

$$y'' + 2y' + y = 2x \cos x = x e^x + x e^{-x}$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad \lambda = -1 \text{ deg } 2$$

$$\text{ОрбОУ: } y = C_1 e^x + C_2 x e^{-x}$$

$$\text{нр. 2: } y = x e^x \quad \mu = 1, k = 0, m =$$

$$\text{УПНУ: } y = (Ax + B) e^{-x} \quad y' = e^{-x}(Ax + A + B)$$

$$y'' = e^{-x}(Ax + 2A + B)$$

$$Ax + 2A + B + 2Ax + 2A + 2B + Ax + B = x$$

$$y_1 = \frac{1}{4}(x-1)e^{-x}$$

$$\text{нр. 2: } y = x e^{-x} \quad \mu = -1, k = 2, m = 1$$

$$\text{УПНУ: } y = x^2(Ax + B) e^{-x} = (Ax^3 + Bx^2) e^{-x}$$

$$y' = e^{-x}(Ax^3 + (3A - B)x^2 + 2Bx)$$

$$y'' = e^{-x}((+Ax^3 - (6A - B)x^2 + (6A - 4B)x + 2B))$$

$$+ Ax^3 - (6A - B)x^2 + (6A - 4B)x + 2B +$$

$$+ 3Ax^2 + 2(3A - B)x + 4Bx +$$

$$+ Ax^3 + Bx^2 = x$$

$$x: 6A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{6} \quad y_2 = \frac{x^3}{6} e^{-x}$$

$$x^0: 2B = 0 \rightarrow B = 0$$

$$\text{Омб: } y = C_1 e^x + C_2 x e^{-x} + \frac{x-1}{4} e^x + \frac{x^3}{6} e^{-x}$$

$$\text{Урнн нз 93: } y'' - ay' + 2y = e^x \cos x \quad a \in \mathbb{R}$$

$$\lambda^2 - a\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$$

$$|a| > 2$$

$$\text{ОрОУ: } y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$|a| = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{a}{2} \text{ нр. 2}$$

$$\text{ОрОУ: } y = C_1 e^{a/2 x} + C_2 x e^{a/2 x}$$

$$|a| < 2 \Rightarrow \lambda = \frac{a \pm i\sqrt{4 - a^2}}{2}$$

$$\text{ОрОУ: } y = e^{a/2 x} \left( C_1 \cos \frac{\sqrt{4 - a^2}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{4 - a^2}}{2} x \right)$$

$$\text{преломе мекс } e^x \cos x \Rightarrow \mu = 1 \pm i$$

$$\mu\text{-корень хэр. ур-н, келл:}$$

$$(1+i)^2 - a(1+i) + 2 = 0$$

$$2i - a - ai + 2 = 0$$

$$a = 2 - \text{резонанс келл}$$

$$\text{нрн } a \neq 2 \quad k=0 \quad m=0$$

$$\text{УрннУ: } y = A e^x \cos x + B e^x \sin x$$

$$\text{нрн } a = 2 \quad k=1 \quad m=0$$

$$\text{УрннУ: } y = x(A e^x \cos x + B e^x \sin x)$$

гэвчлэл релонанс нелнн

б зөгүвэллэлл  
онелннннн

Две лев. з. коим мышо суммируем оседе реи, а  
монитор елементам же  $C_1, C_2$

Рр.  $y'' + 4y = \sin 2x$   $y(0) = 1$   $y'(0) = 0$

$\lambda^2 + 4\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \pm 2i$

ОРОУ:  $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

Рр. член:  $\sin 2x \rightarrow \mu = \pm 2i$   $k=1$   $m=0$  ↓ резонанс  
элемент

ЧРОУ:  $y = x(A \sin 2x + B \cos 2x)$

Рр. член - неэлемент

Прозв. монитор член. монитор  $\rightarrow$  член ЧРМУ б буге  $y = B \cos 2x$

$y' = B \cos 2x - 2Bx \sin 2x = B(\cos 2x - 2x \sin 2x)$

$y'' = B(-2 \sin 2x - 2 \sin 2x - 4x \cos 2x) = -4B(\sin 2x + x \cos 2x)$

$\rightarrow -4B \sin 2x = \sin 2x \rightarrow B = -1/4$

ОРМУ:  $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{x}{4} \cos 2x$

3. Монитор:

$y(0) = 1$   $C_1 = 1$   $y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x - \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{x}{2} \sin 2x$

$y'(0) = 0$   $2C_2 - \frac{1}{4} = 0$   $C_2 = 1/8$   $y = \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{x}{4} \cos 2x$

Прозв. член

$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$ , где  $a_i(x)$  - монитор на монитор

Монитор реи. ОУ

$y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n$ ,  $y_1, \dots, y_n$  - ФР

