Master ATIAM (Année 2022-2023)
Examen de Traitement du Signal Musical (UE TSM)
Partie *Analyse-Synthèse*

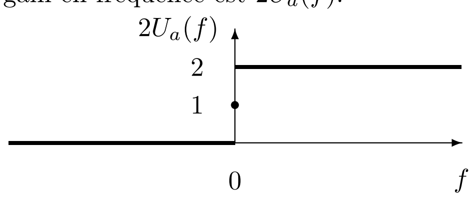
Roland Badeau, Philippe Depalle
Mardi 3 janvier 2023

RENDRE DEUX COPIES: l'une pour Roland Badeau (première partie)
et l'autre pour Philippe Depalle (deuxième partie)

Les documents sont autorisés, mais pas les appareils électroniques

1 Filtre de Hilbert

Soit $x_a(t)$ un signal réel à temps continu (analogique). Le signal *analytique* associé à $x_a(t)$ est le signal $z_a(t)$ dont la TFTC a pour expression $Z_a(f) = 2\,U_a(f)X_a(f)$, où $U_a(f)$ est la fonction échelon-unité, qui vaut 1 si $f > 0$, et 0 si $f < 0$. Pour des raisons de continuité, on prend $U_a(0) = \frac{1}{2}$. On donne le nom de filtre analytique au filtre dont le gain en fréquence est $2U_a(f)$.



a) Quelle propriété vérifie la fonction $X_a(f)$? En déduire l'expression de $\frac{1}{2}(Z_a(f) + Z_a^*(-f))$ en fonction de $X_a(f)$, et prouver que la partie réelle de $z_a(t)$ est égale à $x_a(t)$. On pourra alors écrire $z_a(t) = x_a(t) + iy_a(t)$, où le signal réel $y_a(t)$ est défini comme la partie imaginaire de $z_a(t)$.

b) Démontrer que $y_a(t)$ se déduit de $x_a(t)$ par un filtrage linéaire de réponse en fréquence $H_a(f) = -i\,\text{signe}(f)$, où $\text{signe}(f) = 1$ si $f > 0$, $\text{signe}(f) = -1$ si $f < 0$, et $\text{signe}(0) = 0$. Le filtre $H_a(f)$ porte le nom de *filtre de Hilbert*, et $y_a(t)$ est appelé *transformée de Hilbert* de $x_a(t)$.

Supposons que le signal $x_a(t)$ satisfait les hypothèses du théorème d'échantillonnage : il existe une fréquence F_e telle que le support de $X_a(f)$ soit inclus dans $]-\frac{F_e}{2}, \frac{F_e}{2}[$. On considère alors les signaux échantillonnés $x(n) = x_a(nT_e)$ et $y(n) = y_a(nT_e)$, où $T_e = 1/F_e$. On rappelle la relation entre la TFTD $X(e^{2i\pi\nu})$ et la TFTC $X_a(f)$:

$$X(e^{2i\pi\nu}) = \frac{1}{T_e} \sum_{k\in\mathbb{Z}} X_a\left(\frac{\nu + k}{T_e}\right) \qquad (1)$$

c) Simplifier l'expression (1) lorsque $\nu \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Vérifier que $Y(e^{2i\pi\nu})$ satisfait une expression similaire. En déduire que le signal $y(n)$ peut aussi s'exprimer comme le résultat du filtrage discret de $x(n)$ par le filtre de réponse en fréquence $H(e^{2i\pi\nu}) = -i\,\text{signe}(\nu)$, pour $\nu \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ (et $H(e^{2i\pi\nu}) = 0$ pour $\nu = \pm\frac{1}{2}$).

Remarque : le filtre discret $H(e^{2i\pi\nu})$ permet de calculer directement les échantillons $y(n)$ de la transformée de Hilbert à partir des échantillons $x(n)$, sans avoir à effectuer de conversion numérique / analogique.

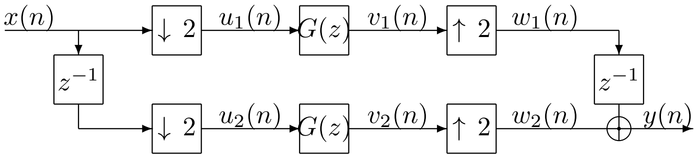
d) En appliquant la TFTD inverse, prouver que la réponse impulsionnelle $h(n)$ vérifie $h(n) = \frac{2}{\pi n}$ si n est impair, et 0 si n est pair.

e) Ce filtre est-il causal ? stable ? à réponse impulsionnelle finie (RIF) ou infinie (RII) ?

f) Pour un filtre discret de réponse impulsionnelle $g(n)$ et de fonction de transfert $G(z)$, quelle est la réponse impulsionnelle du filtre de fonction de transfert $G(z^2)$? En utilisant la nullité des coefficients pairs de $h(n)$, en déduire qu'il existe une fonction de transfert $G(z)$, telle que $H(z) = z^{-1}G(z^2)$. Que vaut la réponse impulsionnelle $g(n)$?

