FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS

ESCOLA DE MATEMÁTICA APLICADA

MESTRADO 2015.1

ÁLGEBRA LINEAR E APLICAÇÕES

Prof Moacyr

Resolução dos Exercícios da Lista 2

KIZZY TERRA

RIO DE JANEIRO

MARÇO DE 2015

1 Exercício 1

(a) Sejam $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ pertencentes ao plano 2x +y - z = 0, temos:

1) $2u_1 + u_2 - u_3 = 0$

2) $2v_1 + v_2 - v_3 = 0$

Analisando as condições necessárias e suficientes para determinar se o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado é também um subespaço vetorial:

Fazendo $u + v$ obtemos:

$$u + v = (u_{1+}v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

Somando 1) e 2) temos:

$$2(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) - (u_3 + v_3) = 0, \text{ logo } u + v \text{ pertence ao plano.}$$

Fazendo $a.u$ obtemos:

$$a.u = (au_1, au_2, au_3)$$

Multiplicando a dos dois lados de 1) temos:

$$2(a.u_1) + (a.u_2) - (a.u_3) = 0, \text{ logo } a.u \text{ pertence ao plano.}$$

Temos que o plano dado é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Uma base para este sistema é:

$$\text{ger}(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

(b) Sejam $p = a_1.u + b_1.v + c_1.w$ e $q = a_2.u + b_2.v + c_2.w$ combinações lineares de u , v e w :

Analisando as condições necessárias e suficientes para determinar se o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado é também um subespaço vetorial:

Fazendo $p + q$ obtemos:

$$r = p + q = ((a_1 + a_2).u, (b_1 + b_2).v, (c_1 + c_2).w)$$

Temos que r também é uma combinação linerar de u , v e w e portanto pertence ao conjunto dado. (1)

Fazendo $a.p$ obtemos:

$$r = a.p = aa_1.u + ab_1.v + ac_1.w$$

Temos que r também é uma combinação linerar de u , v e w e portanto pertence ao conjunto dado. (2)

De (1) e (2) temos que o conjunto dado é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Uma base para este sistema é:

$$\text{ger}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

(c) Não é subespaço vetorial, pois não contém a origem e dessa forma não atende à condição necessária para ser subespaço.

(d) Sejam $u = (u_1, r + u_1, 2r + u_1, 3r + u_1, \cdots, (n-1)r + u_1)$ e $v = (v_1, p + v_1, 2p + v_1, 3p + v_1, \cdots, (p-1)r + v_1)$ pertencentes conjunto dado :

Analisando as condições necessárias e suficientes para determinar se o subconjunto de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ dado é também um subespaço vetorial:

Fazendo $u + v$ obtemos:

$$w = u+v = (u_1+v_1, (r+p)+u_1+v_1, 2(r+p)+u_1+v_1, 3(r+p)+u_1+v_1, \cdots, (n-1)(r+p)+u_1+v_1)$$

onde w é um vetor tal que as coordenadas são uma progressão aritmética de razão $r + p$ e elemento incial $u_1 + v_1$, logo $u + v$ pertence ao conjunto.

Fazendo $a.u$ obtemos:

$$w = a.u = (a.u_1, ar + a.u_1, 2ar + a.u_1, 3ar + a.u, \cdots, (n-1)ar + u_1)$$

onde w é um vetor tal que as coordenadas são uma progressão aritmética de razão $a.r$ e elemento inicial $a.u_1$, logo $a.u$ pertence ao conjunto.

Multiplicando a dos dois lados de 1) temos:

$$2(a.u_1) + (a.u_2) - (a.u_3) = 0, \text{ logo } a.u \text{ pertence ao plano.}$$

Temos que o conjunto dado é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.

