Extended デルタマップ法

目的：従来のデルタマップでは想定する前景モデルのパラメータ数によって制限されていたが、この拡張デルタマップ法では、より多くの周波数マップを使用できるように、ベイズ的な方法でパラメトリック尤度を構築することで改善する

デルタマップ法：

視線 $\hat{n}$ において、CMBの直線偏光を熱力学的温度で観測される直行するQ、Uで分解する。

$$\vec{s} = \left(Q(\hat{n}_1), \ldots, Q(\hat{n}_{N_{\rm pix}}), U(\hat{n}_1), \ldots, U(\hat{n}_{N_{\rm pix}})\right)^{\mathsf{T}},$$

CMB信号：

$$\vec{s}_{\rm CMB}(\nu) = \vec{s}_{\rm CMB}.$$

前景放射：空間変動N個のパラメータ. $\vec{p}^I\ (I = 1, 2, \cdots, N)$, 周波数空間で変化

$$\vec{s}_f(\nu) = g_\nu \mathbf{D}_\nu(\vec{p}^I)\vec{s}_b,$$

冪乗シンクロトロン $D^s_\nu(\beta_s(\hat{n})) = \left(\frac{\nu}{\nu_{s_*}}\right)^{\beta_s(\hat{n})},$

1成分ダストMBB $D^d_\nu(T_d(\hat{n}), \beta_d(\hat{n})) = \left(\frac{\nu}{\nu_{d_*}}\right)^{\beta_d(\hat{n})+1} \frac{e^{x_{d*}(\hat{n})} - 1}{e^{x_d(\hat{n})} - 1},$

輝度温度からCMB熱力学温度への変換

$$g_\nu \equiv \frac{(e^x - 1)^2}{e^x x^2} \text{ with } x \equiv \frac{h\nu}{k_B T_{\rm CMB}}.$$

β dスペクトル指数

$\boldsymbol{D}_\nu$は周波数依存性

Sb：輝度温度単位のピボット周波数における信号ベクトル

１次の摂動を考慮 $p^I(\hat{n}) = \bar{p}^I + \delta p^I(\hat{n}),$

前景放射：テイラー展開

$$g_\nu \mathbf{D}_\nu(\vec{p}^I)\vec{s}_b = g_\nu D_\nu(\bar{p}^I)\mathbf{I}\vec{s}_b + g_\nu \textstyle\sum_{I=1}^{N} D_{\nu,_{p^I}}(\bar{p}^I)\mathbf{I}(\delta\vec{p}^I \circ \vec{s}_b) + \mathcal{O}(\delta\vec{p}^{I^2}) \ ,$$

ダストとシンクロトロン

$$\begin{aligned} g_\nu \mathbf{D}_\nu(\vec{p}^I)\vec{s}_f &= g_\nu D^d_\nu(\bar{p}^I)\mathbf{I}\vec{s}_d + g_\nu \sum_{I=1}^{N_d} D^d_{\nu,_{p^I_d}}(\bar{p}^I)\mathbf{I}(\delta\vec{p}^I_d \circ \vec{s}_d) + \mathcal{O}(\delta\vec{p}^{I^2}_d) \\ &+ g_\nu D^s_\nu(\bar{p}^I)\mathbf{I}\vec{s}_s + g_\nu \sum_{I=1}^{N_s} D^s_{\nu,_{p^I_s}}(\bar{p}^I_s)\mathbf{I}(\delta\vec{p}^I_s \circ \vec{s}_s) + \mathcal{O}(\delta\vec{p}^{I^2}_s) \\ &= \tilde{\mathbf{D}}_\nu \vec{\tilde{s}}_f, \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{D}}_\nu = \begin{pmatrix} g_\nu D^d_\nu(\bar{p}^I_d)\mathbf{I} & g_\nu D^d_{\nu,_{p^1_d}}(\bar{p}^1_d)\mathbf{I} & \cdots & g_\nu D^d_{\nu,_{p^{N_d}_d}}(\bar{p}^{N_d}_d)\mathbf{I} & g_\nu D^s_\nu(\bar{p}^I_s)\mathbf{I} & g_\nu D^s_{\nu,_{p^1_s}}(\bar{p}^1_s)\mathbf{I} & \cdots & g_\nu D^s_{\nu,_{p^{N_s}_s}}(\bar{p}^{N_s}_s)\mathbf{I} \end{pmatrix}$$

