

微平面理论模型几个重要发展节点综述

傅珂杰 11824029

【摘要】

本文以微平面模型理论的发展为线索，先回顾了经典的 Cook-Torrance 模型，接着介绍了 Walter 对 Cook-Torrance 模型的进一步完善，即在微平面层次考虑光线的透射情况，进一步将 Cook 和 Torrance 论文中的高光项写成通用的 BSDF (BRDF+BTDF) 方程;接着有介绍了 Heitz 对于微平面模型重要性采样的优化，即提出来对微平面可见法向进行采样，来替代原先微平面模型中对微平面模型进行法向采样，能够很好的降低方差；最后根据原先 V 型微平面理论中关于光线在微平面槽腔内只进行单次发射，介绍了 Lee 利用其提出的万花筒分析模型，对微平面层次上 V 型槽腔内多次散射模型的构建，能够更加真实的对粗糙表面进行渲染。本文对微平面理论发展的几个重要节点进行了介绍，发现随着微平面理论模型的进一步的完善，粗糙表面渲染的结果会更加接近真实物理世界的物体

【关键词】 微平面，渲染，粗糙表面，散射，透射，真实感渲染

目录

【摘要】	1
1.引言	3
2.由仅考虑微平面反射——原始 Cook-Torrance 模型	3
2.1 阴影遮挡 (Shadowing and masking)	5
2.2 朝向分布函数 (Normal distribution function, NDF)	5
2.3 菲涅尔项 (Fresnel Factor)	5
3 由高光项到 BSDF——Walter 关于 Cook-Torrance 模型的完善	6
3.1 考虑透射情况的微平面模型	6
3.2 基于微平面模型的 BTDF 函数	8
3.3 微平面法向分布函数与 GGX 分布函数	8
4.基于微平面 BSDF 重要性采样方法——Heitz 微平面可见法向采样	9
4.1 法向分布函数和可见法向分布函数	9
4.2 对可见法向进行重要性采样	10
4.3 微平面法向采样和可见法向采样渲染结果对比	13
5.由微平面单次散射到微平面多次散射——Lee 万花筒多次散射模型	14
5.1 V 形槽内的多次散射的万花筒分析模型 (Kaleidoscopic model)	15
5.2 非对称 V 形槽内的多次反射	16
5.3 微平面对称 V 型槽和非对称 V 型槽模型下的 BRDF	18
5.3 实验结果与对比	19
参考文献	20

1.引言

微平面理论^{[1][2]}是真实世界物体外观建模的基石之一。在宏观层面,该理论假定表面点处的反射场是由具有随机取向的若干微尺度镜面小平面的光反射的结果,由统计分布函数定义。微平面理论的核心在于假设光仅在微表面上散射一次,这对于一般的计算渲染足够的,因为简化了计算的多次散射。

提起微平面模型,我们第一个会想到的就是 Cook-Torrance 模型,其经典利用 G 函数项, D 函数项, F 函数项,是后面微平面理论进行优化的基础,在 Cook-Torrance 模型上上个世纪提出的理论模型,存在的诸多假设和前提条件,后续关于微平面理论的研究多数是对其中的 G 函数和 D 函数进行完善和优化。

在微平面理论发展的过程中,我觉得具有代表性的几个重要节点就是:1. Cook-Torrance 模型的提出;2. 在微平面层次上进一步考虑透射,将微平面理论总结成用于渲染的 BRDF 或者 BSDF 形式;3. 对于微平面上微平面法向的采样,从对于所有面的法向进行采样再考虑光线是否能打到微平面或者光线是否能从微平面中出射,到直接对可以出射出光线的重要性采样,这种采样方法的发展;4. 突破原先微平面理论的对于微平面内光线单次反射的限制,对于在微平面内光线多次反射最后才出射情况的建模总结,考虑多次散射的模型,在一定程度更接近真实的物理世界,众所周知,黑体辐射就是因为随着物体表面结构随着温度的变化,使其中只能在物体表面槽腔内不断折射的关系能够出射出来。

根据这些关键节点的发展,我对于 1982 年 Cook 和 Torrance^[3]的提出模型的论文,2007 年 Walter^[4]提出微平面内的透射项的论文,2016 年 Heitz^[7]提出的关于微平面可见法向重要采样的论文,以及 2018 年 Lee^[18]等人关于微平面内多次散射的模型构建的论文,做了阅读与总结。

2.由仅考虑微平面反射——原始 Cook-Torrance 模型

最原始的 Cook-Torrance 模型^[2]最早是 Cook 和 Torrance 在《A Reflectance Model for Computer Graphics》中提出,基于的是这样的一个物理现象——物体表面是由许多微小的平面组成。这些平面的朝向各不相同,而对于光滑的物体,微小平面朝向分布比较统一,对于粗糙物体,微小平面的朝向分布更加散乱。这使得 Cook-Torrance 模型能够更加通用,并且能够模拟表面粗糙的材质。在 Cook-Torrance 模型出现之前,大部分计算机图形学中模拟物体材质模型的设计思路都是基于几何光学,这些模型能够很好地模拟一部分真实世界的材质,但是仍然有些材质无法模拟,在模拟镜面反射以及高光的效果时更像是塑料,而 Cook-Torrance 模型不仅能模拟塑料,也能很好地模拟金属等粗糙表面的高光现象。

在 Cook 和 Torrance 首先从宏观层次的表面反射进行模型构建, 如图 1 所示, 这是一个反射的几何模型。

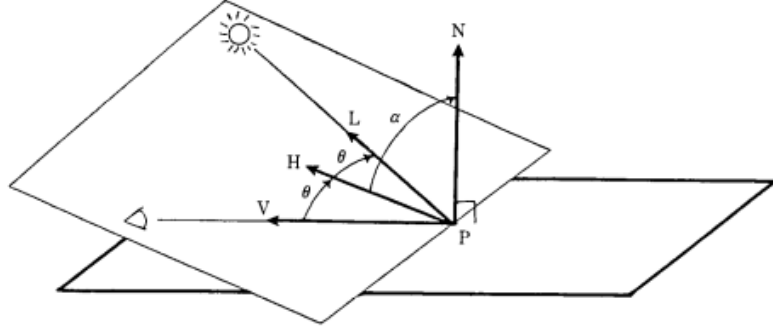


图 1 反射的几何模型

物体表面反射能力函数(即 BRDF)可以定义为: 从 L 方向射入的光线有多少从 V 方向被射出。假设入射光为无穷远的方向光, 并且光强用 I_i 表示, 则从 L 方向入射到 P 点的光能可表示为:

$$E_i = I_i(N \cdot L)d\omega \quad (2-1)$$

这里, ω 为入射光方向角。若用 R 表示 BRDF 函数, I_r 表示反射的强度, 则可以得到:

$$I_r = RE_i = RI_i(N \cdot L)d\omega = (sR_s + dR_d)I_i(N \cdot L)d\omega \quad (2-2)$$

这里 s 和 d 分别表示高光和漫反射系数, 且满足 $s+d=1$ 。如果再加上环境光影响, 则上述公式可变化为:

$$I_r = I_a R_a + (sR_s + dR_d)I_i(N \cdot L)d\omega$$

Cook 和 Torrance 在高光项 R_s 中引入了微平面模型, 这是根据在 Torrance 和 Sparrow^[2] 在 1967 年提出的材质表面由众多微小的、两边等长的 V 形槽腔构成微平面 (Microfacet), 且任意 V 型槽腔满足理想镜面反射规律的理论的基础上进行推导而来的。

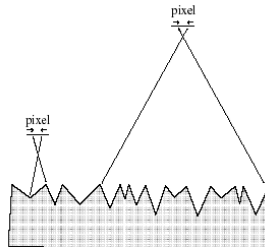


图 2 Torrance 和 Sparrow 提出的 V 形槽微平面示意图

Cook 和 Torrance 假设环境光为一个恒定值, 漫反射为理想漫反射, 于是 R_a 和 R_d 与视线方向无关。但是高光项 R_s 与视线方向有关。根据微表面模型的定义, 物体表面由无数朝向不同微小平面组成, 每一个微小平面可以看作一个镜面, 对入射光产生镜面反射。因此, 只有法线方向与半角向量 H (这里 $H = \frac{L+V}{\|L+V\|}$) 相同的微小平面才会对高光项产生贡献。定义高光项的形式为:

$$R_s = \frac{F \cdot D \cdot G}{\pi(N \cdot L)(N \cdot L)} \quad (2-3)$$

这里, F 为菲涅尔项、 G 为阴影遮挡项、 D 为朝向分布项。

2.1 阴影遮挡 (Shadowing and masking)

