

*Lista 2*

*Entregar 1, 4, 5, 6 e 7*

1. Quais dos seguintes conjuntos são subespaços vetoriais? Em caso afirmativo exiba uma base deste subespaço.
  - (a) Vetores do plano  $2x + y - z = 0$
  - (b) Combinações lineares de  $u = (1, 0, -1)$ ,  $v = (-1, 1, 1)$  e  $w = (-1, 3, 1)$ , ou seja,  $\text{ger}(u, v, w) = \{z \in \mathbb{R}^3 / z = a \cdot u + b \cdot v + c \cdot w\}$
  - (c) Vetores de  $\mathbb{R}^n$  cuja primeira coordenada é igual a 1.
  - (d) Vetores de  $\mathbb{R}^n$  cujas coordenadas formam uma progressão aritmética
  - (e) Vetores de  $\mathbb{R}^n$  cujas coordenadas formam uma progressão geométrica
  - (f) Matrizes  $m \times n$  anti-simétricas ( $A$  é anti-simétrica se  $A^T = -A$ )
  - (g) Os polinômios de grau até 3 que têm pelo menos duas raízes  $x_0 = 1$  e  $x_1 = 2$
2. (Poole - seção 2.4) Exercícios: 1, 7, 20, 42
3. (Poole - seção 3.5) Exercícios: 13, 15, 25, 27, 35, 37
4. Um subconjunto  $V$  de um espaço vetorial  $E$  é chamado de variedade afim quando a reta que une dois pontos quaisquer de  $V$  está contida em  $V$ . Ou seja,  $x, y \in V, t \in \mathbb{R} \Rightarrow (1 - t)x + ty \in V$ .
  - (a) Mostre que o conjunto das soluções de um sistema linear  $A \cdot x = b$  é uma variedade afim.
  - (b) A translação de um conjunto  $C \subset E$  pelo vetor  $u \in E$  é o conjunto  $C + u = \{v + u, v \in C\}$ . Mostre que a translação de uma variedade afim  $V$  por  $-u$ , com  $u \in V$ , é um subespaço de  $E$ .
  - (c) Mostre que o conjunto das soluções de  $A \cdot x = b$  é  $N(A) + x_p$ , onde  $N(A) = \{x / A \cdot x = 0\}$  e  $x_p$  é um vetor qualquer que satisfaz  $A \cdot x = b$ .
5. Exiba matrizes  $2 \times 2$  com os seguintes núcleos (espaço nulo) e imagens (espaço coluna):
  - (a) Núcleo: reta  $y = x$ . Imagem: reta  $y = 2x$
  - (b) Núcleo: reta  $y = 3x$ . Imagem: também a reta  $y = 3x$ .
6. Se  $\beta = [u, v]$ , onde  $u = (1, 1)$  e  $v = (2, 1)$  e  $w$  tem coordenadas  $(3, 5)$  na base  $\beta$ , quais são as coordenadas de  $w$  na base canônica?
7. O arquivo `MatrizIncidencia.csv` que acompanha esta lista contém a matriz de incidência de uma rede direcionada (grafo), onde cada linha representa uma aresta e cada coluna um vértice. Se  $A_{ij} = 1$  então a aresta  $i$  se inicia no vértice  $j$ . Se  $A_{ij} = -1$  então a aresta  $i$  termina no vértice  $j$ . Deste modo em cada linha  $i$  há apenas uma entrada igual a 1 e uma entrada igual a -1 e todos demais elementos desta linha são iguais a zero.
  - (a) Encontre uma base para o núcleo da matriz de incidência. Você pode usar um pacote computacional, claro!
  - (b) Descreva quantas componentes conexas esta rede possui e quais são os vértices que pertencem a cada componente.