前景放射信号ベクトル：

$$\vec{\tilde{s}}_f \equiv \begin{pmatrix} \vec{s}_d \\ \delta\vec{p}_d^1 \circ \vec{s}_d \\ \vdots \\ \delta\vec{p}_d^N \circ \vec{s}_d \\ \vec{s}_s \\ \delta\vec{p}_s^1 \circ \vec{s}_s \\ \vdots \\ \delta\vec{p}_s^N \circ \vec{s}_s \end{pmatrix}.$$

観測データ $\vec{m}(\nu) = \vec{s}_{\rm CMB} + \tilde{\mathbf{D}}_\nu \vec{\tilde{s}}_f + \vec{s}_N(\nu)$

デルタマップ法の弱点

N_ν個の周波数で空を観測

$$\vec{m} = \mathbf{D}^{\rm CMB}\vec{s}_{\rm CMB} + \tilde{\mathbf{D}}\vec{\tilde{s}}_f + \begin{pmatrix} \vec{s}_N(\nu_1) \\ \vdots \\ \vec{s}_N(\nu_{N_\nu}) \end{pmatrix},$$

$$\vec{m} \equiv \begin{pmatrix} \vec{m}(\nu_1) \\ \vdots \\ \vec{m}(\nu_{N_\nu}) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}^{\rm CMB} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \vdots \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \tilde{\mathbf{D}} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{D}}_{\nu_1} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{D}}_{\nu_{N_\nu}} \end{pmatrix}.$$

$$\vec{\alpha}^{\sf T} = (\alpha_{\nu_2}, \ldots, \alpha_{\nu_{N_\nu}})$$

の重みで前景除去

重みの式

$$[1, \vec{\alpha}^{\sf T}]\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{O}$$

この式を解くには$N_\nu = (N_d + 1) + (N_s + 1) + 1$
出なければならなく、 N_νをふやしても感度は上がらない

というか増やせない

クリーンマップ： $$\vec{m}_{\rm CMB} = \frac{\vec{m}_{\nu_{\rm CMB}} + \sum_{i=\nu_2}^{\nu_{N_\nu}} \alpha_i \vec{m}_{\nu_{\rm i}}}{1 + \sum_{i=\nu_2}^{\nu_{N_\nu}} \alpha_i},$$

尤度：

$$-2\ln\mathcal{L} = \vec{m}_{\rm CMB}^{\sf T}\mathbf{C}^{-1}\vec{m}_{\rm CMB} + \ln|2\pi\mathbf{C}|,$$

尤度を最小化することで各パラメータが決まる

共分散行列：

$$\mathbf{C} = r \times \mathbf{C}^{\rm tens} + \mathbf{C}^{\rm scal} + \frac{\mathbf{N}_{\nu_{\rm CMB}} + \sum_{i=\nu_2}^{\nu_{N_\nu}} \alpha_i^2 \mathbf{N}_{\nu_i}}{(1 + \sum_{i=\nu_2}^{\nu_{N_\nu}} \alpha_i)^2}.$$

拡張デルタマップ法：式(11)から始める。観測されたマップ$\vec{m}$からCMBと前景の項を差し引くことで、データの尤度を次のように構成することができる

$$\vec{m} = \mathbf{D}^{\mathrm{CMB}} \vec{s}_{\mathrm{CMB}} + \tilde{\mathbf{D}} \vec{\tilde{s}}_f + \begin{pmatrix} \vec{s}_N(\nu_1) \\ \vdots \\ \vec{s}_N(\nu_{N_\nu}) \end{pmatrix},$$

モデル・シミュレーション：

シンクロトロン：power-law synchrotron model, ”s1”,

ダスト：one-component modi- fied black-body (MBB) model, ”d1”(1成分)

or

the two-component MBB model, ”d4”(2成分)

