

Corrigé des exercices sur les méthodes à haute résolution

Roland Badeau

`roland.badeau@telecom-paristech.fr`



1 Multiple Signal Classification (MUSIC)

Question 1 Il suffit de remarquer que

$$S_k = \alpha_k \begin{bmatrix} 1 & z_k & \dots & z_k^{l-1} \\ z_k & z_k^2 & \dots & z_k^l \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_k^{n-1} & z_k^n & \dots & z_k^{N-1} \end{bmatrix} = \alpha_k \begin{bmatrix} 1 \\ z_k \\ \vdots \\ z_k^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z_k & \dots & z_k^{l-1} \end{bmatrix}$$

Question 2 Comme $s[t] = \sum_{k=0}^{K-1} x_k[t]$, $S = \sum_{k=0}^{K-1} S_k$, ou encore $S = \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k \mathbf{v}^n(z_k) \mathbf{v}^l(z_k)^T$. La factorisation $S = \mathbf{V}^n \mathbf{A} \mathbf{V}^{lT}$ est une simple réécriture de cette dernière égalité.

Question 3 En utilisant l'égalité $S = \mathbf{V}^n \mathbf{A} \mathbf{V}^{lT}$, on obtient la factorisation $\mathbf{R}_{ss} = \mathbf{V}^n \mathbf{P} \mathbf{V}^{nH}$, où $\mathbf{P} = \frac{1}{l} \mathbf{A} \mathbf{V}^{lT} \mathbf{V}^{l*} \mathbf{A}^H$. Ainsi \mathbf{R}_{ss} et \mathbf{P} sont des matrices symétriques hermitiennes et positives par construction. De plus la matrice \mathbf{A} est inversible (car tous les α_k sont non nuls) et \mathbf{V}^l est de rang plein (car tous les pôles sont distincts), donc \mathbf{P} est inversible, ce qui prouve que \mathbf{P} est définie positive. Comme de plus la matrice \mathbf{V}^n est de rang plein (car tous les pôles sont distincts), on a $\text{Im}(\mathbf{R}_{ss}) = \text{Im}(\mathbf{V}^n)$, donc $\text{rang}(\mathbf{R}_{ss}) = \text{rang}(\mathbf{V}^n) = K$.

Question 4 Comme la matrice \mathbf{R}_{ss} est à symétrie hermitienne, elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Comme de plus elle est positive, ses valeurs propres $\{\lambda_i\}_{i=0 \dots n-1}$ sont positives. Enfin, le fait qu'elle soit exactement de rang K implique

- $\forall i \in \{0 \dots K-1\}, \lambda_i > 0$;
- $\forall i \in \{K \dots n-1\}, \lambda_i = 0$.

Question 5 $\mathbf{R}_{xx} = \mathbb{E} \left[\frac{1}{l} \mathbf{X} \mathbf{X}^H \right] = \frac{1}{l} \mathbb{E} \left[\mathbf{S} \mathbf{S}^H + \mathbf{S} \mathbf{B}^H + \mathbf{B} \mathbf{S}^H + \mathbf{B} \mathbf{B}^H \right]$. Or comme le bruit est centré, $\mathbb{E} \left[\mathbf{S} \mathbf{B}^H \right] = \mathbf{S} \mathbb{E} \left[\mathbf{B}^H \right] = \mathbf{0}$. De même, $\mathbb{E} \left[\mathbf{B} \mathbf{S}^H \right] = \mathbf{0}$, d'où le résultat.

Question 6 $\mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}_i = (\mathbf{R}_{ss} + \sigma^2 \mathbf{I}_n) \mathbf{w}_i = (\lambda_i + \sigma^2) \mathbf{w}_i$, donc \mathbf{w}_i est vecteur propre de \mathbf{R}_{xx} associé à la valeur propre $\lambda'_i = \lambda_i + \sigma^2$.

Question 7 Pour tout $i \in \{0 \dots K-1\}$, $\mathbf{R}_{ss} \mathbf{w}_i = \lambda_i \mathbf{w}_i$. Donc $\mathbf{w}_i = \frac{1}{\lambda_i} (\mathbf{V}^n \mathbf{P} \mathbf{V}^{nH}) \mathbf{w}_i$. En particulier, $\mathbf{w}_i \in \text{Im}(\mathbf{V}^n)$. Comme cela est vrai pour tout $i \in \{0 \dots K-1\}$, on en déduit que $\text{Im}(\mathbf{W}) \subset \text{Im}(\mathbf{V}^n)$. De plus, $\text{rang}(\mathbf{W}) = K$ car \mathbf{W} est une matrice orthonormée, donc libre. Comme par ailleurs $\text{rang}(\mathbf{V}^n) \leq K$, on en déduit que $\text{Im}(\mathbf{W}) = \text{Im}(\mathbf{V}^n)$.

