Traitement des signaux déterministes

Roland Badeau,
roland.badeau@telecom-paris.fr

Master Sciences et Technologies
Fondamentaux pour ATIAM

Programme

- 5 séances de 3 heures, en septembre :
  - Cours *Fourier, échantillonnage, observation spectrale*
  - Cours *Filtrage, transformée en Z, synthèse de filtres*
  - TP *Filtrage, transformée de Fourier et échantillonnage*
  - Cours *Processus aléatoires (stationnarité, filtrage, estimation)*
  - TP *Processus et synthèse vocale*
- Lieu : salle Shannon, IRCAM
- Ressources pédagogiques disponibles sur le Moodle ATIAM (polycopié, diapositives, TPs, sujets et corrigés d'exercices)
- Notation :
  - Les deux comptes-rendus de TP sont notés sur 3 points chacun (à déposer sur le Moodle). Matlab ou Python au choix.
  - Examen écrit (le mardi 27 septembre) noté sur 14 points

Partie I

Transformée de Fourier Discrète

Convolution circulaire

- L'espace $E_N = \{$signaux discrets complexes de période $N\}$ est hermitien : $< x, y >= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n)$
- Base orthonormée : $\left\{e_k(n) = e^{2i\pi \frac{k}{N} n}\right\}_{k\in\{0\dots N-1\}}$
- Opérateur de convolution circulaire :

$$(h \otimes x)(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$

  - vecteurs propres : $(h \otimes e_k)(n) = H(k)e_k(n)$
  - valeurs propres : $H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-i2\pi n\frac{k}{N}}$

Transformée de Fourier discrète

- Inversion de la TFD :
  $x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} < x, e_k > e_k(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{+2i\pi \frac{k}{N} n}$
- Propriétés de la TFD : linéarité, plus
  - si $y = h \otimes x$, alors $Y(k) = H(k)X(k)$
  - Symétrie : $x(n)$ réel $\Rightarrow X(-k) = X^*(k)$
  - Translation : $y(n) = x(n-n_0) \Rightarrow Y(k) = X(k) e^{-i2\pi \frac{k}{N} n_0}$
  - Modulation : $y(n) = x(n) e^{i2\pi \frac{k_0}{N} n} \Rightarrow Y(k) = X(k-k_0)$
- Parseval : $\sum_{n=0}^{N-1} x(n) y(n)^* = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) Y^*(k)$

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

Partie II

Rappels sur la transformation de Fourier

Convolution (filtrage)

- Espaces de Lebesgue, norme p
- Convolution à temps discret (non périodique)
  $$y(n) = h * x(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h(m) x(n-m)$$
- Convolution à temps continu (non périodique)
  $$y(t) = h * x(t) = \int_{\mathbb{R}} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$
- Propriétés :
  - Commutativité, associativité, distributivité
  - Relations entre espaces de Lebesgue (norme L^p / l^p)
    - $L^1 * L^1 \to L^1$, $L^1 * L^2 \to L^2$,
    - $L^1 * L^\infty \to L^\infty \cap \mathscr{C}^0$, $L^2 * L^2 \to L^\infty \cap \mathscr{C}^0$

Séries de Fourier (continu périodique)

- $L^2\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$ est un espace de Hilbert :
  $$< x, y >= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x(t) y(t)^\star dt$$
  - $\{e_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, où $e_k(t) = e^{i2\pi kt}$, est une base hilbertienne de $L^2\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$
- Soit $x \in L^2\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$, de période 1
  - Série de Fourier de x :
    $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k) e_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k) e^{+i2\pi kt}$
    où $X(k) =< x, e_k >= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x(t) e^{-i2\pi kt} dt$ car $x \in L^1\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$

Séries de Fourier

- Propriété : isométrie de $L^2\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right) \to l^2(\mathbb{Z})$
  - Formule de Parseval :

$$\|x\|_2^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} |x(t)|^2 dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |X(k)|^2$$

$$< x, y >= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x(t)y(t)^\star dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} X(k)Y(k)^\star$$

  - *Les séries de Fourier "transforment" un signal continu périodique en un signal discret non périodique*

Séries de Fourier

- Convergence de la série
  - Convergence simple si x est $\mathscr{C}^1$ PM
  - Convergence uniforme si x est $\mathscr{C}^0$ et $\mathscr{C}^2$ PM
- Propriétés réciproques :
  - Modulation / retard
  - Valeurs réelles / symétrie hermitienne
  - Convolution / produit
  - *Décroissance / régularité*

