

内部線形結合方(ILC)

の発展(ラグランジュ未定乗数法)とWILC(WMAP)との比較

前景放射除去に対する観測

マルチ周波数観測

CMB：すべての周波数に対して同じ寄与をもつ




前景放射：強い周波数依存あり

WMAPチームの前景・除去・制約の異なる3つの方法

①ILCMAPの生成：

5つの周波数マップに対して重みを作用し、分散が最小となるような重みを決定する

(22.8, 33.0, 40.7, 60.8, 93.5 GHz) \rightarrow (K, Ka, Q, V, W)

前景スペクトルの変動の考慮  宇宙を12分割  最小分散基準  重み決定

(空間の不連続性により境界の平坦化が必要)

利点：前景のモデルと検出器ノイズは仮定なし

②最大エントロピー法（MEM）：

前景モデルを成分ごとに構築

利点：シンクロtron放射、フリーフリー放射、ダスト放射をピクセルごとに周波数依存とともに再構築

ILCのような方法  前景がCMBに漏れ込む  複雑なノイズ性質  宇宙論的な解析には向いていない

③テンプレート法：

様々な物理成分の外部テンプレートを用いる（特定の成分が支配する周波数で行われたCMB以外の観測によって作られたマップ）

この論文の目的 : ILC法の重みをラグランジュ未定乗数法によって求め (LILC法)、ILC法を検証する

LILC法 :


異なる周波数で観測された k 個のマッパ(ビーム同一)は以下のように表される

$$T(\nu_k) = T_{\text{CMB}} + T_{\text{residual}}(\nu_k) \quad (\text{熱力学温度})$$

$$T = \sum_{i=1}^k w_i T(\nu_i), \quad \text{誓約条件} \quad \sum_{i=1}^k w_i = 1,$$

誓約条件とマッパの式より

$$T = T_{\text{CMB}} + \sum_{i=1}^k w_i T_{\text{residual}}(\nu_i).$$

CMB信号は周波数に対して一定、 $k-1$ 個の重みは残差の影響を最小にする。  T の分散を考える。

かつCMBがフォアグラウンドと検出器ノイズから独立と仮定

$$\text{Var}(T) = \text{Var}(T_{\text{CMB}}) + \text{Var}\left(\sum_{i=1}^k w_i T_{\text{residual}}(\nu_i)\right).$$

ラグランジュ未定乗数法により、重みを求める方程式は

$$\begin{bmatrix} 2\mathbf{C} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{1}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad w_i = \frac{\sum_{j=1}^k C_{ij}^{-1}}{\sum_{jk} C_{jk}^{-1}}.$$


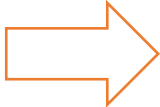
λ : 任意の定数

$w = (w_1, \dots, w_k)^T$: 重み

マップ間の共分散行列

$$C_{ij} \equiv \langle \Delta T_i \Delta T_j \rangle = \frac{1}{N_{\text{pix}}} \sum_{p=1}^{N_{\text{pix}}} (T^i(p) - \bar{T}^i)(T^j(p) - \bar{T}^j)$$

前景のスペクトル

前景の空間変動  空の領域を不連続なパッチに分割  各領域に対して独立した重み
(各パッチのマスク (0 と 1 から成る))

温度の分散の最小化を各領域で行い、個々のパッチから全天マップを構築

WMAPの領域の分け方

ILCMAPの検証

モンテカルロシミュレーション：

観測データと類似した特性を持つ k 個の基本周波数マップを作成



ILCパイプラインを通過させる

シミュレーション手順：

1. パワースペクトルに基づいて、各実現に対して1つのCMB成分をシミュレート
2. チャンネル固有の前景テンプレート追加
3. チャンネル固有のノイズを追加
4. 各チャンネルのビームをディコンボリューションし、 1° FWHMのガウスビームで共通の分解能で畳み込み
5. 角周波数の平均マップを作成
6. ILCパイプラインを適用



1000回のモンテカルロシミュレーション

前景除去の正確さの定量化：一定かつ既知のレベルの前景放射を含むシミュレーションを使用し、ILCを用いて各シミュレーションのCMBの推定値を求める



入力CMBとCMB推定値比較

比較1： 全天重み

前景 + CMB (全天検出器ノイズレスの理想ケース)



1000回シミュレーション

ILC法は非常に効率よく前景を取り除けている

比較2： 全天重み

前景 + CMB + 検出器ノイズ (ガウス性の周波数依存)