g) On souhaite approcher le filtre $G(z)$ idéal en utilisant la méthode de la fenêtre, de façon à synthétiser un filtre RIF à phase linéaire, de type 4 (longueur N paire, $g(n)$ antisymétrique). Rappeler le principe de la méthode de la fenêtre, ses avantages et ses inconvénients.

h) L'objectif de cette question est de prouver que le schéma suivant fournit une implémentation efficace du filtre de Hilbert discret $H(z)$:



On rappelle que $U_1(z) = \frac{1}{2}(X(z^{\frac{1}{2}}) + X(-z^{\frac{1}{2}}))$. Exprimer alors $U_2(z)$ en fonction de $X(z)$, puis $V_1(z)$ et $V_2(z)$ en fonction de $U_1(z)$ et $U_2(z)$, puis $W_1(z)$ et $W_2(z)$ en fonction de $V_1(z)$ et $V_2(z)$, et enfin $Y(z)$ en fonction de $W_1(z)$ et $W_2(z)$. Par substitution, retrouver la relation $Y(z) = H(z)X(z)$.

i) Pourquoi dit-on que cette implémentation est "efficace" ?

---

2 Analyse par transformée en « éventail gazouillant » (*Fan-Chirp Transform*)

Le but de ce problème est d'estimer les paramètres d'un signal harmonique non-stationnaire dont la fréquence fondamentale varie linéairement au cours du temps. Le problème commence par une étude de la phase de signaux exponentiels complexes à fréquence variant linéairement dans le temps. Dans un second temps, est mise en place une structure d'analyse fondée sur une décomposition sur des signaux à fréquence variant linéairement au cours du temps. Au final, il est montré que la transformée en «éventail gazouillant» peut se ramener à une simple transformée de Fourier précédée d'une transformation simple du signal.

2.1 De la phase d'exponentielle complexe à fréquence variant linéairement dans le temps...

On considère un signal x dont l'évolution sur l'intervalle de temps $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$ est définie selon $x(t) = e^{j\Psi(t)}$, $\Psi(t)$ étant sa phase. Sa fréquence instantanée $\nu(t)$, évoluant linéairement sur cet intervalle de temps, peut se formaliser de la manière suivante ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}_+^*$) :

$$\nu(t) = \beta(1 + \alpha t) \tag{2}$$

1. Sachant que cette fréquence instantanée passe de f_0^- en $-\frac{T}{2}$ à f_0^+ en $\frac{T}{2}$, exprimer les grandeurs α et β en fonction de f_0^-, f_0^+, et T. Appelant f_0 la valeur de la fréquence instantanée à l'instant 0, reformuler α et β en fonction de f_0, f_0^-, f_0^+, et T.
2. En commençant par rappeler le lien entre la fréquence instantanée d'un signal et sa phase, en déduire que la structure de la phase $\Psi(t)$ de $x(t)$ est de type polynomial d'ordre 2 et préciser les valeurs des coefficients a et b :
$$\Psi(t) = at^2 + bt + c \tag{3}$$
3. Pour une raison qui apparaîtra ultérieurement, on souhaite imposer la valeur de la phase en $\frac{T}{2}$ comme étant $2\pi f_0 \frac{T}{2}$. Calculer le paramètre c du polynôme en fonction de f_0, α et T.
4. Que vaut alors $\Psi(-\frac{T}{2})$, phase du signal au début de l'intervalle temporel ?
5. En reformulant $\Psi(t)$ comme suit :
$$\Psi(t) = 2\pi f_0 \phi_\alpha(t) \tag{4}$$
Donner l'expression de $\phi_\alpha(t)$ et en déduire son rôle, notamment à la lumière des deux questions précédentes.
6. Établir la condition (C) liant α et T pour que la fonction $t \mapsto \phi_\alpha(t)$, qui va être utilisée pour construire une transformation, soit monotone sur l'intervalle $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$.
7. En déduire que si la condition (C) est respectée :
- la fréquence instantanée $\nu(t)$ du signal $x(t)$ est positive sur l'intervalle $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$,
- la transformation $\phi_\alpha(t)$ ne change pas le sens du temps t,
- $\phi_\alpha(t) \in [-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$ pour $t \in [-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$
- et finalement $\phi_\alpha(t)$ est une bijection.

2.2 ... à la définition de la transformée en «éventail gazouillant»

Dans cette partie, on considère la transformée de Fourier du signal $x(t)$ étudié dans la partie précédente, puis on met en place une nouvelle transformée, mieux adaptée aux signaux harmoniques dont la fréquence fondamentale varie linéairement au cours du temps.