Transformée de Fourier à Temps Discret

- Discret non périodique
- Isométrie inverse, de $l^2(\mathbb{Z}) \to L^2\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)$
  - Soit un signal discret $x \in l^2(\mathbb{Z})$
  - TFTD directe : $X(e^{i2\pi\nu}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-i2\pi\nu n}$
  - TFTD inverse : $x(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} X(e^{i2\pi\nu})e^{+i2\pi\nu n}d\nu$
  - Parseval, propriétés réciproques
  - *La TFTD transforme un signal discret non périodique en un signal continu périodique*

Transformée de Fourier à Temps Continu

- Continu non périodique
- Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$
  - Définition :

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

  - Propriétés :
    - Si $x \in L^1(\mathbb{R})$, $X \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$
    - Si x et $h \in L^1(\mathbb{R})$, et si $y = h * x$, alors $Y = H \times X$
    - Si de plus $X \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f)e^{+i2\pi ft}df$$

    - Dans ce cas x et $X \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$

Transformée de Fourier à Temps Continu

- Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$
  - Extension par densité de $L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ à une isométrie de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$
  - Formule de Parseval :

$$\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2 df$$

$$\int_{\mathbb{R}} x(t)\, y(t)^\star dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)\, Y(f)^\star df$$

  - *La TFTC transforme un signal continu non périodique en un signal continu non périodique*
  - Propriétés réciproques

Résumé des propriétés

- Propriétés générales des transformations de Fourier :
  - Linéarité
  - Si $x \in L^1$, $X \in L^\infty \cap \mathscr{C}^0$
  - Isométrie de L^2 (formule de Parseval)
- Propriétés réciproques (à lire dans les 2 sens)
  - Périodique $\leftrightarrow$ discret
  - Valeurs réelles $\leftrightarrow$ symétrie hermitienne
  - Retard $\leftrightarrow$ modulation
  - Convolution $\leftrightarrow$ produit
  - Régularité $\leftrightarrow$ décroissance

Récapitulatif

Temps discret Fréquence périodique	Temps continu Fréquence non périodique
TFD $\begin{cases} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} \\ x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{+2i\pi \frac{k}{N} n} \end{cases}$	Séries de Fourier $\begin{cases} X(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x(t) e^{-i2\pi kt} dt \\ x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k) e^{+i2\pi kt} \end{cases}$
TFTD $\begin{cases} X(e^{i2\pi\nu}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-i2\pi\nu n} \\ x(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} X(e^{i2\pi\nu}) e^{+i2\pi\nu n} d\nu \end{cases}$	TFTC $\begin{cases} X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \\ x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{+i2\pi ft} df \end{cases}$

Partie III

Conversion analogique / numérique

Reconstruction d'un signal échantillonné

- Soit $x_a(t)$ une fonction continue définie sur $\mathbb{R}$
- On définit le signal échantillonné $x_e(n) = x_a(nT)$ où $T > 0$
- Il est alors possible de reconstruire un signal analogique à partir des échantillons, par *interpolation* :

  $$y(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_e(n)\, h(t - nT)$$

  où la fonction $h(t)$ est appelée *noyau d'interpolation*
- L'interpolation linéaire correspond à un noyau $h(t)$ de forme triangulaire, tel que $h(0) = 1$ et $h(T) = h(-T) = 0$.
- Question : existe-t-il un noyau tel que, sous certaines hypothèses sur le signal $x_a(t)$, on puisse avoir $y(t) = x_a(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$?

Théorème d'échantillonnage (Nyquist)

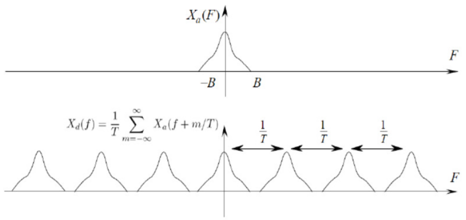
- Soit $x_a(t)$ un signal $L^1(\mathbb{R})$ tel que $t^2 x_a(t)$ est $L^1(\mathbb{R})$ et dont la transformée de Fourier $X_a(f)$ a un support inclus dans $]-B, B[$ avec $B \leq \frac{1}{2T}$ (fréquence de Nyquist). Alors $x_a(t)$ peut être reconstruit en interpolant ses échantillons $x_e(n) = x_a(nT)$:

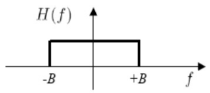
$$x_a(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_e(n)\, h(t - nT)$$

où $h(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T}}$

Interprétation

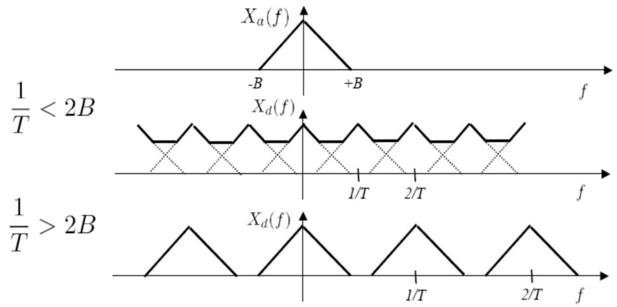
- Preuve :
  - Identifier $x_e(n) = x_a(nT)$ par transformées de Fourier inverses
  - Identifier $Y(f)$ et $X(f)$ par transformées de Fourier
- Périodisation du spectre / reconstruction