阴影遮挡 (shadowing and masking) G 函数可以用下面的公式表示:

$$G = \min(1, \frac{2(N \cdot H)(N \cdot V)}{(V \cdot H)}, \frac{2(N \cdot H)(N \cdot L)}{(V \cdot H)}) \quad (2-4)$$

这里 $\min()$ 函数内的三项分别对应着光线未发生遮挡 (如图 3 (a)), 出射光被遮挡 (如图 3 (b)), 入射光被遮挡 (如图 3 (c))。

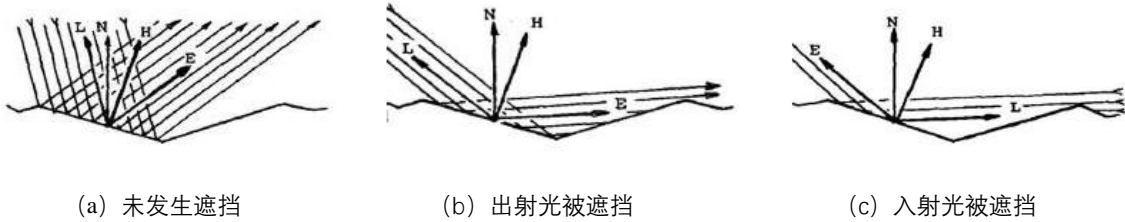


图 3 微平面光线遮挡和阴影情况

2.2 朝向分布函数 (Normal distribution function, NDF)

朝向分布函数 (Normal distribution function, NDF) D 可以用 Beckmann[2] 模型表达式:

$$D = \frac{1}{m^2 \cos^2 \alpha} e^{-[\frac{\tan \alpha}{m}]^2} \quad (2-5)$$

这里 α 表示 H 和 N 之间的夹角, m 则决定了高光的分布范围。 m 取值较小时, 微小平面的朝向比较统一, 因此高光的范围比较窄。

2.3 菲涅尔项 (Fresnel Factor)

菲涅尔项 (Fresnel Factor) F 光学平面并不会将所有光线都反射掉, 而是一部分被反射, 一部分被折射, 反射比例符合菲涅尔方程, 具体可以表示成为:

$$F = \frac{(g-c)^2}{2(g+c)^2} \left\{ 1 + \frac{[c(g+c)-1]^2}{[c(g-c)+1]^2} \right\} \quad (2-6)$$

这里

$$c = \cos \theta = V \cdot H$$

$$g^2 = n^2 + c^2 - 1$$

当 $\theta = 0$ 时, $c=1, g=n$, 令此时的 F 值为 F_0

$$F_0 = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 \quad (2-7)$$

进一步可以求得:

$$n = \frac{1+\sqrt{F_0}}{1-\sqrt{F_0}} \quad (2-8)$$

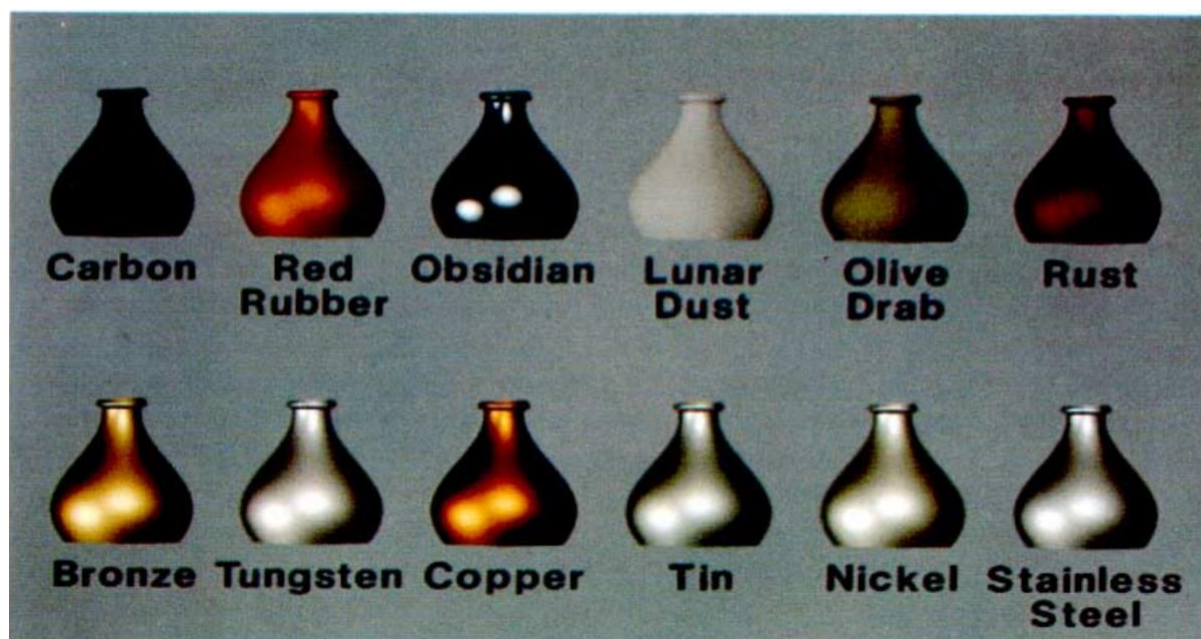


图 4 1982 年 Cook 和 Torrance 论文中渲染的结果图

3 由高光项到 BSDF——Walter 关于 Cook-Torrance 模型的完善

前面回顾了 Cook-Torrance 在其 1982 年的论文中基于微平面理论提出的反射模型，其中的高光项：

$$R_s = \frac{F \cdot D \cdot G}{\pi(N \cdot L)(N \cdot L)} \quad (3-1)$$

已经在形式上和我们现在所熟知的 Cook-Torrance 模型非常像了，有一点区别就是分母里面系数是 π ，而我们所熟知的 Cook-Torrance 模型是系数是 4。

Walter^[4]等人将 Cook-Torrance 模型从模拟粗糙表面反射推广到粗糙表面的透射情况。并且，提出了一个新的微表面分布函数 GGX。通过对真实采集数据的拟合以及与前人提出的分布函数比较，GGX 函数能够更好地拟合真实数据。

3.1 考虑透射情况的微平面模型

如图 5 所示，在只考虑反射的微平面模型，只需计算光线在微平面上镜面的反射情况，而引入了透射的微平面模型，就需要考虑光投射的过程，而且等于间接推翻了早期微平面理论中微平面理论关于每个微平面都是理想镜面的假设。

