Année Universitaire
2024-2025

TD de vibrations (UE Fondamentaux en acoustique)

Master de Mécanique - Spécialité Acoustique - Parcours ATIAM

Exercice 1 ✎ Vibrations d'une corde ⋆

Une corde mono-filament (corde de guitare ou de piano) de longueur l est tendue entre deux points fixes.

1. Le déplacement transversal d'un point de la corde situé à l'abscisse x est noté $y(x,t)$. En ignorant tout phénomène dissipatif, donner l'équation différentielle vérifiée par $y(x,t)$.

   Réponse :

   $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad avec c = \sqrt{\frac{T}{m}}$$

   T et m étant respectivement la tension et la masse linéique.

2. Déterminer les modes propres (fréquences et déformées) de la corde en considérant qu'elle est appuyée à ses deux extrémités. Normer les modes propres obtenus.

   Réponse :

   $$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad et \quad f_n = \frac{nc}{2L}$$

   La norme choisie est celle de l'amplitude maximale à 1.

3. Les fréquences propres de la corde sont-elles harmoniques ?

   Réponse : *Les fréquences propres sont harmoniques puisqu'elles sont toutes proportionnelles à f_0.*

4. À partir des conclusions de la question 2, expliquer pourquoi les cordes du registre grave du piano sont filées.

   Réponse : *On sait que*

   $$f_n = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{m}}.$$

   Avec une corde filée, seule la masse est augmentée ce qui diminuera les fréquences propres de la corde.

5. Donner la forme générale des oscillations libres de la corde.

   Réponse :

   $$y(x,t) = \sum_n \left(A_n \sin\frac{n\pi c}{l}t + B_n \cos\frac{n\pi c}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

6. Au point d'abscisse $x = \alpha l$, la corde est pincée et tendue puis lâchée à l'instant t=0. Déterminer $y(x,t)$. Calculer l'amplitude de chacun des harmoniques.

Réponse : *Après calcul, on trouve :*

$$A_n = 0 \quad et \quad B_n = \frac{2h}{n^2\pi^2\alpha(1-\alpha)} \sin(n\pi\alpha)$$

7. Si $\alpha = m/n$ avec m et n entiers, quelle est l'amplitude des harmoniques n, $2n$, $3n$, ... ? Ce phénomène est appelé réjection lié au point de pincement. Donner une explication physique.

Réponse : *On a*

$$B_p = \frac{2h}{p^2\pi^2\alpha(1-\alpha)} \sin\left(\frac{m}{n}p\pi\right)$$

et faisons l'hypothèse que n est pair et $m = 1$ (on pourra tenir le même raisonnement si n est impair ou pour tout autre valeur de n). 2 cas sont possibles :

— $\frac{m}{n}p$ *est entier, d'où p est pair et $B_p = 0$*

— $\frac{m}{n}p$ *est n'est pas entier, d'où p est impair et $B_p = \frac{2h}{p^2\pi^2\alpha(1-\alpha)}(-1)^{\frac{p-1}{2}}$*

8. Le timbre de la guitare change quand on déplace le point d'attaque. Pourquoi ?

Réponse : *1 des dimensions du timbre est liée à l'amplitude des harmoniques (CGS). cette amplitude est directement liée à B_p qui dépend de α.*

9. L'étouffoir d'un piano ne permet pas d'amortir tous les harmoniques. Donner la caractéristique des harmoniques qui ne sont pas amortis ? Pourquoi est-il judicieux de placer l'étouffoir à la même abscisse que le marteau ?

Réponse :

— *L'étouffoir amortira les modes ne présentant pas un nœud à l'endroit où il agira.*

— *La position de l'excitation fait une sélection des modes qui vont être excités, ie ne présentant pas de nœud à cet endroit. Il est donc préférable de positionner l'étouffoir à la même abscisse que le marteau pour atténuer tous les modes qui sont réellement excités.*

10. La corde possède un coefficient d'amortissement η. Écrire l'équation différentielle vérifiée par $y(x,t)$. Que devient la réponse de la corde pincée calculée au 6 en présence de phénomène dissipatif ?

Réponse : *l'équation devient*

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \eta\frac{\partial y}{\partial t} - T\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

et la réponse de la corde

$$y(x,t) = \sum_n \left(B_n \cos\frac{n\pi c}{l}t\right) \sin\frac{n\pi}{l}x e^{-\xi_n\omega_n t}$$

<u>Exercice 2</u> ✎ Corde frappée ⋆⋆⋆

On s'intéresse ici à une corde souple de longueur l tendue entre deux points fixes régit par l'équation suivante :

$$\rho S\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - T\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) \tag{1}$$

où $y(x,t)$ est son déplacement transversal, ρ sa masse volumique, S sa section et T sa tension. On note $\Phi_n(x) = \sin k_n x$ les déformées modales de la corde au mode n associées à une pulsation propre ω_n. On écrira donc le déplacement de la corde comme une combinaison linéaire de ses déformées modales comme suit :

$$y(x,t) = \sum_n \Phi_n(x) q_n(t)$$

où les $q_n(t)$ sont les coefficients d'amplitude modal.

1. À partir de l'équation 1, déterminez l'équation différentielle vérifiée par les amplitudes modales $q_n(t)$.