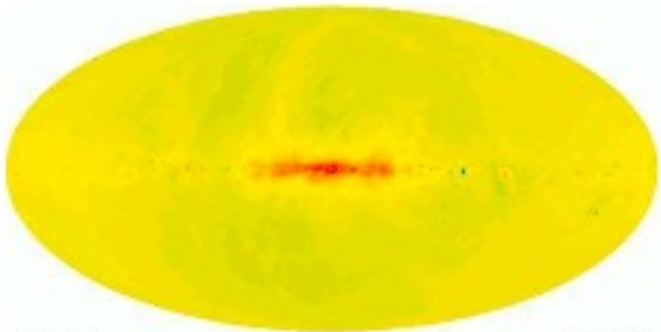
検出器ノイズの効果が銀河面と北銀河に見られる

原因：ILC法の定義、全体の分散を最小にする

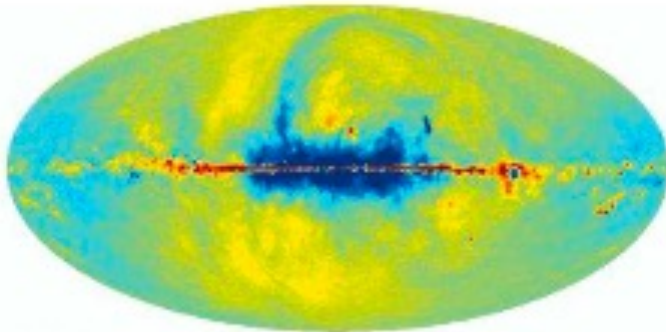


前景と機器ノイズがトレードオフ状態

(p4)
入力と出力の平均残差マップ



a) Average; full sky, noiseless



b) Average; full sky, noisy

比較3： 領域を領域1 2分割、WMAPと同様の場合

前景 + CMB + 検出器ノイズ（ガウス性の周波数依存）

全体として全天の場合と似ている

違い：（12分割視点）

- 銀河平面内において振幅が小さくなっている
- その周りの青いハローも鮮明でない
- フリーフリーが現れている
- スキャンパターンが高緯度で現れている

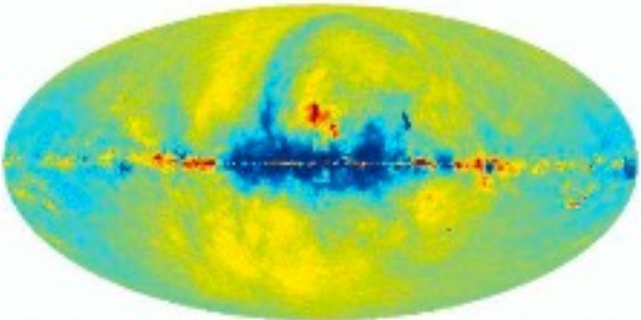
高緯度におけるILC法

重要度 機器ノイズ > 前景



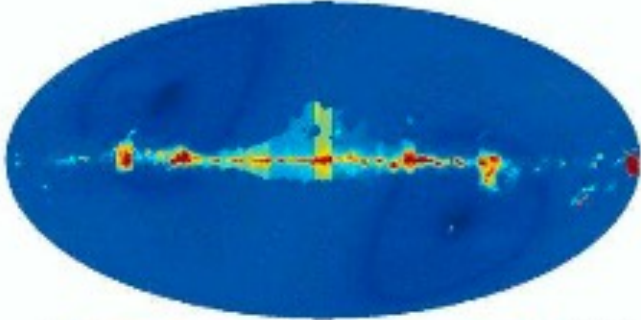
北銀河スパーを抑制するよりノイズを最小化

残差マップ（12分割）



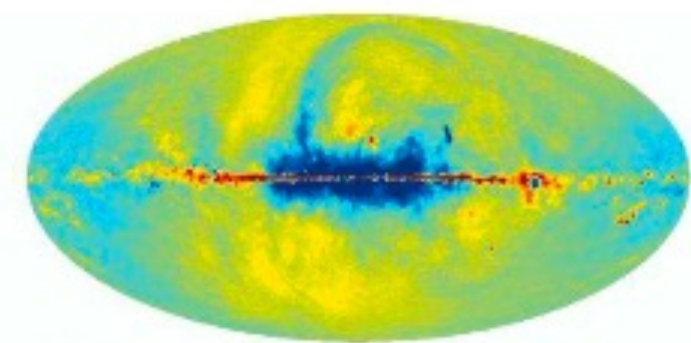
c) Average; 12 regions, noisy

標準偏差



d) Standard deviation; 12 regions, noisy

残差マップ（全天）



b) Average; full sky, noisy

前景除去の効率：

重要な各前景について、スペクトル指数を仮定

ILCマップに残る前景レベルを推定

残留前景放射の寄与

$$T_{\text{residual}} = \left[\sum_{i=1}^k w_i \left(\frac{\nu_i}{\nu_0} \right)^\beta a(\nu_i) \right] S_0 = f \cdot S_0,$$

