

UE MU5MEAT1

Fondamentaux pour ATIAM

Vibrations

Master de Mécanique, Spécialité Acoustique

J-L Le Carrou

Equipe LAM - Lutheries-Acoustique-Musique
Institut Jean Le Rond d'Alembert (CNRS UMR 7190)
Sorbonne Université - Ministère de la Culture
4 place Jussieu - 75005 Paris
jean-loic.le_carrou@sorbonne-universite.fr

Plan du cours

Chapitre 1 L'oscillateur à 1 degré de liberté

Objectif : Etablir et manipuler l'équation qui décrit le mouvement d'un oscillateur à 1 degré de liberté. Résoudre cette équation en régime libre ou forcé (force harmonique ou non). Interpréter le fonctionnement de l'oscillateur en fonction de la fréquence. Connaitre la pulsation propre, pseudo pulsation et pulsation de résonance d'un oscillateur à 1 degré de liberté.

1. Mise en équation
2. Oscillateur en régime libre
3. *Application* au résonateur de Helmholtz
4. Oscillateur en régime forcé
5. Notion de fonction de transfert
6. *Application* au principe de fonctionnement de l'accéléromètre
7. *Application* à la mesure d'amortissement

Chapitre 2 L'oscillateur à 2 degrés de liberté

Objectif : Etablir et manupiler les équations couplées qui décrivent le mouvement de deux oscillateurs. Résoudre un tel système par la méthode de la base modale en régime libre ou forcé (force harmonique ou non). Identifier et décrire les modes d'un système à 2 degrés de liberté.

1. Mise en équation
2. Notion de base modale
3. Applications à l'absorbeur dynamique
4. *Application* à la guitare

Chapitre 3 Vibrations des continus

Objectif : Connaitre la relation entre contrainte et déformation. Etablir l'équation du mouvement d'une barre en traction-compression, en torsion et d'une corde homogène en flexion. Résoudre ces équations en régime libre ou forcé (force harmonique ou non) à partir des conditions aux limites et des conditions initiales.

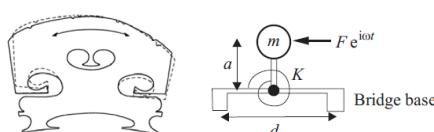
1. Notions d'élasticité des matériaux
2. Vibrations en traction-compression et en rotation des barres
3. Vibrations transversales des cordes

Cours de Vibrations - UE Fondamentaux pour l'acoustique, le traitement du signal et l'informatique appliqués à la musique

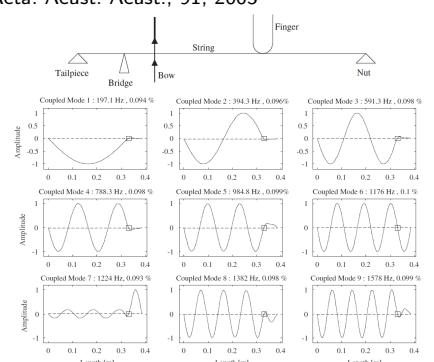
par
Jean-Loïc Le Carrou

Equipe Lutheries-Acoustique-Musique (LAM) - Institut Jean Le Rond d'Alembert,
CNRS UMR 7190, Ministère de la Culture et de la Communication,
4 place Jussieu, 75005 Paris - FRANCE
jean-loic.le.carrou@sorbonne-universite.fr

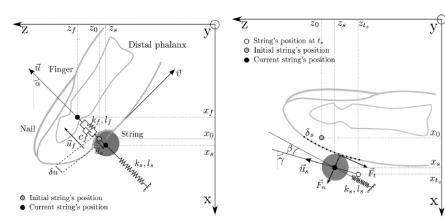
Introduction Générale



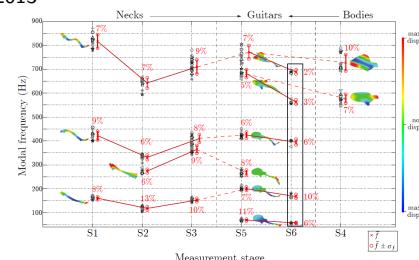
J. Woodhouse, On the "bridge hill" of the violin, Acta Acust. Acust., 91, 2005



O. Inacio, J. Antunès et V. Debut, Computational modelling of string-body interaction for the violin family and simulation of wolf notes, J. Sound Vib., 310, 2008



D. Chadeaux, J.-L. Le Carrou et B. Fabre, A model of harp plucking, J. Acoust. Soc. Am. 133, 2013



A Paté, J.-L. Le Carrou, F. Tessier et B. Fabre, Evolution of the modal behaviour of nominally identical electric guitars during the making process, Acta Acust. Acust. 101, 2015

Introduction Générale

Objectifs

Dispenser les notions de base et des compétences en théorie des vibrations pour aborder l'acoustique musicale

= Etude de systèmes simples permettant une description physique précise

Plan du Cours

Chapitre 1 : Oscillateur à 1 degré de liberté

Chapitre 2 : Oscillateur à 2 degrés de liberté

Chapitre 3 : Vibrations des systèmes continus



L'oscillateur à 1 degré de liberté

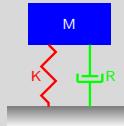
Plan

- ① Introduction
- ② Mise en équation
- ③ Oscillateur en régime libre
- ④ Application au résonateur de Helmholtz
- ⑤ Oscillateur en régime forcé
- ⑥ Notion de Fonction de transfert
- ⑦ Application au principe de fonctionnement de l'accéléromètre
- ⑧ Application à la mesure d'amortissement

Introduction

Système à 1 degré de liberté = brique élémentaire de systèmes compliqués

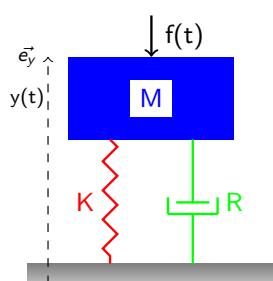
Système à 1 degré de liberté = système mécanique élémentaire dont on considère le mouvement d'une masse par rapport à une partie fixe dans une seule direction.



