Corrigé des exercices du cours 1

C. Vergez - vergez@lma.cnrs-mrs.fr

Exercice 1

Enoncé : en supposant que l'amplitude du signal de pression mesuré dans l'embouchure d'une trompette est de 20kPa crête à crête (c'est un maximum), quel est le niveau sonore en dB ?

Solution : on utilise la formule $20log_{10}\left(\frac{P}{p_0}\right)$ où P est la valeur efficace et $p_0 = 2e^{-5}$Pa. Sans connaître la forme d'onde, on ne peut pas calculer la valeur efficace P donc on ne peut pas répondre exactement.

Par contre, on peut proposer une estimation :

— Si la forme d'onde était sinusoïdale : dans ce cas la valeur efficace est la valeur crête divisée par $\sqrt{2}$, d'où $P = 1.414e^4$Pa d'où un niveau sonore de 177dB.

— Si la forme d'onde était triangulaire : dans ce cas la valeur efficace est la valeur crête divisée par $\sqrt{3}$, d'où $P = 1.154e^4$Pa d'où un niveau sonore de 175.2dB.

— Si la forme d'onde était rectangulaire : dans ce cas la valeur efficace est la valeur crête, d'où $P = 2e^4$Pa d'où un niveau sonore de 180dB.

Conclusion : on a un niveau sonore compris entre 175dB et 180dB, ce qui est considérable ! Bien au delà du seuil de douleur, juste en dessous d'une fusée au décollage (cf. cours).

Exercice 2

Enoncé : démontrer qu'avec les hypothèses de faible niveau dans un fluide au repos, l'équation d'Euler linéarisée (donc à l'ordre 1) s'écrit :

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{grad} p + \rho_0 \mathbf{F} \tag{1}$$

Solution : on part de l'équation d'Euler :

$$\rho \left[(\mathbf{v}.\mathbf{grad})\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right] = -\mathbf{grad} P + \rho \mathbf{F} \tag{2}$$

On écrit les différentes grandeurs comme somme de la valeur au repos (ordre 0) et de la déviation acoustique (ordre 1), cf. cours :

— $P = p_0 + p$
— $T = T_0 + \tau$
— $\rho = \rho_0 + \rho'$
— $v = 0 + v$ (fluide au repos)

En remplaçant dans l'équation d'Euler, on obtient :

$$(\rho_0 + \rho')\,(\mathbf{v}.\mathbf{grad})\mathbf{v} + (\rho_0 + \rho')\,\frac{\partial}{\partial t}\,(\mathbf{v}) = -\mathbf{grad}\,(p_0 + p) + (\rho_0 + \rho')\,\mathbf{F} \tag{3}$$

— $\mathbf{v}$ est d'ordre 1, donc dans le membre de gauche, $(\mathbf{v}.\mathbf{grad})\mathbf{v}$ est d'ordre 2, et lorsqu'on développe, $\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ est d'ordre 1, mais $\rho' \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ est d'ordre 2.
— Par principe puisque p_0 est constant, $\mathbf{grad}p_0 = 0$.
— $\mathbf{F}$ est nécessairement d'ordre 1 sinon en développant $\rho\mathbf{F}$ on ferait apparaître un terme $\rho_0\mathbf{F_0}$ d'ordre 0 ; or dans l'équation d'Euler avant linéarisation, il n'y a aucun terme d'ordre 0, donc $\rho\mathbf{F}$ ne peut avoir d'ordre 0 (autrement dit $\mathbf{F_0} = \mathbf{0}$).

En ne retenant que les termes d'ordre 1, on aboutit bien à l'équation (1).

Exercice 3

Enoncé : montrer qu'à l'ordre 1, la linéarisation de l'équation de conservation de la masse conduit à :

$$\rho_0 div\mathbf{v} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} = \rho_0 q(\mathbf{r}, t) \tag{4}$$

Solution : L'idée est la même que pour la linéarisation de l'équation d'Euler. Partant de l'équation de conservation de la masse :

$$div(\rho\mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho q(\mathbf{r}, t), \tag{5}$$

en écrivant que $div(\rho\mathbf{v}) = \rho\; div\mathbf{v} + grad\rho\; .\; \mathbf{v}$, on a alors :

$$(\rho_0 + \rho')div\mathbf{v} + grad(\rho_0 + \rho')\; .\; \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \rho') = (\rho_0 + \rho')q(\mathbf{r}, t), \tag{6}$$

Or q est d'ordre 1 pour les mêmes raisons que F dans l'équation d'Euler, ρ' et v sont d'ordre 1, d'où l'équation (4).

Exercice 4

Enoncé : en utilisant deux équations de conservation et l'équation d'état, montrer que la pression acoustique vérifie :

$$\Delta p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \rho_0 \left(div\mathbf{F} - \frac{\partial q}{\partial t} \right) \tag{7}$$

Solution :
- On calcule $div[\mathbf{Eq}.(\mathbf{1})] - \frac{\partial}{\partial t}[Eq.(4)]$
- Comme les opérateurs div et $\partial/\partial t$ commutent, les termes en vitesse se simplifient
- Il reste :

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \rho'}{\partial t}\right) = -div(\mathbf{grad}p) + div(\rho_0 \mathbf{F}) - \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 q)$$

Comme par définition l'opérateur laplacien est égal à la divergence du gradient d'une quantité scalaire ($\Delta = div(\mathbf{grad})$), il suffit de remplacer ρ' par p/c^2 (donné par l'équation d'état) pour aboutir à l'équation (7).

Exercice 5

Enoncé : montrer que pour des ondes planes on obtient une décomposition en ondes aller/retour pour la vitesse qui s'écrit

$$v(x,t) = v^+(x-ct) + v^-(x+ct),$$

avec $v^+ = \frac{1}{\rho_0 c}p^+$ et $v^- = \frac{-1}{\rho_0 c}p^-$.

Solution : On écrit la décomposition pour la pression (cf. cours) :

$$p(x,t) = f^+(x-ct) + f^-(x+ct) \tag{8}$$

On utilise l'équation d'Euler linéarisée, d'où :

$$\begin{aligned} -\rho_0 \partial_t v(x,t) &= \frac{df^+(x-ct)}{d(x-ct)}\frac{\partial(x-ct)}{\partial x} + \frac{df^-(x+ct)}{d(x+ct)}\frac{\partial(x+ct)}{\partial x} \\ &= \frac{df^+(x-ct)}{d(x-ct)} + \frac{df^-(x+ct)}{d(x+ct)} \end{aligned}$$

On intègre alors par rapport au temps :

$$-\rho_0 v(x,t) = -\frac{1}{c}f^+(x-ct) + \frac{1}{c}f^-(x+ct) \tag{9}$$

L'équation (9) correspond bien à la décomposition recherchée.