- ν_0 ：前景の任意の周波数
 S_0 ：その周波数での真の前景分布
 β ：スペクトル指数
 T ：アンテナ温度
 $a(\nu)$ ：アンテナ温度から熱力学温度への変換係数
 f ：選択された基本周波数に対する残留前傾放射の割合

CMB信号のノイズ比

$$\sigma_{\text{noise}}^2 = \sum_{i=1}^k w_i^2 \sigma_{\text{noise},i}^2,$$


モンテカルロシミュレーションにこれらのパラメータを計算  ILC法の効率の定量化

表1：5つの異なる高緯度領域について以下の値を計算
(f_s ：シンクロトロン f_{ff} ：フリーフリー f_d ：ダスト)

表 1 結論

- 1. 特定のスカイカットに関係なく、シンクロトロン放射に対して良い結果
- 2. 解析に含まれる領域が増えるほど、フリフリーに対して良い結果



(フリーフリーの情報は銀河面に近い領域にある)

- 3. ダストに関してはパフォーマンスが悪い
- 4. 銀河面をより多く除外するとノイズ比増加



ノイズと前景の除去の競合の現れ
前景が少なく成ると相対的にノイズが増加

TABLE 1
EFFICIENCY AS A FUNCTION OF REGION

Region	f_s	f_{ff}	f_d	$\frac{\sigma_{\text{CMB}}}{\sigma_{\text{noise}}}$
Full Kp0 region	0.02 ± 0.06	0.20 ± 0.13	0.54 ± 0.06	6.2 ± 0.5
Full Kp2 region	-0.01 ± 0.04	0.15 ± 0.09	0.54 ± 0.06	6.0 ± 0.4
Full Kp4 region	-0.01 ± 0.03	0.14 ± 0.07	0.55 ± 0.07	5.9 ± 0.3
WMAP ILC Kp2	-0.04 ± 0.01	0.08 ± 0.03	0.55 ± 0.06	5.6 ± 0.2
Full sky	-0.03 ± 0.01	0.10 ± 0.02	0.46 ± 0.03	5.2 ± 0.2

NOTE. — The residual foreground levels and signal-to-noise ratios as a function of region size. f_s – synchrotron fraction relative to the canonical contribution at 22.8 GHz; f_{ff} – the free-free fraction relative to 33.0 GHz; f_d – the dust fraction relative to 93.5 GHz. The numbers are computed from sets of 1000 Monte Carlo simulations.

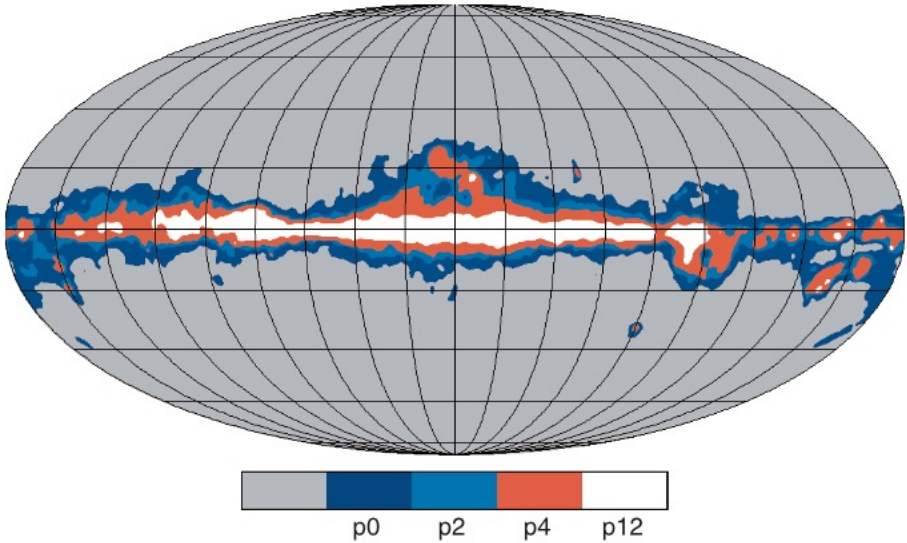


FIG. 2.—Full-sky map of selected WMAP standard masks. The masking is based on the K-band signal levels, as discussed in § 2. The series of masks allows for a choice of cut severity. (Each successive mask includes the previous regions; e.g., the p4 mask includes all of the pixels in the p12 mask.)

