リー群・SO(3) 超入門

入江清

2023/5/7

はじめに

- よく見るSO(3)って何?
  - 回転ベクトルとどう違うの?
  - 回転行列とはどういう関係?
  - ロドリゲスの公式はどこから来た?
  - 上手な最適化方法は?

- SO(n)について調べると…
  - n次元回転群
  - 回転群は積についてリー群を構成するらしい
  - 多様体と関係あるらしい
    →そもそも群って何?
    →多様体って何?

- この資料の目的
  - SO(3)に対する
  - 群とは何か知らない人向け

群論は何の役に立つ？

- 代数学
- ガロア理論
  - 一般の5次以上の方程式には解の公式が存在しない
- 量子力学
  - スピン角運動量
- 工学
  - 2次元/3次元回転
- その他
  - あみだくじ
  - 15パズル

群(group)って何？

- “群である”ことの4条件
  - 集合と演算の組み合わせに対して議論する
  - 前提: 集合Gがあり，演算∘があるとき
  - 下記すべて満たす場合「**<u>Gは演算∘に関して群をなす</u>**」
- 1. 閉じている
  - $\forall\, a, b \in G$に対して，$a \circ b$がまたGの要素である
- 2. 結合法則が成り立つ
  - $\forall\, a, b, c \in G$に対して，$(\mathrm{a} \circ \mathrm{b}) \circ c = \mathrm{a} \circ (b \circ c)$
- 3. 単位元が存在する
  - $\forall a \in G$に対して$a \circ e = e \circ a = a$となる$e \in G$が存在する
- 4. 逆元が存在する
  - $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$となる$a^{-1} \in G$がすべての$a \in G$に対して存在する

群をなすか考えてみよう

- 整数，実数，複素数: 加算について
  - これらは可換群（Abel群）である
- 実数: 乗算について
- ゼロを除いた実数: 乗算について
- 有理数: 乗算について

- ひらがな2つの組み合わせからなる集合
  - 演算 (あ，い）◦ (う，え）= (あ，え)
- ３で割った余りが0,1,2の整数
  - 演算は数を足したものの剰余

特別な群いろいろ

- 置換群
  - あみだくじへの応用
- O(2)
  - Orthogonal, 2次の直交行列，積について
  - $A^tA = I$
- SO(2)
  - Special Orthogonal, det(A) = 1, 2次元回転行列
- SU(2)
  - 量子力学などで使われる
- SO(3)
  - 3次元回転行列

群以外の代数的構造

- まとめて「群・環・体」と呼んだり
- 環とは？
  - 群のうち積と和の両方が使えるもの
  - 後述するリー代数は環のレイヤーにある

群	加法について閉じている	aとbが含まれるなら a+b も含まれる
群	加法について結合法則が成り立つ	a+(b+c)=(a+b)+c が成り立つ
群	加法について単位元がある	a+0=0+a=a となるような要素0が存在する
群	加法について逆元が存在する	要素aに対して a+(-a)=(-a)+a=0 となるような要素-aが存在する
アーベル群	加法が可換である	任意の要素a,bに対してa+b=b+aが成り立つ
環	乗法について閉じている	aとbが含まれるなら ab も含まれる
環	乗法に結合法則が成り立つ	a(bc)=(ab)c が成り立つ
環	乗法と加法の間で分配法則が成り立つ	任意の要素a,b,cに対して a(b+c)=ab+ac と (a+b)c=ac+bcが成り立つ
可換環	乗法が可換である	任意の要素a,bに対して ab=ba が成り立つ
整域	乗法について単位元がある	任意の要素aに対して a1=1a=aとなるような要素1が存在する
整域	乗法について0が唯一の零因子である	ab=0 であるなら a=0 または b=0 である
体	乗法についての逆元が存在する	aが0でないなら aa'=a'a=1となるような要素a'が存在する

http://zellij.hatenablog.com/entry/20121211/p1 より引用
William Stallings, “Cryptography And Network Security: Principles and Practices”, 2005からの翻案とのこと