宇宙論的なCMBマップ：“TT,TE,EE+lowE+lensing　CAMB $\xrightarrow{\text{パワースペクトル}}$ HEALPixのsynfast → マップ

＊テンソルスカラー比rの値によって
マップを作成

plank

$$\Omega_b h^2 = 0.02237,\ \Omega_c h^2 = 0.1200,\ h = 0.6736,\ \tau = 0.0544,\ n_s = 0.9649.$$

$$A_s = 2.100 \times 10^{-9},$$

周波数帯や角度分解能などの実験パラメータ ⇨ LiteBIRDと同等のもの(入力ノイズ：ホワイトノイズ)

デルタマップ法は、前景の空間変動の1次まで近似しているので、非常に明るい銀河面をマスク

⇩

「P06マスク」（fsky = 0.56）

結果：

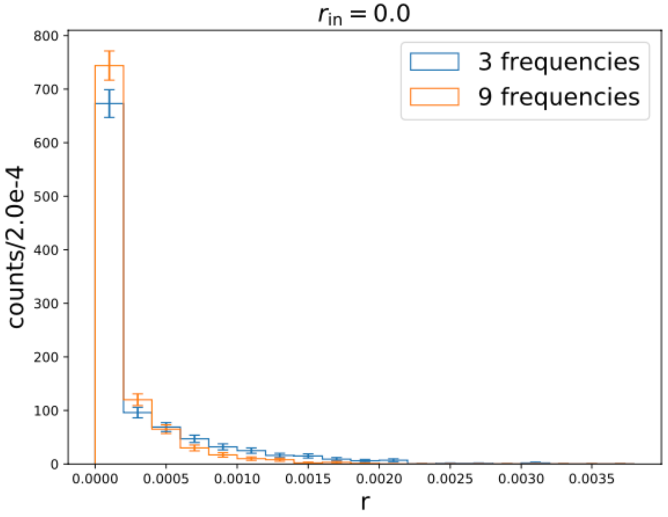
状況：シンクロトロン放射のみ　　　　CMB+シンクロトロン放射　　（1000回のシミュレーショ）

3 frequencies（40, 60, 140）GHz

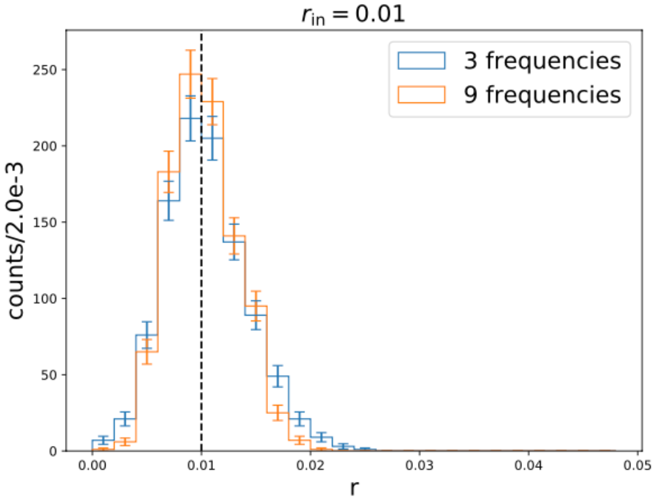
9 frequencies.（40, 50, 60, 68, 78, 89, 100, 119, 140）GHz,

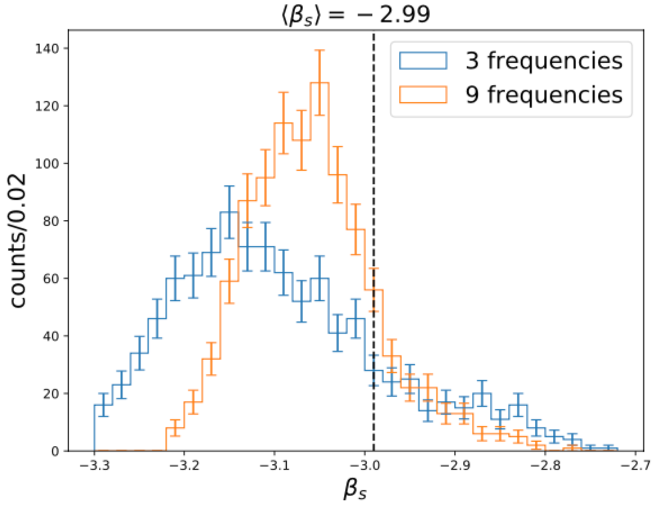
- 結果を見ると、周波数バンドを増やした9 frequencies の方がr, β の推定値がよく再現されている。