表2：各周波数ごとのILCの重み、LILC（本論文）とWILC(WMAPチームのもの)

右下の図：WMAPとLILCの残差マップ

違い
銀河部中心の青い領域 ➡ 大規模な前景構造の除去能力が異なる
残留の小規模な構造 ➡ 異なるノイズ特性を示している
↓
二つの手法が異なることを示す

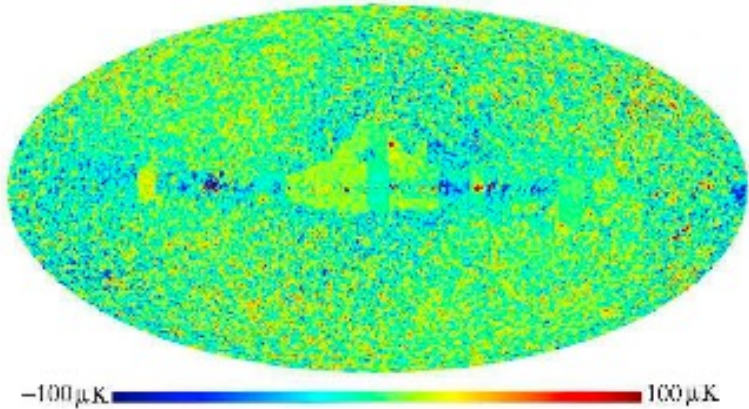


TABLE 2
THE WILC AND LILC WEIGHTS

Region	Map	K-band	Ka-band	Q-band	V-band	W-band
1	WILC	0.10876	-0.68367	-0.09579	1.92141	-0.25072
	LILC	-0.19401	0.14004	0.07702	0.61214	0.36480
2	WILC	0.10818	-0.67987	-0.09017	1.96859	-0.30674
	LILC	-0.06280	-0.14738	-0.13982	1.31073	0.03927
3	WILC	-0.04074	-0.28682	0.08476	1.16221	0.08061
	LILC	-0.11470	0.15098	-0.38520	1.16396	0.18496
4	WILC	-0.01847	-0.25533	-0.02607	0.83919	0.46068
	LILC	-0.05654	-0.01464	-0.31223	0.93407	0.44934
5	WILC	0.18610	-0.77416	-0.32352	2.33978	-0.42820
	LILC	0.20099	-0.86252	-0.27825	2.39309	-0.45330
6	WILC	-0.02158	-0.21880	-0.08224	0.84851	0.47412
	LILC	-0.10223	0.21569	-0.51767	0.90277	0.50144
7	WILC	0.11790	-0.67740	-0.09117	1.94830	-0.29763
	LILC	-0.05637	-0.00015	-0.45602	1.46095	0.05159
8	WILC	0.12403	-0.67639	-0.09653	1.74992	-0.10103
	LILC	0.16494	-0.89662	0.07743	2.01377	-0.35952
9	WILC	0.10500	-0.68438	-0.09847	1.90588	-0.22803
	LILC	-0.04577	-0.27660	-0.02097	1.28849	0.05484
10	WILC	0.16911	-0.91455	-0.01204	2.64536	-0.88788
	LILC	0.19380	-1.16103	0.37899	2.26627	-0.67803
11	WILC	0.21951	-0.96567	-0.18077	2.38740	-0.46046
	LILC	0.22200	-1.03357	-0.09824	2.34490	-0.43509
12	WILC	0.11101	-0.67501	0.05268	1.59101	-0.07970
	LILC	-0.06397	-0.00907	-0.46855	1.92500	-0.38342

NOTE. — Comparison of the official WMAP ILC weights and the Lagrange multiplier weights as derived in this paper.

