

デルタマッ普法

デルタマップ法：

視線 \hat{n} において、CMBの直線偏光を熱力学的温度で観測される直行するQ、Uで分解する。

$$\vec{s} = (Q(\hat{n}_1), \dots, Q(\hat{n}_{N_{\text{pix}}}), U(\hat{n}_1), \dots, U(\hat{n}_{N_{\text{pix}}}))^\top,$$

CMB信号：

$$\vec{s}_{\text{CMB}}(\nu) = \vec{s}_{\text{CMB}}.$$

前景放射：空間変動N個のパラメータ \vec{p}^I ($I = 1, 2, \dots, N$), 周波数空間で変化

$$\vec{s}_f(\nu) = g_\nu \mathbf{D}_\nu(\vec{p}^I) \vec{s}_b,$$

冪乗シンクロトロン $D_\nu^s(\beta_s(\hat{n})) = \left(\frac{\nu}{\nu_{s*}}\right)^{\beta_s(\hat{n})},$

1成分ダストMBB $D_\nu^d(T_d(\hat{n}), \beta_d(\hat{n})) = \left(\frac{\nu}{\nu_{d*}}\right)^{\beta_d(\hat{n})+1} \frac{e^{x_{d*}(\hat{n})} - 1}{e^{x_d(\hat{n})} - 1},$

輝度温度からCMB熱力学温度への変換

$$g_\nu \equiv \frac{(e^x - 1)^2}{e^x x^2} \text{ with } x \equiv \frac{h\nu}{k_B T_{\text{CMB}}}.$$

β dスペクトル指数

\mathbf{D}_ν は周波数依存性

Sb：輝度温度単位のパivot周波数における信号ベクトル

1 次 の 摂 動 を 考 慮 $p^I(\hat{n}) = \bar{p}^I + \delta p^I(\hat{n}),$

前 景 放 射 : テ イ ラ ー 展 開

$$g_\nu \mathbf{D}_\nu(\vec{p}^I) \vec{s}_b = g_\nu D_\nu(\vec{p}^I) \mathbf{I} \vec{s}_b + g_\nu \sum_{I=1}^N D_{\nu,p^I}(\vec{p}^I) \mathbf{I} (\delta \vec{p}^I \circ \vec{s}_b) + \mathcal{O}(\delta \vec{p}^{I^2}) \ ,$$

ダ ス ト と シ ン ク ロ ト ロ ン

$$\begin{aligned} g_\nu \mathbf{D}_\nu(\vec{p}^I) \vec{s}_f &= g_\nu D_\nu^d(\vec{p}^I) \mathbf{I} \vec{s}_d + g_\nu \sum_{I=1}^{N_d} D_{\nu,p_d^I}^d(\vec{p}^I) \mathbf{I} (\delta \vec{p}_d^I \circ \vec{s}_d) + \mathcal{O}(\delta \vec{p}_d^{I^2}) \\ &\quad + g_\nu D_\nu^s(\vec{p}^I) \mathbf{I} \vec{s}_s + g_\nu \sum_{I=1}^{N_s} D_{\nu,p_s^I}^s(\vec{p}^I) \mathbf{I} (\delta \vec{p}_s^I \circ \vec{s}_s) + \mathcal{O}(\delta \vec{p}_s^{I^2}) \\ &= \tilde{\mathbf{D}}_\nu \vec{\tilde{s}}_f, \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_\nu = \left(g_\nu D_\nu^d(\vec{p}_d^I) \mathbf{I} \quad g_\nu D_{\nu,p_d^1}^d(\vec{p}_d^1) \mathbf{I} \quad \cdots \quad g_\nu D_{\nu,p_d^{N_d}}^d(\vec{p}_d^{N_d}) \mathbf{I} \quad g_\nu D_\nu^s(\vec{p}_s^I) \mathbf{I} \quad g_\nu D_{\nu,p_s^1}^s(\vec{p}_s^1) \mathbf{I} \quad \cdots \quad g_\nu D_{\nu,p_s^{N_s}}^s(\vec{p}_s^{N_s}) \mathbf{I} \right)$$

前景放射信号ベクトル：

$$\vec{s}_f \equiv \begin{pmatrix} \vec{s}_d \\ \delta \vec{p}_d^1 \circ \vec{s}_d \\ \vdots \\ \delta \vec{p}_d^{N_d} \circ \vec{s}_d \\ \vec{s}_s \\ \delta \vec{p}_s^1 \circ \vec{s}_s \\ \vdots \\ \delta \vec{p}_s^{N_s} \circ \vec{s}_s \end{pmatrix}.$$

観測データ $\vec{m}(\nu) = \vec{s}_{\text{CMB}} + \tilde{\mathbf{D}}_\nu \vec{s}_f + \vec{s}_N(\nu)$

デルタマップ法の弱点

N_ν 個の周波数で空を観測

$$\vec{m} = \mathbf{D}^{\text{CMB}} \vec{s}_{\text{CMB}} + \tilde{\mathbf{D}} \vec{s}_f + \begin{pmatrix} \vec{s}_N(\nu_1) \\ \vdots \\ \vec{s}_N(\nu_{N_\nu}) \end{pmatrix},$$

重みの式

$$[1, \vec{\alpha}^\text{T}] \tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{0}$$

この式を解くには $N_\nu = (N_d + 1) + (N_s + 1) + 1$
出なければならない、 N_ν をふやしても感度は上がらない

クリーンマップ：

$$\vec{m}_{\text{CMB}} = \frac{\vec{m}_{\nu_{\text{CMB}}} + \sum_{i=\nu_2}^{\nu_{N_\nu}} \alpha_i \vec{m}_{\nu_i}}{1 + \sum_{i=\nu_2}^{\nu_{N_\nu}} \alpha_i},$$

尤度：

$$-2 \ln \mathcal{L} = \vec{m}_{\text{CMB}}^\text{T} \mathbf{C}^{-1} \vec{m}_{\text{CMB}} + \ln |2\pi \mathbf{C}|,$$

共分散行列：

尤度を最小化することで各パラメータが決まる

$$\mathbf{C} = r \times \mathbf{C}^{\text{tens}} + \mathbf{C}^{\text{scal}} + \frac{\mathbf{N}_{\nu_{\text{CMB}}} + \sum_{i=\nu_2}^{\nu_{N_\nu}} \alpha_i^2 \mathbf{N}_{\nu_i}}{(1 + \sum_{i=\nu_2}^{\nu_{N_\nu}} \alpha_i)^2}.$$

$$\vec{m} \equiv \begin{pmatrix} \vec{m}(\nu_1) \\ \vdots \\ \vec{m}(\nu_{N_\nu}) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}^{\text{CMB}} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \vdots \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \tilde{\mathbf{D}} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{\nu_1} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{D}}_{\nu_{N_\nu}} \end{pmatrix}.$$

