

# Fondamentaux pour l'Acoustique - M2 ATIAM

## Ondes acoustiques guidées

C. Vergez<sup>1</sup>, [vergez@lma.cnrs-mrs.fr](mailto:vergez@lma.cnrs-mrs.fr)

<sup>1</sup> *Laboratoire de Mécanique et Acoustique (LMA-CNRS),  
Marseille, France*

**- Support du cours -**

# Avertissements :

## Avertissements :

- Ce document n'est qu'un support de cours. Le but est de gagner du temps sur la prise de note, pas de remplacer le cours.
- Le cours des différents intervenants en acoustique est construit autour du livre [A. Chaigne, J. Kergomard], *Acoustique des instruments de musique*, Belin.  
Il y sera fait appel systématiquement en cours (renvoi aux pages concernées de la première édition du livre). Les notations choisies dans le cours sont en accord avec celles du livre.

# Plan du cours

1

Introduction - Notion d'interférences entre ondes

2

Modes dans des géométries simples : parallélépipède, tubes droits

3

Ondes planes dans les guides - solutions sans source dans le domaine fréquentiel - lignes c

4

Ondes planes dans les guides - domaine temporel - Fonction de Green

5

Ondes planes - Guides de sections variables

# Plan du cours

1

Introduction - Notion d'interférences entre ondes

2

Modes dans des géométries simples : parallélépipède, tubes droits

3

Ondes planes dans les guides - solutions sans source dans le domaine fréquentiel - lignes c

4

Ondes planes dans les guides - domaine temporel - Fonction de Green

5

Ondes planes - Guides de sections variables

# Introduction - Interférences

## Onde + Onde = ?

- En acoustique linéaire (rappel : petites variations des grandeurs acoustiques, cadre de ce cours) le **principe de superposition** est applicable
- Donc : les ondes se "somment" (i.e. l'onde résultante est la somme des deux ondes) [Applet "superposition of waves"](http://www.kettering.edu/~drussell/Demos.html) (crédit applet : Dan Russel, <http://www.kettering.edu/~drussell/Demos.html>)

## Exemples d'interférence

- Hauts-parleurs alimentés en opposition de phase
- Diapason qu'on fait tourner près de l'oreille
- Contrôle actif (ex : casque anti-bruit)
- Effet "Bass reflex" qui utilise la "somme" du son direct et réfléchi pour renforcer les basses fréquences
- Tous les instruments de musique dans leur fonctionnement !

## Cas des espaces clos

- Tous les espaces clos (au sens "taille finie") sont sujets à des interférences puisque les ondes se réfléchissent au moins contre les frontières du domaines.

Applet "Sound" / onglet "reflection"

- Sur une corde (cf. cours de JLLC) les ondes se réfléchissent aux extrémités
- Les interférences peuvent former des systèmes d'ondes stationnaires (cf. 1er cours) : là où l'interférence est constructive (oscillations en phase) on a des **ventres de vibration**, là où l'interférence est destructive (oscillations en opposition de phase) on a des **noeuds de vibration**.

- Les différentes fréquences auxquelles ces systèmes d'ondes stationnaires s'installent correspondent aux **fréquences propres** du domaine, et les formes stationnaires aux **modes propres** Applet "string-waves" (crédit :

[https://phet.colorado.edu/sims/wave-on-a-string/wave-on-a-string\\_en.html](https://phet.colorado.edu/sims/wave-on-a-string/wave-on-a-string_en.html).

- Dans une salle, on a des phénomènes identiques.

## Idée principale de ce cours

Etudier l'acoustique des milieux bornés (i.e. avec conditions aux limites), capitale pour l'acoustique musicale et l'acoustique des salles. Autrement dit ce cours concerne l'étude des guides d'ondes acoustiques (sans dissipation).

# Plan du cours

1

Introduction - Notion d'interférences entre ondes

2

Modes dans des géométries simples : parallélépipède, tubes droits

3

Ondes planes dans les guides - solutions sans source dans le domaine fréquentiel - lignes c

4

Ondes planes dans les guides - domaine temporel - Fonction de Green

5

Ondes planes - Guides de sections variables

# Généralités

## Définition

On parle d'**ondes guidées** lorsque la propagation est contrainte par des conditions aux limites.

