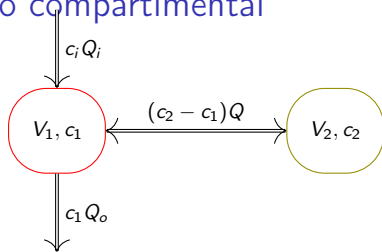


# Espacio de estados - solución homogénea y estabilidad

Kjartan Halvorsen

2021-05-27

## Modelo compartimental



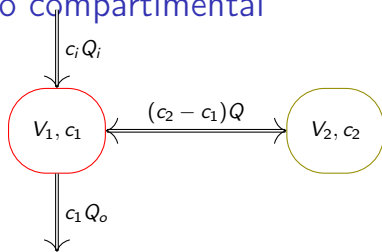
$$V_1 \frac{dc_1}{dt} = Q(c_2 - c_1) - Q_o c_1 + Q_i c_i, \quad c_1 \geq 0$$

$$V_2 \frac{dc_2}{dt} = Q(c_1 - c_2), \quad c_2 \geq 0,$$

$$\dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} & & & \end{bmatrix}}^A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} & \end{bmatrix}}^B u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} & \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

## Modelo compartimental



$$V_1 \frac{dc_1}{dt} = Q(c_2 - c_1) - Q_o c_1 + Q_i c_i, \quad c_1 \geq 0$$

$$V_2 \frac{dc_2}{dt} = Q(c_1 - c_2), \quad c_2 \geq 0,$$

$$\dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} -\frac{Q+Q_o}{V_1} & \frac{Q}{V_1} \\ \frac{Q}{V_2} & -\frac{Q}{V_2} \end{bmatrix}}^A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{V_1} \\ 0 \end{bmatrix}}^B u$$
$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

# Solución homogénea de sistemas en espacio de estados

$$\dot{x} = Ax$$

# Solución homogénea de sistemas en espacio de estados

$$\dot{x} = Ax$$

## Exponencial de una matriz

Hay una función  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\Phi(t) = e^{At} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots$$

que tiene la propiedad

$$\dot{\Phi} = A\Phi, \quad \Phi(0) = I.$$

La solución homogénea del sistema en espacio de estados es

$$x(t) = \Phi(t)x(0)$$

# Solución homogénea de sistemas en espacio de estados

$$\dot{x} = Ax$$

## Exponencial de una matriz

Hay una función  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\Phi(t) = e^{At} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots$$

que tiene la propiedad

$$\dot{\Phi} = A\Phi, \quad \Phi(0) = I.$$

La solución homogénea del sistema en espacio de estados es

$$x(t) = \Phi(t)x(0)$$

## Eigenvalores y eigenvectores

Si el valor inicial  $x(0) = v$  es un eigenvector de la matriz  $A$

$$Av = \lambda v,$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t)v = e^{At}v \\ &= \left(I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots\right)v \\ &= Iv + tAv + \frac{t^2}{2!}A^2v + \frac{t^3}{3!}A^3v + \dots \\ &= v + t\lambda v + \frac{(t\lambda)^2}{2!}v + \frac{(t\lambda)^3}{3!}v + \dots \\ &= e^{\lambda t}v \end{aligned}$$

# Estabilidad

La estabilidad es una propiedad clave del sistema. No depende de la señal de entrada.

La solución homogénea se puede escribir

$$x(t) = e^{\lambda_1 t} \alpha_1 v_1 + e^{\lambda_2 t} \alpha_2 v_2 + \cdots + e^{\lambda_n t} \alpha_n v_n.$$

# Estabilidad

La estabilidad es una propiedad clave del sistema. No depende de la señal de entrada.

La solución homogénea se puede escribir

$$x(t) = e^{\lambda_1 t} \alpha_1 v_1 + e^{\lambda_2 t} \alpha_2 v_2 + \cdots + e^{\lambda_n t} \alpha_n v_n.$$

Estabilidad requiere que **cada una** de las funciones exponenciales va hacia cero



# Estabilidad

La estabilidad es una propiedad clave del sistema. No depende de la señal de entrada.

La solución homogénea se puede escribir

$$x(t) = e^{\lambda_1 t} \alpha_1 v_1 + e^{\lambda_2 t} \alpha_2 v_2 + \cdots + e^{\lambda_n t} \alpha_n v_n.$$

Estabilidad requiere que **cada una** de las funciones exponenciales va hacia cero

Todos los eigenvalores de la matriz  $A$  tienen que tener parte real negativa.

$$\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0, \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Los eigenvalores de  $A$  son los **polos** del sistema.