$\vec{\alpha}^\text{T} = (\alpha_{\nu_2}, \dots, \alpha_{\nu_{N_\nu}})$
の重みで前景除去

・アルゴリズムのテスト：

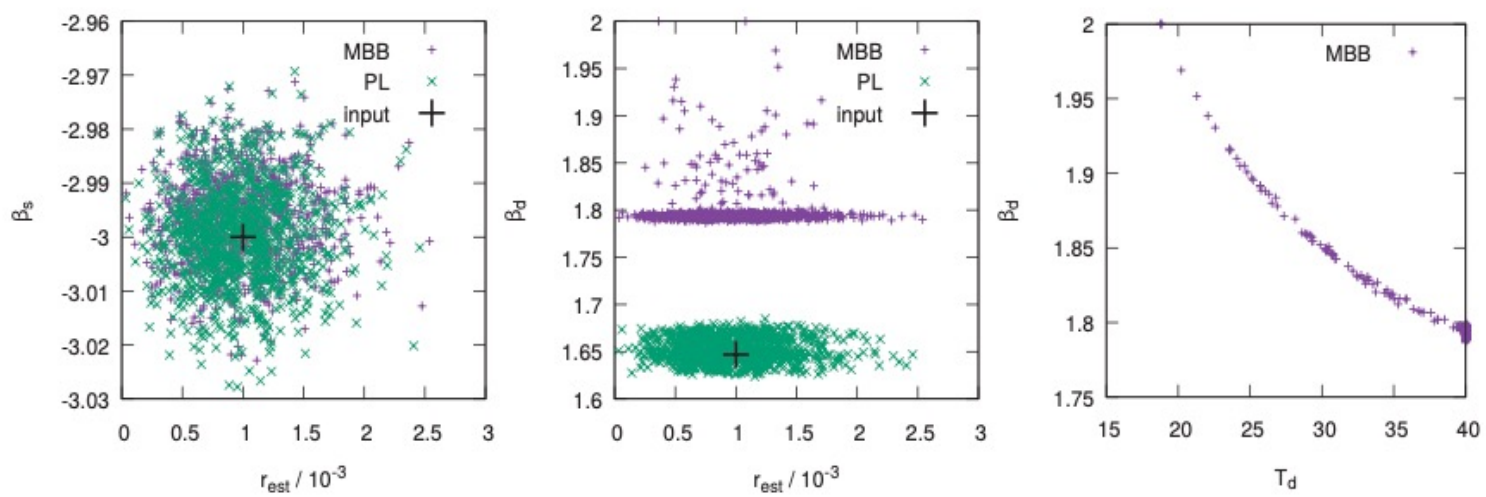
状況： $[Q, U]_{\nu}(\hat{n}) = \text{CMB}(\hat{n}) + N_{\nu}(\hat{n}) + g_{\nu} \left(\frac{\nu}{\nu_*} \right)^{\bar{\beta}} \left(1 + \ln \left(\frac{\nu}{\nu_*} \right) \delta\beta(\hat{n}) \right) [Q^f, U^f]_{\nu_*}(\hat{n}) + \mathcal{O}(\delta p^2),$

①冪乗モデル

シンクロトン指数平均：-3.00

ダスト指数平均：1.674

テンソルスカラー比 $r=0.001$ の
スカラーモードとテンソルモードの追加



40GHz、60GHz、140GHz、230GHz、340Ghzで生成されたCMB+前景

140GHzでのマップをクリーニングするため、低周波数2つ、高周波数2つを用いる

②ダストの修正黒体（BMM）スペクトル

高周波数3つを、400GHzで生成された別の
のマップを生成

$$\begin{aligned} [Q, U]_{\nu}(\hat{n}) = & \text{CMB}(\hat{n}) + N_{\nu}(\hat{n}) + g_{\nu} \left(\frac{\nu}{\nu_*} \right)^{\beta_d+1} \frac{e^{\bar{x}_d-1}}{e^{\bar{x}_d} - 1} \\ & \times \left[1 + \ln \left(\frac{\nu}{\nu_*} \right) \delta\beta_d(\hat{n}) + \left(\frac{\bar{x}_d e^{\bar{x}_d}}{e^{\bar{x}_d} - 1} - \frac{\bar{x}_{d*} e^{\bar{x}_{d*}}}{e^{\bar{x}_{d*}} - 1} \right) \frac{\delta T_d(\hat{n})}{\bar{T}_d} \right] [Q^f, U^f]_{\nu_*}(\hat{n}) \\ & + \mathcal{O}(\delta p^2), \end{aligned} \tag{22}$$

結果：入力したパラメータに対して出力が復元することがわかった

・デルタマップ法の定式化（ベイズ統計による）：

$$-2 \ln \mathcal{L}(\vec{m}|\vec{s}, \boldsymbol{D}) = (\vec{m} - \boldsymbol{D}\vec{s})^T \boldsymbol{N}^{-1} (\vec{m} - \boldsymbol{D}\vec{s}) + \ln |2\pi \boldsymbol{N}|. \tag{40}$$

N_{pix} 全画素、 N_{freq} 全周波数におけるストークスパラメータデータを連結する

$$\vec{m} \equiv \left(\{[Q,U]_{\nu_1}(\hat{n}_i)\}, \cdots, \{[Q,U]_{\nu_{N_{freq}}}(\hat{n}_i)\} \right)^T.$$

ノイズの共分散 \boldsymbol{N} も連結

$$2N_{pix}N_{freq} \times 2N_{pix}N_{freq} \text{ 行列}$$

空の信号ベクトルを以下のように定義

$$\vec{s} \equiv (\{\text{CMB}(\hat{n}_i)\}, \{\text{Dust}(\hat{n}_i)\}, \{\text{Synch}(\hat{n}_i)\}, \cdots)^T,$$

$$\text{要素数： } 2N_{pix}(N_{temp}+1)$$

前景放射のテンプレート数 N_{temp}
 （シンクロトロンとダストがある時、 $N_{temp} = 2$ ）

混合行列

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}^{\text{CMB}} & \boldsymbol{D}^{\text{dust}} & \boldsymbol{D}^{\text{synch}} & \cdots \end{pmatrix}, \quad 2N_{pix}N_{freq} \times 2N_{pix}(N_{temp}+1)$$

$$\vec{x} = \frac{[Q,U]_{\nu_{\text{CMB}}}(\hat{n}) + \sum_{j=1}^{N+1} \alpha_j [Q,U]_{\nu_j}(\hat{n})}{1 + \sum_{j=1}^{N+1} \alpha_j}.$$

上式のクリーンマップから始めて、
 (40)で与えられる尤度を構築、
 トップダウンアプローチ

$$\boldsymbol{D}^{\text{CMB}} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}, \tag{44}$$

$$\boldsymbol{D}^{\text{dust}} \equiv \begin{pmatrix} g_{\nu_1} D_{\nu_1}^{\text{dust}}(\beta_{\text{d},1}, T_{\text{d},1}, \cdots) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_{\nu_1} D_{\nu_1}^{\text{dust}}(\beta_{\text{d},2}, T_{\text{d},2}, \cdots) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_{\nu_1} D_{\nu_1}^{\text{dust}}(\beta_{\text{d},N_{\text{pix}}}, T_{\text{d},N_{\text{pix}}}, \cdots) \\ g_{\nu_2} D_{\nu_2}^{\text{dust}}(\beta_{\text{d},1}, T_{\text{d},1}, \cdots) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_{\nu_2} D_{\nu_2}^{\text{dust}}(\beta_{\text{d},2}, T_{\text{d},2}, \cdots) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g_{\nu_2} D_{\nu_2}^{\text{dust}}(\beta_{\text{d},N_{\text{pix}}}, T_{\text{d},N_{\text{pix}}}, \cdots) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