## Quels fronts d'onde ?

On peut trouver des ondes planes, sphériques, mais pas seulement !

## Résumé des transparents à venir

- Considérer le cas d'un espace clos parallélépipédique à trois dimensions  
Concept de **modes de cavité** ([Chaigne et Kergomard, p298])
- Considérer le cas d'une conduite infinie à section rectangulaire  
Concept de **modes de conduits** ([Chaigne et Kergomard, p299])
- Quelle différence si la conduite est à section circulaire ?  
([Chaigne et Kergomard, p301])



# Modes de cavité : exemple d'un parallélépipède rectangle (une salle ?)

## Objet

Espace 3D ( $L_x \times L_y \times L_z$ ) aux parois rigides réfléchissantes (i.e. conditions de **Neuman**, vitesse nulle)

## Principe

- Considérer l'équation des ondes 3D sans source (cf. cours 1)
- Chercher les solutions à variables séparées :

$$p(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t)$$

en tenant compte des conditions aux limites

## Etapes importantes

- $\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$
- Pour qu'une quantité indépendante du temps (membre de gauche) soit égale à une quantité indépendante de l'espace (membre de droite), il faut que cette quantité soit indépendante des deux !
- On la note  $-k^2 = -\omega^2/c^2$

## Expressions de $X, Y, Z, T$

- Résoudre  $\frac{1}{c^2} \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\omega^2/c^2$  conduit (en notation complexe) à :

$$T(t) = \exp(\pm j\omega t)$$

- De même, en tenant compte des conditions aux limites de Neuman <sup>a</sup> :

$$X(x) = \cos(k_x x) \quad \text{avec } k_x = n_x \pi / L_x \quad n_x \in \mathbb{N}$$

$$Y(y) = \cos(k_y y) \quad \text{avec } k_y = n_y \pi / L_y \quad n_y \in \mathbb{N}$$

$$Z(z) = \cos(k_z z) \quad \text{avec } k_z = n_z \pi / L_z \quad n_z \in \mathbb{N}$$

- On a donc une infinité de modes, dits "modes de cavité"

---

a. Exemple sur la direction "x" :  $v_x(x=0, t) = v_x(x=L_x, t) = 0 \implies \partial_x p(x=L_x, t) = 0$

## Quel lien entre les fréquences spatiales et temporelles ?

- On a  $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$
- C'est l'équation de dispersion

## Finalement ...

- On a donc les solutions suivantes (à une constante multiplicative près)

$$p(x, y, z, t) = \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) e^{i\omega t} \quad , \text{ avec}$$

$$\omega^2/c^2 = (n_x \pi/L_x)^2 + (n_y \pi/L_y)^2 + (n_z \pi/L_z)^2$$

## Remarques :

- Les modes  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$  correspondent aux modes plans selon les directions "x", "y", "z" respectivement.
- Les fréquences propres possibles sont quantifiées, ce qui est justement dû au fait que le milieu est borné (cf. le cas à venir de la conduite rectangulaire infinie)

# Modes de conduits

## Exemple d'une conduite infinie à section rectangulaire

### Objet

Conduite infinie dans la direction "x", à section rectangulaire (parois réfléchissantes)  
Ex : un tuyau d'orgue à section carrée (infiniment long ...)

### Qu'est-ce qui change ?

- Dans la dimension infinie, on a superposition d'ondes aller/retour, mais **toutes les fréquences peuvent exister**
- Dans les dimensions transverses, on garde des modes de cavité.

### Solutions

(A comparer avec les modes de cavité)

$$p(x, y, z, t) = \left[ a^+ e^{-jk_x x} + a^- e^{jk_x x} \right] \cos(k_y y) \cos(k_z z) e^{j\omega t} \quad , \text{ avec}$$

$$k_x^2 = \omega^2 / c^2 - k_{\perp}^2 \quad \text{où } k_{\perp}^2 = (n_y \pi / L_y)^2 + (n_z \pi / L_z)^2$$

## Remarques

- Le mode plan correspond à  $n_y = n_z = 0$  (parois de Neuman) : grandeurs uniformes dans la section du conduit. Dans ce cas,  $k_x^2 = \omega^2/c^2 \geq 0$
- Dans le cas général  $k_x^2 = \omega^2/c^2 - k_\perp^2$ , donc positif ou négatif, donc un nombre d'onde  $k_x$  réel ou imaginaire pur.
- Si  $k_x^2 \geq 0$ , les modes sont **propagatifs**, dans le cas contraire ils sont **évanescents** (décroissance exponentielle)
- On appelle **fréquence de coupure** la fréq. limite entre les deux comportements :

$$\omega/c = k_\perp$$

Il s'agit d'une fréquence propre du problème bidimensionnel transverse !

