

# 声波成像—声波传播模拟算法（Wave Propagation）

- 参考：

<https://www.crewes.org/ResearchLinks/FreeSoftware/index.php>

[问题描述](#)

[基本原理](#)

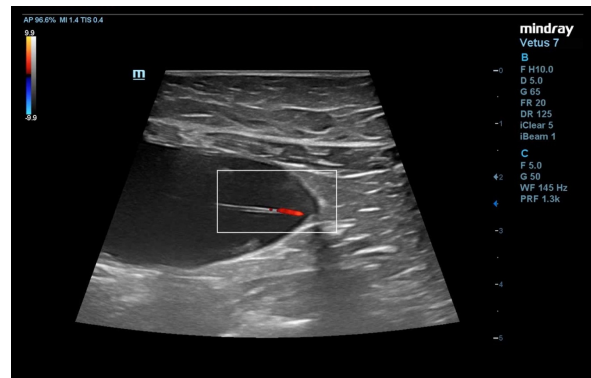
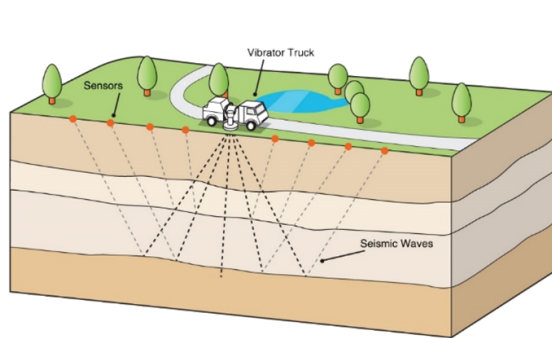
[质点的波动方程](#)

[基于有限差分（Finite Difference）的波动方程](#)

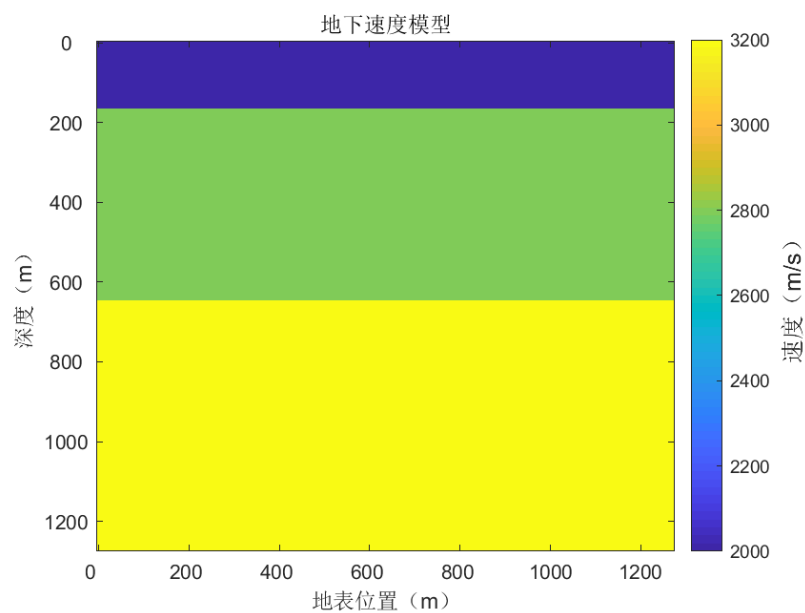
[Matlab实现](#)

## 问题描述

- 声波具有穿透性质，可以使用声波探知弹性介质的内部结构，比如地层、物体、人体等，如下图所示：

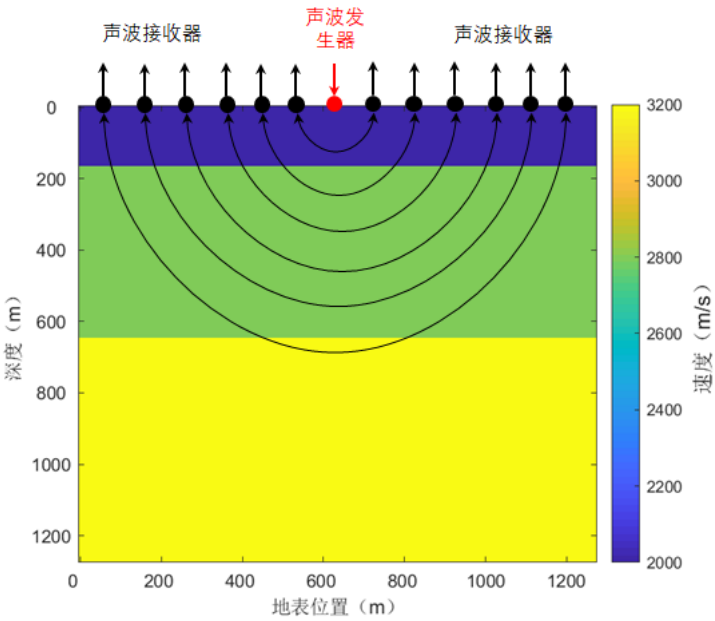


- 对声波在弹性介质内的传播过程进行模拟建模
- 以地下弹性介质为例，下图为一个简单的地质模型：



横轴表示地表位置，纵轴表示地下深度位置，像素值表示声波传播速度，可见上图地质模型包含三个地层，其传播速度分别为2000 m/s、2800 m/s、3200 m/s，上图地质模型的大小为128×128，横向、纵向采样间隔均为10米，对应的地质模型实际大小为1280米×1280米