\boldsymbol{D}^{synch} についても同様

$$\beta_{d,i} \equiv \beta_d(\hat{n}_i)$$

（ビームのスメア効果、キャブリレーション効果、ゲインキャリブレーション、ピクセルのウィンドウ関数などの効果はミキシング行列の全要素を修正する）

- ・混合行列をスペクトルパラメータの空間的変動に対して一時拡張する。

信号ベクトルを再定義 $\vec{s} \rightarrow \left(\{\text{CMB}(\hat{n}_i)\}, \{\text{Dust}(\hat{n}_i)\}, \{\text{Dust}(\hat{n}_i)\delta\beta_{\text{d},i}\}, \{\text{Dust}(\hat{n}_i)\delta T_{\text{d},i}\}, \cdots, \right. \\ \left. \{\text{Synch}(\hat{n}_i)\}, \{\text{Synch}(\hat{n}_i)\delta\beta_{\text{s},i}\}, \{\text{Synch}(\hat{n}_i)\delta C_{\text{s},i}\}, \cdots \right)^{\text{T}},$

混合行列も同様に $\boldsymbol{D} \rightarrow \left(\boldsymbol{D}^{\text{CMB}} \quad \boldsymbol{D}^{\text{dust}}(\bar{p}^I) \quad \boldsymbol{D}_{,1}^{\text{dust}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{D}_{,N}^{\text{dust}} \quad \boldsymbol{D}^{\text{synch}}(\bar{p}^J) \quad \boldsymbol{D}_{,1}^{\text{synch}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{D}_{,M}^{\text{synch}} \quad \cdots \right),$

ここで、ダストとシンクロトロンはそれぞれ $N(I = 1 \dots, N)$ と $M(I = 1 \dots, M)$ 個のスペクトルパラメータを持つ。

添字 I は I 番目の前景放射パラメータに関する微分を表す（ダストの β_{d} と T_{d} 、シンクロトロンの β_{s} と C_{s} ）

混合行列の全ての要素は、平均的なスペクトルパラメータで評価

式(40)で与えられる尤度は変化しない

具体的なダストの表記：

シンクロトロンも同様


I ： $2N_{pix} \times 2N_{pix}$ の単位行列

宇宙にCMB,シンクロトロン、ダストのみの場合

\mathbf{s} の要素数は、 $2N_{pix}(N + M + 3)$

\mathbf{D} は正方行列となり、逆行列が存在する

これらは特殊なケース、、、周波数のチャンネル数が、綺麗になったCMBマップを解くのに十分である特殊なケース

混合行列は画素に依存しない 

式(40)は画素、調和、ウェーブレット空間で自由に記述可能

(デルタマップ法で使用する線型化の重要な利点)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D}^{\text{dust}}(\bar{\mathbf{p}}^I) & \mathbf{D}_{,1}^{\text{dust}} & \dots & \mathbf{D}_{,N}^{\text{dust}} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} g_{\nu_1} D_{\nu_1}^{\text{dust}}(\bar{\mathbf{p}}^I) \mathbf{I} & g_{\nu_1} D_{\nu_1,1}^{\text{dust}} \mathbf{I} & \dots & g_{\nu_1} D_{\nu_1,N}^{\text{dust}} \mathbf{I} \\ g_{\nu_2} D_{\nu_2}^{\text{dust}}(\bar{\mathbf{p}}^I) \mathbf{I} & g_{\nu_2} D_{\nu_2,1}^{\text{dust}} \mathbf{I} & \dots & g_{\nu_2} D_{\nu_2,N}^{\text{dust}} \mathbf{I} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{\nu_{N_{\text{freq}}}} D_{\nu_{N_{\text{freq}}}}^{\text{dust}}(\bar{\mathbf{p}}^I) \mathbf{I} & g_{\nu_{N_{\text{freq}}}} D_{\nu_{N_{\text{freq}}},1}^{\text{dust}} \mathbf{I} & \dots & g_{\nu_{N_{\text{freq}}}} D_{\nu_{N_{\text{freq}}},N}^{\text{dust}} \mathbf{I} \end{pmatrix},$$

・最尤解としてのデルタマップ定義

CMB信号に関する尤度を最大化： $\text{CMB}^{\text{ML}}(\hat{n}) = [(\boldsymbol{D}^{\text{T}} \boldsymbol{N}^{-1} \boldsymbol{D})^{-1} \boldsymbol{D}^{\text{T}} \boldsymbol{N}^{-1} \vec{m}]_{\text{CMB}}$,

CMBはCMBに関する要素をと取る：MLは最尤値を表す（ピクセル、調和空間、ウェーブレット空間で評価可能）

周波数チャンネルの数が、きれいになったCMBマップを解くのにちょうど良い数である時



\boldsymbol{D} は逆行列をもち、 $\text{CMB}^{\text{ML}} = [\boldsymbol{D}^{-1} \vec{m}]_{\text{CMB}}$ が得られる。

(ex1)空間的に一様な冪乗成分を前景とする 内部テンプレート法

2つの周波数のマップから、クリーンなCMBマップを求める

解 $\text{CMB}^{\text{ML}}(\hat{n}) = \frac{g_{\nu_2} D_{\nu_2} m_{\nu_1}(\hat{n}) - g_{\nu_1} D_{\nu_1} m_{\nu_2}(\hat{n})}{g_{\nu_2} D_{\nu_2} - g_{\nu_1} D_{\nu_1}}$, * $D_{\nu} = (\nu/\nu_*)^{\bar{\beta}}$

(ex1)空間的に変化する冪乗成分を前景とする

2つの周波数のマップから、クリーンなCMBマップを求める

解 $\text{CMB}^{\text{ML}}(\hat{n}) = \frac{\xi_{12} m_{\nu_3}(\hat{n}) + \xi_{31} m_{\nu_2}(\hat{n}) - \xi_{23} m_{\nu_1}(\hat{n})}{\xi_{12} + \xi_{31} - \xi_{23}}$,

テンプレートマップでCMBを除去すべきか？

パラメータの事後分布

リアルな前景マップによる検証：

Sky model：

偏光CMB、シンクロトロン、熱ダスト放射の3つの要素から構成される空を考える

シンクロトロン：“SynchrtronPol-commander 0256 R2.00” at 30 GHz

このマップを他の周波数に外挿し、空間的に変化するスペクトル指数を冪乗放射と仮定する。

空間的な変化：WMAP 23 GHz and Haslam 408 MHz maps.