## Conséquence importante

- Lorsque la fréquence est telle que  $\omega/c < k_\perp$ ,  $\forall k_\perp \neq 0$ , alors seul le mode plan est propagatif dans le tuyau, les **modes supérieurs** sont évanescents  
 applet waveguide evanescent .
- C'est le cas dans les instruments de musique sur une plage de fréquence importante, même si pour certains tuyaux d'orgue à section carrée, on détecte l'effet de modes non plans (dits "modes supérieurs") dans le spectre.

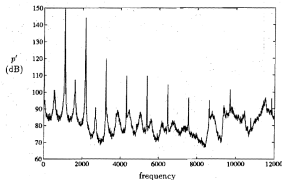


Figure 5.1: Power spectra of the pressure signal  $p'$  (in dB rel 20  $\mu$ Pa) measured in a small experimental recorder-like organ pipe at the end of the resonator (50.25 mm from the passive end of a 0.283 m long pipe) for a driving pressure  $p_j$  of 2500 Pa.

**Thèse de MP Verge** : spectre, avec fréquence de coupure à 8500Hz environ, qui coïncide quasiment avec le 8eme harmonique, et un très net renforcement du bruit large bande de turbulence (la turbulence se couple très fort avec le 1er mode transverse)

## Exercice 1

Soit un tuyau d'orgue à section carrée de 5cm de côté. Quelle est la première fréquence de coupure ?

## Impédance spécifique caractéristique d'un mode dans la direction "x"

On utilise l'équation d'Euler :

$$Z_x = \frac{p}{v_x} = -j\omega\rho_0 \frac{p}{\partial p / \partial x} = \rho_0 c \frac{k}{k_x}$$

On retrouve si on repasse en 1D la définition donnée dans le premier cours

# Modes de conduits

## Exemple d'une conduite infinie à section circulaire

Question : qu'est-ce qui change si la section est circulaire ?

(cas le plus fréquent pour les instruments de musique)

- Les difficultés supplémentaires sont d'ordre "calculatoire"

[Chaigne et Kergomard, p301] :

- Ecriture de l'opérateur laplacien en coordonnées cylindriques (et plus cartésiennes)
- Apparition de fonctions de Bessel de première espèce dans la résolution du problème à variables séparées (pour les déformées dans la section circulaire)
- La première fréquence de coupure est du même ordre de grandeur que dans le cas d'une section rectangulaire (lorsque diamètre et longueur de côté concordent)

# Plan du cours

1

Introduction - Notion d'interférences entre ondes

2

Modes dans des géométries simples : parallélépipède, tubes droits

3

**Ondes planes dans les guides - solutions sans source dans le domaine fréquentiel - lignes c**

4

Ondes planes dans les guides - domaine temporel - Fonction de Green

5

Ondes planes - Guides de sections variables



# Impédance acoustique et coefficient de réflexion

[Chaigne et Kergomard, p165]

## Hypothèses

- 1 Ondes planes : résultats valables en dessous de la première fréquence de coupure du guide
- 2 Guides à section droite  $S$

Nous avons vu dans le 1<sup>er</sup> cours que la solution générale de l'équation des ondes sans source était la superposition de deux ondes progressives aller et retour. En fréquentiel cette décomposition s'écrit <sup>a</sup> :

$$P(x, \omega) = P^+(\omega)e^{-jkx} + P^-(\omega)e^{+jkx} \quad \text{pour la variable de pression}$$

$$U(x, \omega) = Z_c^{-1} \left[ P^+(\omega)e^{-jkx} - P^-(\omega)e^{+jkx} \right] \quad \text{pour la variable de débit}$$

