

Figure 6.2. Résolution graphique des fréquences propres du tube chargé par un oscillateur ; $\varepsilon = 0.1$; $X_0 = \pi$. On voit que la première fréquence propre du tube et la fréquence de l'oscillateur mécanique sont fortement perturbées. Les fréquences supérieures du système couplé sont, elles, seulement légèrement augmentées par rapport à celles du tube isolé. Trait plein : fonction tangente ; traits + points : fonction $\varepsilon X X_0^2 / (X^2 - X_0^2)$.

1.2. Couplage table-cavité des instruments à cordes en basses fréquences

Le couplage entre la table d'harmonie et la caisse d'un instrument à cordes constitue un exemple d'interaction structure-cavité abondamment traité dans la littérature. Les premiers modèles datent des années 1980 [94]. Ils ont été longtemps limités à l'interaction entre le premier mode de la table et le premier mode acoustique de la cavité. Traditionnellement, on nomme respectivement T_1 (table) et A_0 (air) ces deux modes une fois couplés entre eux sur l'instrument complet. Ce modèle simplifié à deux degrés de liberté donne de bons résultats en basses fréquences, c'est-à-dire en-dessous de T_1 . Il a notamment inspiré les travaux de Hutchins pour la réalisation d'un octuor de violons [229].

On connaît aujourd'hui les principales limitations de ce modèle : les caisses d'instruments à cordes sont couplées non seulement à la table, mais aussi au fond et au manche [167]. Par ailleurs, le couplage avec le champ rayonné et la présence d'ouvertures contribue encore à complexifier le système : nous y reviendrons en détail au chapitre 15. Pour l'heure, nous nous limitons à l'étude d'un système simplifié à deux degrés de liberté où la table est vue comme un solide rigide de masse m_p , d'aire A_p et de raideur intrinsèque k_p soumise à la force verticale F des cordes. On note ξ_p son déplacement vertical qui peut être vu comme le déplacement moyen de la table encastrée vibrant sur son premier mode (voir la figure 6.3). Dans ce modèle, la caisse est représentée par un résonateur d'Helmholtz dont l'une des parois (la table) est mobile. La partie inertielle du résonateur est la masse m_h de l'air à travers les ouvertures d'aire totale A_h , dont le déplacement d'ensemble est ξ_h . Au cours du mouvement, le changement de volume de la cavité est égal à $\Delta V = A_p \xi_p + A_h \xi_h$. En raison de la compressibilité de l'air, le changement consécutif de pression est $\Delta p = -\rho c^2 \Delta V / V = -\mu (A_p \xi_p + A_h \xi_h)$ (voir le chapitre 1). On suppose, pour simplifier, que la matrice d'amortissement du système est diagonale et qu'elle est constituée de termes constants avec la fréquence, notés R_p et R_h . On note $\gamma_h = R_h / m_h$ et $\gamma_p = R_p / m_p$. Compte tenu de ces hypothèses, les équations

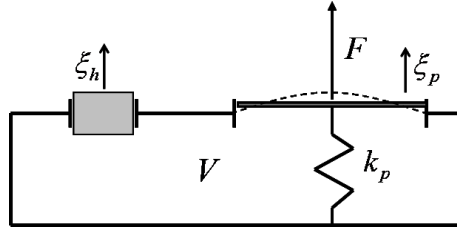


Figure 6.3. Schéma simplifié à deux degrés de liberté du couplage table d'harmonie- cavité dans un instrument à cordes.

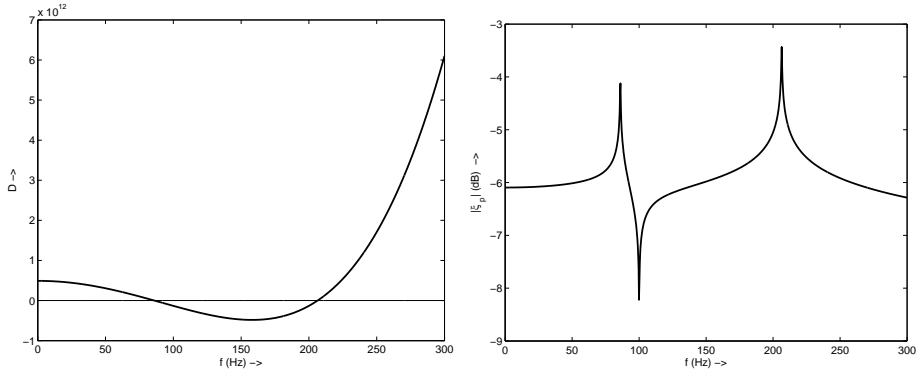


Figure 6.4. Modèle de couplage structure-cavité à deux degrés de liberté. (Gauche) Allure de l'équation caractéristique \mathcal{D} en fonction de la fréquence. (Droite) Allure du module du déplacement de la table $|\xi_p|$ en fonction de la fréquence (unités arbitraires en ordonnées). $f_h = 100$ Hz ; $f_p = 200$ Hz ; $m_p = 0.2$ kg ; $A_p = 0.3$ m² ; $\mathcal{V} = 0.014$ m³ ; $\gamma_h = 1$ s⁻¹ ; $\gamma_p = 2$ s⁻¹.

