

L'expression (14.47) généralise ainsi le résultat obtenu au chapitre 2 pour un oscillateur isolé.

Des mesures effectuées par Boullosa *et coll.* sur plusieurs guitares ont montré que le rendement moyen était de l'ordre de 10 pour cent entre 100 et 1000 Hz, et de 5 pour cent entre 1 et 8 kHz [59]. Toutefois, ils ont observé que, dans plusieurs zones étroites de fréquences, le rendement présentait des valeurs crêtes pouvant dépasser 20 pour cent.

2. Rayonnement d'une plaque mince infinie

2.1. Equation élastique

Au chapitre 13, nous avons examiné les propriétés rayonnantes d'une surface plane animée d'un champ de vitesse constant. Cette théorie s'applique bien à des structures soumises à un mouvement de corps rigide. On peut également l'utiliser pour calculer le rayonnement dû à une ouverture comme l'extrémité d'une flûte ou la rose d'une guitare, tant que l'on peut admettre que le module du profil de vitesse acoustique normal est constant à travers la section de cette ouverture.

Lorsque la fréquence augmente et que, corrélativement, la longueur d'onde de vibration devient comparable, voire inférieure, aux dimensions de la structure, il devient nécessaire de tenir compte des phénomènes de propagation au sein de celle-ci. Pour illustrer ce point, nous traitons ci-dessous le cas de structures minces et planes en flexion. Nous commençons par traiter le cas d'une plaque "infinie", ce qui revient à négliger les réflexions aux frontières du domaine. On étudie dans

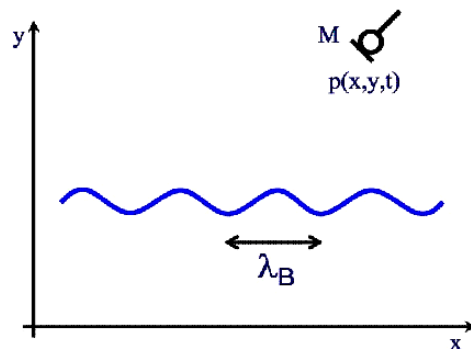


Figure 14.5. Vibrations transversales stationnaires d'une plaque infinie. La longueur d'onde élastique de flexion est λ_B .

le domaine fréquentiel le cas d'une plaque isotrope animée d'un profil de vitesse transversal selon la seule dimension x : $V(x, \omega) = V_0(\omega)e^{-jk_B x}$, où $k_B = 2\pi/\lambda_B$ est le nombre d'onde de flexion (voir figure 14.5). A la pulsation ω , la vitesse de phase de l'onde élastique dans la plaque est donnée par $c_B = \omega/k_B$. On néglige les phénomènes d'amortissement dans la plaque, ainsi que la réaction des forces de pression acoustique sur celle-ci. On note ρ_p la masse volumique de la plaque, E son module d'Young, ν son coefficient de Poisson et h son épaisseur. Dans ces

conditions, nous avons vu au chapitre 1 que l'équation qui gouverne le déplacement de flexion transversale $W(x, \omega)$ s'écrit :

$$-\omega^2 \rho_p h W + D \frac{d^4 W}{dx^4} = 0 \quad \text{avec} \quad D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} . \quad (14.48)$$

2.2. Equations acoustiques

Compte tenu de la seule dépendance en x du problème élastique, on se ramène, pour l'acoustique, à un problème plan en (x, y) (voir la figure 14.5). Par conséquent, l'équation de Helmholtz pour la pression $P(x, y, \omega)$ s'écrit :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + k^2 P = 0 . \quad (14.49)$$

L'interaction élasto-acoustique entre la plaque et l'air de densité ρ est assurée par la condition de continuité des vitesses normales sur la plaque :

$$\left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{y=0} = -j\omega \rho V_0 e^{-jk_B x} . \quad (14.50)$$

2.3. Equations de dispersion et fréquence critique

Pour toute onde progressive de la forme $e^{j(\omega t - k_B x)}$ dans (14.48), on obtient la relation de dispersion entre fréquence et nombre d'onde sur la plaque :

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{\rho_p h}} k_B^2 . \quad (14.51)$$

Compte tenu de la linéarité du problème, on retrouve la même fréquence dans le champ sonore, ce qui conduit à l'équation de dispersion acoustique :

$$\omega = kc . \quad (14.52)$$

où c est la célérité du son dans l'air. En représentant les deux équations de dis-

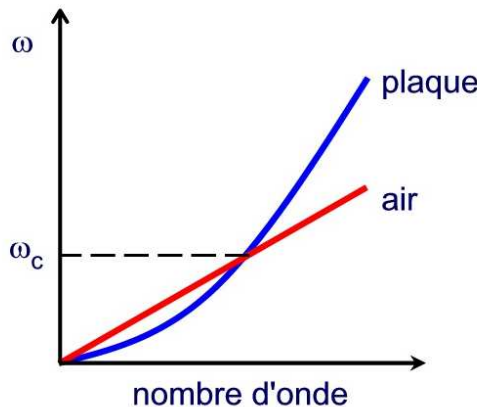


Figure 14.6. Equations de dispersion et fréquence critique.

persion (14.51) et (14.52) sur le même graphe (voir la figure 14.6), on constate qu'il existe une fréquence particulière, appelée *fréquence critique* pour laquelle le

nombre d'onde dans l'air est égal au nombre d'onde dans la plaque. Celle-ci est donc donnée par :

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{c^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho_p h}{D}} = \frac{c^2}{\pi h} \sqrt{\frac{3\rho_p(1-\nu^2)}{E}}. \quad (14.53)$$

Cette fréquence revêt une grande importance dans l'interprétation des couplages élasto-acoustiques. En effet, nous démontrerons au paragraphe 2.4 qu'elle délimite deux domaines distincts : en-dessous de f_c l'efficacité de rayonnement est faible, alors qu'elle est élevée pour les fréquences voisines ou supérieures à f_c . Ce résultat est dû ici à l'allure particulière (parabolique) de l'équation de dispersion de la plaque. Dans le cas des membranes idéales, en revanche, l'équation de dispersion est linéaire et il n'y a pas de fréquence critique, sauf dans le cas limite où la célérité des ondes élastiques est strictement égale à celle de l'air (voir le paragraphe ci-après qui traite le cas des membranes réelles). Il existe aussi d'autres structures (coques) pour lesquelles il n'y a pas obligatoirement de points d'intersection entre les courbes de dispersion. Nous y reviendrons au paragraphe 4.