$P^+$  et  $P^-$  sont complexes,  $Z_c = \frac{\rho_0 c}{S}$  est l'impédance acoustique caractéristique

a. TF de la solution de d'Alembert avec changement de variable  $t' = t \pm x/c$

## Définitions

- Le rapport (en fréquentiel) entre les ondes retour/aller s'appelle le **coefficient de réflexion** :

$$R(x, \omega) = \frac{P^-}{P^+} e^{2jkx}$$

- Dans le domaine temporel, par TF inverse de  $R(x, \omega)$ , on définit la **fonction de réflexion**.
- Le rapport (en fréquentiel) entre la pression et le débit en un point  $x$  du guide définit l'**impédance acoustique** :

$$Z(x, \omega) = \frac{P(x, \omega)}{U(x, \omega)}$$

- Les deux quantités sont évidemment liées :

$$\frac{Z(x, \omega)}{Z_c} = \frac{1 + R(x, \omega)}{1 - R(x, \omega)}$$

# Matrices de transfert

## Matrice de transfert

Dans de nombreux cas (y compris l'étude des instruments de musique à vent), il est utile d'exprimer pression et débit en un point  $x_1$  (en fréquentiel) en fonction des mêmes quantités en un point différent  $x_2$  du guide :

$$\begin{pmatrix} P(x_1, \omega) \\ U(x_1, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos k(x_2 - x_1) & jZ_c \sin k(x_2 - x_1) \\ jZ_c^{-1} \sin k(x_2 - x_1) & \cos k(x_2 - x_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x_2, \omega) \\ U(x_2, \omega) \end{pmatrix}$$

Ce formalisme rappelle celui des **lignes de transmission** en électricité.

## Exercice 2

Retrouver ce résultat (on peut prendre pour simplifier les calculs  $x_2 = 0$  et  $x_1 = x$  quelconque).

## Conséquence importante

Si on connaît le vecteur (pression, débit) en un point du guide, on le connaît partout ailleurs

# Impédance ramenée

## Définition

En reprenant l'expression de la matrice de transfert, on peut écrire l'impédance acoustique en  $x_1$  (notée  $Z_1$ ) en fonction de la même quantité en  $x_2$  (notée  $Z_2$ ) :

$$Z_1/Z_c = \frac{j \tan k(x_2 - x_1) + Z_2/Z_c}{1 + j \tan k(x_2 - x_1) Z_2/Z_c}$$

## Application

Calcul de l'impédance d'entrée  $Z(x = 0, \omega)$  en fonction de l'impédance terminale

# Impédance d'entrée du cylindre et fréquences de résonance

## Hypothèse

On suppose un cylindre ouvert à son extrémité ( $x_2 = l$ )

On néglige les effets (complexes) du rayonnement et on simplifie :

$$P(x = l, \omega) = 0 \text{ (d'où } Z(x_2 = l) = 0)$$

## Exercice 3

A partir de la formule de l'impédance ramenée, montrer que l'impédance d'entrée d'un cylindre de longueur  $l$ , ouvert à son extrémité s'écrit :

$$Z(x = 0, \omega) = jZ_c \tan kl$$

## Remarque :

L'impédance d'entrée ne dépend que de la condition terminale (que le cylindre soit ouvert ou fermé à l'entrée).

## Fréquences de résonance - Application à la flûte et à la clarinette

- Les **fréquences de résonance** permettent d'obtenir une première approximation des fréquences de jeu de l'instrument à vent.
- **exercice 4** : en écrivant que pour une flûte l'extrémité amont du résonateur ( $x_1 = 0$ ) est ouverte, et qu'elle est fermée pour une clarinette, montrer que les fréquences de résonance valent :

- $f_n = n \frac{c}{2l}$  pour la flûte

- $f_n = (2n + 1) \frac{c}{4l}$  pour la clarinette

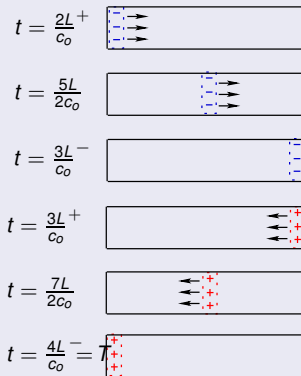
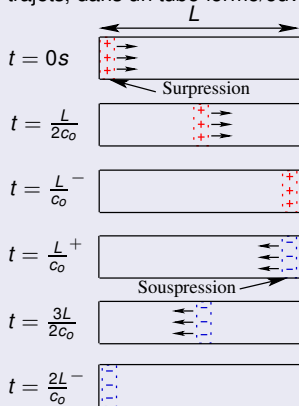
On vérifiera que les fréquences de résonance correspondent aux minima de l'impédance (premier cas) ou aux maxima (second cas)

- **exercice 5** : que se passe-t'il maintenant si on considère une flûte de Pan, ou un bourdon (tuyau d'orgue fermé) ?

