Теорема Сущ. и !-ть реш. з. Коши

$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ (*), f — непр. дифф. в окр. т. $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$

Тогда реш. з. Коши (*) + нач. усл. $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) y_{n-1}$

$\exists$ и ! на некотором $[x_0-\delta, x_0+\delta]$.

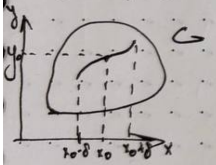
$z'' = z'(3-2z)$ — непр. дифф.

$z(0)=-1$, $z'(0)=0$ $\quad\exists$ и ! на $[-\delta, \delta]$.

$n=1$ т. о сущ и !-ти реш. з. Коши

з. Коши $y'=f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$

Если ф-ция $f(x,y)$ непр. дифф. в обл. $G \ni (x_0,y_0)$, то $\exists \delta>0$: на $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ реш. з. Коши сущ. и ед.



$y'=y \quad y(0)=1 \quad \boxed{y=e^x}$

Пр. $y'=1+y^2 \quad y(0)=0$

$\frac{dy}{1+y^2}=dx$

$\operatorname{arctg} y = x+C$

$y(0)=0 \Rightarrow C=0$

$\Rightarrow \underline{y=\operatorname{tg} x} \quad x\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$

в обоих сл-ях реш. з.К. сущ. в единств. виде на $[x_0-\delta, x_0+\delta]$

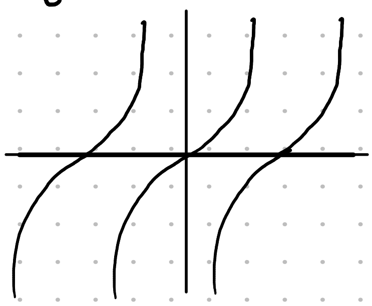
Пр. $y'=3\sqrt[3]{y^2}$, $y(0)=0$

$y=0$ — реш $\longrightarrow$ Ответ

$f(x,y)=y^{2/3}$ не явл. непр. дифф.

$\frac{dy}{3y^{2/3}}=dx \quad y^{1/3}=x+C \quad y=(x+C)^3$

$x=0 \;\; y=0 \;\; C=0 \quad y=x^3$ — реш



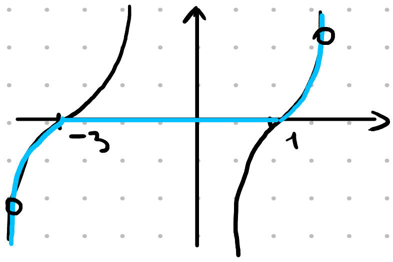
$\Rightarrow$ Реш. задачи Коши, опр. на всей прямой беск. много

$y=0$ — особое решение

если $y_0\neq 0$, то реш з. Коши $y'=3\sqrt[3]{y^2}$ единственно в малой окр. т., но не единств. на всей прямой

Опр. Решение ур-ия $F(x,y,y')=0$ наз. особым, если через каждую его точку проходит еще одна инт. кривая, касающаяся в этой точке данной кривой и не совпадающая с ней ни в одной окрестности т.

Краевая задача.



$y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ $\quad y(-4) = -1 \quad y(2) = 1$

$y = (x+c)^3$

$y(-4) = -1 \Rightarrow -4 + c = -1 \quad c = 3 \Rightarrow y = (x+3)^3$

$y(2) = 1 \Rightarrow 2 + c = 1 \quad c = -1 \Rightarrow y = (x-1)^3$

$\Rightarrow$ Ответ: $y = \begin{cases} (x-1)^3, & x \geq 1 \\ 0, & x \in (-3, 1) \\ (x+3)^3, & x \leq -3 \end{cases}$

Ур-ие 1 порядка, неразрешенное отн. производной y'

$y = f(x, y')$ — разреш. отн. y

„Метод введения параметра"

$y' = p$

$y = f(x, p)$

$\underbrace{dy}_{=p\,dx} = f'_x dx + f'_p dp \Rightarrow f'_p dp = (p - f'_x) dx$

$\frac{dp}{dx} = F(x,p) \Rightarrow \frac{dx}{dp} = G(x,p)$ — ДУ 1-го порядка, разреш. отн. произв.

случай 1:

Нашли реш. в виде $x = x(p, c)$

$\underline{y = f(x,p) = y(p,c)}$ — семейство реш., завис. от c в парам. виде

случай 2:

нашли реш. в виде $p = p(x, c)$

$\underline{y = f(x,p) = y(x,c)}$ — семейство реш., зав. от c в явном виде

Пр. $y = 2xy' - 4y'^3 \quad y' = p$

$y = 2xp - 4p^3$

$p\,dx = dy = 2x\,dp + 2p\,dx - 12p^2 dp$

$p\,dx = (12p^2 - 2x)\,dp \quad \Rightarrow p = 0 \Rightarrow y = 0$ — реш.