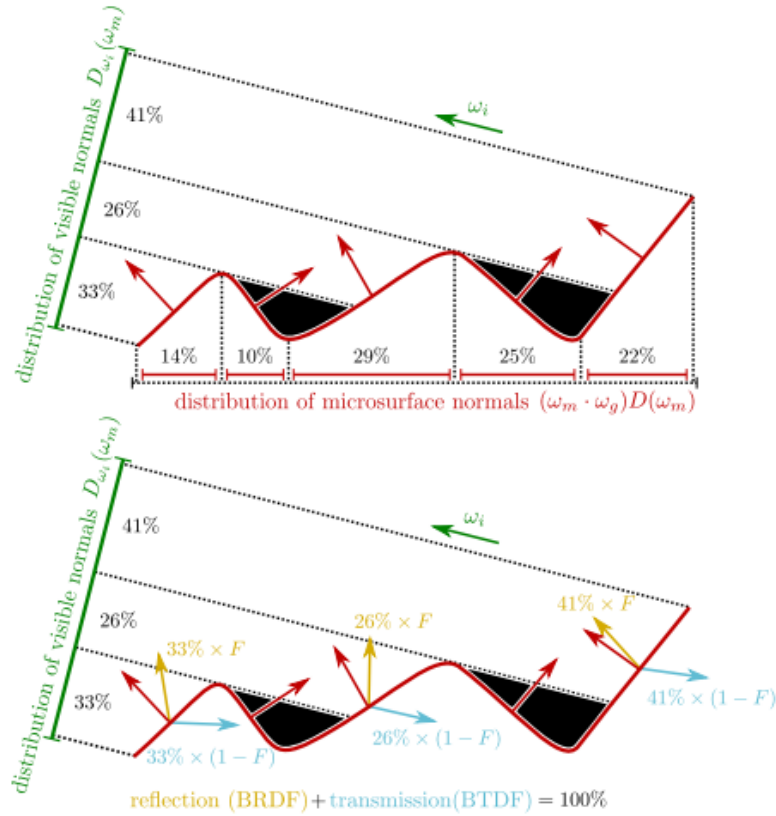


图 5 只考虑反射的微平面模型和引入透射的微平面模型示意图

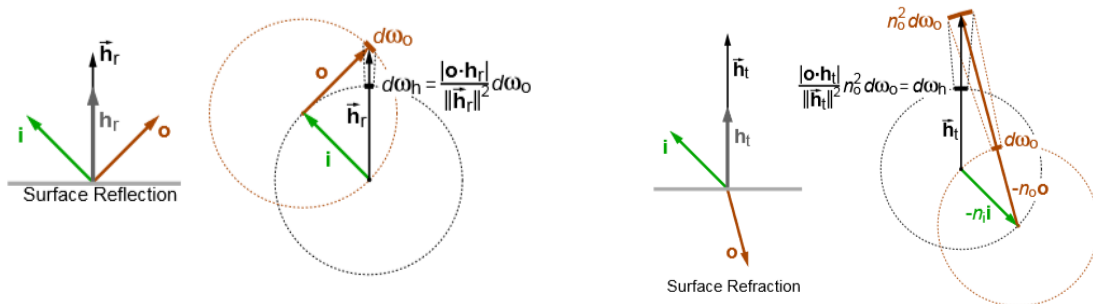
Walter 等人^[4]在《Microfacet Models for Refraction through Rough Surfaces》这篇论文中提出，给定物体表面某一点的法线方向 n ，入射光方向 i ，以及出射光方向 o ，则该物体表面材质的 BSDF (s 表示散射 scattering) 可以表示为 BRDF 和 BTDF 之和：

$$f_s(i, o, n) = f_r(i, o, n) + f_t(i, o, n) \quad (3-2)$$

这里， $f_r(i, o, n)$ 表示 BRDF， $f_t(i, o, n)$ 表示 BTDF。对于 BRDF，Walter 给出了 1982 年 Cook 和 Torrance 论文中描述反射的高光项 R_s （下标 s 表示高光 specular）类似的形式：

$$f_r(i, o, n) = \frac{F(i, h_r) G(i, o, h_r) D(h_r)}{4 |i \cdot n| |o \cdot n|} \quad (3-3)$$

这里的 F, G, D 依然分别表示菲涅尔项，阴影遮挡函数，微平面法向分布函数， h_r 表示的半角向量（即入射方向和出射方向的中间向量），但是可以发现分母中的 π 变成了 4，这是因为在后面的推导中，这里的函数 D 项用了 Cook-Torrance 原始模型不同的归一化。



(a) 理想镜面反射

(b) 理想透射

图 6 微平面 (a) 理想反射 (b) 理想透射示意图

在微平面理想镜面反射时，其半角向量即为微平面的法向量方向，如果将微平面折射考虑进来，那么可以得到下面这样的公式：

$$\mathbf{h}_t = -(\mathbf{n}_i \mathbf{i} + \mathbf{n}_o \mathbf{0}) \quad (3-4)$$

这里定义了推广的中间向量 (halfway factor) \mathbf{h}_t ， \mathbf{n}_i 和 \mathbf{n}_o 分别表示透射面两边介质的相对密度。在理想折射情况下， \mathbf{h}_t 与微平面的发现相同。

3.2 基于微平面模型的 BTDF 函数

经过若干步的推导出基于微平面模型的 BTDF 函数：

$$f_t = \frac{|\mathbf{i} \cdot \mathbf{h}_t| |\mathbf{o} \cdot \mathbf{h}_t|}{|\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}| |\mathbf{o} \cdot \mathbf{n}|} \frac{n_o^2 (1 - F(\mathbf{i}, \mathbf{h}_t)) G(\mathbf{i}, \mathbf{o}, \mathbf{h}_t) D(\mathbf{h}_t)}{(n_i (\mathbf{i} \cdot \mathbf{h}_t) + n_o (\mathbf{o} \cdot \mathbf{h}_t))^2} \quad (3-5)$$

基于微平面模型得出的 f_t 函数具有 Cook-Torrance 原始模型所具有的几个影响项——F, G, D 项。

Walter 的模型的美妙之处在于， f_r 和 f_t 中的 F, G, D 函数项是同一的，而不是针对反射和透射有不同的 F, G, D 项，这也体现了利用微平面理论模型分析光照模型的优之处。

对于菲涅尔项，Walter 的模型中 F 项与 Cook-Torrance 模型中类似：

$$F = \frac{(g-c)^2}{2(g+c)^2} \left\{ 1 + \frac{[c(g+c)-1]^2}{[c(g-c)+1]^2} \right\} \quad (3-6)$$

c 的含义依然是半角的 cos 值，但是这里的 g 被定义成为与介质密度相关的函数。其定义为：

$$g = \sqrt{\frac{n_t^2}{n_i^2} - 1 + c^2} \quad (3-7)$$

对于阴影遮挡函数 G，Walter 采用了的是 Smith^[9] 阴影遮挡函数。该函数依赖于微表面法向分布函数 D，最初它是用来计算高斯分布的阴影遮挡，后来被推广到任意的分布函数。Smith 的 G 函数用两个单向阴影函数 G_1 的乘积来近似表示：

$$G(\mathbf{i}, \mathbf{o}, \mathbf{h}) \approx G_1(\mathbf{i}, \mathbf{n}) G_1(\mathbf{o}, \mathbf{n}) \quad (3-8)$$

这里的 G_1 函数和法向分布函数 D 相关，将在介绍法向分布函数中进行介绍。

3.3 微平面法向分布函数与 GGX 分布函数

关于微平面法向分布函数 D，Walter 采用了用 GGX 分布函数来描述：

$$D(\mathbf{m}) = \frac{\alpha_g^2 x^+(m \cdot \mathbf{n})}{\pi \cos^4 \theta_m (\alpha_g^2 + \tan^2 \theta_m)^2} \quad (3-9)$$

这里 θ_m 表示给定方向参数 m 与宏观表面法向 n 的夹角，而 α_g 表示可以控制的粗糙度， $x^+(t)$ 表示阶跃函数，当里面的参数 $t > 0$ 时，值取 1，当 $t \leq 0$ ，值取 0。

进一步，在阴影遮挡函数 G 表达式中，单向阴影函数 G_1 可以表示为

$$G_1(\mathbf{v}, \mathbf{m}) = x^+ \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{m}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}} \right) \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \alpha_g^2 \tan^2 \theta_m}}$$

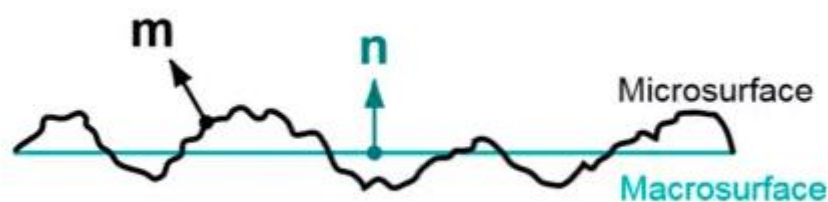


图 7 宏观法向 n 与微平面法向 n 之间的关系示意图

如图 8 所示, Walter 将 GGX 分布以及考虑微平面折射构建的 BSDF 渲染粗糙半透明物体的结果。

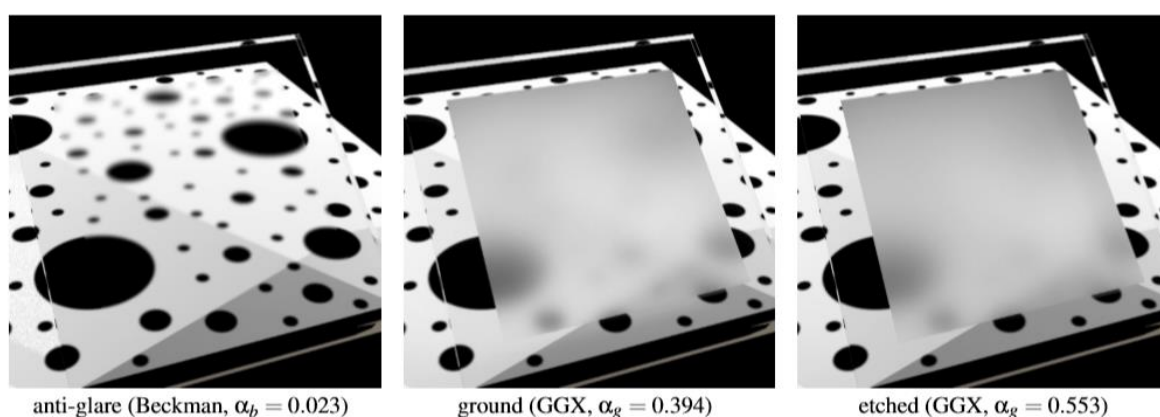


图 8 使用 Beckman 法向分布和 GGX 法向分布对粗糙半透明玻璃的渲染结果

4. 基于微平面 BSDF 重要性采样方法——Heitz 微平面可见法向采样

前面提出的分析 BSDFs 的采样方案通常从随机选择一个与入射光方向无关的微面法线开始。要使用这些法线对整个 BSDF 进行采样, 需要任意大的样本权重, 从而产生可能的荧光。此外, 在掠射角度下, 近一半的采样法线面向入射光线, 必须被拒绝, 这使得采样方案效率低下。相反, Heitz^[10]等人利用微面理论的结构直接从可见法向 (visible normal) 的分布中提取样本, 与以往的方法相比, 该方法产生了更高的质量和更低的方差样本。

