جلسه ۱ :

از آنجایی که ما به مسائلی برمی‌خوریم که نیاز به یکی از فرآیندهای ① ریشه‌یابی ② تقریب تابع ③ تقریب مشتق یا انتگرال ④ حل معادله دیفرانسیل یا انتگرال ⑤ حل دستگاه (معادله دیفرانسیل) در ادامه چند مسئله کاربردی را مطرح می‌کنیم تا با این مدل برسیم که برای تحلیل پدیده‌ها نیاز به روش‌های عددی داریم:

۱- مسئله رشد جمعیت:

فرض کنیم P_t معرف جمعیت یک گونه از جانداران در زمان t باشد. چنانچه این سیستم بسته باشد یعنی عوامل بیرونی باعث

رشد یا زوال سریع این گونه نشود در این صورت طبق قانون مالتوس نرخ تغییرات جمعیت متناسب است با خود جمعیت به عبارت دیگر:

$$\frac{dp(t)}{dt} \propto p(t) \longrightarrow \frac{dp(t)}{dt} = k\,p(t)$$

$k =$ ثابت (ضریب رشد یا زوال)

Week 20 | Month 5 | 2016
ولادت حضرت امام زین العابدین (ع) تبریک باد
لهو امتیاز تنباکو به فتوای آیت الله میرزا حسن شیرازی (۱۲۷۰ هـ ش)

می‌توان اشک ندامت را شفیع خویش کرد قطره‌ای باران برویاند گیاه خشک را (سها)

Scanned with CamScanner

معادله دیفرانسیل خطی و مرتبه اول است و به آسانی می توان آنرا حل کرد.

$$\frac{dp(t)}{p(t)} = k\alpha(t) \xrightarrow{\int} \ln|p(t)| = kt + c$$

$$\rightarrow p(t) = e^{kt+c} = \alpha e^{kt}$$

فرض کنید جمعیت اولیه یا P در زمان صفر P_0 باشد.

$$P(0) = P_0$$

$$t=0 \longrightarrow p(0) = \alpha e^{k\times 0} = \alpha = P_0 \Rightarrow p(t) = p(0)e^{kt}$$

چنانچه مسئله را در یک سیستم باز در نظر بگیریم دیگر نرخ تغییرات جمعیت متناسب با خود جمعیت نخواهد بود و در این حالت نرخ تغییرات جمعیت متناسب با یک تابعی بر حسب جمعیت است.

$$\frac{dp(t)}{dt} \propto F(t, p(t)) \rightarrow \frac{dp(t)}{dt} = kF(t, p(t))$$

$$\longrightarrow p(0) = P_0$$ که یک معادله دیفرانسیل غیرخطی است.

جلسه ۲:

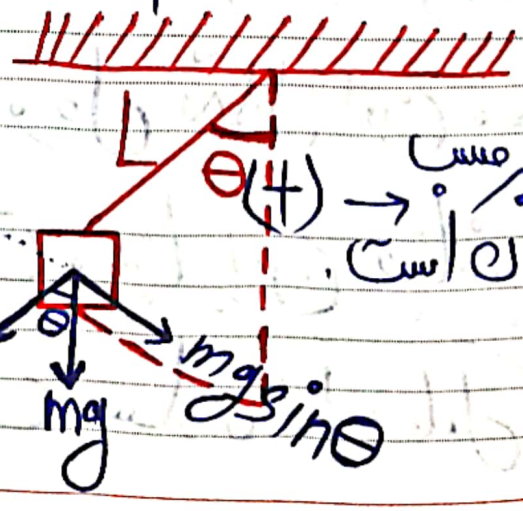
۲- فرض کنید جسمی به جرم m توسط یک ریسمان به طول L به یک سقف متصل شده است. فرض کنیم این جسم را از حالت سکون به اندازه θ از حالت تعادل خارج کردیم در این صورت می‌خواهیم مدل مربوط به این حرکت را استخراج کنیم.

برای اینکه مدل این حرکت را استخراج کنیم فرضیات زیر را در نظر می‌گیریم:

۱- فرض کنید جرم ریسمان ناچیز باشد

۲- اصطکاک بین ریسمان و دیوار ناچیز باشد.

۳- اصطکاک هوا را هم در نظر نگیرید.



تابعی بر حسب زمان است.

زاویه = $L\theta$ = طول مسیر

بنابه قانون نیوتن خواهیم داشت:

$$a(t) = \frac{d}{dt}\underbrace{v(t)}_{\text{سرعت}} = \frac{d^2}{dt^2}\underbrace{x(t)}_{\text{مکان}}$$

$$F(t) = m a(t)$$

$$-mg\sin\theta(t) = m a(t) = m\frac{d^2}{dt^2}\left(L\theta(t)\right)$$

$$= mL\theta''(t)$$

$$\rightarrow mL\theta''(t) + mg\sin\left(\theta(t)\right) = 0$$

$$\theta''(t) + \frac{g}{L}\sin\left(\theta(t)\right) = 0$$

معادله حاصل یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم و غیرخطی است و حل تحلیلی این معادله دیفرانسیل امکان پذیر نیست. بنابراین چنانچه بخواهیم رفتار یک آونگ ساده را تحلیل کنیم نیازمند

ارائه روش عددی برای حل معادله دیفرانسیل بالا هستیم.

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \longrightarrow \sin\theta \simeq \theta$$

θ کوچک باشد.

$$\Rightarrow \theta''(t) + \frac{g}{L}\theta(t) = 0$$

$$\theta(t) = c_1 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\, t\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\, t\right)$$

↳ جواب تحلیلی

با تحلیل این ۲ مثال درمی‌یابیم که برای حل (تحلیل) یک پدیده طبیعی، ۵ مدل خطا رخ خواهد داد که به شرح زیر می‌باشد:

تلفن | یادداشت:

۱- خطای رخ دادن به واسطه‌ی طرف نظر کردن‌ها و صرف پوشی کردن‌ها و ...

روز بزرگداشت حکیم عمر خیام

کی گفتمت از کوی من با دیده‌ی گریان برو — چون گل به بزم عاشقان، خندان بیا خندان برو (سیمین بهبهانی)

Scanned with CamScanner

۲ـ خطا در داده های ورودی مثلاً (m و a و g)

۳ـ خطا در ذخیره اعداد (g را چگونه ذخیره کنیم، m و a را چگونه؟)

۴ـ خطا در اعمال مساوی نظیر تقسیم و توان و ضرب و جمع و تفریق

۵ـ خطا در روش پیشنهادی برای حل آن مدل عددی

در این درس وظیفه ی ما تحلیل خطاهای دوم تا پنجم است. یادمان باشد که خطای شماره یک مربوط به متخصصان مدل سازی است.

(بهینه سازی)

* جلسه ۳:

جمع بندی:

پدیده طبیعی ⟶ مدل ریاضی $\xrightarrow{\text{روش عددی}}$ جواب پدیده طبیعی

(در صورت امکان تحلیلی)

کار آنالیز عددی ⟶

مفهوم خطا:

و تعاریف مختلف

خطای مطلق:

فرض کنید x تقریبی از X باشد. در این صورت خطای تقریب x را با $e(x)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e(x) = |X - x|$$

مقدار دقیق — مقدار تقریبی

Scanned with CamScanner

مثال: فرض کنید $X=\sqrt{2}$ و $x=1.41$ را به صورت $e(x)$ را محاسبه کنید.

$$e(x)=|\sqrt{2}-1.41|=|1.4142-1.41|=0.0042$$

مثال:

فرض کنیم چهار دستگاه اندازه گیری داشته باشیم که اولی ۱۰۰ متر را ۱۰۰/۵ اندازه می گیرد دومی ۱۰۰۰ متر را ۱۰۰۰/۵ اندازه می گیرد و سومی و چهارمی به ترتیب ۱۰۰۰۰ متر و ۱۰۰۰۰۰ متر را ۱۰۰۰۰/۵ و ۱۰۰۰۰۰/۵ اندازه می گیرد. چنانچه بخواهیم خطای مطلق این ۴ دستگاه را حساب کنیم داریم:

	X	x	
۱	۱۰۰ متر	۱۰۰/۵	$\longrightarrow e(x)=\|100-100.5\|=\boxed{0.5}$
۲	۱۰۰۰ متر	۱۰۰۰/۵	$\longrightarrow e(x)=\boxed{0.5}$
۳	۱۰۰۰۰ متر	۱۰۰۰۰/۵	$\longrightarrow e(x)=\boxed{0.5}$
۴	۱۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰/۵	$\longrightarrow e(x)=\boxed{0.5}$

Scanned with CamScanner

یعنی از دید خطای مطلق انگار این ۴ دستگاه عملکرد مساوی دارند حال آنکه عملکرد دستگاه ۴ بسیار بهتر از عملکرد دستگاه ۱ تا ۳ است اما متر خطای مطلق این مورد را نشان نمی‌دهد بنابراین این رخ داد ما را به سمت ارائه متر جدید سوق می‌دهد.

* **خطای نسبی:** فرض کنید x تقریبی از $X \neq 0$ باشد در اینصورت خطای نسبی x را با $\delta(x)$ نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:

$$\delta(x) = \frac{|X-x|}{|X|} = \frac{e(x)}{|X|}$$

مجدداً مثال ۴ دستگاه را با این متر جدید حساب کنید.

$$\delta(x) = \frac{e(x)}{|X|} = \frac{0/5}{100} = 0/5 \times 10^{-2} \quad (1)$$

$$\delta(x) = \frac{e(x)}{|X|} = \frac{0/5}{1000} = 0/5 \times 10^{-3} \quad (2)$$

$$\delta(x) = \frac{e(x)}{|X|} = \frac{0/5}{10000} = 0/5 \times 10^{-4} \quad (3)$$

$$\delta(x) = \frac{e(x)}{|X|} = \frac{0/5}{100000} = 0/5 \times 10^{-5} \quad (4)$$

Scanned with CamScanner

همانطور که از تعریف خطای نسبی برمی‌آید چنانچه X عددی نزدیک صفر باشد متأسفانه چون صفر در مخرج کسر $\frac{e(x)}{|X|}$ به سمت صفر می‌رود بنابراین کل کسر به شدت بزرگ می‌شود، نتیجه می‌گیریم این متر برای محاسبه‌ی خطای اعداد نزدیک به صفر خوب نیست. برای رفع این مشکل از متر خطای نسبی می‌توان خطای جدیدی را تعریف کرد:

* **خطای مطلق ـ نسبی:** فرض کنید x تقریبی از X باشد در این صورت خطای مطلق ـ نسبی x را با $es(x)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$es(x) = \frac{|X-x|}{|X|\,|x|} = \frac{e(x)}{|X|\,|x|}$$

دقت کنید این خطا وقتی X بزرگ باشد تقریباً همان خطای نسبی خواهد بود و چنانچه X نزدیک صفر باشد در این حالت $es(x)$ تقریباً معادل خطای مطلق است.

X بزرگ باشد $\rightarrow |X|+1 \approx |X| \Rightarrow e\delta(x) \approx \delta(x)$

X نزدیک به صفر $\rightarrow |X|+1 \approx 1 \Rightarrow e\delta(x) \approx e(x)$

تعریف خطای مطلق - نسبی حدی:

به یک کران بالا برای خطاهای مطلق و نسبی به ترتیب خطای حدی مطلق و نسبی گویند و به ترتیب با e_x و δ_x نمایش می‌دهیم. بنابراین داریم:

$$\delta(x) \leq \delta_x \quad , \quad e(x) \leq e_x$$

$$|X-x| \leq e_x \rightarrow -e_x \leq X-x \leq e_x \Rightarrow$$

$$x-e_x \leq X \leq x+e_x$$ محدوده‌ی X دقیق

جدا کردن e_x و δ_x معمولاً سخت است.

Scanned with CamScanner

قضیه مهم: فرض کنید x و y به ترتیب تقریب‌های اعداد مثبت X و Y باشند و داشته باشیم:

$$\begin{cases} X = x + e_x \\ Y = y + e_y \end{cases}$$

آنگاه:

1) $e(x+y) \leq e(x) + e(y)$

2) $e(xy) \leq x\,e(y) + y\,e(x)$

3) $e\left(\frac{x}{y}\right) \leq \frac{x\,e(y) + y\,e(x)}{y^2}$

4) $\delta(x+y) \leq \max\{\delta(x), \delta(y)\}$

5) $\delta(xy) \leq \delta(x) + \delta(y)$

6) $\delta\left(\frac{x}{y}\right) \leq \delta(x) + \delta(y)$

جلسه ۴ :

سیستم نمایش اعداد

۱_ نمایش مبنای ثابت
سیستم ذخیره اعداد در ماشین در گذشته

۲_ نمایش شناور
سیستم فعلی ذخیره اعداد در ماشین + اطلاعات

۳_ نمایش علمی
نمایش اعداد در مقالات، گزارش‌ها و کتب علمی

۴_ نمایش هندسی
نمایش اعداد در واقع و مقالات مهندسی

۱_ نمایش مبنای ثابت :

این سیستم را با $F(\beta, m, n)$ نمایش می‌دهیم که β مبنا، m تعداد ارقام بعد از اعشار و n تعداد ارقام قبل از اعشار می‌باشد به صورت زیر است:

$$X = \pm(d_n d_{n-1} \cdots d_1 / d_{-1} d_{-2} \cdots d_{-m})_\beta$$

$$d_i \in \{0, 1, 2, \ldots, \beta-1\}$$

Scanned with CamScanner

فرم باز شده به صورت X:

$$X = \pm\left(d_n \times \beta^{n-1} + d_{n-1} \times \beta^{n-2} + \cdots + d_1 \times \beta^{0} + d_{-1} \times \beta^{-1} + d_{-2} \times \beta^{-2} + \cdots + d_{-m} \times \beta^{-m}\right)$$

مثال: $F(10,1,1)$ را روی محور نمایش دهید.

فرم کلی این اعداد به صورت (d_1 / d_{-1}) و

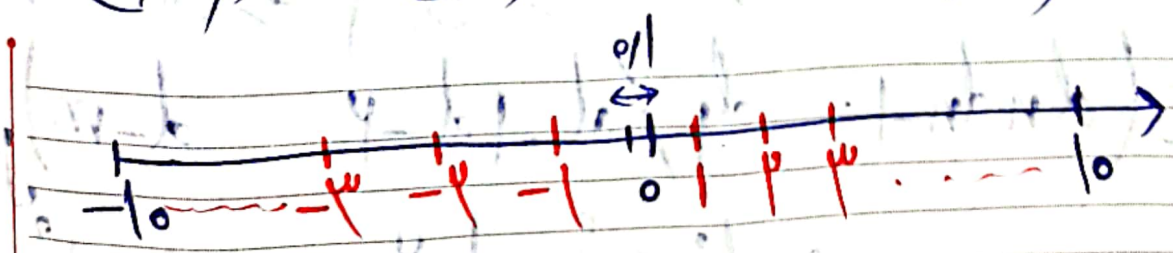
$d_1, d_{-1} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$:

$\pm(0/0)$ و $\pm(0/1)$ و ... و $\pm(0/9)$

$\pm(1/0)$ و $\pm(1/1)$ و ... و $\pm(1/9)$

$\vdots$

$\pm(9/0)$ و $\pm(9/1)$ و ... و $\pm(9/9)$



Scanned with CamScanner

نقاط قوت و ضعف این نمایش نقطه ثابت:

چون در محاسبات ما نیاز به اعداد صفر و نزدیک آن داریم این نوع نمایش این اعداد را در اختیار ما قرار می‌دهد (هم صفر و هم اعداد نزدیک به صفر را دارا است) در ادامه نشان می‌دهیم که تقریباً تعداد اعضای مثال قبل ۲۰۰ عدد است اما متأسفانه با این ۲۰۰ عدد ما قادر به نمایش بازه‌ای کوچک مثل [-1 و 1] از اعداد حقیقی [(-∞ و +∞)] شده‌ایم و یک تعداد زیاد حافظه مصرف کرده‌ایم و یک بازه‌ی بسیار کوچک را در ماشین ذخیره کرده‌ایم. می‌توان نشان داد در مبنای ۲ (مبنای ماشین) کل اعداد مجموعه F(β و m و n) در بازه‌ی [-2^n و 2^n] قرار می‌گیرد یعنی برای آنکه مجموعه‌ی اعداد حقیقی را بتوان با این سیستم نمایش در ماشین ذخیره کرد n باید به سمت بی‌نهایت میل کند که این عملاً شدنی است بنابراین باید از این نمایش عبور کنیم و نمایش جدیدی را معرفی کنیم.

(سعدی)
گوهر خردمند به که تن دان بلند ، نه هر که به قامت مهتر به قیمت بهتر

مسیرهای راجع به تعداد اعضای مجموعه $F(\beta, m, n)$ بزرگترین عضو، کوچکترین عضو و فاصله‌ی بین اعضا مطرح می‌کنیم.

