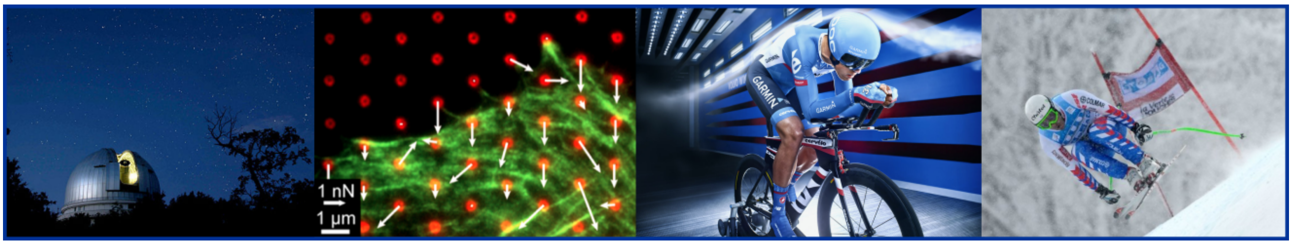
Année 2021-2022

Mécanique - Physique 2

LU1MEPY2

Polycopié de cours - Partie 1

- version du 17 janvier 2022 -



Rédaction coordonnée par Romain Bernard et Jean-Loïc Le Carrou

Ce document est le produit des groupes de travail auxquels de nombreux enseignants-chercheurs des UFR de Physique et d'Ingénierie ont participé, et plus particulièrement des rédacteurs : Jérôme Beugnon, Romain Bernard, Bertrand Laforge, Jean-Loïc Le Carrou, Pauline Rovillain, Richard Monier, Alice Sinatra, Angela Vincenti, Régis Wunenburger.

Table des matières

Chapitre 1

Cinématique

Objectifs d'apprentissage

- Définir un point matériel
- Définir et calculer la position du centre de masse d'un système
- Repérer un point dans l'espace dans une base cartésienne, polaire et cylindrique
- Définir le vecteur position et les vecteurs vitesse et accélération en fonction du vecteur position
- Définir le déplacement infinitésimal
- Définir les vecteurs vitesse moyenne et vitesse instantanée ; les estimer graphiquement et les représenter à partir de mesures obtenues à période d'échantillonnage constante
- Dériver par rapport au temps les vecteurs de la base polaire
- Établir les expressions de la vitesse et de l'accélération en coordonnées polaires et cylindriques
- Expliquer le rôle de l'accélération tangentielle et normale d'un point matériel : repère de Frenet
- Définir mathématiquement les vecteurs vitesse et accélération pour un mouvement circulaire
- Définir le vecteur vitesse angulaire d'un point animé d'un mouvement circulaire
- Définir le mouvement circulaire uniforme et définir la période, la fréquence et la relation qui relie ces grandeurs
- Écrire et manipuler les lois de composition de vitesse et d'accélération pour deux référentiels en translation
- Exploiter la position, la vitesse, l'accélération d'un point matériel pour trouver les équations horaires du mouvement en fonction des conditions initiales et établir l'équation de la trajectoire.

1.1 Introduction

1.1.1 Qu'est-ce que la cinématique ?

La **cinématique**, que nous abordons dans ce premier chapitre, étudie le mouvement d'un système indépendamment des causes qui l'ont produit. Elle consiste à exprimer et à manipuler les équations donnant la position, la vitesse ou l'accélération d'un système en fonction du temps ou, de façon équivalente, à établir l'équation de la trajectoire de ce système. La dynamique, abordée dans le chapitre suivant, étudie l'origine physique du mouvement et permet d'établir ces équations du mouvement à partir des lois fondamentales de la mécanique.

Pour déterminer les équations associées au mouvement étudié il faut au préalable définir le système étudié, se donner un référentiel d'étude par rapport auquel le mouvement sera décrit et doter ce référentiel d'un système de coordonnées adapté au mouvement étudié. Ces trois points font l'objet des premières sections de chapitre. Nous décrirons ensuite le mouvement à l'aide des équations de la cinématique puis nous traiterons quelques exemples. La dernière section est consacrée à la transformation de ces équations lors d'un changement de référentiel.

1.1.2 Notion de solide indéformable, de centre de masse et de point matériel

Les objets dont on étudie le mouvement sont en général des systèmes complexes qui possèdent une certaine extension spatiale et peuvent être plus ou moins déformables. L'étude générale du mouvement d'un système peut donc s'avérer compliquée. On se restreint dans ce cours à des solides indéformables et, dans la majeure partie des cas, à la simple notion de point matériel.