1. On définit la transformée de Fourier d'un signal, observé à travers une fenêtre rectangulaire $r(t)$ centrée sur l'intervalle $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$ comme suit :
$$X(f) = \int_{t=-T/2}^{t=+T/2} x(t) e^{-2\pi j f t} dt \tag{5}$$
On rappelle que $x(t) = e^{j\Psi(t)}$. Lorsque $\alpha = 0$, donner l'expression de $X(f)$ en fonction de f_0 et de la transformée de Fourier $R(f)$ de la fenêtre rectangulaire.
2. Décrire **qualitativement** la modification de la forme de $X(f)$ lorsque α devient non nul.
3. On considère le signal harmonique $y(t)$ suivant :
$$y(t) = \sum_{k=1}^{k=K} a_k x_k(t) = \sum_{k=1}^{k=K} a_k e^{j\Psi_k(t)} \tag{6}$$

de fréquence fondamentale $\nu(t) = \beta(1+\alpha t)$, de sorte que la fréquence de l'harmonique k vaut $\nu_k(t) = k\ \nu(t)$, et dont les a_k sont des coefficients complexes. Donner l'expression de $Y(f)$ lorsque $\alpha = 0$.

4. Décrire **qualitativement** la forme de $Y(f)$ lorsque α est non nul et notamment l'évolution de la forme des pics spectraux en fonction de l'indice de l'harmonique k.
5. Afin d'obtenir une représentation plus compacte de $x(t)$, on considère sa décomposition dans l'intervalle temporel $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$ sur des noyaux de type $\gamma_{f,\alpha}$:

$$\gamma_{f,\alpha}(t) = \sqrt{|\phi'_\alpha(t)|}\, e^{2\pi j f \phi_\alpha(t)} \tag{7}$$

où ϕ'_α désigne la dérivée temporelle de ϕ_α.
La transformée correspondante s'écrit alors :

$$\mathcal{X}(f,\alpha) = \frac{1}{T}\int_{t=-T/2}^{t=+T/2} x(t)\ \gamma^*_{f,\alpha}(t)\ dt \tag{8}$$

Elle est appelée transformée en éventail gazouillant (*Fan-Chirp Transform* en anglais). Montrer que lorsque la condition (C), établie précédemment, est remplie, l'ensemble des signaux Γ_α :

$$\Gamma_\alpha = \{\gamma_{\frac{k}{T},\alpha}(t)\}_{k\in Z} \tag{9}$$

est orthonormal sur l'intervalle temporel $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$, c'est-à-dire que :

$$\frac{1}{T}\int_{t=-T/2}^{t=+T/2} \gamma_{\frac{h}{T},\alpha}(t)\ \gamma^*_{\frac{k}{T},\alpha}(t)\ dt = \delta[h-k] \tag{10}$$

où $\delta[]$ est le symbole de Kronecker.
Remarque : Il est à noter que lorsque la condition (C) est remplie, le signal peut être reconstruit sur l'intervalle temporel $[-\frac{T}{2}, +\frac{T}{2}]$ à partir de sa transformée en éventail gazouillant $\mathcal{X}(\frac{k}{T},\alpha)$ selon (démonstration hors du cadre de l'examen) :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \mathcal{X}(\frac{k}{T},\alpha)\gamma_{\frac{k}{T},\alpha}(t) \tag{11}$$

6. Dans cette question, on montre que le calcul de $\mathcal{X}(f,\alpha)$ revient à calculer une simple transformée de Fourier à la fréquence f d'un signal obtenu à partir de x après avoir changé son échelle temporelle et l'avoir modulé par un signal idoine ρ.
La condition (C) étant désormais remplie maintenant et pour toutes les questions suivantes, montrer que $\mathcal{X}(f,\alpha)$ peut s'écrire :

$$\frac{1}{T}\int_{\tau=-T/2}^{\tau=+T/2} x(\phi_\alpha^{-1}(\tau))\frac{1}{\sqrt{\phi'_\alpha(\phi_\alpha^{-1}(\tau))}}e^{-2\pi j f\tau}d\tau \tag{12}$$

où ϕ_α^{-1} est la fonction inverse de ϕ_α.
7. Afin de simplifier cette question et les questions suivantes, on considère que α est positif (en plus de vérifier la condition (C)). Donner l'expression de la fonction inverse $\phi_\alpha^{-1}(\tau)$.
Pour le choix de la bonne fonction inverse, parmi celles possibles, on pourra s'aider d'une propriété démontrée à la question 7 de la partie 2.1.
8. En déduire que l'expression du signal ρ modulant x est :

$$\rho(\tau) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\alpha\tau + 1 + \alpha^2\frac{T^2}{4}}} \tag{13}$$

9. Si on devait implémenter en temps discret la transformation de $x(t)$ en $x(\phi_\alpha^{-1}(\tau))$, de quel type d'opération de traitement de signal s'agirait-il ?
10. **Question bonus** : En considérant un signal harmonique à fréquence variant linéairement dans le temps $y(t)$, pour lequel la pente de variation de fréquence a déjà été estimée par une autre technique, comparer **qualitativement** la forme de $\mathcal{Y}(f,\alpha)$ à celle de $Y(f)$, en particulier en ce qui concerne la forme des pics spectraux en fonction de l'indice harmonique k.