4.1 法向分布函数和可见法向分布函数

下面比较一下微平面的法向分布函数和可见法向分布函数的区别。

法向分布函数 (The distribution of normals) D 描述了微表面统计分布的法线 ω_m 。微平面的面积投影到几何表面的法向 ω_g 可以得到表面的单位面积, 即:

$$\int_{\Omega} (\omega_m \cdot \omega_g) D(\omega_m) d\omega_m = 1 \quad (4-1)$$

参数模型通常指定两个正交切线方向的粗糙度参数 α_x 和 α_y (对于各向同性 BSDF 方程 $\alpha_x=\alpha_y$)。当这些参数需要被明确可以将法向分布函数从 $D(\omega_m)$ 写成 $D(\omega_m, \alpha_x, \alpha_y)$ 。

可见法向分布函数(The distribution of visible normals) D_{ω_i} 描述在入射方向 ω_i 的情况下可见的法向 ω_m 统计分布情况，其具体定义如下：

$$D_{\omega_i}(\omega_m) = \frac{G_1(\omega_i, \omega_m) |\omega_i \cdot \omega_m| D(\omega_m)}{|\omega_i \cdot \omega_g|} \quad (4-2)$$

这里 $|\omega_i \cdot \omega_m|$ 表示在入射方向为 ω_i 时微平面的法向 ω_m 上投影面积， $|\omega_i \cdot \omega_g|$ 表示在入射方向为 ω_i 时在宏观几何平面法向 ω_g 上的投影面积， G_1 是遮挡函数。

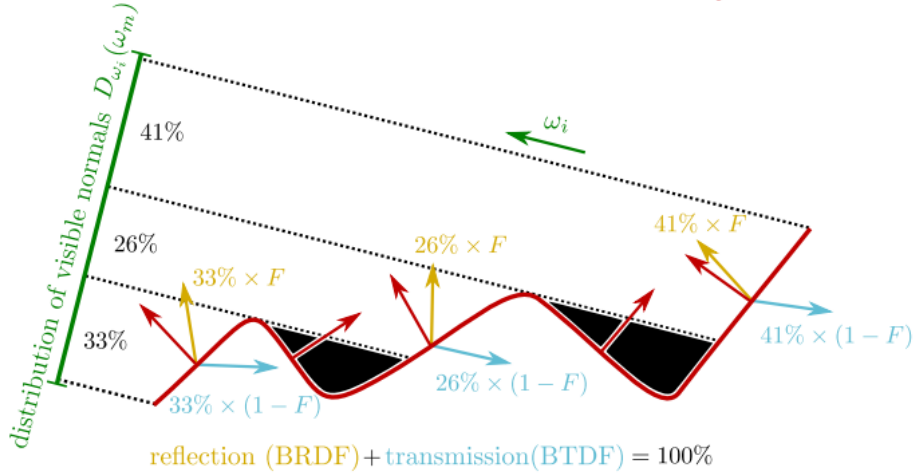


图9 D_{ω_i} 和 D 关系示意图

根据 Heitz 在《Understanding the Masking-Shading Function in Microfacet-Based BRDFs》^[8]中推导，可以一个在数学完备定义的遮挡函数 G_1 ，应该使得 D 和 D_{ω_i} 满足下面的方程：

$$\int_{\Omega} D_{\omega_i}(\omega_m) d\omega_m = 1 \quad (4-3)$$

这样一来，对于微平面的外貌就有了一定的限制，根据 Heitz 的描述对于 V 型槽腔^[1]的微平面模型和 Smith^[9]的非连续微平面模型可以适用于这种模型。

4.2 对可见法向进行重要性采样

整个散射模型可以由局部光照方程得出：

$$L(\omega_i) = \int_{\Omega} L(\omega_o) |\omega_o \cdot \omega_g| f(\omega_i, \omega_o) d\omega_o \quad (4-4)$$

这里 $f(\omega_i, \omega_o)$ 就是 BSDF 方程， $L(\omega_o)$ 是离开方向的辐射强度。正如前面所提到的那样 $f(\omega_i, \omega_o) = f_r(\omega_i, \omega_o) + f_t(\omega_i, \omega_o)$ 。

要计算局部光照（方程 4-4），需要用到 cosine 权重的重要性采样，先回顾一下早期的重要性采样方法^{[4][11][12]}，早期的采样都是通过 $\text{PDF}(\omega_m \cdot \omega_g) D(\omega_m)$ 生产微平面法向 ω_m 而不是直接采样出射方向 ω_o ，然后，在采样法线上生成光线出射方向，对于反射：

$$\omega_o = 2|\omega_i \cdot \omega_m| \omega_m - \omega_i \quad (4-5)$$

对于折射：

$$\omega_o = \left(nc - \text{sign}(\omega_i \cdot \omega_g) \sqrt{1 + n(c^2 - 1)} \right) \omega_m - n\omega_i \quad (4-6)$$

这里 $c = (\omega_i \cdot \omega_m)$, $n = \frac{n_i}{n_o}$ 。

反射和折射基于菲涅尔项 $F(\omega_i, \omega_m)$ 被随机的选择。最终采样的权重可以描述为：

$$\text{weight}(\omega_o) = \frac{|\omega_i \cdot \omega_m| G_2(\omega_i, \omega_o, \omega_m)}{|\omega_i \cdot \omega_g| |\omega_m \cdot \omega_g|} \quad (4-7)$$

早期的采样方法用伪代码描述如下：

```

 $\omega_m \leftarrow \text{Sample } (\omega_m \cdot \omega_g) D(\omega_m)$ 
if  $\mathcal{U} < F(\omega_i, \omega_m)$  then
     $\omega_o \leftarrow \text{reflect}(\omega_i, \omega_m)$ 
else
     $\omega_o \leftarrow \text{transmit}(\omega_i, \omega_m)$ 
end if
 $\text{weight}(\omega_o) \leftarrow \frac{|\omega_i \cdot \omega_m| G_2(\omega_i, \omega_o, \omega_m)}{|\omega_i \cdot \omega_g| |\omega_m \cdot \omega_g|}$ 

```

图 10 早期对于微平面光线出射方向采样伪代码

如图 11 所示，早期的采样方法在掠射角上有两个问题：第一个问题是，一半的生成法向 ω_m 是微平面内侧的 ($\omega_i \cdot \omega_o < 0$)。相关的权值是 0，所以一半的样本空间被浪费了。第二个问题是，Smith 微平面模型的样本权值可以任意高，这样会导致不必要的方差，特别是对于具有多个表面交互作用的路径 (尽管 V 型槽腔微平面模型的样本权值最多为 2)。

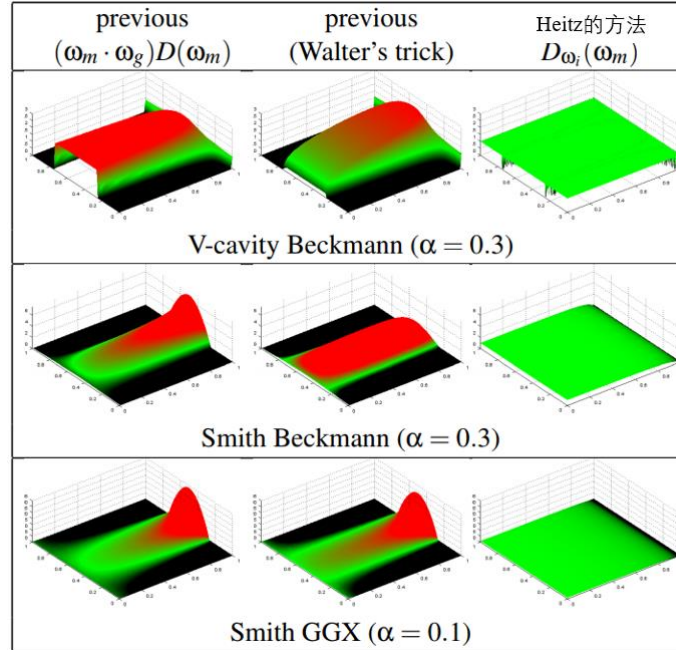


图 11 Heitz 的重要性采样方法和先前方法的采样权重在不同微表面分布模型下在采样空间的分布情况

而 Heitz 的采样则是直接针对出射方向的，其采样方法的伪代码如下：

```

 $\omega_m \leftarrow \text{Sample } D_{\omega_i}(\omega_m)$ 
if  $\mathcal{U} < F(\omega_i, \omega_m)$  then
     $\omega_o \leftarrow \text{reflect}(\omega_i, \omega_m)$ 
else
     $\omega_o \leftarrow \text{transmit}(\omega_i, \omega_m)$ 
end if
 $\text{weight}(\omega_o) \leftarrow \frac{G_2(\omega_i, \omega_o, \omega_m)}{G_1(\omega_i, \omega_m)}$ 