قضیه: فرض کنیم $F(\beta, m, n)$ معرف سیستم ممیز ثابت باشد، در اینصورت:

الف) تعداد کل عضوهای این مجموعه عبارتست از

$$2\beta^{m+n}-1$$

ب) بزرگترین عضو این مجموعه (از نظر قدر مطلق)

$$\beta^{n}-\beta^{-m}+(rr\cdots r/r\cdots r)\beta^{n}$$

$$r=\beta-1$$

ج) کوچکترین عضو این مجموعه صفر است و کوچکترین عضو ناصفر (از نظر قدر مطلق) β^{-m} است.

د) فاصله‌ی بین اعضای این مجموعه یکسان و به اندازه β^{-m} است.

۲- نمایش ممیز شناور:

در این سیستم از نمایش هر عدد X بصورت:

$$X = \pm(0/a_{-1}a_{-2}\cdots a_{-m})_\beta \times \beta^e$$

$$L \leq e \leq U$$

$$\boxed{a_{-1} \neq 0 \text{ باشد}}$$

یکتایی نمایش

کران پایین — کران بالا

$$e \in \mathbb{Z} \qquad a_i \in \{0, \ldots, \beta-1\}$$

مجموعه‌ی اعداد ممیز شناور به این فرمت را با $F(\beta, m, L, U)$ نمایش می‌دهیم.

مثال: مجموعه اعداد $F(2, 2, -1, 2)$ را روی محور نشان دهید.

$$e = -1, 0, 1, 2$$

$$X = \pm(0/1d_{-2})_2 \times 2^e, \quad d_{-2} \in \{0, 1\}$$

فعلاً اعداد مثبت را نمایش می‌دهیم:

Scanned with CamScanner

$e=-1$ و $(0/10)_2 \times 2^{-1} = 2^{-1} \times 2^{-1} = \frac{1}{4}$

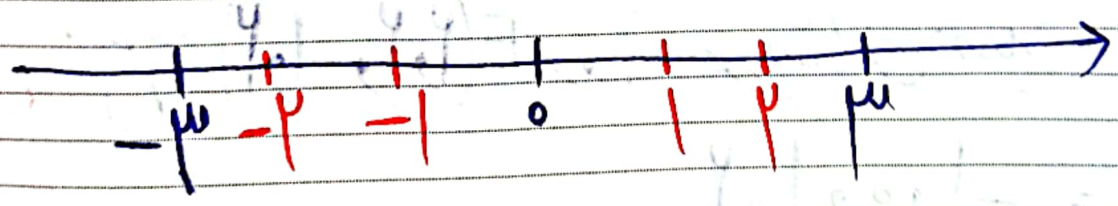
$(0/11)_2 \times 2^{-1} = (2^{-1}+2^{-2}) \times 2^{-1} = \frac{3}{8}$

$e=0$ و $(0/10)_2 \times 2^{0} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

$(0/11)_2 \times 2^{0} = (2^{-1}+2^{-2}) = \frac{3}{4}$

$e=1$ و $(0/10)_2 \times 2^{1} = 1$ و $(0/11)_2 \times 2^{1} = \frac{3}{2}$

$e=2$ و $(0/10)_2 \times 2^{2} = 2$ و $(0/11)_2 \times 2^{2} = 3$



قضیه: فرض کنیم $F(\beta, m, L, U)$ معرف دستگاه ممیز شناور باشد. در این صورت:

الف) تعداد کل عضوهای این مجموعه عبارت است از:

$$2\times(\beta-1)\times\beta^{m-1}\times(\underbrace{U-L+1}_{\text{تعداد اعداد صحیح بین } L \text{ و } U})$$

ب) بزرگترین عضو این مجموعه به لحاظ قدر مطلق $\beta^{U}(1-\beta^{-m})$ یا β^{U}

ج) کوچکترین عضو این مجموعه از نظر قدر مطلق β^{L-1}

$$x_{min}=+(\underbrace{0/1000\cdots0}_{m \text{ تا}})\times\beta^{L}=\beta^{-1}\times\beta^{L}$$

د) توزیع این نقاط غیر یکنواخت و فاصله‌ی بین هر دو دسته از نقاط یکنواخت β^{e-m} است.

تذکر مهم: $1+x+\cdots+x^{n-1}=\dfrac{1-x^{n}}{1-x}$

تذکر: عضو بلافاصله بعد از x_{min} را بدست آورید.

$$x^{*}=(\underbrace{0/1000\cdots01}_{m-1 \text{ تا}})\times\beta^{L}=(1\times\beta^{-1}+1\times\beta^{-m})\times\beta^{L}=\beta^{L-1}+\beta^{L-m}=x_{min}+\beta^{L-m}$$

Scanned with CamScanner

تذکر: همانطور که قبلاً گفته شد یک ایراد زیاد این نمایش با نداشتن صفر و اعداد نزدیک به صفر است برای رفع این ایراد مجموعه اعداد شبه نرمال را تعریف می‌کنیم که چنانچه این مجموعه اعداد را به اعداد مضرب شاخص اضافه کنیم یک مجموعه نمایشی مناسب که هم اعداد بزرگ را دارد و هم صفر و اعداد نزدیک به صفر را.

اعداد شبه نرمال:

چنانچه مجموعه اعدادی به صورت $a^* = \pm(0/0a_2 \ldots a_m)_\beta \times \beta^L$ که $a_i \in \{0, 1, \ldots, \beta-1\}$ که این مجموعه از اعداد در بازه $(-x_{min}, x_{min})$ قرار می‌گیرد.

$$1 = (0/1)_\beta \times \beta^1$$

$$1 = (0/01)_\beta \times \beta^2 \longrightarrow \text{یکتایی نیست}$$

$$1 = (0/001)_\beta \times \beta^3$$

Scanned with CamScanner

این نمایش، نمایشی یکتاست به خاطر ثابت بودن توان.

دستگاه معیار شناور نرمال (شبه نرمال):

چنانچه به $F(\beta, m, L, U)$ اعداد شبه نرمال a^* اضافه شود یک سیستم جدید به نام دستگاه معیار شناور شبه نرمال به وجود می‌آید و با $F_S(\beta, m, L, U)$ نمایش می‌دهیم.

تمرین: تعداد عضوهای این دستگاه را بدست آورید.

الف)

ب) عضو ماکسیمم و مینیمم این دستگاه را بدست آورید.

ج) آیا توزیع a^*ها یکنواخت است لطفاً فاصله‌ی بین هر دو عضو متوالی a^*ها را بدست آورید. بله چون توان ثابت است.

$\beta^L \times \beta - (0/0\cdots 1)$ min عضو

$(0/0\cdots 0\,\alpha\alpha)$

Scanned with CamScanner

نگاشت بریدن و گرد کردن به نزدیک ترین (گرد کردن):

فرض کنیم $a = \pm(0/d_1 d_2 \ldots d_m)_\beta \times \beta^e$ $(L \leq e \leq U)$

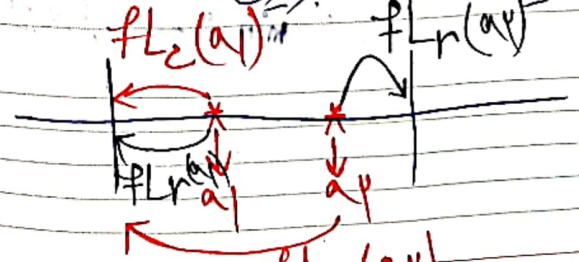
می خواهیم این عدد را در سیستم نمایش ممیز شناور ذخیره کنیم برای این کار می توان از دو نگاشت بر شرح زیر استفاده کرد:

۱- نگاشت بریدن: نگاشت بریدن را با نماد fl_c نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\bar{a} = fl_c(a) = \pm(0/d_1 d_2 \ldots d_m)_\beta \times \beta^e$$

در واقع این نگاشت برای عدد غیر ماشینی a عدد ماشینی بلافاصله قبلش را (برای اعداد مثبت) به عنوان نگاشت بریدن گزارش می دهد.

مثلاً اگر تک های بزرگ نمایش دهنده اعداد ماشینی و a_1 و a_2 دو عدد غیر ماشینی باشند در این صورت نگاشت بریدن



۲- نگاشت گرد کردن به نزدیک ترین:

گرد کردن به نزدیک ترین را با fl_r نمایش می دهیم که این نگاشت نزدیک ترین عدد ماشینی به عدد داده شده را به عنوان خروجی نمایش می دهد.

به عنوان مثال در مثال قبل داریم:

تذکر: همانطور که از روی شکل دیده می شود چنانچه عدد غیر ماشینی داده شده قبل از فاصله بین دو عدد ماشینی باشد در این صورت نگاشت بریدن و نگاشت گرد کردن یکی خواهد شد.

تمرین: کران بالای خطای مطلق و نسبی نگاشت بریدن را بدست آورید.

$$\text{خطای مطلق } e(a) = |fl_c(a) - a| = |(0/d_1 \ldots d_m)_\beta \times \beta^e$$

$$- (0/d_1 \ldots d_m d_{m+1} \ldots)_\beta \times \beta^e| = |(0/\underbrace{0 \ldots 0}_{m \text{ تا}} d_{m+1} \ldots)_\beta \times \beta^e|$$

$$\leq |(0/\underbrace{00 \ldots 0}_{m \text{ تا}} 1)_\beta \times \beta^e| = \beta^{-m+e}$$

پاکان ستم ز جور فلک بیشتر کشند گندم چو پاک گشت خورد زخم آسیا (صائب)

Scanned with CamScanner

همانطور که از کران بالای خطا برمی‌آید این کران بالا وابسته به نمای e است بنابراین اگر بخواهیم گستره‌ی بزرگی از اعداد حقیقی را در ماشین ذخیره کنیم مجبوریم e را بزرگ فرض کنیم. همین باعث می‌شود β^{e-m} بزرگ شود در نتیجه کران بالای خطای مطلق بزرگ شده و این بدین معناست که کران بالای خطا می‌تواند بزرگ شود.

خطای نسبی $\delta(a) = \dfrac{|fl_r(a)-a|}{|a|} \leq \dfrac{\beta^{e-m}}{|(0/d_1d_2\ldots d_{m-1})_{\beta}\times\beta^{e}|}$

$$\leq \frac{\beta^{e-m}}{(0/1\underbrace{0\ldots0}_{m-1})_{\beta}\times\beta^{e}} = \frac{\beta^{e-m}}{\beta^{e-1}} = \beta^{1-m}$$

تمرین: کران بالای خطای مطلق و نسبی نگاشت گردکردن را بدست آورید یعنی نشان دهید:

$$|fl_r(a)-a| \leq \frac{1}{2}\beta^{e-m}$$

$$\frac{|fl_r(a)-a|}{|a|} \leq \frac{1}{2}\beta^{1-m}$$

تذکر: با توجه به دو تمرین قبل ماشین‌ها از نگاشت گردکردن به نزدیک‌ترین استفاده می‌کنند.

تعریف: (ε ماشین) اپسیلون

به فاصله‌ی عدد یک و عدد بلافاصله بعد از آن در دستگاه معین شناور $f(\beta,m,l,u)$ اپسیلون ماشین گوییم و با ε_M نمایش می‌دهیم.

$$\varepsilon_M = \beta^{1-m}$$

(به عنوان تمرین نشان دهید)

$$1 = (0/1\underbrace{0\ldots0}_{m-1})_{\beta}\times\beta^{1}$$

$$1^{+} = (0/1\underbrace{0\ldots0}_{m-1}1)_{\beta}\times\beta^{1}$$

تذکر: $\delta(a) \leq \varepsilon_M$ با نگاشت جمع بریدن

خطای نسبی: $\delta(a) \leq \frac{1}{2}\varepsilon_M$ با نگاشت گردکردن

تعریف: در یک سیستم معین شناور $f(\beta,m,l,u)$ با نگاشت fl عدد حقیقی مثبت U را آوا مدگردکردن می‌نامیم هرگاه:

$$fl(1+\delta)=1 \quad \forall \delta \leq U$$

Scanned with CamScanner

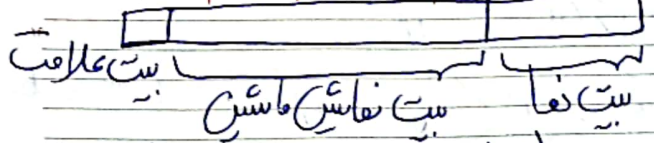
با توجه به تعریف و امر گرد کردن داریم:

$$U = \begin{cases} \varepsilon_M = \beta^{1-m} & \text{با نگاشت بریدن} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_M = \frac{1}{2}\beta^{1-m} & \text{با نگاشت گرد کردن} \end{cases}$$

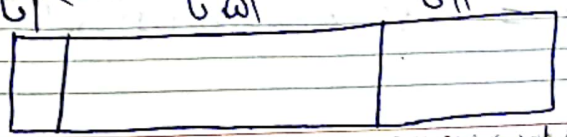
استاندارد IEEE: آی تریپل ای

در تمامی کامپیوترها برای یکسان سازی گزارش نمایش داده ها و ... از یک استاندارد جهانی تحت عنوان این استاندارد استفاده می شود که امروزه استاندارد IEEE 754 که به سهولت در امر پیاده سازی به دو دسته سیستم های ۳۲ بیتی (دقت معمولی) و سیستم های ۶۴ بیتی (دقت مضاعف) با ویژگی های زیر موجود می باشد:

۱- ۳۲ بیتی: دستگاه $F(2, 24, -126, 128)$ $= 32$



۲- ۶۴ بیتی: $F(2, 53, -1021, 1024)$ $= 64$



۱) ۳۲ بیتی:

$$x_{max} \approx \beta = 2^{128} \approx 10^{38}$$

$$\varepsilon_M = \beta^{1-m} = 2^{-23} \approx 10^{-8}$$

۱) ۶۴ بیتی:

$$x_{max} \approx 2^{1024} \approx 10^{308}$$

$$\varepsilon_M = \beta^{1-m} = 2^{-52} \approx 10^{-16}$$

تعریف (ارقام با معنای درست):

فرض کنیم X دارای نمایشی دهدهی به صورت $X = x_m \times 10^{m} + \cdots$ باشد. در این صورت بزرگترین عدد صحیح n که برای تقریب x در رابطه‌ی $|X - x| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}$ صادق است.

تذکر: می توان نشان داد (در جزوه حل شده است) که ارتباط کامل بین تعداد ارقام با معنای درست و کران بالای خطای تقریب وجود دارد یکی از این کرانها به صورت زیر است:

$$\delta(x) \leq \frac{1}{a_m} \times 10^{1-n}$$

Scanned with CamScanner

و از آن جایی که کوچکتر است به صورت زیر است:

$$\delta(x) \leq \frac{1}{2am} \times 10^{-n}$$

مثال: فرض کنید $x_1 = 1/00012$ و $X = 1/00000$ و $x_2 = 0/99987$،

مقدار ارقام با معنای درست هر یک از این تقریب‌ها را بدست آورده و سپس برآوردی از کران بالای خطای نسبی تقریب‌ها را بدست آورید.

$$X = 1 \times 10^0 \times 1 \Rightarrow am = 1$$

$$\boxed{m = 0}$$

$$|X - x_1| = |1/00000 - 1/00012| = 0/00012$$

$$\leq \frac{1}{2} \times 10^{0-n_1} \Rightarrow 1/2 \times 10^{-4} \leq 5 \times 10^{-n}$$

$$\boxed{n = 4}$$

$$\delta(x) \leq \frac{1}{2} \times 10^{1-4} = 10^{-3}$$

باید بزرگتر باشد

تذکر مهم: ارتباط بین تعداد ارقام با معنای درست و غلط تفریق در محاسبات عددی به شرح زیر است:

در تفریق دو عدد نزدیک به هم ممکن است خطای حذف ارقام با معنای درست رخ دهد. با توجه به کران بالای معرفی شده هرچه n کاهش یابد کران بالای خطای تقریب می‌تواند افزایش یابد.

نتیجه‌گیری: در کارهای عددی تا جای ممکن از تفریق دو عدد نزدیک به هم اجتناب می‌کنیم.

وضعیت یک مسأله و پایداری الگوریتم:

در مورد حل یک مسأله ریاضی به کمک یک روش عددی دو مورد باید به صورت کاملاً مجزا مورد بررسی واقع می‌شود:

۱- وضعیت خود مسأله:

معرفی چند مسأله ریاضی بدوضع:

Scanned with CamScanner

۱ـ حل دستگاه معادلات خطی:

دستگاه $\begin{cases} 2.0000x+4y=6 \\ 4x+8y=12 \end{cases}$ را در نظر بگیرید همانطور که می‌بینیم

دترمینان ماتریس ضرایب مخالف صفر $\begin{vmatrix} 2.0000 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} \neq 0$

بنابراین دستگاه مذکور جواب یکتا دارد. حال فرض کنید برای

وارد کردن این دستگاه در ماشین به اندازه‌ی 0.0000 خطا در

ضریب x در معادله‌ی اول مرتکب شویم و دستگاه

$\begin{cases} 2x+4y=6 \\ 4x+8y=12 \end{cases}$ را در ماشین ذخیره کنیم. حال دستگاه جدید

بی‌نهایت جواب پیدا کرده است یعنی به اندازه‌ی 0.0000 خطا

منجر به این شد که یک دستگاه با جواب یکتا تبدیل به یک دستگاه

با بی‌نهایت جواب شود. حال فرض کنید فرد دیگری

دستگاه ذخیره شده‌ی ما را در جای دیگری ذخیره کند چنانچه

فرد مذکور دستگاه را به صورت $\begin{cases} 2.0000x+4y=6 \\ 4x+8y=12.0001 \end{cases}$

این دستگاه جدید فاقد جواب است.

