

ci-dessous est de portée plus générale.

On s'intéresse au cas d'une corde homogène avec deux extrémités fixes, qui obéit donc aux équations bien connues :

$$\begin{cases} T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 & \text{pour } x \neq x_0, \\ y(0, t) = y(L, t) = 0. \end{cases} \quad (5.68)$$

Conformément au schéma de la figure 5.2, on introduit un amortisseur de résistance R en $x = x_0$. En ce point, la solution doit donc en outre satisfaire la relation de discontinuité :

$$T \left[\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x_0+} - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x_0-} \right] = R \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=x_0}. \quad (5.69)$$

On cherche les vibrations libres sous la forme $y(x, t) = Y(x) \exp(j\omega t)$ où Y et ω sont complexes. L'équation de dispersion donne alors le nombre d'onde complexe $k = \omega/c$. La discontinuité en $x = x_0$ oblige à rechercher les modes complexes sous la forme :

$$Y_n(x) = \begin{cases} Y_n(x_0) \frac{\sin k_n x}{\sin k_n x_0} & \text{pour } 0 \leq x \leq x_0, \\ Y_n(x_0) \frac{\sin k_n (L - x)}{\sin k_n (L - x_0)} & \text{pour } x_0 \leq x \leq L, \end{cases} \quad (5.70)$$

où les k_n sont obtenus par la condition de discontinuité (5.69) :

$$\cot k_n x_0 + \cot k_n (L - x_0) = j \frac{R}{Zc}. \quad (5.71)$$

En reprenant les calculs généraux développés au début de ce paragraphe, on trouve que la masse modale est égale à :

$$m_n = \frac{1}{2} \rho S Y_n(x_0)^2 \left\{ \frac{x_0}{\sin^2 k_n x_0} + \frac{L - x_0}{\sin^2 k_n (L - x_0)} \right\}. \quad (5.72)$$

Finalement en régime forcé avec, par exemple, une force d'amplitude F appliquée en $x = x_1$ pour $t \geq 0$, on obtient le déplacement généralisé :

$$q_n(t) = -\frac{F Y_n(x_1)}{2 \lambda_n^2 m_n} [1 - e^{j c k_n t}], \quad (5.73)$$

La connaissance des $Y_n(x)$ et des $q_n(t)$ permet, par (5.63) de remonter à la solution $y(x, t)$.

2. Mécanismes d'amortissement dans les matériaux solides

2.1. Introduction

Les matériaux solides sont le siège d'un grand nombre de mécanismes dissipatifs, ce qui en rend l'étude et la modélisation délicates. D'une manière générale, tout processus irréversible dans le matériau dissipe de l'énergie. Prenons l'exemple illustré par la figure 5.5 ci-dessous :

- (a) Si nous décrivons une droite dans le plan contrainte-déformation, par exemple lors d'un essai de traction sur un matériau *élastique*, et que nous revenons au bout du compte à l'état initial, alors le processus est réversible et il n'y a pas d'énergie dissipée.

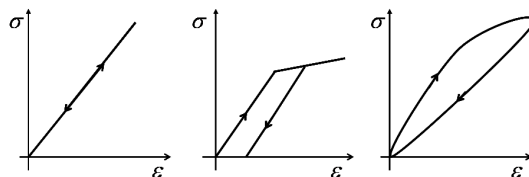


Figure 5.5. Processus réversibles et irréversibles. (a) Comportement élastique non dissipatif. (b) Comportement anélastique. (c) Comportement viscoélastique linéaire.

- (b) Si nous effectuons à présent le même essai sur une fibre de verre, par exemple, nous obtiendrons une courbe telle que de l'énergie sera dissipée à chaque cycle sous forme de chaleur. Cette dissipation est due à une réorganisation interne du solide que ne repasse pas par les mêmes états d'équilibre. le comportement est *anélastique*.
- (c) Certains matériaux sont réversibles, à condition de rester dans le domaine linéaire, mais sont sensibles à la vitesse de la déformation. On parle alors de matériaux *viscoélastiques*. C'est le cas des bois et des polymères qui sont largement utilisés en acoustique musicale. L'amortissement viscoélastique dépend aussi fortement de la température.