ダスト：“DustPol-commander 1024 R2.00” at 353 GHz

1成分型、2成分型のMBBダストの二つの可能性を検討
後者はより複雑なスカイモデルに対するデルタマップ法の影響のされにくさを検証するためのもの



1成分によってデルタマップ法を構築し、2成分に適応する

他の周波数への外挿は、1成分または2成分のMBBで行われる
1成分MBB：(21)式

$$D_{\nu}(p^I(\hat{n})) = D_{\nu}(\beta_d(\hat{n}), T_d(\hat{n})) = \left(\frac{\nu}{\nu_*}\right)^{\beta_d(\hat{n})+1} \frac{e^{x_{d*}(\hat{n})} - 1}{e^{x_d(\hat{n})} - 1},$$

2成分MBB：輝度温度の周波数依存性

$$F_{\nu} = a_1 \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^{\beta_1+1} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T_1(\hat{n})} - 1} + a_2 \left(\frac{\nu}{\nu_0}\right)^{\beta_2+1} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T_2(\hat{n})} - 1}, \Rightarrow D_{\nu} = F_{\nu}/F_{\nu_*}$$

結果：

1000個の実測値 ← デルタマップ法 (N_{side}) (40,60,140,230,280,340)GHz Case A
↓
rを推定 (40,60,140,230,340,400)GHz Case B

(* ノイズ無し、P06マスク使用)
 $\nu_{\text{CMB}} = 140 \text{ GHz}$ の結果を本論文では使用。(他の周波数も可)
 $r = [0, 1], \beta_s = [-4.0, -2.0], \beta_d = [1.0, 2.0], T_d = [5 \text{ K}, 40 \text{ K}]$
のパラメータの範囲で尤度を調べ、最も適合するパラメータを抽出する。

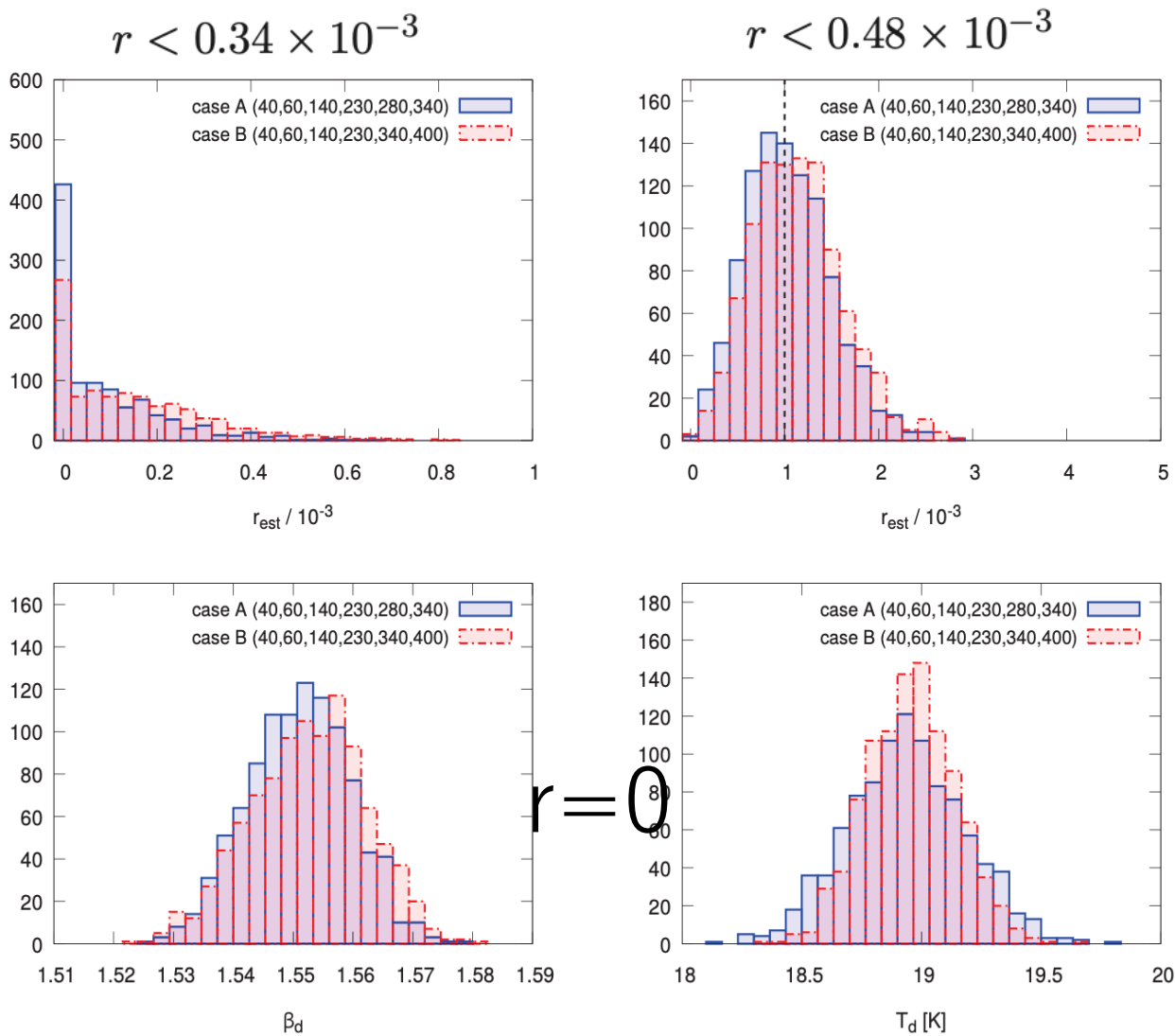
CMB + 幂乗シンクロトロン + 1成分MBB

r=0とr=10⁻³の2セット用意
(左) (右)

$\beta_s = [-4.0, -2.0], \beta_d = [1.0, 2.0], T_d = [5 \text{ K}, 40 \text{ K}]$

シミュレーションと仮定が1次まで一致したことを示す

P06マスクにおいて先行研究より良い結果



結果：

CMB+ベキ乗シンクロトロン+2成分MBB

$\nu_{\text{CMB}} = 140 \text{ GHz}$

CMBレンズと入力テンソルモードの分散

$r=0$ と $r=10^{-3}$ の2セット用意
(左) (右)

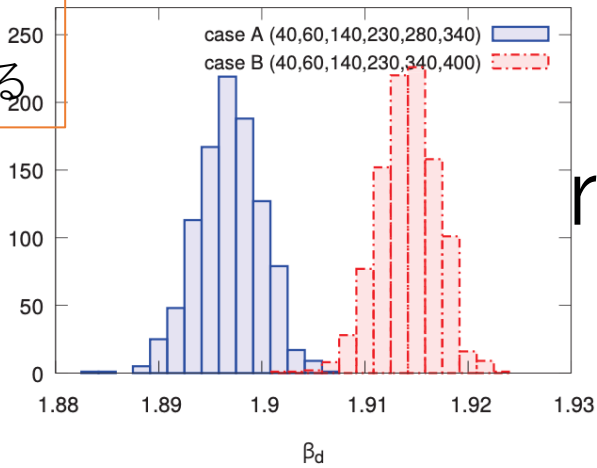
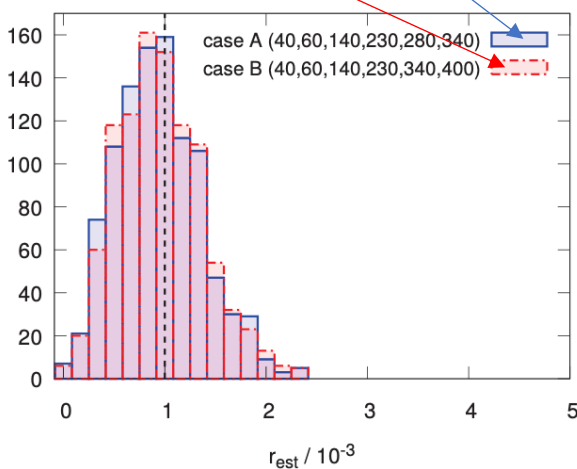
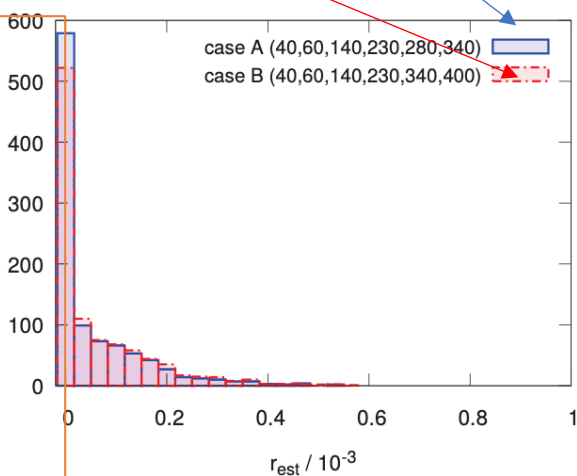
結果として
空間的に変動するスペクトルを持つ前景の時でも