Uma base para este sistema é:

$$\text{ger}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \end{pmatrix})$$

(e) Sejam $u = (u_1, q.u_1, 2q.u_1, 3q.u_1, \cdots, (n-1)q.u_1)$ e $v = (v_1, p.v_1, 2p.v_1, 3p.v_1, \cdots, (n-1)p.v_1)$ pertencentes conjunto dado :

Analisando as condições necessárias e suficientes para determinar se o subconjunto de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ dado é também um subespaço vetorial:

Fazendo $u + v$ obtemos:

$$w = u + v = (u_1 + v_1, q.u_1 + p.v_1, 2q.u_1 + 2p.v_1, 3q.u_1 + 3p.v_1, \cdots, (n-1)q.u_1 + (n-1)p.v_1)$$

Analisando w podemos perceber que ele só será um vetor cujas coordenadas são uma progressão geométrica se as progressões correspondetes a u e v possuírem a mesma razão. Logo o conjunto dado não é fechado para soma e consequentemente o conjunto dado não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.

(f)Sejam u e v vetores pertencentes ao conjunto dado tal que $u^T = -u$ e $v^T = -v$.

Analisando as condições necessárias e suficientes para determinar se o subconjunto do espaço das matrizes dado é também um subespaço vetorial:

Analisando $u + v$ para determinar se pertence ao conjunto:

$$(u+v)^T = u^T + v^T = -u + (-v) = -(u+v) \ (1)$$

De (1) temos que $u+v$ é uma amtriz anti-simétrica e pertence ao conjunto.
Analisando $a.u$ para determinar se pertence ao conjunto:

$$(a.u)^T = a.u^T = a.(-u) = -(a.u) \ (2)$$

De (2) temos que $a.u$ é uma amtriz anti-simétrica e pertence ao conjunto. Portanto, podemos concluir que o conjunto das matrizes anti-simétricas é um subespaço vetorial do espaço das matrizes.

Uma base para este sistema é um conjunto de (m-1).n/2 matrizes que possibilitam a variação de todos os elementos da diagonal principal e dos elementos acima da diagonal e fixam os elementos abaixo da diagonal, pois estes devem ser necessariamente anti-simétricos aos elementos acima da diagonal.

(g) O cojunto dado é um subconjunto do espaço das funções dadas por:

$$P(x) = (ax+b)(x-1)(x-2) = ax^3 + (b-3a)x^2 + (2a-3b)x + 2b$$

Podemos representar estes polinômios como vetores da forma:

$$(a, (b-3a), (2a-3b), 2b)$$

Considere os vetores $u = (a_1, (b_1-3a_1), (2a_1-3b_1), 2b_1)$ e $v = (a_2, (b_2-3a_2), (2a_2-3b_2), 2b_2)$Analisando as condições necessárias e suficientes para determinar se o subconjunto do espaço das funções dado é também um subespaço vetorial:

$u+v = (a_1+a_2, [(b_1+b_2) - 3(a_1+a_2)], [(2(a_1+a_2) - 3(b_1+b_2)], 2(b_1+b_2)) =$
$[(a_1+a_2)x + (b_1+b_2)](x-1)(x-2)$, logo $u+v$ pertence ao conjunto dos polinômios de grau até 3 e raízes 1 e 2.

Fazendo $a.u$ obtemos:

$a.u = (a.a_1, a.(b_1-3a_1), a.(2a_1-3b_1), a.2b_1) = (a.a_1x + a.b_1)(x-1)(x-2)$, logo $a.u$ pertence ao conjunto dos polinômios de grau até 3 e raízes 1 e 2.

Temos que o conjunto dado é um subespaço vetorial do espaço das funções.

$$\text{ger}(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix})$$

2 Exercício 4

(a)Para mostrar que o conjunto de soluções de um sistema linear $A.x = b$ é uma variedade afim, devemos mostrar que dados x, y pertencentes a este conjunto (1 - t)x + ty também irá pertencer. Se x e y pertencem ao conjunto das soluções temos:

$$A.x = b \ (1)$$

$$A.y = b \ (2)$$

Multiplicando a eq. (1) por um escalar (1 - t) dos dois lados obtemos:

$$(A.x)(1-t) = b(1-t)$$

Utilizando a lei associativa das matrizes, obtemos:

$$A.[x.(1-t)] = b(1-t) \ (1.1)$$

Multiplicando a eq. (2) por um escalar t dos dois lados obtemos:

$$(A.y)t = bt$$

Utilizando a lei associativa das matrizes, obtemos:

$$A.[y.t] = bt \ (2.1)$$

Somando as eq. (1.1) e (2.1), obtemos:

$$A.[x.(1-t)] + A.[y.t] = b(1-t) + bt \Longrightarrow A.[x.(1-t) + yt] = b \ (3)$$

De (3) concluimos que $x.(1-t) + yt$ também é solução do sistema e portanto o conjunto das soluções de um sistema linear $A.x = b$ é uma variedade afim.

