Условный экстремум

$u = f(x) = f(x_1,\dots x_n)$

Ур-ия связи $\varphi_1(x_1,\dots x_n)=0$ $\quad n>m$

$\dots$

$\varphi_m(x_1,\dots x_n)=0 \quad (*)$

т. $x_0=(x_1^0,\dots x_n^0)$ наз. т. усл. min $f(x)$ при усл-ии $(*)$, если $\exists\delta>0\ \forall x\in U_\delta(x_0)$ при вып. $(*)$ $f(x)\geq f(x_0)$

Ф-ия Лагранжа $\mathcal{L}(x)=f(x)+\lambda_1\varphi_1(x)+\dots+\lambda_m\varphi_m(x)$

$\mathcal{L}(x)\big|_{(*)}=f(x)\big|_{(*)}\quad\forall\lambda_i$

Необх усл-е: Пусть $f(x)$ и $\varphi_i(x)$ непр.дифф. в $U_\delta(x_0)$;

$$rg\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1,\dots n\\ j=1,\dots n}}=m$$

$$m\left(\boxed{}\qquad\right)_n$$

При этом усл. $x_1,\dots x_m$ выраж. через $x_{m+1},\dots x_n$

Пусть x^0 — т. усл. экстр. $f(x)$ при выполн. $(*)$

Тогда $\exists\lambda_1\dots\lambda_m$: x^0 — стац. т. ф. Лагранжа

$$\begin{cases}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1}=\dots=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_n}=0\\ \varphi_1=\dots=\varphi_m=0\end{cases}$$

$(**)$ — производ. ур. связи

$dx_1,\dots dx_m$ выраж. через $dx_{m+1},\dots dx_n$

Дост. усл-е усл. экстр.

Пусть f,φ_i — дважды непр-д. в $U_\delta(x^0)$,

x^0,λ_i — реш. сис. $n+m$ ур-ий с $n+m$ неизв.

$d^2\mathcal{L}(x^0)\Big|_{(**)}$ — квадр. форма $n-m$ незав. перем.

По ней можно опр. характер усл. экстр.

1) если $d^2L_0(\tilde{x}^0)$ — положительно определённая квадратичная форма, то x^0 — точка строгого условного минимума f при выполнении условий (18.13);

2) если $d^2L_0(\tilde{x}^0)$ — отрицательно определённая квадратичная форма, то x^0 — точка строгого условного максимума f при выполнении условий (18.13);

3) если $d^2L_0(\tilde{x}^0)$ — неопределённая квадратичная форма, то x^0 не является точкой условного экстремума f при выполнении условий (18.13).

Пример — ?

Пр. $u=\ln xy \quad x^3+xy+y^3=0$

$$\begin{cases}\mathcal{L}=\ln xy+\lambda(x^3+xy+y^3)\\ \mathcal{L}'_x=\frac{1}{x}+\lambda(3x^2+y)=0\\ \mathcal{L}'_y=\frac{1}{y}+\lambda(3y^2+x)=0\\ x^3+xy+y^3=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{1}{x}=-\lambda(3x^2+y)\\ \frac{1}{y}=-\lambda(3y^2+x)\\ \frac{1}{xy}=-\lambda\frac{3x^2}{y}-\lambda\\ \frac{1}{xy}=\lambda\frac{3y^2}{x}-\lambda\end{cases}$$

$\lambda\neq0\quad x^2/y=y^2/x\quad x^3=y^3$

$\to x=y$

$2x^3+x^2=0$

$x_1=0\quad x_2=-1/2$

не подх

$x=y=-1/2$

$-2=-\lambda(3/4-1/2)$

$\to\lambda=8$

$\mathcal{L}''_{xx} = -\frac{1}{x^2} + \lambda 6x = -4 + 8\cdot 6(-1/2) = -28$

$\mathcal{L}''_{yy} = -\frac{1}{y^2} + \lambda 6y = -28$

$\mathcal{L}''_{xy} = \lambda = 8$

$d^2\mathcal{L} = -28\,dx^2 - 28\,dy^2 + 16\,dx\,dy$ $\quad \frac{d^2\mathcal{L}}{4} = -7dx^2 - 7dy^2 + 4dx\,dy$ $\quad \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$

$\Delta_1 < 0 \quad \Delta_2 > 0$

отр. опр.