```

图 12 Heitz 微平面出射方向重要性采样方法伪代码

Heitz 的采样方法背后的核心理念是使用微平面可见法向 D_{ω_i} 的分布作为采样的 PDF，而不是和视角无关的 PDF $(\omega_n \cdot \omega_g)D(\omega_m)$ 。一个入射光线 ω_i 相交一个随机分布内的正常选择可见的法线光线和反射或传播。只需要添加阴影（shadowing），因为它不是直接从这个模型中出现的，而是为了在微表面强制单次散射。权值 $\frac{G_2(\omega_m, \omega_i, \omega_g)}{G_1(\omega_m, \omega_i)}$ 是可见的阴影。注意，当掩蔽和阴影不相关，即 $G_2(\omega_m, \omega_i, \omega_g) = G_1(\omega_i, \omega_m)G_1(\omega_o, \omega_m)$ ，那么权值可以化简得到下来单独跟踪 $\frac{G_2(\omega_m, \omega_i, \omega_g)}{G_1(\omega_i, \omega_m)} = G_1(\omega_o, \omega_m)$ 。这是有道理的，因为如果遮罩和阴影不相关，那么可见阴影就是阴影。

关于先前的重要性采样和 Heitz 的重要性采样方法的特性比较如下：

	previous	Heitz的方法
PDF(ω_m)	$(\omega_m \cdot \omega_g) D(\omega_m)$	$D_{\omega_i}(\omega_m)$
weight(ω_o)	$\frac{ \omega_i \cdot \omega_m G_2(\omega_i, \omega_o, \omega_m)}{ \omega_i \cdot \omega_g \omega_m \cdot \omega_g }$	$\frac{G_2(\omega_i, \omega_o, \omega_m)}{G_1(\omega_i, \omega_m)}$
V-cavities G	weight(ω_o) $\in [0, 2]$	weight(ω_o) $\in [0, 1]$
Smith G	weight(ω_o) $\in [0, \infty[$	weight(ω_o) $\in [0, 1]$

图 13 重要抽样技术的性质

根据 Heitz 理论，对微平面 V 型槽腔模型进行 $D_{\omega_i}(\omega_m)$ 采样的算法流程如下：

```

 $\omega_m \leftarrow \text{Sample } (\omega_m \cdot \omega_g) D(\omega_m)$   $\triangleright$  1. choose microsurface
if  $\mathcal{U} < \frac{\langle \omega_i, \omega_m' \rangle}{\langle \omega_i, \omega_m \rangle + \langle \omega_i, \omega_m' \rangle}$  then  $\triangleright$  2. choose normal
     $\omega_m \leftarrow \omega_m'$ 
end if

```

图 14 对 V 型槽腔微平面模型进行 $D_{\omega_i}(\omega_m)$ 采样算法流程

首先，根据先前的方法从 $\text{PDF}(\omega_m \cdot \omega_g)D(\omega_m)$ 中采样，如图 15 所示，这样就可以得到两个随机的法向 ω_m 和 ω'_m 。

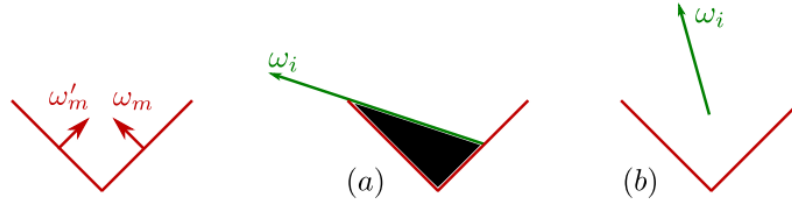
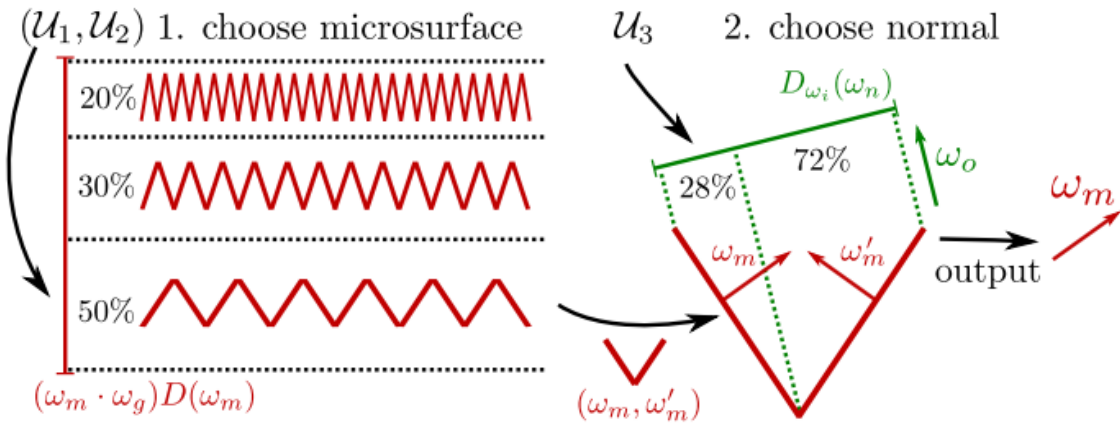


图 15 微平面 v 型槽腔模型和遮挡示意图

然后如可以在 ω_m 或 ω'_m 之间使用选择概率分别正比于 $\langle \omega_i, \omega_m \rangle$ 和 $\langle \omega_i, \omega'_m \rangle$ 的采样，这和 ω_i 投影区域相对应。这个随机选择,通过投影面积的加权，目的就是前面所讲的将 $\text{PDF}(\omega_n \cdot \omega_g)D(\omega_m)$ 转化为 $D_{\omega_i}(\omega_m)$ 。在具体实践中,还有 $\frac{\langle \omega_i, \omega'_m \rangle}{\langle \omega_i, \omega_m \rangle + \langle \omega_i, \omega'_m \rangle}$ 的概率对 ω_m 和 ω'_m 进行随机交换。



