SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Année Universitaire
2023-2024

Examen UE MU5MEAT2 - Acoustique Musicale
6 novembre 2023 - 2h

Master 2 Sciences pour l'Ingénieur / Informatique - Parcours ATIAM

Les documents ne sont pas autorisés. Les téléphones portables et autres systèmes communicants ainsi que les ordinateurs sont interdits. Le sujet est composé de deux exercices indépendants. Le barème est indicatif.

L'inventivité des hommes, l'esthétique musicale et la volonté de compositeurs ont produit, au fil du temps, des instruments de grandes dimensions et donc produisant des sons à la limite du domaine audible! Nous vous proposons d'en étudier certaines caractéristiques dans ce sujet. Nous nous intéresserons à la grosse caisse d'orchestre et à l'Octobasse, voir la figure ci-contre.

Exercice 1 : Octobasse - 10 points

L'octobasse est le plus grand et le plus grave des instruments de la famille des instruments à cordes. Il possède 3 cordes de 2,06 m, accordée en C0 (16,35 Hz), G0 (24,5 Hz) et C1 (32,70 Hz). L'instrument est tellement grand (3,87 m) que pour modifier la longueur vibrante des cordes, l'instrumentiste doit actionner des leviers et que pour jouer, il doit se tenir sur une estrade (voir figure la figure ci-dessus).

Q1 Identifier chaque élément de l'instrument et son rôle acoustique.

Q2 On considère une corde parfaitement souple, non amortie, de tension constante T_s, de masse volumique ρ_s, de section d_s et longueur L_s fixée entre le sillet et le chevalet, effectuant un mouvement uniquement selon l'axe x.

- **a** Donnez l'équation à laquelle le déplacement y_s de la corde obéit. Explicitez tous les termes en fonction des données du problème (dont la célérité).
- **b** Déterminez l'expression des déformées modales et des fréquences propres pour une corde simplement supportée à chacune de ses extrémité. La manière dont ces expressions sont obtenues est attendue à cette question avec la définition de la norme choisie.

Q3 On considère maintenant une corde mono-filament avec les mêmes caractéristiques et conditions aux limites qu'à la question précédente mais, cette fois-ci, munie de raideur et amortie, de module d'Young E, de moment quadratique de section droite $I = \frac{\pi d^4}{64}$, de résistance mécanique visqueuse R, d'angles de perte viscoélastique δ_{ve} et thermoélastique δ_{te}.

- **a** Montrez que l'équation à laquelle le déplacement y_s de la corde obéit s'écrit maintenant de la manière suivante :

$$\alpha \frac{\partial^2 y_s}{\partial t^2} = \beta \frac{\partial^2 y_s}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial^4 y_s}{\partial x^4}$$

Explicitez les termes α, β et γ en fonction des données du problème.

b Déterminez l'expression des déformées modales ainsi que la relation de dispersion de la corde conservative associée (c'est à dire, sans phénomène dissipatif).

c Si vous considérez le terme $\frac{T}{EI}$ grand par rapport au nombre d'onde, que cela signifie-t-il physiquement ? En considérant cette hypothèse, exprimez les fréquences propres de la manière suivante :

$$f_n = n f_0 \left(1 + B n^2\right),$$

avec f_n les fréquences propres associées au mode n, f_0 la fréquence fondamentale et B le facteur d'inharmonicité. Exprimez B en fonction de E, ρ, f_0 et des caractéristiques géométriques de la corde.

d Comment l'inharmonicité entre les partiels sera influencée par les caractéristiques géométriques de la corde ?

Q4 La corde est maintenant couplée au chevalet d'admittance Y_B. Comment ce couplage va-t-il affecter l'inharmonicité de l'instrument ?

Q5 En considérant uniquement les partiels de rangs élevés. Comparez le rapport de l'inharmonicité de la corde de C1 de l'octobasse à celui de la corde de C1 de la contrebasse (pour une contrebasse à 5 cordes) au rapport de l'inharmonicité des cordes C1 et C0 de l'octobasse. Des valeurs approximatives sont attendues ici. Qu'en concluez-vous ?

On considérera des cordes (contrebasse et octobasse) :
— *en boyau de boeuf (E=6 GPa, ρ_s=1320 Kg/m^3)*
— *de diamètre 8 mm (C0, octobasse)*
— *de diamètre 5 mm (C1, octobasse)*
— *de diamètre 2 mm (C1, contrebasse)*
La longueur vibrante d'une corde de contrebasse est d'environ de 1 m.

Exercice 2 : Grosse Caisse - 10 points

La grosse caisse d'orchestre est la percussion qui émet le son le plus grave de l'orchestre, avec des composantes de l'ordre de la dizaine de Hertz. Elle se règle mais ne s'accorde pas (note indéterminée) et se joue frappée avec une mailloche. Son fût cylindrique court et de gros diamètre est fermé par deux membranes homogènes : une « peau de frappe » et une « peau de résonance ». Le diamètre de la grosse caisse est voisin de 90 cm pour les hauteurs de fut d'environ 50 cm.

Q6 Identifier chaque élément de l'instrument et son rôle acoustique.