Варианты монитор

ОРМУ член б буге  $y = C_1(x) \cdot y_1(x) + \dots + C_n(x) \cdot y_n(x)$

$C_1'(x), \dots, C_n'(x)$  монитор из монитор:

$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + \dots + C_n'(x) y_n(x) = 0 \\ C_1'(x) y_1'(x) + \dots + C_n'(x) y_n'(x) = 0 \end{cases}$

$C_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + \dots + C_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) = f(x) \leftarrow$  монитор зже пр. ч. монитор

$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_n \\ y_1' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$  - монитор Вронитор  $\Delta \neq 0$

Рр.  $y'' - y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$\lambda^2 - 1 = 0$ ,  $\lambda_{1,2} = \pm 1$

$\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^{-x} = 0 \\ C_1'(x) (e^x)' + C_2'(x) (e^{-x})' = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{cases}$

$\rightarrow 2C_1'(x) e^x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

ОРОУ:  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

ОРМУ:  $y = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x}$

$C_1'(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{2(e^x + e^{-x})}$

$C_2'(x) = \frac{e^{2x} - 1}{2(e^x + e^{-x})}$

$$C_1(x) = \int \frac{1-e^{-2x}}{2(e^x+e^{-x})} dx = \frac{1}{2} \int e^x \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{t-1/t}{t+1/t} dt = \frac{1}{2} \int \frac{t^2-1}{t^2+1} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{2}{t^2+1}\right) dt = \frac{1}{2} t - \arctan t + C_1 = \frac{1}{2} e^x - \arctan e^x + C_1$$

$$C_2(x) = \frac{1}{2} \int \frac{e^{2x}-1}{e^x+e^{-x}} dx = \frac{1}{2} \int e^x \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{t-1/t}{t+1/t} dt = \dots = -\frac{t}{2} + \arctan t + C_2 =$$

$$= -\frac{e^x}{2} + \arctan e^x + C_2$$

Омбен:  $y = \left(\frac{1}{2}e^{-x} - \arctan e^{-x} + C_1\right)e^x +$   
 $+ \left(-\frac{1}{2}e^x + \arctan e^x + C_2\right)e^{-x}$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} - e^x \arctan e^{-x} + C_1 e^x - \frac{1}{2} + e^{-x} \arctan e^x + C_2 e^{-x}$$

Упр-ие 3.1.1

Решить уравнение:  $(ax+b)^n y^{(n)} + \dots + (ax+b)y' + y = f(x)$

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0 \quad \left( \text{на } (0, +\infty) \text{ или } (-\infty, 0) \right)$$

т.е.  $x^n \neq 0$

Заменим независим.  $x = e^t \quad (x > 0)$   
 $x = -e^t \quad (x < 0)$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = e^{-t} y'_t \quad ; \quad y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{e^{-t} y''_{tt} - e^{-t} y'_t}{e^t} = e^{-2t} (y''_{tt} - y'_t)$$

→ получим уравнение с независим. коэф.

Пр.  $x^2 y'' - 2y = -2x^3 \quad (x > 0)$

$$x = e^t$$

$$y''_{xx} = e^{-2t} (y''_{tt} - y'_t)$$

$$y''_{tt} - y'_t = -2e^{3t}$$

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \lambda = -1 \quad \lambda = 2$$

Ороч:  $y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$

пр. член  $-2e^{3t}$

$\mu = 3 \quad k = 0 \quad m = 0$  Омбен:  $y = \frac{C_1}{x} + C_2 x^2 - \frac{1}{2} x^3$

чрмч:  $y = A e^{3t}$

$$9A - 3A - 2A = -2 \rightarrow A = -1/2$$

чрмч:  $y = -\frac{1}{2} e^{3t}$

Пр.  $x^2 y'' + x y' + y = \cos(\ln x)$

$$x = e^t \quad ; \quad y'_x = e^{-t} y'_t \quad ; \quad y''_{xx} = e^{-2t} (y''_{tt} - y'_t)$$

$$y''_{tt} - y'_t + y'_t + y = \cos t$$

$$y''_{tt} + y = \cos t$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow \lambda = \pm i$$

пр. член:  $\cos t \quad \mu = \pm i \quad k = 1 \quad m = 0$

$$e^{\pm i t} \cos p t$$

$$d = 0 \quad p = 1$$

чрмч:  $y = B t \sin t$   
 (независим. ор-член)

Ороч:  $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$

$$y' = B t \cos t + B \sin t$$

$$y'' = B \cos t - B t \sin t + B \cos t = 2B \cos t - B t \sin t \rightarrow B = \frac{1}{2} \quad y'' + y = \cos t$$

$$\Rightarrow y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \frac{t}{2} \sin t$$

$$\Rightarrow \text{Омбен: } C_1 \cos \ln x + C_2 \sin \ln x + \frac{\ln x}{2} \sin \ln x$$