右上のマップ：WMAPとTCM(角度スケールを考慮した重みづけ)の残差マップ

- 全体的に小さなスケールの構造は見られない → 似たノイズ特性
- 残留前景放射に関しては大きなスケールで違いが見られる

WMAPの既知の天体と関連した点源が原因

ILC法では、作成したCMBマップにおいて点状の天体が残っている可能性

右下の図：WILC、LILC、TCMマップの全天パワースペクトルとランニングスペクトル指数のベストフィットのplot

1. LILCとTCMは $l \approx 200$ まで非常に良い制度で一致

小規模スケールではTCMの狭いWバンドビームの影響により異なる

2. WILCは $l \approx 30$ で他の2つのマップと異なる

異なるノイズ特性によるもの

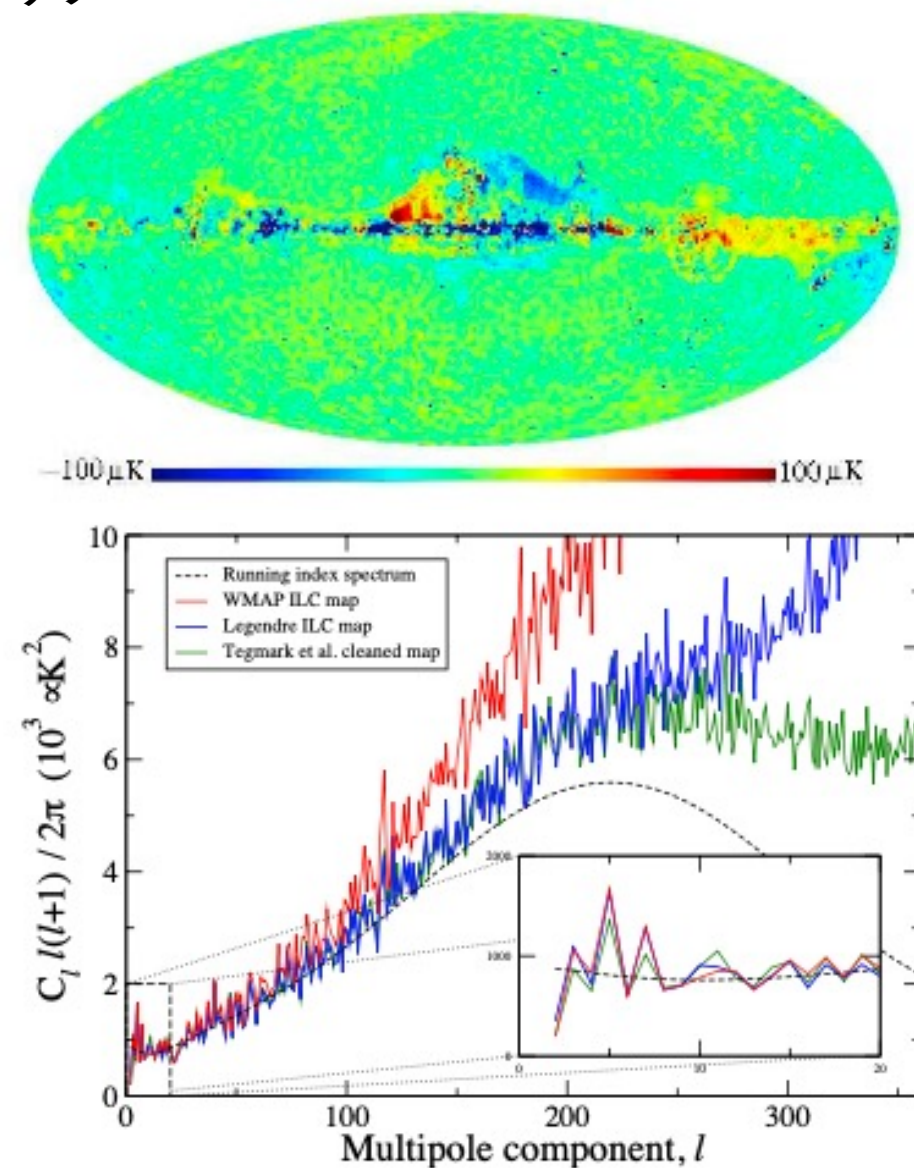


FIG. 4.— Comparison of the full sky power spectra of the WILC map (red), the LILC map (blue) and the TCM (green). Notice the excellent agreement between the two latter spectra up to $\ell \approx 200$, whereas the WILC spectrum departs from the other two already at $\ell \approx 50$.

観測結果によるLILCマップとモンテカルロシミュレーションによるLILCマップとの比較：

右の図：観測パワースペクトルとシミュレーションパワースペクトル
(上：全天、下：Kp0 mask)