Repliement et pré-filtrage

- Deux situations possibles :



- Schémas de conversion analogique/numérique (CAN) et de conversion numérique/analogique (CNA)

Partie IV

Observation spectrale

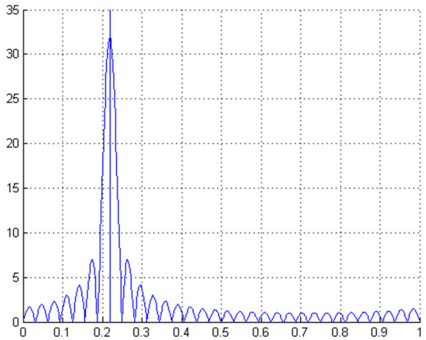
Observation spectrale

Cas général	Exemple
$x(n),\ n \in \mathbb{Z}$	$x(n) = e^{2i\pi\nu_0 n}$
$w(n) \geq 0$ fenêtre de support $[0 \dots P-1]$	$w(n) = \mathbf{1}_{[0\dots P-1]}(n)$
Signal fenêtré : $\tilde{x}(n) = w(n)x(n)$	$\tilde{x}(n) = e^{2i\pi\nu_0 n}\mathbf{1}_{[0\dots P-1]}(n)$
TFTD : $\widetilde{X}(e^{i2\pi\nu}) = X * W(e^{i2\pi\nu})$	$\left\lvert\widetilde{X}(e^{2i\pi\nu})\right\rvert = \left\lvert\frac{\sin(P\pi(\nu-\nu_0))}{\sin(\pi(\nu-\nu_0))}\right\rvert$

- TFD de longueur $N \geq P$:
  $$\widetilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)w(n)e^{-i2\pi n\frac{k}{N}} = \widetilde{X}(e^{i2\pi\frac{k}{N}})$$
- N joue sur la précision du tracé de X
- P et w sont liés à la résolution fréquentielle

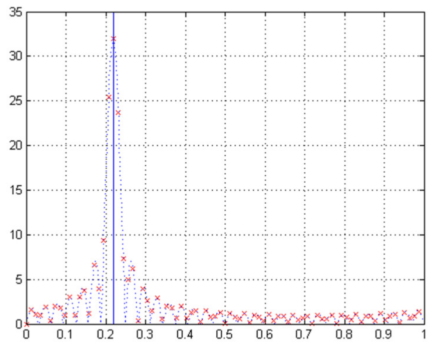
TFTD d'un sinus complexe

$$\begin{cases} x(n) = e^{2i\pi\nu_0 n} \\ w(n) = \mathbf{1}_{[0\dots P-1]}(n) \end{cases}$$
$$\downarrow$$
$$\left\lvert\widetilde{X}(e^{2i\pi\nu})\right\rvert = \left\lvert\frac{\sin(P\pi(\nu-\nu_0))}{\sin(\pi(\nu-\nu_0))}\right\rvert$$



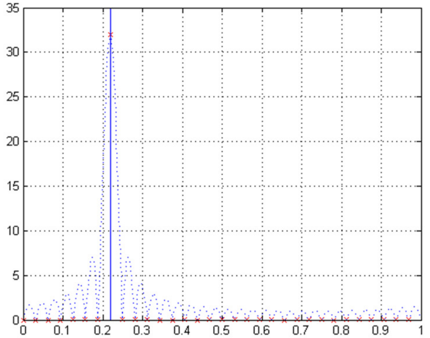
- TFTD avec $\nu_0 = 7/32$ et $P = 32$ (w rectangle)

TFD d'un sinus complexe



- TFD avec $\nu_0 = 7/32$, $P = 32$ et $N = 82$
  $$\left\lvert\widetilde{X}(k)\right\rvert = \left\lvert\frac{\sin(P\pi(\frac{k}{N}-\nu_0))}{\sin(\pi(\frac{k}{N}-\nu_0))}\right\rvert$$

