Induktionsbevis

Kjell Post
Institutionen för Datateknik
Mälardalens Högskola
PO Box 883, S–721 73 Västerås
E-mail: kpt@mdh.se

1 Inledning

Ett *induktionsbevis* är traditionellt sett en metod att visa att ett påstående $S(n)$ är sant för alla $n \geq 0$. Man kan t ex visa m h a induktion att

$$\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$$

är sant för alla $n \geq 1$.

2 Definition

Låt $S(n)$ vara ett godtyckligt påstående om ett heltal n. För att med induktion visa att $S(n)$ gäller måste två saker visas:

1. **Basfallet:** Vanligtvis $S(0)$.

   Men basfallet kan också vara ett bevis för $S(k)$ (för något heltal k) om man vill visa att $S(n)$ bara gäller för $n \geq k$.

2. **Induktionsfallet:** $S(n) \rightarrow S(n+1)$.

   I detta steg antar vi att $S(n)$ är sant. Denna del kallas *induktionshypotesen*. Under antagandet att induktionshypotesen gäller visar vi alltså att $S(n+1)$ också är sant.

Beviset för $S(1)$ använder alltså $S(0)$, beviset för $S(2)$ använder $S(1)$, osv. Genom att bevisa $S(0)$ samt $S(n) \rightarrow S(n+1)$ för alla $n \geq 0$ har vi lyckats bevisa $S(n)$ för samtliga $n \geq 0$.

3 Exempel

Visa påståendet $\quad S(n): \quad \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1 \qquad$ för alla $n \geq 0$

- **Basfall:** Visa för $n = 0$, dvs

$$S(0): \quad \sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^1 - 1$$

  Detta är uppenbart sant.

- **Induktionsfall:** Vi antar att $S(n)$ är sant (induktionshypotesen) och visar $S(n+1)$:

$$S(n+1): \qquad \sum_{i=0}^{n+1} 2^i = 2^{n+2} - 1$$

  För att visa $S(n+1)$ observerar vi först att dess summa är snarlik $S(n)$, med en extra term för $i = n+1$, dvs termen 2^{n+1}:

$$\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = 2^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} 2^i$$

  I varje induktionsbevis måste induktionshypotesen användas och det tillfället kommer nu. Eftersom vi tillåts anta att $S(n)$ gäller kan vi helt enkelt byta ut $\sum_{i=0}^{n} 2^i$ mot $2^{n+1} - 1$:

$$\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = 2^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} + 2^{n+1} - 1$$

  Högerledet kan förenklas till $2^{n+2} - 1$ och därmed har vi visat $S(n+1)$.

  Eftersom vi visat både $S(0)$ och $S(n) \to S(n+1)$ kan vi dra slutsatsen att

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1 \qquad \text{för alla } n \geq 0.$$