۲ـ مسأله ریشه‌یابی چندجمله‌ای‌ها:

فرض کنید $P_8(x)=(x-1)\cdots(x-8)$ داده شده باشد در این صورت

می‌دانیم این چندجمله‌ای ۸ ریشه به صورت $x_1=1$ و $x_2=2$ و

... و $x_8=8$ دارد. دستور roots در نرم‌افزار متلب

بر اساس این که همان ضرایب چندجمله‌ای است (به ترتیب توان‌های

نزولی) را گرفته و ریشه‌های چندجمله‌ای

را به صورت خروجی می‌دهد. بنابراین برای به کارگیری دستور roots

لازم است ضرایب چندجمله‌ای را بلد نویسی کنیم.

داده‌های مسأله‌ی ما همین ضرایب چندجمله‌ای است و

خروجی ما ریشه‌های مسأله هستند.

Scanned with CamScanner

نتایج مبل بیانگر این است که یک خطا یا اختلال کوچک در یکی از ضرایب چند جمله‌ای P8 منجر به تولید جواب‌ها مختلط شد. جالب است بدانیم این ایراد از دستور roots مکتب نیست زیرا ثابت می‌شود الگوریتم ریشه‌یابی roots برای چند جمله‌ای‌ها کمتر یا مساوی ۱۵ کاملاً پایدار می‌باشد و جواب دقیق را ارائه می‌دهد. بنابراین مشکل از خود مسأله ریشه‌یابی است.

۳ـ حل معادلات دیفرانسیل:

$$\begin{cases} y'(t) = 100y(t) - 10e^{-t} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

معادله دیفرانسیل

می‌دانیم جواب دقیق این معادله دیفرانسیل برای $y_0 = 1$ ، $y(t) = e^{-t}$ می‌خواهیم مثلاً در شرایط اولیه مسأله یک اختلال کوچک ایجاد کنیم پس مسأله‌ی زیر را داریم:

$$\begin{cases} y'(t) = 100y(t) - 10e^{-t} \\ y(0) = y_0 + \delta \end{cases}$$

خطا یا اختلال کوچک

جواب مسأله‌ی جدید وابسته به δ است به همین دلیل آن را با $y_\delta(t)$ نشان می‌دهیم. می‌توان نشان داد جواب مسأله برای $y(0) = 1$ ، $y_\delta(t) = e^{-t} + \delta e^{100t}$

$$\Rightarrow |y_\delta(t) - y(t)| = |\delta e^{100t}|$$

$$\begin{cases} \delta = 10^{-8} \quad t = 2 \\ |y_\delta(2) - y(2)| = 10^{-8} \times e^{100 \times 2} \approx 7.22 \times 10^{18} \end{cases}$$

فرض کنید $\delta = 10^{-8}$ یعنی خطای ما بسیار کوچک است. حال فرض کنید خطای مطلق تقریب را در $t = 1$ یا $t = 2$ بررسی کردیم.

نتیجه‌گیری: این موضوع نشان داد مسأله حل معادلات دیفرانسیل یک مسأله بدوضع است.

چه خوش است حال مرغی که قفس ندیده باشد — چه نکوتر آنکه مرغی ز قفس پریده باشد (صادق سرمد)

مثال: تعریف کنید $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x+10}\,dx$

اولاً نشان دهید $\forall n;\ I_n>0$

دوماً $\lim_{n\to\infty} I_n=0$

سوماً یک فرمول بازگشتی برای محاسبه‌ی I_n ها ارائه دهید

در مورد پایداری و یا ناپایداری الگوریتم عددی خود بحث کنید.

جواب قسمت اول:

$\int_0^1 \frac{x^n}{10+x}\,dx \geq 0$ چون $\frac{x^n}{10+x}\geq 0$

از طرفی اگر $x\in(0,1)$ آنگاه $\frac{x^n}{10+x}>0$ بنابراین

$I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{10+x}\,dx>0$

جواب قسمت دوم:

$$\int_0^1 \frac{x^n}{11}\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{10+x}\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{10}\,dx$$

$$\frac{1}{11(n+1)}=\frac{x^{n+1}}{11(n+1)}\Big|_0^1 \leq \text{〃 〃} \leq \frac{x^{n+1}}{10(n+1)}\Big|_0^1 = \frac{1}{10(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{11(n+1)} \leq \lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{10+x}\,dx \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{10(n+1)}$$

$$\to 0 \qquad \to \boxed{0} \qquad \to 0$$

جواب قسمت سوم:

$$I_n=\int_0^1 \frac{x^{n-1}\cdot x^1}{x+10}\,dx=\int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+10-10)}{x+10}\,dx$$

$$=\int_0^1 x^{n-1}\,dx-10\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x+10}\,dx=\frac{x^n}{n}\Big|_0^1$$

$$-10I_{n-1}=\frac{1}{n}-10I_{n-1}$$

این مدت عمر، چون گل ده روز است خندان لب و تازه روی می‌باید بود (حافظ)

Scanned with CamScanner

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{n} - 10\, I_{n-1}$$

$$n=1 \Rightarrow I_1 = \frac{1}{1} - 10\, I_0 \Rightarrow I_1 = 1 - 0/953 = 0/047$$

از طرفی:

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x^0}{x+10}\,dx = \ln(x+10)\Big|_0^1 = \ln 11 - \ln 10 = \ln(1/1) = 0/953$$

$$n=2 \Rightarrow I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{10+x}\,dx = \frac{1}{2} - 10 I_1 = 0/5 - 0/47 = 0/03$$

$$n=3 \Rightarrow I_3 = \int_0^1 \frac{x^3}{10+x}\,dx = \frac{1}{3} - 0/3 = 0/033$$

$$n=4 \Rightarrow I_4 = \int_0^1 \frac{x^4}{10+x}\,dx = \frac{1}{4} - 0/33 = -0/08$$

$$n=5 \Rightarrow I_5 = \int_0^1 \frac{x^5}{10+x}\,dx = \frac{1}{5} - 0/8$$

$$n=6 \Rightarrow I_6 = \int_0^1 \frac{x^6}{10+x}\,dx = \frac{1}{6} - 10 = -9/8$$

$$n=7 \Rightarrow I_7 = \frac{1}{7} + 9/8 = 9/8$$

احتمالاً علت ناپایداری این الگوریتم می‌تواند به علت خطای ضرب ارقام با مضاربی درست و ضرب عدد ۱۰ (یک عدد بزرگ) در I_{n-1} که یک عدد بسیار کوچک است.

دقت کنید مسئله انتگرال‌گیری ما یک مسئله‌ی بسیار خوش‌وضع است بنابراین ایراد از انتگرال‌گیری خود نیست (به مسئله ربطی ندارد) بلکه ایراد از روش پیشنهادی ماست. دو الگوریتم جدید پیشنهاد می‌کنیم به شرح زیر:

اولین الگوریتم با توجه به اینکه I_n ها بسیار کوچک

هستند اما ابتدا فرم بازگشتی را به صورت $I_{n-1}=\frac{1}{10}\left(\frac{1}{n}-I_n\right)$ بنابراین $I_{n-1}=\frac{1}{10n}$.

الگوریتم دوم: فرض کنید فقط برای یک n=۲۰ (n بزرگ) معمولاً ۳۰ و I_n صفر باشد. I_{n-1} را حساب کرده سپس از همین فرمول بازگشتی I_{n-2} و I_{n-3} را حساب می‌کنیم.

دقت کنید هر دو روش پیشنهاد شده مقادیر را برای nهای بزرگ بسیار دقیق حساب می‌کند و در هر مرحله I_nها همواره مثبت اند بنابراین هر دو الگوریتم پایدار عددی اند.

① $I_{n-1}=\frac{1}{10n}$, $n=10 \Rightarrow I_9=\frac{1}{100}=0/01$

$I_{18}=\frac{1}{10\times 19}=0/0050$

② $I_{20}=0$, $I_{19}=\frac{1}{200}$

$I_{18}=\frac{1}{10}\left[\frac{1}{19}-I_{19}\right]\approx\frac{1}{10}\left[\frac{1}{19}-\frac{1}{200}\right]\approx 0/0047$

جمع بندی: در روش اول $I_n=\frac{1}{10(n+1)}$

داریم $I_{n-1}=\frac{1}{10}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{10(n+1)}\right]\approx\frac{1}{10}\left[\frac{1}{19}-\frac{1}{200}\right]$

با ارائه مثال قبل یاد گرفتیم که ممکن است یک مسئله ذاتاً خوش وضع باشد ولی الگوریتم‌ها عددی آن مناسب نباشد یعنی به جواب‌های نادقیق میل کند به این الگوریتم‌ها الگوریتم‌های عددی ناپایدار گوییم.

تلفن | یادداشت:

شب قدر

در راه عشق وسوسه‌ی اهرمن بسی است پیش آی گوش دل به پیام سروش کن (حافظ)

تمرین ۱: تعریف تعداد ارقام با مبنای درست که ما برای مبنای ۱۰ فهمیدیم برای مبنای b را بدست آورده و کران بالای خطای نسبی را بر اساس این تعریف بدست آورید.

تمرین ۲: تعریف ارائه شده برای تعداد ارقام با مبنای درست می‌توانید با مفهوم کرد کردن ربط دهید یعنی اگر مثلاً تعریفی دارای n رقم با مبنای درست باشد آیا می‌توان گفت ارتباطی بین n و تعداد ارقام گرد شده‌ی تعریف برای رسیدن به مقدار دقیق وجود دارد؟

تمرین ۳: مشکل (ایراد) محاسباتی در پاسخ تعداد ارقام با مبنای درست در مثال بلافاصله بعد از تعریف چیست؟ (ممکنه مورد تعریف مشکل داشته باشند)

تعریف ضریب وضعیت یک مسأله:

یک مسأله را خوش وضع می‌گوییم هرگاه یک اختلال کوچک در داده‌های ورودی منجر به اختلالی متناسب با همان اختلال ورودی در جواب شود. به بیانی دقیق‌تر فرض کنیم x داده‌های ورودی یک مسأله باشد که $x \in D \subseteq \mathbb{R}^m$ و y خروجی یا جواب مسأله باشد که در آن $y \in \mathbb{R}^n$ در این صورت می‌توان یک نگاشت به صورت $f: D \to \mathbb{R}^n$ با ضابطه $y = f(x)$ تعریف کنیم. فرض کنیم δx یک اختلال کوچک در داده‌های ورودی باشد به قسمی که $x + \delta x \in D$. فرض کنیم این اختلال باعث یک اختلال مثل δy در y شود (در جواب مسأله) بنابراین داریم:

$$y + \delta y = f(x + \delta x)$$

حال می‌گوییم مسأله $y = f(x)$ خوش وضع است هرگاه:

۱- مسأله مذکور جواب یکتا داشته باشد.

۲- ثابت مثبت c (نه خیلی بزرگ) موجود باشد که:

$$\begin{cases} \|\delta y\| \leq c\,\|\delta x\| & \text{(نرم خطای مطلق)} \\ \dfrac{\|\delta y\|}{\|y\|} \leq c\,\dfrac{\|\delta x\|}{\|x\|} & \text{(نرم خطای نسبی)} \end{cases}$$

$x + \delta x - x$

$y + \delta y - y$

یادآوری: اگر $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ باشد $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$.

حالت خاص: $p = 1 \to \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$

Scanned with CamScanner

$$p=2 \rightarrow \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$$

$$p=\infty \rightarrow \|x\|_\infty = \max_i \{|x_i|\}$$

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\|x\|_1 = |-1| + |2| + |-3| + |5| = 11$$

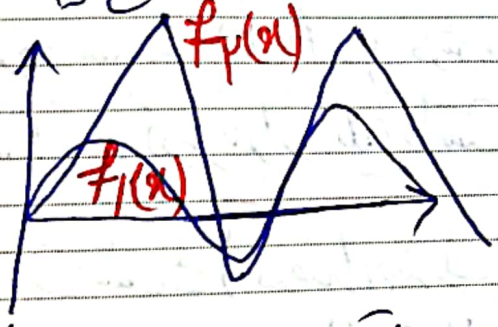
$$\|x\|_2 = \sqrt{1+2^2+3^2+5^2} \approx 6/4$$

$$\|x\|_\infty = 5$$

تعریف ریاضی فرش وضعی یا بدوضعی یک مسأله:

می خواهیم فرمول ریاضی جهت تعیین فرش وضعی یا بدوضعی مسأله ابداع کنیم مطمئن هستیم در این فرمول عوامل زیر وجود خواهد داشت:

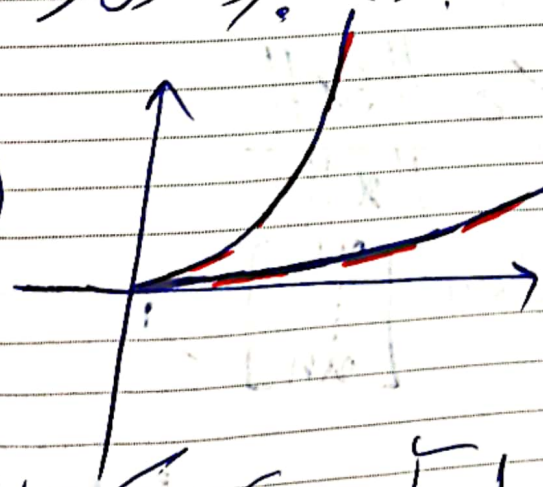
(۱)



۱- خود تابع $f(x)$ در بدوضعی یا فرش وضعی تأثیر دارد.

چنانچه شکل ۱ می بینیم تابع f_1 رفتاری به مراتب بهتر و معقول تر نسبت به تابع f_2 دارد.

(۲)



۲- همانطور که مشاهده می شود هر چه مقدار مشتق تابع بیشتر باشد احتمال آنکه مسئله بدوضع تر باشد زیادتر می شود.

۳- چون فرمول حساسیت وضعیت را نسبت به داده ها و روش تعیین می کند بنابراین

احتمالاً در مدل ما شامل x نیز باید باشد.

برای تعیین ضریب وضعیت مسأله $y=f(x)$ کمیتی تحت عنوان ضریب وضعیت مسأله تعریف می‌کنیم. برای این تعریف دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$x=\bar{0} \text{ یا } y=\bar{0} \Rightarrow \mathrm{cond}_{\square}(f)(x)=\|f'(x)\|_{\square}$$

بردار

۱ یا ۲ یا ∞

$$x\neq\bar{0} \text{ و } y\neq\bar{0} \Rightarrow \mathrm{cond}_{\square}(f)(x)=\frac{\|x\|_{\square}\,\|\frac{\partial}{\partial x}f(x)\|_{\square}}{\|f(x)\|_{\square}}$$

تذکر: اگر $x\in\mathbb{R}$ و $y\in\mathbb{R}$ آنگاه $\|x\|\to|x|$

$$\|\frac{\partial}{\partial x}f(x)\|\to|f'(x)| \quad , \quad \|f(x)\|\to|f(x)|$$

نکته: قضیه مقدار میانگین در مشتق:

(f باید مشتق‌پذیر باشد)

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\overset{\exists c}{=}f'(c)$$

روش اول (استفاده از قضیه بالا)

۱- خود مسأله $y=f(x)$

۲- اختلال در x به اندازه δx وارد می‌کنیم جواب به اندازه δy تغییر می‌کند.

$$y+\delta y=f(x+\delta x) \to y+\delta y-y=f(x+\delta x)-f(x)$$

$$\delta y=f(x+\delta x)-f(x)\overset{\exists c}{=}f'(c)\,\delta x$$

هر متاعی کز نگاهش می خرم در روز وصل
می نشینم گوشه یی وز خود مکرر می خرم
(عرفی شیرازی)

Scanned with CamScanner

x و $y \neq 0$

۱۲

$$\|\delta y\| \leq \|f'(\xi)\| \cdot \|\delta x\| \rightarrow \frac{\|\delta y\|}{\|y\|} \leq \frac{\|x\| \, \|f'(\xi)\|}{\|f(x)\|} \cdot \frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$$

$$\delta y = f(x+\delta x) - f(x) = \left(f(x) + f'(x)(\delta x) + f''(x)\frac{(\delta x)^2}{2!} + \cdots\right) - f(x) \Rightarrow \delta y \simeq f'(x)\,\delta x$$

$$\underbrace{\|\delta y\|}_{\text{خطای مطلق}} \leq \underbrace{\|f'(x)\|}_{\text{خطای مطلق } cond(f)} \cdot \|\delta x\|$$

(بسط تیلور حول نقطه‌ی a: روش دوم)

$$\underbrace{\frac{\|\delta y\|}{\|y\|}}_{\text{خطای نسبی جواب}} \leq \underbrace{\frac{\|x\| \cdot \|f'(x)\|}{\|f(x)\|}}_{cond(f)} \cdot \underbrace{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}}_{\text{خطای نسبی داده‌های ورودی}}$$

---

② $\sqrt{101} + 10 \longrightarrow f_2(x) = \sqrt{x} + 10$ و $f_2(101)$

$$cond(f_2)(x)\Big|_{x=101} = \left|\frac{x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+10}\right| = \left|\frac{\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}+10)}\right|_{x=101} \simeq 0/25$$

این بهتر است.