rの入力を回復できた

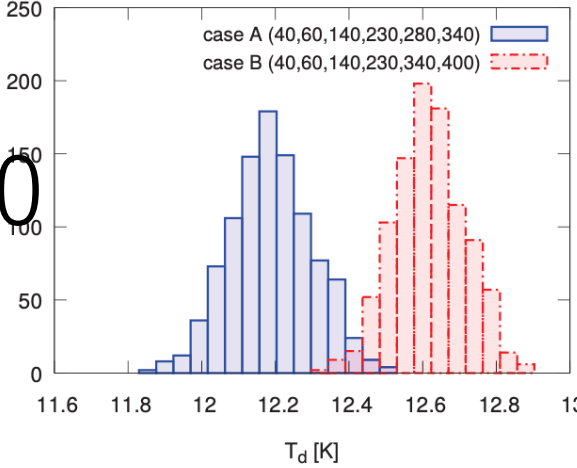
CMBチャンネルと前景チャンネルが近いほど不確かさが減る

$r < 0.26 \times 10^{-3}$
 $r < 0.31 \times 10^{-3} \text{ (95\%CL)}$

$r = (1.12 \pm 0.45) \times 10^{-3}$
 $r = (1.12 \pm 0.48) \times 10^{-3}$



r=0



Null test：デルタマップ法の正確さを計算

2つのマップをクリーニング（入力 $r = 10^{-3}$ ）

100GHzと140GHz

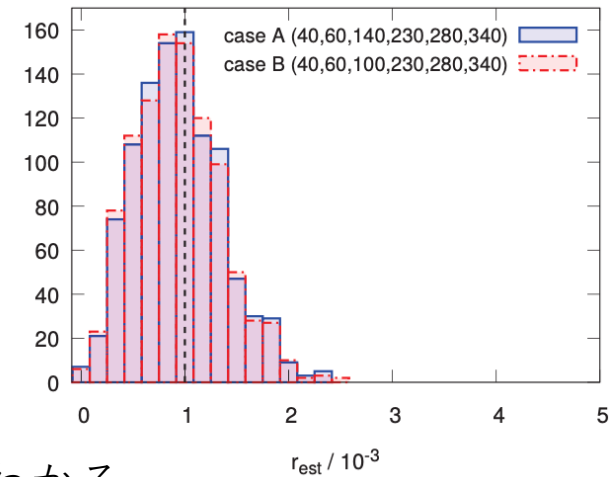
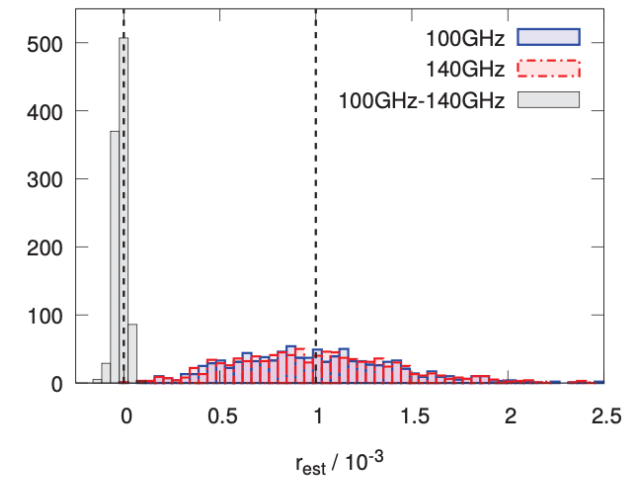
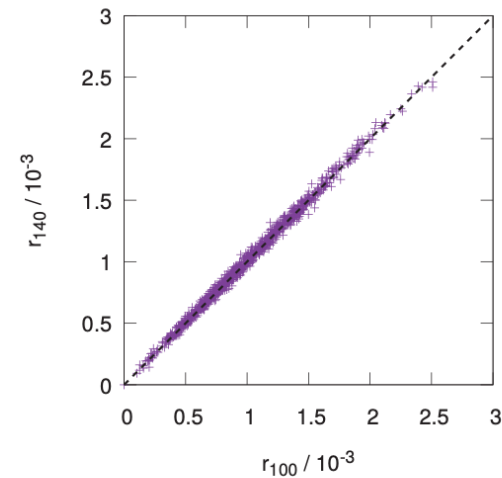
rを推定 ➡ 差を取る

周波数チャンネル(40, 60, 100, 140, 230, 280, 340) GHz

rの値相関あり、ほとんど一致

$r_{100} - r_{140} = (0.72 \pm 2.98) \times 10^5 (68\% \text{ CL})$

これらの差の小さな広がり、前景の残差であることがわかる



応用：

非相関効果（Decorrelation）：

内部テンプレート法 ある周波数での[Q,U]マップ



前景パラメータの関数として他の周波数での[Q,U]を予測するために使用できると仮定

異なる前景パラメータを持つ複数の成分の重ね合わせの場合には崩れる



Decorrelation

異なる β_d と T_d の値を持つ多数の小さなピクセルを含む大きなピクセルでマップをピクセル化（または粗視化）する場合も

Decorrelationへの対処：

ダストを例に考える：他の前景にも置き換え可能

視線に沿って、または大きな画素の中に複数のダスト成分がある


各成分 i 、温度 T_i 、偏光方向 γ_i 、変更してない強度 I_d 、偏光率 Π_i

空の方向ベクトル \hat{n} 省略、

$$Q_\nu = \sum_i Q_{\nu,i} = g_\nu \sum_i I_{d,\nu}(T_{d,i}) \Pi_i \cos(2\gamma_i),$$
$$U_\nu = \sum_i U_{\nu,i} = g_\nu \sum_i I_{d,\nu}(T_{d,i}) \Pi_i \sin(2\gamma_i),$$

まずQについて $T_{d,i} = \bar{T}_d (1 + \delta_i)$, と書くと

$$Q_\nu = g_\nu I_{d,\nu}(\bar{T}_d) \sum_i \left(1 + \frac{x_d e^{x_d} \delta_i}{e^{x_d} - 1} + \dots \right) \Pi_i \cos(2\gamma_i),$$

$$A \equiv \sum_i \Pi_i \cos(2\gamma_i),$$


$$x_d \equiv h\nu / (k_B \bar{T}_d).$$

$$Q_\nu = g_\nu I_{d,\nu}(\bar{T}_d) A \left[1 + \frac{x_d e^{x_d}}{e^{x_d} - 1} \frac{\sum_i \delta_i \Pi_i \cos(2\gamma_i)}{\sum_i \Pi_i \cos(2\gamma_i)} + \dots \right].$$