Obs.: Caso o sistemas não tenha soluções o conjunto também é uma variedade afim pois a propriedade (1 - t)x + ty é satisfeita por vacuidade.

(b) Seja V uma variedade afim e seja V' a translação de V por -u dada por $V' =${ v - u; u, v ϵ V}, temos:

Fazendo $a.x'$ obtemos:

$$w' = a.x' = a.(x-u) = a.x - a.u + u - u = (a.x + (1-a)u) - u$$

Para mostrar que w'ϵ V, devemos mostrar que $(a.x + (1-a)u)$ ϵ V:

Sendo V uma variedade afim sabemos que toda reta que une quaisquer dois pontos pertence a V decorre imediatamente que $w' = (a.x + (1-a)u)$ ϵ V.

Dados x e y ϵ V, temos x'e y'ϵ V' tal que:

(1) $x' = x - u$

(2) $y' = y - u$

(3) $(1-t).x + t.y$ ϵ V, t $\epsilon\mathbb{R}$

Somando (1) e (2) , obtemos $x' + y'$:

$$w' = x' + y' = (x-u) + (y-u) = (x+y-u) - u$$

Para mostrar que w'ϵ V, devemos mostrar que $(x + y - u)$ ϵ V $\subset$ E:

$$w' = 2(x/2 + y/2 - u)$$

Tomando t = 1/2 em (3) temos que p = x/2 + y/2 ϵ V, logo p - u ϵ V' e 2.(p - u) também pertence a V', pois mostramos acima que V' é fechado para o produto.

Uma vez que provamos que V' é fechado para soma e produto então V' é um subespaço vetorial de E.

(c) Encontrando a solução do sistema homogêneo associado A.x = 0 encontraremos todos os graus de liberdade associados ao sistema. Combinando a solução do sistema homogêneo encontrada com uma solução particular x_p conseguimos obter todas as soluções para o sistema inicial A.x = b. E por essa razão, temos:

$$\{x\epsilon E/A.x = b\} = N(A) + x_p$$

3 Exercício 5

(a) Núcleo: reta y = x. Imagem: reta y = 2x
Se tivermos a matriz escalonada da forma:

$$\begin{bmatrix} (1) & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos um espaço nulo que se pede. A partir da imagem que se pede temos que a matriz pode ser:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Tal que a base geradora do espaço coluna é dado por ger($\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$).
(b) Núcleo: reta y = 3x. Imagem: também a reta y = 3x
Se tivermos a matriz escalonada da forma:

$$\begin{bmatrix} (1) & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos um espaço nulo que se pede. A partir da imagem que se pede temos que a matriz pode ser:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$$

Tal que a base geradora do espaço coluna é dado por ger($\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$).
Obs.: Os elementos da matriz assinalados entre ( ) são os pivôs.

4 Exercício 6

Se = [u; v], onde u = (1; 1) e v = (2; 1) e w tem coordenadas (3; 5) na base , quais são as coordenadas de w na base canônica?

A base canônica é dada por $\alpha = [p, q]$, onde p = (1,0) e q = (0,1). As coordenas de w na base canônica podem ser encontradas fazendo:

$$\alpha.w_\alpha = \beta.w_\beta$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.w_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.w_\alpha = \begin{bmatrix} 13 \\ 8 \end{bmatrix} \Longrightarrow w_\alpha = (13, 8)$$

5 Exercício 7

Este exercício foi resolvido utilizando-se a linguagem GNU Octave.

(a) Espaço nulo da Matriz de Incidência:

-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
-0.0715459 -0.0052185 0.4948272
-0.0715459 -0.0052185 0.4948272
-0.0715459 -0.0052185 0.4948272
-0.0715459 -0.0052185 0.4948272

(b) O número de componetes conexas é dado pela dimensão do espaço nulo da matriz que é 3.