Solide et point matériel

Nous définissons comme solide indéformable (ou rigide) un système dont les points restent à une distance constante entre eux. Pour repérer la position d'un solide on a besoin de la position du centre de masse plus trois angles qui donnent l'orientation du solide par rapport à un référentiel donné (voir figure 1.1). Un rappel de la définition du centre de masse est donné à dans le paragraphe suivant.

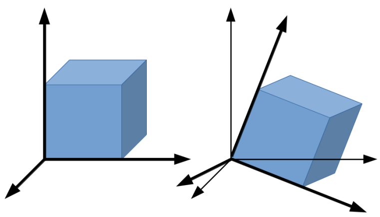


FIGURE 1.1 – Orientation d'un solide

Point matériel

On appelle **point matériel** un système dont on peut négliger l'extension lorsqu'on décrit son mouvement. Le point matériel a donc une masse mais pas d'extension, ni d'orientation. Contrairement au solide, il est repéré seulement par sa position, qui coïncide donc avec la position de son centre de masse.

Bien sûr, assimiler ou non un solide à un point matériel dépend du problème auquel on s'intéresse. Par exemple on peut assimiler la Terre à un point si l'on s'intéresse à son mouvement de révolution autour du Soleil, mais on ne peut pas le faire si l'on s'intéresse à sa rotation diurne (la rotation de la Terre autour de son axe en environ 24h). Nous montrerons dans le chapitre 2 que le centre de masse d'un système quelconque se comporte comme un point matériel soumis uniquement aux forces exercées par l'environnement extérieur au système.

Centre de masse d'un système

Nous rappelons ici la définition du centre de masse déjà abordée au premier semestre. D'abord dans le cas de deux points matériels, puis dans le cas général.

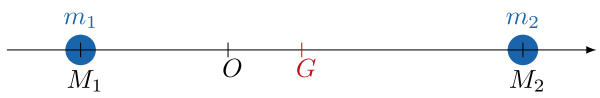


Figure 1.2 – Centre de masse G d'un système de deux masses m_1 et m_2.

Considérons un système composé de deux masses ponctuelles m_1 et m_2 localisées respectivement aux points M_1 et M_2 (voir figure 1.2). On appelle **centre de masse**, **centre d'inertie** ou **barycentre** du système formé par les deux masses le point G dont la position est donnée par

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OM}_1 + m_2\overrightarrow{OM}_2}{m_1 + m_2}. \tag{1.1}$$

On a aussi, de façon équivalente, $m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = \vec{0}$. En remarquant de plus que $\overrightarrow{GM_1} = \overrightarrow{GM_2} + \overrightarrow{M_2M_1}$ on obtient

$$\overrightarrow{M_1G} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\overrightarrow{M_1M_2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M_2G} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\overrightarrow{M_2M_1}. \tag{1.2}$$

On constate sur ces expressions que le centre de masse G se trouve sur le segment M_1M_2, et en particulier au milieu de ce segment dans le cas où les masses m_1 et m_2 sont identiques. Dans la limite d'une masse très supérieure à l'autre, G se confond approximativement avec la masse la plus grande.

Centre de masse d'un système composé de N points matériels

Considérons maintenant un système $\mathcal{S}$ composé de N points matériels M_i de masses m_i. On définit le centre de masse G comme la moyenne des positions pondérée par la distribution des masses :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} m_i\,\overrightarrow{OM}_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} m_i} \tag{1.3}$$

en posant $M = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} m_i$ la masse totale du système, on obtient :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\overrightarrow{OM}_i \tag{1.4}$$

1.2 Notion de référentiel

Dans la suite nous allons étudier le mouvement d'un point matériel. Pour cela, on a besoin d'un **référentiel** $\mathcal{R}$. En effet, il n'y a pas de mouvement absolu. Un mouvement est toujours relatif à une certaine référence. Définir un référentiel spatial consiste à définir un point origine et un système d'axes doté d'une unité de longueur par rapport auquel on va décrire le mouvement des objets. Cela revient à définir quel est le point de vue de l'observateur qui décrit le mouvement. Il faut aussi prendre un repère de temps où l'on fixe une origine de temps et une unité de temps.