Dans l'expression (14.53), on voit que la fréquence critique ne dépend que de l'épaisseur de la plaque et des propriétés des matériaux (fluide et solide) en contact. La fréquence critique de la plaque s'abaisse lorsque la plaque devient plus épaisse, moins dense et plus rigide.

Pour un instrument de musique à cordes, on en déduit que si l'on peut, à épaisseur et densité donnée, utiliser un matériau plus rigide pour fabriquer la table, alors la fréquence critique s'abaisse, favorisant ainsi le rayonnement des notes produites par les cordes graves. A cette fin, l'utilisation de raidisseurs permet à la fois d'augmenter le module d'Young équivalent de la table et son épaisseur moyenne, ce qui joue bien dans le sens d'une réduction de f_c par rapport au cas de la table non raidie. Pour une guitare, on choisira de préférence un bois de faible densité pour former la table d'harmonie⁴.

Remarque : Le terme de *fréquence critique* se traduit souvent en anglais par *coincidence frequency*. En français, on réserve plutôt le terme de *fréquence de coïncidence* pour les problèmes de transmission des ondes sonores à travers une paroi et/ou les questions de transparence acoustique dont nous ne parlons pas dans cet ouvrage.

■ Domaine critique pour les matériaux orthotropes

Pour les matériaux orthotropes, on peut reprendre le calcul (14.53) dans les deux cas limites correspondant respectivement à la direction la plus rigide et à la plus souple. On obtient alors deux courbes et donc deux fréquences f_{c1} et f_{c2} qui délimitent le *domaine critique* de la plaque (cf. la figure 14.7). Nous avons vu au chapitre 3 que, pour une plaque finie, toutes les fréquences propres sont situées entre ces deux courbes. Du point de vue du rayonnement, les fréquences situées dans l'intervalle f_{c1}, f_{c2} sont particulièrement efficaces.

⁴ Il importe ici d'être prudent sur les quantités que l'on compare pour ne pas tirer de conclusions hâtives. En effet, l'ajout de raidisseurs, toutes choses égales par ailleurs, provoque une diminution de la vitesse vibratoire ce qui va dans le sens d'une diminution de la puissance acoustique rayonnée. Par contre, le *facteur de rayonnement* que nous définirons au paragraphe 2.4 normalise la puissance acoustique par rapport à la vitesse quadratique moyenne. Plusieurs auteurs ont vérifié que ce facteur augmente bien en présence de raidisseurs (voir, par exemple [319]).

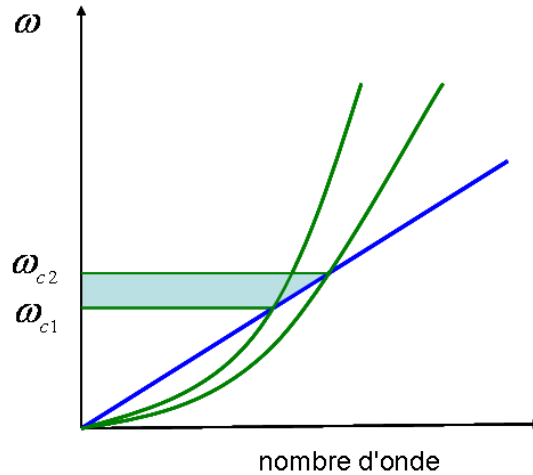


Figure 14.7. Domaine critique pour les matériaux orthotropes.

■ Fréquence critique pour les membranes raides et les plaques précontraintes

Les membranes idéales (sans raideur ni amortissement) obéissent à l'équation des ondes. Par conséquent leur équation de dispersion est de la forme $\omega = kc_m$ où $c_m = \sqrt{\tau/\rho_m h}$ est la célérité des ondes transversales (voir le chapitre 1). Pour les membranes de timbales, la tension et la densité sont généralement telles que $c_m < c$. En pratique on observe, pour ces instruments, des célérités de l'ordre de 100 m.s^{-1} . Par conséquent, la courbe de dispersion correspondante est une droite de pente inférieure à celle de l'air, et il ne peut y avoir d'intersection entre les deux courbes (voir la figure 14.8). Dans la pratique cependant, les peaux de timbales

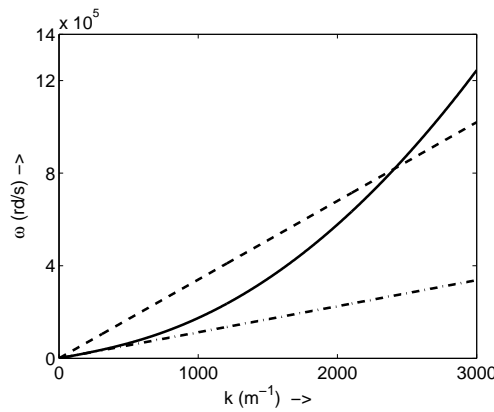


Figure 14.8. Courbes de dispersion pour les membranes raides et les plaques précontraintes. Tirets : courbe de dispersion de l'air. Traits+points : courbe de dispersion d'une membrane de timbale de densité $\rho_m = 1,05 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, d'épaisseur $h = 0,25 \text{ mm}$ et de tension $\tau = 3325 \text{ N.m}^{-1}$, supposée idéale. Traits pleins : courbe de dispersion de la même membrane où l'on tient compte du module d'Young $E = 3 \cdot 10^9 \text{ N.m}^{-2}$ et du coefficient de Poisson $\nu = 0,4$. On remarque qu'une fréquence critique existe, mais qu'elle est repoussée très haut en fréquence (127 kHz environ).