$(-1/2; -1/2)$ – усл max

$\Rightarrow$ Ответ: $(-1/2; -1/2)$ – усл. max

Пр $u = 1 - 4x - 8y \quad x^2 - 8y^2 = 8$ – усл. связи

$\mathcal{L} = 1 - 4x - 8y + \lambda(x^2 - 8y^2 - 8)$

$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = -4 + \lambda(2x) = 0 \\ \mathcal{L}''_{xx} = 2\lambda = 0 \\ x^2 - 8y^2 - 8 = 0 \end{cases}$ $\quad \lambda = 2/x$, $\lambda = -1/2y$, $2/x = -1/2y$, $x = -4y$

$\begin{cases} \mathcal{L}''_{xx} = 2\lambda \\ \mathcal{L}''_{yy} = -16\lambda \\ \mathcal{L}''_{xy} = 0 \end{cases}$

$16y^2 - 8y^2 = 8$

$y^2 = 1 \quad y = \pm 1, \; x = \mp 4 \quad \lambda = \mp 1/2$

$d^2\mathcal{L} = 2\lambda(dx^2 - 8dy^2)$

неопр. форма $\lambda \neq 0$

$(**)$ $2x\,dx - 16y\,dy = 0 \qquad \frac{y}{x} = -\frac{1}{4}$

$dx = 8y\frac{dy}{x} = -2dy$

$= \mp(4dy^2 - 8dy^2) =$

$d^2\mathcal{L}\big|_{(**)} = \pm 4\,dy^2$

$+$ полож $(-4, 1)$

$-$ отр $(4, -1)$

Пр. $u = xy, \; x^2 + y^2 = 1$

$\mathcal{L} = xy + \lambda(x^2 + y^2)$

$\begin{cases} \mathcal{L}'_x = y + 2\lambda x = 0 \\ \mathcal{L}'_y = x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$ $\lambda = -y/2x$, $\lambda = -x/2y$, $\frac{y}{2x} = \frac{x}{2y}$ $\quad x = \pm y$, $x = \pm 1/\sqrt{2}$, $y = \pm 1/\sqrt{2}$

$\left(\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right), \left(\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt2}, \frac{1}{\sqrt2}\right)$

$\lambda = \pm\frac{1}{2}$ ($+$, если $y = -x$; $-$, если $y = x$)

$\begin{cases} \mathcal{L}''_{xx} = 2\lambda \\ \mathcal{L}''_{yy} = 2\lambda \\ \mathcal{L}''_{xy} = 1 \end{cases}$ $\quad d^2\mathcal{L} = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2 + 2dx\,dy$

$\begin{pmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{pmatrix}$ $\quad \Delta_1 = 2\lambda, \; \Delta_2 = 4\lambda^2 - 1 = 0$ – полуопр. кв. ф.

$2x\,dx + 2y\,dy = 0$

$dy = -\frac{2x\,dx}{2y} = -dx \quad x = y \quad \lambda = -1/2$

$\lambda = -1/2 \; -4dx^2$

если $y = -x$

$d^2\mathcal{L}\big|_{(**)} = \pm(dx^2 + dy^2) + 2dx\,dy$

$4dx^2$ – полож. опр.

2 усл max. $\left(\pm\frac{1}{\sqrt2}, \pm\frac{1}{\sqrt2}\right)$

2 усл. min $\left(\pm\frac{1}{\sqrt2}, \mp\frac{1}{\sqrt2}\right)$

пр. $u = 2x^2 + 12xy + y^2$

———— // ————