## Conséquences

- On comprend pourquoi la clarinette "quintoie" et pourquoi la flûte octavie. Le premier registre compte donc 18 demi-tons pour la clarinette, 12 pour la flûte.
- Pour un tube donné (disons ouvert en  $x = l$ ), sa 1<sup>ère</sup> fréquence de résonance est deux fois plus élevée si on ouvre le tube en  $x = 0$  que si on le ferme (**demo**)

On peut retrouver ces résultats en raisonnant en **temporel** et en suivant les réflexions successives d'une impulsion, qui revient identique à elle même : au bout de quatre trajets, dans un tube fermé/ouvert au bout de deux trajets, dans un tube ouvert/ouvert



Extrémité ouverte (condition de **Dirichlet**, pression nulle) / Extrémité fermée (condition de **Neuman**, vitesse nulle)

# Cône : impédance d'entrée, fréquences de résonance

cône ouvert,  $Z(x = l, \omega) = 0$

- Pour un **tronc de cône**, entre les abscisses  $x_1$  et  $x_2$ , avec apex projeté en  $x = 0$  :

$$Z(x = 0, \omega) = j \frac{\rho c}{S_1} \frac{\sin kl \sin \theta_1}{\sin(kl + \theta_1)} \quad (1)$$

avec  $\theta_1 = \tan^{-1} kx_1$  ("arc-tangente"),  $S_1$  section d'entrée,  $l = x_2 - x_1$

- Fréquences des minima : telles que  $\sin kl = 0$

Donc identiques aux fréquences des minima d'un cylindre de même longueur

$$f_{Z_{min}} \simeq n \frac{c}{2l} \quad (2)$$

- Fréquences des maxima : telles que  $\sin(kl + \theta_1) = 0$

- ne sont pas à mi-chemin entre les fréquences des minima ( $\neq$  cylindre)
- Exemple pour un cône presque complet ( $x_1 < l$ ) , les premiers maxima de  $Z_{in}$  sont (basses fréquences donc  $kx_1 \simeq \theta_1 \ll 1$ ) :

$$f_{Z_{max}} \simeq n \frac{c}{2(l + x_1)} \quad (3)$$



## Conséquences

- En basse fréquence, les fréquences des maxima de l'impédance d'un tronc de cône sont les mêmes que les fréquences des minima d'un cylindre de longueur  $l + x_1$
- **Exercice 6** : entre un sax soprano et une clarinette de même longueur, lequel peut jouer la note la plus grave ?

# Plan du cours

1

Introduction - Notion d'interférences entre ondes

2

Modes dans des géométries simples : parallélépipède, tubes droits

3

Ondes planes dans les guides - solutions sans source dans le domaine fréquentiel - lignes c

4

Ondes planes dans les guides - domaine temporel - Fonction de Green

5

Ondes planes - Guides de sections variables

# Réponse impulsionnelle et fonction de réflexion

## Réponse impulsionnelle

- On a vu que  $P(x, \omega) = Z(x, \omega)U(x, \omega)$
- Dans le domaine temporel  $p(x, t)$  et  $u(x, t)$  sont liés via l'opérateur convolution

$$p(x, t) = [g(x, \cdot) * u(x, \cdot)](t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, \tau) u(x, t - \tau) d\tau$$

Comme  $u(x, t - \tau < 0) = 0$  et  $g(x, \tau < 0) = 0$  (causalité des signaux) :

$$p(x, t) = \int_0^t g(x, \tau) u(x, t - \tau) d\tau$$

- $g(x, t)$  est par définition la **réponse impulsionnelle**, et représente la réponse en pression à un dirac de débit.
- $g(x, t)$  est la transformée de Fourier inverse de l'impédance  $Z(x, \omega)$