Système à 1 degré de liberté = système permettant d'expliquer simplement de nombreux phénomènes physiques

Mise en équation

§ p77-79



Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (BAME) :

- Force exercée par le ressort sur la masse

$$\vec{F}_{res} = -K(y - l_0)\vec{e}_y$$

- Force exercée par l'amortisseur sur la masse

$$\vec{F}_{amo} = -R\dot{y}\vec{e}_y$$

- Force de gravité de la masse : $\vec{P} = -Mg\vec{e}_y$
- Force extérieure : $\vec{F}_{ext} = f(t)\vec{e}_y$

Principe Fondamental de la Dynamique :

$$M\ddot{y}\vec{e}_y = \vec{F}_{res} + \vec{F}_{amo} + \vec{P} + \vec{F}_{ext}$$

Ou encore en projection sur l'axe \vec{e}_y

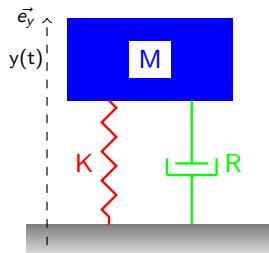
$$M\ddot{y} + R\dot{y} + K(y - \frac{k l_0 - Mg}{k}) = f(t)$$

En faisant le changement de variable : $Y = y - y_0$, où $y_0 = \frac{k l_0 - Mg}{k}$ il vient :

$$M\ddot{Y} + R\dot{Y} + KY = f(t)$$

Régime libre

§ p77-79

Equation du mouvement (suivant l'axe \vec{e}_y) :

$$M\ddot{Y} + R\dot{Y} + KY = 0$$

Solution du type $Y(t) = \chi e^{j\omega t}$, d'où
l'équation caractéristique :

$$-\omega^2 M + j\omega R + K = 0$$

- $R > 2\sqrt{MK}$ ⇒ Mouvement sur-amorti

$$y(t) = \left(C_1 e^{\sqrt{\frac{K}{M}} \sqrt{\frac{R^2}{4MK}-1}t} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{K}{M}} \sqrt{\frac{R^2}{4MK}-1}t} \right) e^{-\frac{R}{2M}t}$$

- $R = 2\sqrt{MK}$ ⇒ Mouvement avec amortissement critique

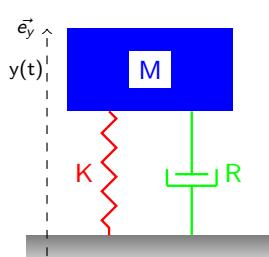
$$y(t) = (C_3 t + C_4) e^{-\frac{R}{2M}t}$$

- $R < 2\sqrt{MK}$ ⇒ Mouvement sous-amorti

$$y(t) = C_5 \sin \left(\sqrt{\frac{K}{M}} \sqrt{1 - \frac{R^2}{4MK}} t + \Phi \right) e^{-\frac{R}{2M}t}$$

Régime libre

§ p77-79

Equation du mouvement (suivant l'axe \vec{e}_y) :

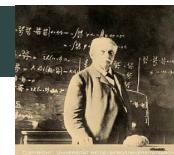
$$M\ddot{Y} + R\dot{Y} + KY = 0$$

Solution du type $Y(t) = \chi e^{j\omega t}$, d'où
l'équation caractéristique :

$$-\omega^2 M + j\omega R + K = 0$$

- Pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$
- Constante de temps : $\tau = \frac{2M}{R}$
- Facteur de qualité : $Q = \frac{\omega_0 \tau}{2} = \frac{\sqrt{MK}}{R}$
- Amortissement critique : $R_{cr} = 2\sqrt{MK}$
- Taux d'amortissement : $\xi = \frac{R}{R_{cr}} = \frac{R}{2M\omega_0} = \frac{1}{2Q}$
- Pseudo-pulsation : $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$

Régime libre

Hermann Von Helmholtz
[1821-1894]

Application : le résonateur de Helmholtz



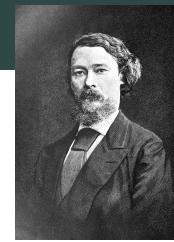
www.inrp.fr

Principe historique :

Pour l'analyse de sons complexes, l'expérimentateur positionne un à un l'un des deux orifices des résonateurs à son oreille. Les différentes fréquences sont trouvées lorsqu'elles sont amplifiées.

Principe toujours utilisé actuellement : enceinte Basse-Reflex, caisse de résonance, instruments de percussion...

Régime libre

Karl Rudolph Koenig
[1832-1901]

Application : l'analyseur de Koenig

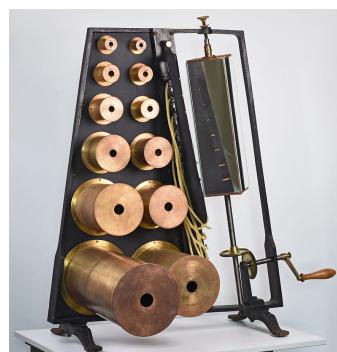


Photo : Laurent Quartier (LAM / ∂'Alembert,
SU-CNRS)

Principe historique :

Pour l'analyse de sons complexes, la résonance acoustique des résonateurs entraîne, via une membrane qui oscille, une modulation du débit du gaz et donc de la flamme associée au résonateur en question. Ce qui permet une décomposition spectrale du son.

Voir la vidéo explicative : <https://youtu.be/OdzGR3k-ljA>

Régime libre

Application : le résonateur de Helmholtz



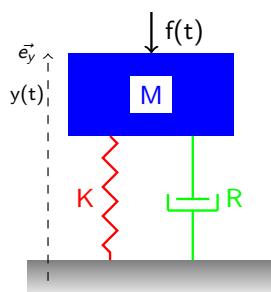
- Masse acoustique : $M = \rho_0 \ell \pi r_{col}^2 = \rho_0 \ell S$
- Raideur acoustique : $K = \frac{\gamma P S^2}{V}$
- Amortissement : $R = \frac{1}{4} \rho_0 c_0 S k^2 r_{col}^2$

$$\text{Pulsion propre : } \omega_0 = c_0 \sqrt{\frac{S}{\ell V}}$$

$$\text{Facteur de qualité : } Q = \frac{4}{k^2 r_{col}^2} \sqrt{\frac{\ell S}{V}}$$

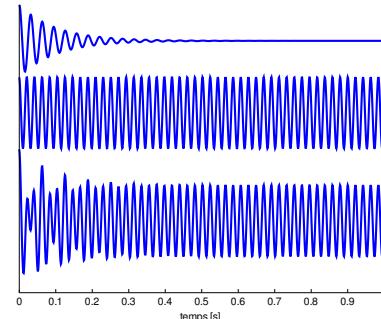
Régime forcé

§ p82-87



Equation du mouvement :

$$M \ddot{Y} + R \dot{Y} + KY = F \cos(\omega t)$$



Solution générale

$$A e^{-\xi \omega_0 t} \sin(\omega_d t + \theta) +$$

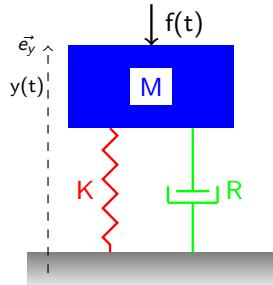
Solution particulière

$$A_0 \cos(\omega t - \Phi) =$$

Réponse

⇒ Notion de transitoire !