对微平面 v 型槽腔进行 $D_{\omega_i}(\omega_m)$ 采样示意图

4.3 微平面法向采样和可见法向采样渲染结果对比

如图 16 所示，对可见法向采样不会产生萤光伪影，并能显著降低方差

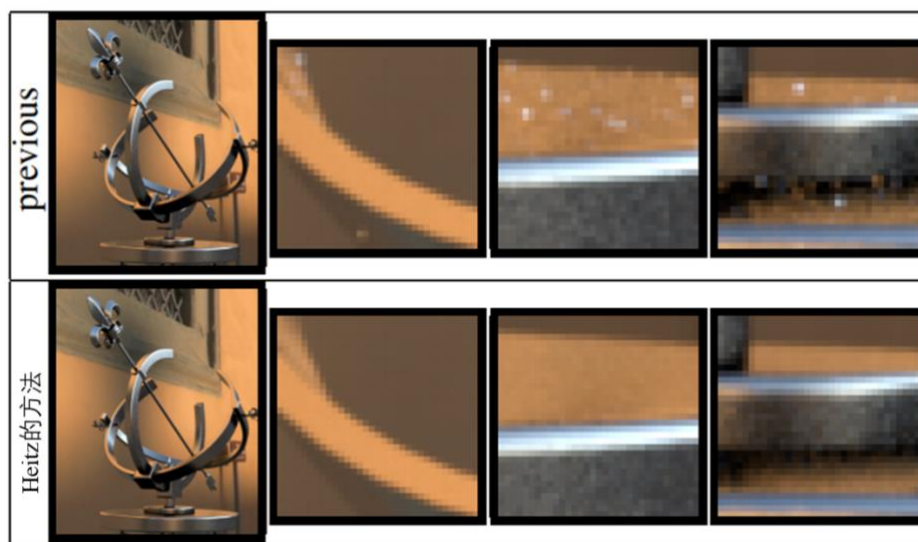


图 16 对微平面法向采样和可见法向采样渲染结果

如图 17 所示, 和前面的 Walter 的方法相比, Heitz 的方法对于毛玻璃的渲染噪点更少更加真实。

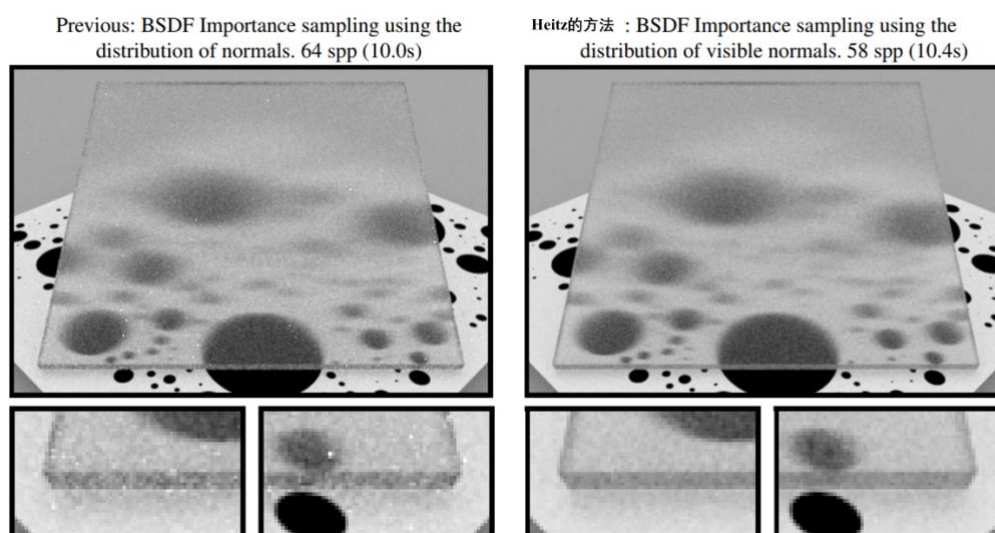


图 17 对微平面法向采样和对可见法向采样对半透明玻璃渲染结果

5.由微平面单次散射到微平面多次散射——Lee 万花筒多次散射模型

只有很少量的工作试图解释微观层面的多重散射。Oren 和 Nayar^[13]考虑到槽内散射的两个反射, 建立了朗伯 (Lambertian) 对称 V 型槽的 BRDF 模型。后来, Saint-Pierre 等人^[14]进一步分析了第二次弹射后在 Lambertian 槽内的多次散射。Koenderink 等^[17]提出了一种以球形凹痕为模型的微表面的闭型分析 BRDF 模型。Raymond 等^[16]对任意形状的划痕进行了光传输建模, 扩展了之前 V 型和 U 型槽的微平面模型, 通过二维光传输模拟表格解释了多重散射。Kelemen 和 Szirmay-Kalos^[11]使用伪扩散项补偿了多次散射的损失。Heitz 等^[7]提出了一种基于 Smith 的模型。Dupuy 等^[6]进一步分析了 Smith

模型中的多次散射与各向异性介质中体积光输运的关系。Joo Ho Lee 等人^[18]开发了微平面 V 型槽对称和非对称的变体,利用它们提出了一种有效的、辐射测量正确的、封闭形式的 BRDF,用于非对称 v 形槽中的多次散射,包括正确的菲涅耳反射。他们针对微平面的多重散射,提出了一种分析模型,叫做万花筒 (Kaleidoscopic model) 分析模型。他们的模型不需要任何昂贵的随机采样方法进行数值光输运模拟,适用于现有的双向方法,满足相互作用型和能量守恒。

下面将介绍一下 Joo Ho Lee^[18]的微平面 V 型槽多重散射模型。

计算 v 型槽内反射的常用方法是生成在几何参照系中定义的新的反射光线。相反, Lee 的多重散射模型的关键直观思想是根据光线的参照系来表示反射。从这个角度来看,通过简单地计算直线方程,可以在一系列连续的虚拟 v 形槽(形成万花筒模型)中以解析的方式描述多重反射。在本节的其余部分,我们首先介绍对称凹槽模型的几何形状,以及如何使用它处理多个反射。

5.1 V 形槽内的多次散射的万花筒分析模型 (Kaleidoscopic model)

Lee 把多次散射的 V 型槽模型叫做,万花筒 v 型槽模型。

如图 18 所示,这是微平面 V 型槽的经典视图,扩展到无限的轴 u ,微平面法向 $s = (\phi_v, \phi_s)$ 垂直于 u 。向量 n , $i = (\phi_i, \phi_i)$ 和 $o = (\phi_o, \phi_o)$ 分别表示表面法向,入射光方向和出射光方向。在这里的坐标系中,顺时针方向的角是负的,逆时针方向的角是正的。

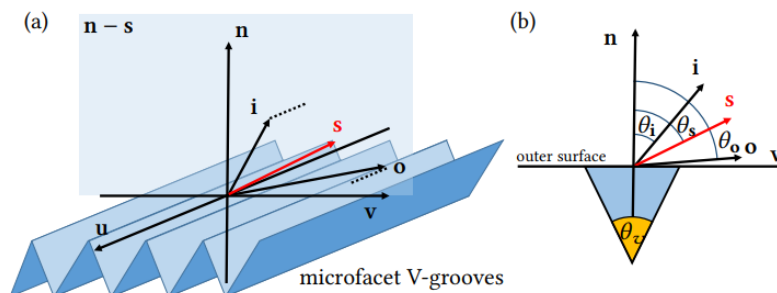


图 18 微平面 v 型槽的参考系示意图

如图 19 (a)所示,这里演示了如何构建万花筒模型。不是计算反射槽内交点和镜面,直到光线最后离开(红色实线穿越深蓝色的三角形),而是在这里创建出射方向 i 的一个直线(红色虚线),创建一个虚拟槽(浅蓝色三角形)是前一个的镜面反射,共享一条边(对称的镜面反射版本槽看起来完全相同;然而,当引入非对称沟槽时,形状差异将变得明显)。这种虚拟凹槽的“展开”一直持续到线条离开它们的边界圆为止(单位长度)。这就产生了一个简单的几何结构,正如我们接下来将看到的,它可以一种快速和分析的方式计算多重散射。

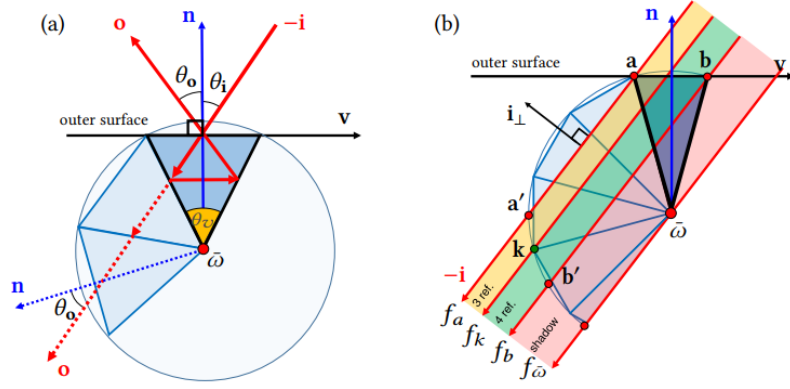


图 19 对称 V 型槽的万花筒分析

内部散射的次数:万花筒模型可以绕过昂贵的计算多重散射槽内;作为代价,只需要计算几个几何变量。这样的模型的第一个有趣的特性是,实际槽内的反射次数由与沟槽边缘的直线相交的次数决定。此外,一个入射光线只能通过 $k-1$ 次或 k 次反射,且由入射角 θ_i , 入射点, V 型槽角决定。给定出射角 $\theta_v = \pi - 2|\theta_s|$, 那么可以得到

$$k = \lfloor (\pi + 2\theta_i) / (\pi - 2|\theta_s|) \rfloor + 1 \quad (5-1)$$

现在需要定义 $k-1$ 或 k 反射之间的过渡点 k 。如图 19 (b) 所示,可以在万花筒模型中围绕凹槽的边界圆上定义了这样的点 k 。直观地说,如果将 a 和 b 对 i_\perp (轴垂直于入射方向穿过圆的中心) 镜像可以在圆边界上得到点 a' 和 b' 。点 k 必须在 a' 和 b' 之间, 因为 $\theta_k = k\theta_v - \theta_v/2$ 。

