

où $y(\mathbf{x}, t)$ est le déplacement (ou l'une de ses dérivées), $\mathcal{L}(y)$ un opérateur linéaire, fonction de y et de ses dérivées, et $s(\mathbf{x}, t)$ un terme source. Il faut ajouter des conditions aux limites et initiales pour définir un problème bien posé¹.

3. Application aux cordes vibrantes

Le fonctionnement de base des instruments à cordes trouve son origine, comme leur nom l'indique, dans la vibration des cordes attachées au manche et à la table d'harmonie. La table est excitée par le mouvement des cordes, qui jouent le rôle de sources pour la table, et les vibrations de la table sont transformées en signal acoustique (voir la figure 3.3). Il s'agit donc de bien comprendre le fonctionnement de ces sources d'énergie vibratoire. Le principe général de fonctionnement des

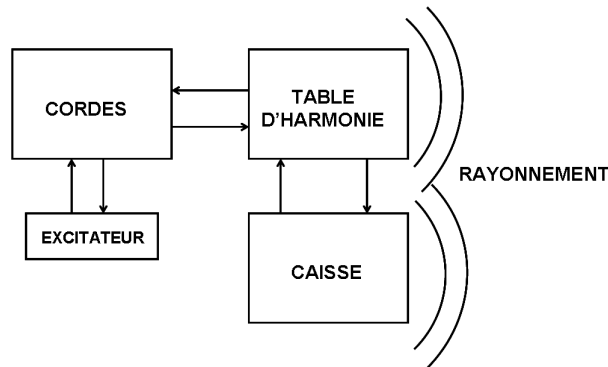


Figure 3.3. Principe de fonctionnement des instruments à cordes.

instruments à cordes est à peu de choses près identique pour tous ces instruments, et pourtant il existe une grande diversité de sons, de timbres et de couleurs sonores dans cette famille. Les mécanismes d'excitation et les propriétés matérielles du corps de l'instrument sont, pour une grande part, responsables de cette diversité, mais il existe aussi des différences significatives d'un instrument à l'autre concernant les propriétés et les régimes de vibrations des cordes elles-mêmes.

L'étude expérimentale des cordes vibrantes est délicate, car il est difficile de les isoler mécaniquement de leurs supports : ainsi, par exemple, il est problématique de réaliser des conditions aux limites parfaitement 'fixes'. Par ailleurs, contrairement à ce que l'on peut lire dans les ouvrages (et celui-ci ne fera pas exception !) le mouvement d'une corde ne reste pas plan : il existe toujours des conditions d'excitation, et de couplages aux extrémités (voire des phénomènes non linéaires) qui induisent deux polarisations et donc une vibration résultante en "3D". Enfin, il existe toujours un couplage entre la vibration transversale (prépondérante) et la vibration longitudinale (voir le chapitre 8).

¹ On peut encore définir un vecteur $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$ et séparer temps et espace. Ainsi pour l'équation d'onde où $\mathcal{L}(y) = -c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, l'équation à résoudre s'écrit :

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{A}\mathbf{w}, \text{ où } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc un opérateur matriciel \mathbf{A} , dont on peut chercher les valeurs et vecteurs propres.

Dans ce paragraphe, nous rappelons les résultats fondamentaux qui régissent le fonctionnement des cordes, dans le contexte de l'acoustique musicale. Pour alléger la présentation, nous nous limitons au cas d'une polarisation plane transversale du mouvement.

3.1. Corde inhomogène

Pour un milieu monodimensionnel de densité $\rho(x)$, de tension $T(x)$, de longueur L et de section droite $S(x)$ donnée (cas d'une corde inhomogène de diamètre variable), l'équation qui gouverne le déplacement transversal $y(x, t)$ s'écrit (cf. l'équation (1.11)) :

$$\rho(x)S(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[T(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right] = f(x, t) , \quad (3.25)$$

où $f(x, t)$ est une densité linéique de force appliquée sur la corde, qui peut même être propagative comme lors du glissement d'un doigt. Une tension variable $T(x)$ peut être obtenue si l'on suspend une corde verticalement, en raison des effets de pesanteur. Nous choisissons volontairement cet exemple de corde inhomogène, afin de mettre en évidence les propriétés générales des modes propres.

Nous nous limitons dans ce paragraphe aux cas où les conditions aux limites sont caractérisées soit par un déplacement nul, soit par une force nulle. Au paragraphe 3.5 nous examinerons comment étendre les résultats à des situations plus complexes, comme celles (importantes en acoustique musicale) des extrémités massiques ou élastiques.

Soit $\Phi_n(x)$ l'ensemble des déformées propres de la corde, compte tenu des conditions aux limites. On développe, comme précédemment, la solution sur cette base en écrivant

$$y(x, t) = \sum_n \Phi_n(x) q_n(t) . \quad (3.26)$$

On multiplie les deux membres de (3.25) par un mode quelconque $\Phi_m(x)$ et on intègre sur l'ensemble de la corde. Il vient :

$$\begin{aligned} \sum_n \ddot{q}_n(t) \int_0^L \Phi_n(x) \Phi_m(x) \rho(x) S(x) dx & - \\ \sum_n q_n(t) \int_0^L \Phi_m(x) \frac{d}{dx} \left(T(x) \frac{d\Phi_n(x)}{dx} \right) dx & = \\ \int_0^L \Phi_m(x) f(x, t) dx , & \end{aligned} \quad (3.27)$$

que l'on écrit de manière symbolique :

$$\mathcal{M}(\ddot{y}, \Phi_m) + \mathcal{K}(y, \Phi_m) = \langle f, \Phi_m \rangle . \quad (3.28)$$

L'écriture (3.28), très générale, s'applique à tous les systèmes continus conservatifs. Le symbole \mathcal{M} désigne l'opérateur de masse et \mathcal{K} l'opérateur de raideur.

3.1.1. Orthogonalité des modes propres

Prenons un mode propre particulier $\Phi_n(x)$. Celui-ci doit satisfaire l'équation (3.25) sans source, soit :

$$-\omega_n^2 \rho(x) S(x) \Phi_n(x) = \frac{d}{dx} \left[T(x) \frac{\partial \Phi_n(x)}{\partial x} \right] . \quad (3.29)$$

Utilisant une méthode analogue à celle employée pour les systèmes discrets, on multiplie les deux membres par $\Phi_m(x)$ et on intègre sur la longueur de la corde. ce qui donne :

$$\omega_n^2 \int_0^L \Phi_n(x) \Phi_m(x) \rho(x) S(x) dx + \int_0^L \Phi_m(x) \frac{d}{dx} \left(T(x) \frac{d\Phi_n(x)}{dx} \right) dx = 0 . \quad (3.30)$$

Dans ce qui suit, nous utilisons les notations suivantes :

$$\mathcal{P}_M(m, n) = \int_0^L \Phi_n(x) \Phi_m(x) \rho(x) S(x) dx \quad (3.31)$$

et

$$\mathcal{P}_T(m, n) = \int_0^L T(x) \frac{d\Phi_m(x)}{dx} \frac{d\Phi_n(x)}{dx} dx . \quad (3.32)$$

Après intégration par partie du deuxième terme, l'égalité 3.30 devient :

$$\omega_n^2 \mathcal{P}_M(m, n) = \mathcal{P}_T(m, n) - \left[\Phi_m(x) T(x) \frac{d\Phi_n(x)}{dx} \right]_0^L . \quad (3.33)$$

Si on écrit la même équation pour (n, m) , on en tire deux équations à deux inconnues pour les produits, et on obtient :

$$(\omega_m^2 - \omega_n^2) \mathcal{P}_M(m, n) = \left[\Phi_m(x) T(x) \frac{d\Phi_n(x)}{dx} - \Phi_n(x) T(x) \frac{d\Phi_m(x)}{dx} \right]_0^L , \quad (3.34)$$

et

$$(\omega_m^2 - \omega_n^2) \mathcal{P}_T(m, n) = \left[\omega_m^2 \Phi_m(x) T(x) \frac{d\Phi_n(x)}{dx} - \omega_n^2 \Phi_n(x) T(x) \frac{d\Phi_m(x)}{dx} \right]_0^L . \quad (3.35)$$

Compte tenu des hypothèses faites sur les conditions aux limites, les termes entre crochets sont nuls. Par conséquent, si $m \neq n$, l'orthogonalité des modes propres par rapport à la masse et la raideur s'écrivent :

$$\mathcal{P}_M(m, n) = 0 ; \quad \mathcal{P}_T(m, n) = 0 . \quad (3.36)$$

Les énergies cinétique et potentielle peuvent s'exprimer en fonction de ces quantités :

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{n,m} \mathcal{P}_M(m, n) \dot{q}_n \dot{q}_m ; \quad E_p = \frac{1}{2} \sum_{n,m} \mathcal{P}_T(m, n) q_n q_m . \quad (3.37)$$

Comme les produits \mathcal{P}_M et \mathcal{P}_T sont nuls pour $m \neq n$, l'énergie est bien la somme de celle de chaque mode (cf § 2.1.1).

Remarques : insistons sur le fait que les propriétés d'orthogonalité (3.36) ne sont en aucune manière liées à la forme particulière des solutions $\Phi(x)$ (sinusoïdales ou autres). Elles ont été ici démontrées dans un cas quelconque de corde inhomogène où les fonctions propres ne sont pas connues de manière explicite.

Par ailleurs, les calculs ci-dessus sont également valables pour un mode de fréquence propre nulle. L'équation (3.29) montre alors que l'on doit avoir $T \partial \Phi / \partial x = \text{constante}$, ce qui se produit quand les deux conditions aux limites sont de type "force nulle". On obtient alors $\Phi = \text{constante}$ comme l'une des solutions du problème (ceci correspond à un déplacement d'ensemble, appelé encore *mode rigide*). Pour la réalisation de telles conditions aux limites dans le cas d'une corde, on peut penser à des anneaux assujettis à glisser sur des glissières normales à la corde, mais c'est un peu une vue de l'esprit dans le contexte des applications musicales. Cependant, une équation de la forme (3.25) peut se rencontrer dans

d'autres contextes (vibrations longitudinales de barres, tuyaux sonores) où la remarque prend alors tout son sens.

