

重力波をとらえる 行間

江上大晴

2025 年 10 月 27 日

第一章 序論

1-1 宇宙の諸階層

1-2 ニュートン力学と宇宙の諸階層

1-3 初期値問題としてのアインシュタイン方程式

アインシュタイン方程式は

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (1)$$

ここで、 $G_{\mu\nu}$ はアインシュタインテンソル、 $R_{\mu\nu}$ はリッチテンソル、 R はスカラー曲率、 $g_{\mu\nu}$ は計量テンソル、 $T_{\mu\nu}$ は物質のエネルギー運動量テンソル、 G は万有引力定数、 c は光速である。

ここで、 $G = c = 1$ の単位系を用いると、アインシュタイン方程式は

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (2)$$

となる。

今回は、計量テンソルを

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_i\beta^i & \beta_j \\ \beta_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\beta_i = \gamma_{ij}\beta^j \quad (4)$$

と表現する。このとき、 α はラプス関数、 β^i はシフトベクトル、 γ_{ij} は空間計量である。(本文参照)

このとき、反変計量テンソル $g^{\mu\nu}$ は

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha^2} & \frac{\beta^j}{\alpha^2} \\ \frac{\beta^i}{\alpha^2} & \gamma^{ij} - \frac{\beta^i\beta^j}{\alpha^2} \end{pmatrix} \quad (5)$$

ここで、 γ^{ij} は γ_{ij} の逆行列である。つまり、

$$\gamma^{ik}\gamma_{kj} = \delta_j^i \quad (6)$$

また、 $\beta^i = 0$ とすると、空間座標一定の曲線が法線と一致するように空間座標を選んだことになる。規格化 ($n^\mu n_\mu = -1$) された法線ベクトルは

$$n_\mu = (-\alpha, 0, 0, 0) \quad (7)$$

$$n^\mu = \left(\frac{1}{\alpha}, -\frac{\beta^i}{\alpha} \right) \quad (8)$$

となる。

今、時間方向と空間方向を明確に区別するために、空間方向への射影テンソルを

$$P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu \quad (9)$$

と定義する。あるいは、

$$P_\nu^\mu = g^{\mu\alpha} P_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu + n^\mu n_\nu \quad (10)$$

で定義する。

空間方向への射影テンソルとは、時間方向への成分、つまり n^μ の成分を取り除く働きをするテンソルである。確かめると、

$$P_{\mu\nu} n^\nu = (g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu) n^\nu = n_\mu + n_\mu (n_\nu n^\nu) = n_\mu - n_\mu = 0, \quad (11)$$

$$P_\nu^\mu n^\nu = (\delta_\nu^\mu + n^\mu n_\nu) n^\nu = n^\mu + n^\mu (n_\nu n^\nu) = n^\mu - n^\mu = 0 \quad (12)$$

より確かめられる。

この射影テンソルを用いて、任意のベクトル V_μ を空間方向に射影すると

$$\tilde{V}_\mu = P_\mu^\nu V_\nu \quad (13)$$

の様に定義すると、確かに

$$n^\mu \tilde{V}_\mu = n^\mu P_\mu^\nu V_\nu = 0 \quad (14)$$

の様に時間方向の成分が取り除かれていることが分かる。

任意のテンソルに関しては

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = P_\mu^\alpha P_\nu^\beta T_{\alpha\beta} \quad (15)$$

の様に定義される。

例として n_μ の共偏微分 $n_{\mu;\nu}$ を考える。このテンソルを空間方向に射影したものを第二基本形式または、外部曲率 K_{ij} と呼ぶ。共偏微分の定義と外部曲率の定義は

$$n_{\mu;\nu} = \frac{\partial n_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha n_\alpha \quad (16)$$

$$K_{ij} = -P_i^\mu P_j^\nu n_{\mu;\nu} \quad (17)$$

次の計算のために使うクリストッフェル記号の定義は

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} \right) \quad (18)$$

$$\Gamma_{\alpha,\mu\nu} = g_{\alpha\beta} \Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \quad (19)$$

ここで式 (4)、(7) 式 (8) と直前の 4 式を用いて、外部曲率 K_{ij} を計算すると

$$\begin{aligned}
K_{ij} &= -(\delta_i^\mu + n^\mu n_i)(\delta_j^\nu + n^\nu n_j)n_{\mu;\nu} \\
&= -(\delta_i^\mu \delta_j^\nu + n^\mu n_i \delta_j^\nu + \delta_i^\mu n^\nu n_j + n^\mu n_i n^\nu n_j)n_{\mu;\nu} \\
&= -\delta_i^\mu \delta_j^\nu n_{\mu;\nu} - n^\mu n_i \delta_j^\nu n_{\mu;\nu} - \delta_i^\mu n^\nu n_j n_{\mu;\nu} - n^\mu n_i n^\nu n_j n_{\mu;\nu} \\
&= n_{i;j} \\
&= -\Gamma_{ij}^\alpha n_\alpha \\
&= -\Gamma_{ij}^\alpha g_{\alpha\beta} n^\beta \\
&= -\Gamma_{\beta,ij} n^\beta \\
&= \left(\frac{1}{\alpha} \Gamma_{0,ij} - \frac{\beta^k}{\alpha} \Gamma_{k,ij} \right) \\
&= \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{\partial g_{0j}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} - 2\beta^k \Gamma_{k,ij} \right) \\
&= \frac{1}{2\alpha} \left(\left(\frac{\partial \beta_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \beta_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} \right) - 2\beta^k \Gamma_{k,ij} \right) \\
&= \frac{1}{2\alpha} \left(\left(\frac{\partial \beta_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \beta_k \right) + \left(\frac{\partial \beta_j}{\partial x^i} - \Gamma_{ji}^k \beta_k \right) - \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} \right) \\
&= \frac{1}{2\alpha} \left(-\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} + \beta_{i|j} + \beta_{j|i} \right)
\end{aligned} \tag{20}$$

