u \; ; \; \frac{du}{u} = -30 \cdot \frac{dx}{x} \quad u = C \cdot x^{-30}$

ВП: $x(C' x^{-30} - 30 \cdot C \cdot x^{-31}) - 2x^2 + 30C \cdot x^{-30} = 0$

$C' \cdot x^{-29} - 2x^2 = 0 \; ; \; C' = 2x^2 \cdot x^{29} \; ; \; C' = 2 \cdot x^{31} \Rightarrow C = \frac{1}{16} \cdot x^{32} + C_2$

$\Rightarrow u = \frac{x^2}{16} + C \cdot x^{-30} = \frac{1}{z^2} = \frac{y^2}{y'^2}$

$x=1 \; y=1 \; y'=4 \Rightarrow \frac{1}{16} = \frac{1}{16} + C \Rightarrow C = 0 \qquad y' = 4 > 0 \; ; \; \frac{4y}{x} > 0$

$\Rightarrow u = \frac{x^2}{16} = \frac{y^2}{y'^2} \Rightarrow y'^2 = \frac{16y^2}{x^2} \qquad y' = \pm\frac{4y}{x} = \frac{4y}{x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{y} = 4 \cdot \frac{dx}{x} \; ; \; y = C \cdot x^4 \quad 1 = C \cdot 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow$ Ответ: $y = x^4$

III Ф.

№225 Выделить области, в которых через каждую точку проходит ед. реш. ур-ия

а) $y' = 2xy + y^2 \quad f = 2xy + y^2$ – непр. диф. ф-ия на всей плоскости

$f'_y = 2x + 2y$ $\quad\Rightarrow$ по т. о сущ. и ед. через $\forall$ т. плоскости проходит единств. реш.

$\Rightarrow$ Ответ: вся плоскость

2) $y' = 1 + tg\, y \quad f = 1 + \frac{\sin y}{\cos y}$ – непр. диф. на всей плоскости, кроме $y = \pi/2 + \pi n, \; n \in \mathbb{Z}$

$f'_y = \frac{1}{\cos^2 y}$ $\quad\Rightarrow$ по т. о сущ. и ед. через $\forall$ т. $y \neq \pi/2 + \pi n, \; n \in \mathbb{Z}$ проходит единств. реш.

$\Rightarrow$ Ответ: $y \neq \pi/2 + \pi n, \; n \in \mathbb{Z}$

№228 При каких знач. условиях $\exists!$ реш. ур-ия?

в) $(x-y)y'y''' = \ln xy$

$f = \dfrac{\ln xy}{y'(x-y)}$

$f'_y = 1/y' \left(\frac{x}{y}(x-y)+\ln xy\right)\cdot\frac{1}{(x-y)^2}$ — непр. при $x\neq y,\ xy>0,\ y'\neq 0$

$f'_{y'} = -\frac{\ln xy}{x-y}\cdot\frac{1}{y'^2}$ — непр. при $y'\neq 0$, $f'_{y''}=0$

⇒ Ответ: $\forall$ т. (x_0, y_0, y_0', y_0'')

$x_0\neq y_0$, $x_0y_0>0$, $y_0'\neq 0$, y'' — любое

г) $y'' - yy''' = \sqrt[5]{y'-x}$

$f = (y'' - (y'-x)^{1/5})\cdot\frac{1}{y}$

$f'_y = -\frac{1}{y^2}(y''-(y'-x)^{1/5})$ — непр. при $y\neq 0$

$f'_{y'} = -(5y(y'-x)^{4/5})^{-1}$ — непр. при $y'\neq x$

$f'_{y''} = \frac{1}{y}$ — непр. при $y\neq 0$

⇒ Ответ: $\forall$ т. (x_0, y_0, y_0', y_0'')

$y_0\neq 0$, $y_0'\neq x_0$, y_0'' — любое

№229 Могут ли графики двух реш. пересекаться?

а) $y'=x+y^2$

$f=x+y^2$ $f'=2y$ — непр ⇒ нет, по т. о сущ. и ед. через каждую (x_0, y_0) проходит ед. реш. ⇒ Ответ: нет

б) $y''=x+y^2$

$f=x+y^2$ $f'=2y$ $f''=2$ — непр. ⇒ по т. о сущ. и ед. через каждую (x_0, y_0, y_0') проходит ед. реш.

при этом через (x_0, y_0) может проходить несколько реш. с различным знач. y_0' ⇒ Ответ: да

№230 Могут ли графики двух реш. касаться друг друга?

