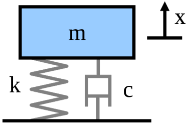
Espacio de estados - polos, función de transferencia

Kjartan Halvorsen

2021-06-03

Masa-resorte-amortiguador

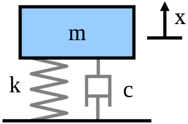


$x = \begin{bmatrix} X & \dot{X} \end{bmatrix}$. La aceleración $\ddot{X}$ como señal de salida.

$$\dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}}^{A} x + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}^{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad & \quad \end{bmatrix}}_{C} x + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}}_{D} u$$

Masa-resorte-amortiguador



$x = \begin{bmatrix} X & \dot{X} \end{bmatrix}$. La aceleración $\ddot{X}$ como señal de salida.

$$\dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}}^{A} x + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}^{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}}_{C} x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_{D} u$$

Formas canonicas

- Forma controlable
- Forma observable

Recurso
https://lpsa.swarthmore.edu/Representations/SysRepTransformations/TF2SS.html

Estabilidad

La solución homógena de $\dot{x} = Ax$ se puede escribir

$$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\alpha_1 v_1 + \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\alpha_2 v_2 + \cdots + \mathrm{e}^{\lambda_n t}\alpha_n v_n,$$

donde λ_1, λ_2, ..., λ_n son los eigenvalores de A.

Estabilidad requiere que cada una de las funciones exponenciales va hacia cero.

$$\Rightarrow \qquad \mathrm{Re}\{\lambda_i\} < 0, \; \forall i = 1, 2, 3 \ldots, n$$

Los eigenvalores de A son los polos del sistema.

Los eigenvalores

λ y v es un par de eigenvalor y eigenvector de la matriz A si

$$Av = \lambda v$$

Los eigenvalores

λ y v es un par de eigenvalor y eigenvector de la matriz A si

$$Av = \lambda v$$

$$\lambda v - Av = 0$$

Los eigenvalores

λ y v es un par de eigenvalor y eigenvector de la matriz A si

$$Av = \lambda v$$

$$\lambda v - Av = 0$$

$$(\lambda I - A)v = 0$$

Los eigenvalores

λ y v es un par de eigenvalor y eigenvector de la matriz A si

$$Av = \lambda v$$

$$\lambda v - Av = 0$$

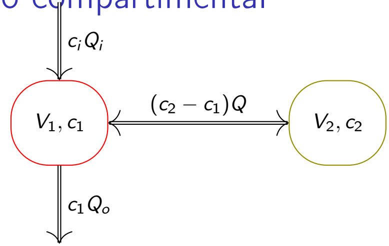
$$(\lambda I - A)v = 0$$

Para que la ecuación tenga soluciones no-triviales

$$\det(\lambda I - A) = 0 \qquad \leftarrow \text{Ecuación característica}$$

De espacio de estados a función de transferencia

Modelo compartimental



$$
\begin{aligned}
V_1 \frac{dc_1}{dt} &= Q(c_2 - c_1) - Q_o c_1 + Q_i c_i, & c_1 \geq 0 \\
V_2 \frac{dc_2}{dt} &= Q(c_1 - c_2), & c_2 \geq 0,
\end{aligned}
$$

$$
\dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} -\frac{Q+Q_o}{V_1} & \frac{Q}{V_1} \\ \frac{Q}{V_2} & -\frac{Q}{V_2} \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{V_1} \\ 0 \end{bmatrix}}^{B} u
$$

$$
y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}
$$

De espacio de estados a función de transferencia

$$\dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} -\frac{Q+Q_o}{V_1} & \frac{Q}{V_1} \\ \frac{Q}{V_2} & -\frac{Q}{V_2} \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{V_1} \\ 0 \end{bmatrix}}^{B} u = Ax + Bu$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Cx$$

Aplicando la transformada de Laplace

$$sX - x(0) = AX + BU$$
$$Y = CX$$

De espacio de estados a función de transferencia

$$\dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} -\frac{Q+Q_o}{V_1} & \frac{Q}{V_1} \\ \frac{Q}{V_2} & -\frac{Q}{V_2} \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{V_1} \\ 0 \end{bmatrix}}^{B} u = Ax + Bu$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Cx$$

Aplicando la transformada de Laplace

$$sX - x(0) = AX + BU$$
$$Y = CX$$

Despejando $X(s)$

$$\begin{aligned} X(s) &= (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} BU(s) \\ Y(s) &= C\left((sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} BU(s)\right) \\ &= \underbrace{C(sI - A)^{-1} x(0)}_{\text{Respuesta transitoria}} + \underbrace{C(sI - A)^{-1} B}_{\text{Función de transf.}} U(s) \end{aligned}$$