r out < 0.12 × 10-2



rout < 0.07 × 10-2



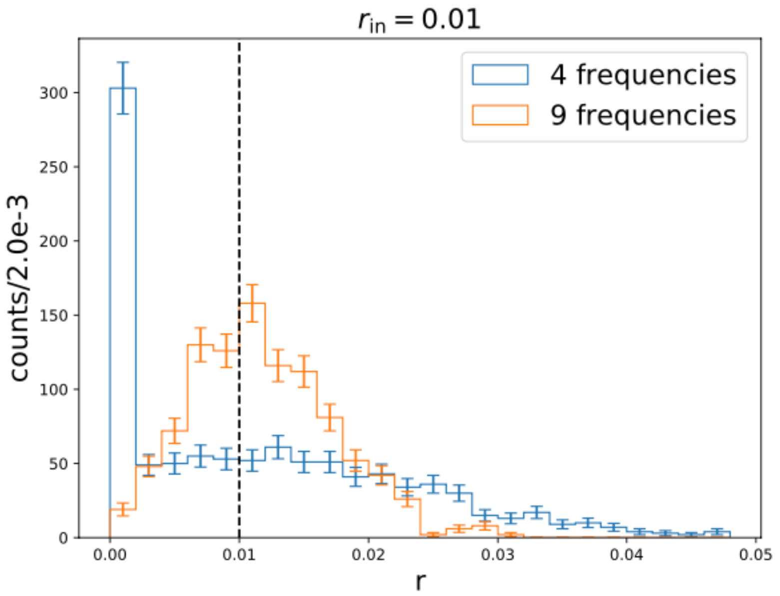


状況：熱ダスト放射（1成分MBB）のみ　　CMB+熱ダスト放射

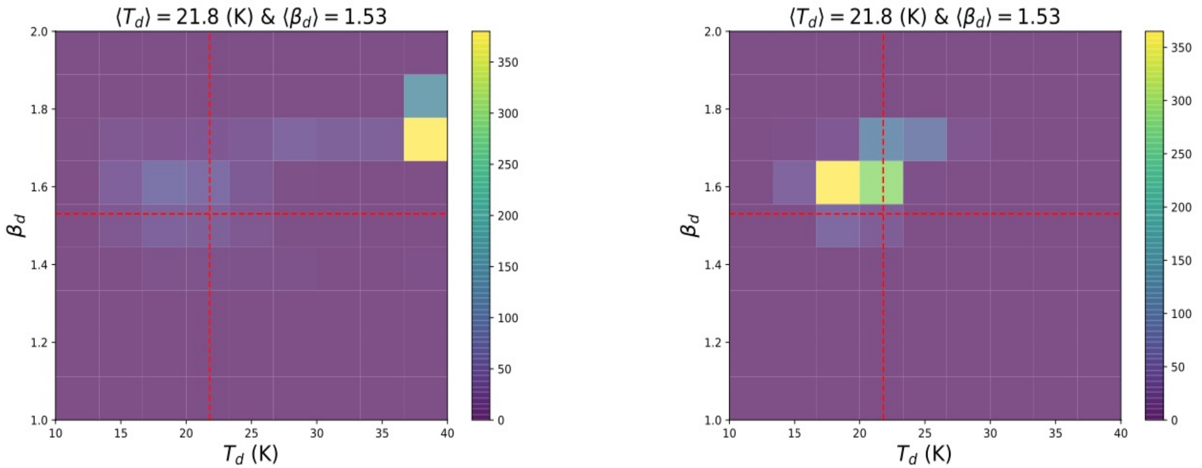
パラメータ：
テンソル-スカラー比r
前景パラメータでTd、βd

4 frequencies（140, 235, 280, 402) GHz

9 frequencies. (100, 119, 140, 166, 195, 235, 280, 337, 402) GHz,



- 4 frequenciesではrの推定に不確定性が現れている
- 9frequenciesでは周波数を増やしたことにより パラメータの推定値がより良く決定できていること.が確認できる



前景パラメータの推定が正確にできていないことから Rの推定に大きな誤差を生む

Fig. 4 2D histograms of estimated dust parameters, β_d vs T_d with four bands (left) and nine bands (right).