تذکر: بنابراین از این به بعد برای تعیین وضعیت یک مسأله ما باید

$y=f(x)$ در حالتی که x و y صفر نیستند از رابطه‌ی $cond(f)(x)=\left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|$

استفاده می‌کنیم که $f(x)$ تابع تک متغیره است و در حالتی که x یا y برابر صفر باشد

ضریب وضعیت مسأله را از رابطه‌ی $cond(f)(x)=|f'(x)|$ بدست می‌آوریم. دقت

کنید که هر چه ضریب وضعیت مسأله بزرگ‌تر باشد، مسئله به وضع‌تر است.

تذکر: دقت کنیم برای استفاده از فرمول‌های بالا صفحه باید ضابطه‌ی y را به صورت

صریح برحسب x بدست آوریم.

تذکر: برای استفاده از فرمول‌های بالا باید ضابطه تابع $f(x)$ را تعریف کنیم یا در صورت

مسأله داده شده باشد.

سؤال: کدام یک از اعداد زیر از لحاظ آنالیز عددی بهتره؟؟

آن عددی که ضریب وضعیت کمتری دارد.

① $\frac{1}{\sqrt{101}-10}$ $\rightarrow f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{x}-10}$, $f_1(101)$

$$cond(f_1)(x)\Big|_{x=101}=\left|\frac{x\cdot\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-10)^2}\Big/\frac{1}{\sqrt{x}-10}\right|=\left|\frac{\sqrt{x}}{2(\sqrt{x}-10)}\right|\Bigg|_{x=101}$$

$=125$

ادامه →

Scanned with CamScanner

مثال: برای محاسبه‌ی $Ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ برای xهای بزرگ، کدام فرم را پیشنهاد می‌کنید؟

$$Ln\left[\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}\right]$$

$$= Ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = -Ln(\sqrt{x^2+1}+x)$$

مثال کامپیوتر برای خود فرم اولیه و فرم پیشنهادی

$$cond(f(x)) = \left|\frac{x f'(x)}{f(x)}\right|$$

$$f(x) = Ln(\sqrt{x^2+1}-x) \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{(\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+1}-x)}$$

یادداشت:

روز مهم

$$cond(f(x)) = \left|\frac{x f'(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}\right|$$

و برای $f(x) = -\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ داریم:

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$cond(f(x)) = \left|\frac{x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}\right|$$

حال برای مثلاً یک n بزرگ ($x=100$ یا مثلاً $x=1$) مقادیر زیر را محاسبه می‌کنیم.

Week 28 | Month 7 | 2016

Scanned with CamScanner

نکته: برای x های بزرگ $\sqrt{x^2+1}$ هم از x می باشد یعنی $x \approx \sqrt{x^2+1}$ بنابراین در محاسبه $\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ $x \to +\infty$ برای x های بزرگ تقابل دو عدد بسیار نزدیک به هم داریم که می تواند باعث حذف ارقام بامعنای درست شود بنابراین این فرم از نوشتن به لحاظ عددی مناسب نخواهد بود بنابراین با توجه به فرم پیشنهادی فوق و صحت فرم اولیه برای مقادیر بزرگ x نیز می توان حدس خود را ثابت کرد.

مثال: با ذکر دلیل بگویید آیا فرم ارائه شده به لحاظ آنالیز عددی فرم مناسبی هستند یا نه و در صورت لزوم فرم مناسب جایگزین برای آن معرفی کنید.

$$f(x)=\frac{1}{1-\cos x}, \quad x \to 0$$

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}-x, \quad x \to +\infty$$

تلفن | یادداشت:

عید سعید فطر (تعطیل)

$$f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x), \quad x \to 0$$

$$f(x)=\frac{1}{(\sqrt{1+x^2}-x)^2}, \quad x \to +\infty$$

$$f(x)=\frac{1}{\cos x+1}, \quad x \to 0$$

هیچ مشکلی در محاسبات آن نداریم.

$$f(x)=\frac{1}{2}$$

مثال ۵: آیا در فروع مفرج ضرب کردن آیا کار محاسبات را بدتر می کند یا نه؟

$$f(x)=\frac{1-\cos x}{\sin^2 x} \quad x \to 0$$

بدتر می کند

نکته مهم: در مواردی که x به سمت صفر میل می کند برای محاسبه $\cos(f(x))=f(x)$ استفاده می کنیم.

مثال مهم: می دانیم ۴ عدد زیر با هم برابرند. کدام یک از فرم ها جهت محاسبات عددی مطلوب ترین و کدام یک بدترین خواهد بود؟

روز ادبیات کودکان و نوجوان

به من بسیار می‌ماند، نمی دانم که صنع حق مرا از خاک غم یا خاکم غم را آفرید از من (قصاب کاشانی)

Scanned with CamScanner

$$x_1 = \frac{1}{(\sqrt{101}-10)^2} \quad , \quad x_2 = (\sqrt{101}+10)^2$$

$$x_3 = \frac{1}{20\sqrt{101}-101} \quad , \quad x_4 = 20\sqrt{101}+101$$

مثال: فرض کنیم $g(x)$ مشتق پذیر باشد در این صورت معادله‌ی غیرخطی که در آن x ورودی و y خروجی باشد

$$g(y) = x$$

چنانچه فرض کنیم تابع g معکوس پذیر باشد در این صورت وضعیت این مسئله را تحلیل کنید.

$$y = g^{-1}(x) := f(x)$$

$$f'(x) = \left(g^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{g'(y)}$$

$$\mathrm{cond}(f) = \left|\frac{1}{g'(y)}\right|$$

هرجا که $g'(y)=0$ مسأله بدوضع است در حالتیکه $x=0$ و y ریشه تکراری g باشد در این صورت مسأله بدوضع خواهد شد زیرا مخرج به سمت صفر می‌رود.

Scanned with CamScanner

نتیجه گیری: می دانیم چنانچه $g(y)=0$ در صورت مسأله ریشه یابی است که این مثال نشان می دهد علاوه بر اینکه خود مسأله ریشه یابی (خیلی جمله ای ها) می تواند به شدت بدوضع باشد مسأله ریشه یابی در حالتی که ریشه تکراری داشته باشیم نیز بسیار بدوضع است.

تذکر: برای آنکه بتوانیم از فرمول ضریب وضعیت برای یک مسئله استفاده کنیم ابتدا باید y را به صورت صریح برحسب $f(x)$ بدست آوریم سپس مشتق اینکه x می تواند صفر باشد یا نه از فرمول های $|f'(x)|$ و یا $\left|\frac{f'(x)x}{f(x)}\right|$ استفاده کنیم.

تذکر: تعریف ریشه تکراری مرتبه K ام:

فرض کنید تابع $g(x)$ داده شده باشد چنانچه بتوان $g(x)$ را بصورت $g(x)=(x-\alpha)^K h(x)$ باز نویسی کرد که h تابعی کراندار و $h(\alpha)\neq 0$ می گوییم α ریشه تکراری مرتبه K ام

تابع $g(x)$ است می‌توان نشان داد در این حالت:

$$g(\alpha)=g'(\alpha)=g''(\alpha)=\dots=g^{(k-1)}(\alpha)=0$$

مثال: $x=0$ ریشه تکراری مرتبه چند تابع داده شده می‌باشد؟

$$f(x)=x^2-\sin^2 x=\boxed{0}$$

$$f(0)=\boxed{0},\quad f'(x)=2x-2\sin x\cos x$$

$$f'(0)=\boxed{0},\quad f''(x)=2-2\left[\cos^2 x-\sin^2 x\right]$$

$$f''(0)=\boxed{0},\quad f'''(x)=-2\left[-2\cos x\sin x-2\sin x\cos x\right]$$

$$=8\left[\cos x\sin x\right],\quad f'''(0)=\boxed{0}$$

$$f^{(4)}(x)=8\left[-\sin^2 x+\cos^2 x\right]\neq 0 \checkmark$$

$$\boxed{g^{(4)}(\alpha)\neq 0}$$

مرتبه ۴ است.

مثال: $x=1$ ریشه تکراری مرتبه چندم معادله

$f(x)=x^3-3x^2+3x-1=0$ مرتبه 3 است.

مثال: $x=0$ ریشه تکراری مرتبه چندم برای تابع $f(x)=$

$=x^2-\sin x^2$

مثال: در مورد جواب معادله $y^2-2xy+1=0$ برای $x>1$ بحث کنید.

(راهنمایی: اول y را شمار می‌کنیم یک معادله درجه ۲ برحسب y داریم از روش دلتا استفاده می‌کنیم) و سپس از یکی از فرمول‌ها ضریب و خصیت که ضریب و خصیت آن را تحلیل کنید.

مثال: آیا در مثال قبل که خواستیم دید برای x نزدیک به یک از سمت مثبت (راست) سیار بد وضع است می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب این مسئله را به یک مسئله خوش وضع تبدیل کرد؟

مثال: مسئله‌ی قبل می‌گوید یک راهکار (یا فرمولی) مفید برای تبدیل یک مسئله بد وضع به یک مسئله خوش وضع (یا استفاده از تفسیر منظم می‌باشد.

تمرین بسیار مهم: چنانچه A یک ماتریس $n \times n$ و معکوس پذیر باشد در این صورت ضریب وضعیت مسئله حل دستگاه $AX=b$ (A و b ورودی مسئله و X جواب یا خروجی است.) عبارت است از:

$$cond(A) = \|A\|_{\square} \cdot \|A^{-1}\|_{\square}$$

$\square$: ∞ و 1 و 2

مثال: تمرین قبل می‌گوید برای آنکه وضعیت مسئله حل دستگاه را تعیین کنیم کافیست هر کدام از نرم‌های بالا را محاسبه کرده و در هم ضرب کنیم چنانچه این عدد خیلی بزرگ باشد مسئله حل دستگاه مذکور بد وضع است.

Scanned with CamScanner

۲۴ پنجشنبه

شوال ۱۴۳۷ ۹ • Jul 2016 • Thu • 14

با این مقادیر بگویید حل دستگاه معرف فوق وضع است یا بدوضع؟ بدوضع

$$\begin{cases} 2/000\,x + 3y = 6 \\ 4x + 6y = 12 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 2/000 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 10000 & -5000 \\ -6666/6 & 3333/5 \end{bmatrix}$$

تذکر: نرم بی نهایت یک ماتریس عبارتست از ماکزیمم جمع قدر مطلق تک تک سطرها و نرم یک ماتریس عبارتست از ماکزیمم جمع قدر مطلق تک تک ستون ها.

۲۵ جمعه

شوال ۱۴۳۷ ۱۰ • Jul 2016 • Fri • 15

چون ضریب وضعیت بالا است؛ مسأله و ماتریس بدوضع است.

روز بهزیستی و تامین اجتماعی

(آهی)

... ای آن که پرانند کلوخ باشد سنگ

Scanned with CamScanner

سوتونی

$$\|A\|_1 = \max\{|2{,}000| + |4|,\ |3| + |6|\} = 9$$

سطری

$$\|A\|_\infty = \max\{|2{,}000| + |3|,\ |4| + |6|\} = 10$$

سوتونی

$$\|A^{-1}\|_1 = 16666{,}6 \quad \text{و} \quad \|A^{-1}\|_\infty = 15000$$

سطری

$$\text{cond}_1(A) = \|A\|_1 \times \|A^{-1}\|_1 = 149999{,}999$$

$$\text{cond}_\infty(A) = \|A\|_\infty \times \|A^{-1}\|_\infty = 150{,}000$$

تذکر: همانطور که گفتیم توانستیم برای حل دستگاه $AX=b$ ضریب وضعیت را برحسب ماتریس A استخراج کنیم که به شرح زیر است:

$$\text{cond}(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\|$$

هر چه ضریب وضعیت ماتریس A کوچکتر باشد مسئله حل دستگاه $AX=b$ خوش وضع‌تر و هر چه ضریب وضعیت ماتریس A بزرگتر باشد مسئله بدوضع‌تر است از طرفی فرض کنیم $\bar{A}$ ماتریس وارون‌پذیر باشد

Scanned with CamScanner

از طرفی $I = A \cdot A^{-1} \Rightarrow \|I\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \, \|A^{-1}\|$

$= cond(A) \Rightarrow cond(A) \geq \|I\|$

$cond_1(A) \geq \|I\|_1 = 1, \quad cond_\infty(A) \geq \|I\|_\infty = 1$

معرفی چند ماتریس بسیار بدوضع: (خیلی مهم)

۱- ماتریس هیلبرت: با استفاده از دستور hilb(n) می‌توان در نرم‌افزار متلب یک ماتریس هیلبرت $n \times n$ ساخت. این ماتریس دارای فرم به صورت

$$H_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} & \cdots & \cdots & \frac{1}{n-1+n-2} \end{bmatrix}$$

این ماتریس (متأسفانه) در حل تقریب کمترین مربعات پیوسته توسط چند جمله‌ای‌ها بدست می‌آید. در ادامه ضرب و منفعت ماتریس هیلبرت در نرم ۲ برای برخی ابعاد گزارش شده است.

یادداشت: تلفن

- $cond_2(H_{10}) = 1.6 \times 10^{13}$
- $cond_2(H_{20}) = 2.45 \times 10^{28}$
- $cond_2(H_{40}) = 7.25 \times 10^{58}$

Scanned with CamScanner

همانطور که مشاهده می‌کنید ماتریس هیلبرت ۳۰×۳۰ در سیستم ۳۲ بیتی حل پذیر نیست زیرا ماکزیمم عدد قابل نمایش در دقت معمولی 10^{38} بود.

۲- ماتریس واندرموند: این ماتریس در محاسبه‌ی چند جمله‌ای درونیاب ابتدای فصل ۳، به روش مستقیم تولید می‌شود. این ماتریس بر اساس n نقطه‌ی داده شده تولید و معرفی می‌شود. فرض کنیم t_1 و سپس t_n n نقطه‌ی مفروض باشد. در این صورت ماتریس به فرم:

$$V_{n\times n}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1^{n-1} & t_2^{n-1} & \cdots & t_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

تمام نقاط به توان صفر

تمام نقاط به توان یک

تمام نقاط به توان n-1

یا

$$V_{n\times n}=\begin{bmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^{n-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_n & t_n^2 & \cdots & t_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

به عنوان مثال با نقاط $t_1=1$، $t_2=2$ و $t_3=3$

ماتریس واندرموند را حساب کنید.

$$V_3=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{cond}_\infty(V_{10})=1.36\times10^{4},\quad \mathrm{cond}_\infty(V_{40})=6.93\times10^{18}$$

$$\mathrm{cond}_\infty(V_{20})=1.05\times10^{9},\quad \mathrm{cond}_\infty(V_{80})=3.5\times10^{38}$$

برای تقریباً $n>80$ ماتریس واندرموند در دقت معمولی حل پذیر نیست.

Scanned with CamScanner

((فصل دوم حل معادلات غیرخطی))

$f(x)=0$

همانطور که می‌دانیم تعیین ریشه‌های معادله $f(x)=0$ در مسائل گوناگون ظاهر و به کار گرفته می‌شود به عنوان مثال در تعیین مقادیر ویژه ماتریس $n\times n$ یا تعیین ریشه‌های یک چندجمله‌ای از درجه n روبرو خواهیم بود. از طرفی می‌دانیم مقادیر ویژه هم در تعیین همگرایی یا واگرایی روش‌های تکراری جهت حل دستگاه $AX=b$ ظاهر می‌شوند و هم در تعیین منفرد یا نامنفرد بودن ماتریس A نقش ایفا می‌کنند. از طرفی می‌توان نشان داد

$$cond(A) \geq \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|}$$

این بدین معناست که ما مجبوریم ریشه‌های معادله مشخصه‌ی ماتریس که از رابطه‌ی $\det(\lambda I_{n\times n} - A_{n\times n})=0$ نتیجه می‌دهد:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

را بر اساس قضیه گالوا برای چندجمله‌ای‌های درجه بیشتر از ۴ هیچ فرمول صریحی بر اساس فنرایب چندجمله‌ای وجود ندارد و نتیجتاً به هیچ عنوان نمی‌توان چندجمله‌ای‌ها درجه ۴ به بالا را برای یافتن ریشه‌هایی آن به صورت تحلیلی حل کرد از این رو یافتن ریشه‌های این دسته از مسائل به کمک روش‌های عددی مقدور خواهد بود.