Régime forcé §p82-87



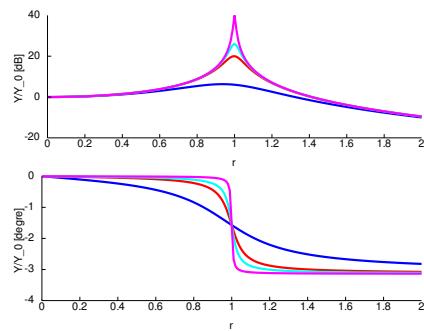
Résultats pour
 $Q = 2, 10, 20, 100$

Equation du mouvement :

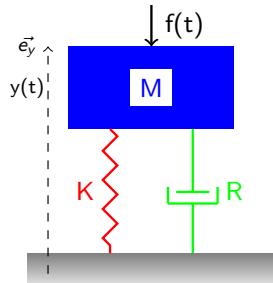
$$M\ddot{Y} + R\dot{Y} + KY = Fe^{j\omega t}$$

Solution du type $Y(t) = \chi e^{j\omega t}$, d'où :

$$\chi(\omega) = \frac{F}{-M\omega^2 + jR\omega + K}$$



Régime forcé §p82-87



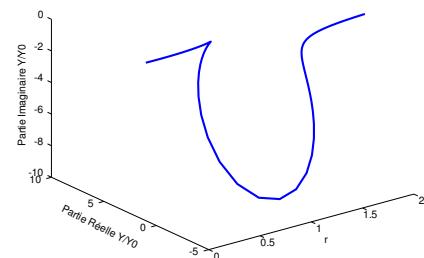
Représentation partie
imaginaire, partie réelle en
fonction du temps

Equation du mouvement :

$$M\ddot{Y} + R\dot{Y} + KY = Fe^{j\omega t}$$

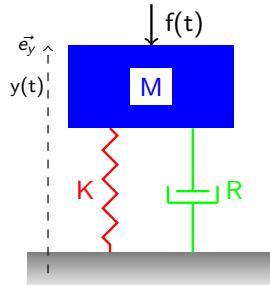
Solution du type $Y(t) = \chi e^{j\omega t}$, d'où :

$$\chi(\omega) = \frac{F}{-M\omega^2 + jR\omega + K}$$



Régime forcé

§ p82-87

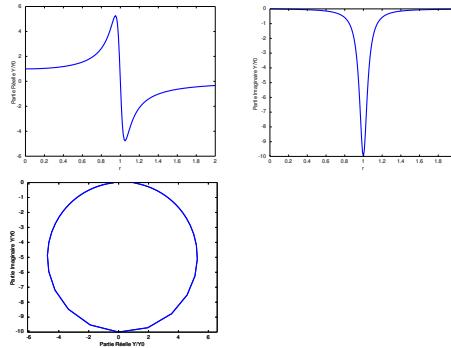


Equation du mouvement :

$$M\ddot{Y} + R\dot{Y} + KY = F e^{j\omega t}$$

Solution du type $Y(t) = \chi e^{j\omega t}$, d'où :

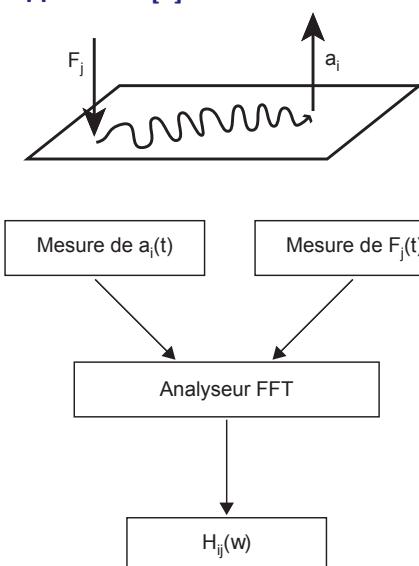
$$\chi(\omega) = \frac{F}{-M\omega^2 + jR\omega + K}$$



Représentation partie imaginaire, partie réelle en fonction du temps

Régime forcé

Application [1] : Notion de fonction de transfert



On définit la fonction de transfert ou Fonction de Réponse en Fréquence (FRF) comme le rapport « Sortie » sur « Entrée » en fonction de la fréquence :

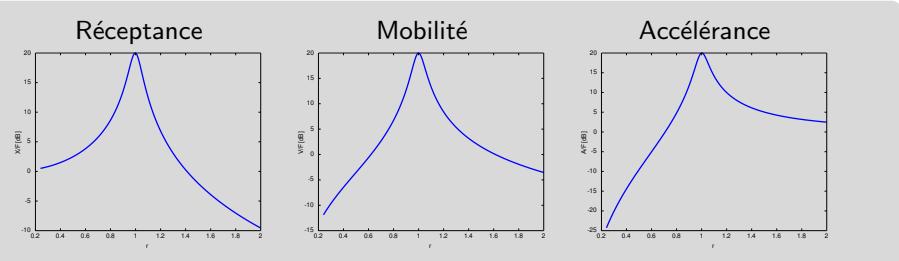
$$H_{ij} = \frac{a_i(\omega)}{F_j(\omega)}$$

La FRF est une caractéristique de la structure dépendant des points d'« excitation » et de « réponse ».