ダスト温度揺らぎ変数を定義

$$\delta_Q \equiv \frac{\sum_i \delta_i \Pi_i \cos(2\gamma_i)}{\sum_i \Pi_i \cos(2\gamma_i)},$$

δ_i , の一次まで展開

$$\begin{aligned} Q_\nu &= g_\nu I_{d,\nu}(T_Q) A, \\ U_\nu &= g_\nu I_{d,\nu}(T_U) B, \end{aligned}$$

$$\delta_U \equiv \frac{\sum_i \delta_i \Pi_i \sin(2\gamma_i)}{\sum_i \Pi_i \sin(2\gamma_i)}.$$


$$\begin{aligned} Q_\nu &= g_\nu I_{d,\nu}(T_Q) \Pi \cos(2\gamma), \\ U_\nu &= g_\nu I_{d,\nu}(T_U) \Pi \sin(2\gamma). \end{aligned}$$


温度摂動の1次
QとUはわずかに異なるダスト温度を持つかのような振る舞いをする

観測される変更方向 γ_{obs} は γ と異なる

偏光方向

$$2\gamma_{\text{obs}} = \tan^{-1} \left[\frac{U(\nu)}{Q(\nu)} \right] = \tan^{-1} \left[\frac{I_{d,\nu}(T_U)}{I_{d,\nu}(T_Q)} \tan(2\gamma) \right] .$$

偏光方向の周波数依存性 $\gamma_{\text{obs}} = \gamma_{\text{obs}}(\nu)$.  周波数Decorrelationの原因

QとUにわずかに異なる値を用いることで
他の前景パラメータ (β_d , β_s , C_s など) の変動を考慮することができる。

Decorrelationと2成分MBBダスト：

熱ダストの温度QとUの T_2 を以下のように摂動させる

$$T_2^Q(\hat{n}) \equiv T_2(\hat{n}) + \epsilon_Q \sigma_T ,$$

$$T_2^U(\hat{n}) \equiv T_2(\hat{n}) + \epsilon_U \sigma_T ,$$

353GHzのプランクダストの偏光マップを
輝度温度単位で他の周波数に外挿する。

$$Q_\nu(\hat{n}) = g_\nu \frac{I_{d,\nu}(T_2^Q(\hat{n}))}{I_{d,353}(T_2(\hat{n}))} Q_{353}^f(\hat{n}) ,$$

$$U_\nu(\hat{n}) = g_\nu \frac{I_{d,\nu}(T_2^U(\hat{n}))}{I_{d,353}(T_2(\hat{n}))} U_{353}^f(\hat{n}) ,$$

T_1^Q and T_1^U T_2^Q and T_2^U の関係は論文の(64)式

$I_\nu(T_2(\hat{n}))$ は2成分モデルにおける周波数スペクトル

平均温度 \bar{T}_d から \bar{T}_2^U, \bar{T}_2^Q の二つに増やす ← デルタマップ適応



Decorrelationがrに与える影響を確認。

結果:

β_d のベストフィット値をシフトさせている

r に関しては、影響なし

デルタマップ法



前景パラメータに起因する周波数Decorrelation
を摂動1次まで一貫して扱うことができる

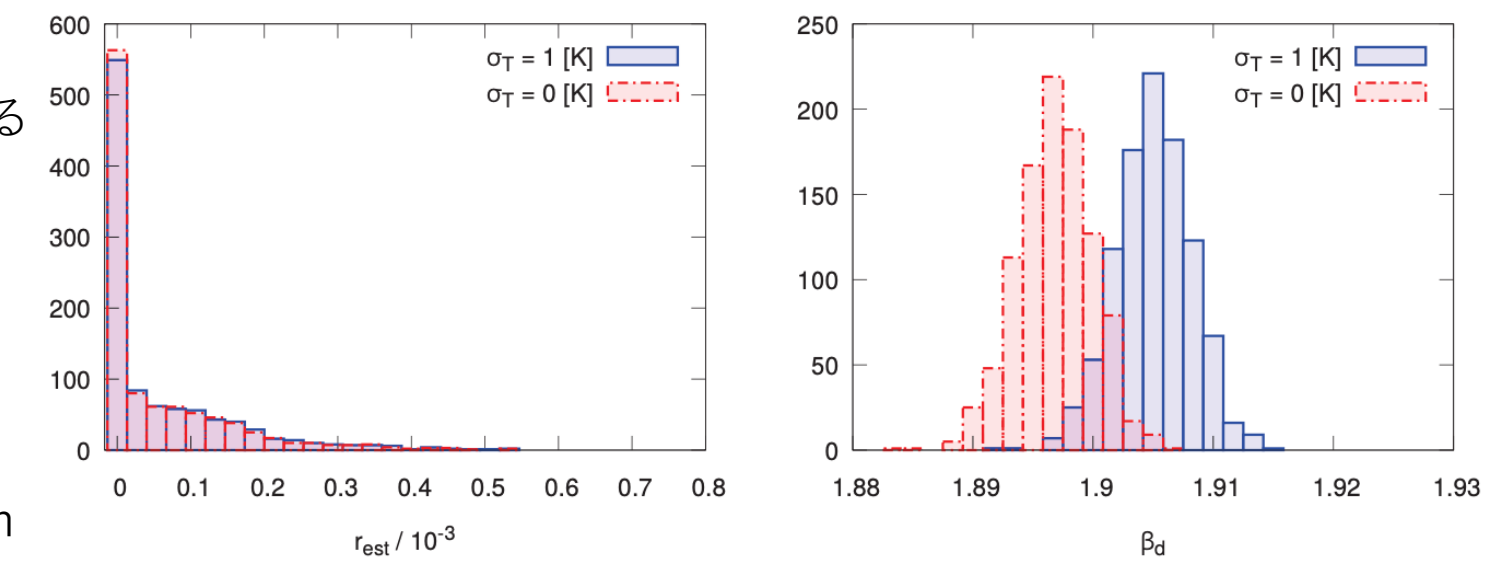


Fig. 5 Distribution of r and $\bar{\beta}_d$ obtained from 1000 random realizations of the CMB with (purple) and without (green) decorrelation of dust polarization in the simulation. The Delta-map method assumes that there is no decorrelation. We used (40,60,230,280,340) GHz channels to clean 140 GHz channel. The simulation also includes power-law synchrotron and two-component MBB dust.