出射方向 o : 光线经过多次散射最后离开槽的方向可以通过一个和入射方向 i 和微平面法向 s 相关的函数计算:

$$\theta_o = \begin{cases} (-1)^{k-1}(\theta_i + \pi - (k-1)(\pi - 2|\theta_s|)), & (k-1)\text{reflections} \\ (-1)^k(\theta_i + \pi - k(\pi - 2|\theta_s|)), & (k)\text{reflections} \end{cases} \quad (5-2)$$

几何衰减项 G :为了得到一个类似 Cook-Torrance^[2]模型中的阴影遮蔽项 $G(i, o, s)$ 的几何衰减项, Lee 定义了平行于入射方向 i 为 $f(P) = i_\perp \cdot P$, 这里 P 代表任意点。函数的输出值表明正交线远离原点的偏移 ω 。我们可以定义一个新的几何衰减因子 $G(i, o, s)$ 从简单关系:

$$G(i, o, s) = \begin{cases} (f_a - f_k) / (f_a), & (k-1)\text{reflections} \\ (f_k - f_b) / (f_b), & (k)\text{reflections} \end{cases} \quad (5-3)$$

这里 f_a , f_b 和 f_k 代表从 ω 偏移距离, 分别从获得 $f(a)$, $f(b)$ 和 $f(k)$ 中获得。请注意, 如果 $f_b < 0$, 然后光线到达相反的平面; 由于这种情况应该通过对该面进行镜像来处理, 所以我们设置 $f_b = \max(f(b), 0)$ 。图 19 (b) 显示了 $k=4$ 的例子。 $f_a - f_k$ 区域内的光线(黄色)将反射三次, 而 $f_b - f_\omega$ 区域内的光线(绿色)将反射四次。这里 $f_b - f_\omega$ 区代表阴影区域。

5.2 非对称 V 形槽内的多次反射

现在我们描述如何将万花筒模型扩展到非对称凹槽, 并解释如何处理凹槽内的多重反射。

需要再次参考系统的法向 n 。在非对称情况下, 我们有两个方面的方向, 左边和右边的微平面, s_l 和 s_r ; 法向 n 和每个微平面之间的角度分别是 θ_r 和 θ_l 。与对称情况一样, 在左侧沿逆时针方向迭代

镜像 V 形槽，创建一个非等腰三角形扇形。因此，我们不再有一个边界圆连接所有三角形的外部顶点，而是有两个，如图 20(a)所示。因此，为了用解析的方法计算出一条射线在凹槽内的交点数，现在需要计算两个圆的交点。这相当于考虑两个重叠的对称槽间隔角度为 $2\theta_v$ ，两个槽都是从各自槽的物理微平面开始(图 20 中的紫色和橙色冲楔形)。

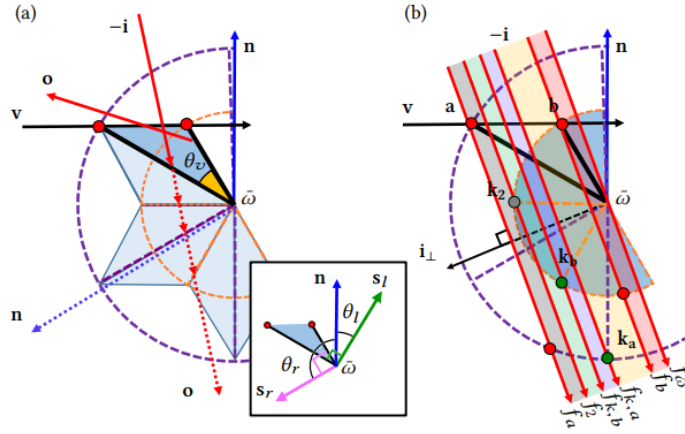


图 20 非对称 V 型槽的万花筒分析

内部反射的次数：与对称 V 型槽模型类似，我们可以计算出一条射线的反射次数，它是入射方向 i 和入射位置的函数。然而，我们现在需要计算这两组重叠的三角形，导致两个 k 相关的数字， k_a 和 k_b ，且满足

$$k_b = 2[(\pi + 2\theta_i - (\theta_l + \theta_r))/(2\theta_v) + 0.5] \quad (5-4)$$

和 $k_a = k_b + 1$ 。

出射方向 o ：将光线入射方向 i 作为光线经过 k 次反射离开非对称 V 型槽的出射方向 o 的函数：

$$\theta_o = (-1)^k \left(\theta_i - \frac{\theta_l + \theta_r}{2} + \pi - k(\pi + \theta_l - \theta_r) \right) + \frac{\theta_l + \theta_r}{2} \quad (5-5)$$

几何衰减项 G ：给定槽点 a 和 b ，以及过渡点 k_a 和 k_b ，可以使用 $\max(0, f(P))$ 定义 f_a ， f_b ， $f_{k,a}$ 和 $f_{k,b}$ 。此外，为了检查光进入槽或直接反射（单反射），需要定义 $f_2 = f(k_2)$ ，相当于 b 点相邻的镜像槽，所以 $\theta_2 = \theta_r - \pi/2 + 2\theta_v$ 。如图 20 所示，在图中定义五个不同的光线区域，分别表示单个散射， $k_b - 1$ ， k_b ， $k_b + 1$ 反射，以及阴影，因此可以把几何衰减项定义为

$$G(i, o, s_l, s_r) = \begin{cases} \max(0, \max(f_2, f_b))/f_a & 1 \text{ refl} \\ \max(0, \min(f_a, f_2) - f_{k,b})/f_a & k_b - 1 \text{ refl} \\ \max(0, \min(f_a, f_{k,b}) - \max(f_{k,a}, f_b))/f_a & k_b \text{ refl} \\ \max(0, \min(f_{k,b}, f_{k,a}) - f_b)/f_a & k_b + 1 \text{ refl} \end{cases} \quad (5-6)$$

注意，这里假设入射光线首先击中左侧表面；然而支持在适当的表面相交的简单模型通过设置 $\theta_i = -\theta_i$ ， $\theta_l = -\theta_r$ 和 $\theta_r = -\theta_l$ 。

5.3 微平面对称 V 型槽和非对称 V 型槽模型下的 BRDF

Lee 基于前面的分析模型开发了一个新的封闭形式的 BRDF 模型, 扩展了传统的 Torrance 和 Sparrow^[1]微平面理论, 即使对于非对称 v 型槽也支持多次散射。需要说明的是 Lee 的模型和以前的微平面模型共享以下假设:

- 每个面对应于 v 型槽腔的一侧。
- v 型槽腔的纵轴平行于物体表面(即垂直于宏观法线)。
- 相邻两个凹槽形成的所有峰值点位于同一物体平面上;因此, 阴影、掩蔽和相互反射只发生在一个腔内, 而不是在多个腔之间。

- v 型槽内的光传输是完美的镜面。

从这个共同点出发, Lee 的扩展模型与原始的微面理论在两个关键点有所不同:

- 光线在离开 v 型槽前可以散射多次。
- V 型槽的形状与物体表面法线不一定对称。

针对对称 V 型槽微平面模型, 经过 k 次反射的 BRDF 方程为:

$$\rho(i, o; k) = \sum_{m=1}^2 \frac{\sin\theta_{s_m} \prod_{j=1}^k F(i \cdot s_m^j) |i \cdot s| D(s_m) G(i, o, s_m)}{k \sin\theta_h 4 \cos\theta_d |i \cdot n| |o \cdot n|} \quad (5-7)$$

这里 m 表示两个不同微平面法向 s_1 和 s_2 , 最后可以完整的 BRDF 方程:

$$\rho(i, o) = \sum_{k=1}^N \rho(i, o; k) \quad (5-8)$$

其中 N 为 V 型槽腔内的最大反射次数。注意, N 可能是无限的;然而, 我们观察到, 即使对于高粗糙度, N 仍然相对较低。

针对非对称 V 型槽微平面模型, 经过 k 次反射的 BRDF 方程为:

$$\rho(i, o; k, s_l, s_r) = \frac{R(i, o; k, s_l, s_r) |i \cdot s_l| D(s_l) P(\theta_r | \theta_l)}{|i \cdot n| |o \cdot n|} \left| \frac{ds_l}{do} \right| \quad (5-9)$$

这里

$$R(i, o; k, s_l, s_r) = \prod_{j=0}^{k-1} F(i \cdot s_l^j) G(i, o, s_l, s_r) \quad (5-10)$$

同时 $G(i, o, s_l, s_r)$ 非对称 V 型槽的遮蔽项, 此外

$$\left| \frac{ds_l}{do} \right| = \frac{\sin\theta_{s_l}}{0.5 |0.5 - (-1)^k (k+0.5)| \sin\theta_h} \frac{1}{4 \cos\theta_d} \quad (5-10)$$

s_l 和 s_r 都满足入射方向为 i 的光在 k 次反弹后被反射到 o 。

于是可以得到非对称 V 型槽完整的 BRDF 方程:

$$\rho(i, o; k) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho(i, o; k, s_l, s_r) d\theta_r$$