а) $y'=x+y^2$ нет, по т. о сущ. и ед. реш. уд. $y(x_0)=y_0$ ⇒ Ответ: нет

б) $y''=x+y^2$ нет, 2 реш. уд. з. Коши $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_1$ ⇒ Ответ: нет

в) $y'''=x+y^2$ $y''(x_0)$ могут различаться ⇒ Ответ: да

№231 Сколько сущ. реш. $y^{(n)}=x+y^2$, $n=1,2,3$, удовл.: $y(0)=1$ $y'(0)=2$

$n=1$

$y'=x+y^2$

$y(0)=1$ $y'(0)=2$

$2\neq 0+1$

⇒ реш. нет

$n=2$

$y''=x+y^2$

$y(0)=1$ $y'(0)=2$

⇒ 1 реш.

$n=3$

$y'''=x+y^2$

$y(0)=1$ $y'(0)=2$

$y''(0)$ — любое

⇒ беск. много реш.

№233 При каких n ур-ие $y^{(n)} = f(x,y)$ может иметь среди своих реш. ф-ии: (f, f'_y непр.)

$$y_1 = x \;;\; y_2 = x + x^4$$

З. Коши: $y^{(n)} = f(x,y)$ $y(x_0) = y_0, \dots y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

$y_1(0) = 0 \quad y_2(0) = 0$

$y_1'(0) = 0 \quad y_2'(0) = 0$

$y_1''(0) = 0 \quad y_2''(0) = 0$

$y_1'''(0) = 0 \quad y_2'''(0) = 0$

$y_1^{(4)}(0) = 0 \neq y_2^{(4)}(0) = 24 \Rightarrow$ при $1 \le n \le 4$ 2 разных реш. з. Коши; при $n \ge 5$ обе ф-ии – реш. ур-ия

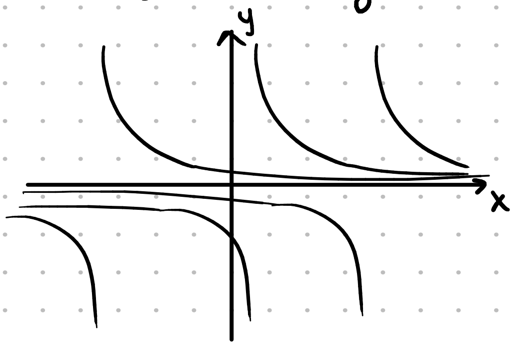
Ответ: $n \ge 5$

№T3 Решить ур-ие, построить инт. кривые, указать особые реш., найти непродолжимое реш., удовл. условиям.

а) $y' = -y^2 \to y = 0$ – реш $\qquad y(1) = -1$

$-\frac{dy}{y^2} = dx \qquad \frac{1}{y} = x + C \qquad y = \frac{1}{x+C} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{1}{x+C} \\ y = 0 \end{array}\right.$

$D_y: \mathbb{R}\setminus\{C\}$



Реш. наз. особым, если через каждую его точку проходит ещё хотя бы одна инт. кривая. $\Rightarrow$ особых решений нет.

$f = -y^2$ – непр. дифф.

$f' = -2y$ – непр. дифф. $\Rightarrow \exists!$ реш. з. Коши

$\Rightarrow$ реш. однозн. опр. одним усл.

$y(1) = -1 \Rightarrow -1 = \frac{1}{1+C} \Rightarrow C = -2 \Rightarrow y = \frac{1}{x-2}$ – реш. з. Коши

Ответ: $\left[\begin{array}{l} y = \frac{1}{x+C} \\ y = 0 \end{array}\right.$. особых реш. нет; $y = \frac{1}{x-2}$

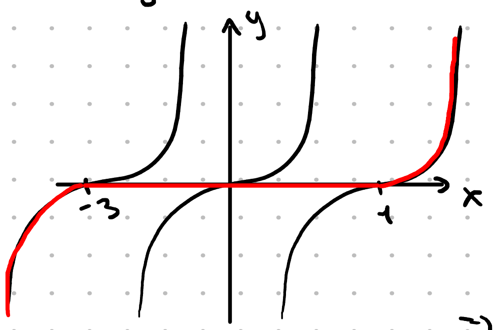
б) $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ $\quad y(-4) = -1$; $y(2) = 1$

$\Rightarrow y = 0$ – реш

$f = 3y^{3/2}$ – не непр. дифф. $\Rightarrow$ т.о. сущ. и ед. нарушается $\Rightarrow$ однозначно определить реш. одним усл. нельзя!