## Fonction de réflexion

De manière analogue, on appelle **fonction de réflexion** la fonction telle que :

$$p^-(x, t) = [r(x, \cdot) * p^+(x, \cdot)](t)$$

C'est la transformée de Fourier inverse du coefficient de réflexion

C'est l'onde réfléchie quand l'onde aller est un dirac

# Application : trouver la réponse temporelle à une impulsion de débit dans un cylindre fini

Cas représenté en Fig 4.1 p 159 [Chaigne et Kergomard]

- Une source impulsionnelle de débit (i.e.  $u_s(t) = u_s\delta(t)$ ) est créée en  $x = x_s$
- De part et d'autre, cela génère une onde directe de pression

$$p_{dir}(x, t) = \frac{1}{2} Z_c u_s \delta(t - |x - x_s|/c)$$

- L'onde  $p_{dir}$  de gauche après réflexion en  $x = 0$  s'écrit donc :

$$p_{rg}(x, t) = \frac{1}{2} Z_c u_s r_0(t) * \delta(t - (x + x_s)/c)$$

on voit l'effet de la réflexion (convolution avec  $r_0$ ) et l'effet du transport (distance parcourue  $x + x_s$ )

- De même l'onde directe de droite après réflexion en  $x = l$  vaut

$$p_{rd}(x, t) = \frac{1}{2} Z_c u_s r_l(t) * \delta(t - (2l - x - x_s)/c)$$

### Jusqu'où continuer ?

Encore un "coup" ... avant de savoir écrire la série infinie !

- La dernière onde qui arrive en  $x$  avant le temps  $\tau = 2l/c$  (correspondant à 1 aller retour complet dans le tube), est celle qui se réfléchit sur les deux extrémités avant d'arriver en  $x$  :

$$p_{rr}(x, t) = \frac{1}{2} Z_c u_s r_l(t) * r_0(t) * \delta(t - (2l + |x - x_s|)/c)$$

## Finalement

- Les réflexions suivantes sont celles de ces 4 ondes primaires après des aller retour successifs
- Chaque aller-retour complet est associé à l'application de l'opérateur

$$g_{AR}(t) = r_l(t) * r_0(t) * \delta(t - 2l/c)$$

- Donc Finalement

$$p(x, t) = [p_{dir}(x, t) + p_{rg}(x, t) + p_{rd}(x, t) + p_{rr}(x, t)] * \sigma(t)$$

avec

$$\sigma(t) = \delta(t) + g_{AR}(t) + [g_{AR} * g_{AR}](t) + [g_{AR} * g_{AR} * g_{AR}](t) + \dots$$

# Fonction de Green

## Définition

- On appelle fonction de Green en acoustique (ou dans d'autres domaines de la physique) la solution élémentaire d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, ou d'une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants.
- Il existe plusieurs fonctions de Green de la même équation, en fonction des conditions aux limites.

## Intérêt

- Résolution simplifiée pour une source quelconque
- Exemple avec l'oscillateur à 1DDL, [Chaigne et Kergomard, p79]



## Question !

- En quoi le calcul de la réponse temporelle à une impulsion de débit fait précédemment est utile pour calculer la réponse à d'autres types de sources ?
- Ce que nous avons résolu, presque "avec les mains" c'est la solution de l'équation (cf. p54) <sup>a</sup> :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{\rho_0}{S} u_s \frac{d\delta(t)}{dt} \delta(x - x_s)$$

- Là où la fonction de Green est définie par :

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] g(x, t | x_s, 0) = -\delta(t) \delta(x - x_s)$$

- Autrement dit, au facteur constant  $\rho u_s / S$  près, on a donné l'expression de la dérivée temporelle de la fonction de Green
- Pour avoir la fonction de Green, il suffit donc d'intégrer un des facteurs du produit de convolution, par exemple en remplaçant les diracs par des fonctions "échelons" dans l'expression des ondes primaires.