Pour les métaux, qui sont conducteurs de la chaleur, il est nécessaire de prendre aussi en compte le couplage entre les ondes élastiques et l'équation de diffusion de la chaleur. Chacun a pu faire l'expérience que, lorsque l'on plie un fil ou une barrette de métal, il se produit un échauffement, principalement dans la zone de déformation maximale. Ce mécanisme est à la base des pertes *thermoélastiques* qui se produisent dans les cordes métalliques et les structures utilisées en percussion (lames, plaques, coques). Les métaux sont également sujets à des dislocations, c'est-à-dire à des mouvements de lignes de défauts qui sont entravés par la présence d'impuretés dans la maille cristalline. Ces mouvements introduisent des pertes dont l'amplitude et le spectre dépendent des traitements métallurgiques qu'a subi le métal. Sur ce sujet, on peut lire avec profit le quatrième chapitre du livre de Valette, qui expose notamment des résultats importants concernant les pertes dans les cordes de clavecin [420].

Dans ce qui suit, nous accordons une importance privilégiée à la description des amortissements thermoélastiques et viscoélastiques, qui constituent les mécanismes dissipatifs prépondérants dans les matériaux utilisés pour la fabrication des instruments de musique. Nous disons également quelques mots sur les amortissements "hystérétiques" dont l'usage est assez répandu en dynamique des structures mais qu'il convient de manier avec précaution. Nous exposons l'amortissement par viscosité pour une corde vibrante dans l'air, renvoyant le lecteur au livre de Valette pour plus de précisions [420]. Pour les barres, les plaques et les coques, ces effets de viscosité sont le plus souvent négligeables devant les autres causes d'amortissement. Enfin, la question de l'amortissement par rayonnement acoustique sera examinée dans la quatrième partie de cet ouvrage.

2.2. Amortissement des cordes par la viscosité de l'air

Le modèle de référence pour ce qui concerne les pertes par viscosité d'une corde vibrant dans l'air date de 1851 et est dû à Stokes [398]. Celui-ci a montré que la résistance mécanique r_m par unité de longueur d'un cylindre de diamètre d oscillant à fréquence f dans un fluide tel que l'air de *coefficient de viscosité* η et

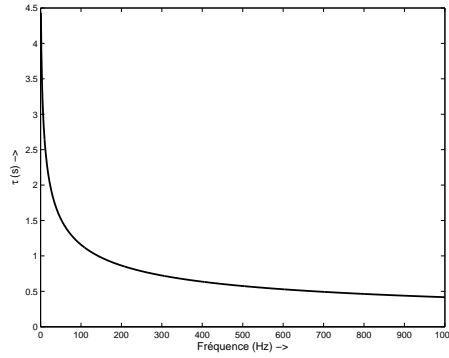


Figure 5.6. Constante de temps d'amortissement par viscosité d'une corde en Nylon en fonction de la fréquence. Valeurs numériques : $\rho_s = 10^3 \text{ kg/m}^3$; $\rho = 1,29 \text{ kg/m}^3$; $r = 0,5 \text{ mm}$.

de densité ρ est égal à :

$$r_m = \pi^2 \rho f \frac{d^2}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{M} + \frac{1}{2M^2} \right) \quad \text{avec} \quad M = \frac{d}{4} \sqrt{\frac{2\pi f}{\mu_a}}, \quad (5.74)$$

où $\mu_a = \eta/\rho$ est la *viscosité cinématique* du fluide. Pour l'air on a $\eta = 1,832 \cdot 10^{-5} \text{ kg/ms}$ et $\mu_a = 1,52 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. Pour les cordes d'instruments usuels, dans leur tessiture moyenne, le coefficient sans dimension M est de l'ordre de l'unité.

La puissance \mathcal{P}_v dissipée par viscosité est obtenue par sommation sur toute la longueur de la corde du produit des forces de viscosité élémentaires $df = -r_m v dx$ par v , la vitesse transversale de la corde. Les pertes par viscosité se traduisent par une diminution de l'énergie cinétique. Au total, on obtient :

$$\mathcal{P}_v = \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = -r_m \int_L v^2 dx. \quad (5.75)$$

Soit ρ_s la masse volumique de la corde, son énergie cinétique s'écrit $\mathcal{E}_c = \frac{\rho_s S}{2} \int_L v^2 dx$.