معادله $f(x)=0$ را می‌توان به دو دسته‌ی کلی تقسیم‌بندی کرد:

۱_ معادله جبری (مسأله‌ی ریشه‌یابی چندجمله‌ای)

۲_ معادله غیرجبری (متعالی)

همانطور که در فصل قبل گفته شد مسأله‌ی ریشه‌یابی چندجمله‌ای $P_n(x)=0$ بدوضع بود از طرفی مسأله‌ی ریشه‌یابی $f(x)=0$ (هم جبری و هم غیرجبری) برای ریشه تکراری بدوضع است.

به عنوان مثال

$x^3+5x^2+6=0$ جبری

$x-\sin x=0$ متعالی

$3xe^{-x}=1$ متعالی

از آنجا که در بحث ریشه‌یابی چه اینکه ریشه داشته باشیم، ریشه تکراری داشته باشیم یا ریشه مضاعف و یا ریشه‌های متعایز داشته باشیم و یا در یک بازه ریشه داشته باشیم یا اینکه اصلاً ریشه نداشته باشیم بسیار حائز اهمیت است بنابراین یک متدی که این ابزار را در اختیار ما قرار می‌دهد بسیار مهم است.

۱_ قضیه اساسی جبر: هر معادله جبری از درجه n حداکثر n ریشه دارد که این ریشه‌ها می‌تواند حقیقی یا مختلط باشد. (با احتساب تکرار)

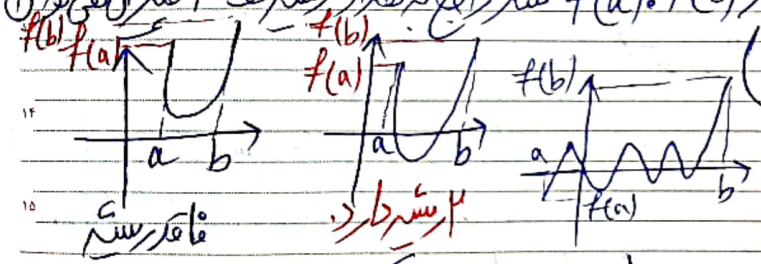
Scanned with CamScanner

۲- قضیه: اگر $a+ib$ ریشه یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد آنگاه مزدوج $a-ib$ نیز ریشه‌ی آن است.

* ۳- قضیه بولتزانو (وایراشتراس): *

فرض کنیم تابع f بر بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته و $f(a)$ و $f(b)$ مختلف العلامه باشند ($f(a)\cdot f(b)<0$) در اینصورت تابع f بر بازه $[a,b]$ حداقل یک ریشه دارد.

(اگر $f(a)\cdot f(b)>0$ شد راجع به تعداد ریشه‌ها f چیزی نمی‌توان گفت)



۴- قضیه: چنانچه مجموع ضرایب یک چندجمله‌ای از هر درجه صفر باشد حتماً یک ریشه‌ی آن چندجمله‌ای $x=1$ است و لذا آن چندجمله‌ای بر $x-1$ بخش‌پذیر است.

مثال: یک ریشه‌ی معادله‌ی زیر یک است.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -7 & +5 & +1 & 0 \\ & 1 & -7 & +5 & 0 \end{array} \longrightarrow x=1$$

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -7x^2 & +5x & +1 & x-1 \\ \hline & & & & x^2-6x-1 \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

$$x^3-7x^2+5x+1=(x-1)(x^2-6x-1)=0$$

$$x=1$$

$$x_2=\frac{6+\sqrt{40}}{2}$$

$$x_3=\frac{6-\sqrt{40}}{2}$$

* ۵- قضیه: چنانچه در یک چندجمله‌ای از درجه دلخواه مجموع ضرایب توان‌های فرد x مساوی مجموع ضرایب توان‌های زوج x باشد در اینصورت یک ریشه‌ی آن چندجمله‌ای $x=-1$ است ولی چندجمله‌ای بر $x+1$ بخش‌پذیر است.

مثال: ریشه‌های این چندجمله‌ای را بدست آورید.

$$x^3-3x^2+3x+1=0 \qquad x^3-3x^2+3x+1 \,\big|\, x-1$$

زوج — فرد

۵ ۵

نکته: هر چند جمله‌ای از درجه n در $\mathbb{R}$ حداکثر n ریشه دارد.

سؤال: آیا می‌توان با استفاده از تعداد تغییر علامت‌ها در ضرایب یک چند جمله‌ای (که بر اساس توالی مرتب شده) پیدا کرد تعداد ریشه‌های آن را (قاعده تغییر علامت دکارتی).

سؤال: آیا در مورد تعداد ریشه‌ها مثبت و یا منفی می‌توان از تعداد تغییر علامت‌ها در خود چند جمله‌ای و چند جمله‌ای که به جای x های آن $-x$ وارد داده شده صحبت کرد؟

سؤال: آیا می‌توان با استفاده از ضرایب چند جمله‌ای بکران برای ریشه‌های چند جمله‌ای بدست آورد؟

تعریف ریشه تکراری از مرتبه n: گوییم تابع $f(x)$ دارای ریشه تکراری α از مرتبه m است هرگاه:

$$\begin{cases} f(x)=(x-\alpha)^m g(x) \\ g(\alpha)\neq 0 \end{cases}$$

$g(x)$ کراندار است

به عبارتی دیگر گوییم α ریشه تکراری مرتبه m معادله

$$\begin{cases} f(\alpha)=f'(\alpha)=\cdots=f^{(m-1)}(\alpha)=0 \\ f^{(m)}(\alpha)\neq 0 \end{cases}$$

است هرگاه $f(x)=0$

m تا مشتق اول آن به ازای α صفر است.

مثال: ریشه $x=0$، ریشه تکراری مرتبه چندم تابع $f(x)=x-\sin x$ است؟

حل:

$$f(0)=0,\quad f'(x)=1-\cos x\Big|_{x=0}=0$$

$$f''(x)=\sin x\Big|_{x=0}=0,\quad f^{(3)}(x)=\cos x\Big|_{x=0}\neq 0$$

مثال: مرتبه ریشه $x=0$ از مساله $f(x)=x^2-\sin^2 x$ چندم است؟

$f(x)=x^2-\sin x^2$ " " " " چندم است؟

حل:

$$f(0)=0\checkmark \quad f'(x)=2x-\overbrace{2\sin x\cos x}^{\sin 2x}\Big|_{x=0}=0\checkmark$$

$$f''(x)=2-2\cos 2x\Big|_{x=0}=0\checkmark$$

مرتبه ۴ است

$$f^{(4)}(x)=8\cos 2x\Big|_{x=0}\neq 0$$

$$f'''(x)=4\sin 2x\Big|_{x=0}=0\checkmark$$

Scanned with CamScanner

مثال: $x=\pi$ ریشه چندم کدام تابع مرتبه ۳ است؟ $f(x)=1+\cos x$

مثال: تعداد ریشه‌های حقیقی $f(x)=x^3-3x^2+3x-1=0$ را بدست آورید.

حل: ✓ یک ریشه دارد، $x=1$ ⇐ جمع ضرایب صفر است

$f'(x)=3x^2-6x+3\Big|_{x=1}=0$ ✓

$f''(x)=6x-6\Big|_{x=1}=0$ ✓

$f(x)=(x-1)^3=0$ ۳ ریشه دارد.

مثال: حد زیر را بدست آورید:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3 g(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0} g(x)=0$$

$f(x)=x-\sin x\Big|_{x=0}=0$

$f'(x)=1-\cos x\Big|_{x=0}=0$, $f''(x)=+\sin x\Big|_{x=0}=0$

$f'''(x)=\cos x\Big|_{x=0}=1\neq 0$

$x-\sin x=x^3 g(x)\begin{cases} g(0)\neq 0 \\ g(x) \text{ کراندار}\end{cases}$

مثال: $\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{(x-\pi)^2 g(x)}{x-\pi}$

$=\lim_{x\to\pi}(x-\pi)g(x)=0$

سؤال: کدام گزینه در مورد $A=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ درست است؟

1) $A=0$ ✓ 2) $A\neq 0$ 3) $A=\infty$ 4) A را نمی‌توان محاسبه کرد.

عشق یک رنگی تقاضا می‌کند این روشن است ورنه شمع آتش چرا زد همچو خود پروانه را (صائب تبریزی)

Scanned with CamScanner

راه حل سوم: دیدیم $x - \sin x = x^3 g(x)$ کراندار $g(0) \neq 0$, $g(x)$

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 g(x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} g(x) \neq 0$$

تعیین تعداد و محدوده ریشه‌های معادله $f(x)=0$

از دو روش می‌توان به این مهم دست یافت:

۱- استفاده از قضیه بولتزانو ۲- استفاده از روش ترسیمی

۱) اگر f بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و $f(a)\cdot f(b)<0$ باشد در این صورت بنابر قضیه بولتزانو لااقل یک ریشه داریم. حال چنانچه تابع f در این بازه صعودی یا نزولی اکید باشد دقیقاً یک ریشه داریم.

مثال: معادله $f(x) = xe^x - 1$ بر $[0,1]$ مندرسه دارد؟

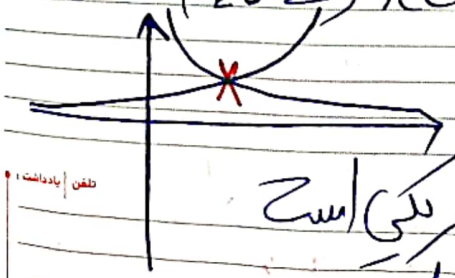
حل:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -1 \\ f(1) = e - 1 = 1/718 > 0 \end{array}\right\} \to f(0)\cdot f(1) < 0$$

$\to$ لااقل یک ریشه داریم $\Rightarrow f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x > 0$ صعودی دقیقاً یک ریشه دارد.

۲) معادله‌ی $f(x)=0$ را به صورت $y_1(x) = y_2(x)$ بازنویسی می‌کنیم که نمودارهای $y_1(x)$ و $y_2(x)$ را می‌توانیم رسم کنیم در این صورت تعداد نقاط تلاقی $y_1(x)$ و $y_2(x)$ تعداد ریشه‌های ما را نمایش می‌دهد.

$$xe^x - 1 = 0 \Rightarrow xe^x = 1 \Rightarrow \underbrace{e^x}_{y_1(x)} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{y_2(x)}$$



تعداد ها ملع این دو نمودار یکی است پس دقیقاً یک ریشه داریم.

تست کارشناسی ارشد ۱۴۰۲:

در مورد معادله $x^{201} - x + 4 = 0$ کدام گزینه درست است؟

۱) فاقد ریشه است (هر چند جمله‌ای از درجه فرد در $\mathbb{R}$ لااقل یک ریشه دارد)

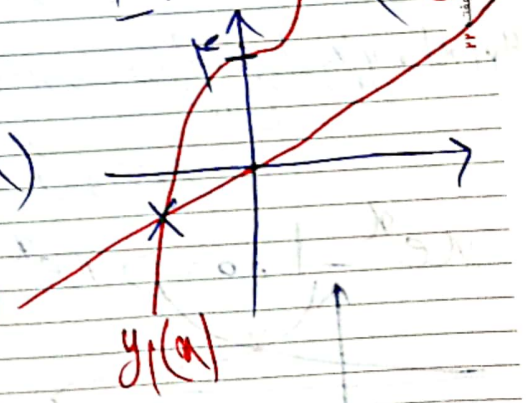
۲) دقیقاً یک ریشه دارد ✓

۳) دقیقاً دو ریشه دارد.

۴) $x=1$ ریشه معادله است.

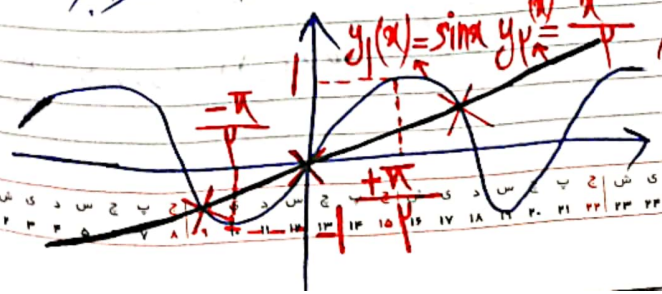
ج: ۲

$$\underbrace{x^{201}+4}_{y_1(x)} = \underbrace{x}_{y_2(x)}$$



$\frac{x}{2} = \sin x$

مثال: تعداد ریشه‌های معادله $x - 2\sin x = 0$ را به دست آورید.



۳ تا ریشه دارد.

حل در سفر

مثال: نشان دهید $x - \sqrt[3]{x} = -1$ در بازه‌ی $[0,2]$ دقیقاً ۲ ریشه دارد؟

$x^3+1 = \sqrt[3]{x}$

با استفاده از آزمون مشتق در می‌یابیم برای آنکه مشتق همواره صعودی یا نزولی باشد باید $x^2 - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}} = 0$ باشد

چنانچه بازه‌ی اولیه را ۰ تا ۱ و بازه‌ی دومی را ۱ تا ۲ بگیریم آنگاه علامت مشتق همواره مثبت یا منفی است.

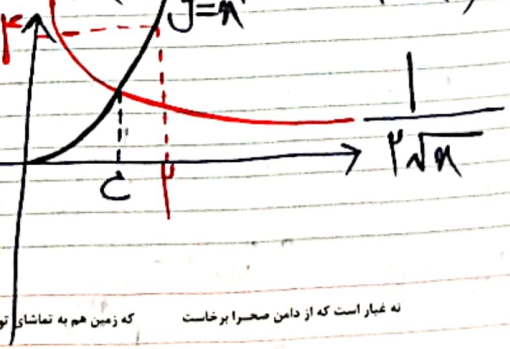
$f(x) = x^3+1-\sqrt[3]{x}$

$\begin{cases} f(0)=+1 \\ f(1)=-1 \end{cases}$ $f(0)\cdot f(1) < 0$

لااقل یک ریشه در بازه‌ی $[0,1]$ داریم

$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 3\left(x^2 - \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right) \\ x \in (0,1) \end{cases}$

$x^2 = \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}$



نه غبار است که از دامن صحرا برخاست — که زمین هم به تماشای تو از جا برخاست (مؤمن)

Scanned with CamScanner

((حل عددی معادله $f(x)=0$))

از آنجا که همه‌ی روش‌های حل معادله $f(x)=0$ براساس تولید یک دنباله به صورت x_n است $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ که این دنباله به ریشه‌ی $f(x)=0$ همگراست بنابراین پیش از شروع روش‌ها نگاری باید با مفاهیمی نظیر همگرایی یک دنباله و مرتبه همگرایی یک دنباله و ... آشنا شویم.

قضیه: هر دنباله نزولی و از پایین کراندار حتماً همگراست به همین ترتیب هر دنباله صعودی و از بالا کراندار حتماً همگراست چنانچه x_n به سمت α میل کند $(x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha)$ در اینصورت از نظر شهودی به نظر می‌رسد دنباله همگی α خواهند بود.

قضیه: اگر $x_n \to \alpha$ آنگاه همه‌ی زیردنباله‌ها x_n نیز به سمت α می‌روند.

$x_n \to \alpha$

$x_{n-1} \to \alpha$

$x_{2n} \to \alpha$

$a_n - 1 = \frac{1}{n-1} \to 0$

$a_{3n+1} = \frac{1}{3n+1} \to 0$

$a_{2n} = \frac{1}{2n} \to 0$

$a_n = \frac{1}{n} \to 0$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

تعریف مرتبه همگرایی یک دنباله:

فرض کنیم x_n یک دنباله مفروض باشد $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ که به عدد α همگرا باشد $(\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha)$ در اینصورت می‌گوییم مرتبه همگرایی این دنباله $p>0$ است هرگاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p} = c \ (\neq 0, \infty) \quad (*)$$

که به c ثابت مجانبی همگرایی دنباله x_n می‌گوییم. حالات زیر را در نظر می‌گیریم:

اگر $p=1$ (حتماً $c<1$) می‌گوییم مرتبه همگرایی دنباله x_n، یک است و یا دنباله مذکور همگرایی خطی دارد و اگر $p>1$ باشد گوییم دنباله مذکور همگرایی ابرخطی دارد

$p=2$ همگرایی مرتبه ۲ (همگرایی مربعی)

$p=3$ همگرایی مرتبه ۳ (همگرایی مکعبی)

دقت کنید در مواقعی که α معلوم باشد فرمول ساده بسیار پرکاربرد خواهد بود اما چنانچه α معلوم نباشد می‌توان از فرمول جایگزین به شرح زیر استفاده کرد:

گوییم مرتبه همگرایی دنباله x_n، p است هرگاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}-x_n|}{|x_n-x_{n-1}|^p} = c \ (\neq 0, \infty)$$

ثابت مجانبی

مقصود من از کعبه و بتخانه توئی تو
مقصود توئی کعبه و بتخانه بهانه
(شیخ بهایی)

Scanned with CamScanner

$$p=2 \Rightarrow |x_{n+1}-\alpha| \le c|x_n-\alpha| =$$

$$= c\left[c|x_{n-1}-\alpha|^2\right]^2 = c^3|x_{n-1}-\alpha|^4 =$$

$$= c^{2(n)+1}|x_0-\alpha|^{2^{n+1}}$$

$$p=1 \text{ و } n \text{ بزرگ } |x_{n+1}-\alpha| \le c|x_n-\alpha| = \overbrace{c\,c}^{c^2}|x_{n-1}-\alpha|$$

$$= c^3|x_{n-2}-\alpha| = \dots = c^{n+1}\underbrace{|x_0-\alpha|}_{\text{ثابت}} \quad n\to\infty$$

$$n=10 \Rightarrow \begin{cases} |x_{11}-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{11}|x_0-\alpha| = 4/8\times10^{-4}|x_0-\alpha| \\ |x_{11}-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{22}|x_0-\alpha| = \\ = 2/38\times10^{-7}|x_0-\alpha| \\ |x_{11}-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{33}|x_0-\alpha| = 1/14\times10^{-10}\times|x_0-\alpha| \end{cases}$$

مثال مهم: اینجا یادآوری می‌شویم که برای $p=1$ شرط $c<1$ الزامی است زیرا نشان دادیم:

$$|x_{n+1}-\alpha| = c^{n+1}|x_0-\alpha| \quad n\to\infty$$

بدین معنی است که اگر $c<1$ باشد با دلخواه از طرفین و $n\to\infty$ اینکه $x_0-\alpha$ یک عدد ثابت است. $\lim_{n\to\infty}|x_{n+1}-\alpha| = 0$

اما وقتی $p=1$ باشد لزومی ندارد $c<1$ باشد.

