Institut Mines-Télécom

Corrigé des exercices sur les méthodes à haute résolution

Roland Badeau
roland.badeau@telecom-paristech.fr

TELECOM Paris
IP PARIS

1 *Mu*ltiple *Si*gnal *C*lassification (MUSIC)

Question 1 Il suffit de remarquer que

$$\boldsymbol{S}_k = \alpha_k \begin{bmatrix} 1 & z_k & \dots & {z_k}^{l-1} \\ z_k & {z_k}^2 & \dots & {z_k}^{l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ {z_k}^{n-1} & {z_k}^{n} & \dots & {z_k}^{N-1} \end{bmatrix} = \alpha_k \begin{bmatrix} 1 \\ z_k \\ \vdots \\ {z_k}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & z_k & \dots & {z_k}^{l-1} \end{bmatrix}$$

Question 2 Comme $s[t] = \sum_{k=0}^{K-1} x_k[t]$, $\boldsymbol{S} = \sum_{k=0}^{K-1} \boldsymbol{S}_k$, ou encore $\boldsymbol{S} = \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k \, \boldsymbol{v}^n(z_k) \, \boldsymbol{v}^l(z_k)^T$. La factorisation $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{V}^n \, \boldsymbol{A} \, \boldsymbol{V}^{l^T}$ est une simple réécriture de cette dernière égalité.

Question 3 En utilisant l'égalité $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{V}^n \, \boldsymbol{A} \, \boldsymbol{V}^{l^T}$, on obtient la factorisation $\boldsymbol{R}_{ss} = \boldsymbol{V}^n \, \boldsymbol{P} \, \boldsymbol{V}^{n^H}$, où $\boldsymbol{P} = \frac{1}{l} \boldsymbol{A} \, \boldsymbol{V}^{l^T} \boldsymbol{V}^{l^*} \boldsymbol{A}^H$. Ainsi $\boldsymbol{R}_{ss}$ et $\boldsymbol{P}$ sont des matrices symétriques hermitiennes et positives par construction. De plus la matrice $\boldsymbol{A}$ est inversible (car tous les α_k sont non nuls) et $\boldsymbol{V}^l$ est de rang plein (car tous les pôles sont distincts), donc $\boldsymbol{P}$ est inversible, ce qui prouve que $\boldsymbol{P}$ est définie positive. Comme de plus la matrice $\boldsymbol{V}^n$ est de rang plein (car tous les pôles sont distincts), on a $\mathrm{Im}(\boldsymbol{R}_{ss}) = \mathrm{Im}(\boldsymbol{V}^n)$, donc $\mathrm{rang}(\boldsymbol{R}_{ss}) = \mathrm{rang}(\boldsymbol{V}^n) = K$.

Question 4 Comme la matrice $\boldsymbol{R}_{ss}$ est à symétrie hermitienne, elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Comme de plus elle est positive, ses valeurs propres $\{\lambda_i\}_{i=0\dots n-1}$ sont positives. Enfin, le fait qu'elle soit exactement de rang K implique
- $\forall i \in \{0 \dots K-1\}$, $\lambda_i > 0$;
- $\forall i \in \{K \dots n-1\}$, $\lambda_i = 0$.

Question 5 $\boldsymbol{R}_{xx} = \mathbb{E}\left[\frac{1}{l} \boldsymbol{X} \, \boldsymbol{X}^H\right] = \frac{1}{l} \mathbb{E}\left[\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^H + \boldsymbol{S}\boldsymbol{B}^H + \boldsymbol{B}\boldsymbol{S}^H + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^H\right]$. Or comme le bruit est centré, $\mathbb{E}\left[\boldsymbol{S}\boldsymbol{B}^H\right] = \boldsymbol{S} \, \mathbb{E}\left[\boldsymbol{B}^H\right] = \boldsymbol{0}$. De même, $\mathbb{E}\left[\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}^H\right] = \boldsymbol{0}$, d'où le résultat.

Question 6 $\boldsymbol{R}_{xx} \, \boldsymbol{w}_i = \left(\boldsymbol{R}_{ss} + \sigma^2 \boldsymbol{I}_n\right) \boldsymbol{w}_i = (\lambda_i + \sigma^2) \boldsymbol{w}_i$, donc $\boldsymbol{w}_i$ est vecteur propre de $\boldsymbol{R}_{xx}$ associé à la valeur propre $\lambda'_i = \lambda_i + \sigma^2$.

Question 7 Pour tout $i \in \{0 \dots K-1\}$, $\boldsymbol{R}_{ss} \, \boldsymbol{w}_i = \lambda_i \, \boldsymbol{w}_i$. Donc $\boldsymbol{w}_i = \frac{1}{\lambda_i} \left(\boldsymbol{V}^n \, \boldsymbol{P} \, \boldsymbol{V}^{n^H}\right) \boldsymbol{w}_i$. En particulier, $\boldsymbol{w}_i \in \mathrm{Im}(\boldsymbol{V}^n)$. Comme cela est vrai pour tout $i \in \{0 \dots K-1\}$, on en déduit que $\mathrm{Im}(\boldsymbol{W}) \subset \mathrm{Im}(\boldsymbol{V}^n)$. De plus, $\mathrm{rang}(\boldsymbol{W}) = K$ car $\boldsymbol{W}$ est une matrice orthonormée, donc libre. Comme par ailleurs $\mathrm{rang}(\boldsymbol{V}^n) \leq K$, on en déduit que $\mathrm{Im}(\boldsymbol{W}) = \mathrm{Im}(\boldsymbol{V}^n)$.