3.1.2. Equations des déplacements généralisés et solutions

En raison de l'orthogonalité des modes propres et sachant par ailleurs que ceux-ci doivent, par définition, respecter l'égalité (3.29), l'équation (3.28) devient :

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{f_n(t)}{m_n}, \quad (3.38)$$

où la masse modale du mode n vaut :

$$m_n = \int_0^L \Phi_n^2(x) \rho(x) S(x) dx, \quad (3.39)$$

et où

$$f_n(t) = \int_0^L f(x, t) \Phi_n(x) dx \quad (3.40)$$

est la projection de la densité de force sur le mode n . La raideur modale est égale pour sa part à :

$$\kappa_n = m_n \omega_n^2 = \int_0^L T \left(\frac{d\Phi_n}{dx} \right)^2 dx. \quad (3.41)$$

N.B. Le calcul de la masse modale m_n est généralement plus facile que celui de κ_n . Puisque ω_n est connu une fois les valeurs propres calculées, on préfère le plus souvent calculer la raideur modale au moyen de la première égalité dans (3.41).

On obtient, pour les déplacements généralisés d'un système continu, un ensemble d'équations d'oscillateurs formellement identique à celui des systèmes discrets. Pour un système continu, le nombre d'équations différentielles indépendantes obtenu est théoriquement infini. En pratique, on réalise toujours une troncature de modes, fonction du domaine de fréquences utiles pour le problème dynamique considéré. En acoustique musicale, on ne s'intéresse que rarement aux fréquences situées à l'extérieur du domaine audible. D'autres facteurs, comme l'amortissement ou la largeur du spectre de l'excitation, limitent encore le domaine utile.

Pour résoudre le problème relatif à chaque mode pris individuellement, tout ce que nous avons vu au chapitre 2 sur l'oscillateur s'applique ici, même si nous ne prendrons en compte l'amortissement qu'au chapitre 5. Les équations différentielles à résoudre nécessitent la connaissance des conditions initiales. Au sens large, ces conditions initiales englobent les cas où la source est connue depuis $t = -\infty$ (cf. le chapitre 2).

Traisons d'abord le cas où la corde est animée à l'instant initial d'un profil $y(0, t)$ et d'une vitesse initiale $\dot{y}(0, t)$. On écrit :

$$y(0, t) = \sum_n \Phi_n(x) q_n(0), \quad (3.42)$$

et de même pour la vitesse. Les propriétés d'orthogonalité des modes, respectivement par rapport à la masse et à la raideur, permettent d'obtenir les conditions initiales des fonctions $q_n(t)$ par :

$$q_n(0) = \frac{1}{m_n} \int_0^L \rho(x) S(x) y(0, t) \Phi_n(x) dx$$

et (3.43)

$$\dot{q}_n(0) = \frac{1}{m_n} \int_0^L \rho(x) S(x) \dot{y}(0, t) \Phi_n(x) dx.$$

On obtient alors le résultat donné par l'équation (2.20) :

$$q_n(t) = \frac{1}{m_n \omega_n} \int_0^t f(\theta) \sin \omega_n(t - \theta) d\theta + q_n(0) \cos \omega_n t + \dot{q}_n(0) \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n} . \quad (3.44)$$

Si nous notons $g_n(t) = \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n}$, le premier terme de $q_n(t)$ est le produit de convolution $f_n(t) \star g_n(t)$ où $g_n(t)$ est la fonction de Green de l'oscillateur correspondant au mode n de la corde (Remarque : voir le chapitre 2 et comparer (3.44) et (2.20)).

3.1.3. Réponse impulsionnelle d'une corde

Dans le cas particulier où $f_n(t)$ est une impulsion de Dirac de la forme $f_{no} \delta(t)$, sa transformée de Laplace est une constante $F_n(s) = f_{no}$. L'expression (3.44) se réduit alors à :

$$q_n(t) = \frac{f_{no}}{m_n} \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n} + q_n(0) \cos \omega_n t + \dot{q}_n(0) \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n} . \quad (3.45)$$

On obtient ici la *réponse impulsionnelle du mode n de la corde* dont on peut tirer plusieurs enseignements :

- (1) Il y a équivalence, à un coefficient multiplicatif près, entre les termes de $q_n(t)$ dus respectivement au terme source impulsionnel et à la condition initiale en vitesse. Autrement dit, le mouvement de la corde est identique, que l'on décide de générer la vibration par un profil initial de vitesse ou par une distribution spatiale d'efforts dont la dépendance temporelle est une impulsion de Dirac.
- (2) Si le terme source est aussi impulsionnel en espace, c'est-à-dire localisé au point $x = x_o$, il s'écrit $f(x, t) = A\delta(x - x_o)\delta(t)$. Dans ce cas, on obtient $f_n(t) = \langle f(x, t), \Phi_n(x) \rangle = A\Phi_n(x_o)\delta(t)$. Dans l'hypothèse de conditions initiales nulles en déplacement et en vitesse, l'amplitude de la contribution du mode n dans le mouvement global de la corde dépend donc de la valeur de la déformée modale correspondante au point d'excitation. En d'autres termes, le mode n de la corde ne peut être excité si la force est localisée en un noeud de vibration.
- (3) On peut définir la fonction de Green pour l'équation (3.25) comme la fonction pour laquelle la source vaut² :

$$f(x, t) = T(x_o)\delta(t - t_o)\delta(x - x_o) .$$

La solution est :

$$g(x, t|x_o, t_o) = H(t - t_o)T(x_o) \sum_n \frac{\Phi_n(x)\Phi_n(x_o)}{m_n} \frac{\sin \omega_n(t - t_o)}{\omega_n} . \quad (3.46)$$

Celle-ci fait apparaître la réciprocité entre la source x_o et le récepteur x . A noter que pour le mode constant $\Phi(x) = 1$ (quand il existe), on doit remplacer le dernier rapport par $(t - t_o)$. Le fait qu'il croisse avec le temps est en fait compensé dès lors que l'on prend en compte de l'amortissement.

3.2. Corde idéale fixée aux deux extrémités

Le cas le plus simple à examiner est celui d'une corde *idéale* fixée rigidement aux deux extrémités. On désigne par *idéale* une corde homogène de densité ρ , de section droite S constante, de tension uniforme T , sans amortissement, supposée vibrer uniquement dans un plan. Cette situation est très éloignée de la réalité d'un instrument à cordes, mais son étude a le mérite de fixer un cadre de référence par rapport à tous les phénomènes qui donnent à la vibration d'une corde son caractère

² On a fait figurer $T(x_o)$ dans la source pour être cohérent avec d'autres fonctions de Green qui apparaîtront plus loin.

musical. Le déplacement vertical $y(x, t)$ de la corde est alors régi par l'équation des ondes :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} , \quad (3.47)$$

où $c = \sqrt{\frac{T}{\rho S}}$ est la célérité des ondes transversales. Pour une onde harmonique de la forme $y(x, t) = e^{j(\omega t - kx)}$, (3.47) fournit l'équation de dispersion $D(\omega, k)$ qui gouverne la relation entre la pulsation ω et le nombre d'onde k . On obtient :

$$D(\omega, k) = \omega^2 - c^2 k^2 = 0 , \quad (3.48)$$

d'où l'on déduit que le rapport entre pulsation et nombre d'onde est ici constant et égal à c , ce qui caractérise un milieu *non dispersif*. Dans le cas limite où la corde de longueur L est fixée rigidement à ses deux extrémités, les modes propres vérifient les conditions :

$$\frac{d^2 \Phi_n}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \Phi_n = 0 \quad \text{avec} \quad \Phi_n(0) = \Phi_n(L) = 0 . \quad (3.49)$$

On en déduit que les seules solutions possibles pour les déformées propres sont :

$$\Phi_n(x) = \sin k_n x , \quad (3.50)$$

où les seules valeurs permises pour le nombre d'onde correspondent à la suite discrète :

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (3.51)$$

d'où l'on obtient, par (3.48), la suite discrète des pulsations propres :

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L}, \quad \text{soit pour les fréquences propres : } f_n = \frac{nc}{2L} . \quad (3.52)$$

La masse modale s'écrit, d'après (3.39), $m_n = \frac{\rho SL}{2} = \frac{M_s}{2}$ où M_s est la masse totale de la corde. Dans ce cas particulier, toutes les masses modales sont égales. Rappelons toutefois que la valeur du rapport $m_n/M_s = 1/2$ est purement arbitraire, les masses modales étant définies à une constante multiplicative près. L'équation (3.21) a montré que c'est l'énergie cinétique $\mathcal{E}_n = \frac{1}{2} m_n \dot{q}_n^2$ qui a un sens physique.

3.3. Conditions initiales et mise en vibrations

Parler de pincement, frottement et frappe. Transférer les paragraphes du chapitre 1. Annoncer les hypothèses simplificatrices qui permettent de traiter analytiquement les cas idéalisés des paragraphes "corde pincée" et "corde frappée". Renvoyer au chap. 11 pour la corde frottée.

3.4. Corde pincée

Lors d'un pincement par un doigt ou un plectre, la corde est écartée de sa position d'équilibre initiale. Durant la phase d'adhérence, il y a contact entre l'excitateur et la corde. Lorsque la force de rappel, due à la tension de la corde (voir figure 3.4), devient légèrement supérieure à la force de frottement, la corde glisse sous le doigt (voir le paragraphe 3.3).

Nous allons traiter ici une version simplifiée de cette mise en vibration de la corde. On considère simplement que la corde est lâchée sans vitesse initiale à l'abscisse x_o à partir de la position initiale (voir figure 3.5) :

$$y(0, t) = \begin{cases} \frac{hx}{x_o} & \text{pour } 0 \leq x \leq x_o, \\ \frac{h(L-x)}{L-x_o} & \text{pour } x_o \leq x \leq L . \end{cases} \quad (3.53)$$

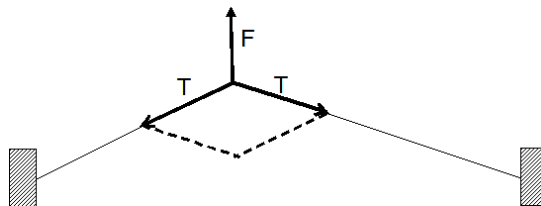


Figure 3.4. Equilibre des forces pour la corde pincée.