Régime forcé

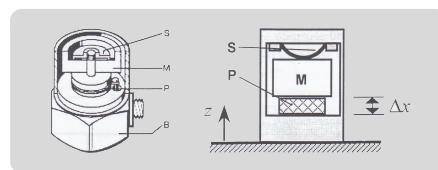
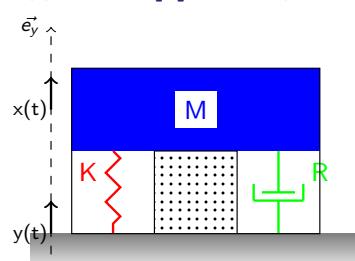
Application [1] : Notion de fonction de transfert

	R/F	F/R
Déplacement X	$\frac{X}{F}$ Réceptance Compliance Flexibilité dynamique	$\frac{F}{X}$ Raideur dynamique
Vitesse V	$\frac{V}{F}$ Mobilité Admittance	$\frac{F}{V}$ Impédance mécanique
Accélération A	$\frac{A}{F}$ Inertance Accélérande	$\frac{F}{A}$ Masse dynamique



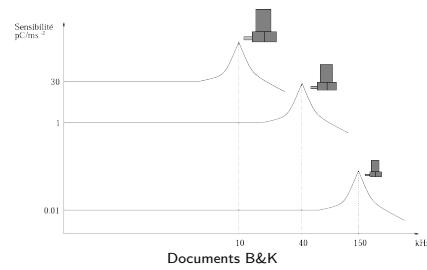
Régime forcé

Application [2] : Principe de l'accéléromètre



Expliquez le fonctionnement de l'accéléromètre...

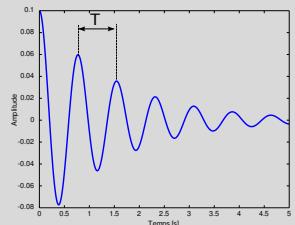
... Et montrez que la sensibilité de l'accéléromètre est proportionnelle à sa masse.



Régime forcé

Application [3] : Mesure de l'amortissement

Méthode du décrément logarithmique



$$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)}$$

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$$

Méthode de la bande passante à -3dB

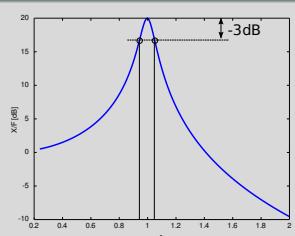
Méthode d'identification du cercle

Régime forcé

Application [3] : Mesure de l'amortissement

Méthode du décrément logarithmique

Méthode de la bande passante à -3dB



$$2\xi = \frac{\Delta\omega}{\omega_{max}} = \frac{f_2 - f_1}{(f_1 + f_2)/2}$$

Méthode d'identification du cercle

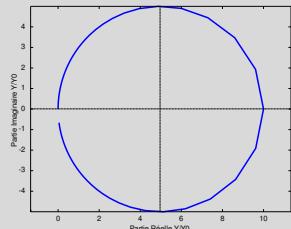
Régime forcé

Application [3] : Mesure de l'amortissement

Méthode du décrément logarithmique

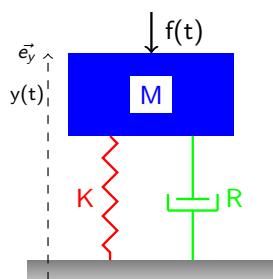
Méthode de la bande passante à -3dB

Méthode d'identification du cercle



Au voisinage de ω_0 , la mobilité est assimilable à un cercle de centre $\{\frac{1}{2R}, 0\}$ et le rayon $\frac{1}{2R}$.

Régime forcé



Equation du mouvement :

$$M\ddot{Y} + R\dot{Y} + KY = F(t)$$

Pour une excitation qcq : utilisation des transformées de Laplace

$$F(t) \leftrightarrow \hat{F}(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{st} dt$$

Quelques propriétés utiles :

- Linéarité

$$\alpha_1 F_1(t) + \alpha_2 F_2(t) \leftrightarrow \alpha_1 \hat{F}_1(s) + \alpha_2 \hat{F}_2(s)$$

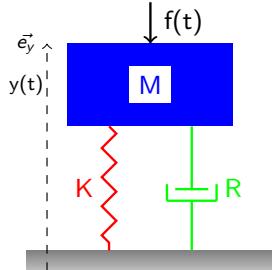
- Transformée des dérivées

$$\begin{aligned}\dot{F}(t) &\leftrightarrow s\hat{F}(s) - F(0) \\ \ddot{F}(t) &\leftrightarrow s^2\hat{F}(s) - sF(0) - \dot{F}(0)\end{aligned}$$

- Propriétés de décalage

$$\begin{aligned}F(t - t_0) &\leftrightarrow \hat{F}(s)e^{-st_0} \\ e^{-ts_0} F(t) &\leftrightarrow \hat{F}(s + s_0)\end{aligned}$$

Régime forcé



Transformées usuelles

Equation du mouvement :

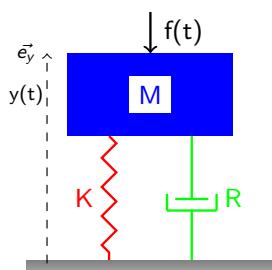
$$M\ddot{Y} + R\dot{Y} + KY = F(t)$$

Pour une excitation qcq : utilisation des transformées de Laplace

$$F(t) \leftrightarrow \hat{F}(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{st} dt$$

$\delta(t)$	\leftrightarrow	1	$\cos(s_0 t)$	\leftrightarrow	$\frac{s}{s^2 + s_0^2}$
$t^n e^{s_0 t}$	\leftrightarrow	$\frac{n!}{(s - s_0)^{n+1}}$	$\sinh(s_0 t)$	\leftrightarrow	$\frac{s_0}{s^2 - s_0^2}$
$\sin(s_0 t)$	\leftrightarrow	$\frac{s_0}{s^2 + s_0^2}$	$\cosh(s_0 t)$	\leftrightarrow	$\frac{s}{s^2 - s_0^2}$

Régime forcé



Equation du mouvement :

$$M\ddot{Y} + R\dot{Y} + KY = F(t)$$

Pour une excitation qcq : utilisation des transformées de Laplace

$$F(t) \leftrightarrow \hat{F}(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{st} dt$$

Equation du mouvement d'écrit dans le domaine de Laplace

$$(Ms^2 + Rs + K)\hat{Y}(s) - (Ms + R)Y(0) - M\dot{Y}(0) = \hat{F}(s)$$

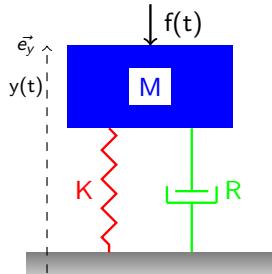
$$\Leftrightarrow (s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2)\hat{Y}(s) - (s + 2\xi\omega)Y(0) - \dot{Y}(0) = F(s)/M$$

On en déduit

$$\hat{Y}(s) = \frac{\hat{F}(s)}{M} \frac{1}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} + \frac{(s + 2\xi\omega_0)Y(0) + \dot{Y}(0)}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$\hat{Y}(s) = \frac{\hat{F}(s)}{M} \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} + \frac{(s + 2\xi\omega_0)Y(0) + \dot{Y}(0)}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