L'équation (5.75) se met donc sous la forme :

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = -\frac{\mathcal{E}_c}{\tau_e} \quad \text{avec} \quad \tau_e = \frac{\rho_s}{4\pi f \rho} \left(\frac{2M^2}{2\sqrt{2}M + 1} \right), \quad (5.76)$$

où τ_e est la constante de temps de décroissance de l'énergie cinétique. Celle-ci étant proportionnelle au carré de l'amplitude, on trouve finalement que la constante de temps τ de l'amplitude du mouvement de la corde dû à la viscosité est égal à :

$$\tau = 2\tau_e = \frac{\rho_s}{2\pi f \rho} \left(\frac{2M^2}{2\sqrt{2}M + 1} \right). \quad (5.77)$$

L'expression (5.77) montre que la constante de temps de viscosité décroît sensiblement en $1/\sqrt{f}$ dès que $f \gg \mu_a/4\pi r^2$, soit $f \gg 5 \text{ Hz}$ environ avec les données numériques de l'exemple choisi sur la figure (5.6). Les pertes par viscosité affectent donc essentiellement les fréquences élevées. On réduit les pertes par viscosité en utilisant des matériaux plus denses. On vérifie également que τ augmente (donc que les pertes diminuent) avec le rayon r .

2.3. Thermoélasticité dans les plaques orthotropes

L'amortissement thermoélastique est susceptible d'affecter les vibrations de solides possédant une conductivité thermique notable, comme les objets métalliques. Ce

type d'amortissement est convenablement modélisé à partir des équations couplées de la dynamique vibratoire et de la diffusion de la chaleur [52], [461]. Dans ce paragraphe, nous montrons qu'il est possible, moyennant certaines approximations, de rendre compte de cet amortissement simplement en modifiant les constantes de rigidité qui deviennent, dès lors, complexes. L'exemple qui suit est traité dans le cas général des plaques orthotropes. Les amortissements thermoélastiques pour les plaques isotropes et les barres s'en déduisent alors comme des cas particuliers. Le cas de l'amortissement thermoélastique dans les barres précontraintes (ou cordes raides) a été traité dans le domaine fréquentiel par Valette [420].

Les variation de température θ sont supposées suffisamment faibles pour que l'on puisse linéariser la loi de comportement thermoélastique qui relie entre elles les contraintes σ_{ij} et les déformations $W_{,ij}$ où les symboles $,ij$ désignent ici les dérivées partielles du déplacement transversal W en fonction des coordonnées. Le symbole s ici désigne la variable de Laplace. En coordonnées cartésiennes, les trois composantes des contraintes dans la plaque s'écrivent [91] :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -12z \left(D_1 W_{,xx} + \frac{D_2}{2} W_{,yy} \right) - \phi_x \theta, \\ \sigma_{yy} &= -12z \left(D_3 W_{,yy} + \frac{D_2}{2} W_{,xx} \right) - \phi_y \theta, \\ \sigma_{xy} &= -6z D_4 W_{,xy},\end{aligned}\tag{5.78}$$

où ϕ_x et ϕ_y sont des coefficients thermiques caractéristiques du matériau. Pour le cas particulier d'un matériau isotrope, nous avons $\phi_x = \phi_y = \phi$ et ce coefficient est alors relié au coefficient de dilatation thermique α par la relation [371] :

$$\phi = \alpha \frac{E}{1 - 2\nu} .\tag{5.79}$$

Le système (5.78) est complété par l'équation de diffusion de la chaleur, où l'on fait l'hypothèse que θ ne dépend que de la coordonnée z qui est orientée selon l'épaisseur de la plaque (voir la Figure 5.7) :

$$\kappa \theta_{,zz} - \rho C s \theta = -z T_0 s (\phi_x W_{,xx} + \phi_y W_{,yy}),\tag{5.80}$$

Dans (5.80), T_0 est la température absolue, C est la chaleur spécifique à défor-

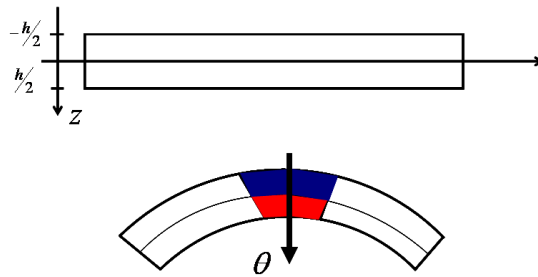


Figure 5.7. Plaque thermoélastique. La température θ croît des fibres dilatées vers les fibres comprimées.