Remarque : Cette forme est ici un triangle parfait, ce qui n'est pas réaliste si l'on tient compte de la raideur intrinsèque de la corde. En d'autres termes, il faut prendre garde à ce que les conditions initiales soient compatibles avec l'équation du mouvement.

La méthode modale conduit à rechercher les solutions sous la forme (3.26). Cette

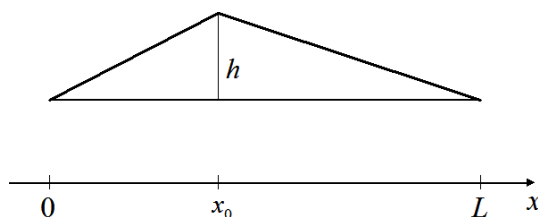


Figure 3.5. Modélisation simplifiée du profil initial pour une corde pincée sans raideur.

équation doit être satisfaite en particulier à l'origine des temps, ce qui conduit à l'équation (3.43). Nous imposons à la vitesse d'être nulle en $t = 0$, donc $\dot{q}_n(0) = 0$, et les inconnues du problème sont ici les $q_n(0)$. En multipliant scalairement les deux membres de (3.42) par un mode quelconque, puis en exploitant les propriétés d'orthogonalité des modes, on trouve :

$$q_n(0) = \frac{1}{m_n} \int_0^L \rho S y(0, t) \Phi_n(x) dx = \frac{1}{m_n} \int_0^L \rho S y(0, t) \sin k_n x dx , \quad (3.54)$$

d'où l'on tire :

$$q_n(0) = \frac{2hL^2}{n^2\pi^2 x_o(L - x_o)} \sin k_n x_o . \quad (3.55)$$

Remarque : Dans le cas particulier traité ici, on peut sortir le terme constant ρS des intégrales dans (3.54), et les propriétés d'orthogonalité des modes se réduisent simplement à :

$$\int_0^L \Phi_n(x) \Phi_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{pour } m \neq n, \\ \frac{L}{2} & \text{pour } m = n . \end{cases} \quad (3.56)$$

Ces égalités n'impliquent plus que les déformées propres et non les distributions de masse et de raideur. Cependant, insistons sur le fait que les propriétés (3.56) ne se rencontrent que rarement dans les problèmes vibratoires réels. La formulation (3.54) est plus générale et c'est la raison pour laquelle nous l'avons conservée. L'expression de $q_n(t)$ est fournie ici par l'équation de l'oscillateur sans second membre :

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = 0 , \quad (3.57)$$

qui, pour des conditions initiales en déplacement et une vitesse initiale nulle, conduit à $q_n(t) = q_n(0) \cos \omega_n t$. Au total, l'expression générale du déplacement transversal de la corde est donné par :

$$y(x, t) = \sum_n \frac{2hL^2}{n^2\pi^2 x_o(L - x_o)} \sin k_n x_o \sin k_n x \cos \omega_n t . \quad (3.58)$$

En dépit de la simplicité de la modélisation mise en œuvre ici, cette dernière expression est riche d'enseignements :

- (1) Pour une corde pincée idéale fixée rigidement aux deux extrémités, les fréquences propres sont les multiples entiers d'une fréquence *fondamentale* $f_1 = c/2L$ qui correspond à l'inverse de la période de vibration. On a affaire à un spectre dit *harmonique*.
- (2) Les amplitudes des composantes modales décroissent en $1/n^2$ (voir la Figure 3.7). Autrement dit, on peut souvent se contenter de représenter la vibration au moyen d'un nombre limité de composantes. Cette troncature modale dépend du problème posé. En pratique, une note jouée sur la corde de Mi grave de la guitare (fondamental 83 Hz) peut contenir de 60 à 80 composantes, alors que les notes produites sur celle de Mi aigu (fondamental 330 Hz) n'en contiennent qu'une dizaine.
- (3) Le fait que l'amplitude du mode n soit proportionnelle à $\sin k_n x_o$ montre qu'il est possible de supprimer une composante spectrale ω_n donnée en excitant la corde aux points $x_o = \frac{pL}{n}$ où p est un entier $< n$.
- (4) Les rôles respectifs de la position d'excitation x_o et de la position d'observation x sont interchangeables dans (3.58). Cette propriété est une conséquence du *principe de réciprocité*.
- (5) Lorsque x_o tend vers 0, on vérifie que $y(x, t)$ tend vers

$$y(x, t) = \sum_n \frac{2h}{n\pi} \sin k_n x \cos \omega_n t . \quad (3.59)$$

On remarque alors que la décroissance n'est plus qu'en $1/n$, ce qui signifie que l'on excite relativement d'autant plus les harmoniques de rang élevé que le point d'excitation de la corde est proche d'une extrémité. Le son correspondant de l'instrument sera plus "brillant". Par symétrie, le même raisonnement s'applique au cas où x_o tend vers L .

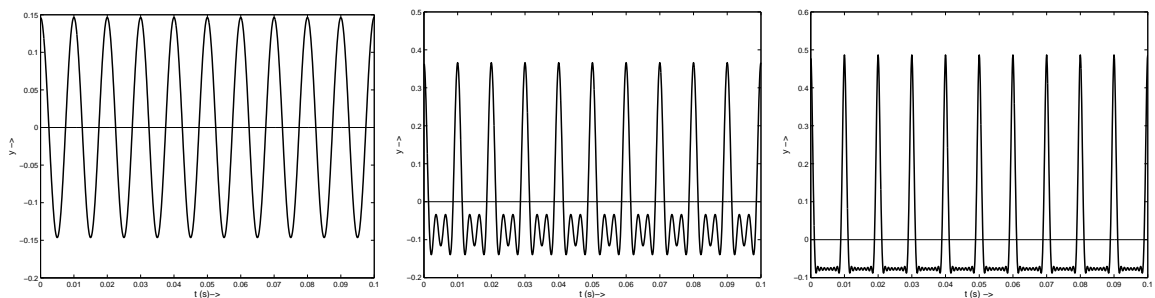


Figure 3.6. Forme d'onde du déplacement de la corde pincée au 7/8ème de sa longueur et observée au même point. (Gauche) Une composante ; (centre) 3 composantes ; (droite) 10 composantes.

3.4.1. Force transmise par la corde au chevalet

Lorsque la corde sous tension est en mouvement, elle exerce sur les extrémités une force transversale qui dépend du temps. Au premier ordre, on admet que cette

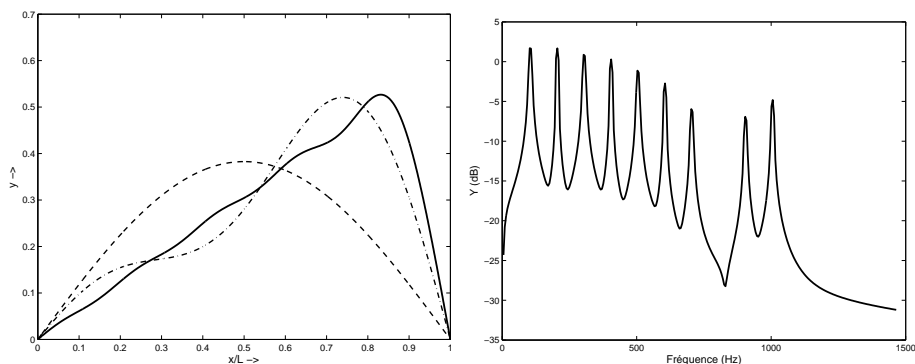


Figure 3.7. A gauche : allure spatiale de la corde pincée au 7/8ème de sa longueur à t fixé. (Tirets) Un mode ; (traits+ points) 3 modes ; (trait plein) 10 modes. A droite : Spectre du déplacement de la corde représenté à la figure 3.6 (10 composantes).

force est proportionnelle à la dérivée spatiale du déplacement soit, compte tenu de l'orientation de l'axe des x (voir la figure 3.5) :

$$F(0, t) = T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=0} \quad \text{et} \quad F(L, t) = -T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=L}. \quad (3.60)$$

Supposons arbitrairement que le chevalet soit situé en $x = L$. La force transmise par la corde s'écrit alors :

$$F(L, t) = -T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=L} = -T \sum_n \frac{hL}{n\pi x_o(L - x_o)} \cos k_n L \sin k_n x_o \cos \omega_n t. \quad (3.61)$$

Les amplitudes des composantes spectrales de la force varient en $1/n$, et tendent vers une constante lorsque le point d'attaque x_o se rapproche de l'une des extrémités. Elles décroissent donc moins vite avec le rang n que les composantes du déplacement. En synthèse sonore, on vérifie que le son simulé d'une "force" est plus "brillant" que celui d'un "déplacement" correspondant. Nous vérifierons au

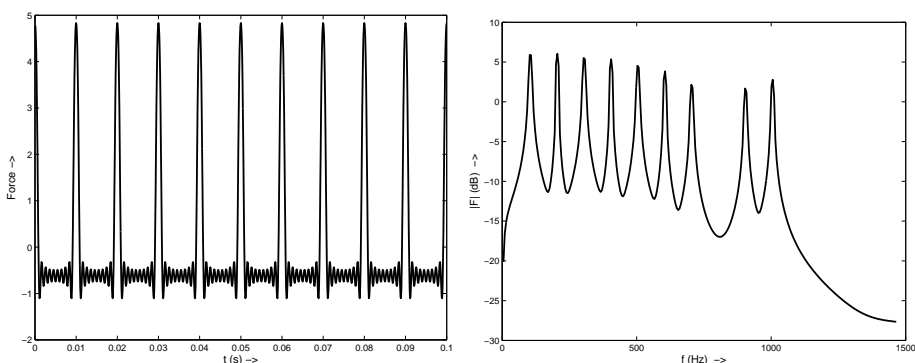


Figure 3.8. Force transmise au chevalet. (Gauche) forme d'onde (10 composantes) ; (droite) spectre correspondant.

chapitre 4 que, pour une corde idéale, la forme d'onde du déplacement est linéaire par morceaux (solution exacte). Celle d'une force est donc constante par morceaux. Expérimentalement, on observe que ces "créneaux" sont de fait arrondis par le double effet de la raideur et des mécanismes d'amortissement. La troncature à 10 modes réalisée ici montre l'erreur que cette approximation implique sur

les formes d'onde de déplacement et de force (voir les figures 3.6 et 3.8). Il faudrait prendre en compte un nombre infini de modes pour retrouver les solutions exactes.