$D_y: \mathbb{R}$

$\frac{dy}{3y^{2/3}} = dx \qquad y^{1/3} = x + C \qquad y = (x+C)^3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = (x+C)^3 \\ y = 0 \end{array}\right.$



Реш. з. Коши, опр. на всей прямой беск. много.

$y = 0$ – особое реш. по опр., т.к. через каждую его т. проходит ещё хотя бы одна инт. кривая, касающаяся в этой т. данной кривой и не совп. с ней.

$y(-4) = -1$; $y(2) = 1$

$\Rightarrow \begin{array}{ll} -4 + C = -1 & C = 3 \\ 2 + C = 1 & C = -1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} y = (x+3)^3 \\ y = (x-1)^3 \end{array}$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} y = (x+C)^3 \\ y = 0 \end{array}\right.$; $y = 0$ – особ. реш.; $\left\{\begin{array}{ll} y = (x-1)^3, & x \ge 1 \\ 0, & x \in (-3, 1) \\ y = (x-3)^3, & x \le -3 \end{array}\right.$

IV Ф. Реш. ур-ие, иссл. особые реш., построить инт. кривые.

№278

$y'^2 - 2xy' = x^2 - 4y \qquad y' = p = \frac{dy}{dx}$

$p^2 - 2xp = x^2 - 4y$

$2p\,dp - 2x\,dp - 2p\,dx = 2x\,dx - 4p\,dx$

$(p-x)dp = -(p-x)dx$

$p = x: \quad y' = x \Rightarrow \cancel{x^2} - 2x^2 = x^2 - 4y \;; \quad y = \frac{1}{2}x^2$

$p \neq x: \quad dp = -dx \qquad p = -x + C = y'$

$(-x+C)^2 - 2x(-x+C) = x^2 - 4y$

$\cancel{x^2} - 2Cx + C^2 + 2x^2 - 2Cx = \cancel{x^2} - 4y$

$4y = 4Cx - C^2 - 2x^2 \qquad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x^2 \\ 4y = 4Cx - C^2 - 2x^2 \end{array}\right.$

Дискр. кривая.

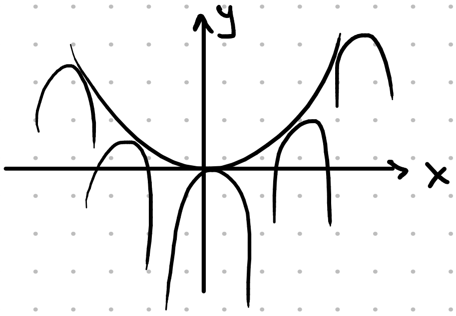
$\begin{cases} p^2 - 2xp = x^2 - 4y \\ 2p - 2x = 0 \Rightarrow p = x \end{cases} \qquad x^2 - 2x^2 = x^2 - 4y \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2$ – только эта кривая может быть особ. реш.

Касание:

$\begin{cases} y_c(x) = y(x) \\ y_c'(x) = y'(x) \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 = 4Cx - C^2 - 2x^2 \\ x = C - x \end{cases} \Rightarrow C = 2x \qquad 2x^2 = 8x^2 - 4x^2 - 2x^2$ – верно

$\Rightarrow$ касание есть

$\Rightarrow \underline{y = \frac{x^2}{2}}$ – особ. реш.



Ответ: $\left[\begin{array}{l} y = x^2/2 \\ 4y = 4Cx - C^2 - 2x^2 \end{array}\right.$; $y = \frac{x^2}{2}$ – особ. реш.

№287

$y = xy' - y'^2 \qquad y' = p = \frac{dy}{dx}$

$y = xp - p^2$

$p\,dx = x\,dp + p\,dx - 2p\,dp$

$(x - 2p)dp = 0$

$p = \frac{x}{2}:$

$y = x^2/2 - x^2/4 = x^2/4$

$p \neq \frac{x}{2}:$

$dp = 0$

$p = C \Rightarrow y = Cx - C^2$

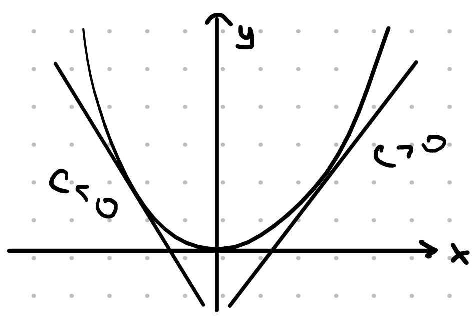
$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = x^2/4 \\ y = Cx - C^2 \end{array}\right.$

Дискр. кр.:

$\begin{cases} y = xp - p^2 \\ 0 = x - 2p \quad p = \frac{x}{2} \end{cases} \qquad y = \frac{x^2}{4}$

Касание:

$\begin{cases} x^2/4 = Cx - C^2 \\ x/2 = C \end{cases}$ – касание есть, $y = x^2/4$ – особое реш.