Un même mouvement dans deux référentiels différents apparaît différent. On peut considérer par exemple une personne qui fait rebondir verticalement une balle dans un train animé d'une vitesse $\vec{v}$ par rapport au quai. Dans un référentiel attaché au train la balle rebondit verticalement, lorsque dans un référentiel attaché au quai la balle effectue entre les rebonds des trajectoires paraboliques avec une vitesse initiale longitudinale non nulle.

En général, on choisit un référentiel adapté au problème que l'on veut étudier, pour rendre l'étude la plus simple possible. Voici trois exemples importants schématisés sur la figure 1.3 :

- Le *référentiel héliocentrique*, où l'origine du repère spatial est choisie au centre du soleil et les axes sont orientés vers des astres lointains que l'on suppose fixes pendant la durée du mouvement, est adapté pour étudier le mouvement des planètes autour du soleil.
- Le *référentiel géocentrique*, où l'origine est choisie au centre de la Terre et les axes sont orientés vers des astres lointains que l'on suppose fixes pendant la durée du mouvement, est adapté pour étudier le mouvement d'un satellite qui orbite autour de la Terre.
- Le *référentiel du laboratoire* (ou *référentiel terrestre*), où l'origine et les axes suivent la Terre dans ses mouvements, est adapté pour étudier un mouvement qui a lieu pendant une durée brève par rapport à la rotation diurne de la Terre.

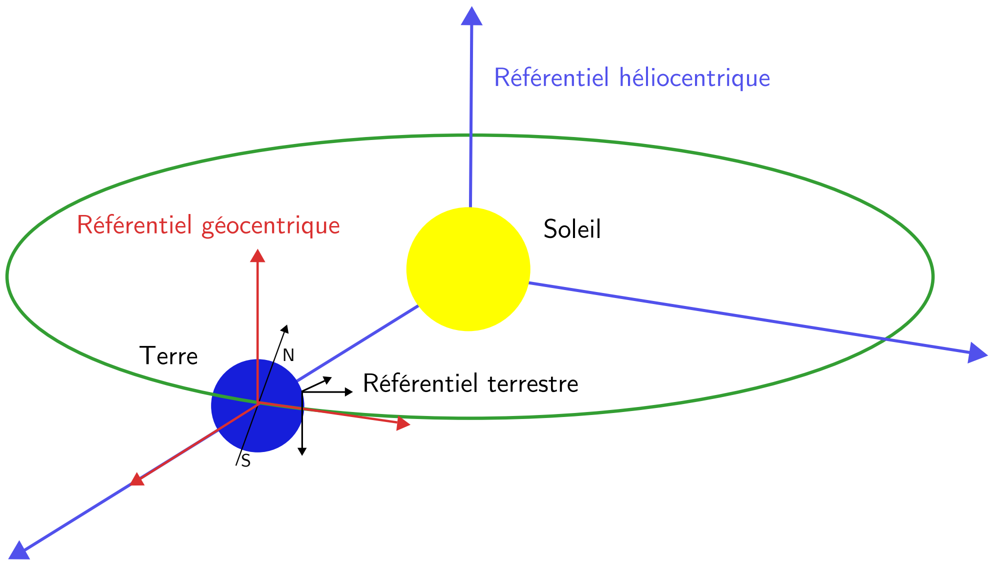


FIGURE 1.3 – Schéma représentant les axes de différents référentiels utilisés par exemple en mécanique céleste.

Complément : Universalité du temps en mécanique classique

Dans le cadre de la mécanique classique, le temps est supposé universel, c'est-à-dire que le temps s'écoule de la même façon pour tous les observateurs associés à des référentiels différents. Cette hypothèse n'est en fait exacte que dans la limite des vitesses faibles devant la vitesse de la lumière et n'est pas présente dans la théorie de la relativité restreinte.

1.3 Repérage d'un point

Après avoir défini le système, que nous assimilons dans la suite à un point matériel M, ainsi que le référentiel d'étude, il faut repérer la position du point M dans un système de coordonnées. On utilise fréquemment les coordonnées cartésiennes mais il s'avère utile, en fonction du mouvement étudié, de définir d'autres systèmes de coordonnées qui permettent de décrire le mouvement du système avec des équations plus simples que celles obtenues en coordonnées cartésiennes. Nous allons voir que c'est le cas notamment pour les mouvements de rotation. Cette section décrit successivement les systèmes de coordonnées utiles à une, deux puis trois dimensions d'espace.