du mouvement pour ce système couplé s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} m_p & 0 \\ 0 & m_h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\xi}_p \\ \ddot{\xi}_h \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R_p & 0 \\ 0 & R_h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\xi}_p \\ \dot{\xi}_h \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_p + \mu A_p^2 & \mu A_h A_p \\ \mu A_h A_p & \mu A_h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_p \\ \xi_h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (6.11)$$

Il s'agit d'un système couplé par la raideur. Par la suite, il est commode d'identifier les fréquences propres du système couplé par rapport à quelques fréquences particulières :

- En l'absence d'ouverture (trou bouché : $A_h = 0$), on vérifie sur (6.11) que la caisse agit sur la table comme un ressort de raideur additionnelle μA_p^2 . Sa pulsation propre (en l'absence d'amortissement) devient $\omega_p = \sqrt{(k_p + \mu A_p^2)/m_p}$.
- Si, en outre, la table est infiniment souple ($k_p = 0$), cette pulsation devient $\omega_a = \sqrt{\mu A_p^2/m_p}$.
- Si on bloque la table en laissant le trou ouvert, on se retrouve dans le cas classique d'un résonateur de Helmholtz de pulsation propre $\omega_h = \sqrt{\mu A_h^2/m_h}$.

Les fréquences propres du système conservatif associé sont donnés par $\det[\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M}] = 0$ ce qui s'écrit avec les données du problème :

$$\mathcal{D} = (\omega_p^2 - \omega^2)(\omega_h^2 - \omega^2) - \omega_{ph}^4 = 0 \quad \text{où} \quad \omega_{ph}^4 = \omega_a^2 \omega_h^2. \quad (6.12)$$

Avec les données numériques choisies (voir la figure 6.4), les fréquences propres du système couplé sont égales à $f_1 = 86$ Hz et $f_2 = 206,5$ Hz. La fréquence f_1 correspond au mode acoustique couplé A0 et la fréquence f_2 au mode de table

couplé $T1$. Le couplage écarte donc les fréquences par rapport au cas découplé (ici $f_h = 100$ Hz et $f_p = 200$ Hz)¹. Ces fréquences possèdent en outre la propriété suivante (intéressante à exploiter notamment du point de vue expérimental) :

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega_p^2 + \omega_h^2. \quad (6.13)$$

Les vecteurs propres Φ_i ($i = 1, 2$) sont obtenus par $[\mathbb{K} - \omega_i^2 \mathbb{M}] \Phi_i = 0$. On vérifie que, quelles que soient les valeurs des paramètres, les deux composantes de Φ_1 sont de signe contraire, ce qui signifie que les déplacements respectifs de la table et du trou sont de signes opposés, à la fréquence de couplage la plus basse f_1 . En revanche, ils sont en phase à la fréquence f_2 .

Le lecteur intéressé pourra poursuivre cette approche modale, en utilisant la méthode présentée au chapitre 3. La projection modale $\xi = \sum_i \Phi_i q_i(t)$ s'écrit ici :

$$\begin{Bmatrix} \xi_p \\ \xi_h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{12} \end{Bmatrix} q_1(t) + \begin{Bmatrix} \Phi_{21} \\ \Phi_{22} \end{Bmatrix} q_2(t), \quad (6.14)$$

où les $q_i(t)$ sont solutions du système d'équations découplées :

$$m_i \ddot{q}_i + k_i q_i = 0 \quad \text{avec} \quad m_i = {}^t \Phi_i \mathbb{M} \Phi_i \quad \text{et} \quad k_i = {}^t \Phi_i \mathbb{K} \Phi_i = \omega_i^2 m_i. \quad (6.15)$$

L'expression des déplacements obtenue à partir de (6.15) est approchée car elle ignore les amortissements. Elle peut suffire dans un certain nombre de situations, par exemple lorsqu'il s'agit de prédire quelles doivent être les modifications structurales ou acoustiques à effectuer pour déplacer les fréquences propres du système couplé (voir le paragraphe 1.2.1 ci-dessous).

