Formelsamling för Algoritmanalys

Kjell Post
Institutionen för Datateknik
Mälardalens Högskola
PO Box 883, S–721 73 Västerås
E-mail: kpt@mdh.se

1 Löptider

Ett programs löptid definieras som en funktion $T(n)$, där n är ett mått på storleken av indata. Låt $c(I)$ vara kostnaden för att köra ett program med indata I.

- *best case:* $T(n) = \min\{c(I) : |I| = n\}$
- *worst case:* $T(n) = \max\{c(I) : |I| = n\}$
- *average case*[1]*:* $T(n) = \sum_{|I|=n} p(I)c(I)$

där $p(I)$ är sannolikheten för att indata I förekommer.

2 Asymptotisk notation

"$\leq$" $f(n) = O(g(n)) \iff (\exists c, n_0 > 0)(\forall n \geq n_0)\ 0 \leq f(n) \leq cg(n)$

"$\geq$" $f(n) = \Omega(g(n)) \iff (\exists c, n_0 > 0)(\forall n \geq n_0)\ 0 \leq cg(n) \leq f(n)$

"$=$" $f(n) = \Theta(g(n)) \iff (\exists c_1, c_2, n_0 > 0)(\forall n \geq n_0)\ 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$

"$<$" $f(n) = o(g(n)) \iff \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

"$>$" $f(n) = \omega(g(n)) \iff g(n) = o(f(n)) \iff \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$

[1]eller "*expected running time.*"

2.1 Rangordning

$1 \preceq \lg^* n \preceq \lg n \preceq n \preceq n \lg n \preceq n^2 \preceq 2^n \preceq n! \preceq 2^{2^n}$

3 Räknelagar

3.1 Heltalsdel

1. $x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil \leq x + 1$
2. $\lceil n/2 \rceil + \lfloor n/2 \rfloor = n$
3. $\lceil \lceil n/a \rceil / b \rceil = \lceil n/ab \rceil \qquad (a \neq 0, b > 0)$
4. $\lfloor \lfloor n/a \rfloor / b \rfloor = \lfloor n/ab \rfloor \qquad (a \neq 0, b > 0)$

3.2 Exponenter

1. $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$
2. $a^m a^n = a^{m+n}$
3. $e^x \geq 1 + x$
4. $1 + x \leq e^x \leq 1 + x + x^2 \qquad (|x| < 1)$

3.3 Logaritmer

För alla $a > 0, b > 0, c > 0$ samt n:

1. $\log_2 e \approx 1.44$
2. $a = b^{\log_b a}$
3. $\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$
4. $\log_b a^n = n \log_b a$
5. $\log_b a = (\log_c a)/(\log_c b) = 1/log_a b$
6. $\log_b(1/a) = -\log_b a$
7. $a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$
8. $x/(1+x) \leq \ln(1+x) \leq x \qquad (x > -1)$
9. $\lg^{(i)} n = \begin{cases} n & \text{om } i = 0 \\ \lg(\lg^{(i-1)} n) & \text{om } i > 0 \end{cases}$
10. $\lg^* n = \min\{i \geq 0 : \lg^{(i)} n \leq 1\}$

3.4 Fakultet

1. $n! = \prod_{k=1}^{n} k$

2. $n! = \sqrt{2\pi n}(n/e)^n(1 + \Theta(1/n))$

3. $n! = o(n^n)$

4. $n! = \omega(2^n)$

5. $\lg(n!) = \Theta(n \lg n)$

3.5 Fibonacci-tal

1. $F_0 = 0; F_1 = 1; F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$ för $i \geq 2$.

2. $F_i = \dfrac{\phi^i - \hat{\phi}^i}{\sqrt{5}}$, där $\phi = \dfrac{(1+\sqrt{5})}{2}$, $\hat{\phi} = \dfrac{(1-\sqrt{5})}{2}$

4 Kombinatorik

1. $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

2. $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$

3. $\left(\dfrac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \left(\dfrac{ne}{k}\right)^k$

5 Summor

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. $\sum_{k=1}^{n} k^m = \Theta(n^{m+1})$

4. $\sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$

5. $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad (|x| < 1)$

6. $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$

7. $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^n}$

8. $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k = \ln n + O(1)$

5.1 Approximation med integral

1. $\int_{m-1}^{n} f(x)dx \le \sum_{k=m}^{n} f(k) \le \int_{m}^{n+1} f(x)dx$ om $f(k)$ är monotont växande.

2. $\int_{m}^{n+1} f(x)dx \le \sum_{k=m}^{n} f(k) \le \int_{m-1}^{n} f(x)dx$ om $f(k)$ är monotont avtagande.

6 Master-metoden

Givet en rekursiv formel: $T(n) = aT(n/b) + f(n) \qquad (a \ge 1, b \ge 1)$

- Om $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ för ngt $\epsilon > 0$,

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$$

- Om $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$,

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$$

- Om $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ för ngt $\epsilon > 0$ och $(\exists c < 1)$ $af(n/b) \le cf(n)$ för stora n,

$$T(n) = \Theta(f(n))$$