Master ATIAM : **Examen de traitement du signal**
UE Fondamentaux pour ATIAM
27 septembre 2022
`Durée : 2 heures. Documents papier autorisés, aucun appareil électronique.`
`Roland Badeau`

Rappels et notations

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations et définitions suivantes :

— Transformée de Fourier à Temps Continu (TFTC) d'un signal analogique $x_a(t)$:

$$X_a(f) = \int_{\mathbb{R}} x_a(t) e^{-2i\pi f t} dt$$

— TFTC inverse : $x_a(t) = \int_{\mathbb{R}} X_a(f) e^{+2i\pi f t} df$

— Transformée de Fourier à Temps Discret (TFTD) d'un signal discret $x(n)$:

$$X(e^{2i\pi\nu}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n) e^{-2i\pi\nu n}$$

— TFTD inverse : $x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(e^{2i\pi\nu}) e^{+2i\pi\nu n} d\nu$

— Transformée de Fourier Discrète (TFD) d'ordre M d'un signal discret fini $x_M(n)$:

$$X_M(k) = \sum_{n=0}^{M-1} x_M(n) e^{-2i\pi \frac{k}{M} n}$$

— TFD inverse : $x_M(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X_M[k] e^{+2i\pi \frac{k}{M} n}$

— Transformée en Z d'un signal discret $x(n)$:

$$X(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n) z^{-n}$$

— Formule d'échantillonnage : si $\forall n \in \mathbb{Z}$, $x_e(n) = x_a(nT)$ où $T \in \mathbb{R}_+^*$, alors

$$X_e(e^{2i\pi\nu}) = \frac{1}{T} \sum_{k\in\mathbb{Z}} X_a\left(\frac{\nu + k}{T}\right) \tag{1}$$

— Fonction d'autocovariance d'un processus $X(n)$ stationnaire au sens large (SSL) réel :

$$R_X(k) = \mathbb{E}((X(n+k) - m_X)\,(X(n) - m_X)) \text{ indépendamment de } n, \text{ où } m_X = \mathbb{E}(X(n)) \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

— Densité spectrale de puissance (DSP) d'un processus $X(n)$ SSL :

$$S_X(e^{2i\pi\nu}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} R_X(k) e^{-2i\pi\nu k}$$

— **Filtrage des processus SSL** : Soit $Y(n)$ le processus obtenu par filtrage stable, de réponse impulsionnelle $h(n)$ et de fonction de transfert $H(z)$, d'un processus SSL $X(n)$. Alors $Y(n)$ est SSL :
  — de moyenne $m_Y = H(1)\, m_X$ (où $H(1)$ est la valeur de la réponse en fréquence en $\nu = 0$),
  — de fonction d'autocovariance $R_Y = h * \tilde{h} * R_X$ (où $\tilde{h}(n) = h(-n)^*$),
  — de DSP $S_Y(e^{2i\pi\nu}) = |H(e^{j2\pi\nu})|^2 S_X(e^{2i\pi\nu})$.

— Formules trigonométriques :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \tag{2}$$

$$\cos(\theta - \phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) + \sin(\theta)\sin(\phi) \tag{3}$$

1 Questions courtes

1.1 Signaux déterministes

a) **Filtre différentiateur.** On considère le filtre qui à une entrée $x(n)$ associe la sortie $y(n) = x(n) - x(n-1)$.
   1) Exprimer sa réponse impulsionnelle $h(n)$ et sa fonction de transfert $H(z)$.
   2) Ce filtre est-il à réponse impulsionnelle finie (RIF) ou infinie (RII) ? Est-il causal, stable ?

b) **Filtre AR1.** On considère le filtre causal défini par sa fonction de transfert $H(z) = \dfrac{1}{1 - az^{-1}}$ avec $|a| < 1$.
   1) Ce filtre est-il stable ? Est-il RIF/RII ? Quelle est la relation entrée/sortie correspondante ?
   2) Donner le domaine de définition de $H(z)$ et calculer la réponse impulsionnelle $h(n)$ correspondante.

c) **Filtre moyenneur**. On considère le filtre de réponse impulsionnelle $g(n) = \frac{1}{2P+1}\,\mathbf{1}_{[-P,P]}(n)$, où $P \in \mathbb{N}^\star$.
   1) Ce filtre est-il RIF/RII ? Est-il causal ? stable ?
   2) Calculer sa fonction de transfert et tracer approximativement sa réponse en fréquence $G(e^{2i\pi\nu})$ pour $\nu \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $P = 2$. Ce filtre est-il passe-haut / passe-bas ? Quelle est sa fréquence de coupure ν_c, définie comme la plus petite fréquence $\nu > 0$ telle que $G(e^{2i\pi\nu}) = 0$?

1.2 Processus aléatoires

a) **Processus SSL**. Prouver que les processus suivants sont SSL, et déterminer leurs moyennes, leurs fonctions d'autocovariance et leurs densités spectrales de puissance :
   1) bruit blanc (centré) $W(n)$ de variance σ^2,
   2) processus AR1 causal (filtrage d'un bruit blanc par $H(z) = \dfrac{1}{1 - az^{-1}}$ de coefficient $a \in]-1\ 1[$).

b) **Somme de deux processus SSL.** Soient deux processus $X_1(n)$ et $X_2(n)$ indépendants, SSL, centrés, de fonctions d'autocovariance R_{X_1} et R_{X_2}, et de DSP S_{X_1} et S_{X_2}. Prouver que le processus $X(n) = X_1(n) + X_2(n)$ est aussi SSL, centré, de fonction d'autocovariance $R_X(k) = R_{X_1}(k) + R_{X_2}(k)$ et de DSP $S_X(e^{2i\pi\nu}) = S_{X_1}(e^{2i\pi\nu}) + S_{X_2}(e^{2i\pi\nu})$.

c) **Puissance d'un processus SSL.** Soit $\epsilon(n)$ un processus SSL réel centré, de DSP $S_\epsilon(e^{2i\pi\nu})$. On définit $\sigma_\epsilon^2 = \mathbb{E}(\epsilon(n)^2)$. Prouver que $\sigma_\epsilon^2 = \int_{-1/2}^{1/2} S_\epsilon(e^{2i\pi\nu})d\nu$.