En revanche, l'approximation (6.15) n'est pas suffisante lorsqu'on a besoin de connaître l'allure exacte des déplacements en fonction de la fréquence et, notamment la valeur de ceux-ci aux maximums (ou au minimums) d'amplitude. Pour cela, il est nécessaire de tenir compte des amortissements. Nous pouvons alors, par exemple, utiliser les modes complexes exposée au chapitre 5. Dans le cas présent qui ne comprend que deux degrés de liberté, une autre solution équivalente relativement simple consiste à résoudre directement le système linéaire (6.11). Celui-ci fournit alors :

$$\begin{cases} \xi_p = \frac{F}{m_p} \frac{\omega_h^2 - \omega^2 + j\omega\gamma_h}{D_c}, \\ \xi_h = \frac{F}{m_p} \frac{A_p}{A_h} \frac{\omega_h^2}{D_c} \\ \text{avec} \quad D_c = (\omega_p^2 - \omega^2 + j\omega\gamma_p)(\omega_h^2 - \omega^2 + j\omega\gamma_h) - \omega_{ph}^4. \end{cases} \quad (6.16)$$

Les variations du module $|\xi_p|$ du déplacement de la table en fonction de la fréquence de forçage sont représentées sur la figure 6.4. Compte tenu des faibles valeurs choisies pour γ_p et γ_h , les maximums de $|\xi_p|$ sont obtenus pour des fréquences de résonance très proches des fréquences propres f_1 et f_2 . On constate que le minimum est obtenu pour $f = f_h = 100$ Hz, c'est-à-dire exactement à la fréquence du résonateur de Helmholtz. Ceci est cohérent avec le fait que f_h correspond au cas d'un résonateur à parois fixes, le déplacement de la table étant nul. Notons que la détermination de ce minimum est une très bonne méthode pour obtenir expérimentalement la fréquence de Helmholtz d'un instrument à cordes.

¹ Par abus de langage certains auteurs qualifient f_1 de fréquence de Helmholtz, mais on voit ici qu'il s'agit d'une erreur à ne pas commettre. En effet f_1 et f_h , bien que proches en fréquence, correspondent à des réalités physiques opposées : la première est associée à un maximum, et la seconde à un minimum de déplacement pour une force imposée.

1.2.1. Modifications structurales de l'instrument. L'art du luthier

Le fait de pouvoir disposer d'un modèle de table couplé à la caisse tel que (6.11) permet de calculer systématiquement les effets de modifications structurales (masse de la table, volume de la caisse, aire des ouvertures, raideur de la table,...) sur les fréquences propres du système. Ce faisant, on rejoint les préoccupations du luthier qui cherche à savoir quelles sont les conséquences audibles de telles modifications. Bien entendu, le modèle présenté ici est élémentaire, et les contraintes qui président à la fabrication d'un instrument vont au-delà d'une simple prédiction de fréquences propres. Cependant, la démarche que nous proposons ci-dessous, inspirée de French [173], illustre un bel exemple d'aide de la physique dans la conception d'un instrument.

On repart de l'équation des vecteurs propres $[\mathbb{K}]\Phi = \lambda[\mathbb{M}]\Phi$ où $\lambda = \omega^2$. Les matrices \mathbb{K} et \mathbb{M} sont symétriques. On cherche la sensibilité $\frac{\partial \lambda}{\partial a}$ où a est un paramètre physique ou géométrique du système. Par dérivation, on obtient :

$$\left[\frac{\partial \mathbb{K}}{\partial a} \right] \Phi + \mathbb{K} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial a} \right] = \frac{\partial \lambda}{\partial a} [\mathbb{M}] \Phi + \lambda \left[\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial a} \right] \Phi + \lambda \mathbb{M} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial a} \right]. \quad (6.17)$$

Après prémultiplication par le vecteur propre transposé et exploitation des propriétés de symétrie des matrices, on obtient :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial a} = \frac{{}^t\Phi \left[\frac{\partial \mathbb{K}}{\partial a} \right] \Phi - \lambda {}^t\Phi \left[\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial a} \right] \Phi}{{}^t\Phi [\mathbb{M}] \Phi}. \quad (6.18)$$

Pour illustrer l'exploitation de cette formule générale, nous présentons ci-dessous quelques exemples de modifications structurales.

■ Variation de la masse de la table

Dans ce cas nous avons $a = m_p$. D'après (6.11), on obtient :

$$\left[\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial m_p} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.19)$$

Les vecteurs Φ_i étant connus, on en déduit par (6.18) les variations consécutives des valeurs propres :

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial m_p} = - \frac{\lambda_i \Phi_{1i}^2}{m_p \Phi_{1i}^2 + m_h \Phi_{2i}^2}. \quad (6.20)$$

On constate, sans surprise, qu'alourdir la table fait baisser les fréquences propres du système. Nous examinerons en partie 4 les effets d'une telle modification sur le rayonnement acoustique.