Ищем $x = x(p)$

$p = const$ — не подходит

$\Rightarrow dp \neq 0$

$p\frac{dx}{dp} = 12p^2 - 2x$

ЛУ $p\frac{dx}{dp} = -2x$

$\ln|x| = -2\ln|p| + C$

$x = \frac{c}{p^2}$

ВП $x = \frac{c(p)}{p^2}$

$p \cdot \frac{c'(p) \cdot p^2 - 2p\,c(p)}{p^4} = 12p^2 - \frac{2c(p)}{p^2}$

$\frac{c'(p)}{p} = 12p^2 \quad c'(p) = 12p^3 \quad c(p) = 3p^4 + c$

$x = \frac{3p^4 + c}{p^2} = 3p^2 + \frac{c}{p^2}$

$y = 2\left(3p^2 + \frac{c}{p^2}\right)p - 4p^3 = 2p^3 + \frac{2c}{p}$

$\Rightarrow$ Ответ: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3p^2 + c/p^2 \\ y = 2p^3 + 2c/p \end{cases} \\ y = 0 \end{array}\right.$

Пр. $4(xy' - 2y) = 4x^2 - y'^2$

$y' = p$

$4(xp - 2y) = 4x^2 - p^2$

$y = \frac{xp}{2} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{p^2}{8}$

$dy = \frac{p\,dx}{2} + \frac{x\,dp}{2} - x\,dx + \frac{p\,dp}{4}$

$p\,dx - \frac{p\,dx}{2} + x\,dx = \frac{x\,dp}{2} + \frac{p\,dp}{4}$

$\frac{p+2x}{2}\,dx = \frac{2x+p}{4}\,dp$

1) $p = -2x$

$y = -x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^2}{2} \Rightarrow y = -x^2$ — реш

2) $p \neq -2x$

$dx = \frac{dp}{2}$ $\quad dp = 2dx \quad p = 2x + C$

$y = \frac{2x^2 + Cx}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{(2x+C)^2}{8}$

$y = \frac{2x^2 + Cx}{2} + \frac{4x^2 + 4xC + C^2}{8}$

$y = \frac{8x^2 + 8xC + C^2}{8} \Rightarrow$ Ответ: $\left[\begin{array}{l} y = x^2 + Cx + \frac{C^2}{8} \\ y = -x^2 \end{array}\right.$

А нельзя ли сделать так?

$p = p(x, C)$, интм :

$p = y'$

1) $p = -2x \xrightarrow{\text{интм.}} y = -x^2 + C$

подставим в исх. $4(xy' - 2y) = 4x^2 - y'^2$

$4(-2x^2 + 2x^2 - 2C) = 4x^2 - 4x^2$

$\Rightarrow C = 0$

$\Rightarrow$ реш только $y = -x^2$

Почему?

$y = -x^2 + C$ — это следствие исходного ур-ия

2) $y' = 2x + C \quad y = x^2 + Cx + C_1$

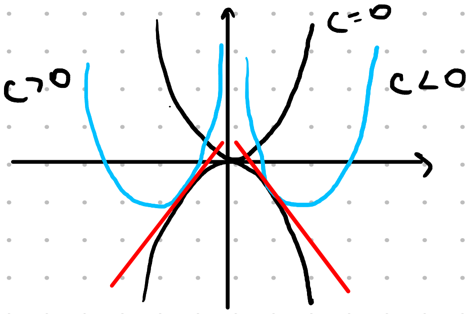
$4(\cancel{2x^2} + Cx - \cancel{2x^2} - 2Cx - 2C_1) = 4x^2 - 4x^2 - 4xC - C^2$

$\Rightarrow C_1 = \frac{C^2}{8} \quad y = x^2 + Cx + \frac{C^2}{8}$

Итог: так делать можно, но придется проверять полученные выражения

Нарисовать инт. кривые

$x^2 + cx + \frac{c^2}{8} = -x^2$; $2x^2 + cx + \frac{c^2}{8} = 0$; $x^2 + \frac{cx}{2} + \frac{c^2}{4} = 0$; $\left(x + \frac{c}{4}\right)^2 = 0$



$\Rightarrow$ $y = -x^2$ — особое реш.

Почему нет других особых реш.?

$F(x, y, y') = 0$, F – непр. дифф. ф-ия 3-х перем.

Опр. p - дискриминантная кривая

$$\begin{cases} F(x,y,p) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial p}(x,y,p) = 0 \end{cases}$$ искл. p $\Rightarrow$ $\underline{\varphi(x,y) = 0}$ – ур-ие дискр. кривой

Th. Если реш. ур-ие явл. особым, то оно лежит на p - дискр. кривой

Нахожд. на p-дискр. кр. – необх. усл-ие для особого реш.

$4(xy - 2y) = 4x^2$

$$\begin{cases} 4(xp - 2y) = 4x^2 - p^2 \\ 4x = -2p \end{cases} \Rightarrow p = -2x$$

$4(-2x - 2y) = 4x^2 - 4x^2$

$\Rightarrow$ $y = -x^2$ — p-дискр. кривая $y = -x^2$

$\Rightarrow$ других особых реш. нет