リー群: 群と多様体の組み合わせ

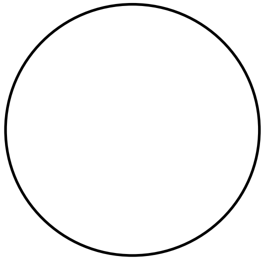
- 群Gがリー群(Lie group)であるためには,
  - Gが群であり
  - Gが可微分多様体であり
  - Gの元に関する演算および逆をとる写像が微分可能である

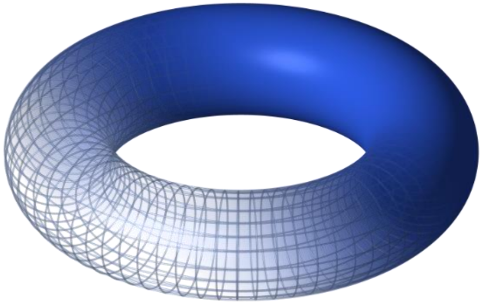
- 数学者Marius Sophus Lieより

- リー群の例
  - 整数全体の集合Z: 和について
  - SO(2), SO(3): 積について
- リー群でない例
  - 有理数全体の集合: 積について

多様体(manifold)とは

- 多様体のイメージ: なめらかな図形
  - 円，球，トーラス，g人乗り浮袋
    - ただし球は積をどう定義してもリー群にならない
- リー群については，境界がないものを考える





リー群の具体例

- 正の実数全体: R^{+}は積に関してリー群
  - $f(x, y) = xy$ 　x, yに関して微分可能
  - $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ 　xに関して微分可能

- 円: $S^1 = \{z \in C| \ |z| = 1\}$

$$= \{e^{i\theta} | \ \theta \in R\}, \quad e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

  - $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi) = \cos(\theta + \phi) + i\sin(\theta + \phi)$
  - $(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$
    - ド・モアブルの公式

多様体の接空間(tangent space)

- 多様体上のある点p付近の性質を調べる場合:
  - 2次元図形ならば接線を引く
  - 3次元図形ならば接平面を貼る
- リー群は多様体であり群なので等質性がある
  - 多様体の1箇所を調べれば他も同じ性質を持つ
    - 円はどこを切り出しても同じ形
  - 単位元付近の性質を調べればよい
- 単位元周辺の局所的な性質を調べる→リー代数

リー代数

- リー代数とは:
  - 単位元付近の接空間における集合で
  - リー群と同じ次元のベクトル空間$\mathfrak{g}$で
  - 下記を満たすブラケット積[,]が与えられるもの
    - 双線形性
      $[ax+by,z]=a[x,z]+b[y,z],\ [z,ax+by]=a[z,x]+b[z,y]$
      a,bはスカラー, x,y,zは$\mathfrak{g}$の元
    - 交代性
      $$[x,x]=0$$
    - ヤコビ恒等式
      $$\big[x,[y,z]\big]+\big[z,[x,y]\big]+\big[y,[z,x]\big]=0$$

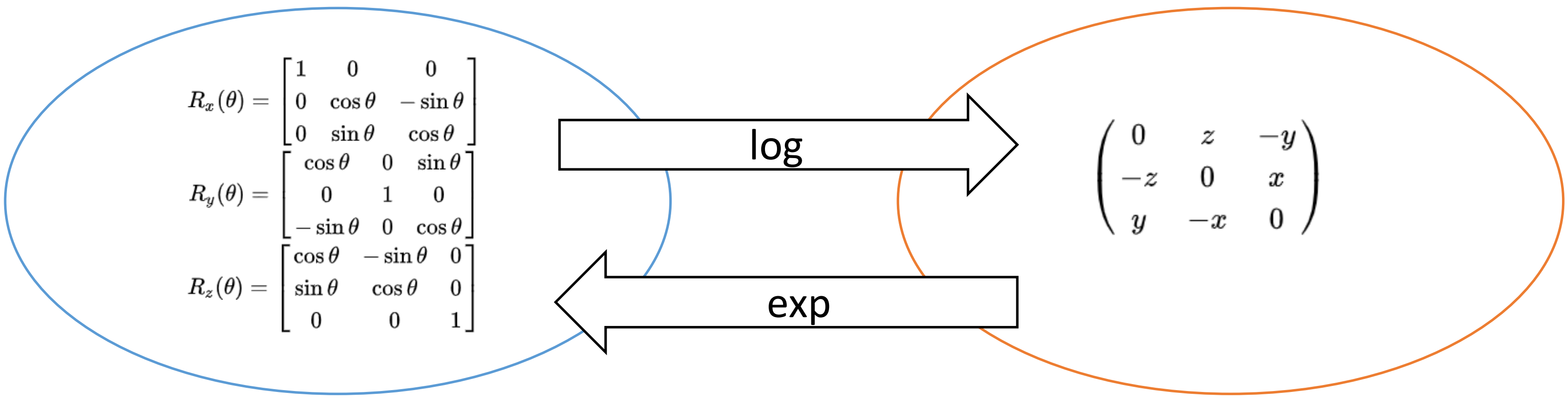
- Gのリー代数は$\mathfrak{g}$(フラクチュール書体)で表す
  - SO(2)には$\mathfrak{so}(2)$, SO(3)には$\mathfrak{so}(3)$