■ Modification du volume de la caisse

La même méthode s'applique en posant $a = \mathcal{V}$. Seule la matrice de raideur est affectée par un changement de volume, et l'on trouve :

$$\left[\frac{\partial \mathbb{K}}{\partial \mathcal{V}} \right] = - \frac{c^2 \rho}{\mathcal{V}} \begin{bmatrix} A_p^2 & A_h A_p \\ A_h A_p & A_h^2 \end{bmatrix}, \quad (6.21)$$

d'où l'on tire la sensibilité :

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathcal{V}} = \frac{{}^t\Phi \left[\frac{\partial \mathbb{K}}{\partial \mathcal{V}} \right] \Phi}{{}^t\Phi [\mathbb{M}] \Phi} = - \frac{(c^2 \rho / \mathcal{V})(A_p^2 \Phi_{1i}^2 + 2A_p A_h \Phi_{1i} \Phi_{2i} + A_h^2 \Phi_{2i}^2)}{m_p \Phi_{1i}^2 + m_h \Phi_{2i}^2}. \quad (6.22)$$

On constate qu'un accroissement du volume de la caisse conduit à baisser les fréquences propres. On retrouve ici l'une des conséquences des modifications structurales dans la facture de guitare à la fin du XIXème siècle, lorsque la guitare

romantique a évolué vers la guitare Torrès, qui sert encore de modèle de référence pour les guitares classiques d'aujourd'hui [358].

■ Modification de l'aire des ouvertures

Soit h l'épaisseur moyenne des ouvertures, compte tenu des effets de bords². La masse d'air s'écrit alors : $m_h = \rho h A_h$. Par conséquent une perturbation de A_h induit des modifications à la fois dans les matrices de raideur et de masse. On vérifie que :

$$\left[\frac{\partial \mathbb{K}}{\partial A_h} \right] = \mu \begin{bmatrix} 0 & A_p \\ A_p & 2A_h \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \left[\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial A_h} \right] = \mu \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho h \end{bmatrix}. \quad (6.23)$$

ce qui conduit à :

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial A_h} = \frac{2\mu(A_p \Phi_{1i} \Phi_{2i} + A_h \Phi_{2i}^2) - \lambda_i \rho h \Phi_{2i}^2}{m_p \Phi_{1i}^2 + m_h \Phi_{2i}^2}. \quad (6.24)$$

Ainsi, un accroissement de l'aire des ouvertures induit une augmentation des fréquences propres, tandis qu'un accroissement de l'épaisseur provoque l'effet inverse.

■ Modification de la raideur de la table

Les luthiers modifient la raideur de la table de deux manières essentielles : en jouant sur l'épaisseur ou en ajoutant des raidisseurs (barrage). Lorsque l'on fait varier l'épaisseur e de la table, la masse varie en proportion, mais la raideur varie en e^3 , soit sensiblement plus rapidement (cf. le chapitre 1). Pour simplifier, on suppose ici que seule la raideur k_p est modifiée, et non la masse m_p dont les effets ont été vus plus haut. On trouve :

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial k_p} = \frac{\Phi_{1i}^2}{m_p \Phi_{1i}^2 + m_h \Phi_{2i}^2}. \quad (6.25)$$

On vérifie qu'une diminution de la raideur de table abaisse les fréquences propres. En toute rigueur, il conviendrait de raffiner le modèle en faisant apparaître l'épaisseur e dans m_p et k_p et recalculer les sensibilités $\frac{\partial \lambda}{\partial e}$ de manière à faire apparaître simultanément l'influence des matrices de masse et de raideur, comme nous l'avons fait pour l'aire A_h des ouvertures.

2. Couplage des cordes du piano

Si l'on excepte le registre grave, les notes de piano sont obtenues en frappant un doublet, voire un triplet de cordes. L'expérience auditive montre que le son est modifié de manière significative si l'on étouffe une corde (sur un doublet) ou deux cordes (sur un triplet) en n'en laissant vibrer qu'une seule. Il y a donc bien des phénomènes de couplage entre cordes qui contribuent fortement à caractériser le son de piano. Ces propriétés sont confirmées par l'expérience : des phénomènes de battements et de double décroissance ont été mis en évidence par plusieurs auteurs [169].

La première étude exhaustive, à la fois théorique et expérimentale, relative aux cordes couplées du piano est due à Weinreich [440]. Le modèle développé dans cette étude utilise le formalisme des matrices dynamiques, qui constitue un outil classique en physique du solide, notamment pour étudier les vibrations de chaînes

² Compte tenu du rayonnement, la hauteur à considérer est la somme de la hauteur géométrique (mesurable avec un pied à coulisse) augmentée de corrections de longueur dues au rayonnement, de part et d'autre du trou. Voir les chapitres 7 et 13.