   Réponse :

   $$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{f_n(t)}{m_n}$$

   avec $f_n(t) = \int_0^l f(x,t)\Phi_n(x)dx$ *et* $m_n = \rho S \int_0^l \Phi_n^2(x)dx$

2. En passant dans le domaine de Laplace, déduisez-en les amplitudes modales $q_n(t)$ en fonction des coefficients d'amplitude modal initiaux $q_n(0)$ et $\dot{q}_n(0)$ et de la force d'excitation $f(x,t)$.

   Réponse : *dans le domaine de Laplace on a :*

   $$q_n(s) = \frac{f_n(s)}{m_n(s^2+\omega_n^2)} + \frac{s}{s^2+\omega_n^2} q_n(0) + \frac{1}{s^2+\omega_n^2}\dot{q}(0)$$

   or,

   $$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \times \mathcal{L}[g] \quad (2)$$
   $$\mathcal{L}[\sin(\omega_n t)] = \frac{\omega_n}{s^2+\omega_n^2} \quad (3)$$
   $$\mathcal{L}[\cos(\omega_n t)] = \frac{s}{s^2+\omega_n^2} \quad (4)$$

   d'où

   $$q_n(t) = \frac{1}{m_n\omega_n}\int_0^t f_n(\tau)\sin(\omega_n(t-\tau))d\tau + q_n(0)\cos(\omega_n t) + \dot{q}_n(0)\frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n}$$

3. Donnez la réponse impulsionnelle du mode n de la corde.

   Réponse : *Pour une réponse impulsionnelle :* $f_n(t) = f_{n0}\delta(t)$, *d'où*

   $$q_n(t) = \frac{f_{n0}}{m_n}\frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} + q_n(0)\cos(\omega_n t) + \dot{q}_n(0)\frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n}$$

4. En Considérant la force d'excitation $f(x,t) = T(x_0)\delta(t-t_0)\delta(x-x_0)$, établissez la fonction de Green pour l'équation de la corde. On considérera des conditions initiales nulles en déplacement et vitesse.

Réponse : *on a*

$$f_n(t) = \int_0^l f(x,t)\Phi_n(x)dx = \int_0^l T(x_0)\delta(t-t_0)\delta(x-x_0)\Phi_n(x)dx = T(x_0)\delta(t-t_0)\Phi_n(x_0)$$

or

$$y(x,t) = \sum_n \Phi_n(x)q_n(t)$$

d'où

$$y(x,t) = T(x_0)\sum_n \frac{\Phi_n(x)\Phi_n(x_0)}{m_n}\frac{\sin\omega_n(t-t_0)}{\omega_n} \quad \textit{pour } t > t_0$$

5. Considérons un marteau ou un plectre exerçant un effort réparti sur la corde définit par :

$$f(x,t) = B\delta(t)g(x) \quad \text{avec} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_0 - a \leq x \leq x_0 + a \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}.$$

Donnez l'expression du déplacement de la corde. Comparez avec une excitation ponctuelle.

Réponse : *on a*

$$f_n(t) = \int_0^l f(x,t)\Phi_n(x)dx = B\delta(t)\int_{x_0-a}^{x_0+a}\sin k_n x dx = 2aB\delta(t)\sin k_n x_0 \frac{\sin k_n a}{k_n a}$$

d'où

$$y(x,t) = 2aB\sum_n \frac{\sin k_n x \sin k_n x_0}{m_n}\frac{\sin k_n a}{k_n a}\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n}$$

On voit apparaître un filtrage passe-bas $\frac{\sin k_n a}{k_n a}$, *fréquence de coupure* $f_c = \frac{c}{2a}$

6. On s'intéresse maintenant à une durée finie d'interaction entre la corde et le plectre ou le marteau. La force considérée est maintenant ponctuelle de la forme :

$$f(x,t) = C\delta(x-x_0)h(t) \quad \text{avec} \quad h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 2\tau \\ 0 & \text{si} \quad t > 2\tau \end{cases}.$$

Donnez l'expression du déplacement de la corde. Comparez avec la question précédente.

Réponse : *on a*

$$q_n(t) = \frac{1}{m_n\omega_n}\int_0^t f_n(\tau)\sin(\omega_n(t-\tau))d\tau = \frac{C\Phi_n(x_0)}{m_n\omega_n}\int_0^{2\tau}\sin\omega_n(t-\theta)d\theta$$

ce qui donne après calcul

$$\begin{cases} y(x,t) = 2\tau C\sum_n \frac{\sin k_n x \sin k_n x_0}{m_n}\frac{1-\cos\omega_n t}{\omega_n^2\tau} & \textit{Pour} \quad 0 \leq t \leq 2\tau \\ y(x,t) = 2\tau C\sum_n \frac{\sin k_n x \sin k_n x_0}{m_n}\frac{\sin\omega_n\tau}{\omega_n\tau}\frac{\sin\omega_n(t-\tau)}{\omega_n} & \textit{Pour} \quad t > 2\tau \end{cases}$$

On retrouve là aussi un filtrage passe-bas de la réponse $y(x,t)$ *à cause du terme* $\frac{\sin\omega_n\tau}{\omega_n\tau}$, *de fréquence de coupure* $f_c = \frac{1}{2\tau}$. *Filtre à priori plus sélectif que celui trouvé à la question précédente.*