(comme les cordes de guitare) possèdent un module d'élasticité non nul. De ce fait, l'équation de dispersion devient :

$$\omega = \sqrt{\frac{Dk^4 + \tau k^2}{\rho_m h}}, \quad (14.54)$$

et il est possible de définir une fréquence critique.

L'équation de dispersion d'une plaque précontrainte s'écrit sous une forme identique à (14.54). Si une plaque est soumise à une compression ($\tau < 0$) alors sa fréquence critique augmente. Inversement, si la plaque est soumise à une traction d'ensemble ($\tau > 0$), sa fréquence critique diminue. En conclusion, on vérifie sur cet exemple que le fait d'introduire de la raideur dans le système favorise le rayonnement.

2.4. Pression, vitesse et puissance acoustique

On cherche la pression sous la forme $P(x, y) = P_0 e^{-j(k_x x + k_y y)}$. L'équation de Helmholtz (14.49) fournit alors $k^2 = k_x^2 + k_y^2$. La condition de continuité sur la plaque (14.50) impose que $k_x = k_B$ et, par suite :

$$k_y^2 = k^2 - k_B^2 \quad \text{et} \quad P_0 = \rho c V_0 \frac{k}{k_y}. \quad (14.55)$$

Par conséquent, les champs de pression et de vitesse acoustique dans le fluide s'écrivent explicitement :

$$\begin{cases} P(x, y, \omega) = \rho c V_0 \frac{k}{k_y} e^{-j(k_x x + k_y y)}, \\ V_x(x, y, \omega) = -\frac{1}{j\omega\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = V_0 \frac{k_B}{k_y} e^{-j(k_x x + k_y y)}, \\ V_y(x, y, \omega) = -\frac{1}{j\omega\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = V_0 e^{-j(k_x x + k_y y)}. \end{cases} \quad (14.56)$$

La première équation dans (14.55) montre que la composante k_y du vecteur d'onde selon y est réelle tant que $k > k_B$, et imaginaire pure dans le cas contraire.

Le premier cas, baptisé *supersonique* est obtenu lorsque, à une fréquence donnée, la longueur d'onde acoustique $\lambda = 2\pi/k$ est inférieure à la longueur d'onde élastique dans la plaque $\lambda_B = 2\pi/k_B$. La figure 14.6 montre que cette situation s'obtient lorsque la fréquence est supérieure à la fréquence critique. En termes de célérité, cela revient à dire que $c_B = \omega/k_B > c = \omega/k$, d'où la dénomination de *supersonique*.

Lorsque la longueur d'onde acoustique $\lambda = 2\pi/k$ est supérieure à la longueur d'onde élastique dans la plaque $\lambda_B = 2\pi/k_B$, ou, de manière équivalente, lorsque la fréquence est inférieure à la fréquence critique, on se trouve dans le cas dit *subsonique*. Nous allons à présent examiner en détail ces deux situations, du point de vue du rayonnement acoustique.

2.4.1. Cas supersonique

Le cas supersonique correspond à la situation représentée sur la figure 14.9. Avec $k_y = \sqrt{k^2 - k_B^2}$, la pression s'écrit :

$$P(x, y) = \rho c V_0 \frac{k}{\sqrt{k^2 - k_B^2}} e^{-j(k_B x + \sqrt{k^2 - k_B^2} y)}. \quad (14.57)$$

La propagation a lieu dans la direction θ définie par :

$$\sin \theta = \frac{k_B}{k} = \sqrt{\frac{\omega_c}{\omega}}. \quad (14.58)$$

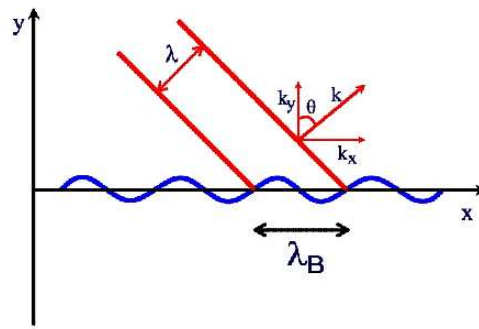


Figure 14.9. Cas supersonique.

Plus la fréquence augmente, plus l'angle θ entre la normale à la plaque et le vecteur d'onde diminue. La direction de propagation tend alors à se rapprocher de la normale à la plaque. Au contraire, lorsque la fréquence d'excitation tend vers la fréquence critique par valeurs supérieures, l'onde acoustique rayonnée reste confinée dans le plan de la plaque.

Cette propriété se voit très bien sur la figure 14.10 qui montre une comparaison entre mesure et simulation du champ de pression rayonnée par une plaque soumise à un impact en son centre. Sous l'effet de l'impact, des ondes de flexion se propagent de part et d'autre du centre vers les extrémités. En vertu de la relation de dispersion, les ondes de fréquences élevées se propagent plus vite. En conséquence, on constate que le plan d'onde de celles-ci forment un angle θ plus faible avec la normale que celles qui sont situées près de l'impact. La puissance acoustique

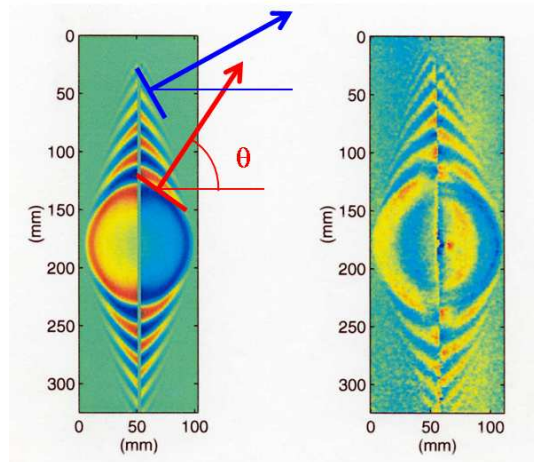


Figure 14.10. Rayonnement d'une plaque soumise à un impact. (Gauche) Simulation. (Droite) Mesure. La plaque est perpendiculaire au plan de la figure. L'angle θ formé par entre la direction de propagation et la normale à la plaque décroît entre le centre de la plaque et les extrémités, car la vitesse des ondes de flexion augmente avec la fréquence.

