SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Année Universitaire
2024-2025

TD de vibrations (UE Fondamentaux en acoustique)

Master de Mécanique - Spécialité Acoustique - Parcours ATIAM

Exercice 1 ✎ Vibrations d'une corde ⋆

Une corde mono-filament (corde de guitare ou de piano) de longueur l est tendue entre deux points fixes.

1. Le déplacement transversal d'un point de la corde situé à l'abscisse x est noté $y(x,t)$. En ignorant tout phénomène dissipatif, donner l'équation différentielle vérifiée par $y(x,t)$.
2. Déterminer les modes propres (fréquences et déformées) de la corde en considérant qu'elle est appuyée à ses deux extrémités. Normer les modes propres obtenus.
3. Les fréquences propres de la corde sont-elles harmoniques ?
4. À partir des conclusions de la question 2, expliquer pourquoi les cordes du registre grave du piano sont filées.
5. Donner la forme générale des oscillations libres de la corde.
6. Au point d'abscisse $x = \alpha l$, la corde est pincée et tendue puis lâchée à l'instant t=0. Déterminer $y(x,t)$. Calculer l'amplitude de chacun des harmoniques.
7. Si $\alpha = m/n$ avec m et n entiers, quelle est l'amplitude des harmoniques n, $2n$, $3n$, ... ? Ce phénomène est appelé réjection lié au point de pincement. Donner une explication physique.
8. Le timbre de la guitare change quand on déplace le point d'attaque. Pourquoi ?
9. L'étouffoir d'un piano ne permet pas d'amortir tous les harmoniques. Donner la caractéristique des harmoniques qui ne sont pas amortis ? Pourquoi est-il judicieux de placer l'étouffoir à la même abscisse que le marteau ?
10. La corde possède un coefficient d'amortissement η. Écrire l'équation différentielle vérifiée par $y(x,t)$. Que devient la réponse de la corde pincée calculée au 6 en présence de phénomène dissipatif ?

Exercice 2 ✎ Corde frappée ⋆⋆⋆

On s'intéresse ici à une corde souple de longueur l tendue entre deux points fixes régit par l'équation suivante :

$$\rho S \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - T \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) \tag{1}$$

où $y(x,t)$ est son déplacement transversal, ρ sa masse volumique, S sa section et T sa tension. On note $\Phi_n(x) = \sin k_n x$ les déformées modales de la corde au mode n associées à une pulsation propre ω_n.

On écrira donc le déplacement de la corde comme une combinaison linéaire de ses déformées modales comme suit :

$$y(x,t) = \sum_n \Phi_n(x) q_n(t)$$

où les $q_n(t)$ sont les coefficients d'amplitude modal.

1. À partir de l'équation 1, déterminez l'équation différentielle vérifiée par les amplitudes modales $q_n(t)$.
2. En passant dans le domaine de Laplace, déduisez-en les amplitudes modales $q_n(t)$ en fonction des coefficients d'amplitude modal initiaux $q_n(0)$ et $\dot{q}_n(0)$ et de la force d'excitation $f(x,t)$.
3. Donnez la réponse impulsionnelle du mode n de la corde.
4. En Considérant la force d'excitation $f(x,t) = T(x_0)\delta(t-t_0)\delta(x-x_0)$, établissez la fonction de Green pour l'équation de la corde. On considérera des conditions initiales nulles en déplacement et vitesse.
5. Considérons un marteau ou un plectre exerçant un effort réparti sur la corde définit par :

$$f(x,t) = B\delta(t)g(x) \quad \text{avec} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_0 - a \leq x \leq x_0 + a \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} .$$

   Donnez l'expression du déplacement de la corde. Comparez avec une excitation ponctuelle.
6. On s'intéresse maintenant à une durée finie d'interaction entre la corde et le plectre ou le marteau. La force considérée est maintenant ponctuelle de la forme :

$$f(x,t) = C\delta(x-x_0)h(t) \quad \text{avec} \quad h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 2\tau \\ 0 & \text{si} \quad t > 2\tau \end{cases} .$$

   Donnez l'expression du déplacement de la corde. Comparez avec la question précédente.