1.3.1 Repérage d'un point sur une droite

Pour un problème où le mouvement est linéaire (ou rectiligne), on repère le point M sur une droite $\mathcal{D}$ (voir figure 1.4).

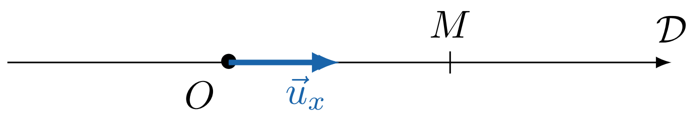


Figure 1.4 – Répérage d'un point M sur l'axe Ox.

On place un point origine O et un vecteur unitaire $\vec{u}_x$ sur $\mathcal{D}$. Le point M est repéré sur la droite orientée $(O, \vec{u}_x)$ par la valeur algébrique $\overline{OM} = x$ dite coordonnée de M et qui peut donc prendre des valeurs positives ou négatives. On nomme :

$$\begin{aligned} \overline{OM} &= x && \text{coordonnée de } M \\ \overrightarrow{OM} &= x\,\vec{u}_x && \text{vecteur position} \end{aligned}$$

1.3.2 Repérage d'un point dans le plan

Coordonnées cartésiennes (x, y)

Un choix commun pour repérer un point dans le plan est celui des **coordonnées cartésiennes**, représentées sur la figure 1.5. Le point M est alors repéré par deux coordonnées x et y, ce que l'on note $M(x, y)$. Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, que l'on écrit aussi $\vec{r}$ vérifie [1]

Position en coordonnées cartésiennes dans le plan

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Les deux vecteurs unitaires $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ sont orthogonaux et ils forment une base dans laquelle on peut exprimer chaque vecteur du plan. Les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sur la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ sont données par les projections orthogonales du vecteur $\vec{r}$ sur les axes Ox et Oy : $x = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}_x$ et $y = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}_y$.

1. On rappelle que lorsque l'on donne les coordonnées d'un vecteur sous la forme d'un vecteur colonne il faut a priori préciser la base dans laquelle ce vecteur colonne est exprimé. Cette précision est omise lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

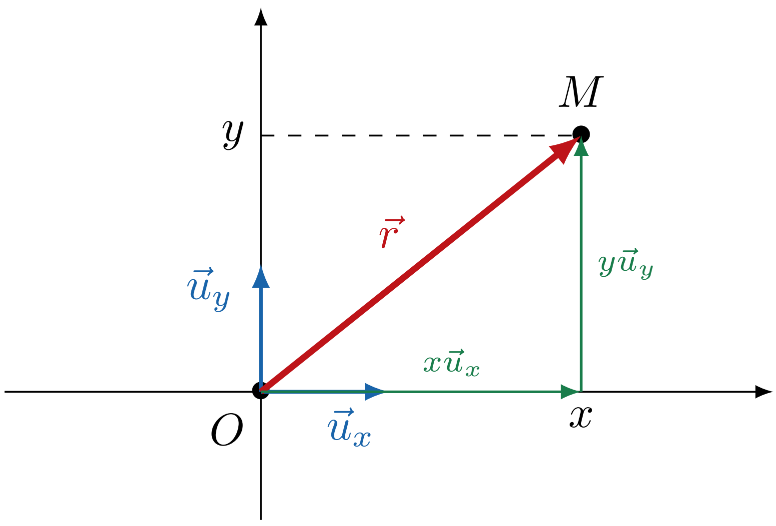


FIGURE 1.5 – Coordonnées cartésiennes dans le plan.

Coordonnées polaires (r, φ)

Dans le système de **coordonnées polaires**, on choisit de définir la position d'un point M par sa distance à l'origine, $r = ||\overrightarrow{OM}||$ et par l'angle φ (lettre grecque *phi*) entre $\overrightarrow{OM}$ et l'axe des abscisses (voir fig. 1.6).