moyenne rayonnée, par unité de surface de plaque, s'obtient de manière classique :

$$\langle \mathcal{P}_a \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{P V_y^*\} = \frac{1}{2} \rho c V_0^2 \frac{k}{\sqrt{k^2 - k_B^2}} = \frac{1}{2} \rho c V_0^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c}{\omega}}} . \quad (14.59)$$

On définit *l'efficacité de rayonnement*, notée $\sigma(\omega)$ comme le rapport entre la puissance acoustique moyenne rayonnée et la puissance que l'on obtiendrait pour une plaque infinie identique animée d'une vitesse transversale constante de module V_0 , soit ici (voir figure 14.11) :

$$\sigma = \frac{\langle \mathcal{P}_a \rangle}{\frac{1}{2} \rho c V_0^2} = \frac{k}{\sqrt{k^2 - k_B^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c}{\omega}}} . \quad (14.60)$$

En conclusion, nous vérifions que la plaque rayonne de l'énergie acoustique pour les

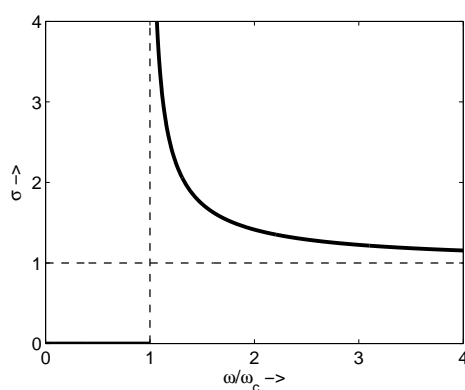


Figure 14.11. Efficacité de rayonnement en fonction de la fréquence pour une plaque infinie.

fréquences supérieures à la fréquence critique, et ce d'autant plus que la pulsation d'excitation ω se rapproche de ω_c . Le fait que $\langle \mathcal{P}_a \rangle$ tende vers l'infini au voisinage de la fréquence critique est une conséquence du fait que l'on a traité ici le cas d'une plaque elle-même infinie. Dans la réalité, la puissance rayonnée est bornée par les effets conjugués des amortissements et de la taille finie de la plaque.

2.4.2. Cas subsonique

Le cas subsonique correspond à la situation représentée sur la figure 14.12. Dans ce cas, nous avons $k_y = -j\sqrt{k_B^2 - k^2}$ et, par conséquent, les variables acoustiques s'écrivent :

$$\begin{cases} P(x, y) = j\rho c V_0 \frac{k}{\sqrt{k_B^2 - k^2}} e^{-jk_B x} e^{-\sqrt{k_B^2 - k^2} y}, \\ V_x(x, y) = jV_0 \frac{k_B}{\sqrt{k_B^2 - k^2}} e^{-jk_B x} e^{-\sqrt{k_B^2 - k^2} y}, \\ V_y(x, y) = V_0 e^{-jk_B x} e^{-\sqrt{k_B^2 - k^2} y}. \end{cases} \quad (14.61)$$

Le module de la pression acoustique décroît exponentiellement avec la distance y à la plaque, et ce d'autant plus que la longueur d'onde acoustique λ est grande devant la longueur d'onde élastique λ_B . Physiquement, cela signifie que sur une largeur égale à λ , les contributions au rayonnement des longueurs d'onde de

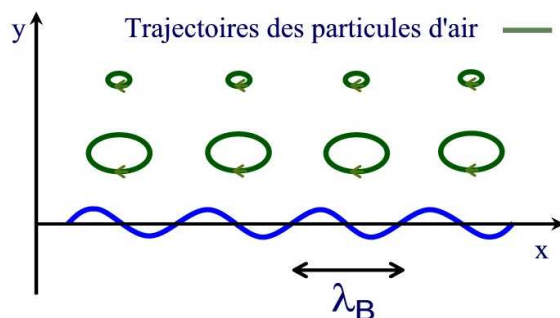


Figure 14.12. Cas subsonique. Les particules d'air décrivent des ellipses dont le rayon décroît exponentiellement avec la distance à la plaque.

plaque interfèrent de façon destructive.

L'étude de la vitesse acoustique fournit une autre manière de se représenter les choses. On constate sur (14.61) que les deux composantes du vecteur-vitesse sont en quadrature. Par conséquent, les particules de l'air décrivent des ellipses. Le mouvement reste donc confiné sur lui-même et il n'y a pas de transmission d'énergie de proche en proche comme dans le cas propagatif. L'aire de ces ellipses décroît exponentiellement avec la distance à la plaque.

La quantité $\sqrt{k_B^2 - k^2}$ donne une mesure de l'"épaisseur" de ce champ acoustique évanescent. On voit qu'elle est d'autant plus grande que les nombres d'onde acoustique et structurel sont éloignés l'un de l'autre.

On vérifie sans peine que la puissance acoustique moyenne $\langle \mathcal{P}_a \rangle$ est nulle dans le cas subsonique puisque le produit PV_y^* est imaginaire pur.

Soulignons, pour finir, que si l'on place un matériau poreux au voisinage de la plaque (dans le champ proche), on observe que les pertes par rayonnement augmentent au sein de celle-ci, provoquant ainsi une atténuation des vibrations. Pour démontrer rigoureusement ce phénomène, il faut reprendre l'ensemble des calculs ci-dessus avec un nombre d'onde structurel k_B possédant une partie imaginaire non nulle [114]. Cet effet s'interprète par le fait que l'énergie cinétique des particules qui rencontrent le matériau poreux y est transformée en chaleur. Ce phénomène est mis à profit dans les réverbérateurs à plaque utilisés dans les studios d'enregistrement afin de contrôler la durée de réverbération [13].