3.5. Cas d'une extrémité mobile

Dans un instrument à cordes, ces dernières ne rayonnent pratiquement pas d'énergie acoustique étant donné leur diamètre faible devant la longueur d'onde acoustique (voir le chapitre 13). Il suffit, pour s'en convaincre, de tendre une corde entre ses doigts : ce n'est qu'en approchant son oreille contre la corde que l'on peut percevoir un son.

Pour rayonner de l'énergie, la corde a besoin d'être couplée à un résonateur qui offre une surface d'échange plus large que la corde avec le fluide environnant. C'est le rôle principal de la table d'harmonie. Par conséquent, on s'aperçoit que l'hypothèse de déplacement nul aux deux extrémités de la corde est irréaliste, car cela revient à dire que la table d'harmonie est fixée rigidement et ne produit donc aucun son.

Nous devons par conséquent relâcher cette hypothèse et considérer qu'au moins une des deux extrémités de la corde est mobile. Cette condition aux limites couple entre eux deux systèmes continus présentant chacun une infinité de modes. Le traitement complet de tels systèmes couplés sera traité au chapitre 6. Nous nous contentons ici d'examiner l'effet d'une résonance particulière de la table, c'est-à-dire représentée par un oscillateur discret à un degré de liberté, sur les vibrations de la corde.

On sait (voir chapitre 2) qu'un tel oscillateur se comporte soit comme un ressort, soit comme une masse, suivant la valeur de la fréquence d'excitation par rapport à sa fréquence propre. Nous allons donc étudier successivement ces deux cas limites, en laissant provisoirement de côté le cas particulier où l'oscillateur se comporte comme un pur amortisseur, cas qui sera étudié en détail au chapitre 5. La table d'harmonie est elle-même amortie, ne serait-ce que par le rayonnement, ce que nous laissons aussi de côté pour l'instant. Les calculs qui suivent ont pour but principal la détermination des fréquences propres du système couplé qui, elles, sont peu influencées par l'amortissement.

3.5.1. Extrémité purement élastique

Considérons donc tout d'abord la situation où une corde homogène est fixée à un ressort de raideur K_o au point $x = 0$ (voir figure 3.9). Dans ce cas, l'équilibre des forces en ce point définit la condition aux limites :

$$T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=0} = K_o y(0, t) . \quad (3.62)$$

On suppose que le déplacement de la corde reste nul à l'autre extrémité, soit

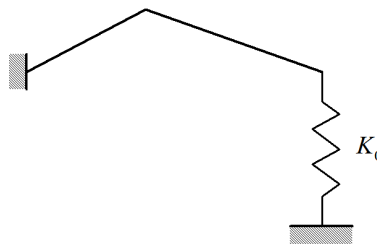


Figure 3.9. Corde fixée à un ressort à l'une de ses extrémités.

$y(L, t) = 0$. La détermination des modes propres conduit à rechercher des solutions sous la forme $y(x, t) = \Phi(x) \cos \omega t$. D'après (3.47), les fonctions $\Phi(x)$ doivent satisfaire l'équation :

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} + k^2 \Phi = 0 \quad (3.63)$$

et les deux conditions aux limites. L'équation (3.63) et la condition $\Phi(L) = 0$ donnent :

$$\Phi_n(x) = \sin k_n(x - L). \quad (3.64)$$

La condition en $x = 0$ donne l'équation transcendante aux valeurs propres :

$$\tan k_n L = -\frac{k_n T}{K_0}. \quad (3.65)$$

L'indice n dans (3.65) est là pour rappeler que cette équation ne peut être vérifiée que pour une suite discrète de valeurs de la variable k . Par voie de conséquence, (3.63) n'est également vérifiée que pour une suite discrète³ de fonctions $\Phi_n(x)$. Utilisant (3.65), ceux-ci peuvent aussi se mettre sous la forme :

$$\Phi_n(x) = \sin k_n x + \frac{k_n T}{K_0} \cos k_n x. \quad (3.66)$$

La représentation graphique de (3.65) (voir figure 3.10) montre que les racines k_n de cette équation ne sont plus les multiples de k_1 . Par conséquent, le mouvement de la corde n'est plus rigoureusement périodique. Par ailleurs, on constate que ces racines s'écartent d'autant plus de la série harmonique idéale que le rang n du partiel augmente. Enfin, on peut voir que l'introduction d'un ressort à une extrémité de la corde conduit systématiquement à une *diminution* des fréquences propres par rapport au cas idéal. Ceci n'est pas étonnant car cela revient à introduire une raideur finie dans le système, à comparer avec le cas parfaitement rigide qui n'est autre qu'une raideur infinie. Or, introduire de la souplesse dans un système conduit à diminuer ses fréquences propres⁴.

A partir de la connaissance des modes, on calcule les valeurs initiales $q_n(0)$ des déplacements généralisés suivant la méthode utilisée pour (3.54). L'examen des relations (3.34) et (3.35) montre que, pour la corde prise isolément, les modes sont orthogonaux par rapport à la masse, mais ne sont plus orthogonaux par rapport à la raideur. Par contre, on peut généraliser le concept d'orthogonalité à l'ensemble du système (corde + ressort), en considérant l'énergie potentielle élastique totale, obtenue⁵ d'après (1.123), (3.68), puis (3.37) :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^L T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} K_0 y^2(0, t) = \frac{1}{2} \sum_{n,m} [\mathcal{P}_T(m, n) + K_0 \Phi_n(0) \Phi_m(0)] q_n q_m.$$

³ La solution $k_n = 0$ est exclue ici, car elle aboutit par (3.63) à la solution dégénérée $\Phi_n(x) = 0 \quad \forall x$, en raison de la condition de déplacement nul en $x = L$.

⁴ On peut aussi voir l'introduction d'un ressort comme une augmentation apparente de la longueur de la corde, avec néanmoins la restriction que la correction de longueur est variable suivant le rang du partiel. Si on écrit $k_n \Delta \ell = \arctan[k_n T / K_0]$, les solutions vérifient en effet $\tan k_n(L + \Delta \ell) = 0$. Pour les premiers modes, on a $\Delta \ell \simeq T / K_0$. Ce type de calcul est très utile pour les instruments à vent.

⁵ Dans (1.123), le terme entre crochets correspond à la puissance entrant aux deux extrémités. En $x = L$, elle est nulle, mais pas en $x = 0$. Le crochet vaut donc, compte tenu de la condition aux limites e_0 :

$$T \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} = K_0 y \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial e_0}{\partial t} \quad \text{où} \quad e_0 = \frac{1}{2} K_0 y^2 \text{ en } x = 0.$$

D'où la valeur de l'énergie potentielle totale.

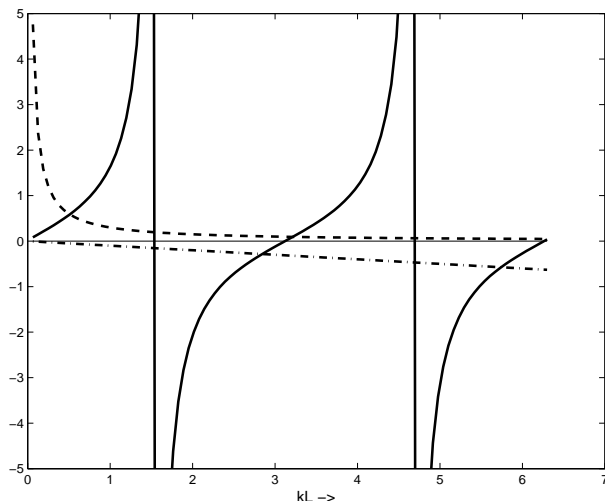


Figure 3.10. Résolution graphique de l'équation aux fréquences propres (3.65) dans le cas d'une extrémité mobile. Traits + points : cas d'une extrémité élastique. Tirets : cas d'une extrémité massique.

D'après (3.35), $\mathcal{P}_T(m, n) = -K_0 \Phi_n(0) \Phi_m(0)$ pour $n \neq m$. D'où le résultat⁶ :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \sum_n [\kappa_n + K_0 \Phi_n^2(0)] q_n^2 \quad \text{où} \quad \kappa_n = \mathcal{P}_T(n, n). \quad (3.67)$$

3.5.2. Extrémité purement massique

Nous examinons à présent le cas d'une corde homogène dont l'une des extrémités est purement massique. Supposons arbitrairement que la masse M_0 se trouve en $x = 0$. Nous avons alors à satisfaire la condition aux limites suivante⁷ :

$$T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=0} = M_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(0, t). \quad (3.68)$$

Nous supposons que l'autre extrémité est fixe, soit $y(L, t) = 0$. La condition (3.68) fait intervenir des dérivées par rapport au temps, ce qui rend la résolution par transformée de Fourier délicate (voir plus loin le paragraphe 3.5.3). Nous utilisons donc ici la méthode de séparation des variables. Celle-ci consiste à postuler l'existence d'ondes stationnaires de la forme $y(x, t) = \Phi(x)w(t)$ et de chercher à quelles conditions les équations du problème sont vérifiées. Insérant $y(x, t)$ dans (3.47), on obtient :

$$\frac{\Phi}{c^2} \frac{d^2 w}{dt^2} = w \frac{d^2 \Phi}{dx^2}. \quad (3.69)$$

⁶ Nous verrons au chapitre 4 l'analogue de ce problème pour un tuyau débouchant sur une impédance de rayonnement aux basses fréquences. Nous verrons alors qu'en admettant l'hypothèse $k_n \Delta \ell \ll 1$, où $\Delta \ell = T/K_0$, on peut remplacer la terminaison mobile par une terminaison fixe pour un tuyau allongé de $\Delta \ell$ du côté $x = 0$. Les calculs de modes sont alors beaucoup plus simples, et on réobtient le terme $K_0 \Phi_n^2(0)$, en considérant l'énergie située entre $x = -\Delta \ell$ et $x = 0$. Ceci signifie qu'au lieu de considérer une condition aux limites correspondant à un élément localisé en $x = 0$, on considère un milieu plus long, avec certains paramètres ρ , S et T particuliers dans la rallonge, et avec une condition aux limites simple, $y(-\Delta \ell, t) = 0$.