Table 1 Mean and variance of the reconstructed sky-averaged foreground parameters

dust model ($r = 0$)	$\bar{\beta}_s$	$\bar{\beta}_d$	\bar{T}_d
one-component (case A)	-2.920 ± 0.020	1.5523 ± 0.009	18.97 ± 0.24
one-component (case B)	-2.906 ± 0.024	1.5540 ± 0.010	18.99 ± 0.19
two-component (case A)	-2.940 ± 0.026	1.8977 ± 0.003	12.21 ± 0.11
two-component (case B)	-2.934 ± 0.029	1.9150 ± 0.003	12.64 ± 0.10
two-component (case A with $\sigma_T = 1$ [K])	-2.939 ± 0.026	1.9059 ± 0.003	12.06 ± 0.11

結果:

β_d のベストフィット値をシフトさせている

r に関しては、影響なし

デルタマップ法



前景パラメータに起因する周波数Decorrelation
を摂動1次まで一貫して扱うことができる

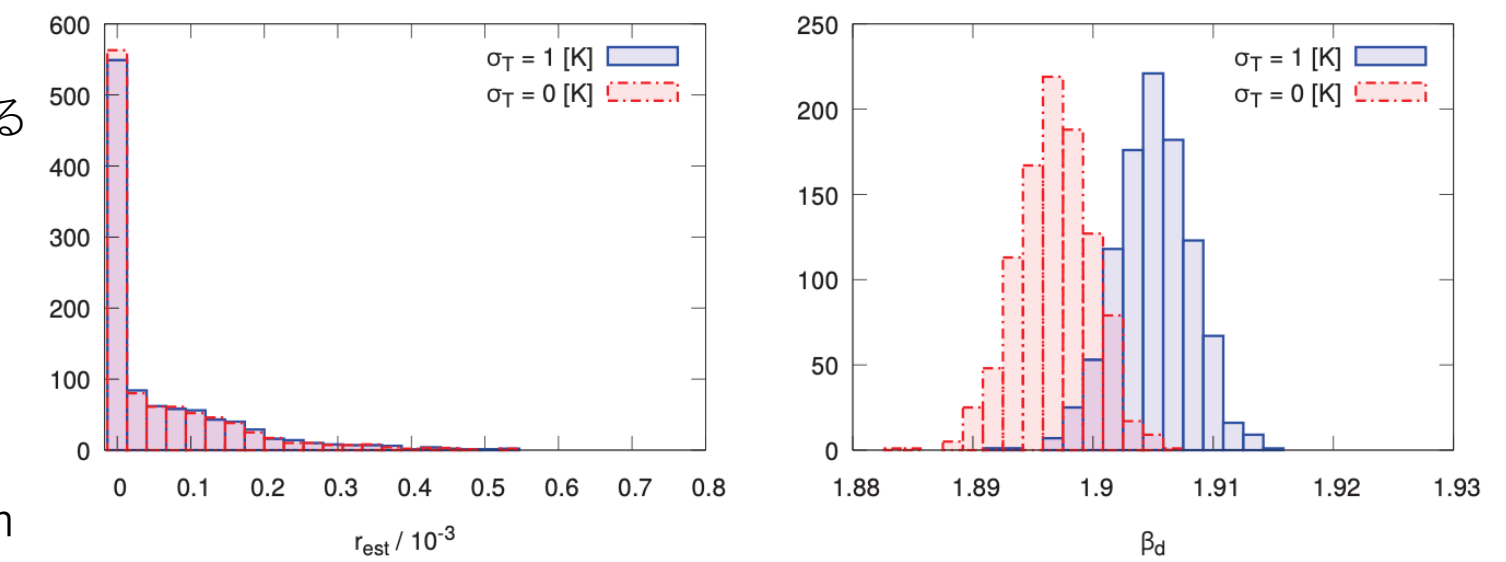



Fig. 5 Distribution of r and $\bar{\beta}_d$ obtained from 1000 random realizations of the CMB with (purple) and without (green) decorrelation of dust polarization in the simulation. The Delta-map method assumes that there is no decorrelation. We used (40,60,230,280,340) GHz channels to clean 140 GHz channel. The simulation also includes power-law synchrotron and two-component MBB dust.

Table 1 Mean and variance of the reconstructed sky-averaged foreground parameters

dust model ($r = 0$)	$\bar{\beta}_s$	$\bar{\beta}_d$	\bar{T}_d
one-component (case A)	-2.920 ± 0.020	1.5523 ± 0.009	18.97 ± 0.24
one-component (case B)	-2.906 ± 0.024	1.5540 ± 0.010	18.99 ± 0.19
two-component (case A)	-2.940 ± 0.026	1.8977 ± 0.003	12.21 ± 0.11
two-component (case B)	-2.934 ± 0.029	1.9150 ± 0.003	12.64 ± 0.10
two-component (case A with $\sigma_T = 1$ [K])	-2.939 ± 0.026	1.9059 ± 0.003	12.06 ± 0.11