■ Mesure optique des champs sonores

L'image représentée sur la figure 14.10-(droite) ci-dessus a été obtenue par le biais de mesures optiques de la pression acoustique [373]. Une première mesure avec un laser est effectuée quand l'air est au repos, l'indice optique étant alors n_0 . Une balle en caoutchouc frappe alors la plaque qui génère un champ de pression transitoire p . Une deuxième mesure au laser est alors effectuée à un instant t postérieur très court. En raison de la loi dite de Gladstone-Dale, le champ d'indice optique prend alors la valeur $n(x, y, z)$ suivant la relation :

$$n - 1 = K\rho, \quad (14.62)$$

où K est la constante de Gladstone et ρ la densité du fluide. Celle-ci est liée à la pression par l'équation d'état (supposée ici adiabatique, cf. le chapitre 1). En

raison de la variation d'indice consécutive au passage de l'onde sonore, le chemin optique dans la direction z (le plan de la figure) subit une variation

$$\Delta L = \int [n(x, y, z) - n_0] dz . \quad (14.63)$$

En conséquence, le déphasage subit par la lumière est égal à $\Delta\Phi = k_l \Delta L$ pour un nombre d'onde lumineux k_l . La superposition des deux images optiques génèrent les franges d'interférences visibles sur la figure 14.10.

2.5. Charge acoustique sur la plaque

Comme pour la sphère pulsante au chapitre précédent, on définit l'impédance de rayonnement (ou impédance de charge acoustique) de la plaque par unité de surface par le quotient de la pression sur la vitesse acoustique normale, calculé au niveau de la plaque (soit en $y = 0$). Pour le cas *supersonique*, on trouve d'après (14.57) :

$$Z(x, 0) = \rho c \frac{k}{\sqrt{k^2 - k_B^2}} = \rho c \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_c}{\omega}}}, \quad (14.64)$$

k étant ici supérieur à k_B , l'impédance de rayonnement est purement résistive et égale à $R_a = \rho c \sigma(\omega)$. Elle est donc proportionnelle à l'efficacité de rayonnement. En revanche, dans le cas subsonique, on obtient une impédance purement imaginaire :

$$Z(x, 0) = \rho c \frac{jk}{\sqrt{k_B^2 - k^2}} = j\rho\omega \frac{1}{\sqrt{k_B^2 - k^2}} . \quad (14.65)$$

qui correspond à une masse acoustique de la forme :

$$M_a = \rho \frac{1}{\sqrt{k_B^2 - k^2}}, \quad (14.66)$$

traduisant la charge inertielle du fluide sur la plaque.

Remarque : Dans ce paragraphe, nous n'avons considéré le rayonnement que sur l'une des faces de la plaque, c'est-à-dire dans le seul demi-espace supérieur. En réalité, la plaque infinie rayonne également un champ de pression en opposition de phase sur sa face inférieure.

2.6. Equation de dispersion de la plaque chargée acoustiquement

Pour évaluer l'influence du champ acoustique sur le comportement vibroacoustique de la plaque, il convient de modifier l'équation de flexion en ajoutant au second membre les forces de pression s'exerçant sur chacune des faces, comme suit :

$$-\omega^2 \rho_p h W + D \frac{d^4 W}{dx^4} = -P(x, 0+, \omega) + P(x, 0-, \omega) . \quad (14.67)$$

Comme précédemment, les termes de pression sont gouvernés par l'équation de Helmholtz et l'on obtient les conditions de continuité des vitesses sur les deux faces par l'équation d'Euler. Ces calculs classiques ne sont pas détaillés ici. On suppose, en outre, que la plaque rayonne dans le même fluide sur ses deux faces.

On raisonne dans le cas où la pulsation ω est imposée (forçage harmonique). Par conséquent, l'inconnue ici est le nombre d'onde de flexion dans la plaque, noté γ_B pour le distinguer du cas traité au paragraphe 2.4 où la charge acoustique était

négligée. Compte tenu des résultats obtenus en (14.56), l'équation de dispersion devient :

$$D(\gamma_B, \omega) = -\frac{2j\rho}{\sqrt{k^2 - \gamma_B^2}} + \rho_p h \left(1 - \frac{D\gamma_B^4}{\rho_p h \omega^2} \right) = 0 . \quad (14.68)$$

Le premier terme de (14.68) représente la charge acoustique du fluide. Si la plaque rayonne dans un fluide léger (c'est-à-dire lorsque ρ est "petit"), alors on retrouve le nombre d'onde $\gamma_B \simeq k_B$ obtenu au paragraphe 2.3.

Il est avantageux d'écrire l'équation de dispersion (14.68) sous une forme adimensionnée, en introduisant les variables réduites suivantes :

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_c} ; \quad \tau = \sqrt{\frac{c^2}{c_b^2} - 1} ; \quad \varepsilon = \frac{2\rho c}{\omega_c \rho_p h}, \quad (14.69)$$

où $c_b = \omega/\gamma_B$ est la célérité des ondes de flexion dans la plaque chargée acoustiquement. Tous calculs faits (nous laissons au lecteur le soin de le vérifier, à titre d'exercice), on trouve l'équation en τ suivante [242] :

$$\tau^5 + 2\tau^3 + (1 - \Omega^{-2})\tau - \varepsilon\Omega^{-3} = 0 . \quad (14.70)$$

On peut montrer que l'équation (14.70) admet cinq racines [290]. Seules deux d'entre elle correspondent à la situation d'un rayonnement acoustique de la plaque dans le fluide. Par rapport au cas étudié au paragraphe 2.4, ces racines possèdent à la fois une partie réelle et une partie imaginaire positive. Cela signifie que l'onde élastique s'atténue dans la plaque du fait de la perte d'énergie par rayonnement et que, corrélativement, l'onde acoustique rayonnée décroît avec la distance à la plaque, tout en gardant son caractère propagatif.

Pour des instruments à cordes, on a les ordres de grandeur suivants : $f_c = 1$ kHz, $\rho_p = 10^3$ kg/m³, $h = 1$ mm, $\rho = 1,2$ kg/m³ et $c = 340$ m/s. On en déduit une valeur de 0,15 pour le paramètre ε qui quantifie la charge du fluide.