mation constante et κ est la conductivité thermique. Suivant la méthode utilisée notamment par Cremer [110], on suppose que $\theta(z)$ est de la forme :

$$\theta(z) = \theta_0 \sin \frac{\pi z}{h} \quad \text{pour} \quad z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right],\tag{5.81}$$

Cette dernière expression tient compte du fait qu'il n'y a que très peu d'échange thermique entre la plaque et l'air. En intégrant $z\sigma_{ij}$ le long de l'épaisseur h de la plaque on obtient les expressions qui relient entre eux les moments de flexion et

de torsion M_{ij} et les dérivées spatiales du déplacement transverse W . Tous calculs faits, on montre finalement que les facteurs de rigidité s'écrivent sous la forme [91] :

$$\begin{aligned}\tilde{D}_1(s) &= D_1 + \phi_x^2 \frac{s\zeta}{1 + \tau s}, \\ \tilde{D}_2(s) &= D_2 + 2\phi_x\phi_y \frac{s\zeta}{1 + \tau s}, \\ \tilde{D}_3(s) &= D_3 + \phi_y^2 \frac{s\zeta}{1 + \tau s}, \\ \tilde{D}_4(s) &= D_4.\end{aligned}\tag{5.82}$$

La constante de temps de relaxation thermique τ et le paramètre ζ sont définis comme suit :

$$\tau = \frac{\rho C h^2}{\kappa \pi^2} \quad \text{et} \quad \zeta = \frac{8 T_0 h^2}{\kappa \pi^6}\tag{5.83}$$

Les pertes thermoélastiques sont proportionnelles à la partie imaginaire des constantes de rigidités $\tilde{D}_i(j\omega)$. On montre à partir de (5.82) que ces pertes croissent avec la fréquence jusqu'à une valeur asymptotique proportionnelle à ζ/τ^2 , c'est-à-dire inversement proportionnelle au carré de l'épaisseur h de la plaque. On arrive ainsi au résultat important que les pertes thermoélastiques augmentent proportionnellement à $1/h^2$.

On note également que D_4 est réel. En conséquence les modes de plaques impliquant une déformation de type torsion, qui dépendent fortement de ce facteur de rigidité, sont beaucoup moins affectés par l'amortissement thermoélastique que les autres modes. En d'autres termes, les amortissements thermoélastiques dépendent des déformées modales si bien que, d'un mode à l'autre, les courbes représentant l'évolution des facteurs d'amortissement modaux en s^{-1} en fonction de la fréquence peuvent présenter une allure erratique (voir figure 5.8). Cette apparence n'est pas due à des erreurs de mesure, mais bien au phénomène de thermoélasticité, comme cela est confirmé par l'expérience. Il est judicieux d'écrire les rigidités complexes

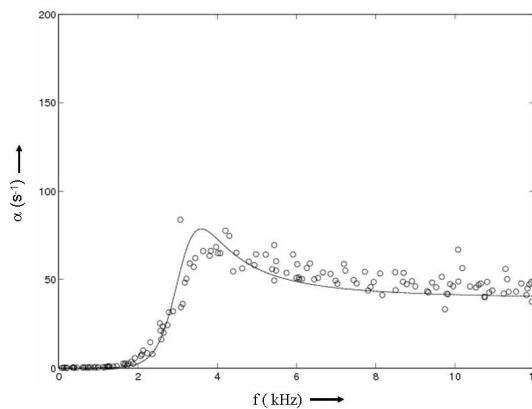


Figure 5.8. Facteurs d'amortissement (en s^{-1}) d'une plaque d'aluminium rectangulaire, en fonction de la fréquence (en kHz). Comparaison théorie (trait plein) - expérience (o). D'après [91].

sous la forme :

$$\begin{aligned}\tilde{D}_i(s) &= D_i \left[1 + \tilde{d}_{it}(s) \right] = D_i \left[1 + \frac{s R_i}{s + c_1/h^2} \right], \quad i = [1, 2, 3] \\ \tilde{D}_4(s) &= D_4,\end{aligned}\tag{5.84}$$

	Bois	Acier	Verre	Aluminium	Nylon
C (J /Kg °C)	2000	460-625	700	900	1500
α ($\times 10^{-6}$ °K $^{-1}$)	4	14	6-10	22	10^3
κ (W/m °K)	0,04-0,4	11-46	1,1	105-250	0,1-0,3

Tableau 5.1. Constantes thermiques pour quelques matériaux usuels.

