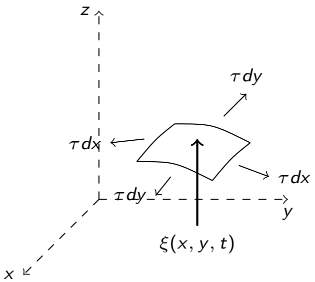
Restructuration APP Cordes 2

par
Jean-Loïc Le Carrou

Equipe Lutheries-Acoustique-Musique (LAM) - Institut Jean Le Rond d'Alembert,
CNRS UMR 7190, Ministère de la Culture et de la Communication,
4 place Jussieu, 75005 Paris - FRANCE
jean-loic.le_carrou@sorbonne-universite.fr



PFD sur l'élément $dx \times dy$ conduit à

$$\tau \Delta \xi = \rho h \ddot{\xi}$$

Equation des ondes en 2D

Pour une membrane carrée (! !) :

$$\frac{\partial^2 \xi(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi(x,y,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi(x,y,t)}{\partial t^2}$$

Pour une membrane circulaire :

$$\frac{\partial^2 \xi(r,\theta,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \xi(r,\theta,t)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \xi(r,\theta,t)}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi(x,y,t)}{\partial t^2}$$

Membrane circulaire tendue sur un cadre circulaire fixe

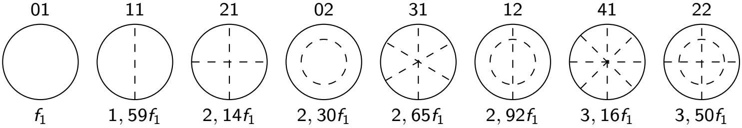
$$\frac{\partial^2 \xi(r,\theta,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \xi(r,\theta,t)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \xi(r,\theta,t)}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \xi(x,y,t)}{\partial t^2}$$

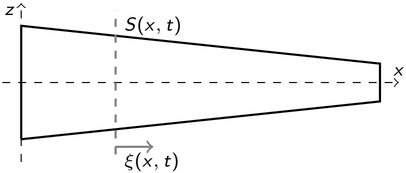
Recherche d'une solution à variables séparées :

$$z(r,\theta,t) = A Z_r(r) Z_\theta(\theta) e^{\jmath\omega t}$$

qui permet de découpler l'équation des ondes :

$$\left\{ \begin{array}{r} \frac{\partial^2 Z_\theta}{\partial \theta^2} + n^2 Z_\theta = 0 \\ r^2 \frac{\partial^2 Z_r}{\partial r^2} + r\frac{\partial Z_r}{\partial r} + (k^2 r^2 - n^2) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Z_\theta = a\sin(n\theta) + b\cos(n\theta) \\ Z_r = J_n(kr) \end{array} \right.$$





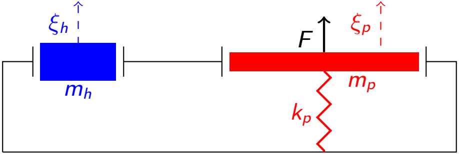
$$\rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(ES \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = 0$$

Pour une barre de section constante

- Vitesse de propagation des ondes : $C_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$;
- Conditions aux Limites : $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$ (libre) et $\xi = 0$ (fixe) ;
- Pulsations et déformées modales :

Conditions aux Limites	ω_n	$\phi_n(x)$
libre-libre	$\frac{n\pi c}{L}$	$\cos(\frac{n\pi x}{L})$
fixe - libre	$\frac{(2n-1)\pi c}{2L}$	$\sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L}$
fixe - fixe	$\frac{n\pi c}{L}$	$\sin(\frac{n\pi x}{L})$

Modèle basse fréquence



couplage membrane-cavité est assimilable à un système à 2 DDL.

Système conservatif associé :

$$\begin{bmatrix} m_p & 0 \\ 0 & m_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_p \\ \ddot{\xi}_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_p + \mu A_p^2 & \mu A_h A_p \\ \mu A_h A_p & \mu A_h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_p \\ \xi_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

Modification structurale de l'instrument :

- modification de la table : $m_p \nearrow$ alors $\omega_{1,2} \searrow$ et $k_p \searrow$ alors $\omega_{1,2} \searrow$
- modification du volume de la caisse : $V \nearrow$ alors $\omega_{1,2} \searrow$
- modification de l'évent : $A_h \nearrow$ alors $\omega_{1,2} \nearrow$ et $h \nearrow$ alors $\omega_{1,2} \searrow$

$$\rho S \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - T \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t)$$

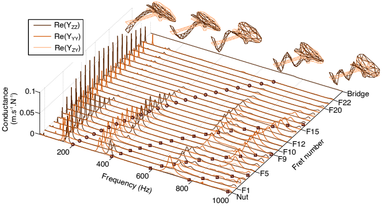
où $y(x,t)$ est son déplacement transversal, ρ sa masse volumique, S sa section et T sa tension.

$$f(x,t) = B\delta(t)g(x) \quad \text{avec} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_0 - a \leq x \leq x_0 + a \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}.$$

$$y(x,t) = 2aB \sum_n \frac{\sin k_n x \sin k_n x_0}{m_n} \frac{\sin k_n a}{k_n a} \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n}$$

On voit apparaître un filtrage passe-bas $\frac{\sin k_n a}{k_n a}$, fréquence de coupure $f_c = \frac{c}{2a}$

Lorsque la corde est connectée à une structure vibrante, de l'énergie vibratoire est dissipée par ce couplage [1]



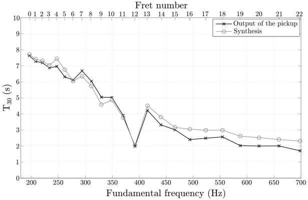
- Modification des pulsations propres

$$\omega_n = 2\pi \frac{nc}{2L}\left[1 + \frac{n^2\pi^2}{L^2}\frac{EI}{2T} + \frac{Z_c}{n\pi}\Im\left\{Y_{ch}\right\}\right]$$

- Modification des amortissements de chaque mode

$$Q_n^{-1} = \frac{R_L}{n\omega\rho_L} + \frac{EI}{T}\frac{\omega^2}{c}(\delta_{\nu e}+\delta_{te}) + \frac{c^2\rho_L}{\pi L}\Re\left\{Y_{ch}\right\}\frac{1}{f_n}$$

.



1. A Paté, JL Le Carrou et B Fabre, Predicting the decay time of solid body electric guitar tones. JASA 135(5), pp. 3045-3055 (2014).