幅は1000回のシミュレーションから計算された 1σ と 2σ の信頼区間

全天パワースペクトル



- $l \approx 100$ まで制度良く一致
- $l \geq 150$ から急に上昇

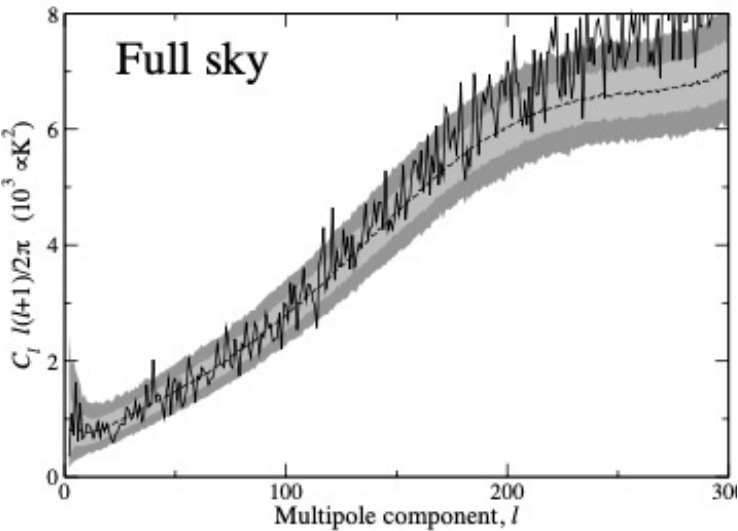
Kp0 maskパワースペクトル



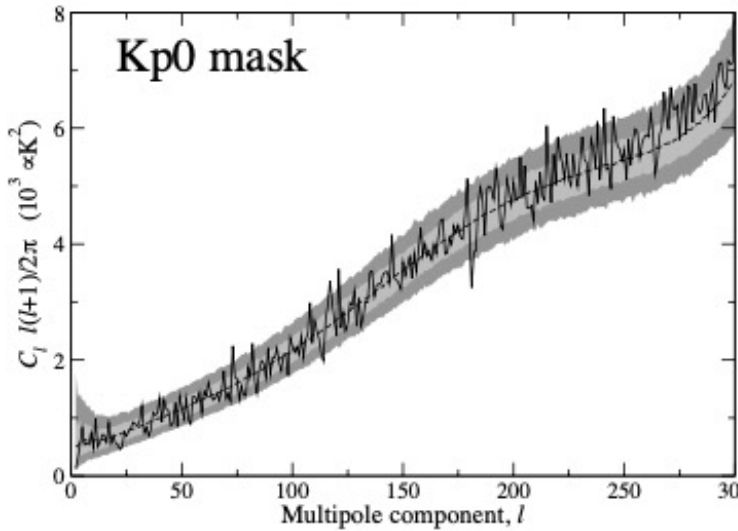
- $l \approx 200$ まで制度良く一致
- $l \approx 200$ 以降は高い方へ偏り



Kp0 領域では実際の空とほぼ一致、しかし銀河面の前景放射を過小評価



(a)



(b)

LILCの評価

LILCの定義：最小分散

LILCのrms $68\ \mu\text{K}$

WILCのrms $72\ \mu\text{K}$

LILCの分散がWILCに比べ12%低い



定義に従うとLILCの方が優れている



Kp0領域
シンクロトロン→フリーフリー→ダスト

しかし残留前景放射が小さいことを意味するわけではない

LILC $[-0.069, -0.011, 0.736]$

残留ダストに関してはLILCの方が多い

WILC $[-0.027, 0.017, 0.424]$



Wバンドに由来する残留前景放射

1/4分割と1/2分割の重み

ILC法の弱点：前景スペクトル指数の空間変動の考慮困難 ➡ 空を12分割

11個の領域はKp0銀河面内

↓
残りの空は一つの領域 ➡ 高緯度での銀河の非対称性を考慮 ➡ 高緯度の空をさらに分割

表3：1/4分割と1/2分割の重み計算結果

- 1/4分割のNW,NE,SWは内部で一致
- SEはQ,Vバンドで目立っている ➡ WMAPの非対称性を確認

↓
ノイズや前景の変化

非対称性を前景が説明する可能性あり

WMAPの高緯度を一つの領域として捉えることに疑問あり

TABLE 3
HEMISPHERE AND QUADRANT WEIGHTS

Region	K band	Ka band	Q band	V band	W band
Full Kp2 region	-0.19401	0.14004	0.07702	0.61214	0.36480
Northern hemisphere	-0.20611	0.14837	0.13262	0.55371	0.37140
Southern hemisphere	-0.18015	0.12169	0.03213	0.66930	0.35703
North-west quadrant	-0.19451	0.13659	0.09579	0.56725	0.39489
North-east quadrant	-0.24447	0.21397	0.20529	0.53331	0.29190
South-west quadrant	-0.19393	0.07268	0.26102	0.39229	0.46793
South-east quadrant	-0.16324	0.17738	-0.23334	1.01469	0.20451

NOTE. — Weights computed from Galactic hemispheres and quadrants outside the Kp2 mask.