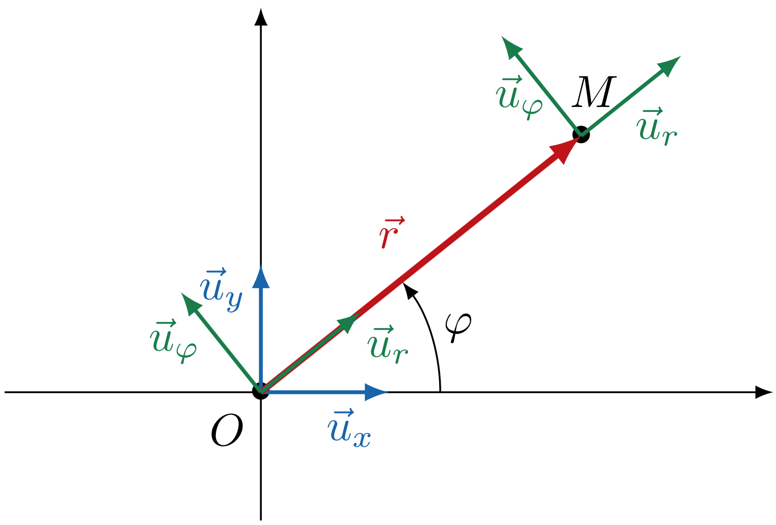


FIGURE 1.6 – Coordonnées polaires dans le plan.

La norme du vecteur position est bien sûr toujours positive : $r \geq 0$ et on définit usuellement l'angle φ dans l'intervalle $[0, 2\pi[$. L'angle φ est compté positivement dans le sens trigonométrique.

Dans le système de coordonnées polaires on utilise une **base mobile** $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi\}$ de vecteurs orthonormés attachée au point M.

Base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$

Le vecteur $\vec{u}_r$ est radial

$$\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{||\overrightarrow{OM}||} \tag{1.6}$$

Le vecteur $\vec{u}_\varphi$ est obtenu en faisant tourner $\vec{u}_r$ de $\frac{\pi}{2}$ en sens direct

Le terme base mobile permet d'insister sur une spécificité importante de la base polaire par rapport à la base cartésienne : **l'orientation des vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\varphi$ dépend du temps**. En effet, lorsque le point M se déplace en fonction du temps, l'orientation de ces vecteurs change, ce qui n'est pas le cas pour la base cartésienne. La norme des vecteurs de base reste bien entendu égale à 1. Dans toute la suite du cours, il faudra prendre en compte cette dépendance temporelle de la base polaire. Remarquons enfin que la base mobile est définie en tout point du plan sauf à l'origine O.

À partir de la définition de la base polaire, on obtient directement l'expression du vecteur position dans cette base :

Position en coordonnées polaires dans le plan

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

La notation sous forme d'un vecteur colonne correspond ici à l'expression du vecteur position dans la base polaire $\{\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi\}$.

Il peut paraître surprenant au premier abord que le vecteur position ne fasse apparaître explicitement que la coordonnée r et pas la coordonnée φ alors que la détermination de la position du point M requiert la connaissance de ces deux coordonnées. En fait, l'information sur φ est contenue dans le vecteur $\vec{u}_r$ dont l'angle avec l'axe des abscisses est φ.

De façon générale, tout vecteur du plan $\vec{w}$ peut être exprimé sur la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$

$$\vec{w} = w_r\vec{u}_r + w_\varphi\vec{u}_\varphi = \begin{pmatrix} w_r \\ w_\varphi \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

On appelle w_r la composante **radiale** et w_φ la composante **orthoradiale** du vecteur $\vec{w}$.

Lien entre les coordonnées polaires et cartésiennes

Il est utile de pouvoir passer de l'expression d'un vecteur dans la base polaire à son expression dans la base cartésienne et réciproquement. Pour ce faire, on s'appuie sur quelques relations géométriques obtenues à partir de la figure 1.7.

Dans le triangle rectangle OHM on a directement $x = r\cos\varphi$ et $y = r\sin\varphi$. Ainsi, connaissant les coordonnées polaires (r, φ), on obtient directement les coordonnées cartésiennes (x,y).

Toujours dans le triangle OHM, le théorème de Pythagore donne $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. D'autre part, on a $\tan\varphi = y/x$, ce qui permet (presque) d'obtenir les coordonnées polaires à partir des coordonnées cartésiennes.