Transformada de Laplace de una función exponencial

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}dt$$

Transformada de Laplace de una función exponencial

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{pt}\} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{pt}\mathrm{e}^{-st}dt = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(s-p)t}dt = \frac{1}{s-p} = (s-p)^{-1}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > \mathrm{Re}\{p\}$$

Solución homógena de sistemas en espacio de estados

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax, \qquad x(0) = x_0 \\ sX(s) - x(0) &= AX(s) \end{aligned}$$

Solución homógena de sistemas en espacio de estados

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax, \qquad x(0) = x_0 \\ sX(s) - x(0) &= AX(s) \end{aligned}$$

Solución en dominio de Laplace

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x(0)$$

Solución homógena de sistemas en espacio de estados

$$\dot{x} = Ax, \qquad x(0) = x_0$$
$$sX(s) - x(0) = AX(s)$$

Solución en dominio de tiempo

$$x(t) = \Phi(t)x(0) = \mathrm{e}^{At}x(0)$$

Donde $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\Phi(t) = \mathrm{e}^{At} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots$$

Solución en dominio de Laplace

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0)$$

La transformada de Laplace de la exponencial de una matriz

$$f(t) = \mathrm{e}^{At} \qquad \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \qquad F(s) = (sI - A)^{-1}$$

La transformada de Laplace de la exponencial de una matriz

$$f(t) = e^{At} \qquad \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \qquad F(s) = (sI - A)^{-1}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \operatorname{adj}(sI - A)$$

$\det(sI - A)$ es un polinomio en s, llamado polinomio característico. Sus raíces, es decir las soluciones de la ecuación característica

$$\det(sI - A) = 0$$

son los polos del sistema y los eigenvalores de A.

De espacio de estados a función de transferencia

$$\dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} -\frac{Q+Q_o}{V_1} & \frac{Q}{V_1} \\ \frac{Q}{V_2} & -\frac{Q}{V_2} \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{V_1} \\ 0 \end{bmatrix}}^{B} u = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \qquad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} BU(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{C(sI - A)^{-1} x(0)}_{\text{Respuesta transitoria}} + \underbrace{C(sI - A)^{-1} B}_{\text{Función de transf.}} U(s)$$

De espacio de estados a función de transferencia

$$\dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} -\frac{Q+Q_o}{V_1} & \frac{Q}{V_1} \\ \frac{Q}{V_2} & -\frac{Q}{V_2} \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{V_1} \\ 0 \end{bmatrix}}^{B} u = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \qquad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} BU(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{C(sI - A)^{-1} x(0)}_{\text{Respuesta transitoria}} + \underbrace{C(sI - A)^{-1} B}_{\text{Función de transf.}} U(s)$$

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s-a & -b \\ -c & s-d \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\det(sI - A)} \operatorname{adj}(sI - A) \\ &= \frac{1}{(s-a)(s-d) - bc} \begin{bmatrix} s-d & b \\ c & s-a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De espacio de estados a función de transferencia

$$\dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} -\frac{Q+Q_o}{V_1} & \frac{Q}{V_1} \\ \frac{Q}{V_2} & -\frac{Q}{V_2} \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{V_1} \\ 0 \end{bmatrix}}^{B} u = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \qquad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} BU(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{C(sI - A)^{-1} x(0)}_{\text{Respuesta transitoria}} + \underbrace{C(sI - A)^{-1} B}_{\text{Función de transf.}} U(s)$$

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s-a & -b \\ -c & s-d \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\det(sI - A)} \operatorname{adj}(sI - A) \\ &= \frac{1}{(s-a)(s-d) - bc} \begin{bmatrix} s-d & b \\ c & s-a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1} B \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{(s-a)(s-d) - bc} \begin{bmatrix} s-d & b \\ c & s-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \rule{6cm}{0.4pt} \end{aligned}$$

De espacio de estados a función de transferencia

$$\dot{x} = \overbrace{\begin{bmatrix} -\frac{Q+Q_o}{V_1} & \frac{Q}{V_1} \\ \frac{Q}{V_2} & -\frac{Q}{V_2} \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{V_1} \\ 0 \end{bmatrix}}^{B} u = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \qquad y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} BU(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{C(sI - A)^{-1} x(0)}_{\text{Respuesta transitoria}} + \underbrace{C(sI - A)^{-1} B}_{\text{Función de transf.}} U(s)$$

$$\begin{aligned}(sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix} s-a & -b \\ -c & s-d \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\det(sI - A)} \operatorname{adj}(sI - A) \\ &= \frac{1}{(s-a)(s-d) - bc} \begin{bmatrix} s-d & b \\ c & s-a \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G(s) &= C(sI - A)^{-1} B \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{(s-a)(s-d) - bc} \begin{bmatrix} s-d & b \\ c & s-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{b_1(s-d)}{(s-a)(s-d) - bc}\end{aligned}$$