状況：シンクロトロン＋熱ダスト放射（1成分MBB）　　CMB+シンクロトロン放射＋熱ダスト放射

パラメータ：

テンソル-スカラー比r
前景パラメータTd, βd, βs

Frequencies
（40,50,60,68,78,89,100,119,140,166,195,235,280,337,402,600 ）GHz

Tdの推定には周波数が足りないことから

$$T_d = 21.8 \pm 1\sigma\,\mathrm{K}$$
$$\pm 1.0 \times 10^{-5}\sigma\,\mathrm{K},$$

Tdに制約を課した

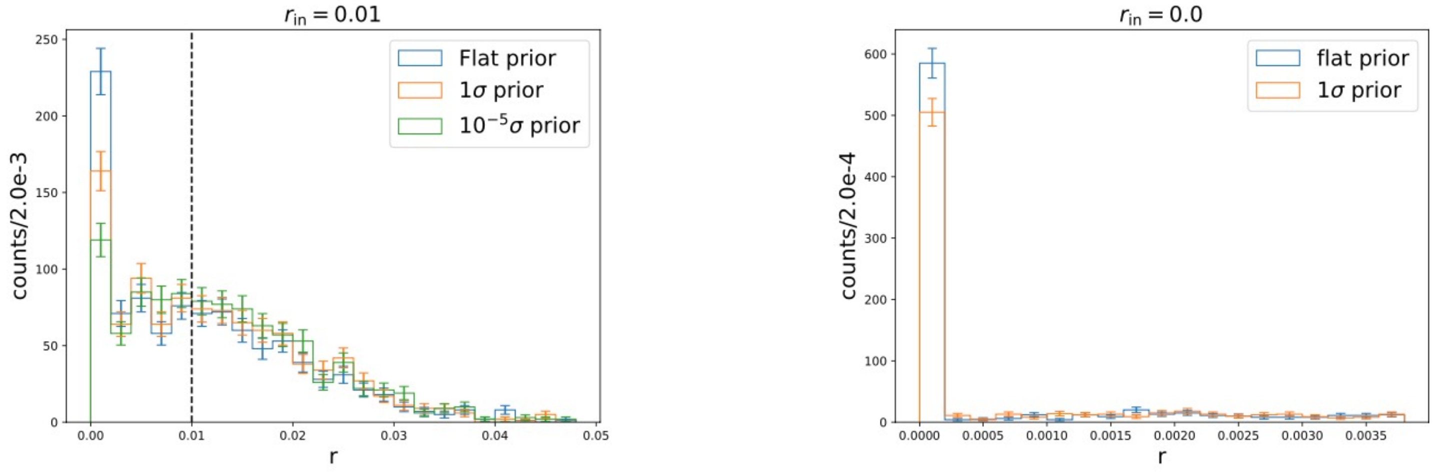


Fig. 5 Histograms of estimated r_{out} from 1000 samples. (Left) r_{out} histograms for input $r_{in} = 0.01$. Blue, orange, and green histograms show the estimated r_{out} with flat, 1σ, and $10^{-5}\sigma$ priors on T_d, respectively. (Right) r_{out} histograms for input $r_{in} = 0.0$. Blue and orange histograms show the estimated r_{out} with flat and 1σ priors on T_d, respectively.