On fera attention à ne pas écrire directement $\varphi = \arctan(y/x)$ sans plus de précaution car la fonction tan étant de période π, la fonction arctan prend des valeurs uniquement sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$. Ainsi, pour une valeur donnée de la tangente d'un angle, il y a dans un intervalle de longueur 2π deux angles possibles séparés de π qui auront la bonne valeur de la fonction tangente. Pour déterminer sans ambiguïté la valeur de l'angle, il faut donc connaître sa tangente et le signe

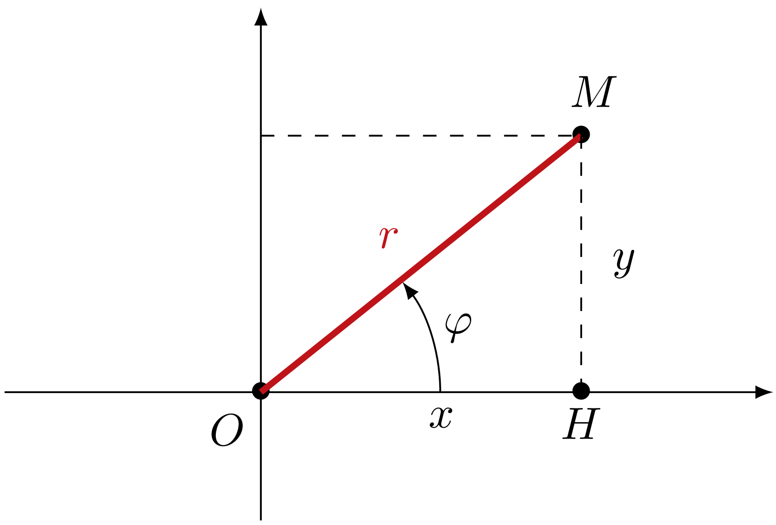


FIGURE 1.7 – Passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes.

d'une de ses projections, par exemple son cosinus. Ainsi, on a

$$\text{si} \quad \cos(\varphi) > 0 \quad \text{alors} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.9}$$

$$\text{si} \quad \cos(\varphi) < 0 \quad \text{alors} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi. \tag{1.10}$$

On peut ensuite se ramener à un angle dans l'intervalle de définition souhaité (par exemple $[0, 2\pi[$) en redéfinissant φ modulo 2π.

Enfin, on peut exprimer les vecteurs des bases polaires et cartésiennes les uns en fonction des autres. En s'aidant de la figure 1.6, il vient directement

$$\begin{cases} \vec{u}_r &= \cos\varphi\, \vec{u}_x + \sin\varphi\, \vec{u}_y \\ \vec{u}_\varphi &= -\sin\varphi\, \vec{u}_x + \cos\varphi\, \vec{u}_y \end{cases} \tag{1.11}$$

ou, de façon équivalente,

$$\begin{cases} \vec{u}_x &= \cos\varphi\, \vec{u}_r - \sin\varphi\, \vec{u}_\varphi \\ \vec{u}_y &= \sin\varphi\, \vec{u}_r + \cos\varphi\, \vec{u}_\varphi. \end{cases} \tag{1.12}$$

Exemple de repérage dans un plan

Terminons cette section par un exemple. On considère le point M de coordonnées cartésiennes $(-2, 2)$ (voir figure 1.8). La norme du vecteur position est donc > 0. Donc $\varphi = \pi/4 + \pi = 3\pi/4$. Réciproquement, on vérifie que si on se donne $r = 2\sqrt{2}$ et $\varphi = 3\pi/4$, alors $x = r\cos\varphi = 2\sqrt{2} \times -\frac{1}{\sqrt{2}} = -2$ et $y = r\sin\varphi = 2\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2$. Ces résultats se résument sous la forme de vecteurs colonnes exprimés dans chacune des bases :

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\{\vec{u}_x, \vec{u}_y\}} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}_{\{\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi\}} \tag{1.13}$$

1.3.3 Repérage d'un point dans l'espace

La généralisation des coordonnées cartésiennes est évidente à trois dimensions d'espace. Dans cette section, nous introduisons aussi les coordonnées cylindriques qui sont l'extension des coordonnées polaires et nous citons en complément l'existence des coordonnées sphériques.

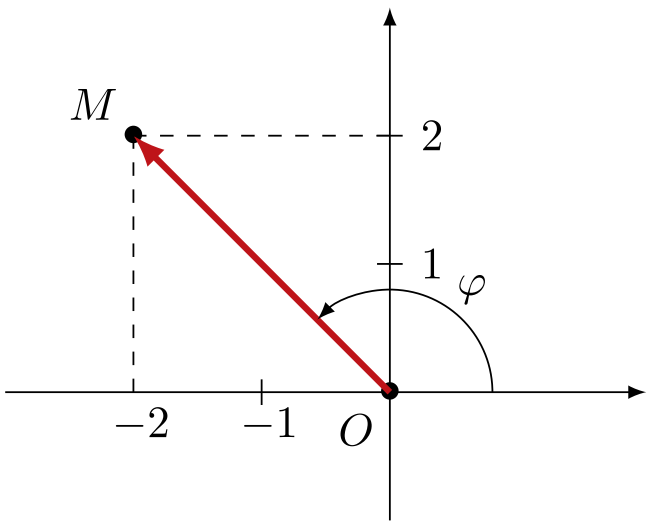


FIGURE 1.8 – Exemple de repérage d'un point en coordonnées cartésiennes et polaires dans un plan.