de manière à faire ressortir la dépendance vis-à-vis de l'épaisseur. Etant donné les ordres de grandeur des constantes thermiques pour les matériaux usuels (voir le Tableau 5.1), il est légitime de considérer la norme du terme $\tilde{d}_{it}(s)$ comme petite devant l'unité, de telle sorte que celui-ci apparaisse comme un terme de perturbation. Par ailleurs, toujours dans les expressions (5.84), les coefficients R_i sont définis par :

$$R_1 = \frac{8T_0\phi_x^2}{\pi^4 D_1 \rho C} ; R_2 = \frac{16T_0\phi_x\phi_y}{\pi^4 D_3 \rho C} ; R_3 = \frac{8T_0\phi_y^2}{\pi^4 D_3 \rho C} . \quad (5.85)$$

L'amortissement thermoélastique n'est pas le seul mécanisme de dissipation présent dans les structures vibrantes utilisées en acoustique musicale. Pour les plaques et les coques non métalliques l'amortissement viscoélastique est souvent prépondérant. Il faut aussi considérer l'amortissement par rayonnement. Toutefois, l'amortissement thermoélastique reste la première cause de dissipation en basses fréquences pour les matériaux métalliques.

2.4. Viscoélasticité

Les modèles viscoélastiques utilisés en vibrations reposent sur une approche macroscopique des phénomènes de dissipation. On cherche à établir des lois, le plus souvent déduites de l'expérience, permettant de relier de manière générale les contraintes, les déformations, le temps et la température, c'est-à-dire de la forme suivante [95] :

$$\mathcal{F}(D_1(\sigma), D_2(\varepsilon), t, T) = 0 \quad (5.86)$$

où D_1 et D_2 sont des opérateurs différentiels ou intégraux que nous supposons linéaires dans la suite.

2.4.1. Expériences préliminaires. Etude d'une corde viscoélastique

Tout instrumentiste à cordes a pu un jour ou l'autre expérimenter le fait qu'une corde nouvellement tendue sur l'instrument ne "garde" pas sa tension, et qu'il est nécessaire d'attendre plusieurs jours avant que la hauteur du son désirée reste stable. Cet effet de *relaxation de contrainte* est dû au phénomène de *viscoélasticité* qui est la principale cause de dissipation thermique dans les matériaux non conducteurs de la chaleur (comme le nylon et les boyaux dont sont faits la plupart des cordes). Une manière de modéliser ce phénomène est de considérer que si l'on soumet brusquement la corde à une variation relative de longueur (ou *déformation*) $\varepsilon = \frac{L - L_o}{L_o}$, où L_o est la longueur initiale de la corde, alors la tension par unité de section droite S de la corde (ou *contrainte* axiale $\sigma = \frac{T}{S}$) obéit à l'équation ([125]) :

$$\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau} = E\dot{\varepsilon}, \quad (5.87)$$

où E est le module d'Young du matériau constituant la corde et τ la constante de relaxation. Si l'on impose, en effectuant un tour de cheville, une déformation $\varepsilon(t) = \varepsilon_1 H(t)$ où $H(t)$ est la fonction de Heaviside, alors la contrainte axiale

décroît exponentiellement avec le temps selon la loi $\sigma(t) = E\varepsilon_1 e^{-\frac{t}{\tau}}$. Par conséquent, la tension de la corde diminue au cours du temps, ce qui est conforme à l'expérience (voir la Figure 5.9). Lorsque le musicien joue, la corde est soumise

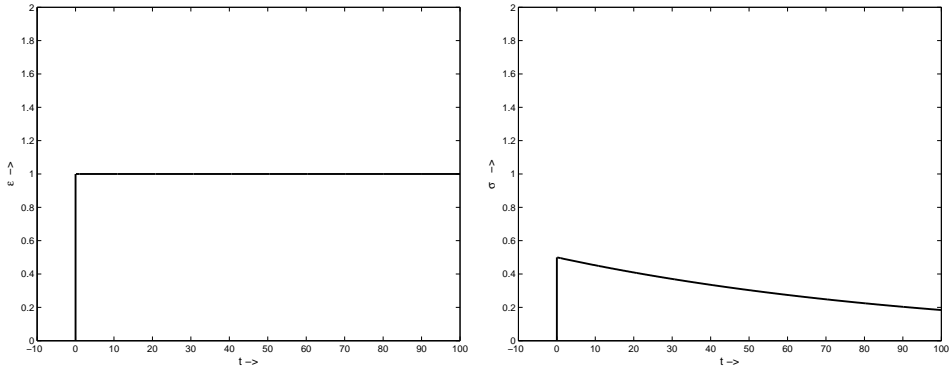


Figure 5.9. Relaxation d'une corde tendue consécutive à un échelon de déformation (unités arbitraires).