- 在地表放置声波发生器，产生的声波在地下介质传播，通过声波接收器，接收地下反射的声波信号：

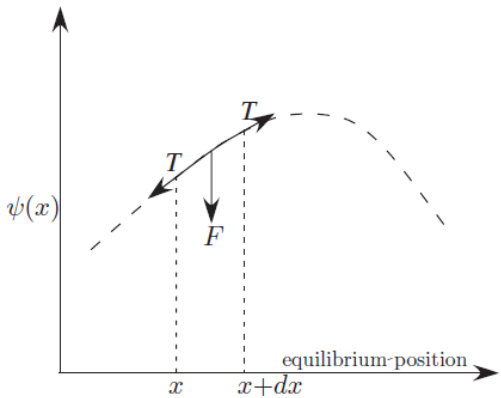


- Wave Propagation过程对声波在介质中的传播过程进行物理模拟，得到接收器的接收信号，对接收信号进行一系列处理可以对地下结构进行成像
- 本文对Wave Propagation的基本原理进行解释，并使用matlab模拟实现Wave Propagation过程

## 基本原理

### 质点的波动方程

- 声波在弹性介质中传播的过程可以建模为弹性介质质点受力运动的过程，类似于水波的传播过程，其示意图如下所示：



- 上图虚线表示一根弦，横轴 $x$ 表示空间位置，纵轴 $\psi(x,t)$ 表示位置 $x$ 时间 $t$ 的质点位移，弦在力的作用下产生了拉伸
- 对于每个弹性质点，受到其相邻点的作用力，如图中 $T$ 所示，表示质点沿切线方向所受的应力，可见质点受到两个相反的切线方向应力，假设将其投影到质点运动方向，得到有效作用力为：

$$T \sin \theta(x, t)$$

其中， $\theta$ 表示切线方向与水平方向的夹角，假定作用力 $T$ 足够小，即 $\theta$ 足够小，则有：

$$T \sin \theta(x, t) \approx T \tan \theta(x, t) = T \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x}$$

- 考虑每个质点受到相邻两个质点的相反方向牵引力，则有：

$$F(x, t)dx = T \left[ \frac{\partial \psi(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right]$$

其中， $F(x)$ 表示单位长度受力

- 考虑到二阶微分定义为：

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{1}{dx} \left[ \frac{\partial \psi(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \right]$$

- 将上式代入上上式，得到：

$$F(x, t) = T \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2}$$

- 根据牛顿第二定律： $F = ma$ ，有：

$$F(x, t) = \mu \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2}$$

其中， $\mu$ 表示单位长度的质量

代入上上式，得到：

$$T \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2}$$

- 令 $v = \sqrt{T/\mu}$ ，表示声波传播速度（Wave Velocity），代入可得一维的波动方程（Wave Equation）：

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

## 基于有限差分（Finite Difference）的波动方程

- 将上述一维模型推广到二维，得到二维的波动方程：

$$\nabla^2 \psi(x, z, t) = \frac{1}{v(x, z)^2} \frac{\partial^2 \psi(x, z, t)}{\partial t^2}$$

其中：

$$\nabla^2 \psi(x, z, t) = \frac{\partial^2 \psi(x, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, z, t)}{\partial z^2}$$

- 通过二阶差分，对时间方向二阶偏微分进行近似，得到：

$$\nabla^2 \psi(x, z, t) = \frac{1}{\Delta t^2 v^2(x, z)} [\psi(x, z, t + \Delta t) - 2\psi(x, z, t) + \psi(x, z, t - \Delta t)]$$

其中， $\Delta t$ 表示时间间隔

- 类似地，可以通过二阶差分近似 $\nabla^2 \psi(x, z, t)$ ：

$$\nabla^2 \psi(x, z, t) = \frac{1}{\Delta x^2} [\psi(x + \Delta x, z, t) - 2\psi(x, z, t) + \psi(x - \Delta x, z, t)] + \frac{1}{\Delta z^2} [\psi(x, z + \Delta z, t) - 2\psi(x, z, t) + \psi(x, z - \Delta z, t)]$$

- 由此得到波长的迭代求解过程：

$$\psi(x, z, t + \Delta t) = 2\psi(x, z, t) - \psi(x, z, t - \Delta t) + \Delta t^2 v^2(x, z) \left[ \frac{1}{\Delta x^2} \delta_{xx} \psi(x, z, t) + \frac{1}{\Delta z^2} \delta_{zz} \psi(x, z, t) \right]$$

其中，满足  $\delta_{xx}\psi(x, z, t) = \psi(x + \Delta x, z, t) - 2\psi(x, z, t) + \psi(x - \Delta x, z, t)$ ,  $\delta_{zz}\psi(x, z, t) = \psi(x, z + \Delta z, t) - 2\psi(x, z, t) + \psi(x, z - \Delta z, t)$