- リー群とリー代数は指数/対数写像で相互に変換できる
  - exp: リー群 $\rightarrow$ リー代数
  - log: リー代数 $\rightarrow$ リー群

三次元回転に関する復習

- 回転行列
  - 3x3の9パラメータで回転を表現
- Axis-angle
  - 回転軸3次元(***e***)と回転量(θ)の4パラメータで表現
- 回転ベクトル
  - 3次元ベクトルθ***e***(Axis-angleの要素をかけたもの)
    - ***e***は単位ベクトルとすると，ノルムが回転量
    - ロドリゲスの回転公式で回転行列へ変換できる
    - 3次元回転の最少表現
- クォータニオン
  - 実部1, 虚部3の4パラメータで表現
  - 冗長性がある: 同じ回転に2つの表現
    - 軸の方向を逆にして，逆回転させると同じ回転
    - 数値最適化を行う上では不便

SO(3)と$\mathfrak{so}(3)$



SO(3)
リー群

$\mathfrak{so}(3)$
リー代数

- 回転ベクトルを歪対象行列にしたものが$\mathfrak{so}(3)$に対応
- $\mathfrak{so}(3)$は$\mathbb{R}^3$(3次元ベクトル)と同じ構造
  - 3次元ベクトルのクロス積⇔$\mathfrak{so}(3)$の行列積
- ロドリゲスの回転公式は$\exp(K)$から簡単に確認できる

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}_3 + \sin\nu \boldsymbol{K} + (1 - \cos\nu)\boldsymbol{K}^2$$

補足: 行列指数関数

- スカラー関数のテイラー展開を行列へ拡張する

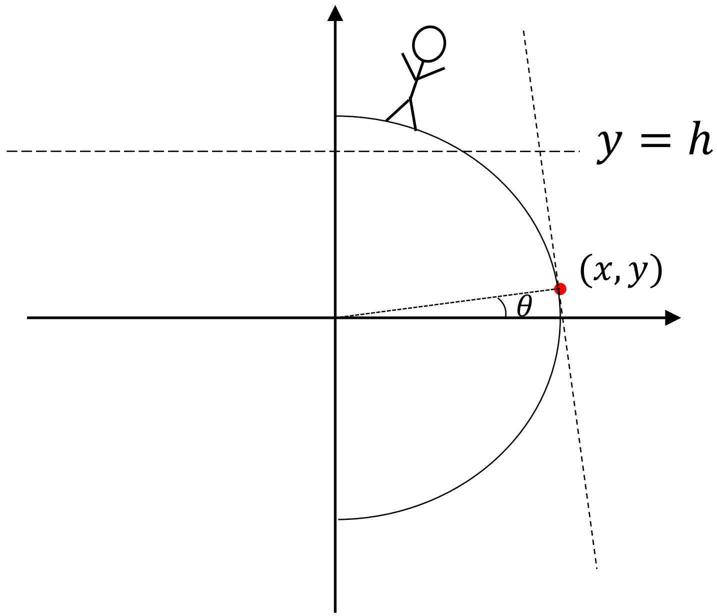
$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = I + X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3 + \cdots$$

$$\log(B) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(B-I)^k}{k} = (B-I) - \frac{(B-I)^2}{2} + \frac{(B-I)^3}{3} \cdots$$