en permanence à des fluctuations de tension, dues aux vibrations de flexion, si bien que le phénomène de viscoélasticité décrit précédemment existe toujours. Ici, la modélisation convenable, duale de la précédente, consiste à considérer que les fluctuations imposées de contraintes induisent des déformations conformément à l'équation :

$$\sigma = E(\varepsilon + \tau \dot{\varepsilon}) . \quad (5.88)$$

En introduisant (5.88) dans l'équation des cordes vibrantes (3.47), on obtient l'équation des cordes amorties :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \tau \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t} . \quad (5.89)$$

Considérons la propagation d'une onde harmonique $y(x, t) = e^{j(kx - \omega t)}$ sur la corde amortie, supposée pour l'instant de longueur infinie (ce qui revient à étudier la propagation des ondes avant que celles-ci n'atteignent les extrémités de la corde). L'équation de dispersion devient :

$$\omega^2 = c^2(1 - j\omega\tau)k^2 . \quad (5.90)$$

Pour un nombre d'onde imposé k , et en considérant que $\tau \ll \frac{2}{kc}$, on trouve que le déplacement s'écrit :

$$y(x, t) = e^{-\frac{\tau k^2 c^2 t}{2}} e^{jk(x \pm ct)} . \quad (5.91)$$

On constate que les grands nombres d'ondes sont atténués plus rapidement, ce qui engendre une déformation de l'onde au cours de sa propagation.

Afin d'exploiter les propriétés d'orthogonalité de la base des modes propres obtenue dans le cas de la corde idéale de dimension finie cette fois (voir chapitre 3), nous pouvons continuer à chercher la solution de l'équation (5.89) sous la forme d'une projection sur cette base. En ré-appliquant la technique utilisée au paragraphe (2.2) on aboutit à l'équation des déplacements généralisés :

$$\ddot{q}_n + \tau \omega_n^2 \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = 0 . \quad (5.92)$$

A condition d'avoir $\tau \ll \frac{2}{\omega_n}$, condition habituellement remplie pour les cordes d'instruments de musique dans leur tessiture usuelle, avec une condition initiale de vitesse nulle, on obtient :

$$q_n(t) \approx q_n(0)e^{-\frac{\tau\omega_n^2 t}{2}} \cos \omega_n t . \quad (5.93)$$

Dans le domaine temporel, l'amortissement viscoélastique introduit dans (5.89) a donc pour conséquence une constante de temps proportionnelle au carré de la fréquence. Ce petit modèle simple rend bien compte des phénomènes observés sur les cordes d'instruments de musique en Nylon.

Remarque : le terme d'amortissement viscoélastique introduit ici dans l'équation de cordes est tel que les équations différentielles gouvernant les déplacements généralisés restent découplées. Il s'agit d'un cas particulier *d'amortissement proportionnel* vu au paragraphe 1.1.2 où la matrice d'amortissement s'écrit $\mathbb{C} = \tau \mathbb{K}$.

2.4.2. Modèles viscoélastiques généraux

Les expressions (5.87) et (5.88) représentent deux cas limites d'une formulation différentielle générale de la viscoélasticité qui relie entre elles les contraintes, les déformations, ainsi que leurs dérivées temporelles. Ces deux exemples suffisent à interpréter, en première approximation, plusieurs phénomènes observés en acoustique musicale. La généralisation la plus simple est donnée par le modèle linéaire dit "viscoélastique standard" (ou de Zener) :

$$\sigma + \tau_1 \dot{\sigma} = E (\varepsilon + \tau_2 \dot{\varepsilon}) \quad (5.94)$$

qui comprend 3 paramètres. Si l'on étudie l'équation (5.94) en régime harmonique, c'est-à-dire en recherchant des solutions de la forme $\sigma = \sigma_0 e^{j\omega t}$ et $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{j\omega t}$ on obtient un module d'Young complexe de la forme :

$$E(\omega) = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E'(\omega) + jE''(\omega) = E \left[\frac{1 + \omega^2 \tau_1 \tau_2}{1 + \omega^2 \tau_1^2} + j \frac{\omega(\tau_2 - \tau_1)}{1 + \omega^2 \tau_1^2} \right] . \quad (5.95)$$

