Сост. ЛОУ с пост. коэфф., имм. возм. пор. и имм. данные реш.

1) $y_1 = x^2 e^x$

$\lambda_1 = 1$ кр. 3 $\quad (\lambda-1)^3 = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1$

$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

2) $y_1 = xe^x$, $y_2 = e^{-x}$

$\lambda_1 = 1$ кр. 2 $\quad \lambda_2 = -1$ кр. 1

$(\lambda-1)^2(\lambda+1) = (\lambda-1)(\lambda^2-1) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$

$y''' - y'' - y' + y = 0$

3) $y_1 = x$ $\quad y_2 = \sin x$

$\lambda_1 = 0$ кр. 2 $\quad \lambda_{2,3} = \pm i$ кр. 1

$\lambda^2(\lambda^2+1) = \lambda^4 + \lambda^2$ $\quad y^{(4)} + y'' = 0$

Линейные однород. системы с пост. коэф.

Неизв. ф-ии $x_1(t), \dots x_n(t)$

$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$

$\dots$

$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad A = (a_{ij})$ $\quad \underline{\dot{\bar{x}} = A\bar{x}}$

Общее реш.:

$\bar{x} = C_1\bar{x}^{(1)}(t) + \dots + C_n\bar{x}^{(n)}(t)$

$\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \dots \bar{x}^{(n)}(t)$ — ФСР

Хар-ое ур-ие

$\det(A - \lambda E) = 0$

Утв. Если $\lambda \in \mathbb{R}$ – корень хар. ур-ия,

$\bar{x} = e^{\lambda t}\bar{h}$, $\bar{h}$ – собств. вектор, соотв. данному λ

это решение системы

Если все $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{R}$ и различны

$\Rightarrow$ общее реш. $\bar{x} = C_1 e^{\lambda_1 t}\bar{h}_1 + \dots + C_n e^{\lambda_n t}\bar{h}_n$ (*)

Пусть λ – корень хар. ур-ия, $\lambda \in \mathbb{R}$

E_λ – собств. подпр-во

$E_\lambda = \{\bar{x} : A\bar{x} = \lambda\bar{x}\}$

$1 \le \dim E_\lambda \le$ кр. λ

Лин. преобр (матр. A) наз. диагонализ., если сущ. базис, в котором матрица имеет диаг. вид $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix}$ собств. знач.

$\bar{h}_1, \dots \bar{h}_n$ – базис собств. в.

Дост. усл-ие

Если все корни хар. мн-на действ. и различны, то преобразование диагонализируемо

Необх. и дост. усл-ие

Лин. пр. диагонализ. $\Leftrightarrow$ все корни хар. мн-на действ. и $\forall \lambda_i$ $\dim E_{\lambda_i} =$ кр. λ_i

Если матр. A диаг., то ф-ла (*) для общ. реш. сохраняется, только среди λ_i могут быть одинаковые

Пр. $\begin{cases} \dot{x} = x+2y+2z \\ \dot{y} = 2x+y+2z \\ \dot{z} = 2x+2y+z \end{cases}$ $\lambda_1 = -1$ кр. 2, $\lambda_2 = 5$ кр. 1 $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -1$

$$A+E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad x_1+x_2+x_3=0 \qquad \begin{matrix} x_1 = -x_2-x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{matrix}$$

$rg = 1 \Rightarrow \dim E = 3-1 = 2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\bar{h}_1} + x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\bar{h}_2}$$

$\lambda = 5$

$$A-5E = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg = 2 \Rightarrow \dim E = 1$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \\ x_3 = x_3 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{h}_3$$

Ответ: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \cdot e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \cdot e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

В общем случае матр. приводится к Жордановой форме.