Question 8 Pour tout $k \in \{0 \dots K-1\}$, $\boldsymbol{v}^n(z_k) \in \mathrm{Im}(\boldsymbol{V}^n)$. Or $\mathrm{Im}(\boldsymbol{V}^n) = \mathrm{Im}(\boldsymbol{W}) \perp \mathrm{Im}(\boldsymbol{W}_\perp)$. On en déduit que $\boldsymbol{v}^n(z_k) \perp \mathrm{Im}(\boldsymbol{W}_\perp)$, donc $\left\|\boldsymbol{W}_\perp^H \boldsymbol{v}^n(z_k)\right\|^2 = 0$. Ainsi, tous les pôles $\{z_k\}_{k\in\{0\dots K-1\}}$ sont solution. S'il existait une autre solution z distincte des z_k, on aurait alors $\boldsymbol{v}^n(z) \perp \mathrm{Im}(\boldsymbol{W}_\perp)$, donc $\boldsymbol{v}^n(z_k) \in \mathrm{Im}(\boldsymbol{V}^n)$. Cela est impossible car la famille constituée des colonnes de $\boldsymbol{V}^n$ et de $\boldsymbol{v}^n(z)$ est libre si z est distinct des z_k. En conclusion, les pôles $\{z_k\}_{k\in\{0\dots K-1\}}$ sont les uniques solutions de l'équation $\left\|\boldsymbol{W}_\perp^H \boldsymbol{v}^n(z)\right\|^2 = 0$.

Roland Badeau `roland.badeau@telecom-paristech.fr`

2 *E*stimation of *S*ignal *P*arameters via *R*otational *I*nvariance *T*echniques (ESPRIT)

Question 1 On trouve $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(z_0, z_1, \dots, z_{K-1})$.

Question 2 Comme les matrices $\boldsymbol{V}^n$ et $\boldsymbol{W}$ sont deux bases du même espace, elles satisfont la relation $\boldsymbol{V}^n = \boldsymbol{W}\boldsymbol{G}$, où $\boldsymbol{G}$ est la matrice de passage de la base $\boldsymbol{W}$ à la base $\boldsymbol{V}^n$. Les égalités $\boldsymbol{V}^n_\downarrow = \boldsymbol{W}_\downarrow\boldsymbol{G}$ et $\boldsymbol{V}^n_\uparrow = \boldsymbol{W}_\uparrow\boldsymbol{G}$ sont obtenues en extrayant respectivement les $n-1$ premières lignes et les $n-1$ dernières lignes de l'égalité $\boldsymbol{V}^n = \boldsymbol{W}\boldsymbol{G}$.

Question 3 $\boldsymbol{W}_\uparrow = \boldsymbol{V}^n_\uparrow\boldsymbol{G}^{-1} = \boldsymbol{V}^n_\downarrow\boldsymbol{D}\boldsymbol{G}^{-1} = \boldsymbol{W}_\downarrow\boldsymbol{G}\boldsymbol{D}\boldsymbol{G}^{-1}$. On en déduit l'égalité $\boldsymbol{W}_\uparrow = \boldsymbol{W}_\downarrow\boldsymbol{\Phi}$, où $\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{D}\boldsymbol{G}^{-1}$. Il s'agit de la forme diagonalisée de la matrice $\boldsymbol{\Phi}$. Ainsi les valeurs propres de $\boldsymbol{\Phi}$ sont les éléments diagonaux de $\boldsymbol{D}$, c'est-à-dire les pôles z_k.

Question 4 Comme $\boldsymbol{W}_\uparrow = \boldsymbol{W}_\downarrow\boldsymbol{\Phi}$, on a $\boldsymbol{W}_\downarrow^H\boldsymbol{W}_\uparrow = \boldsymbol{W}_\downarrow^H\boldsymbol{W}_\downarrow\boldsymbol{\Phi}$, d'où $\boldsymbol{\Phi} = \left(\boldsymbol{W}_\downarrow^H\boldsymbol{W}_\downarrow\right)^{-1}\boldsymbol{W}_\downarrow^H\boldsymbol{W}_\uparrow$.

Question 5 L'algorithme ESPRIT se décompose en plusieurs étapes :
- calculer l'estimateur $\widehat{\boldsymbol{R}}_{xx}$ de la matrice $\boldsymbol{R}_{xx}$,
- le diagonaliser et en déduire une estimation de la matrice $\boldsymbol{W}$,
- extraire de $\boldsymbol{W}$ les matrices $\boldsymbol{W}_\downarrow$ et $\boldsymbol{W}_\uparrow$,
- calculer $\boldsymbol{\Phi} = \left(\boldsymbol{W}_\downarrow^H\boldsymbol{W}_\downarrow\right)^{-1}\boldsymbol{W}_\downarrow^H\boldsymbol{W}_\uparrow$,
- diagonaliser la matrice $\boldsymbol{\Phi}$ et en déduire les pôles $\{z_k\}_{k\in\{0\dots K-1\}}$.

Roland Badeau `roland.badeau@telecom-paristech.fr`

Roland Badeau `roland.badeau@telecom-paristech.fr`