2 Étude d'un filtre réjecteur

On se donne un réel positif $\rho < 1$ et un angle $\theta \in]-\pi, \pi[$ et on considère un filtre récursif stable dont l'entrée x et la sortie y vérifient :

$$y(n) - 2\rho\cos(\theta)y(n-1) + \rho^2 y(n-2) = x(n) - 2\cos(\theta)x(n-1) + x(n-2)$$

On appelle $h(n)$ la réponse impulsionnelle d'un tel filtre et $H(z)$ la transformée en Z de h. (on ne demande pas de calculer explicitement h)

a) Quels sont les zéros de la fonction définie pour $z \in \mathbb{C}$ par (un polynôme de degré 2 en z^{-1})

$$1 - 2\rho\cos(\theta)z^{-1} + \rho^2 z^{-2}$$

   (on exprimera ces zéros en fonction de $\rho e^{i\theta}$)

b) En déduire les pôles et les zéros de $H(z)$.

c) On suppose que $\theta = \pi/4$, pour quelles valeurs de $\nu \in [-1/2, 1/2[$ a-t-on $H(e^{i2\pi\nu}) = 0$?

d) Pour ν fixée et différente des valeurs calculées ci-dessus, que vaut la limite de $H(e^{i2\pi\nu})$ lorsque ρ tend vers 1 ? En déduire l'allure de $|H(e^{i2\pi\nu})|$ pour $\nu \in [-1/2, 1/2]$ et $\rho = 0.99$ (avec toujours $\theta = \pi/4$).

e) On dispose d'un signal $x(n)$ qui est le résultat de l'échantillonnage à la fréquence $F_e = 10000$ Hz d'un signal en temps continu. Quelle valeur de θ doit-on choisir pour éliminer la fréquence 1000 Hz grace au filtre présenté dans cet exercice ?

3 Suréchantillonnage

On cherche dans cette exercice à produire, à partir d'un signal à temps discret échantillonné à la fréquence F_e, un nouveau signal à temps discret qui restitue fidèlement le signal analogique après conversion numérique/analogique à $2F_e$.

Soit $u(n)$ un signal sommable et $v(n)$ un signal défini à partir de u par :

$$\begin{aligned} v(2n) &= u(n) \\ v(2n+1) &= 0 \end{aligned}$$

a) Exprimer la TFTD de v en fonction de celle de u.

b) Si $U(e^{i2\pi\nu}) = 1/2 - |\nu|$ (pour ν dans [-1/2,1/2]) tracer les TFTD de u et v dans l'intervalle [-1/2,1/2].

c) On suppose que la séquence u est l'enregistrement d'un son qui ne contenait que la fréquence $f_0 = 500$Hz, effectué à la cadence d'échantillonnage $F_e = 5000$Hz. La séquence v est jouée sur un appareil fonctionnant à 10000Hz. Quelle(s) est(sont) la(les) fréquence(s) entendue(s) ?

d) Quel filtre idéal faut-il appliquer à v pour rendre le son joué à la question précédente fidèle à l'original et, plus généralement pour n'importe quelle fréquence $f_0 < 2500$Hz ? Ce filtre est-il RII ou RIF (Réponse Impulsionnelle Infinie/Finie) ? (justifier brièvement mais rigoureusement)

e) Répondre à nouveau aux deux questions (a) et (d) si v avait été défini par

$$\begin{aligned} v(pn) &= u(n) \\ v(k) &= 0 \text{ pour tout } k \text{ non multiple de } p \end{aligned}$$

où p est un entier.

4 Filtrage récursif pour le débruitage

Un processus SSL X a une Densité Spectrale de Puissance (DSP) S_X donnée par $S_X(\nu) = 1 + \cos(2\pi\nu) = 1 + \frac{1}{2}(z + z^{-1})$ avec $z = e^{2i\pi\nu}$. On définit B comme un bruit blanc de puissance σ^2, cela signifie que sa DSP $S_B(\nu)$ est constante égale à σ^2. On suppose que les deux processus sont centrés (i.e. leur moyenne est nulle). Le processus Y est défini comme $Y = X + B$ (c'est un enregistrement bruité de X). On souhaite filtrer Y pour obtenir une version la plus fidèle possible de X. On cherche un filtre stable de réponse impulsionnelle h tel que $T = h * Y$ soit le plus proche possible de X. On sait (et on ne demande pas de le démontrer) d'après le filtrage de Wiener que h doit avoir comme TFTD

$$H(e^{i2\pi\nu}) = \frac{1}{1 + \frac{S_B(\nu)}{S_X(\nu)}}$$

a) Peut-il exister un processus SSL dont la DSP est $\cos(2\pi\nu)$? Justifier brièvement.

b) Donner une équation de récurrence (entrée-sortie) dont $Y(n)$ est l'entrée et $T(n)$ la sortie qui réalise la réponse fréquentielle souhaitée (on pensera à écrire la réponse fréquentielle souhaitée sous la forme $S_X(\nu)/\ldots$).

c) Ce filtrage peut-il être causal ? Justifier.

d) Exprimer S_Y en fonction de S_X et S_B (on suppose que B et X sont indépendants).

e) Exprimer S_T sous la forme d'une fraction rationnelle en $z = e^{2i\pi\nu}$ (on utilisera les formules de filtrage des processus SSL).