と計算できる。この式は普通

$$\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} = -2\alpha K_{ij} + \beta_{i|j} + \beta_{j|i} \tag{21}$$

と書くことが多いらしい。

さて、アインシュタイン方程式を初基地問題として考えるためには、アインシュタイン方程式を時間方向と空間方向に射影することを考える。射影の仕方は 3 通りあるらしい。添え字をそれぞれ 1) 両方時間方向、2) 片方時間方向、3) 両方空間方向である。それぞれに対応して

$$1) \quad G_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = 8\pi \rho_H = 8\pi T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu \tag{22}$$

$$2) \quad G_{\mu\nu} n^\mu P_i^\nu = -8\pi J_i = 8\pi T_{\mu\nu} n^\mu P_i^\nu \tag{23}$$

$$3) \quad G_{\mu\nu} P_i^\mu P_j^\nu = 8\pi S_{ij} = 8\pi T_{\mu\nu} P_i^\mu P_j^\nu \tag{24}$$

これらの変数はそれぞれ、 ρ_H はエネルギー密度、 J_i は運動量密度、 S_{ij} は圧力テンソルである。

さて、それぞれの式を α 、 β^i 、 γ_{ij} で表現しようと頑張って計算すると次のようになる。(付録 b 参照)

$$1) \quad {}^{(3)}R + K^2 - K_{ij} K^{ij} = 16\pi \rho_H \tag{25}$$

$$2) \quad K_{i|j}^j - K_{|i} = 8\pi J_i \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
3) \quad \frac{\partial K_{ij}}{\partial t} &= \alpha \left({}^{(3)}R_{ij} + K K_{ij} \right) - 2\alpha K_{il} K_j^l \\
&\quad - 8\pi \alpha \left(S_{ij} + \frac{1}{2} \gamma_{ij} (\rho_H - S_l^l) \right) - \alpha_{|ij}
\end{aligned} \tag{27}$$

$$+ \beta_{|j}^m K_{mi} + \beta_{|i}^m K_{mj} + \beta^m K_{ij|m} \tag{28}$$

ここで式 (25) はハミルトニアン拘束方程式、式 (26) は動量拘束方程式、式 (25) から式 (28) はアインシュタイン方程式の (3+1) 次元形式と呼ぶ。ここで、式 (25) は 1 本の式、式 (26) は 3 本の式、式 (28) は 6 本の式からなり、合わせて 10 本の方程式になる。アインシュタイン方程式も 10 本の方程式であったので、対応していることが分かる。空間的な式 (25) と式 (26) いて、時間的な式 (28) と式 (21) を用いて時間発展を計算すると初期値問題としてアインシュタイン方程式を解いたことになる、

また、流体力学の方程式がどのように表現されているのかを確認する。ビアンキ恒等式 $G^\nu_{\mu;\nu} = 0$ より、流体の運動式

$$T^\nu_{\mu;\nu} = 0 \quad (29)$$

が導かれる。ただし、ここでの G はアインシュタインテンソルで時空の曲がり具合を表し、 T はエネルギー運動量テンソルである。ビアンキ恒等式は一般相対論の本を読むと出てくるらしい。

アインシュタイン方程式の (3+1) 次元表現では ρ_H, J_i, S_{ij} が現れたので流体力学の式をこれらの変数で表現する。エネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ は式 (22)、(23)、(24) より

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta}T^{\alpha\beta} \\ &= (P_{\mu\alpha} - n_\mu n_\alpha)(P_{\nu\beta} - n_\nu n_\beta)T^{\alpha\beta} \\ &= P_{\mu\alpha}P_{\nu\beta}T^{\alpha\beta} - n_\mu n_\alpha P_{\nu\beta}T^{\alpha\beta} - n_\nu n_\beta P_{\mu\alpha}T^{\alpha\beta} + n_\mu n_\nu n_\alpha n_\beta T^{\alpha\beta} \\ &= S_{\mu\nu} + n_\mu J_\nu + n_\nu J_\mu + \rho_H n_\mu n_\nu \end{aligned} \quad (30)$$

がわかる。

ここで、エネルギー運動量テンソルを n^μ 方向 (時間方向) と P^μ_i 方向に射影して式 (29) を表現する。まず、時間方向は

$$n^\mu T^\nu_{\mu;\nu} = 0 \quad (31)$$

であるので、

$$0 = (n^\mu T^\nu_{\mu})_{;\nu} - T^\nu_{\mu} n^\mu_{;\nu} \quad (32)$$

まず、 $n^\mu T^\nu_{\mu}$ を計算すると

$$\begin{aligned} n^\mu T^\nu_{\mu} &= n^\mu (S^\nu_{\mu} + n_\mu J^\nu + n^\nu J_\mu + \rho_H n_\mu n^\nu) \\ &= \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\gamma}\rho_H) + \frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{\gamma}\rho_H V^l) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x^l}(\sqrt{\gamma}p(V^l + \beta^l)) + \alpha\sqrt{\gamma}pK - \frac{\partial\alpha}{\partial x^l}\sqrt{\gamma}J^l + \frac{\alpha\sqrt{\gamma}J^l J^m K_{lm}}{\rho_H + p} \end{aligned} \quad (34)$$

第二章 重力波

2-1 重力波の整形理論