AME:まだ変更特性が知られていないが偏光成分として存在する可能性あり

AMEのみでは寄与がほぼなし  シンクロトロン+AME で r の推定に間接的に影響を与える


間接的な影響をシンクロトロン曲率パラメータ C_s に吸収させる

CMB+冪乗シンクロトロン+1成分MBBダスト+AME

使用周波数(40, 60, 140, 230, 280, 340) GHz

AMEは最適なシンクロトロンを変化させることで r に影響を与える

シンクロトロンスペクトルに曲率を加えデルタマップ法を実装

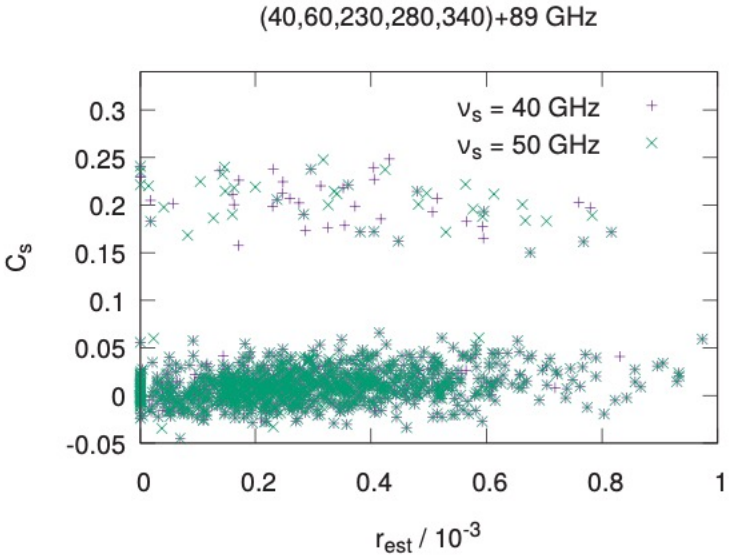
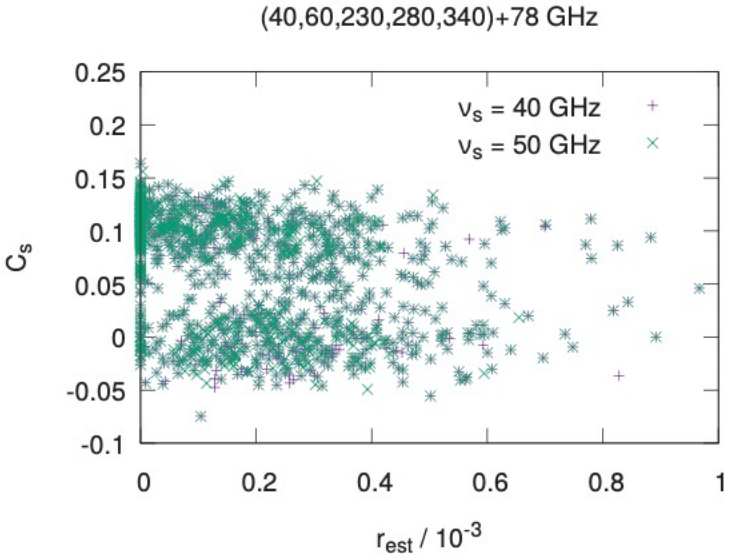
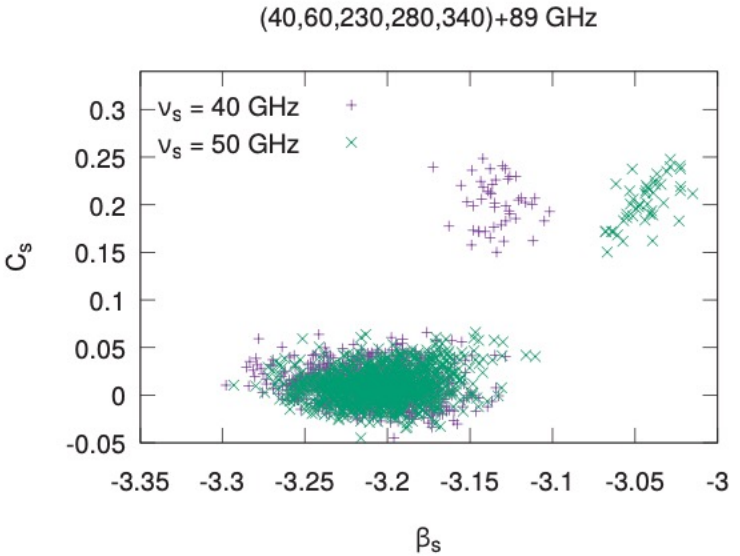
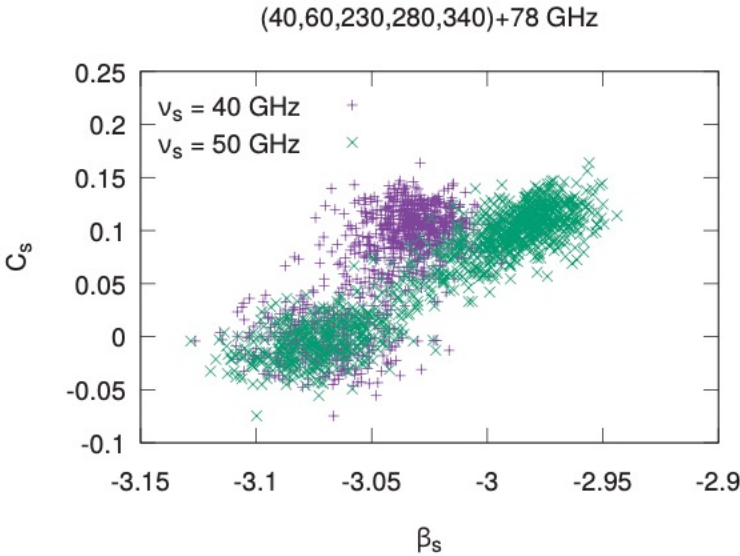
pivot scale $\nu_s = 40\text{GHz}$ と 50GHz の二つを試す

ν_s は
CMBクリーニングではキャンセル

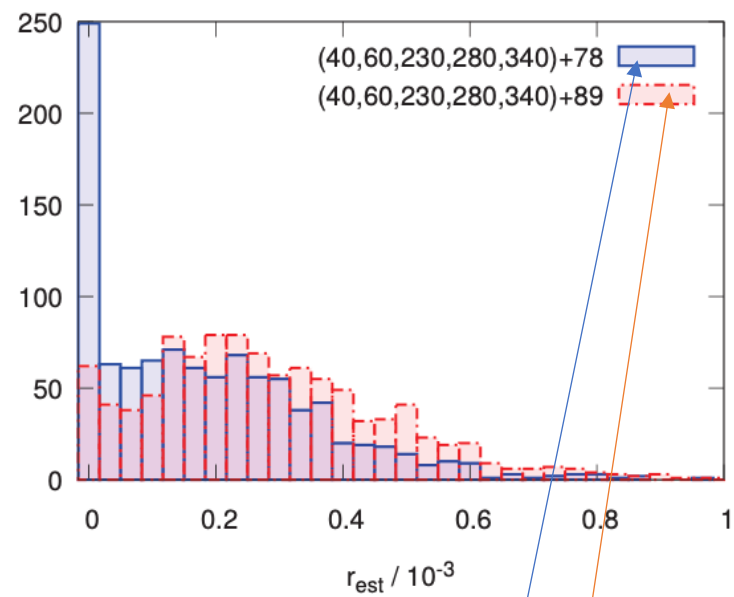
シンクロトロンパラメータの意味を変える

CMB+AME+ベキ乗シンクロトロン+1成分MBBダスト放射（上の段）

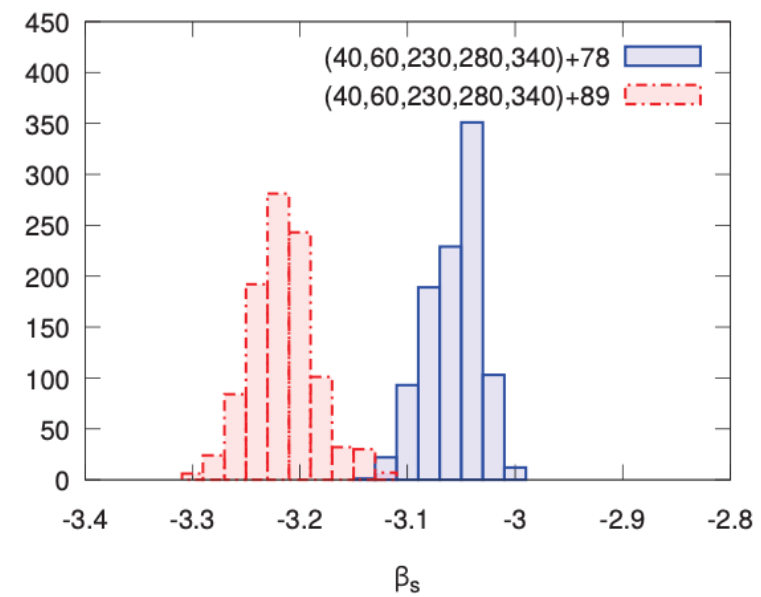
rとCsの相関なし



rの推定にほとんど変化はなく
78GHzを追加した方が若干良い結果を示す



$r < 5.2 \times 10^{-4}$
 $r < 6.4 \times 10^{-4}$ (95% CL)



機器ノイズ：

前景放射助子において、CMB信号の一部も除去してしまう



デルタマップ法を適用した後、クリーニングマップのノイズ比が大きくなる

角周波数チャンネルのノイズレベルを指定すれば、クリーンなCMBマップのノイズレベルを容易に推定できる

ノイズの共分散行列

$$\mathbf{n}^{\nu_{\text{CMB}}, \text{cleaned}} = \left(\mathbf{N}_{\nu_{\text{CMB}}} + \sum_{j=1}^5 \alpha_j^2 \mathbf{N}_{\nu_j} \right) / \left(1 + \sum_{j=1}^5 \alpha_j \right)^2,$$

残りの問題

Delta-map法の性能



導き出された r の不確かさが文献にある他の前景クリーニング法の性能と比較してどうなのか？

想定する前景モデルのパラメータ数によって制限されているので、周波数マップを増やすことによる感度上昇が見込めない



拡張デルタマップに続く