Les variations des parties réelle E' et imaginaire E'' du module d'Young avec la fréquence sont représentées sur la figure 5.10. Même s'il est conceptuellement et qualitativement intéressant, l'inconvénient principal de ce modèle est que les variations du module avec la fréquence habituellement observées expérimentalement sont moins prononcées. Par conséquent, il est difficile d'ajuster avec précision les constantes E , τ_1 et τ_2 du modèle. Conscients de ces limitations, plusieurs auteurs ont proposé d'étendre le modèle standard à une formulation différentielle généralisée de la forme :

$$\sigma + \sum_{i=1}^n a_i \frac{d^i \sigma}{dt^i} = E \left(\varepsilon + \sum_{i=1}^n b_i \frac{d^i \varepsilon}{dt^i} \right) . \quad (5.96)$$

Cette formulation permet de mieux rendre compte des phénomènes observés, au prix d'un plus grand nombre de paramètres à ajuster, ce qui implique de disposer d'une plus grande quantité de points de mesure. Dans le domaine fréquentiel, cette formulation s'écrit :

$$E(\omega) = E \frac{1 + \sum_{i=1}^n a_i (j\omega)^i}{1 + \sum_{i=1}^n b_i (j\omega)^i} . \quad (5.97)$$

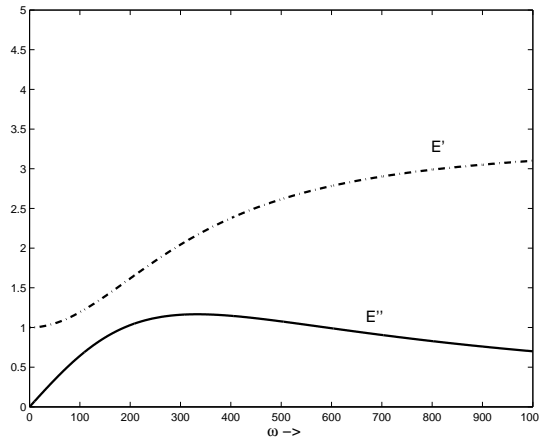


Figure 5.10. Modèle linéaire standard (ou de Zener). Exemple de variation de la partie réelle E' (traits et points) et de la partie imaginaire E'' (trait plein) du module d'Young complexe en fonction de la pulsation ω . Les unités en ordonnées sont arbitraires.

Dans (5.97), n est entier, ce qui constitue une limitation lorsqu'il s'agit de reproduire des variations de module de pente faible en fonction de la fréquence. Pour cette raison, des développements récents utilisent des valeurs de n fractionnaires [289].

2.4.3. Formulation intégrale

Le paragraphe précédent a montré les limitations des représentations de la viscoélasticité linéaire sous la forme de sommes différentielles discrètes. On préfère parfois utiliser une formulation intégrale continue telle que [95] :

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t - \tau) d\varepsilon(\tau), \quad (5.98)$$

où $E(t - \tau)$ est une fonction de relaxation. Physiquement, cette formulation, qui a la forme d'un produit de convolution, signifie que la contrainte dépend de toute l'histoire antérieure des déformations du matériau. En posant $E(t) = E_0 + E_r(t)$, et en admettant que $E_r(t)$ tend vers zéro quand t tend vers ∞ , on trouve une formulation équivalente :

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + \int_{-\infty}^t E_r(t - \tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (5.99)$$

La formulation ainsi obtenue se prête bien à une analyse par Fourier ou Laplace.

2.5. Amortissement hystérétique

L'amortissement hystérétique se rencontre fréquemment en dynamique des structures, c'est pourquoi il est nécessaire d'en dire quelques mots ici. En définissant le *facteur de pertes* comme le rapport entre l'énergie perdue par le système durant une période d'oscillation et le maximum de l'énergie potentielle [107], alors on montre que l'amortissement hystérétique représente un facteur de pertes indépendant de la fréquence. L'équation du mouvement d'un oscillateur à un seul degré de liberté avec amortissement hystérétique s'écrit, dans le domaine fréquentiel :

$$[-M\omega^2 + K(1 + j\eta \operatorname{sgn}(\omega))]\Xi(\omega) = F(\omega). \quad (5.100)$$