2.7. Rayonnement d'une plaque infinie excitée ponctuellement

2.7.1. Retour sur le problème vibratoire

On étudie ci-dessous le cas de l'excitation ponctuelle d'une plaque infinie. Il s'agit d'un exercice riche d'enseignement pour l'acoustique musicale, car il représente bien les vibrations d'une table d'harmonie d'instrument à cordes soumise à l'excitation d'une corde en un point donné, pendant l'intervalle de temps qui précède les premières réflexions aux bords. La géométrie du problème est représentée sur

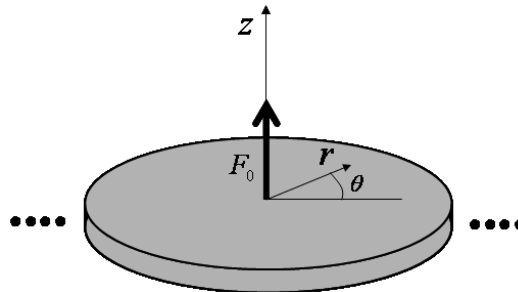


Figure 14.13. Excitation ponctuelle d'une plaque.

la figure (14.13). Pour des raisons de commodité, on résoud le problème en coordonnées polaires, en exploitant la symétrie axiale. L'équation du mouvement de flexion s'écrit pour la variable déplacement $w(r, t) = W(r)e^{j\omega t}$:

$$D \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 W - \rho_p h \omega^2 W = Q(r), \quad (14.71)$$

où le terme source $Q(r)$, homogène à une densité surfacique de force, est défini de telle sorte que :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty Q(r) r dr d\theta = F_0, \quad (14.72)$$

ce qui fournit :

$$Q(r) = \frac{F_0 \delta(r)}{2\pi r}. \quad (14.73)$$

Cette classe de problème axisymétrique se résoud à l'aide de la transformée de Hankel d'ordre zéro définie comme suit :

$$\hat{f}(\gamma) = \int_0^\infty f(r) r J_0(\gamma r) dr, \quad (14.74)$$

où J_0 est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre zéro [1]. En appliquant cette transformée à l'équation de flexion (14.71), on obtient la transformée de Hankel du déplacement :

$$\hat{W}(\gamma) = \frac{F_0}{2\pi} \frac{1}{D(\gamma^4 - k_B^4)} \quad \text{avec} \quad k_B^4 = \frac{\rho_p h \omega^2}{D}. \quad (14.75)$$

On en déduit l'expression du déplacement en calculant la transformée de Hankel inverse :

$$W(r) = \int_0^\infty \hat{W}(\gamma) \gamma J_0(\gamma r) d\gamma, \quad (14.76)$$

ce qui donne en fin de compte :

$$W(r) = \frac{F_0}{2\pi D} \int_0^\infty \frac{J_0(\gamma r)}{\gamma^4 - k_B^4} \gamma d\gamma. \quad (14.77)$$

Le calcul de l'intégrale (14.77) fournit (voir [242], [369], [445]) :

$$W(r) = \frac{-jF_0}{8\omega\sqrt{\rho_p h D}} \left[H_0^{(1)}(k_B r) + \frac{2j}{\pi} K_0(k_B r) \right], \quad (14.78)$$

où $H_0^{(1)}$ est la fonction de Hankel de première espèce d'ordre zéro définie par :

$$H_0^{(1)}(x) = J_0(x) + jY_0(x). \quad (14.79)$$

Dans ces expressions $Y_0(x)$ est la fonction de Bessel de deuxième espèce d'ordre zéro, et $K_0(x)$ la fonction de Hankel modifiée d'ordre zéro [1].

La figure 14.14 représente le module $V = j\omega W$ de la vitesse de plaque en fonction de la distance normalisée $k_B r$, ainsi qu'une solution approchée :

$$V \simeq \frac{F_0}{\sqrt{\rho_p h D}} \sqrt{\frac{2}{\pi k_B r}} \quad (14.80)$$

valable pour $k_B r > 4$ environ.

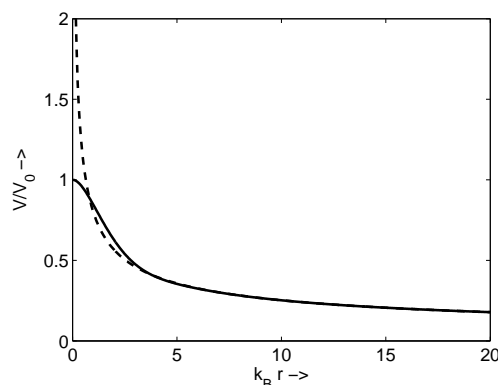


Figure 14.14. Plaque infinie en excitation ponctuelle harmonique. Module de la vitesse V de la plaque en fonction de la distance au point d'excitation. En pointillés : solution approchée valable pour $k_B r > 4$ environ. On note $V_0 = |j\omega W(0)|$.

Au point d'excitation, le terme entre crochets de l'équation (14.78) est égal à l'unité. Le calcul de l'impédance de la plaque au point d'excitation s'obtient alors en effectuant le quotient :

$$Z_p(0) = \frac{F_0}{j\omega W(0)} = 8\sqrt{\rho_p h D} = 4h^2 \sqrt{\frac{\rho_p E}{3(1-\nu^2)}}. \quad (14.81)$$

On aboutit ainsi à un résultat remarquable, à savoir que cette impédance est réelle et ne dépend pas de la fréquence, mais uniquement de ses propriétés matérielles et géométriques (épaisseur). Ce résultat suppose que les conditions de plaque mince (Kirchhoff-Love) soient remplies. La mobilité (ou admittance) au point d'excitation est l'inverse $Y_p(0) = 1/Z_p(0)$.