Жорданова клетка

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad k=1 \ (\lambda) \qquad k=2 \ \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad k=3 \ \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Жорданова форма

$$\begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & & 0 \\ & \boxed{J_2} & & & \\ & & \boxed{J_3} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \boxed{J_n} \end{pmatrix}$$

В разных клетках могут быть разные λ, и могут быть одинаковые

На каждую клетку приходится ровно 1 лин. нез. собств. вектор, соотв. данному λ

$\dim E_\lambda$ – кол-во клеток, соотв. данному λ

кр. λ – общее кол-во λ (сумма размеров клеток, соотв. данному λ)

Диагонализируемость $\Leftrightarrow$ все клетки размера 1

Клетке размера k даём k реш. в ФСР

Пусть $\bar{h}_1, \dots \bar{h}_k$ – собств. векторы базиса, в котором матр. имеет жорд. вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$
$\bar{h}_1 \ \bar{h}_2 \ \dots \ \bar{h}_k$

$$\begin{aligned} A\bar{h}_1 &= \lambda \bar{h}_1 \\ A\bar{h}_2 &= \bar{h}_1 + \lambda \bar{h}_2 \\ A\bar{h}_3 &= \bar{h}_2 + \lambda \bar{h}_3 \\ &\vdots \\ A\bar{h}_k &= \bar{h}_{k-1} + \lambda \bar{h}_k \end{aligned} \qquad \text{или} \qquad \begin{aligned} (A-\lambda E)\bar{h}_1 &= 0 \\ (A-\lambda E)\bar{h}_2 &= \bar{h}_1 \\ (A-\lambda E)\bar{h}_3 &= \bar{h}_2 \\ &\vdots \\ (A-\lambda E)\bar{h}_k &= \bar{h}_{k-1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

до тех пор, пока неоднор. сис. был. совместн.

$\bar{h}_1$ – собств.

$\bar{h}_2, \dots \bar{h}_k$ – присоед.

$\bar{h}_1, \dots \bar{h}_k$ – жорданова цепочка

Эти клетки и эти цепочки дают k реш. в ФСР.

$$e^{\lambda t}\bar h_1,\ e^{\lambda t}(\bar h_2+t\bar h_1),\ e^{\lambda t}\left(\bar h_3+t\bar h_2+\frac{t^2}{2}\bar h_1\right),\ \dots,\ e^{\lambda t}\left(\bar h_k+t\bar h_{k-1}+\dots+\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\bar h_1\right)$$

Все возм. случаи при $n=3$

I $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ – разл.

$$\bar x=C_1 e^{\lambda_1 t}\bar h_1+C_2e^{\lambda_2 t}\bar h_2+C_3e^{\lambda_3 t}\bar h_3$$

II $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$

б) $\dim E_{\lambda_1}=1$ $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0\\ & \lambda_1 & 1\\ 0 & & \lambda_3\end{pmatrix}$ а) $\dim E_{\lambda_1}=2$ сохр. (*) $\lambda_2=\lambda_1$

$(A-\lambda E)\bar h_1=0$

$(A-\lambda E)\bar h_2=\bar h_1$

$(A-\lambda E)\bar h_3=0$ $\Rightarrow$ $\bar x=C_1e^{\lambda_1 t}\bar h_1+C_2e^{\lambda_1 t}(\bar h_2+t\bar h_1)+C_3e^{\lambda_3 t}\bar h_3$

Пр. $\begin{cases}\dot x=-2y-2z\\ \dot y=3x+5y+3z\\ \dot z=-x-2y-z\end{cases}$ $A=\begin{pmatrix}0&-2&-2\\3&5&3\\-1&-2&-1\end{pmatrix}$ $\lambda=1$

$\lambda=1$: $\begin{pmatrix}-1&-2&-2\\3&4&3\\-1&-2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&2\\3&4&3\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&2\\0&-2&-3\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&3\\0&0&0\end{pmatrix}$

$x_1=x_3$

$x_2=-3/2x_3$ $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}1\\-3/2\\1\end{pmatrix}$ $\bar h_1=\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$

$x_3=x_3$ $\dim E_1=1$

$(A-E)\bar h_2=\bar h_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&-2&2\\3&4&3&-3\\1&-2&-2&2\end{array}\right)\sim\dots\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&1\\0&2&3&-3\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$x_1=x_3+1$

$x_2=-3/2x_3-3/2$ $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix}1\\-3/2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-3/2\\0\end{pmatrix}$ $\begin{cases}\dot x=-2y-2z\\ \dot y=3x+5y+3z\\ \dot z=-x-2y-z\end{cases}$

$x_3=x_3$

Выберем какое-то реш.