حال می‌خواهیم وقتی به همگرایی مسئله زیر را بررسی آوریم:

$$x_{n+1} = x_n\left[\frac{x_n^2+3a}{3x_n^2+a}\right] \quad a>0$$

حل:

$$x_n\to\alpha \begin{cases} x_{n+1}\to\alpha \\ x_{n-1}\to\alpha \end{cases}$$

$$\cancel{\alpha} = \cancel{\alpha}\left[\frac{\alpha^2+3a}{3\alpha^2+a}\right] \to 3\alpha^2+a = \alpha^2+3a$$

$$\alpha^2 = a \to \alpha = \pm\sqrt{a}$$

Scanned with CamScanner

برای استفاده از فرمول (*) باید دو دنباله مذکور محاسبه شوند

$$x_{n+1}-\sqrt{a}=x_n\left[\frac{x_n^2+3a}{3x_n^2+a}\right]-\sqrt{a}=$$

$$\frac{x_n^3+3ax_n-3\sqrt{a}\,x_n^2-a\sqrt{a}}{3x_n^2+a}=\frac{(x_n-\sqrt{a})^3}{3x_n^2+a}$$

$$\Rightarrow \frac{x_{n+1}-\sqrt{a}}{(x_n-\sqrt{a})^3}=\frac{1}{3x_n^2+a}$$

همگرایی

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-\sqrt{a}|}{|x_n-\sqrt{a}|^{3}}=\frac{1}{4a}$$

مرتبه همگرایی

مثال: دو دنباله‌ی

$$\begin{cases} x_{k+1}=\frac{1}{2}x_k+\frac{1}{2x_k} & x_0=1 \\ y_{k+1}=\frac{1}{2}y_k+\frac{1}{y_k} & y_0=1 \end{cases}$$

شرط اولیه

به $\sqrt{2}$ همگرا هستند. با روش عددی نشان دهید و مرتبه همگرایی کدام یک بیشتر است؟

جواب: دومی زیرا $\sqrt{2}=1.41421356$

	x_k	y_k
$k=0$	1	1
$k=1$	1.25	1.5
	1.3375	1.4666667
$k=3$	1.37695678	1.41421562
$k=4$	1.39583719	1.41421356

روز بزرگداشت محمدبن زکریای رازی - روز داروساز

(حافظ)

دهقان سالخورده چه خوش گفت با پسر — کای نور چشم من بجز از کشته ندروی

Scanned with CamScanner

تمرین: با توجه به سرعت بسیار زیاد همگرایی y_k به $\sqrt{2}$، مرتبه همگرایی آن قطعاً اکیداً فوق خطی است و مرتبه x_k خطی (یک) است.

$$n=0,\ c=\frac{|x_1-\alpha|}{|x_0-\alpha|^{1}}=\frac{|1.25-1.4142356|}{|1-1.4142356|}=0.4964$$

$$n=1,\ c=\frac{|x_2-\alpha|}{|x_1-\alpha|}=\frac{|1.3375-1.4142356|}{|1.25-1.4142356|}\simeq 0.4$$

$$n=2,\ c=\frac{|x_3-\alpha|}{|x_2-\alpha|^{1}}\simeq 0.4$$

$$n=3,\ c=\frac{|x_4-\alpha|}{|x_3-\alpha|^{1}}\simeq 0.4$$

نکته: مرتبه همگرایی برابر یک و ثابت مجانبی تقریباً ۰/۴ است.

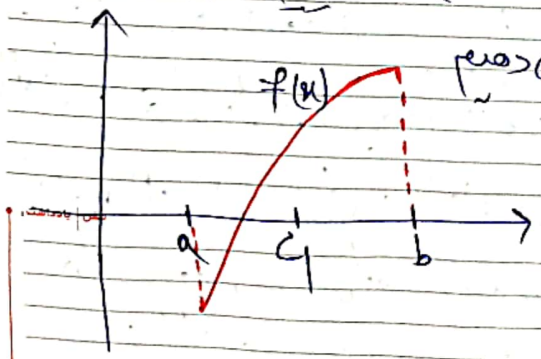
اگر در این حالت باید بین صفر و یک باشد.

چون ثابت مجانبی ثابت شد و مرتبه همگرایی بدست میاد.

روش دوبخشی (تنصیف یا نصف کردن):

فرض کنید تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)\cdot f(b)<0$ بنابه قضیه بولتزانو f در این بازه لااقل یک ریشه دارد.

فرض کنید بر این بازه دقیقاً یک ریشه داریم در این صورت دنباله $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ که به صورت زیر تولید می‌شود را دنباله روش دوبخشی (تنصیف) می‌گوییم.



$c_1=\frac{a+b}{2}$ قرار می‌دهیم

$$\begin{cases}[a,c_1] \\ f(a)\cdot f(c_1)<0 \\ [c_1,b]\end{cases}$$

بازه اصلی $\Longrightarrow [a,c_1]$

عیب رندان مکن ای زاهد پاکیزه سرشت — که گناه دگران بر تو نخواهند نوشت (حافظ)

جمله اول بنا له دوبخشی بصورت $c_1=\frac{a+b}{2}$ است حال دو بازه‌ی $[a,c_1]$ و $[c_1,b]$ را در نظر می‌گیریم با استفاده از قضیه بولتزانو تعیین می‌کنیم ریشه در کدام یک از این دو بازه قرار دارد. با توجه به شکل $f(a)\cdot f(c_1)$ منفی است بنابراین ریشه در بازه $[a,c_1]$ قرار دارد و مسافت دوم بازه را دور ریخته. در جمله بنا له این روش را به صورت $c_2=\frac{a+c_1}{2}$ تعریف می‌کنیم. مجدداً دو زیر بازه‌ی جدید $[a,c_2]$ و $[c_2,c_1]$ استخراج می‌شود مجدداً تعیین می‌کنیم ریشه در کدام زیر بازه قرار دارد. با توجه به نمودار ریشه در بازه‌ی $[c_2,c_1]$ قرار دارد. مجدداً الگوریتم روش دوبخشی را بر بازه $[c_2,c_1]$ اعمال می‌کنیم با ادامه‌ی این روند بنا له c_n که بنا له روش دوبخشی است تولید می‌شود.

بعد از ارائه‌ی یک روش مهم‌ترین سؤالی که مطرح می‌شود

این است که آیا می‌توان ملاک توقف برای روش مذکور (برای مقاصد عددی و کدنویسی) ارائه کرد. در ادامه چند ملاک توقف برای هر روش ریشه‌یابی به شرح زیر ارائه می‌دهیم:

فرض کنیم معادله $f(x)=0$ داده شده باشد α ریشه‌ی تکرار f بر بازه $[a,b]$ باشد. فرض کنید c_n یک بنا له از روش تکراری جهت یافتن ریشه باشد. ملاک‌های زیر می‌تواند ملاک‌های جهت توقف روش تکراری باشد:

۱) فرض کنیم α معلوم باشد در این صورت چنانچه ε (خطای نسبی یا مطلق تقریب) داده شده باشد در این صورت می‌توان تکرارها را تا جایی ادامه داد که در حالت مطلق داریم: $|c_n-\alpha|<\varepsilon$

و در حالت نسبی $\frac{|c_n-\alpha|}{|\alpha|}<\varepsilon$ ، $|\alpha|\neq 0$

حالت مطلق ـ نسبی: $\frac{|c_n-\alpha|}{|\alpha|+1}<\varepsilon$

پا تهی رفتن به است از کفش تنگ — رنج غربت به که اندر خانه جنگ (مولوی)

Scanned with CamScanner

۳ میانه c داده شده باشد (در موقعیت‌هایی معمولاً α مجهول است در این می‌توان تکرارها را تا جایی ادامه داد که:

$$|c_n - c_{n-1}| < \varepsilon$$

$$|f(c_n)| < \varepsilon$$ (زمانی از مشکلات این روش بوجود می‌برد)

مثال: تقریباً از ریشه معادله $x\log x = 1$ در بازه‌ی $[2,3]$ به روش دوبخشی با شرط $|c_n - c_{n-1}| < \frac{10^{-3}}{2}$

$f(x) = x\log x - 1$, $f(2) = 2\log 2 - 1 = -0.39$

$f(2)\cdot f(3) < 0$ $\quad f(3) = 3\log 3 - 1 = 0.43$

$\varepsilon = \frac{1}{2}\times 10^{-3}$

$f(2)\cdot f(3) < 0$

n	a_n	b_n	c_n	$\lvert c_n - c_{n-1}\rvert$
1	2	3	$\frac{2+3}{2} = 2.5$	0.5
2	2.5	3	$\frac{3+2.5}{2} = 2.75$	$0.25 < \varepsilon$
3	2.5	2.75	2.625	$0.125 < \varepsilon$
⋮				
11			2.5063	$0.0001 < \varepsilon$

$f(2.5)f(3) < 0$

$f(2.5)\cdot f(2.75) < 0$

سؤال ۱: الگوریتم روش دوبخشی را بنویسید.

سؤال ۲: آیا می‌توان در روش دوبخشی قبل از انجام تکرارها بفهمیم دقیقاً بعد از چند تکرار فاصله‌ی c_n از α، از ε مد نظر ما کمتر است؟

در پاسخ باید بگوییم یکی دیگر از حسن‌های روش دوبخشی این است که قبل از شروع تکرارها می‌توان برآورد کرد که بعد از چند تکرار خطای مطلق تقریب از ε داده شده کمتر خواهد شد. این موضوع در قضیه زیر مطرح می‌شود.

قضیه: فرض کنیم f تابعی پیوسته بر بازه $[a,b]$ باشد و $f(a)\cdot f(b) < 0$ و α یگانه ریشه $f(x)$ باشد. اگر c_n دنباله تولید شده باشد. داریم:

$$|c_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^n} \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

با توجه به شکل رسم شده فاصله c_1 تا α از نصف طول بازه کمتر خواهد بود یعنی $|c_1 - \alpha| \leq \frac{b-a}{2}$ و $|c_2 - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^2}$ و ...

کرانه بالای (*) می‌گوییم با میل کردن $n \to \infty$، $\frac{b-a}{2^n}$ به سمت صفر

شهادت حضرت امام محمد تقی (ع) «ع» جوادالائمه «ع» - روز مبارزه با استعمار انگلیس

(حافظ) هر کسی آن درود عاقبت کار که کشت من اگر نیکم و گر بد تو برو خود را باش

Scanned with CamScanner

$c_n \xrightarrow{\text{میل می‌کند}} \alpha$: میل می‌کند یعنی همواره

تذکر: با استفاده از قضیه بالا می‌توان تعداد تکرارها لازم جهت رسیدن به خطای مطلق ε را به شرح زیر بدست آورد:

$$\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon \longrightarrow b-a < 2^n \varepsilon$$

$$\Rightarrow \log|b-a| < \log|2^n \varepsilon|$$

$$\Rightarrow \frac{\log|b-a| - \log|\varepsilon|}{\log 2} < n$$

$$n = \left[\frac{\log\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right)}{\log 2}\right] + 1$$

تست: می‌خواهیم تقریبی از ریشه معادله $x^2-2=0$ در بازه $[1,2]$ به روش دوبخشی بیابیم به قسمی که $|c_n-\alpha| < 10^{-2}$ باشد تا به این دقت برسیم؟

به روش دوبخشی c_n همان دنباله روش دوبخشی است. مقدار n یا تعداد تکرارها چقدر

$n=3$ ـ۱ $n=5$ ـ۲ $n=7$ ـ۳ ✓ $n=9$ ـ۴

$$n = \left[\frac{\log\frac{(b-a)}{\varepsilon}}{\log 2}\right] + 1 = [6/-] + 1 = 7$$

$$\frac{b-a}{2^n} < 10^{-2} \Rightarrow b=2,\ a=1 \quad \frac{1}{2^n=7} < \frac{1}{100}$$

مرتبه همگرایی روش دوبخشی:

قضیه: روش تکراری دوبخشی یک روش همواره همگرا با مرتبه همگرایی یک است زیرا برای nهای بزرگ داشتیم

$$\begin{cases} |c_{n+1}-\alpha| \le \frac{b-a}{2^{n+1}} \\ |c_n-\alpha| \le \frac{b-a}{2^n} \end{cases} \xrightarrow{\text{بنابراین}} \frac{|c_{n+1}-\alpha|}{|c_n-\alpha|} = \frac{1}{2}$$

ثابت مجانبی مرتبه همگرایی

سوال: ثابت کنید اگر c_n متناظر حاصل از روش دوبخشی باشد $|c_n - c_{n-1}| = \frac{b-a}{2^n}$ سپس با استفاده از تعریف و تبدیل همگرایی به فرم

$$\lim \frac{|c_{n+1} - c_n|}{|c_n - c_{n-1}|^p}$$

نشان دهید و تبدیل همگرایی یک و ثابت مجانبی دقیقاً $1/2$ است.

دقیقاً

جلسه آنلاین (مجازی) ۲۷ اسفندماه ۱۴۰۱:

مزایای روش دوبخشی:

۱- ملزومات این روش کم است، تنها لازم است f بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد. ضمناً دو نقطه‌ی a و b را داشته باشیم که $f(a).f(b)<0$.

۲- این روش همواره همگراست.

۳- می‌توان تعداد تکرارها برای رسیدن به دقت ε را پیش از حل مسأله تعیین کرد و تعداد تکرارها به تابع $f(x)$ ربطی ندارد.

۴- این روش از لحاظ محاسباتی و برنامه‌نویسی پیچیده نیست و در هر تکرار فقط نیاز داریم $c=\frac{a+b}{2}$ و علامت $f(c)$ را تعیین کنیم.

معایب روش دوبخشی:

۱- پیدا کردن a و b ای که $f(a)$ و $f(b)$ مختلف العلامه باشند، همواره به سادگی امکان‌پذیر نیست.

Scanned with CamScanner

۲- اگر α و b بیش از یک ریشه داشته باشند این روش تعداد ریشه‌ها را در اختیار نمی‌گذارد و فقط یکی از آنها را معرفی می‌کند.

۳- ممکن است در یک تکرار نسبت به تکرارهای بعدی به ریشه نزدیکتر باشیم، هیچ ابزاری وجود ندارد که توسط آن در تکرار $(n+1)$ام حتماً مقدار خطا کمتر از تکرار nام است.

۴- همگرایی این روش بسیار کند است. (مرتبه همگرایی $p=1$ است)

روش تکرار ساده (روش نقطه ثابت):

تعریف: عدد حقیقی $\alpha \in [a,b]$ را نقطه ثابت تابع $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ می‌نامیم هرگاه $\alpha = g(\alpha)$. فرض کنیم تابع $f(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته و دارای یک ریشه مانند α در این بازه باشد. در روش تکرار ساده (روش نقطه ثابت) معادله $f(x)=0$ را به صورت $x=g(x)$ بازنویسی می‌کنیم پس چون $f(\alpha)=0$ بنابراین $\alpha=g(\alpha)$ یعنی α نقطه ثابت تابع $g(x)$ خواهد بود. حال دنباله $x_{n+1}=g(x_n)$ با شروع از نقطه x_0 (تقریب اولیه از ریشه $f(x)=0$) را در نظر می‌گیریم، به روش تکراری تولید شده روش تکراری ساده (نقطه ثابت) می‌گوییم.

