Corrigé des exercices du cours 2

C. Vergez - vergez@lma.cnrs-mrs.fr

Exercice 1

Enoncé : soit un tuyau d'orgue à section carrée de 5cm de côté. Quelle est la première fréquence de coupure ?

Solution : on assimile le tuyau d'orgue à un guide infini de section carrée. La fréquence de coupure correspond à la première fréquence propre du problème transverse. Avec les notations du cours :

$$\omega/c = k_\perp \qquad \text{où } k_\perp^2 = (n_y\pi/L_y)^2 + (n_z\pi/L_z)^2$$

La fréquence propre la plus basse correspond à $n_y = 1, n_z = 0$ (ou $n_y = 0, n_z = 1$ puisque $L_y = L_z$). On a alors :

$$f = \frac{c}{2L_y}$$

L'application numérique donnne avec $c = 340ms^{-1}$, une fréquence de coupure $f = 3400Hz$.

Exercice 2

Enoncé : montrer que pour des ondes planes dans un guide à section constante

$$\begin{pmatrix} P(x_1,\omega) \\ U(x_1,\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos k(x_2 - x_1) & jZ_c \sin k(x_2 - x_1) \\ jZ_c^{-1} \sin k(x_2 - x_1) & \cos k(x_2 - x_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x_2,\omega) \\ U(x_2,\omega) \end{pmatrix}$$

On pourra prendre pour simplifier les calculs $x_2 = 0$ et $x_1 = x$ quelconque.

Solution : on part de l'écriture vue en cours

$$P(x,\omega) = P^+(\omega)e^{-jkx} + P^-(\omega)e^{+jkx} \quad (1)$$

$$U(x,\omega) = Z_c^{-1}\left[P^+(\omega)e^{-jkx} - P^-(\omega)e^{+jkx}\right] \quad (2)$$

En $x = 0$, cette décomposition s'écrit :

$$\begin{array}{rcl} P(0,\omega) & = & P^+(\omega) + P^-(\omega) \\ U(0,\omega) & = & Z_c^{-1}\left[P^+(\omega) - P^-(\omega)\right] \end{array}$$

On en tire

$$\begin{array}{rcl} 2P^+(\omega) & = & P(0,\omega) + Z_c U(0,\omega) \\ 2P^-(\omega) & = & P(0,\omega) - Z_c U(0,\omega) \end{array}$$

En remplaçant $P^+(\omega)$ et $P^-(\omega)$ par ces expressions dans (1) et (2), et en décomposant les exponentielles complexes en sinus et cosinus, on trouve :

$$\left(\begin{array}{c} P(x,\omega) \\ U(x,\omega) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} \cos kx & -jZ_c \sin kx \\ -jZ_c^{-1}\sin kx & \cos kx \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} P(0,\omega) \\ U(0,\omega) \end{array}\right)$$

Ce résultat est bien celui demandé avec $x_1 = 0$ et $x_2 = x$ quelconque.

Exercice 3

Enoncé : à partir de la formule de l'impédance ramenée, montrer que l'impédance d'entrée d'un cylindre de longueur l, ouvert à son extrémité aval s'écrit :

$$Z(x = 0, \omega) = jZ_c \tan kl$$

Solution : considérons comme point de départ la formule de l'impédance ramenée pour un cylindre (cf. cours) :

$$Z_1/Z_c = \frac{j \tan k(x_2 - x_1) + Z_2/Z_c}{1 + j \tan k(x_2 - x_1) Z_2/Z_c}$$

Comme on l'a vu en cours, par continuité de la pression, on peut écrire qu'à une extrémité ouverte la pression acoustique est nulle. On en déduit $Z_2 = 0$, ce qui dans l'expression précédente conduit à :

$$Z(x = 0, \omega) = jZ_c \tan kl, \tag{3}$$

avec $x_1 = 0$ et $l = x_2 - x_1$

Exercice 4

Enoncé : en écrivant que pour une flûte l'extrémité amont du résonateur ($x_1 = 0$) est ouverte, et qu'elle est fermée pour une clarinette, montrer que les fréquences de résonance valent :

— $f_n = n\dfrac{c}{2l}$ pour la flûte
— $f_n = (2n+1)\dfrac{c}{4l}$ pour la clarinette

On vérifiera que les fréquences de résonance correspondent aux minima de l'impédance (premier cas) ou aux maxima (second cas).

Solution :

Flûte : comme pour l'exercice précédent, l'extrémité ouverte (ici l'entrée) correspond à une pression nulle. On va donc chercher les fréquences qui annulent l'impédance d'entrée (Eq. (3)). On cherche donc les fréquences telles que :

$$\sin kl = 0$$

avec $k = 2\pi f/c$, on en déduit

$$f = n\frac{c}{2l} \qquad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*$$

Clarinette : ici, l'entrée du résonateur est fermée, donc il n'y a pas de débit acoustique en $x = 0$ (pas de traversée de matière). Aussi on recherche les fréquences qui maximisent le module de l'impédance d'entrée :

$$\cos kl = 0$$

avec $k = 2\pi f/c$, on en déduit

$$f = (2n+1)\frac{c}{4l} \qquad \text{avec } n \in \mathbb{N}$$

Exercice 5

Enoncé : dans la suite de l'exercice précédent, que se passe-t'il maintenant si on considère une flûte de Pan, ou un bourdon (tuyau d'orgue fermé) ?

Solution : calculons d'abord l'impédance d'entrée. On repart de la formule de l'impédance ramenée pour un cylindre (cf. cours) :

$$Z_1/Z_c = \frac{j \tan k(x_2 - x_1) + Z_2/Z_c}{1 + j \tan k(x_2 - x_1) Z_2/Z_c}$$

Cette fois, puisque l'extrémité aval du tuyau est fermée, l'impédance Z_2 y est infinie. On en déduit que :

$$Z(x = 0, \omega) = -jZ_c \frac{1}{\tan kl}, \tag{4}$$

avec $x_1 = 0$ et $l = x_2 - x_1$

L'entrée du résonateur est ouverte, donc comme pour la flûte dans l'exercice précédent, les fréquences de résonance sont celles qui annulent l'impédance :

$$\cos kl = 0$$

avec $k = 2\pi f/c$, on en déduit

$$f = (2n + 1)\frac{c}{4l} \qquad \text{avec } n \in \mathbb{N}$$

Les fréquences de résonance sont donc les mêmes que pour la clarinette cylindrique.

Exercice 6

Enoncé : entre un sax soprano et une clarinette de même longueur l, lequel peut jouer la note la plus grave ?

Solution : on assimile en première approximation le sax soprano à un cône tronqué et la clarinette à un cylindre.

Les fréquences de résonance du sax soprano sont données (cf. cours) par :
$f = n\frac{c}{2(l + x_1)}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Les fréquences de résonance de la clarinette sont données par :
$f = (2n + 1)\frac{c}{4l}$ avec $n \in \mathbb{N}$

En supposant que la longueur manquante du cône x_1 est plus petite que la longueur du tronc de cône, on vérifie que c'est la clarinette qui peut jouer la note la plus grave.