$x_3=-1$ $\bar h_2=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$

Присоед. в-р – решение неодн. систем. Его нельзя менять как хотим пропорционально (в отличие от собств.)

→ Берем какое-то реш.

$\lambda=2$

$A-2E=\begin{pmatrix}2&-2&-2\\3&3&3\\-1&-2&-3\end{pmatrix}\sim\dots\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\begin{matrix}x_1=x_3\\x_2=-2x_3\\x_3=x_3\end{matrix}$ $\bar h_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}+C_2e^t\left(\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}\right)+C_3e^{2t}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$

III $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$

а) $\dim E_\lambda = 3$ $\quad \bar{x} = e^{\lambda t}(c_1\bar{h}_1 + c_2\bar{h}_2 + c_3\bar{h}_3) = e^{\lambda t}\bar{c}$

б) $\dim E_{\lambda_1} = 2$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\ \bar{h}_1 \ \bar{h}_2 \ \bar{h}_3 \end{array} \quad \bar{x} = c_1 e^{\lambda t}\bar{h}_1 + c_2 e^{\lambda t}(\bar{h}_2 + t\bar{h}_1) + c_3 e^{\lambda t}\bar{h}_3$$

присоединить можно не к любому в-ру

Пр. $\dot{x} = 9x - 6y - 2z$
$\dot{y} = 18x - 12y - 3z$
$\dot{z} = 18x - 9y - 6z$

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A + 3E = \begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ & 0 & \end{pmatrix}$$

$6x_1 - 3x_2 = x_3$

$x_1 = x_1$
$x_2 = x_2$
$x_3 = 6x_1 - 3x_2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}}_{``\bar{f}_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}}_{``\bar{f}_2}$$

$\bar{f}_1, \bar{f}_2$ – собств. векторы, но неизвестно, к какому присоединить $\bar{h}_2$

$\bar{h}_1 = \alpha \cdot \bar{f}_1 + \beta \bar{f}_2$

ищем в-р, к которому можно присоединить

$$\bar{h}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 6\alpha - 3\beta \end{pmatrix} \qquad (A + 3E)\bar{h}_2 = \bar{h}_1$$

сист. должна быть совместна

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 12 & -6 & -2 & \alpha \\ 18 & -9 & -3 & \beta \\ 18 & -9 & -3 & 6\alpha - 3\beta \end{array}\right) \qquad \begin{cases} \beta = 6\alpha - 3\beta \\ 2\beta = 3\alpha \end{cases} \qquad 4\beta = 6\alpha$$

$\rightsquigarrow$ Можно взять $\beta = 3$, $\alpha = 2$

$$\bar{h}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\dim E_3 = 2$, но подпр-во в-в $\bar{h}_1$, к кот. можно присоед. в-р одномерно

$(A + 3E)\bar{h}_2 = \bar{h}_1$ $\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 12 & -6 & -2 & 2 \\ 18 & -9 & -3 & 3 \\ 18 & -9 & -3 & 3 \end{array}\right)$ $\quad rg = 1$ $\quad 6x_1 - 3x_2 - x_3 = 1$

Напр. $x_1 = x_2 = 0$; $x_3 = -1$

$$\bar{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

в кач-ве $\bar{h}_3$ можно взять $\forall$ с.в., линейно нез. с $\bar{h}_1$, например, $\bar{f}_1$.

Ответ: $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 e^{-3t}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{-3t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right) + c_3 \cdot e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$