⁷ On aboutit, bien évidemment à des résultats identiques en supposant que l'extrémité massique est en $x = L$. Dans ce cas, il faut néanmoins prendre garde au fait que la condition aux limites s'écrit avec un signe $-$ devant le second membre.

En regroupant les termes qui impliquent les mêmes variables, on en déduit :

$$\frac{1}{c^2 w} \frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{dx^2} = -\alpha^2, \quad (3.70)$$

où α^2 est un réel positif. En effet, la seule possibilité pour que la première égalité de (3.70) soit satisfaite est que ses deux termes soient constants, puisqu'ils impliquent chacun une variable différente (resp. t et x). Par ailleurs, cette constante doit être négative car, dans le cas contraire, $w(t)$ ne serait plus bornée dans le temps même pour une excitation transitoire de durée finie ce qui serait contraire au principe de conservation de l'énergie.

La résolution des deux équations différentielles dans (3.70) fournit les solutions générales :

$$w(t) = A \cos c\alpha t + B \sin c\alpha t \quad \text{et} \quad \Phi(x) = C \cos \alpha x + D \sin \alpha x. \quad (3.71)$$

Les conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$ imposent :

$$\begin{aligned} \Phi(L) &= C \cos \alpha L + D \sin \alpha L = 0 \\ \text{et} \quad T \frac{d\Phi}{dx}(0) &= -\alpha^2 c^2 M_0 \Phi(0). \end{aligned} \quad (3.72)$$

On en déduit que la constante α doit vérifier la condition :

$$\tan \alpha L = \frac{\rho S}{\alpha M_0}. \quad (3.73)$$

La figure 3.10 montre que cette égalité ne peut être obtenue que pour une suite discrète de valeurs de α notées ici :

$$k_1 < k_2 < \dots < k_n, \quad (3.74)$$

homogènes à des nombres d'onde. Ceci conduit finalement à l'équation aux valeurs propres :

$$\tan k_n L = \frac{\rho S}{M_0 k_n}. \quad (3.75)$$

On voit ici que la charge massique conduit à une *augmentation* des fréquences propres de la corde et donc à une *diminution apparente* de la longueur de celle-ci (voir la figure 3.10). On retrouve le cas idéal en faisant tendre M_0 vers l'infini dans (3.75).

Dans le cas d'une extrémité massique, les modes de la corde isolée sont orthogonaux par rapport à la raideur mais non par rapport à la masse. Pour le système corde+masse, le concept d'orthogonalité s'étend en considérant l'énergie cinétique totale :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \sum_n [m_n + M_0 \Phi_n^2(0)] \dot{q}_n^2 \quad \text{où} \quad m_n = \mathcal{P}_M(n, n). \quad (3.76)$$

Remarque : on a montré que le couplage de la corde avec la table d'harmonie a pour première conséquence de modifier ses fréquences propres. Il s'agit d'une des causes d'*inharmonicité* de l'instrument qui, dans la pratique, est limitée aux fréquences propres les plus basses, c'est-à-dire à celles pour lesquelles l'amplitude du mouvement de la table est la plus forte, et donc où l'hypothèse de rigidité parfaite est la moins satisfaite.

■ Orthogonalité dans le cas général

On revient à présent au cas général de la corde inhomogène de longueur L (équation (3.25) sans terme source), et on se propose de déterminer les propriétés d'orthogonalité des modes propres d'un tel système lorsque l'une des deux extrémités de la corde est fixe et l'autre terminée par une masse M_L . Avec les conditions aux limites du problème :

$$y(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad -T(x) \frac{\partial y}{\partial x} = M_L \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad x = L, \quad (3.77)$$

on obtient

$$\mathcal{P}_M(m, n) = \frac{t_n}{\omega_n^2} \delta_{mn} - M_L \Phi_m(L) \Phi_n(L), \quad (3.78)$$

où

$$t_n = \mathcal{P}_M(n, n) = \int_0^L T(x) \left[\frac{d\Phi_n(x)}{dx} \right]^2 dx. \quad (3.79)$$

Les modes sont donc orthogonaux par rapport à la raideur mais non par rapport à la masse. On en déduit alors que l'équivalent de la relation (3.38) s'écrit :

$$\begin{aligned} \ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) &= \frac{1}{t_n} \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f(x, t)}{\rho(x)S(x)} \right) T(x) \frac{d\Phi_n(x)}{dx} dx \\ &= \frac{1}{t_n} \left[\frac{f(L, t)}{\rho(L)S(L)} M_L \Phi_n(L) + \omega_n^2 \int_0^L f(x, t) \Phi_n(x) dx \right]. \end{aligned} \quad (3.80)$$

3.5.3. Approche dans le domaine de Fourier

La technique qui repose sur une décomposition en fonctions propres peut aussi être utilisée dans le domaine de Fourier (ou de Laplace). Dans les cas les plus simples, on retrouve la décomposition modale. Mais ce n'est pas toujours vrai, en particulier quand la condition aux limites dépend de la fréquence, ce dont nous allons voir la signification. Nous consacrons quelques lignes à cette méthode, car elle a le mérite d'être très générale. Pour simplifier la présentation, nous traitons le cas d'une corde homogène, avec une terminaison purement massique. Dans le domaine de Fourier, la condition à l'extrémité massique (3.68) s'écrit :

$$T \frac{d\mathcal{Y}}{dx} = M\omega^2 \mathcal{Y}. \quad (3.81)$$

La TF de l'équation d'onde (3.25) est l'équation de Helmholtz :

$$\frac{d^2 \mathcal{Y}(\omega)}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathcal{Y}(\omega) = -\frac{1}{T} F(x, \omega). \quad (3.82)$$

Choisissons le cas d'une excitation ponctuelle, c.-à-d. celui d'une fonction de Green $F(x, \omega) = T(x_0)\delta(x - x_0)$. On cherche à décomposer la solution sur des *fonctions propres* qui vérifient :

$$\frac{d^2 \psi_p}{dx^2} + \frac{\omega_p^2}{c^2} \psi_p = 0, \quad (3.83)$$

avec les conditions aux limites : $\psi(0) = 0$, et (3.81). Le point essentiel est de comprendre que dans (3.81) et (3.82), ω n'est qu'un paramètre. Ces fonctions propres et leurs fréquences propres ω_p dépendent donc à présent de la fréquence : c'est pourquoi nous préférons ne pas les appeler modes. Ainsi, on écrit : $\psi_p = \sin(\omega_p x/c)$, où

$$\tan \frac{\omega_p(\omega)L}{c} = \frac{T}{Mc} \frac{\omega_p(\omega)}{\omega^2}. \quad (3.84)$$

Pour une valeur donnée de ω , on trouve une infinité de valeurs de ω_p . La solution cherchée s'exprime sous la forme d'une somme de fonctions $\psi_p(x)$:

$$\mathcal{Y}(\omega) = \sum_p \psi_p(x) Q_p(\omega). \quad (3.85)$$

Ces fonctions sont orthogonales par rapport à la masse, soit, pour une corde homogène :

$$\int_0^L \psi_p(x) \psi_q(x) dx = \Lambda_p \delta_{pq} \quad \text{pour } p \neq q. \quad (3.86)$$

Toutes satisfont en effet (3.81) avec le même ω . On peut donc écrire :

$$\mathcal{Y}(\omega) = c^2 \sum_p \frac{\psi_p(x) \psi_p(x_0)}{\Lambda_p [\omega_p^2(\omega) - \omega^2]}. \quad (3.87)$$

A condition de résoudre (3.84) pour une fréquence donnée, l'expression (3.87) permet de calculer la TF de $y(t)$, $\mathcal{Y}(\omega)$, puis, numériquement, par TF inverse, $y(t)$. Cette approche est courante en acoustique, notamment des salles [309], et elle est systématiquement utilisée en synthèse par modèles physiques par Rabenstein et Trautmann [416], qui ont traité toutes sortes d'équations différentielles dans le domaine de Laplace.

Remarque 1 : L'orthogonalité que nous avons notée est *simple* pour le présent problème, qui est conservatif. D'une façon générale, quelles que soient les impédances terminales, il faut construire un problème adjoint, avec une base de modes adjoints, que nous noterons $\bar{\psi}_p$, et on utilise alors la *biorthogonalité* entre les deux familles de modes :

$$\int_0^L \psi_p(x) \bar{\psi}_q(x) dx = \Lambda_p \delta_{pq}. \quad (3.88)$$

Il se trouve que cette famille adjointe n'est autre que la famille des conjugués, ce qui explique que dans le cas général on ait simplement $\int_0^L \psi_p(x) \psi_q(x) dx = \Lambda_p \delta_{pq}$, même si les $\psi_p(x)$ sont complexes.