大規模モードへの影響と安定性：LILCマップの非常に大きなスケールに対する影響を確認する

以下のような統計量を計算 and refer the interested reader to [de Oliveira-Costa et al. \(2004\)](#) for details on how each quantity actually is com-

1. 最適なWMAPスペクトルが与えられた場合の観測されたものより低い四重極を見つける確率
2. 四重極と八重極の強いアライメントを見つける確率
3. WMAPマップで見られるような平面多極子を見つける確率

表5：四重極モーメントの振幅

LILCマップ > 他のマップ



LILCの四重極はモデルに一番近いが、大きな不確定性を伴う

LILCがノイズの存在下で前景を完全に除去できていない



大規模モードに影響

TABLE 5
QUADRUPOLE AMPLITUDES

Measurement	$\delta T_2^2 (\mu K^2)$	p-value
Best-fit running index spectrum	869.7	
Hinshaw et al. cut sky	123.4	0.018
WMAP ILC map all sky	195.1	0.048
Tegmark et al.	201.6	0.051
Efstathiou – WILC map	223.0	0.063
Efstathiou – TCM map	250.0	0.080
Legendre ILC map	350.6	0.153
Legendre ILC map (quadrants)	345.1	0.149

NOTE. — Results from the measurements of the quadrupole amplitude. The third column lists the probability of finding a *lower* quadrupole than that of the corresponding map, given the theoretical model value shown in the first row.

図6：low lの振幅(モンテカルロの再構築の振幅と真の振幅)