L'expression (14.81) peut être utilisée pour l'interprétation et la validation des mesures d'impédance (ou d'admittance) de plaques isotropes réelles de dimensions finies, dans le domaine des fréquences élevées. En effet, celles-ci sont généralement suffisamment amorties pour que l'on puisse négliger les réflexions aux bords. La valeur asymptotique de l'admittance mesurée fournit alors une relation utile entre paramètres de masse et de rigidité de la structure étudiée. Nous y ferons référence plus loin pour définir un "facteur de mérite" d'un instrument à cordes qui guidera le choix des matériaux à utiliser.

Une formule analogue à (14.81) peut être obtenue pour des plaques anisotropes [35] [72]. Pour une plaque orthotrope, par exemple, on admet :

$$Z_p(0) \simeq 4h^2 \sqrt{\frac{\rho_p [E_1 E_2]^{1/2}}{3(1-\nu^2)}}, \quad (14.82)$$

où E_1 est le module d'Young le long des fibres et E_2 le module perpendiculaire aux fibres [213].⁵

Si l'on tient compte des pertes structurelles, le module d'Young devient complexe de la forme $E[1 + j\eta(\omega)]$. Pour la plupart des matériaux utilisés en lutherie, η augmente en moyenne avec la fréquence. Par conséquent, le module $|Z(\omega)|$ croît

⁵ Cette formule suppose implicitement que le coefficient de Poisson est identique dans les deux directions d'orthotropie.

généralement dans le haut du spectre, tandis que le module de l'admittance $|Y|(\omega)$ décroît, traduisant une diminution de la mobilité.

La plupart des tables d'harmonie d'instruments à cordes ne sont pas homogènes, mais renforcées sur leur face inférieure par un barrage. Nightingale et Bosmans ont étudié la mobilité au point d'excitation pour une plaque isotrope renforcée par un barrage linéaire périodique [320]. Les résultats de cette étude montrent que la mesure dépend fortement de la distance entre le point d'excitation et la barre la plus proche, tant que cette distance est petite devant la longueur d'onde de flexion. Lorsque le point d'excitation est proche d'une barre, la partie réelle mesurée de $Y_p(0)$ suit la valeur théorique obtenue pour une barre. Dès que la distance entre le point d'excitation et la barre la plus proche devient supérieure à la longueur d'onde, la mobilité mesurée tend vers la valeur théorique obtenue pour une plaque d'épaisseur constante. Ces indications sont précieuses pour comprendre les écarts expérimentaux observés, par exemple, sur une table de piano, lorsque le point d'excitation varie.

■ Excitation impulsionnelle

Pour une charge quelconque $q(r, t)$ l'équation qui gouverne le déplacement $w(r, t)$ de la plaque devient :

$$D \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 w + \rho_p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(r, t) . \quad (14.83)$$

On suppose la plaque initialement au repos ($w(r, 0) = \dot{w}(r, 0) = 0$). Posant $b^2 = D/\rho_p h$, on examine le cas particulier d'une charge impulsionnelle de la forme :

$$q(r, t) = 8b\rho_p h f(r) \delta(t), \quad \text{où} \quad \int_0^\infty 2\pi r f(r) dr = 1 \quad \text{soit} \quad f(r) = \frac{\delta(r)}{2\pi r} . \quad (14.84)$$

Le calcul complet a été traité par Graff [198]. Il conduit à la solution :

$$w(r, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{u}{t-u} \sin \left[\frac{r^2}{4b(t-u)} \right] du . \quad (14.85)$$

Celle-ci se réécrit sous la forme :

$$w(r, t) = 1 - \frac{2}{\pi} \text{Si} \left(\frac{r^2}{4bt} \right) \quad \text{où} \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin z}{z} dz . \quad (14.86)$$

La fonction $\text{Si}(x)$ est la fonction *sinus integral*. La figure 14.15 montre le déplacement

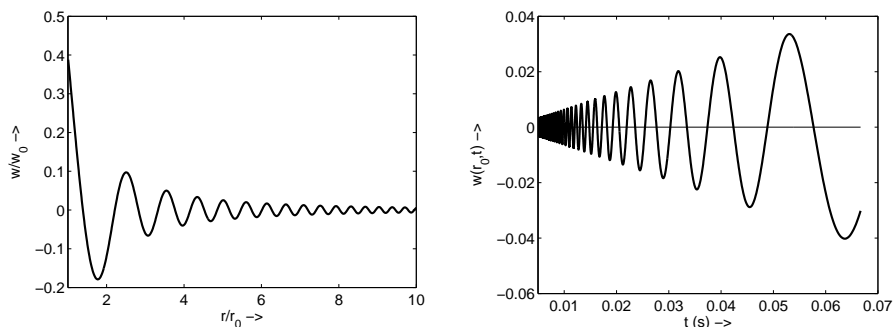


Figure 14.15. Excitation impulsionnelle d'une plaque. (Gauche) Allure spatiale du déplacement à $t = t_0$ fixé. (Droite) Allure temporelle du déplacement à $r = r_0$ fixé.

d'ensemble de la plaque, pour un instant t_0 fixé quelconque, puis l'allure temporelle d'un point particulier. On remarque notamment sur cette dernière la présence du précurseur dont les oscillations sont plus rapides en raison de la dispersion des ondes, les fréquences élevées se propageant plus vite que les autres.