Ответ: $\left[\begin{array}{l} y = x^2/4 \\ y = Cx - C^2 \end{array}\right.$; $y = x^2/4$ – особ. реш.

№75. В №287 найти реш., удовл.:

а) $y(0) = -1,\ y(5) = 6$

$(0,-1),\ (5,6) \notin$ параболе

Проведем через них прямые $y = Cx - C^2$

$-1 = -C^2 \quad C = \pm 1 \Rightarrow y = \pm x - 1$

$6 = 5C - C^2 \quad C = 2, 3 \Rightarrow y = 2x - 4;\ y = 3x - 9$

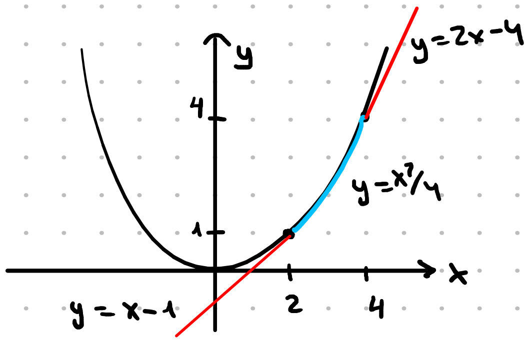
Касание с параболой:

$x - 1 = x^2/4$, $x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (2, 1)$

$-x - 1 = x^2/4$, $x^2 + 4x + 4 = 0$ — не подх.

$2x - 4 = x^2/4$, $x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow (4, 4)$

$3x - 9 = x^2/4$, $x^2 - 12x + 36 = 0$ — не подх.



Ответ: $\begin{cases} y = 2x - 4, & x \geq 4 \\ y = x^2/4, & 2 \leq x \leq 4 \\ y = x - 1, & x \leq 2 \end{cases}$

б) $(0,-1) \notin$ параболе, $(4,4) \in$ параболе $\Rightarrow$ беск. много реш.

Ответ: $\begin{cases} y = x - 1, & x \leq 2 \\ y = x^2/4, & 2 \leq x \leq A \\ y = A/x - A^2/4, & x \geq A \end{cases} \quad A \geq 4$

№288

$y + xy' = 4\sqrt{y'}$ $\quad p = y' = \frac{dy}{dx}$

$y = 0$ — реш.

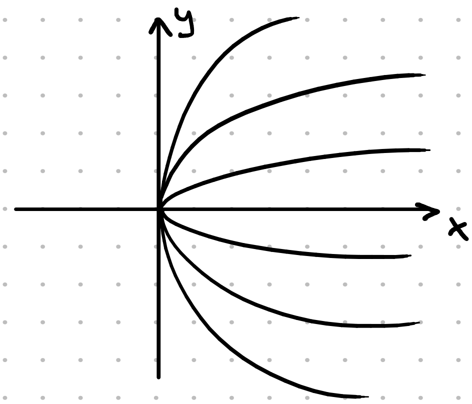
$y + px = 4\sqrt{p}$

$p\,dx + p\,dx + x\,dp = \frac{2dp}{\sqrt{p}}$

$2p\,dx = \left(\frac{2}{\sqrt{p}} - x\right)dp$

$2p \cdot \frac{dx}{dp} = \frac{2}{\sqrt{p}} - x$

$2p \cdot \frac{dx}{dp} = -x$; $\frac{dx}{x} = -\frac{dp}{2p}$ $\quad x = \frac{C}{\sqrt{p}}$



ВП: $x = \frac{C(p)}{\sqrt{p}}$; $2p\left(\frac{C'(p)\sqrt{p} - \frac{1}{2\sqrt{p}} \cdot C(p)}{p}\right) = \frac{2}{\sqrt{p}} - \frac{C(p)}{\sqrt{p}}$

$C'(p)\sqrt{p} = \frac{1}{\sqrt{p}}$; $C'(p) = \frac{1}{p}$; $C(p) = \ln p \Rightarrow x\sqrt{p} = \ln p + C$

$\Rightarrow y + \sqrt{p}\ln p + \sqrt{p}C = 4\sqrt{p}$; $y = \sqrt{p}(4 - \ln p - C)$ не пер. с $y = 0\ \forall p$

$\Rightarrow$ нет особ. реш.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} y = \sqrt{p}(4 - \ln p - C) \\ y = 0 \end{array}\right.$, особ. реш. нет.