Question 8 Pour tout $k \in \{0 \dots K-1\}$, $\mathbf{v}^n(z_k) \in \text{Im}(\mathbf{V}^n)$. Or $\text{Im}(\mathbf{V}^n) = \text{Im}(\mathbf{W}) \perp \text{Im}(\mathbf{W}_\perp)$. On en déduit que $\mathbf{v}^n(z_k) \perp \text{Im}(\mathbf{W}_\perp)$, donc $\|\mathbf{W}_\perp^H \mathbf{v}^n(z_k)\|^2 = 0$. Ainsi, tous les pôles $\{z_k\}_{k \in \{0 \dots K-1\}}$ sont solution. S'il existait une autre solution z distincte des z_k , on aurait alors $\mathbf{v}^n(z) \perp \text{Im}(\mathbf{W}_\perp)$, donc $\mathbf{v}^n(z) \in \text{Im}(\mathbf{V}^n)$. Cela est impossible car la famille constituée des colonnes de \mathbf{V}^n et de $\mathbf{v}^n(z)$ est libre si z est distinct des z_k . En conclusion, les pôles $\{z_k\}_{k \in \{0 \dots K-1\}}$ sont les uniques solutions de l'équation $\|\mathbf{W}_\perp^H \mathbf{v}^n(z)\|^2 = 0$.



2 Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques (ESPRIT)

Question 1 On trouve $D = \text{diag}(z_0, z_1, \dots, z_{K-1})$.

Question 2 Comme les matrices V^n et W sont deux bases du même espace, elles satisfont la relation $V^n = W G$, où G est la matrice de passage de la base W à la base V^n . Les égalités $V_{\downarrow}^n = W_{\downarrow} G$ et $V_{\uparrow}^n = W_{\uparrow} G$ sont obtenues en extrayant respectivement les $n - 1$ premières lignes et les $n - 1$ dernières lignes de l'égalité $V^n = W G$.

Question 3 $W_{\uparrow} = V_{\uparrow}^n G^{-1} = V_{\downarrow}^n D G^{-1} = W_{\downarrow} G D G^{-1}$. On en déduit l'égalité $W_{\uparrow} = W_{\downarrow} \Phi$, où $\Phi = G D G^{-1}$. Il s'agit de la forme diagonalisée de la matrice Φ . Ainsi les valeurs propres de Φ sont les éléments diagonaux de D , c'est-à-dire les pôles z_k .

Question 4 Comme $W_{\uparrow} = W_{\downarrow} \Phi$, on a $W_{\downarrow}^H W_{\uparrow} = W_{\downarrow}^H W_{\downarrow} \Phi$, d'où $\Phi = (W_{\downarrow}^H W_{\downarrow})^{-1} W_{\downarrow}^H W_{\uparrow}$.

Question 5 L'algorithme ESPRIT se décompose en plusieurs étapes :

- calculer l'estimateur \widehat{R}_{xx} de la matrice R_{xx} ,
- le diagonaliser et en déduire une estimation de la matrice W ,
- extraire de W les matrices W_{\downarrow} et W_{\uparrow} ,
- calculer $\Phi = (W_{\downarrow}^H W_{\downarrow})^{-1} W_{\downarrow}^H W_{\uparrow}$,
- diagonaliser la matrice Φ et en déduire les pôles $\{z_k\}_{k \in \{0 \dots K-1\}}$.





Contexte académique } **sans modifications**

Par le téléchargement ou la consultation de ce document, l'utilisateur accepte la licence d'utilisation qui y est attachée, telle que détaillée dans les dispositions suivantes, et s'engage à la respecter intégralement.

La licence confère à l'utilisateur un droit d'usage sur le document consulté ou téléchargé, totalement ou en partie, dans les conditions définies ci-après, et à l'exclusion de toute utilisation commerciale.

Le droit d'usage défini par la licence autorise un usage dans un cadre académique, par un utilisateur donnant des cours dans un établissement d'enseignement secondaire ou supérieur et à l'exclusion expresse des formations commerciales et notamment de formation continue. Ce droit comprend :

- le droit de reproduire tout ou partie du document sur support informatique ou papier,
- le droit de diffuser tout ou partie du document à destination des élèves ou étudiants.

Aucune modification du document dans son contenu, sa forme ou sa présentation n'est autorisée.

Les mentions relatives à la source du document et/ou à son auteur doivent être conservées dans leur intégralité.

Le droit d'usage défini par la licence est personnel et non exclusif. Tout autre usage que ceux prévus par la licence est soumis à autorisation préalable et expresse de l'auteur : sitepedago@telecom-paristech.fr