Tdの制約が強いほど、rの推定が良くなっているが、nullのr推定ではわずかに右に偏る結果となった。（右上図）

高周波数の修正を行った場合：

Frequencies　修正

337 →500GHz、 402 → 600GHz

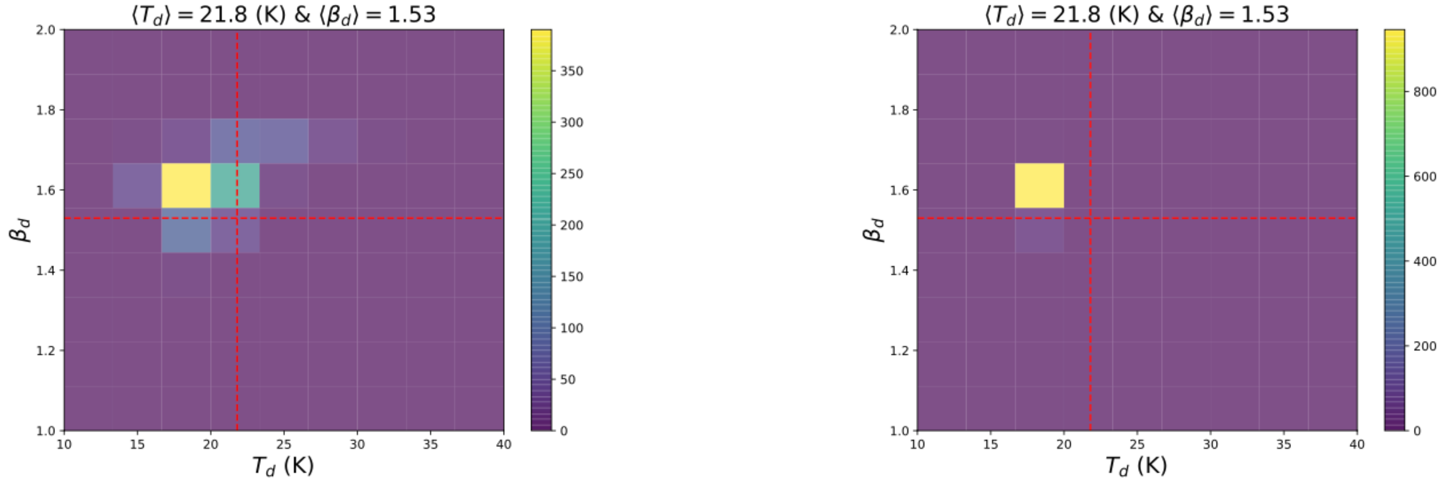


Fig. 6　2D histograms of T_d vs β_d with 15 normal bands (left) and 15 modified high-frequency bands (right).

平坦な事前分布を持つrin=0.01

1 σ 事前分布を持つrin=0.01

前ページの修正前の15周波数に比べrの分布が右に偏っているが
rの不確定性が非常に小さくなっている

⇩

CMBと前景の周波数を遠ざけると不確かさ
は小さくなるが系統的な偏りが大きくなる。

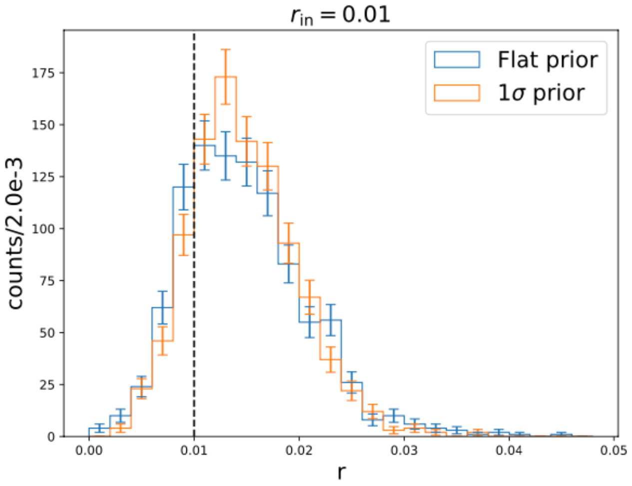


Fig. 7　Histograms of r_{out} from 1000 realizations for a flat prior and a 1σ prior on T_d. The input $r_{\mathrm{in}} = 0.01$ and dust model is 1MBB. The modified high-frequency model is used.