С.6 №7

$y'^3 - 3x^2y' + 4xy = 0$ — $y=0$ — реш. $y' = p = \frac{dy}{dx}$

$p^3 - 3x^2p + 4xy = 0$

$4y = 3xp - \frac{p^3}{x}$

$4p\,dx = 3p\,dx + 3x\,dp - \frac{3p^2x\,dp - p^3dx}{x^2}$

$p\,dx = 3x\,dp - \frac{3p^2}{x}dp + \frac{p^3}{x^2}dx$

$p\left(1-\frac{p^2}{x^2}\right)dx = 3x\left(1-\frac{p^2}{x^2}\right)dp$

$p = \pm x$:

$4y = \pm 3x^2 \mp x^2$ $4y = \pm 2x^2$; $y = \pm\frac{x^2}{2}$

$p \neq \pm x$:

$p\,dx = 3x\,dp$

$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{3x}$ $p = Cx^{1/3}$; $4y = 3Cx^{4/3} - C^3$

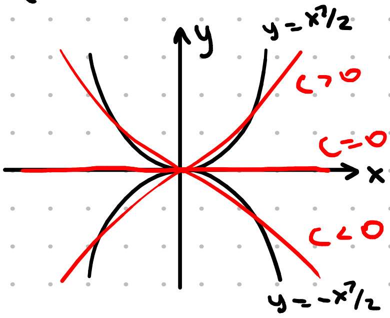
$\left[\begin{array}{l} y = \pm x^2/2 \\ 4y = 3(Cx^{4/3} - C^3) \end{array}\right.$ содержит $y=0$

Дискр. кр.:

$\begin{cases} 4y = 3xp - p^3/x \\ 0 = \cancel{3}x - \cancel{3}p^2/x \end{cases}$ $p^2 = x^2$ $p = \pm x$ $y = \pm x^2/2$

Касание:

$\begin{cases} \pm 2x^2 = 3Cx^{4/3} - C^3 \\ \pm x = Cx^{1/3} \end{cases}$ $C = \pm x^{2/3}$ $\pm 2x^2 = \pm 3\cdot x^2 \mp x^2$ — верно; $y = \pm x^2/2$ — особые реш.



Ответ: $\left[\begin{array}{l} y = \pm x^2/2 \\ 4y = 3Cx^{4/3} - C^3 \end{array}\right.$; $y = \pm x^2/2$ — особые реш.

№76.

$y'^2 = 4y^3(1-y)$; $y' = \pm 2\sqrt{y^3(1-y)}$ — $y=0$; $y=1$ — реш. $y \in (0,1)$; $dx = \pm\frac{dy}{2\sqrt{y^3(1-y)}}$

$\int \frac{dy}{2\sqrt{y^3(1-y)}} = \left[\begin{array}{l} y = \sin^2 t \\ dy = 2\sin t\cos t\,dt \end{array}\right] = \int \frac{\sin t\cos t\,dt}{\sqrt{\sin^6 t\cos^2 t}} = \int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\mathrm{ctg}\,t + C =$

$= -\mathrm{ctg}(\arcsin\sqrt{y}) + C = -\frac{\sqrt{1-y}}{y} + C \to x = \mp\frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{y}} + C$

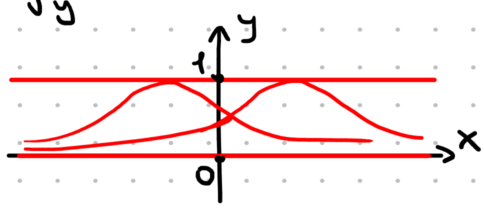
$(x+c)^2 = \frac{1}{y} - 1 \to y = \frac{1}{1+(x+c)^2}$

Дискр. кр.:

$\begin{cases} p^2 = 4y^3(1-y) \\ 2p = 0 \end{cases}$ $p = 0$; $\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 1 \end{array}\right.$ $y=1$ — особ. реш.

Касание: $\begin{cases} \frac{1}{1+(x+c)^2} = 1 \\ -\frac{2(x+c)}{(1+(x+c)^2)^2} = 0 \end{cases}$ — верно $C = -x$

$y=0$ не подх.



Ответ: $\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 1 \\ y = \frac{1}{1+(x+c)^2} \end{array}\right.$; $y=1$ — особ. реш.