SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Année Universitaire
2024-2025

TD de vibrations (UE Fondamentaux en acoustique)

Master de Mécanique - Spécialité Acoustique - Parcours ATIAM

Nous allons nous intéresser ici au système à 2 degrés de liberté présenté dans la figure 1.

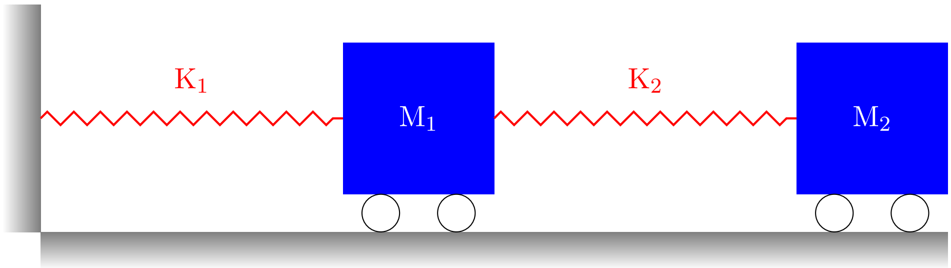

FIGURE 1 – Système à 2 degrés de liberté étudiés

Exercice 1 ✎ Étude du régime forcé d'un oscillateur à 2DDL ⋆

1. Les paramètres du système sont notés M_1, M_2, K_1 et K_2 (système non amorti). Les déplacements de M_1 et M_2 par rapport à leur position d'équilibre sont notés x_1 et x_2. Le système est excité par une force harmonique $F(t) = F_0 \sin \omega t$ sur la masse M_1. Donner l'équation différentielle vérifiée par $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T$. Définir la matrice masse $\mathbf{M}$ et la matrice raideur $\mathbf{K}$.
2. En régime permanent, la réponse $\mathbf{x}(t)$ du système est harmonique et peut s'écrire sous la forme $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{20} \end{bmatrix}^T e^{\jmath\omega t}$. Donner l'équation matricielle vérifiée par le vecteur amplitude $\begin{bmatrix} x_{10} & x_{20} \end{bmatrix}^T$.
3. Déterminer x_{10} et x_{20}.
4. A quelle condition l'amplitude du mouvement de M_1 est-elle nulle ? Montrer que cette condition permet le dimensionnement d'un absorbeur dynamique.
5. Tracer l'évolution du rapport x_{10}/F en fonction de ω. Interpréter. A quoi correspondent les deux fréquences singulières que vous pouvez mettre en évidence ? Expliquez qualitativement comment est modifiée la courbe précédente en présence d'amortissement.

Exercice 2 ✎ Étude du régime libre d'un oscillateur à 2DDL ⋆

Les matrices masse et raideur du système précédent sont données par

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 27 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Ces valeurs sont quelconques et ne vérifient à priori pas la relation obtenue à la question 4 de l'exercice précédent. On s'intéresse ici au régime libre de l'oscillateur, et on cherche pour cela à déterminer ses modes propres. Les conditions initiales imposées à l'oscillateur sont données par $\mathbf{x(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ et par $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

1. Déterminer la matrice $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} = diag(M_i^{-\frac{1}{2}})$
2. Effectuer le changement de variable $\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{q}$. Normaliser l'équation du mouvement par rapport à la masse. Calculer la nouvelle matrice de raideur $\bar{\mathbf{K}}$.
3. On cherche une solution de la forme $\mathbf{q}(\mathbf{t}) = \mathbf{v}e^{\jmath\omega t}$. Donner l'équation vérifiée par ω (équation dite caractéristique ou équation aux valeurs propres). Résoudre et donner les pulsations propres ω_i.
4. Déterminer les vecteurs propres $\mathbf{v_i}$ associés à chaque pulsation propre. Déterminer les vecteurs normés $\mathbf{u_i} = \frac{\mathbf{v_i}}{\|\mathbf{v_i}\|}$.
5. Vérifier que $\mathbf{u_1}$ et $\mathbf{u_2}$ sont orthogonaux.
6. On définit la matrice de passage $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{u_1} & \mathbf{u_2} \end{bmatrix}$. Vérifier les relations : $\mathbf{P}^T\mathbf{P} = \mathbf{I}$ et $\mathbf{P}^T\bar{\mathbf{K}}\mathbf{P} = diag(\omega_i^2)$.
7. Effectuer le changement de variable $\mathbf{q}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}\mathbf{r}(\mathbf{t})$. Donner l'équation vérifiée par le vecteur des coordonnées modales $\mathbf{r}(\mathbf{t})$. Quel est l'intérêt d'exprimer l'équation du mouvement dans la base modale ?
8. Exprimer les conditions initiales dans la base modale. Déterminer $\mathbf{r_0}$ et $\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{0}$.
9. Donner la solution $\mathbf{r}(\mathbf{t})$ vérifiant les conditions initiales.
10. En déduire le vecteur des déplacements $\mathbf{x}(\mathbf{t})$.
11. Décrire la méthode permettant le calcul de la réponse $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ à une excitation non périodique.