誤った前景をモデル化した場合：

モデル化　2成分MBBダスト

推定　　　1成分MBBダスト

この状態でパラメータを推定する

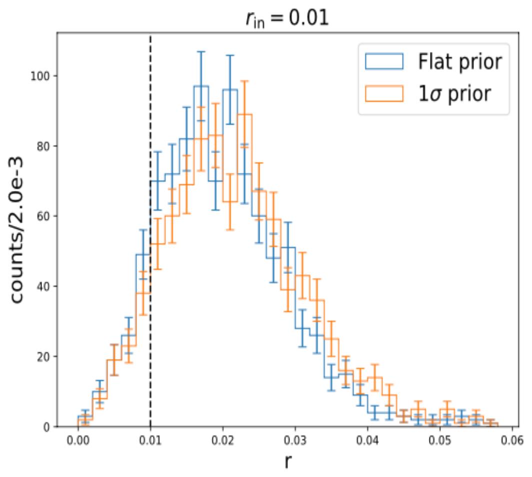


Fig. 8 Histograms of r_{out} from 1000 realizations. The input $r_{in} = 0.01$ and dust model is 2MBB.

rの推定値に約0.01のバイアスがある

周波数バンドの数が多いほどバイアスも大きくなる

前景放射のパラメータの決定が周波数の数に依存するから

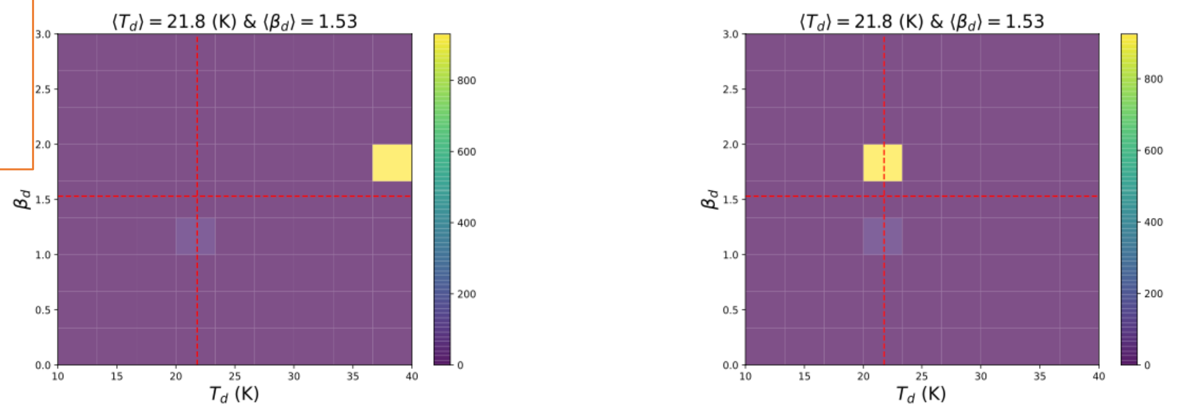


Fig. 9 2D histograms of estimated T_d and β_d in the case of mismodeling with flat (left) and 1σ (right) priors on T_d.

まとめ：

シンクロトロンとダストの2つの前景成分モデル

ダストの前景パラメータβdとTdの決定が困難　　　　シンクロトロンとダストの前景放射の相互作用

βdとTdを同時に決定するためには、広い周波数帯域のダストスペクトルを観測する必要

前景2成分モデルでは、放射光が低周波側を支配し、ダスト成分を隠す

ダストの前景パラメータの推定に使える観測周波数帯が事実上減少する

プランクの結果に基づき、ダスト温度に関する事前分布を課した

r の推定値の誤差は小さくなるが、推定値には小さな正のバイアスがかかる

周波数が高い修正バンド構成を用いた場合にも、正のバイアスが見られる

この方法における前景パラメータの摂動的な取り扱いが破綻しているため

内部テンプレート法では、CMBを同時に除去してしまうため、相対的にノイズが大きくなってしまうという欠点

（系統誤差と統計誤差の競合）

高次展開を考慮することで、前景信号パラメータとCMBパラメータの推定を改善できる可能性がある