5.3 实验结果与对比

如图 21 所示, 比较多重散射 BRDF 对称(左)和非对称(右)V 型槽。而非对称模型导致了低粗糙度 α 的值只有细微的差别, 其效果更明显的高值。尤其是掩蔽效应在掠射角较低时, 由于 V 型槽处的奇异性, 镜面反射减弱。注意, 因为 Lee 的模型保存能量非常高的粗糙度值 α 可以应用, 而使用 Cook-Torrance 模型导致显著的变暗(失去能量)。

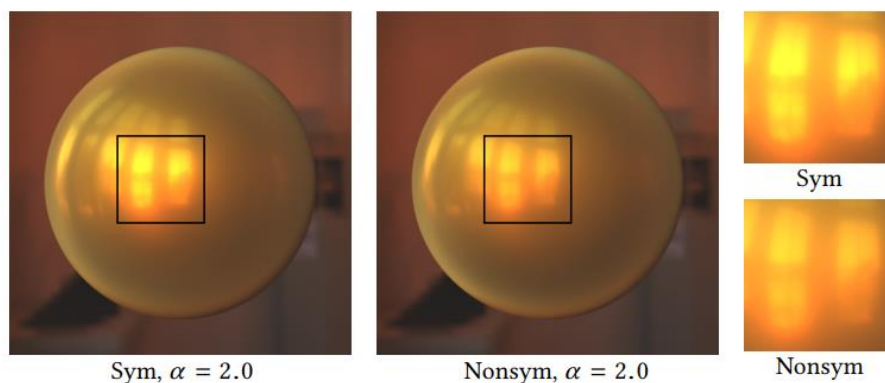


图 21 对称 V 型槽和非对称 V 型槽在相同粗糙度下渲染的结果

如图 22 所示, 随着粗糙度的增加, 微几何中的多次散射量也随之增大。Cook-Torrance 模型忽略了这种相互反射, 导致能量损失和更少的高光。

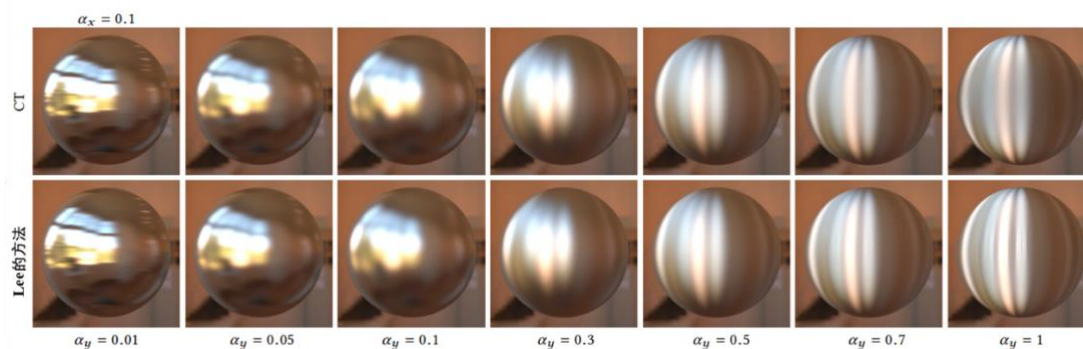


图 22 Lee 的多次散射模型和 Cook-Torrance 模型渲染结果比较

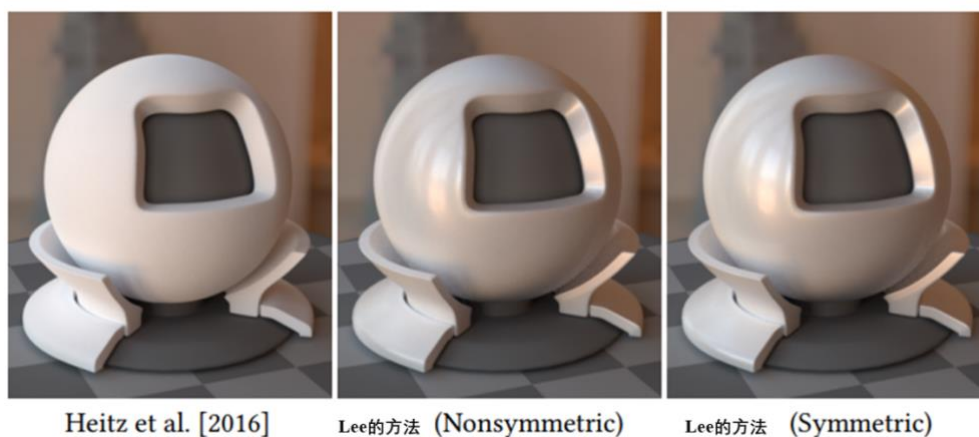


图 23 Lee 的微平面多次散射模型和 Heitz 多次散射模型的对比

参考文献

- [1] K. E. Torrance and E. M. Sparrow. 1967. Theory for Off-Specular Reflection From Roughened Surfaces. *J. Opt. Soc. Am.* 57, 9 (1967), 1105–1114.
- [2] P. Beckmann and A. Spizzichino. 1963. The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces. *Int Ser. Monographs. Electromagn Waves* 4 (1963).
- [3] R. L. Cook and K. E. Torrance. 1982. A Reflectance Model for Computer Graphics. *ACM Trans. Graph.* 1, 1 (1982), 7–24.
- [4] B. Walter, S. R. Marschner, H. Li, and K. E. Torrance. 2007. Microfacet Models for Refraction Through Rough Surfaces. *In Proc. Eurograph. Symp. Rendering.* 195–206.
- [5] C. Kulla and A. Conty. 2017. Revisiting Physically Based Shading at Imageworks. In *Physically Based Shading in Theory and Practice, SIGGRAPH 2017 Courses.*
- [6] J. Dupuy, E. Heitz, and E. d'Eon. 2016. Additional Progress Towards the Unification of Microfacet and Microflake Theories. *In Proc. Eurograph. Symp. Rendering.* 55–63.
- [7] E. Heitz, J. Hanika, E. d'Eon, and C. Dachsbacher. 2016. Multiple-scattering Microfacet BSDFs with the Smith Model. *ACM Trans. Graph.* 35, 4 (2016), 58:1–58:14.
- [8] E. Heitz. 2014. Understanding the Masking-Shadowing Function in Microfacet-Based BRDFs. *J. Comput. Graph. Techn.* 3, 2 (2014), 48–107.
- [9] B. Smith. 1967. Geometrical shadowing of a random rough surface. *IEEE Trans. Antennas Propag.* 15, 5 (1967), 668–671.
- [10] E. Heitz and E. d'Eon. 2014. Importance Sampling Microfacet-Based BSDFs using the Distribution of Visible Normals. *Comput. Graph. Forum* 33, 4 (2014), 103–112.
- [11] KELEMEN C., SZIRMAY-KALOS L.: A microfacet based coupled specular-matte brdf model with importance sampling. In *Eurographics Short Presentations* (2001).
- [12] WARD G. J.: Measuring and modeling anisotropic reflection. *SIGGRAPH Comput. Graph.* 26, 2 (July 1992), 265–272.
- [13] M. Oren and S. K. Nayar. 1994. Generalization of Lambert's Reflectance Model. In *SIGGRAPH*. 239–246.
- [14] D. Saint-Pierre, R. Deeb, D. Muselet, L. Simonot, and M. Hébert. 2018. Light interreflections and shadowing effects in a Lambertian V-cavity under diffuse illumination. *J. Electron. Imag.* (2018).
- [15] J. Dupuy, E. Heitz, and E. d'Eon. 2016. Additional Progress Towards the Unification of Microfacet and Microflake Theories. *In Proc. Eurograph. Symp. Rendering.* 55–63.
- [16] B. Raymond, G. Guennebaud, and P. Barla. 2016. Multi-scale rendering of scratched materials using a structured SV-BRDF model. *ACM Trans. Graph.* 35, 4 (2016), 57.
- [17] J. J. Koenderink, A. J. Van Doorn, K. J. Dana, and S. Nayar. 1999. Bidirectional reflection distribution function of thoroughly pitted surfaces. *Int. J. Comput. Vis.* 31, 2-3 (1999), 129–144.
- [18] Lee J H, Jarabo A, Jeon D S, et al. Practical multiple scattering for rough surfaces[C]//*SIGGRAPH Asia 2018 Technical Papers*. ACM, 2018: 275.