Régime forcé



Equation du mouvement :

$$M\ddot{Y} + R\dot{Y} + KY = F(t)$$

Pour une excitation qcq : utilisation des transformées de Laplace

$$F(t) \leftrightarrow \hat{F}(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{st} dt$$

Exemple : réponse impulsionnelle ($F(t) = F_0\delta(t)$), avec $Y(0) = \dot{Y}(0) = 0$:

$$\hat{Y}(s) = \frac{F_0}{M} \frac{1}{(s - s_1)(s - s_2)} \quad \text{avec} \quad s_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} = -\xi\omega_0 \pm \omega_d$$

$$Y(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{M\xi\omega_0} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_d t) & \text{si } \xi < 1 \\ \frac{F_0}{M} t e^{-\omega_0 t} & \text{si } \xi = 1 \\ \frac{F_0}{M\omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}} e^{-\xi\omega_0 t} \sinh(\omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}t) & \text{si } \xi > 1 \end{cases}$$

QCM

Questions	Réponses
1. La mobilité, rapport de la vitesse sur la force appliquée sur la masse, d'un système masse-ressort (M-K) :	<input type="checkbox"/> Tend en BF vers $1/\omega$ où ω est la pulsation <input type="checkbox"/> Tend en BF vers ω où ω est la pulsation <input type="checkbox"/> Tend en HF vers une constante dépendant de M <input type="checkbox"/> Tend en HF vers ω où ω est la pulsation <input type="checkbox"/> Tend en HF vers $1/\omega$ où ω est la pulsation
2. La fréquence de résonance d'un système masse-ressort-amortisseur (M-K-C) :	<input type="checkbox"/> est supérieure à la pulsation propre du système <input type="checkbox"/> correspond au maximum de la réceptance <input type="checkbox"/> est dépendante de l'amortissement C <input type="checkbox"/> vaut $\sqrt{\frac{K}{M}}$

L'oscillateur à 2 degrés de liberté

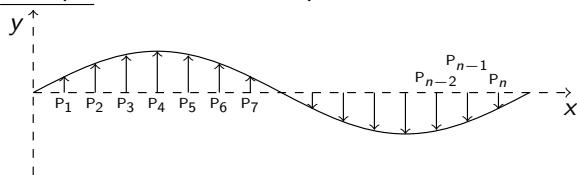
Plan

- ① Introduction
- ② Mise en équation
- ③ Notion de base modale
- ④ Applications à l'absorbeur dynamique
- ⑤ Application à la guitare

Introduction

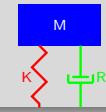
- Les mouvements vibratoires d'une structure continue peuvent être décrits à l'aide d'un certain nombre de variables appelées **degrés de liberté** (ddl) ;
- Ces **degrés de liberté** sont fonctions de leur position, du type de mouvement et de la direction.

Exemple : vibrations d'une poutre

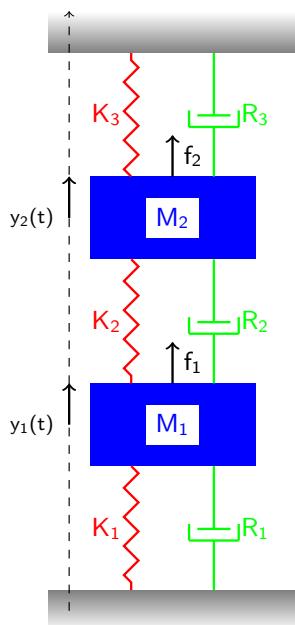


Les $W(P_i)_{i=1..N}$ décrivent le mouvement de la poutre

Chaque **degré de liberté** peut être associé à



Equation du mouvement



Equation du mouvement :

$$M\ddot{y} + R\dot{y} + Ky = 0$$

avec

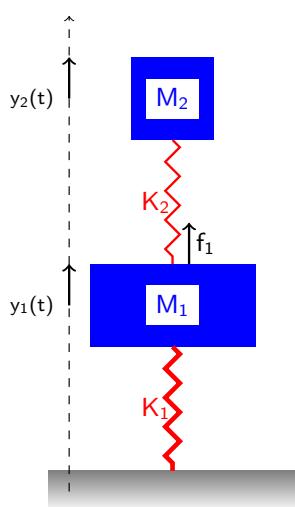
$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 + K_3 \end{pmatrix}$$

⇒ Découpler les équations pour résoudre le problème

Exemple



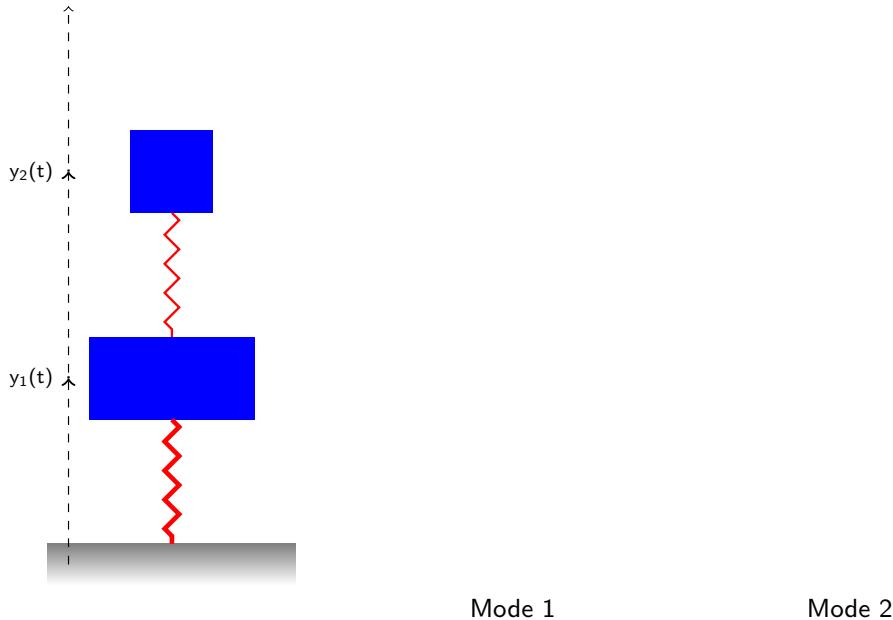
$$M_1 = 9, M_2 = 1, K_1 = 24 \text{ et } K_2 = 3$$