سؤال: آیا به ازای هر انتخاب $g(x)$ و هر انتخاب x_0، دنباله $\{x_n\}$ که از رابطه $x_{n+1}=g(x_n)$ استخراج می‌شود به ریشه $f(x)=0$ همگرا است؟

Scanned with CamScanner

پاسخ: صحیح: به عنوان مثال معادله $x^2+x-1=0$ را در نظر بگیرید. ریشه مثبت این معادله

$$x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=0/6180$$

حال معادله مذکور را به صورت $x=g(x)$ بازنویسی می‌کنیم داریم:

$x=1-x^2$ و دنباله مربوط به آن عبارتست از: $x_{n+1}=1-x_n$. قرار می‌دهیم $x_0=0/5$ داریم:

$x_1=g(x_0)=0/7500$ و $x_2=g(x_1)=0/4375$

$x_3=g(x_2)=0/8086$ و $x_4=g(x_3)=0/3462$

و ... $x_7=0/9492$ و $x_8=0/0990$

$x_{\text{فرد}}\to 1$ ، $x_{\text{زوج}}\to 0$

همانطور که مشاهده می‌کنید دنباله حاصل از اندیس‌های فرد به یک و دنباله حاصل از اندیس‌های زوج به صفر همگرا است، چون هر یک دنباله در صورت وجود یکتاست، پس دنباله تولید شده همگرا نیست.

شهادت دومین شهید محراب آیت الله شهید مدنی به دست منافقان (۱۳۶۰ هـ.ش)

حال از معادله $x^2+x-1=0$ یک دنباله بازنویسی دیگر می‌سازیم

داریم: $x^2=1-x$ و بنابراین $x=\sqrt{1-x}$ یعنی $g(x)=\sqrt{1-x}$ بنابراین دنباله مربوط به آن عبارتست از: $x_{n+1}=\sqrt{1-x_n}$. با انتخاب $x_0=0/5$ بعد از ۳۴ تکرار به جواب (ریشه)، معادله همگرا می‌شود. حال جالب این است که بیاییم همین دنباله با انتخاب اولیه $x_0=1$ به صورت:

$x_1=g(x_0)=0$ و $x_2=g(x_1)=1$

یعنی دنباله مذکور واگراست: $x_{2n}=1$ و $x_{2n+1}=0$

بنابراین در روش تکرار ساده هم تابع $g(x)$ و هم نقطه شروع (x_0) در همگرایی دنباله تولید شده مؤثر خواهد بود.

قضیه: فرض کنیم تابع $g(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته و مشتق‌پذیر باشد و برای هر $x\in[a,b]$ داشته باشیم: $g(x)\in[a,b]$ یا به بیانی دیگر $g([a,b])\subseteq[a,b]$. به علاوه فرض کنیم عدد مثبتی مانند L وجود داشته باشد که: $|g'(x)|\leq L<1$ و $\forall x\in[a,b]$ در این صورت تابع $g(x)$ بر $[a,b]$ یک نقطه ثابت منحصر به فرد مانند α دارد. ضمناً دنباله تولید شده از $x_{n+1}=g(x_n)$ به ازای هر انتخاب x_0 $(x_0\in[a,b])$ به α، همگرا خواهد بود.

به زاهد گفتم این زهد و ریا تا کی بوصاف
گفتا تا به دنیا مردم نادان شود پیدا (فرات اصفهانی)
روز جهانی (روز نیایش) - روز سینما

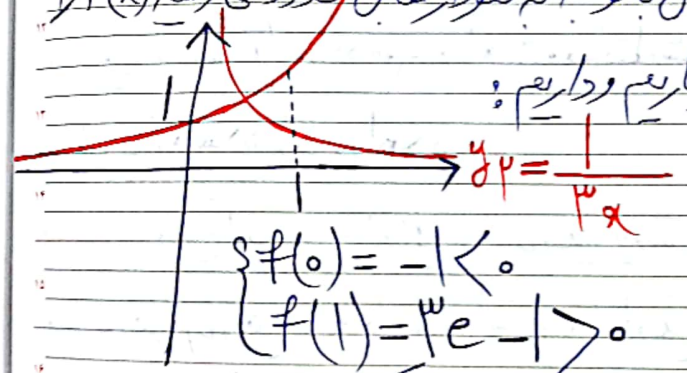
Week 38 | Month 9 | 2016 | هفته ۶ | ماه ۹ | ۱۳۹۵

Scanned with CamScanner

مثال: تقریبی از ریشه معادله $3xe^{x}=1$ را به کمک روش تکرار ساده به گونه‌ای محاسبه کنید که $|f(x_n)|<10^{-3}$ که در آن $f(x)=3xe^{x}-1$.

حل: ابتدا به کمک رسم منحنی محدوده ریشه را می‌یابیم و داریم:

$e^{x}=\frac{1}{3x}$ حال با توجه به نمودار مقابل محدوده‌ی ریشه $f(x)$ را بدست می‌آوریم و داریم:



$$\begin{cases} f(0)=-1<0 \\ f(1)=3e-1>0 \end{cases}$$

یعنی $f(x)$ بر $[0,1]$ لااقل یک ریشه دارد.

حال معادله $f(x)=0$ را به صورت $x=g(x)$ بازنویسی می‌کنیم. داریم: $x=\frac{e^{-x}}{3}$ یعنی $g(x)=\frac{e^{-x}}{3}$

از طرفی $|g'(x)|\leq\frac{1}{3}$ $\forall x\in[0,1]$ بنابراین دنباله حاصل از

روش تکراری $x_{n+1}=\frac{e^{-x_n}}{3}$ به ازای هر انتخاب اولیه $x_0\in[0,1]$ همگرا خواهد بود و داریم:

$x_0=0.5$ و $x_1=g(x_0)=0.2022$ و $x_2=0.2723$ و $x_3=0.2539$ و $x_4=0.2586$ و $x_5=0.2574$ و $x_6=0.2577$ و $x_7=0.2576$ و $x_8=0.2576$

از طرفی خواهیم داشت: $|f(x_8)|=1.3\times10^{-4}<10^{-3}$

یعنی x_8 جواب مسأله است.

~~مثال: معادله $e^{x}-3x^{2}=0$ مفروض است. با روش تکرار ساده ریشه‌ای از این معادله که در~~

قضیه: فرض کنیم $g(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته و مشتق‌پذیر باشد و $g([a,b])\subseteq[a,b]$ برای هر $x\in[a,b]$ و $g'(x)>0$ و $|g'(x)|\leq L<1$ آنگاه چنانچه دنباله $x_{n+1}=g(x_n)$ به α همگرا باشد، خواهیم داشت:

$$|x_{n+1}-\alpha|<\frac{L}{1-L}|x_{n+1}-x_n|$$

$n=0,1,2,\ldots$

مرا هرگز نباشد خواب و دارم آرزو کاهی — که خواب آید به چشمم ملک عادلم به خواب آید (ابتدای گرمستان)

(همان n)

تذکر: از قضیه قبل می‌توان برای تعیین تعداد تکرارها روش تکراری نقطه ثابت برای بدست آوردن دقت ε بهره برد.

۱- فرض کنیم ریشه معادله $f(x)=0$ ، α باشد. چنانچه نقطه اولیه (شروع) x_0 و α معلوم باشد و $\forall x\in[a,b]$ ، $|g'(x)|\leq L<1$

(و بعلاوه $g'(x)>0$) در اینصورت داریم:

$$|x_{n+1}-\alpha|\leq L|x_n-\alpha|\leq L^2|x_{n-1}-\alpha|\leq\cdots\leq L^{n+1}|x_0-\alpha|$$

حالا با معلوم بودن L و $|x_0-\alpha|$ خواهیم داشت:

$$\boxed{L^{n+1}|x_0-\alpha|<\varepsilon}$$

و n از نابرابری بالا استنتاج خواهد شد.

۲- فرض کنیم $|g'(x)|\leq L<1$ ، $\forall x\in[a,b]$ و همچنین x_0 و x_1 (حدس اولیه و تکرار اول) از دنباله $\{x_n\}$ نیز معلوم باشند. در اینصورت خواهیم داشت:

$$|x_1-\alpha|<\frac{L}{1-L}|x_1-x_0| \quad (1)$$

$$|x_{n+1}-\alpha|\leq L|x_n-\alpha|\leq\cdots\leq L^n|x_1-\alpha| \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)\text{و}(2)} |x_{n+1}-\alpha|<\frac{L^{n+1}}{1-L}|x_1-x_0|$$

حال تعداد تکرارها مطلوب برای رسیدن به دقت ε از رابطه $\frac{L^{n+1}}{1-L}|x_1-x_0|<\varepsilon$ به دست می‌آید.

تذکر مهم: اگر دو تکرار x_k و x_{k+1} معلوم باشند باز هم با تکرار روال مشابه با رویه ۲ می‌توان تعداد تکرارها را بدست آورد.

مثال: معادله $x=g(x)$ به روش نقطه ثابت (تکرار ساده) حل شده است و اگر $x_1=0.5$ و $x_2=0.5266$ آنگاه با فرض آنکه $|g'(x)|\leq 0.53$ ، تعداد تکرارها برای رسیدن به دقت $\varepsilon=\frac{1}{2}\times10^{-4}$ را بدست آورید.

Scanned with CamScanner

حل: چون تکرار اول و دوم داده شده است. بنابراین اگر $|g'(x)| \leq L < 1$ داریم:

$$\begin{cases} |x_2-\alpha| \leq \dfrac{L}{1-L}|x_2-x_1| & (1) \\ |x_{n+1}-\alpha| \leq L^{n-1}|x_2-\alpha| & (2) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$|x_{n+1}-\alpha| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_2-x_1|$$

برای تعیین تعداد تکرارها (n) باید داشته باشیم:

$$\frac{L^n}{1-L}|x_2-x_1| < \frac{1}{2}\times 10^{-4}$$

$$(0.53)^n \times \frac{0.0266}{0.47} < 0.5\times 10^{-4}$$

$$n > 11.0762 \Longrightarrow \boxed{n=12}$$

حداقل ۱۲ تکرار

یادآوری: همانطور که گفته شد روش تکرار ساده (نقطه ثابت) برای یافتن ریشه معادله $f(x)=0$ آن را بصورت $x=g(x)$ بازنویسی می‌کند و سپس با استفاده از دنباله بازگشتی

$$\begin{cases} x_{n+1} = g(x_n) \\ x_0 \text{ معلوم (عدد اولیه)} \end{cases}$$

دنباله‌ای تولید می‌کند که با داشتن یک عدد اولیه و در صورت همگرایی به جواب معادله $f(x)=0$ همگرا خواهد شد.

همانطور که گفته شد چنانچه $g:[a,b]\to[a,b]$ و $\forall x\in(a,b): |g'(x)|\leq L<1$ روش تکرار ساده به ازای هر عدد اولیه $x_0\in(a,b)$ به ریشه $f(x_0)=0$ همگراست: در ادامه قضیه یافتن ریشه و همگرایی روش تکرار ساده را بیان می‌کنیم.

قضیه: فرض کنیم α ریشه $f(x)=0$ باشد و دنباله $x_{n+1}=g(x_n)$ به α همگرا باشد. چنانچه مشتقات تابع g به اندازه کافی موجود و پیوسته باشند در این صورت داریم:

۱) اگر $g'(\alpha) \neq 0 \Rightarrow$ مرتبه همگرایی دقیقاً ۱ است.

۲) اگر $g'(\alpha) = 0 \Rightarrow$ مرتبه همگرایی لااقل ۲ است

۳) اگر $g'(\alpha) = 0$ و $g''(\alpha) \neq 0 \Rightarrow$ مرتبه همگرایی دقیقاً ۲ است.

۴) اگر $g'(\alpha) = g''(\alpha) = 0 \Rightarrow$ مرتبه همگرایی لااقل ۳ است.

۵) اگر $g'(\alpha) = g''(\alpha) = 0$, $g'''(\alpha) \neq 0 \Rightarrow$ مرتبه همگرایی دقیقاً ۳ است.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x_{n+1}-\alpha)}{(x_n-\alpha)^{2}} = \left|\frac{g''(\alpha)}{2!}\right| \rightarrow$$ ثابت مجانبی

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x_{n+1}-\alpha)}{(x_n-\alpha)^{3}} = \left|\frac{g'''(\alpha)}{3!}\right| \rightarrow$$ ثابت مجانبی

قضیه: (دهم) فرض کنیم دنباله $x_{n+1} = g(x_n)$ به α همگرا باشد و داشته باشیم $g'(\alpha) = g''(\alpha) = \dots = g^{(k-1)}(\alpha) = 0$, $g^{(k)}(\alpha) \neq 0$

آنگاه مرتبه همگرایی روش تکرار ساده $x_{n+1} = g(x_n)$ دقیقاً k است و ثابت مجانبی آن $\left|\frac{g^{(k)}(\alpha)}{k!}\right|$ است.

۳- روش نیوتون - رافسون: (حالت خاصی از روش تکرار ساده)

فرض کنیم $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = 0 \xrightarrow{\times(-1)} \frac{-f(x)}{f'(x)} = 0 \xrightarrow{\text{جمع طرفین با } x}$$

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = 0 + x \Rightarrow \begin{cases} x = g(x) \\ g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{cases}$$

$$\boxed{\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

عید سعید غدیر خم (۱۰ هـ.ق) (تعطیل)

(حافظ)

دست در حلقه‌ی آن زلف دو تا نتوان کرد تکیه بر عهد تو و باد صبا نتوان کرد

Scanned with CamScanner

می‌خواهیم ایرادات این روش را به لحاظ عددی بررسی کنیم: می‌توان نقایض فرمول نیوتون ـ رافسون را اعلام کرد:

۱ـ وجود $f'(x_n)$ در این فرمول باعث می‌شود که ما مجبور باشیم یا مشتق تابع را به صورت صریح حساب کرده و در برنامه قرار دهیم یا تقریب عددی از مشتق تابع f را حساب کنیم که قطعاً توأم با خطاست که می‌تواند کار محاسبات را با مشکل مواجه کند.

۲ـ وجود $f'(x_n)$ در مخرج کسر می‌تواند بسیار مشکل‌ساز باشد چرا که اگر $f'(x_n)$ نزدیک به صفر باشد در مخرج عددی نزدیک به صفر داریم که می‌تواند منجر به انتشار خطا شود.

۳ـ چنانچه عبارت $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ تقریباً مساوی با x_n شود در این صورت در منتهاست فرمول نیوتون ـ رافسون خطای صفر اتفاق با خطای درست رخ می‌دهد که باعث می‌شود کران بالای خطای نسبی آن به شدت افزایش یابد.

۴ـ در بحث محاسبه‌ی مطلق روش نیوتون ـ رافسون علاوه بر محاسبه‌ی

مقدار f در نقطه x_n مقدار مشتق آن نیز باید در این نقطه محاسبه شود و این در عمل سی‌پی‌یو تایم را به شدت افزایش می‌دهد.

هزینه محاسبات

۵ـ در مقدمه نوشتیم که (متأسفانه) ارائه شرایطی برای داشتن همگرایی تضمین شده در روش نیوتون ـ رافسون بسیار پیچیده و در عمل قابل استفاده نمی‌باشد.

* مهم: فرض کنیم $f \in C[a,b]$ و $f(\alpha)=0$ و $f'(x)$ و $f''(x)$ در بازه $[a,b]$ تغییر علامت ندهند و مخالف صفر باشند حال چنانچه x_0 تقریبی از α باشد به طوری که $f(x_0)f''(x_0)>0$. آنگاه دنباله حاصل از روش نیوتون ـ رافسون به α همگراست.

مرتبه همگرایی روش نیوتون ـ رافسون:

فرض کنیم $f(\alpha)=0$ و دنباله نیوتون ـ رافسون $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ به α همگرا باشد آنگاه داریم:

اگر $f'(\alpha)\neq 0$ (α ریشه ساده $f(x)=0$ باشد) مرتبه همگرایی روش نیوتون ـ رافسون دقیقاً ۲ خواهد بود.

Scanned with CamScanner

روش نیوتن حالت خاصی از روش تکرار ساده برای

$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ می‌باشد بنابراین مرتبه دقیقاً ۱ $\Leftarrow g'(\alpha) \neq 0$

$g'(\alpha) = 0 , g''(\alpha) \neq 0 \Rightarrow$ مرتبه دقیقاً ۲

$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} , g'(x) = 1 - \frac{f'^2(x) - f''(x)f(x)}{f'(x)^2}$

$= \frac{f''(x)f(x)}{f'(x)^2}$

$g'(\alpha) = \frac{f''(\alpha)\overset{\neq 0}{f(\alpha)}}{(\underset{\neq 0}{f'(\alpha)})^2} = 0$ مرتبه لااقل ۲ است.