2.7.2. Plaque chargée par le fluide

Nous tenons compte à présent de la charge du fluide sur la plaque, afin de voir de quelle manière celle-ci est susceptible d'influer sur la réponse à une excitation harmonique ponctuelle. Les résultats présentés ci-dessous sont à comparer à ceux obtenus pour la plaque seule (in vacuo) au paragraphe 2.7.1. Tenant compte de la pression exercée sur les deux faces, l'équation du mouvement de flexion qui gouverne le déplacement transversal est modifiée comme suit :

$$D \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 W - \rho_p h \omega^2 W = \frac{F_0 \delta(r)}{2\pi r} - P(r, z = 0+) + P(r, z = 0-), \quad (14.87)$$

où l'axe des z est perpendiculaire à la plaque. La plaque est située dans le plan $z = 0$. Comme au paragraphe 2.7.1, la résolution s'effectue à l'aide de la transformée de Hankel [198], [445]. En notant $\hat{P}(\gamma, 0)$ la transformée de la pression et $\hat{W}(\gamma)$ celle du déplacement, on obtient :

$$D(\gamma^4 - k_B^4) \hat{W}(\gamma) = -\hat{P}(\gamma, 0+) + \hat{P}(\gamma, 0-) + \frac{F_0}{2\pi}. \quad (14.88)$$

En remarquant que le premier terme de (14.88) est homogène à une pression, on définit la transformée de Hankel de l'impédance de pression :

$$\hat{Z}_p(\gamma) = \frac{D(\gamma^4 - k_B^4)}{j\omega}. \quad (14.89)$$

Compte tenu de (14.64), on écrit de manière analogue les termes de pression à l'aide de la transformée de Hankel de l'impédance de rayonnement, soit :

$$\hat{P}(\gamma, 0) = j\omega \hat{Z}_a(\gamma) \hat{W} \quad \text{avec} \quad \hat{Z}_a(\gamma) = \rho \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - \gamma^2}}, \quad (14.90)$$

d'où (14.88) devient :

$$j\omega \hat{W}(\gamma) = \frac{F_0}{2\pi} \frac{1}{\hat{Z}_p(\gamma) + 2\hat{Z}_a(\gamma)}. \quad (14.91)$$

On en déduit l'expression du déplacement par transformée de Hankel inverse :

$$W(r) = \frac{F_0}{j2\pi\omega} \int_0^\infty \frac{\gamma J_0(\gamma r)}{\hat{Z}_p(\gamma) + 2\hat{Z}_a(\gamma)} d\gamma. \quad (14.92)$$

Cette dernière équation peut se résoudre par une intégration de contour dans le plan complexe, ou bien numériquement [242]. La transformée de Hankel de la pression rayonnée s'obtient grâce à l'équation de Helmholtz combinée avec l'équation de continuité des vitesses normales au niveau de la plaque, comme au paragraphe 2.4. Nous ne détaillons pas ces calculs qui fournissent :

$$\text{pour } z > 0 \quad \hat{P}(\gamma, z) = j\omega \hat{Z}_a(\gamma) \hat{W}(\gamma) e^{-jz\sqrt{k^2 - \gamma^2}}, \quad (14.93)$$

d'où l'on tire :

$$P(r, z) = \frac{F_0}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\hat{Z}_a(\gamma)}{\hat{Z}_p(\gamma) + \hat{Z}_a(\gamma)} \gamma J_0(\gamma r) e^{-jz\sqrt{k^2 - \gamma^2}} d\gamma. \quad (14.94)$$

On peut calculer $P(r, z)$ en champ lointain, en utilisant la méthode de la phase stationnaire [242]. Moyennant les changements de coordonnées $r = R \sin \theta$ et

$z = R \cos \theta$, on obtient l'expression suivante, valable dans le demi-plan $z > 0$ et pour $kR \gg 1$:

$$P(R, \theta) = \frac{jkF_0 e^{-jkR}}{2\pi R} \frac{\cos \theta}{1 + jkh \frac{\rho_p}{\rho} \cos \theta \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \sin^4 \theta \right]} . \quad (14.95)$$

■ Discussion

L'expression de la pression rayonnée par la plaque en champ lointain calculée en (14.95) appelle plusieurs remarques :

- Dans l'axe perpendiculaire à la plaque ($\theta = 0$), l'expression de la pression se réduit à :

$$P(R, 0) = \frac{jkF_0 e^{-jkR}}{2\pi R} \frac{1}{1 + jkh \frac{\rho_p}{\rho}} . \quad (14.96)$$

Ce résultat montre que, par rapport au cas de la plaque dans le vide, la pression est multipliée par un facteur correctif qui ne dépend que de sa masse surfacique $\rho_p h$, et non de sa rigidité D . Autrement dit, **le champ sonore lointain dans l'axe d'une plaque est identique à celui d'une membrane de même masse surfacique**.

- Si, de plus, la plaque est suffisamment fine, et/ou que la fréquence est suffisamment petite, pour que l'on puisse supposer que $kh \frac{\rho_p}{\rho} \ll 1$, on a :

$$P(R, 0)_{lim} \approx \frac{jkF_0 e^{-jkR}}{2\pi R} . \quad (14.97)$$

On voit que la pression s'identifie alors à celle générée par une source ponctuelle où la force F_0 est imposée.

- Pour les fréquences inférieures à la fréquence critique, $P(R, 0)$ représente le maximum de la pression. En revanche, dans le domaine supersonique, il existe des maxima d'amplitude plus grande dans les directions θ_c définies par :

$$\theta_c = \sin^{-1} \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^{1/2} . \quad (14.98)$$

Les figures 14.16 représentent le champ de pression rayonné pour une plaque isotrope suivant que la fréquence est supérieure ou inférieure à la fréquence critique.

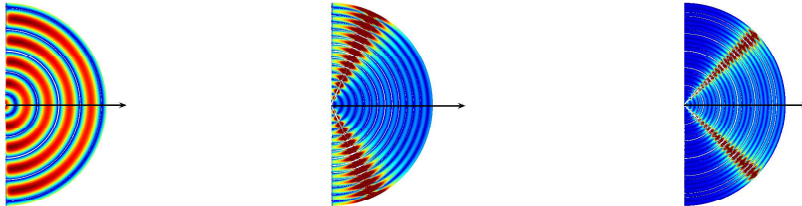


Figure 14.16. Champ de pression rayonné par une plaque mince isotrope chargée par l'air. (Gauche) $f = 0.4f_c$; (Centre) $f = 1.2f_c$; (Droite) $f = 2.0f_c$. La flèche est perpendiculaire au plan de la plaque et indique l'axe $\theta = 0$.

- En pratique, l'amplitude des maxima de pression est limitée par les amortissements internes de la plaque. Ceci est particulièrement vrai dans le domaine supersonique, au-delà de la fréquence critique.