Calcul par la **méthode directe**
↓
Pas d'interprétation physique

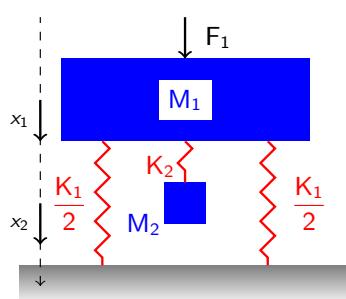
Calcul par la **méthode modale** :

- Détermination des modes du système homogène associé
- Calcul des FRF

Exemple

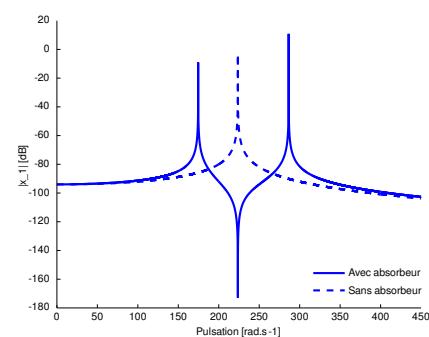


Exemple

Application [1] - Absorbeur dynamique (voir TD)

Expliquez le fonctionnement de l'absorbeur dynamique...

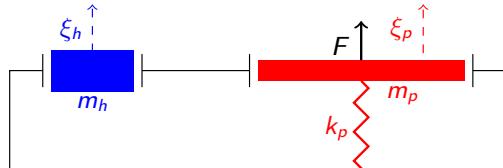
$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{(-\omega^2 M_2 + K_2)F_1}{(-\omega^2 M_1 + K_1 + K_2)(-\omega^2 M_2 + K_2) - K_2^2} \\x_2 &= \frac{K_2 F_1}{(-\omega^2 M_1 + K_1 + K_2)(-\omega^2 M_2 + K_2) - K_2^2}\end{aligned}$$



Exemple

p229-p234

Application [2] - et la guitare en basses fréquences alors ?



La guitare acoustique à basses fréquences est assimilable à un système à 2 DDL.

Système conservatif associé :

$$\begin{bmatrix} m_p & 0 \\ 0 & m_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_p \\ \ddot{\xi}_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_p + \mu A_p^2 & \mu A_h A_p \\ \mu A_h A_p & \mu A_h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_p \\ \xi_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

Modification structurale de l'instrument :

- modification de la table : $m_p \nearrow$ alors $\omega_{1,2} \searrow$ et $k_p \searrow$ alors $\omega_{1,2} \searrow$
- modification du volume de la caisse : $V \nearrow$ alors $\omega_{1,2} \searrow$
- modification de l'événement : $A_h \nearrow$ alors $\omega_{1,2} \nearrow$ et $h \nearrow$ alors $\omega_{1,2} \searrow$

QCM

Questions	Réponses
1. Pour un système physique à 2 degrés de liberté (ddl)	<input type="checkbox"/> a des composantes de vecteurs propres en phase <input type="checkbox"/> la matrice masse a comme dimension 2×2 <input type="checkbox"/> a des vecteurs propres connus de manière absolue <input type="checkbox"/> a toujours deux fréquences propres
2. Le comportement BF de la guitare acoustique peut se modéliser par un système physique à 2 ddl	<input type="checkbox"/> dont les paramètres sont obtenus arbitrairement <input type="checkbox"/> ce qui permet d'avoir la base modale de l'instrument <input type="checkbox"/> ce qui permet d'étudier l'influence d'éléments de lutherie <input type="checkbox"/> ce qui représente toute la physique de l'instrument

Vibrations des systèmes continus

Plan

- ① Introduction
- ② Notions d'élasticité des matériaux
- ③ Vibrations en traction-compression et en rotation des barres
- ④ Vibrations transversales des cordes

Introduction

Instruments de musique à cordes et à percussion



assemblage de solides élémentaires : cordes, membranes, plaques, barres, poutres,...

Ces solides sont des milieux continus (\neq des systèmes discrets)

⇒ Etablir les modèles de base qui gouvernent les vibrations de ces solides. On s'intéressera ici à la **résolution analytique**

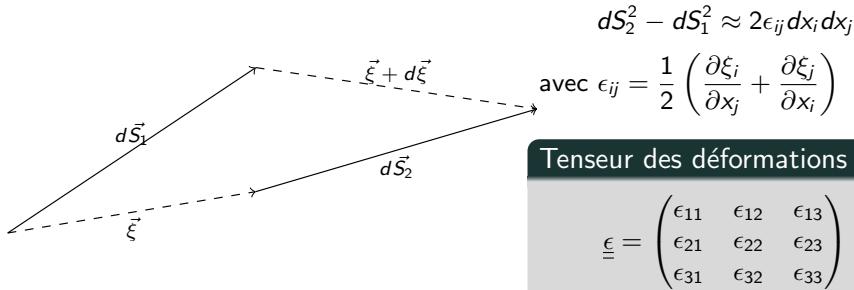
Résolution numérique : pour des structures complexes ou assemblage de solides de base

- Méthode des différences finies (§ p70-p72)
- Méthode des éléments finis (§ p73-p75)
- Méthode des matrices de transfert ...

Notions d'élasticité des matériaux

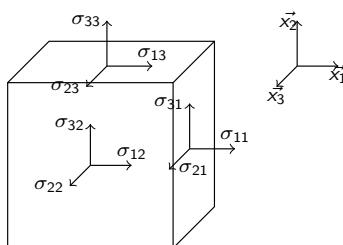
Contraintes et déformations

§ p23-p24

● Déformation

Tenseur des déformations

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$$

● Contrainte

$$\sigma_{ij} = \frac{dF_i}{dS_j} \text{ et on a } \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Tenseur des contraintes

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Notions d'élasticité des matériaux *Loi de comportement des matériaux* § p23-p24

Tenseur d'élasticité

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl} \epsilon_{kl}$$

● Matériau isotrope

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix}$$

qui s'écrit sous la forme

$$\sigma_{ij} = \lambda \operatorname{Tr}(\epsilon_{ij}) \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$$

ou encore

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \operatorname{Tr}(\sigma_{ij}) \delta_{ij}$$

$$\text{Avec } E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\mu+\lambda} \text{ et } \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