Remarque 2 : Le retour analytique dans le domaine temporel, et ainsi aux modes, est possible dans le cas étudié, mais il est subtil. Dans la série (3.87), pour une fréquence ω donnée, seules deux fonctions $\psi_p(x)$ sont résonnantes, c.-à-d. que le terme correspondant de la série peut avoir un dénominateur qui s'annule. Notant n et $-n$ leurs indices, elles vérifient : $\omega_n = \pm\omega$ et correspondent toutes deux à la même déformée $\psi_n(x)$. Injectant $\omega_n = \pm\omega$ dans (3.84), on trouve que les ω_n vérifient bien (3.75). Il y en a une infinité : ceci signifie que les deux termes résonnants de la série (3.87) ont une infinité de pôles. Et on a donc bien alors $\psi_n(x) = \Phi_n(x)$. Pour revenir analytiquement dans le domaine temporel, on utilise le théorème des résidus. Il faut écrire le développement limité du dénominateur $D(\omega) = \Lambda_n(\omega_n^2 - \omega^2)$ sous la forme $D(\omega) = D(\omega_n) + (\omega - \omega_n)D'(\omega_n)$, avec :

$$D'(\omega_n) = \left[\frac{dD(\omega)}{d\omega} \right]_{\omega=\omega_n} = \Lambda_n \left[2\omega_n \frac{d\omega_n}{d\omega} - 2\omega \right]_{\omega=\omega_n} = 2\Lambda_n \omega_n \left[\left(\frac{d\omega_n}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_n} - 1 \right]. \quad (3.89)$$

Pour calculer $d\omega_n/d\omega$ en ω_n , il faut dériver (3.84) par rapport à ω . Ce calcul n'est pas trivial, et en outre il faut calculer explicitement Λ_n . Nous proposons au lecteur

de le faire en exercice et d'établir que :

$$\Lambda_n \left[\left(\frac{d\omega_n}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_n} - 1 \right] = -\frac{L_n}{2} \quad \text{avec } L_n = L + \frac{\Delta\ell}{1 + \left(\frac{\omega_n \Delta\ell}{c} \right)^2} \quad \text{où } \Delta\ell = \frac{M}{\rho S}. \quad (3.90)$$

Si on calcule t_n , on trouve $t_n = TL_n\omega_n^2/(2c^2)$. En ajoutant les deux termes avec pôles de (3.87), on obtient $\mathcal{Y}(\omega) = \sum \psi_n(x)Q_n(\omega)$, avec :

$$-\omega^2 Q_n + \omega_n^2 Q_n = 2c^2 \psi_n(x_0)/L_n = T\psi_n(x_0)\omega_n^2/t_n, \quad (3.91)$$

ce qui est en accord avec l'expression (3.80), quand $f(x, t) = T\delta(x - x_0)\delta(t)$.

3.6. Influence de la largeur spatiale et de la durée de l'excitation

Dans la pratique, l'excitation d'une corde n'est pas ponctuelle mais répartie sur un segment de longueur finie. On peut songer, par exemple, à la largeur de l'archet du violon, du marteau de piano ou du doigt du guitariste. De plus, bon nombre d'instruments à cordes (piano, guitare, harpe, violon en pizzicato, ...) sont excités pendant un intervalle de temps fini, correspondant à la durée d'interaction avec l'excitateur. Dans ce paragraphe, nous allons donc examiner successivement l'effet de la largeur spatiale et de la durée d'excitation sur la réponse de la corde.

Remarque : Afin de pouvoir poursuivre analytiquement le calcul jusqu'à son terme, nous revenons dans ce paragraphe au cas de la corde idéale fixée aux deux extrémités pour laquelle nous pouvons expliciter les modes propres sous la forme $\Phi_n(x) = \sin k_n x$. Néanmoins, la méthode développée ci-dessous demeure valable dans le cas général.

On considère d'abord la situation de la figure 3.11 où la corde est excitée par un terme source constitué d'une impulsion de Dirac en temps, répartie sur un segment de corde de largeur $2a$ autour du point d'excitation x_o . On écrit donc :

$$f(x, t) = B\delta(t)g(x) \quad \text{avec} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_o - a \leq x \leq x_o + a, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (3.92)$$

N.B. Notons que le coefficient B dans l'expression précédente a la dimension d'une masse divisée par un temps ($[M][T]^{-1}$) en raison de la présence de l'impulsion de Dirac.

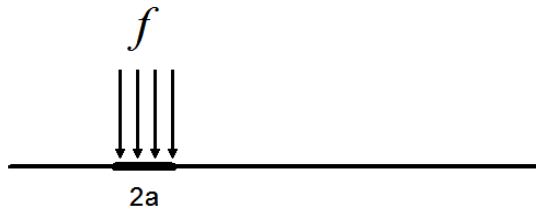


Figure 3.11. Largeur spatiale de l'excitation d'une corde.

On en déduit la projection du terme source sur le mode n :

$$f_n = \langle f, \Phi_n \rangle = B\delta(t) \int_{x_o-a}^{x_o+a} \sin k_n x \, dx = 2aB\delta(t) \sin k_n x_o \frac{\sin k_n a}{k_n a}. \quad (3.93)$$

D'où, pour une corde initiale au repos, l'expression du déplacement :

$$y(x, t) = 2aB \sum_n \frac{\sin k_n x \sin k_n x_o}{m_n} \frac{\sin k_n a}{k_n a} \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n}. \quad (3.94)$$

L'expression (3.94) montre que, par rapport au cas de l'excitation ponctuelle, la largeur spatiale a pour effet de réaliser un *filtrage passe-bas* de la réponse vibratoire, par le biais du terme en $\frac{\sin k_n a}{k_n a}$ (voir Figure 3.12). On peut caractériser ce filtre par sa première fréquence de coupure f_c obtenue pour $ka = \pi$ soit $f_c = \frac{c}{2a}$.

Application numérique : Pour une corde de piano de longueur 62 cm, correspondant à la note Do3 (fondamental $f_1 = 262$ Hz, référence C4 dans la convention anglo-saxonne), la vitesse de propagation des ondes transversales vaut $c = 2Lf_1 = 325$ m/s. Prenant $2a = 2$ cm comme ordre de grandeur pour la fenêtre spatiale d'excitation par le marteau, on trouve $f_c = 16$ kHz environ, soit sensiblement la limite du spectre audible.

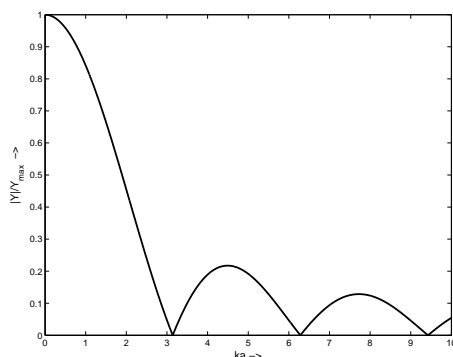


Figure 3.12. Filtrage passe-bas du déplacement de la corde consécutif à la largeur $2a$ de l'excitateur.

Pour étudier à présent l'effet de la durée finie de l'interaction entre corde et excitateur, on s'intéresse à une densité de force ponctuelle en espace de la forme :

$$f(x, t) = C\delta(x - x_o)h(t) \quad \text{avec} \quad h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 2\tau, \\ 0 & \text{si } t > 2\tau, \end{cases} \quad (3.95)$$

où C a ici la dimension $[M][L][T]^{-2}$. La durée 2τ représente le temps d'interaction avec l'excitateur (voir Figure 3.13). On en déduit, par (3.44), toujours en supposant

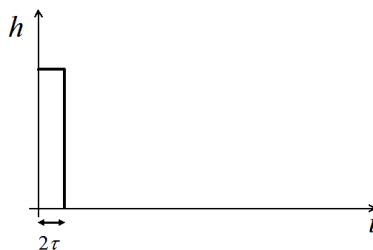


Figure 3.13. Impulsion de durée finie.

la corde initiale au repos, le déplacement généralisé du mode n :

$$q_n(t) = \frac{C\Phi_n(x_o)}{m_n\omega_n} \int_0^{2\tau} \sin \omega_n(t - \theta) d\theta , \quad (3.96)$$

d'où l'on tire le déplacement de la corde :

$$\begin{cases} \text{Pour } 0 \leq t \leq 2\tau & y(x, t) = 2\tau C \sum_n \frac{\sin k_n x \sin k_n x_o}{m_n} \frac{1 - \cos \omega_n t}{\omega_n^2 \tau} , \\ \text{Pour } t > 2\tau & y(x, t) = 2\tau C \sum_n \frac{\sin k_n x \sin k_n x_o}{m_n} \frac{\sin \omega_n \tau}{\omega_n \tau} \frac{\sin \omega_n(t - \tau)}{\omega_n} . \end{cases} \quad (3.97)$$

Comme précédemment, on constate que la largeur temporelle du terme source a pour effet un filtrage passe-bas de la réponse $y(x, t)$ par l'intermédiaire du terme $\frac{\sin \omega_n \tau}{\omega_n \tau}$. Reprenant l'exemple de la corde de piano, on remarque que le calcul de la fréquence de coupure, définie par le premier zéro de la fonction précédente, fournit ici $f_c = \frac{1}{2\tau}$. En prenant $2\tau = 1$ ms comme ordre de grandeur typiquement observé sur les cordes de piano (voir, par exemple, [18]), on trouve $f_c = 1$ kHz. Par comparaison avec l'effet de filtrage dû à la largeur spatiale de l'excitateur, on constate ici un filtrage passe-bas nettement plus sélectif.

3.7. Corde frappée

Les considérations qui précèdent nous ont permis de comprendre les effets d'une force imposée sur la corde, compte tenu de ses variations spatiales et temporelles. Si l'on se réfère à présent au cas concret de la corde de piano, on s'aperçoit qu'il est nécessaire d'introduire un élément supplémentaire essentiel, à savoir l'énergie cinétique du marteau. Autrement dit, l'étude du mouvement réel d'une corde de piano doit prendre en compte la masse M_h du marteau et sa vitesse initiale d'impact V_o . A celà, il convient d'ajouter les mécanismes d'amortissement, tant dans la corde que dans le feutre du marteau, comme nous le verrons au chapitre 5. Au cours de la phase de contact entre le marteau et la corde, une partie de l'énergie cinétique initiale est transformée en énergie élastique de compression du feutre (voir Figure 3.14). La force de compression qui en résulte s'exerce sur la corde et

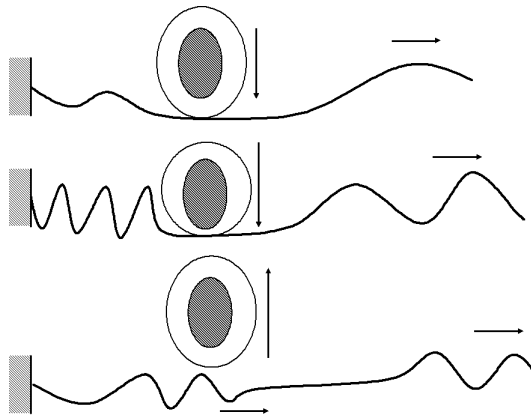


Figure 3.14. Schéma de principe de l'interaction marteau-corde.

donne naissance à des ondes progressives. Celles-ci prennent naissance de part et d'autre de la position d'impact. Etant donné l'ordre de grandeur de la vitesse de propagation de l'onde de flexion sur la corde et la proximité entre la position de

l'impact et l'une des extrémités de la corde (l'agrafe), il existe une probabilité non nulle pour que les ondes qui se propagent sur le “petit côté” de la corde atteignent le marteau avant que celui-ci n'ait quitté la corde (voir les Figures 3.14 et 3.15). Ainsi, l'on constate que l'action de l'onde vient modifier la force de compression ce qui se traduit par une modulation de la force d'interaction entre le marteau et la corde. Ces modulations peuvent être suffisamment intenses pour provoquer le rebond du marteau et la discontinuité de la force (voir Figure 3.16).