値のばらつき



測定の不確かさ



ノイズや前景の残留は観測に影響大

残留ダストの少ないWLILCマップの四重極が低い



LILCの残留前景放射が四重極を大きくしている可能性

前傾放射の不確定性



低次のモードの誤差に影響

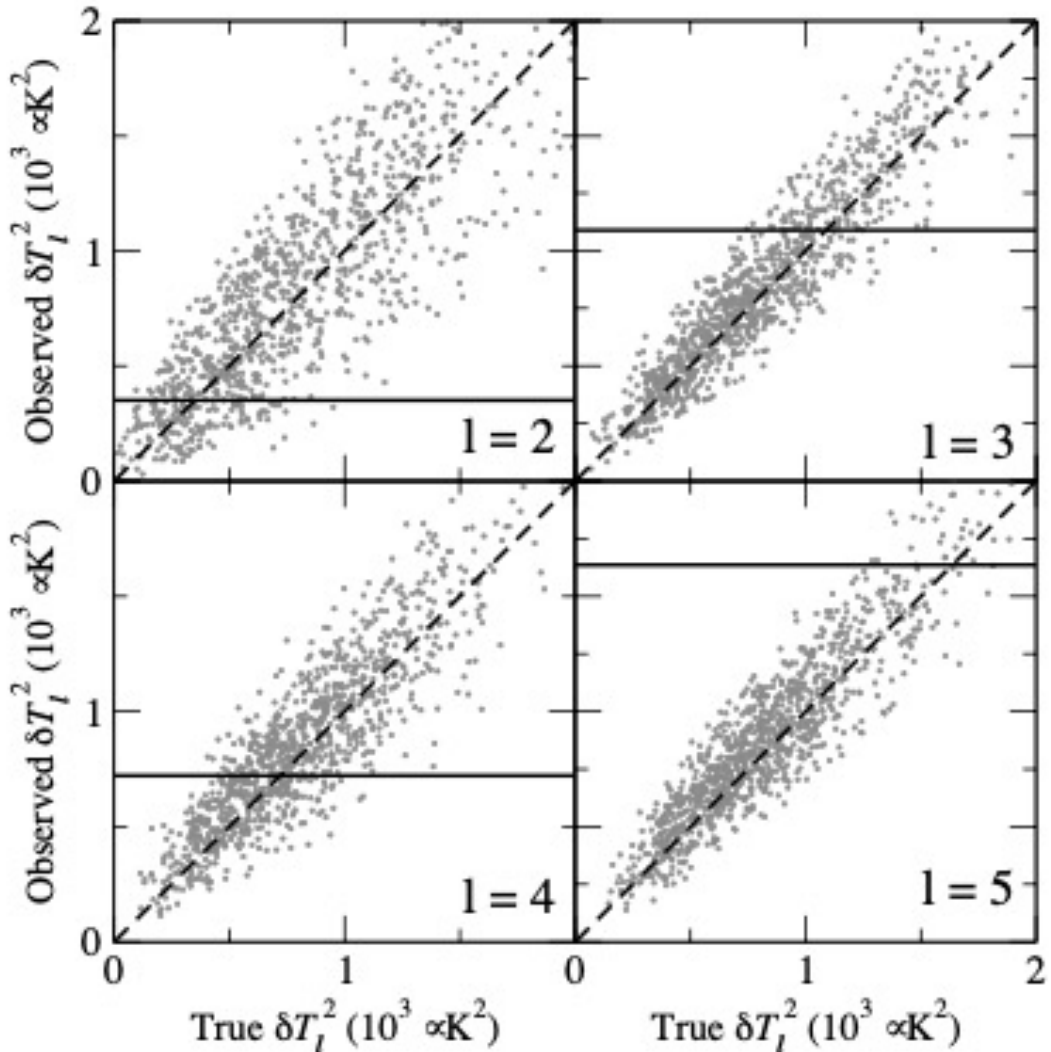


FIG. 6.— The observed multipole amplitude plotted against the true, foreground-free amplitude. The observed *WMAP* LILC value is marked by a horizontal solid line, while the diagonal line is meant to guide the eye only; in the case of perfect reconstruction, all dots would lie along this line. Note that there are generally more dots above the dashed line than below it, indicating that the ILC reconstructed spectra are slightly biased toward high values.

四重極と八重極のアライメント

右下の図：

青：シミュレーションの80%より小さい四重極の振幅

赤：シミュレーションの80%より大きい四重極の振幅



青の方がばらつきが大きいので
大きい四重極より、小さい四重極の方が影響を受けやすい

右上の表：四重極と八重極の好ましい方向の位置とより
四重極と八重極の間の弱いアライメントを発見する確率

LILCマップ他のマップより、四重極のアライメント強め



四重極のアライメントがダストによって駆動されているのでは？



アライメントと前傾放射の残留の相関は見つけれなかった

結果この測定に大きな分散があることだけが分かった

TABLE 6
ALIGNMENT OF THE QUADRUPOLE AND THE OCTOPOLE

Measurement	l_2	b_2	l_3	b_3	Angle	$ \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3 $
WMAP ILC map all sky	278°	69°	236°	63°	12°	0.955
Tegmark et al.	258°	59°	238°	62°	10°	0.984
Legendre ILC map	247°	62°	233°	63°	7°	0.993
Legendre ILC map (quadrants)	245°	61°	231°	63°	7°	0.992

NOTE. — Results from measurements of the position of the preferred directions of the quadrupole and octopole moments (denoted by Galactic longitude and latitude), and the alignment between these. The right-most column lists the probability of finding a weaker alignment between the quadrupole and octopole directions.

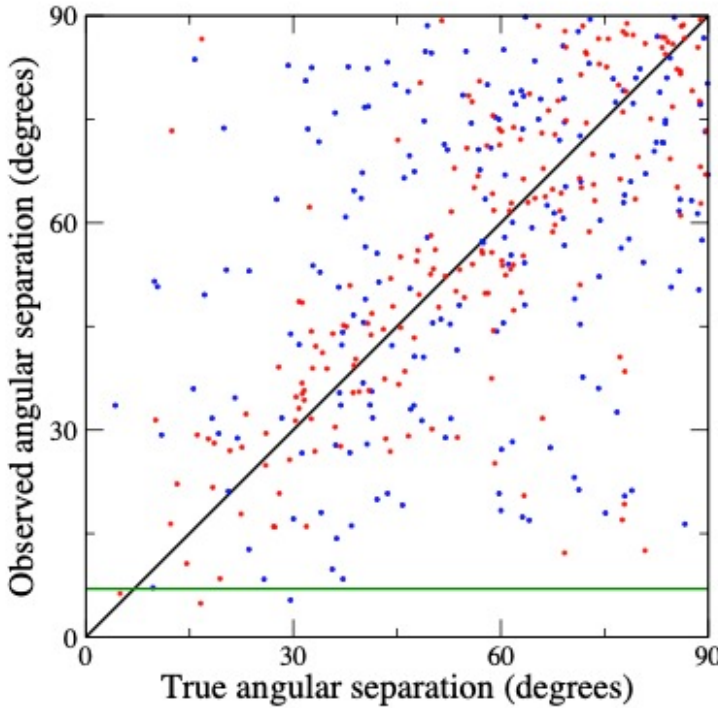


FIG. 7.— The observed angular separation between the preferred quadrupole direction, \mathbf{n}_2 , and the preferred octopole direction, \mathbf{n}_3 , plotted against the true, foreground-free separation. The color of each dot indicates the quadrupole amplitude of the given realization. For clarity we only plot those points which either lie in the 0–20% interval (blue squares) or in the 80–100% interval (red dots). The horizontal line indicates the quadrupole value for the LILC map.

結論：

- ILC法は外部テンプレートを用いずに比較的綺麗なCMBマップが得られる
- 高緯度の非対称性を考慮する必要がある可能性
- 四重極や八重極のような大きなスケールでは不確定性が大きいことからより精度の良い前傾放射除去法が必要
- LILC法において、最小分散が前傾除去の意味のある尺度であるかは疑問、機器ノイズと前景がトレードオフ