Notions d'élasticité des matériaux *Loi de comportement des matériaux*

§ p23-p24

Tenseur d'élasticité

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}\epsilon_{kl}$$

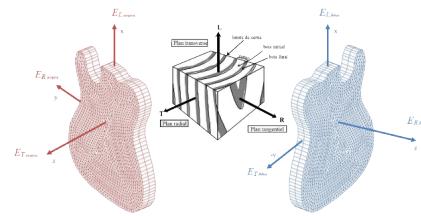
- Matériaux orthotropes

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{RL}}{E_R} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LR}}{E_L} & \frac{1}{E_R} & -\frac{\nu_{TR}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & -\frac{\nu_{RT}}{E_R} & \frac{1}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{LT}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{TR}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{RL}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}$$

Avec les propriétés de symétrie du matériau :

$$\frac{\nu_{LR}}{E_L} = \frac{\nu_{LT}}{E_R}; \quad \frac{\nu_{LT}}{E_R} = \frac{\nu_{RT}}{E_T}; \quad \frac{\nu_{RT}}{E_T} = \frac{\nu_{TR}}{E_L};$$

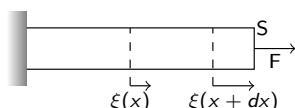
On a au final, 9 coefficients indépendants : $E_L, E_R, E_T, \nu_{LR}, \nu_{RT}, \nu_{TL}, G_{LT}, G_{TR}$ et G_{RL} .



Notions d'élasticité des matériaux

cas 1D

§ p23-p24



$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\xi(x+dx, t) - \xi(x, t)}{dx}$$

Loi de Hooke :

$$\sigma_{xx} = \frac{F}{S} = E \epsilon_{xx}$$

Ordre de grandeur du module d'Young :

- Métaux : $E \sim 10^{11}$ Pa
- Bois : $E \sim 10^{9-10}$ Pa

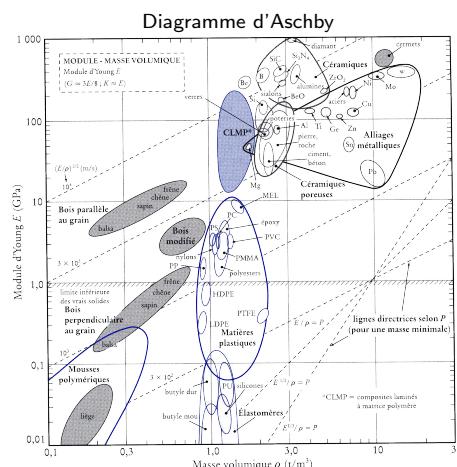
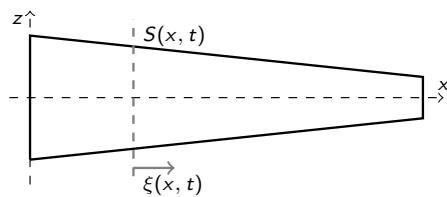


Figure 15.3 Diagramme d'Aschby donnant le module d'Young E des classes de matériaux en fonction de leur masse volumique ρ (adapté de *Materials Selection in Mechanical Design*, M. F. Ashby, Pergamon Press, 1993, reproduction autorisée).

Vibrations des barres

Traction-compression

§p27-p28



$$\rho S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(ES \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = 0$$

Pour une barre de section constante

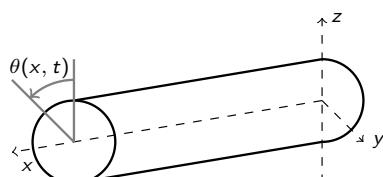
- Vitesse de propagation des ondes : $C_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$;
- Conditions aux Limites : $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0$ (libre) et $\xi = 0$ (fixe) ;
- Pulsations et déformées modales :

Conditions aux Limites	ω_n	$\phi_n(x)$
libre-libre	$\frac{n\pi c}{L}$	$\cos(\frac{n\pi x}{L})$
fixe - libre	$\frac{(2n-1)\pi c}{2L}$	$\sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2L})$
fixe - fixe	$\frac{n\pi c}{L}$	$\sin(\frac{n\pi x}{L})$

Vibrations des barres

Torsion

§p28-p30



$$I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(GJ \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0$$

Pour une barre de section constante

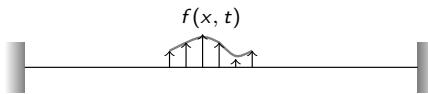
- Vitesse de propagation des ondes : $C_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$;
- Conditions aux Limites : $\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$ (libre) et $\theta = 0$ (fixe) ;
- Pulsations et déformées modales :

Conditions aux Limites	ω_n	$\phi_n(x)$
libre-libre	$\frac{n\pi c}{L}$	$\cos(\frac{n\pi x}{L})$
fixe - libre	$\frac{(2n-1)\pi c}{2L}$	$\sin(\frac{(2n-1)\pi x}{2L})$
fixe - fixe	$\frac{n\pi c}{L}$	$\sin(\frac{n\pi x}{L})$

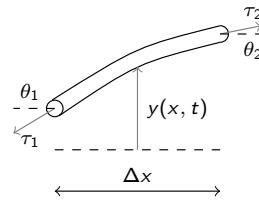
Vibrations des cordes

Equation

p18-p21 et p106-p120



Hypothèse : Corde homogène, parfaitement souple, de tension uniforme T , soumise à une force extérieure $f(x, t)$, dans le vide



Vibration transversale de la corde est régit par¹ :

$$\rho(x)S(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[T(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right] = f(x, t)$$

La solution se développe sur la base des déformées propres $\Phi_n(x)$:

$$y(x, t) = \sum_n \Phi_n(x) q_n(t)$$

1. Attention, le déplacement transversale est notée ξ p18-21 et y p106-120

Vibrations des cordes

Solution (1)

- Equation des déplacements généralisés
 - Relations d'orthogonalité : $\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = 0$
 - Solution : $q_n(t) = a_n \sin(\omega_n t) + b_n \cos(\omega_n t)$
- Equation de dispersion obtenue pour une onde harmonique
 $\omega^2 - c^2 k^2 = 0 \Rightarrow$ Propagation non dispersive
- Déformées modales de la corde ($\Phi_n(x)$)
 - Equation vérifiée : $\frac{d^2 \Phi_n}{dx^2} + \frac{\omega_n^2}{c^2} \Phi_n = 0$
 - Corde fixe à ses extrémités : $\phi_n(x) = \sin(k_n x)$ où $k_n = \frac{n\pi}{L}$
- Corde pincée sans vitesse initiale ($q_n(0)$)

$$q_n(0) = \frac{2hL^2}{n^2\pi^2x_0(L-x_0)} \sin(k_n x_0)$$

- Expression générale du déplacement

$$y(x, t) = \sum_n \frac{2hL^2}{n^2\pi^2x_0(L-x_0)} \sin(k_n x_0) \sin(k_n x) \cos(\omega_n t)$$