リー代数を最適化になぜ用いるのか

- 数値最適化（ここでは勾配法）を考える
- 回転行列の9パラメータを最適化すると…
  - 回転行列として満たすべき性質(正規直行)を外れる
  - 効率が悪い
    - 勾配の精度が低い
    - パラメータ更新ごとに正規直交化の作業が必要
- リー代数を使うと
  - 現在の状態を基準に，微小な変化を考える
    - パラメータを直接微分しない
    - 微分できない点（特異点）が無い
    - 対称性によりいつでも同じ微分が使える
  - 必要最小限のパラメータで効率が良い

リー代数を用いた最適化のイメージ



例題: 円弧上の点を勾配法で動かして$y = h$となる点を探索する

$$\min L, \quad L(x, y) = (h - y)^2$$
$$\mathrm{s.t.}\ x^2 + y^2 = r^2$$

単純なアプローチ:
$\mathrm{d}L/\mathrm{d}x$の勾配に基づいて点を動かす
→点の位置によって勾配が大きく変わる

- 普通の座標系でxの微小変化を考える
  - 傾きが場所により大きく変わる
  - 勾配が0とか無限大の場所もある
    - 線形化したときの誤差が大きい
- リー代数による方法: 極座標で表現してθの微小変化を考える
  - 円弧上に成約したまま最適化できる
  - 点がどこにあってもθの変化に対して一定量円弧状を移動する
  - （円弧状に立っている人の目線ではどこに立っても同じ傾きに見える）

SO(3)の最適化の例

- 例題: 姿勢RをR_{GT}に近づける
  - 目的関数: $e_R = R \boxminus R_{GT}$,　$||e_R||_2^2$　を最小化
    - 演算子 $\boxminus$は回転行列の差分をとり，回転ベクトルにする
      - $SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ へ変換する
      - 具体的には$\log(R_{GT}^{-1}R)$の歪対称行列から3次元ベクトルを取り出す
    - Rは回転行列，小文字rは回転ベクトル

- *Gauss-Newton*法による手順
  - 現在の推定値周辺のヤコビ行列 $J = \frac{\partial e_R}{\partial r}$を計算
    - ここの勾配計算でリー代数の性質を使う（詳細は教科書等を参照）
  - $J^T J x = e_R^T J$をxについて解き，解をr'とする
    - 1ステップでどれだけ進めるかの量を回転ベクトルで得る
  - $R \leftarrow R \boxplus r'$で$R$を更新
    - 演算子 $\boxplus$ は回転行列に相対回転の回転ベクトルを結合する
      - この例では$R \exp([r']_\times)$の計算となる　※$[\quad]_\times$は歪対称行列を作る演算
  - 誤差が閾値以下になるまで繰り返す

まとめ

- 群とは
  - 一定の条件を満たす「集合と演算の組み合わせ」
- リー群とは
  - 連続・対称・演算が微分可能など良い特性を持つ群
- リー代数とは
  - イメージはリー群の接平面: 微分に使える
  - log(リー群) ↔ exp(リー代数) の関係がある
- SO(3) 有名なリー群の一つ
  - 集合: 3次元回転行列
  - 演算: 行列積
  - SO(3)と$\mathfrak{so}(3)$の関係
- 状態推定の最適化でリー代数をなぜ使うか
  - 制約条件を保ったまま，効率の良い最適化ができる

参考図書

- ヨビノリたくみ: 予備校のノリで学ぶ大学数学～ツマるポイントを徹底解説，東京図書
  - 群とは何かの最初の説明が秀逸
- 芳沢光雄: 群論入門　対称性をはかる数学 (ブルーバックス)
  - 群論の一般向け解説，あみだくじの例を通して
- 横田一郎: 初めて学ぶ人のための「群論入門」, 現代数学社
  - 付録のリー群の解説がコンパクトでわかりやすい
- 井ノ口順一: はじめて学ぶリー群, 現代数学社
  - 解説は丁寧だが，なかなかリー群までたどり着かない
- 金谷健一: 3次元回転: パラメータ計算とリー代数による最適化
  - 最適化の具体例がある．群に関する説明は詳しくない