Q7 Modes de la « peau de frappe ». On considérera une membrane circulaire fixe en ses bords et dans le vide, de tension linéique τ, de masse volumique ρ_m, d'épaisseur h et de rayon a.

a Donnez l'équation à laquelle le déplacement y_m de la membrane obéit. Explicitez tous les termes en fonction des données du problème (dont la célérité).

b Déterminez les expressions des déformées modales et des fréquences des trois premiers modes (par ordre de fréquence croissante) de la « peau de frappe ». Pour rappel, l'équation de Bessel ainsi que les zéros des fonctions de Bessel de première espèce sont donnés en Annexe.

c Précisez les valeurs numériques des coefficients sans dimension dans les expressions des fréquences modales, et déduisez-en les rapports entre la fréquence du second mode et la fréquence du premier mode et entre la fréquence du troisième mode et la fréquence du premier mode.

d Indiquez les paramètres mécaniques de la membrane que le concepteur de l'instrument peut ajuster pour contrôler la fréquence du premier mode.

Q8 En considérant le processus adiabatique et réversible (PV^γ = constante, avec P la pression, V le volume et γ la constante d'adiabacité), établissez la relation entre la variation de pression dP et de volume dV pour de petits déplacements. Déduisez-en la relation entre la variation de force exercée sur la peau de frappe et la variation des déplacements de la peau de frappe et de la peau de résonance.

Q9 En faisant l'hypothèse que la « peau de résonance » est bloquée (déplacement nul), et en négligeant les amortissements et le rayonnement de la face externe de la « peau de frappe », indiquez qualitativement la direction dans laquelle la fréquence du premier mode évolue, par rapport au cas dans le vide.

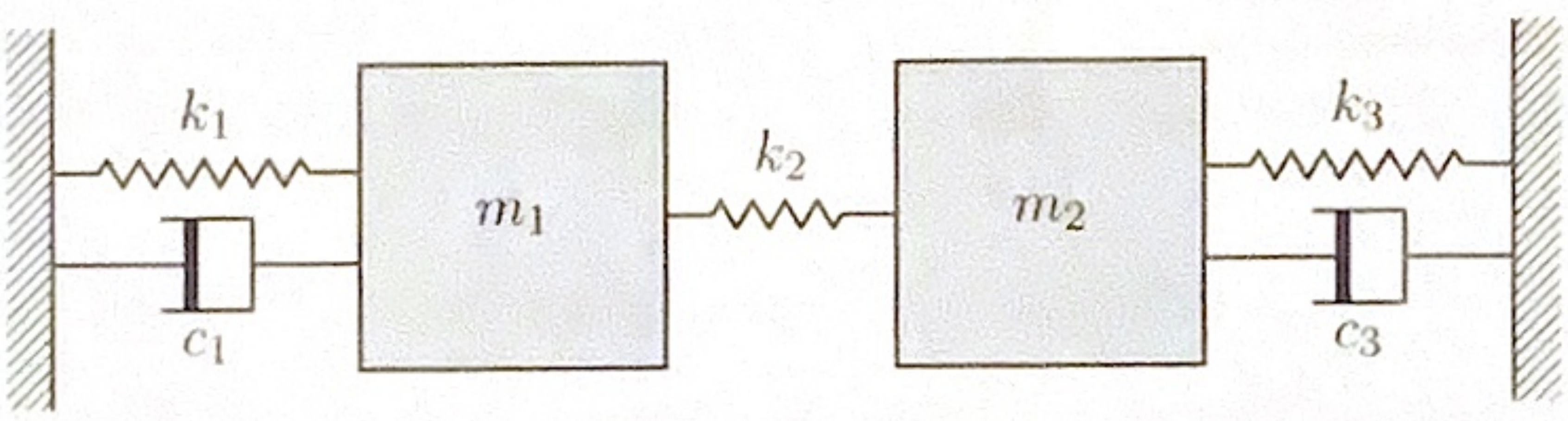
Q10 On étudie dans cette question le rayonnement du système et son influence sur la vibration, tout en conservant l'hypothèse d'une « peau de résonance » bloquée.

a Comment pourrait-on modéliser simplement le rayonnement de la « peau de frappe » ? Suivant quelle(s) hypothèse(s) ?

b En utilisant l'impédance de rayonnement de la membrane sous forme complexe : ($Z_{Ray} = R_a + jX_a$), comment l'équation du mouvement de la membrane s'en trouve modifiée ?

c Quel(s) impact(s) aura le rayonnement de la « peau de frappe » sur le comportement modal de la membrane ? De manière quantitatif établissez cet ou ces impacts en fonction de R_a et de X_a.

Q11 Les deux peaux sont maintenant libres de se déformer. En supposant que le fût est très court (très faible volume interne), la modélisation du premier mode du système est proposée sous la forme présentée sur la figure ci-dessous :



a À partir des résultats des questions précédentes, explicitez les paramètres du modèle : m_1, m_2, k_1, k_2, k_3, c_1 et c_2.

b Indiquez pour chaque élément du modèle, les paramètres qui permettent au facteur de les contrôler.

Q12 On suppose dans cette question que les deux peaux (« frappe » et « résonance ») sont identiques et montées de manière similaire. Donnez l'allure globale de la directivité de l'ensemble du système sur son premier mode.

Annexe : équation de Bessel

On rappelle que l'équation de Bessel,

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + (k^2 - \frac{m^2}{r^2})R = 0,$$

a, pour solution les fonctions de Bessel d'ordre m de première espèce $J_m(kr)$ et de deuxième espèce $Y_m(kr)$, telles que

$$R(r) = AJ_m(kr) + BY_m(kr)$$

Pour que le déplacement à $r = 0$ soit fini, il faut que $B = 0$. Ci-dessous sont indiquées les valeurs des zéros des fonctions de Bessel de première espèce ($J_m(j_{mn}) = 0$) :

m \ n	0	1	2	3	4
0	-	2,40	5,52	8,65	11,79
1	0	3,83	7,02	10,17	13,32
2	0	5,14	8,42	11,62	14,80
3	0	6,38	9,76	13.02	16,22