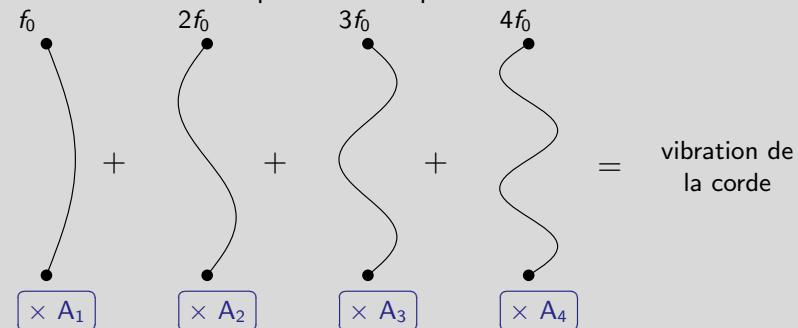
Vibrations des cordes

Solution (2)

Remarque concernant $q_n(0)$

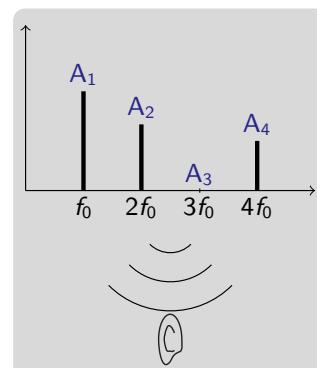
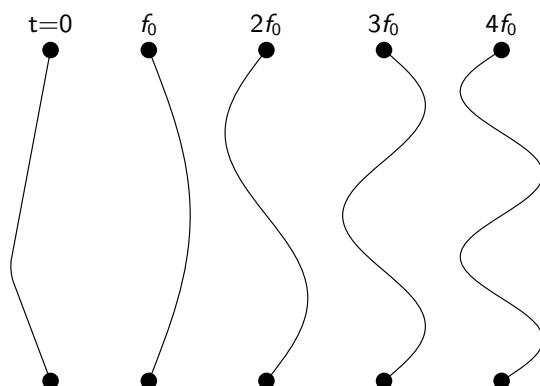
$q_n(0) = \langle y(0, t), \Phi_n(x) \rangle = A_n$
 \Rightarrow Les $q_n(0)$ mesurent donc la ressemblance entre $y(0, t)$ et les déformées modales

La vibration de la corde peut se décomposer de la manière suivante :



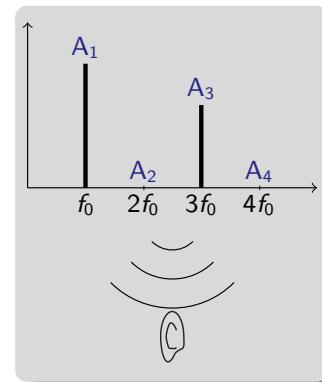
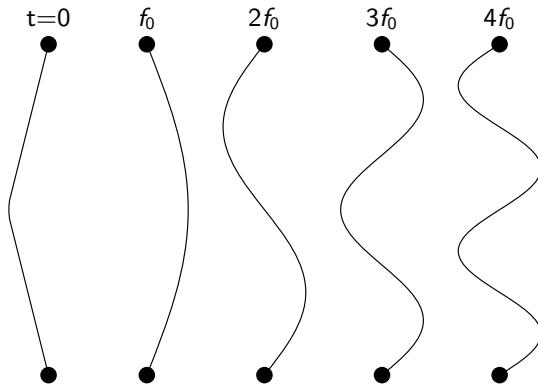
Vibrations des cordes

Solution (3)

Remarque concernant $q_n(0)$ 

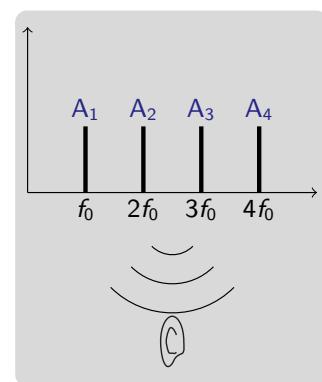
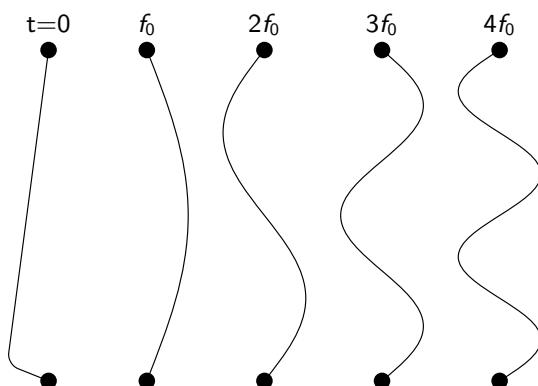
Vibrations des cordes

Solution (3)

Remarque concernant $q_n(0)$ 

Vibrations des cordes

Solution (3)

Remarque concernant $q_n(0)$ 

- Point de pincement → A_1, A_2, \dots de chaque harmonique ;
- Type de jeu → modifie le timbre de l'instrument ;

QCM

Questions	Réponses
1. Une barre en torsion, libre-libre, de longueur L et de célérité des ondes c , possédant des déformées modales Φ_n et des pulsations propres ω_n :	<input type="checkbox"/> a c qui dépend de la masse du matériau de la barre <input type="checkbox"/> a Φ_n qui vaut $\sin\left(\frac{(2n-1)\pi c}{2L}\right)$ <input type="checkbox"/> a un nombre fini de mode <input type="checkbox"/> a ω_n qui vaut $\cos\left(\frac{n\pi c}{2L}\right)$ <input type="checkbox"/> a Φ_n qui vaut $\frac{n\pi c}{L}$
2. Une corde parfaitement souple, de tension uniforme et fixée à ses extrémités	<input type="checkbox"/> oscille à la fréquence $\frac{c}{2L}$ <input type="checkbox"/> a des modes de la forme $\phi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)$ <input type="checkbox"/> a un déplacement qui décroît en $\frac{1}{r^2}$ <input type="checkbox"/> est harmonique <input type="checkbox"/> a une tension dépendante de la célérité des ondes