گام بعدی $g''(\alpha) = ?$

$g''(x) = \left(\frac{f''(x)f(x)}{f'(x)^2}\right)' =$

$= \frac{(f'''(x)f(x) + f'(x)f''(x))f'^2(x) - (2f''(x)f'(x)f(x))f'(x)}{(f'(x))^4}$

$g''(x) = \frac{f'''(x)f'(x)f(x) + (f'(x))^2 f''(x) - 2(f''(x))^2 f(x)}{(f'(x))^3}$

$f(\alpha) = 0$

$g''(\alpha) = \frac{(f'(\alpha))^2 f''(\alpha)}{(f'(\alpha))^3} = \frac{f''(\alpha) \neq 0}{0 \neq f'(\alpha)} \neq 0$

(مرتبه دقیقاً ۲ است.)

$f(\alpha) = 0$

نکته: فرض کنیم α ریشه‌ی تکراری مرتبه k ام تابع f باشد در این صورت دنباله روش تکراری نیوتون - رافسون $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ در صورت همگرایی به α همواره برای $k \geq 2$ دارای مرتبه همگرایی یک است. هر چه مرتبه تکرار بالاتر باشد سرعت دنباله نیوتون - رافسون کمتر است.

هر آن دل را که سوزی نیست، دل نیست دل افسرده غیر از آب و گل نیست (وحشی بافقی)

Scanned with CamScanner

$$f(x)=(x-\alpha)^K h(x) \quad , \quad h(\alpha)\neq 0$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \longrightarrow x_{n+1}-\alpha=x_n-\alpha-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$=x_n-\alpha-\frac{(x_n-\alpha)^K h(x_n)}{K(x_n-\alpha)^{K-1}h(x_n)+(x_n-\alpha)^K h'(x_n)}$$

$$\Rightarrow x_{n+1}-\alpha=x_n-\alpha-\frac{(x_n-\alpha)(h(x_n))}{Kh(x_n)+(x_n-\alpha)h'(x_n)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^1}=1-\frac{h(x_n)}{Kh(x_n)+\underbrace{(x_n-\alpha)}_{\to 0}h'(x_n)}$$

$$=\boxed{1-\frac{1}{K}} \quad (*)$$

تلفن | یادداشت :

روز مباهله پیامبر اسلام (ص) - شکست حصر آبادان در عملیات ثامن الائمه (ع)

ج	پ	ج	س	د	ی	ش	ج	پ	ج	س	د	ی	ش	ج	پ	ج	س	د	ی	ش	ج	پ	ج	س	د	ی	ش	ج	پ
۳۰	۲۹	۲۸	۲۷	۲۶	۲۵	۲۴	۲۳	۲۲	۲۱	۲۰	۱۹	۱۸	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱

یادآوری: اگر $K=1$ (ریشه ساده $f(\alpha)=0$) و تذکر: معادله باشد یعنی $f'(\alpha)\neq 0$

می‌باشد. آنگاه مرتبه همگرایی روش نیوتون-رافسون

α می‌باشد.

تذکر: بنابر فرمول معادل یافتن مرتبه همگرایی، چنانچه

α ریشه مرتبه K ام $f(x)=0$ باشد آنگاه دنباله روش

نیوتون-رافسون در صورت همگرایی، مرتبه همگرایی را

داشته باشیم.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}}=1-\frac{1}{K} \quad (**)$$

مهم مهم: با توجه به تذکر قبل از روابط $(*)$ و $(**)$ می‌توان K (مرتبه تکرار

ریشه) α را بدست آورد. دقت کنیم اگر α معلوم باشد

از فرمول $(*)$ و اگر α در صورت سؤال داده نشده باشد

از فرمول $(**)$ بهره می‌بریم. دقت کنیم هر چه n زیاد باشد

تلفن | یادداشت :

روز خانواده و تکریم بازنشستگان

سوی که روم من که دلم سوی تو باشد — روی که بینم که به از روی تو باشد (امیر صمی نیشابوری)

Scanned with CamScanner

مقدار K دقیق‌تر محاسبه می‌شود. در واقع داریم:

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{x_n-x_{n-1}} \simeq 1-\frac{1}{K}$$

$$\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha} \simeq 1-\frac{1}{K}$$

مثال: معادله $f(x)=(x-2)^2\sin x=0$ را در نظر بگیرید. برای یافتن ریشه $\alpha=2$ با حدس اولیه $x_0=1.8$ از روش نیوتون ـ رافسون بهره می‌بریم. مرتبه‌ی اثر و مرتبه تکرار $\alpha=2$ را بدست آورید. (محاسبه sin بار اول با اسم در ماشین حساب)

حل:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=$$

$$=x_n-\frac{(x_n-2)^2\sin(x_n)}{2(x_n-2)\sin(x_n)+(x_n-2)^2\cos x_n}$$

$$n=0 \Rightarrow x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=1.8772$$

$$n=1 \Rightarrow x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=1.94832$$

$$n=2 \rightarrow x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}=1.97389$$

پایدار ← 1.8 بیشتر و به سمت 2 برود.

$$n=0 \Rightarrow \frac{x_1-\alpha}{x_0-\alpha} \simeq 1-\frac{1}{K} \Rightarrow \frac{1.8772-2}{1.8-2}=1-\frac{1}{K}$$

$$1-\frac{1}{K}=0.5115 \Rightarrow K=2.047$$

$$n=1 \Rightarrow \frac{x_2-\alpha}{x_1-\alpha} \simeq 1-\frac{1}{K} \rightarrow K=2.02$$

مرتبه تکرار $K=2$

تا کی به تمنای وصال تو یگانه
اشکم رود از هر مژه چون سیل روانه
(شیخ بهایی)

Scanned with CamScanner

فرض کنیم α مجهول باشد در این صورت بنا بر اسحاق سه جمله‌ی متوالی دنباله مرتبه تکرار ریشه معادله را به دست آورده:

$$\frac{x_4 - x_3}{x_3 - x_2} \simeq 1 - \frac{1}{K}$$

$$\frac{1.94832 - 1.89772}{1.89772 - 1.8} \simeq 1 - \frac{1}{K}$$

$$\boxed{K = 2.07}$$

مرتبه تکرار یعنی K باید صحیح باشد.

مثال: می‌خواهیم ماشین حسابی طراحی کنیم که ریشه K ام (رادیکال) عدد A را برای ما با استفاده از عملگر جمع، ضرب، تفریق و تقسیم به دست آورد.

$$x = \sqrt[K]{a} \xrightarrow{\text{به توان } K} x^K - a = 0 = f(x)$$

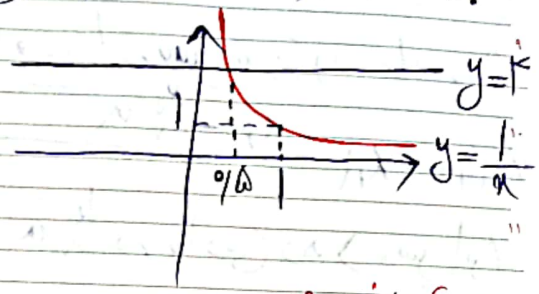
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^K - a}{K x_n^{K-1}}$$

حدس اولیه $x_0 = 2$

ادامه مثال صفحه بعد:

بدست آوردن حدس اولیه (روش ترسیمی):

$$\frac{1}{x} - 4 = 0 = f(x)$$



روش تنصیف:

$$f(0.1)\, f(0.4) < 0$$

$$[0.1 , 0.4] \longrightarrow c_1 = \frac{0.1 + 0.4}{2} = 0.25$$

$$f(0.1)\, f(0.5) < 0$$

$$[0.1 , 0.5] \longrightarrow c_1 = \frac{0.1 + 0.5}{2} = 0.3$$

$$\begin{cases} [0.1 , 0.3] \\ [0.3 , 0.5] \end{cases}$$

دل می رود ز دستم صاحبدلان خدا را — دردا که راز پنهان خواهد شد آشکارا (حافظ)

مثال: چنانچه برای مثال قبل ضابطه تابع $f(x)$ را به صورت $f(x)=x-\sqrt[k]{a}=0$ در نظر بگیریم ریشه‌های این معادله همان $x=\sqrt[k]{a}$ اما وقتی از روش نیوتون-رافسون استفاده می‌کنیم:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n-\sqrt[k]{a}}{1}=\sqrt[k]{a}$$

که در عمل تقریبی از $\sqrt[k]{a}$ به ما نمی‌دهد. پس این ضابطه، ضابطه مناسبی نبود.

مثال: با استفاده از روش نیوتون دنباله‌ای به دست آورید که عکس عدد نامنفی a را به دست آورد.

۱) $f(x)=ax-1=0 \rightarrow x_{n+1}=x_n-\frac{ax_n-1}{a}=\frac{1}{a}$ ☺

۲) $f(x)=x-\frac{1}{a}=0 \rightarrow x_{n+1}=x_n-\frac{x_n-\frac{1}{a}}{1}=\frac{1}{a}$ ☺

۳) $f(x)=\frac{1}{x}-a=0$

$$\rightarrow x_{n+1}=x_n-\frac{\frac{1}{x_n}-a}{-\frac{1}{x_n^2}}=x_n+x_n^2(1-ax_n)=2x_n-ax_n^2$$ ☺

(ادامه در صفحه قبل)

مثال می‌خواهیم عکس ۴ را حساب کنیم $a=4$:

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{4}=0.25$$

$$\begin{cases} x_{n+1}=2x_n-4x_n^2 \\ x_0=5 \end{cases}$$

$x_1=2x_0-4x_0^2=-90$

$x_2=2x_1-4x_1^2=-32220$ ☹

واگرا است.

$$\begin{cases} x_{n+1}=2x_n-4x_n^2 \\ x_0=0.5 \end{cases}$$

$x_1=2x_0-4x_0^2=0$

$x_2=0,\ x_3=0,\ \ldots$ ☹

واگرا است.

$$\begin{cases} x_{n+1}=2x_n-4x_n^2 \\ x_0=0.2 \end{cases}$$

$x_1=0.24$

$x_2=0.2496$

$x_3=0.24999936$

$x_4=0.25$ ☺

Scanned with CamScanner

مثال: فرض کنیم $f \in C^{k+1}[a,b]$ و α ریشه مرتبه k ام f باشد. نشان دهید نسبت‌های اصلاح شده نیوتون به فرم‌های

$$x_{n+1} = x_n - \frac{k f(x_n)}{f'(x_n)}$$ بهتره

در صورت همگرایی دارای مرتبه همگرایی لااقل ۲ می‌باشند.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f^{k-1}(x_n)}{f^{k}(x_n)}$$

مثال: می‌خواهیم ریشه نامنفی معادله $f(x) = (x-2)^2 \sin x$ را با استفاده از روش نیوتون با مرتبه همگرایی لااقل ۲ به دست آوریم. فرمول نسبت‌های مربوطه را به دست آورید.

چون ریشه $\alpha = 2$ ریشه تکراری مرتبه ۲ معادله $f(x)=0$ است بنابراین روش نیوتون عادی در صورت همگرایی داشته و ثابت مجانبی آن $1 - \frac{1}{2} = 0.5$ است بنابراین چون در صورت سؤال مرتبه همگرایی لااقل ۲ مد نظر است

پس این فرم قابل قبول نیست. بنابراین از فرم‌های اصلاح شده نیوتون با $k=2$ بهره می‌بریم. یعنی نسبت‌های بازگشتی زیر در صورت همگرایی مرتبه همگرایی لااقل ۲ دارند.

$x_0 = 1.8$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$ در صورت همگرایی مرتبه ۱

$$\left(x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right)$$ مرتبه همگرایی لااقل ۲

یا

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)} \quad k=2$$

مثال: $\sqrt[7]{2} = 1.1408$

$k=7, a=2 \Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{7}\left[6x_n + \frac{2}{x_n^6}\right]$

$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^7 - 2}{7x_n^6}$

بعد عمری که به خواب من بی دل آمد گریه آبی به رخم ریخت که بیدار شدم (کلیم کاشانی)

$$n=0 \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{x_0^7 - 2}{7x_0^6} = 1.14285$$

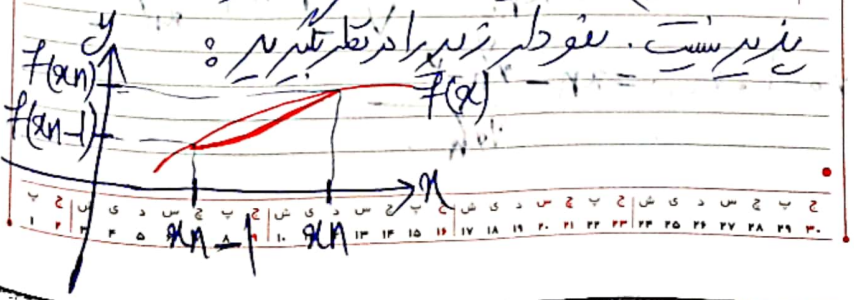
$$n=1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{7}\left[6x_1 + \frac{2}{x_1^6}\right] = 1.10781$$

$$n=2 \rightarrow x_3 = \frac{1}{7}\left[6x_2 + \frac{2}{x_2^6}\right] = 1.10412$$

$$n=3 \rightarrow x_4 = \frac{1}{7}\left[6x_3 + \frac{2}{x_3^6}\right] = 1.10408$$

۴- روش وتری:

همانطور که دیدیم فرمول نیوتون-رافسون به صورت $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ است. فرض کنیم مشتق تابع f بسیار پیچیده باشد یا اینکه مقادیر تابع f توسط یک تابع جدولی مشخص باشد (مقادیر f را نداریم) در این صورت استفاده از این روش امکان پذیر نیست. نمودار زیر را در نظر بگیرید:



شیب خط واصل بین دو نقطه

$$(x_{n-1}, f(x_{n-1})), (x_n, f(x_n))$$

عبارت است از:

$$m = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

چنانچه فاصله دو نقطه x_n و x_{n-1} به اندازه کافی کوچک باشد در این صورت m تقریبی از $f'(x_n)$ خواهد بود یعنی

$$m = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \simeq f'(x_n)$$

چنانچه به جای $f'(x_n)$ در روش نیوتون-رافسون از تقریب آن یعنی m استفاده می‌کنیم روشی به نام روش وتری بدست می‌آید. بنابراین خواهیم داشت:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \xrightarrow{\text{روش وتری}} x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \times f(x_n)$$

$$= \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Scanned with CamScanner

ذکات:

فرمول روش وتری یک فرمول بازگشتی x_{n+1} از سه است بنابراین برای بدست آوردن مقدار این دنباله نیاز به دو مقدار اولیه x_0 و x_1 داریم (دقت کنید در روش نیوتون فقط به یک مقدار اولیه x_0 نیاز داشتیم).

۲- همانند روش نیوتون - رافسون که تنها در شرایط خاصی همگرایی تضمین شده داشتیم این روش که از روش نیوتون - رافسون بدست آمده مشکل همگرایی تضمین شده را دارد.

۳- چنانچه α ریشه ساده f باشد یعنی $f(\alpha)=0$ و $f'(\alpha)\neq 0$ مرتبه همگرایی روش نیوتون - رافسون ۲ خواهد بود.

از آنجایی که روش وتری با استفاده از تقریبی برای f' در روش نیوتون - رافسون بدست آمده (بعد آنشان می‌دهیم مرتبه‌ی آن یک است) بنابراین روش وتری نمی‌تواند مرتبه همگرایی ۲ داشته باشد زیرا تقریب با دقت کمی برای f' استفاده کردیم از طرفی چون روش نیوتون فقط و فقط برای ریشه‌های تکراری دارای مرتبه همگرایی یک است. بنابراین مرتبه همگرایی روش

وتری بیشتر از یک است.

۴- روش وتری اولین روشی است که از دو مرحله اولیه استفاده می‌کند و مرتبه همگرایی آن نیز عددی صحیح نیست.

* تمرین: آیا می‌توانید شرایطی را برای اینکه روش وتری برای یافتن ریشه ساده $f(\alpha)=0$ همگرایی تضمین شده داشته باشد بدست آورید.

مثال: با استفاده از روش وتری ریشه معادله $f(x)=\cos x-\frac{1}{1+x^2}$ در $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right]$ را با ۳ تکرار بدست آورید.

تذکر مهم: برای شروع تکرارهای روش وتری نیاز به x_0 و x_1 داریم برای تعیین این دو مقدار می‌توان از ۳ روش کمک گرفت استفاده کرد.

۱- ابتدا به کمک روش ترسیمی یک بازه بسیار بسیار کوچک برای محدوده‌ی ریشه مورد نظر استخراج می‌کنیم. سپس ابتدای بازه را به عنوان x_0 و انتهای آن را به عنوان x_1 در نظر می‌گیریم حال می‌توان تکرارهای روش وتری را بدست آورد.

۲- با استفاده از روش تنصیف (که می‌دانیم همواره همگراست) تقریب‌های مناسب و نزدیک از ریشه معادله مذکور بدست می‌آوریم

Scanned with CamScanner

و سپس این تقریب ها را به عنوان x_0 و x_1 انتخاب کنیم

۳- ضابطه بازه ی مسئله به اندازه کافی کوچک باشد می توان x_0 را ابتدای بازه و x_1 را انتهای بازه در نظر گرفت.

حل مثال:

تلفن | یادداشت:

Scanned with CamScanner