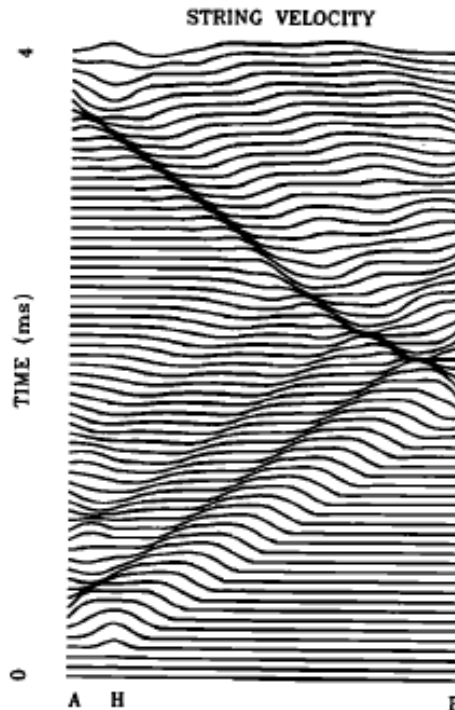


Figure 3.15. Simulation de la propagation des ondes sur une corde de piano juste après l'impact. la lettre H marque la position du marteau, A est l'agrafe et B le chevalet. Pendant 1 ms environ, des ondes sont “piégées” sur le petit côté (entre A et H). Elles sont ensuite libérées et suivent le front principal qui se propage vers B. En B, les ondes se réfléchissent en changeant de signe. D'après [86].

La modélisation analytique et numérique de l'interaction marteau-corde a suscité une littérature abondante. Voir, par exemple, [87], [207], [60]. On traitera au chapitre 15 un exemple similaire : l'interaction mailloche-membrane dans les timbales.

3.8. Admittance au point d'excitation et admittance de transfert

Comme nous l'avons évoqué au paragraphe 3.5, le mouvement de l'extrémité de la corde fixée au chevalet est impératif pour transmettre de la puissance vibratoire vers la table d'harmonie. La théorie modale apporte un éclairage nouveau pour caractériser cette puissance et guider sa détermination expérimentale. Afin de traiter cette propriété essentielle pour la compréhension du fonctionnement des instruments à cordes, nous commençons par définir le concept d'*admittance* (ou mobilité) mécanique pour une structure quelconque (voir aussi le § 6 du chapitre

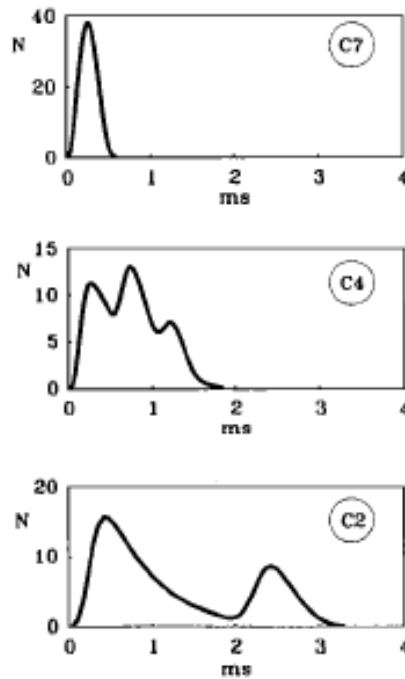


Figure 3.16. Simulations de la force d'interaction entre le marteau et la corde. (Haut) Corde C7 (Do 6 : 2093 Hz); (Milieu) Corde C4 (Do 3 : 262 Hz); (Bas) Corde C2 (Do 1 : 65,4 Hz). Les modulations de l'enveloppe sont dues aux ondes de retour sur le marteau. D'après [87].

1), avant d'en étudier en détail le comportement fréquentiel et la modélisation.

Considérons donc une structure continue quelconque, par exemple la table d'harmonie d'un piano, soumise à un champ de forces et de moments. De manière générale, on est amené pour des raisons numériques et/ou expérimentales à travailler sur une version discrétisée de cette structure, c.-à-d. sur un maillage comprenant un nombre fini N de petites aires de dimensions faibles devant les longueurs d'onde étudiées, appelées “points” par abus de langage. Ceci revient en pratique à considérer la structure comme un système à N degrés de liberté (voir Figure 3.17). En chaque point (ou petite aire) du maillage, le mouvement

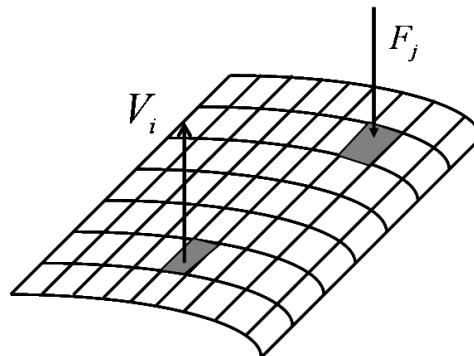


Figure 3.17. Admittance de transfert pour une structure à N degrés de liberté.

est caractérisé par 3 composantes de translation et 3 composantes de rotation. Pour la suite on privilégie les composantes de vitesse, bien qu'un raisonnement analogue puisse être mené pour les composantes de déplacement ou d'accélération. De même, les efforts en chaque point peuvent se réduire à 3 composantes de force et 3 composantes de moment [62].

La notion d'admittance est définie dans le domaine fréquentiel. En chaque point, les composantes de vitesse du mouvement (notées V_k) sont reliées par une matrice 6×6 aux composantes de la résultante des forces et des moments, notées F_l . On convient d'appeler *matrice admittance en un point* l'ensemble des 36 composantes ainsi définies, notée de manière symbolique :

$$\mathbf{V} = \mathbb{Y}\mathbf{F} . \quad (3.98)$$

Revenons à présent à la structure complète composée de N points. Pour chaque composante d'effort en un point j donné, notée $F_{j|l}$, on induit un mouvement en un point i quelconque. Notant $V_{i|k}$ l'une des 6 composantes de ce mouvement, on peut définir pour le couple $(V_{i|k}, F_{j|l})$ l'*admittance de transfert* :

$$Y_{ij|kl} = \frac{V_{i|k}}{F_{j|l}} \quad \text{avec} \quad 1 \leq i, j \leq N \quad \text{et} \quad 1 \leq k, l \leq 6 . \quad (3.99)$$

Au total, on obtient pour la *matrice admittance de transfert* un ensemble de $6N \times 6N$ coefficients du type de $Y_{ij|kl}$ pour caractériser la réponse de la structure à des sollicitations extérieures.

Comme exemple d'application de la notion d'admittance de transfert, on peut penser à l'excitation *par sympathie* des cordes d'un instrument par l'intermédiaire du chevalet : le point j fait alors référence au point d'attache sur le chevalet de la corde excitée, tandis que le point i désigne le point d'attache de la corde *sympathique* (voir Figure 3.18). Pour que celle-ci soit susceptible de se mettre en mouvement, il est non seulement nécessaire que les fréquences du signal d'excitation en j soient voisines des fréquences propres de la corde i mais, qu'en outre, le coefficient Y_{ij} à cette fréquence soit suffisant et ne corresponde pas, par exemple, à un noeud de vibration du chevalet à cette fréquence. Ajoutons que la notion d'admittance est essentielle pour comprendre le fonctionnement des cordes couplées du piano [440] (voir le chapitre 6).

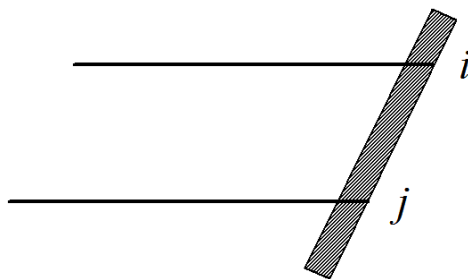


Figure 3.18. Excitation d'une corde par sympathie.

Notation : Par la suite, afin de ne pas alourdir les écritures, nous omettons de mentionner les indices (k, l) choisis respectivement pour désigner les composantes de vitesse et les efforts étudiés, et l'on désigne par Y_{ij} les coefficients de la matrice de transfert, qui se ramènent à Y_{ii} (ou tout simplement à Y_i par contraction d'indices) dans le cas des coefficients de l'admittance en un point. Par ailleurs,

on choisit de privilégier dans la suite les composantes de force et de vitesse de translation, sans oublier que les résultats obtenus peuvent se généraliser à des excitations en moments et à des rotations.