---

a. Pour l'équation des ondes  $\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] p(x, t) = -\rho_0 \frac{dv(x_s, t)}{dt}$

# Plan du cours

1

Introduction - Notion d'interférences entre ondes

2

Modes dans des géométries simples : parallélépipède, tubes droits

3

Ondes planes dans les guides - solutions sans source dans le domaine fréquentiel - lignes c

4

Ondes planes dans les guides - domaine temporel - Fonction de Green

5

Ondes planes - Guides de sections variables

# Equ. des pavillons dans des guides à section variable

Application aux instruments à vent, [Chaigne et Kergomard, p254]

## Hypothèse simplificatrice

### Ondes planes : continuité de la pression moyenne et du débit sur la section lors d'un changement de section

Conséquence : les équations déjà vues (cf. premier cours) de conservation de la quantité de mouvement et de la masse restent valables, lorsque  $\rho$  et  $S$  deviennent des fonctions de  $x$ . La compressibilité adiabatique  $\chi_s = 1/\rho_0 c^2$  est supposée constante.

## Etablissement de l'équation des pavillons : point de départ

- Conservation de la masse + equation d'état ( $p = c^2 \rho'$ )

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -S(x)\chi_s \frac{\partial p}{\partial t} + q$$

- Conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\rho_0(x)}{S(x)} \frac{\partial u}{\partial t} + \rho_0(x)F$$

## Etablissement de l'équation des pavillons : résultat

- Par dérivation croisée, il vient (on ne garde que le terme source de débit puisque on cherche l'équation en pression, utile pour les instruments à anche) :

$$\chi_s S \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{S}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \right] = \frac{\partial q}{\partial t}$$

- Si la température n'est pas une fonction de  $x$  alors la masse volumique  $\rho_0$  non plus <sup>a</sup> :

$$\frac{S}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ S \frac{\partial p}{\partial x} \right] = \rho_0 \frac{\partial q}{\partial t}$$

Sous cette forme, l'équation des pavillons est connue sous le terme "[Equation de Webster](#)" ou "[équation des pavillons](#)"

---

a. puisqu'elle est inversement proportionnelle à la température absolue car  $c^2 = \frac{1}{\rho \chi_S}$  et  $\chi_S$  est supposée constante, et  $c$  varie comme  $\sqrt{T}$  :  $c = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}$  pour un gaz parfait [Chaigne et Kergomard p43]

## Variantes

- En développant les dérivées spatiales :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{S'}{S} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{1}{S} \rho_0 \frac{\partial q}{\partial t}$$

- Dans le cas sans source, en utilisant la variable  $pR$  (où  $R$  est le rayon, fonction de  $x$ ), on a dans le domaine de Fourier

$$\frac{\partial^2 (pR)}{\partial x^2} + \left[ k^2 - \frac{R''}{R} \right] (pR) = 0$$

Notion de **fréquence de coupure** due au pavillon

On peut repasser en temporel et développer les dérivées spatiales pour retrouver la forme précédente avec un facteur  $2 \frac{R'}{R}$  devant  $\frac{\partial p}{\partial x}$ , au lieu de  $\frac{S'}{S}$ , ce qui est équivalent.

- On peut aussi par dérivation croisée des équations de conservation, éliminer la pression et obtenir une équation en débit (où cette fois on ne fait apparaître que le terme source de force, utile pour les instruments de type flûte) :

$$\frac{1}{S} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{S} \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{\partial F}{\partial t}$$

## Validité de l'équation des pavillons

- L'équation de Webster (ou équation des pavillons) a été établie sous l'hypothèse d'ondes planes, qui permet de considérer que la pression moyenne est constante sur la section lors d'un changement de section.
- Elle est donc "approchée"
- Dans le cas des instruments de musique, quantifier sa précision par comparaison à l'expérience est délicat car il faudrait inclure un modèle de rayonnement (mal connu). Mais il est clair que les cas des pavillons ne sont pas favorables.
- Une autre approche pour résoudre le problème des pavillons (en conservant une équation 1D) consiste à chercher un système de coordonnées adaptées où l'équation des pavillons peut-être résolue (avec moins d'approximations).

[T. Hélié, 2003] , Unidimensional models of acoustic propagation in axisymmetric waveguides, J. Acoust. Soc. Am, 114(5) :2633-2647, 2003.

L'hypothèse de fronts d'ondes quasi-sphériques près de la paroi mène alors à **une équation de Webster avec abscisse curviligne** (le long du profil) au lieu de l'abscisse comptée sur l'axe de symétrie.

- **Alternative** : approche multi-modale (modes plans + supérieurs) pour une modélisation plus précise et coûteuse (JB Doc / S. Félix, thèse Th. Guennoc).