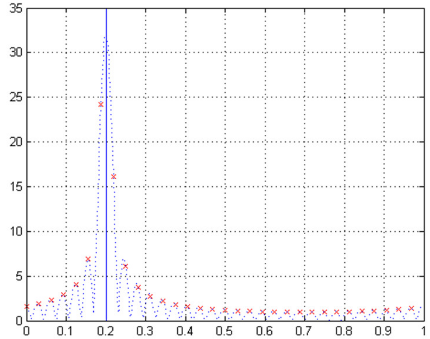
TFD d'un sinus complexe



- TFD avec $\nu_0 = 7/32$ et $N = P = 32$

$$\left|\widetilde{X}(k)\right| = \left|\frac{\sin(P\pi(\frac{k}{N} - \nu_0))}{\sin(\pi(\frac{k}{N} - \nu_0))}\right|$$

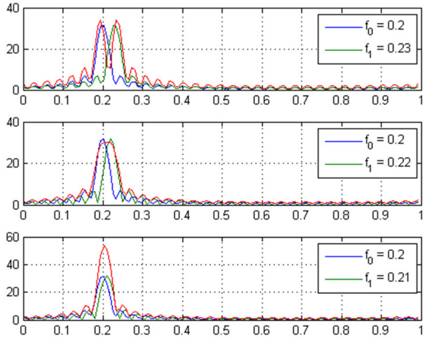
TFD d'un sinus complexe



- TFD avec $\nu_0 = 0.2$ et $N = P = 32$

$$\left|\widetilde{X}(k)\right| = \left|\frac{\sin(P\pi(\frac{k}{N} - \nu_0))}{\sin(\pi(\frac{k}{N} - \nu_0))}\right|$$

Résolution spectrale

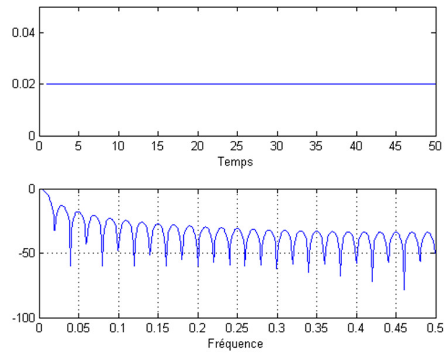


- TFD avec $P = 32$ et $N = 128$

Fenêtre rectangulaire

$$w(n) = \mathbf{1}_{[0\ldots P-1]}(n)$$

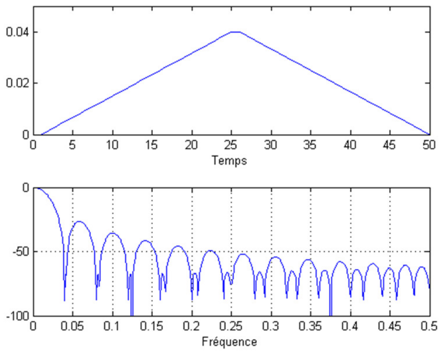
- Largeur : $2/P$, 2ème lobe : -13 dB, décroissance : -6 dB / octave



Fenêtre de Bartlett

$$w(n) = 1 - \left|\frac{2n}{P-1} - 1\right|$$

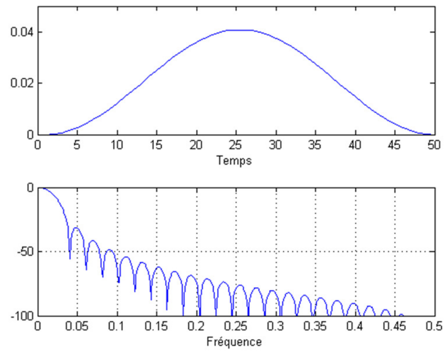
- Largeur : $4/P$, 2ème lobe : -26 dB, décroissance : -12 dB / octave



Fenêtre de Hann

$$w(n) = 0.5 - 0.5\cos(2\pi n/(P-1))$$

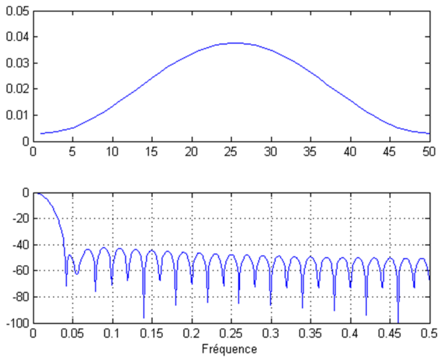
- Largeur : $4/P$, 2ème lobe : -31 dB, décroissance : -18 dB / octave



Fenêtre de Hamming

$$w(n) = 0.54 - 0.46\cos(2\pi n/(P-1))$$

- Largeur : $4/P$, 2ème lobe : -41 dB, décroissance : -6 dB / octave



Fenêtre de Blackman

$$w(n) = 0.4266 - 0.4965\cos(2\pi n/(P-1)) + 0.076\cos(4\pi n/(P-1))$$

- Largeur : $6/P$, 2ème lobe : -57 dB, décroissance : -18 dB / octave