Examinons à présent le comportement fréquentiel des coefficients Y_{ij} de la matrice de transfert, compte tenu des propriétés de la structure (une table d'harmonie d'instruments à cordes, par exemple). Nous considérons que l'excitation est ponctuelle, située au seul point de coordonnée x_j , où s'applique la force. Nous regardons ce que vaut le déplacement au point x_i : $\xi_i = \sum \Phi_n(x_i)q_n(t)$. Nous écrivons, par cohérence avec les notations pour un milieu continu : $\xi(x_i) = \xi_i$, $f(x_j) = f_j$. La composante correspondante du vecteur Φ_n est notée $\Phi_n(x_j)$. On écrit donc dans ce cas (d'après 3.18) : $f_n = \Phi_n(x_j)f(x_j)$. L'équation (3.19) se réécrit :

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{\Phi_n(x_j)f(x_j)}{m_n} . \quad (3.100)$$

Passant dans le domaine fréquentiel, avec notre convention habituelle (majuscules pour les grandeurs du domaine fréquentiel), les déplacements généralisés $Q_n(\omega)$ sont donnés par :

$$(\omega_n^2 - \omega^2) Q_n = \frac{\Phi_n(x_j)F(x_j)}{m_n} . \quad (3.101)$$

Par projection modale, le déplacement au point x_i s'écrit pour la table discrétisée sur N points :

$$\Xi(x_i) = \sum_{n=1}^N \frac{\Phi_n(x_i)\Phi_n(x_j)}{m_n(\omega_n^2 - \omega^2)} F(x_j) . \quad (3.102)$$

L'ensemble des valeurs de $\Xi(x_i)$ donnée par l'expression (3.102) représente la déformée de la table (dénommée *Operating Deflexion Shape* ou *ODS en anglais*) pour une excitation forcée à pulsation ω localisée au point x_j , dont on déduit l'admittance de transfert entre les points x_i et x_j :

$$Y_{ij}(\omega) = j\omega \sum_{n=1}^N \frac{\Phi_n(x_i) \Phi_n(x_j)}{m_n(\omega_n^2 - \omega^2)} . \quad (3.103)$$

N.B. Le symbole j en facteur dans l'expression précédente désigne bien entendu la racine complexe de l'unité, et ne doit pas être confondu avec l'indice j qui apparaît dans les coordonnées spatiales et les grandeurs mécaniques.

L'admittance au point d'excitation x_i (ou *driving-point admittance* en anglais) s'écrit pour sa part :

$$Y_i(\omega) = j\omega \sum_{n=1}^N \frac{\Phi_n^2(x_i)}{m_n(\omega_n^2 - \omega^2)} . \quad (3.104)$$

Remarque : Les expressions (3.103) et (3.104) ont été obtenues dans le cadre de la théorie modale des systèmes conservatifs, c'est-à-dire en l'absence d'amortissement. Dans la pratique, il est plus réaliste de considérer la présence de dissipation au sein de la structure. Nous verrons plus loin au chapitre 5 que, moyennant certaines hypothèses, les modes sont inchangés et que les admittances de transfert peuvent s'écrire :

$$Y_{ij}(\omega) = j\omega \sum_{n=1}^N \frac{\Phi_n(x_i) \Phi_n(x_j)}{m_n(\omega_n^2 + 2j\zeta_n\omega_n\omega - \omega^2)} , \quad (3.105)$$

où ζ_n est un coefficient d'amortissement modal sans dimensions (sauf indication contraire, nous considérons dans la suite que ce coefficient est petit devant l'unité).

L'admittance est ainsi la somme d'admittances d'oscillateurs à un degré de liberté étudiés au chapitre 2.

3.8.1. Analyse fréquentielle des admittances

Si l'on étudie la fonction $Y_{ij}(\omega)$, on s'aperçoit que son module passe par des maximums pour les pulsations $\omega = \omega_n$ de la structure. A ces fréquences, la partie imaginaire s'annule et l'argument subit une discontinuité (voir Figures 3.19 et 3.20).

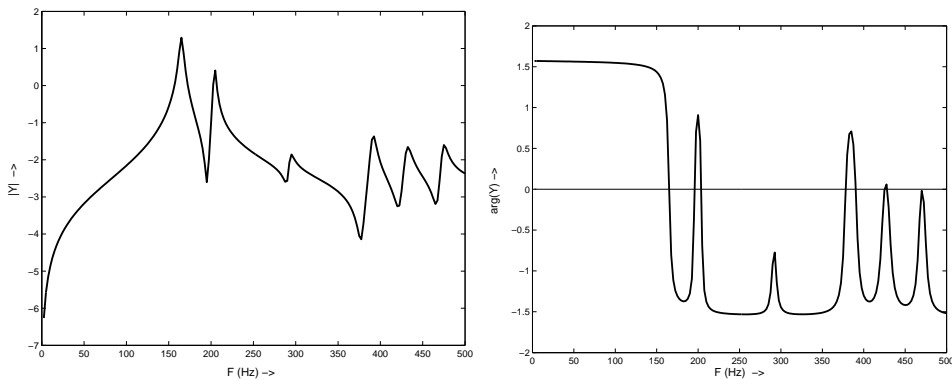


Figure 3.19. Exemple d'une admittance-type. Module et phase en fonction de la fréquence.

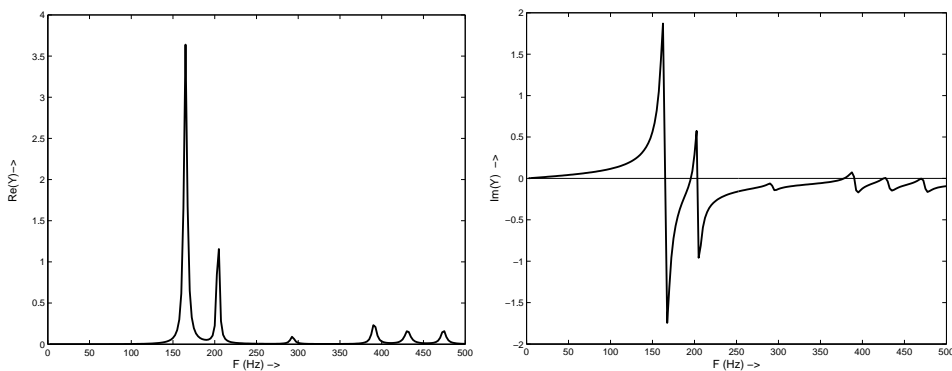


Figure 3.20. Exemple d'une admittance-type. Parties réelle et imaginaire en fonction de la fréquence.

- Lorsque $\omega \simeq \omega_n$, le terme prépondérant de $Y_{ij}(\omega)$ est égal à $j\omega \frac{\Phi_n(x_i) \Phi_n(x_j)}{m_n(\omega_n^2 - \omega^2)}$.
- Lorsque $\omega \gg \omega_n$, les coefficients deviennent :

$$Y_{ij} \simeq j\omega \sum_{l>n} \frac{\Phi_l(x_i) \Phi_l(x_j)}{-m_l \omega^2} \simeq \frac{1}{jM\omega} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{M} = \sum_{l>n} \frac{\Phi_l(x_i) \Phi_l(x_j)}{m_l}. \quad (3.106)$$

Du point de vue des admittances, l'ensemble des modes de rang supérieur à un mode donné n joue le rôle d'une masse M dont la valeur dépend des masses modales et des valeurs des déformées modales aux points x_i et x_j considérés. La valeur de M (résidu massique) dépend de la valeur du rang n pris comme référence.

– De la même manière, si l'on considère les modes de rang inférieur à n , on trouve :

$$Y_{ij} \simeq j\omega \sum_{l < n} \frac{\Phi_l(x_i) \Phi_l(x_j)}{m_l \omega_l^2} \simeq \frac{j\omega}{K} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{K} = \sum_{l < n} \frac{\Phi_l(x_i) \Phi_l(x_j)}{m_l \omega_l^2} . \quad (3.107)$$

La contribution à l'admittance des modes de rang inférieur à n est donc équivalente à une raideur de valeur K (résidu élastique). En résumé, au voisinage d'un mode n donné, l'admittance de transfert s'écrit de manière approchée :

$$Y_{ij}(\omega) \simeq j\omega \frac{\Phi_n(x_i) \Phi_n(x_j)}{m_n (\omega_n^2 - \omega^2)} + \frac{j\omega}{K} + \frac{1}{jM\omega} . \quad (3.108)$$

En règle générale, on ne peut se limiter au terme de rang n du développement de Y_{ij} et il est nécessaire de prendre en compte les résidus massique M et élastique K qui traduisent l'influence des autres modes.

4. Application aux instruments de percussion

Comme leur nom l'indique, les instruments de percussion sont soumis à une excitation brève, suivi d'un régime de vibration libre. Par conséquent, en régime linéaire, le contenu spectral du son produit pendant la durée d'extinction est composé des fréquences propres du système excité. Dans le premier chapitre de cet ouvrage, nous avons rappelé les équations de base qui gouvernent les vibrations des structures élémentaires qui composent les instruments de percussion : barres, plaques, membranes et coques. Nous avons également décrit dans ce même chapitre 1 les principaux mécanismes d'excitation par impact de ces instruments. Fort de ces résultats et des propriétés générales des modes énoncées dans le présent chapitre, nous sommes en mesure d'en décrire à présent les propriétés vibratoires.

4.1. Vibrations des barres

Les modèles de barres sont bien adaptés à la description du fonctionnement des instruments de percussion à clavier : xylophone, vibraphone, marimba, glockenspiel,... Pour ces instruments, les vibrations de flexion transversales sont prépondérantes, ce qui justifie une attention particulière. Cependant d'autres modes, et notamment les modes de torsion, peuvent être excités. Ceci est d'autant plus vrai que l'on s'intéresse aux barres dans les registres élevés, c'est-à-dire quand les hypothèses de "solide élancé" sont moins bien vérifiées⁸.

Dans ce paragraphe, nous nous limitons au cas des vibrations de flexion transversales. Nous examinons d'abord la solution de référence analytique fournie par le cas des barres de section constante. Nous étudions ensuite le cas des barres de section variable, qui correspond plus à la réalité instrumentale. Enfin, le cas particulier des barres précontraintes permet de faire le lien avec les vibrations transversales de cordes étudiées au paragraphe 3.

⁸ Le mot *lame* est le terme consacré communément employé pour désigner les barres de xylophone. Dans la suite, on utilisera indifféremment l'un ou l'autre terme. En dynamique des structures, on utilise le terme *poutre* pour désigner des solides élancés en régime de flexion, conservant le terme de *barre* pour les vibrations longitudinales. Nous n'effectuons pas cette distinction ici, qui est peu pratiquée en acoustique musicale.