## Matlab实现

- 需要安装<https://www.crewes.org/ResearchLinks/FreeSoftware/index.php>中的CREWES Matlab Toolbox (ZIP)工具包，并将其添加到matlab路径

- 详细代码：

- 主要代码步骤：

- load速度模型（即上述问题描述过程的速度模型）：

```
load vmodel.mat % vmodel:速度模型, x:地表空间采样点, z:地下深度采样点
```

- 初始化波场数据：

```
snap1=zeros(size(vmodel)); % 初始波场数据, 可以理解为时刻0的波场
snap1(1, length(x)/2)=1; % 声波发生器的初始数据, 可以理解为时刻1的波场
```

- 有限差分过程：

```
% 基于有限差分的波场更新
snapshot=velocity.^2.*delt^2.*del2_5(snap2,deltx) + 2*snap2 - snap1;
```

- 上步骤中的二阶差分函数del2\_5：

```
function [output]=del2_5(input,deltx)
[nrows,ncolumns]=size(input);
input2=zeros(nrows+2,ncolumns+2);
input2(2:nrows+1,2:ncolumns+1)=input;
factor=1/(deltx^2);
clear input
output = (input2(3:nrows+2,2:ncolumns+1) - 2.*input2(2:nrows+1,2:ncolumns+1) + ...
          input2(1:nrows,2:ncolumns+1))*factor;
output = (input2(2:nrows+1,3:ncolumns+2) - 2.*input2(2:nrows+1,2:ncolumns+1) + ...
          input2(2:nrows+1,1:ncolumns))*factor+ output;
end
```

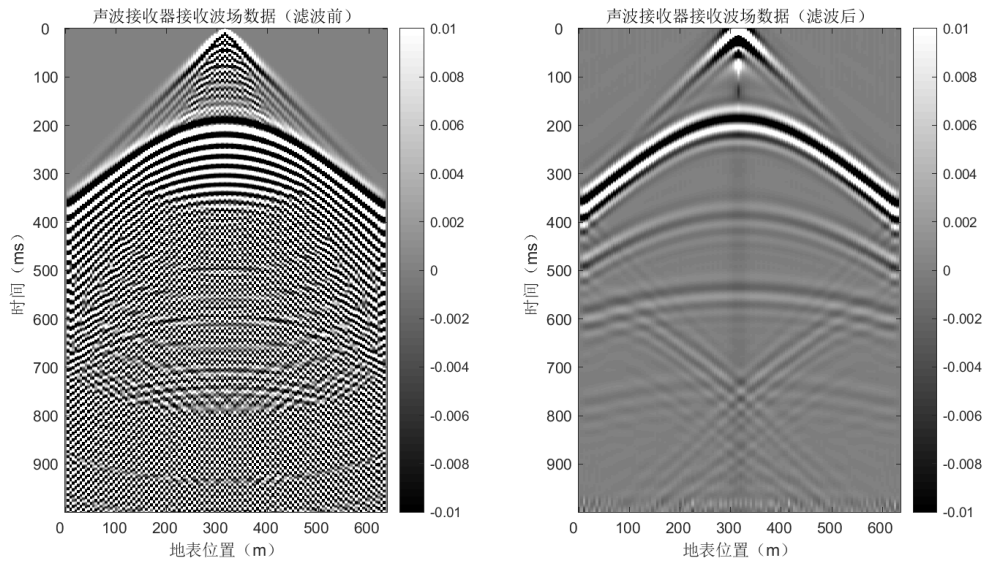
- 对边缘效应进行压制（否则会产生从边缘反弹的假象）

```
[snapshot]=compute_bc_outer(deltx,delt,velocity,snap1,snap2,snapshot);
```

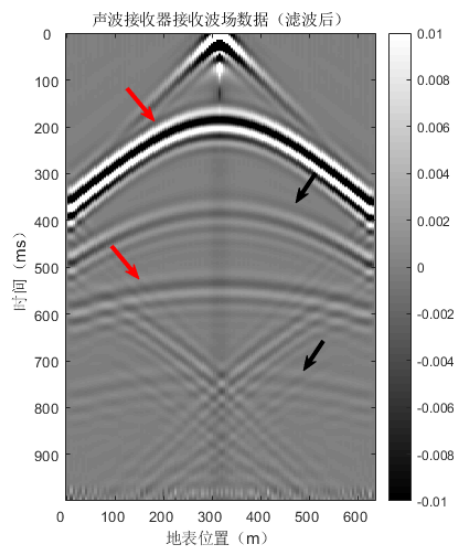
- 带通滤波（成像结果中存在很多高频噪声，需要进行带通滤波）：

```
tmp2=filtfilt(tmp,[t;tpad],[filt(1) filt(2)],[filt(3) filt(4)],phase);
```

- 得到成像结果：



。反射界面位置为：



红色箭头对应单次反射得到的反射波，分别表示速度模型中的第一个反射面和第二个反射面

黑色箭头表示多次反射得到的反射波，如下图黑色箭头所示：