À trois dimensions d'espace, une base de l'espace peut être formée à partir de trois vecteurs orthonormés et donc orthogonaux deux à deux. On parle d'une base orthonormée. Pour un ensemble ordonné de trois vecteurs orthonormés $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ on parle de **base directe** pour $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ où le symbole $\wedge$ représente l'opération produit vectoriel [2]. Dans la suite du cours, les bases utilisées seront toutes orthonormées directes.

Coordonnées cartésiennes

En coordonnées cartésiennes, on fixe une origine O et trois axes orthogonaux engendrés par le trièdre direct $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$ comme on peut le vérifier sur la figure 1.9. [3]

On repère la position d'un point M par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ que l'on peut décomposer sur la base cartésienne :

Position en coordonnées cartésiennes dans l'espace

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \tag{1.14}$$

Comme nous l'avons déjà fait plus haut, on peut représenter le vecteur position par ses coordonnées dans la base choisie

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

La norme de $\overrightarrow{OM}$ est donnée par

$$r = ||\overrightarrow{OM}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1.16}$$

2. On peut retrouver cette orientation relative en utilisant la règle de la "main droite" : pour un vecteur $\vec{a}$ porté par le pouce et un vecteur $\vec{b}$ porté par l'index, alors le vecteur $\vec{a} \wedge \vec{b}$ sera porté par le majeur. Attention à bien prendre la main droite !

3. Il existe plusieurs notations couramment utilisées pour représenter la base cartésienne : $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

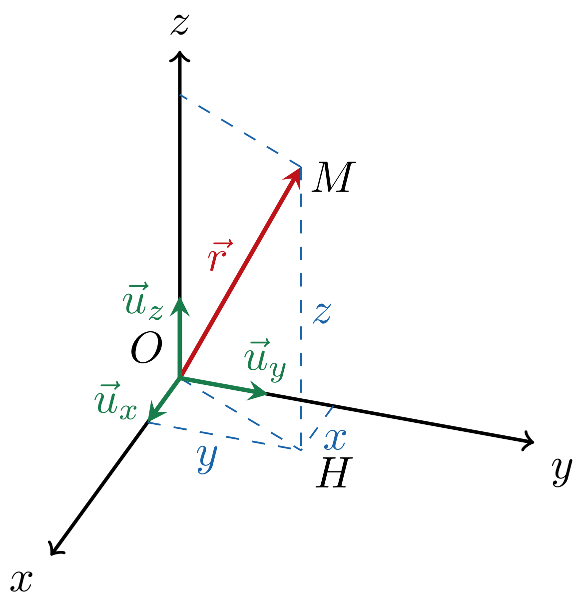


FIGURE 1.9 – Coordonnées cartésiennes dans l'espace.

Coordonnées cylindriques

Pour un point M quelconque de l'espace, on note H son projeté orthogonal dans le plan (Oxy) (voir figure 1.10). Les coordonnées cylindriques du point M regroupent alors les coordonnées polaires (ρ, φ) [4] de H dans le plan (Oxy) et la coordonnée z le long d'un axe Oz perpendiculaire au plan, avec

$$\rho \in [0, +\infty[\,, \quad \varphi \in [0, 2\pi[\,, \quad z \in]-\infty, +\infty[\tag{1.17}$$

Les vecteurs de la base cylindrique sont ceux de la base polaire dans le plan (Oxy), que l'on nomme $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\varphi$, et le vecteur $\vec{u}_z$. La base $\{\vec{u}_\rho, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z\}$ est orthonormée directe. On notera que le vecteur radial de la base polaire $\vec{u}_r$ est noté $\vec{u}_\rho$ pour la base cylindrique. La motivation pour cette convention est de réserver la notation $\vec{u}_r$ au vecteur radial ($\propto \vec{r}$), ce qui n'est plus le cas pour le vecteur $\vec{u}_\rho$ des coordonnées cylindriques.

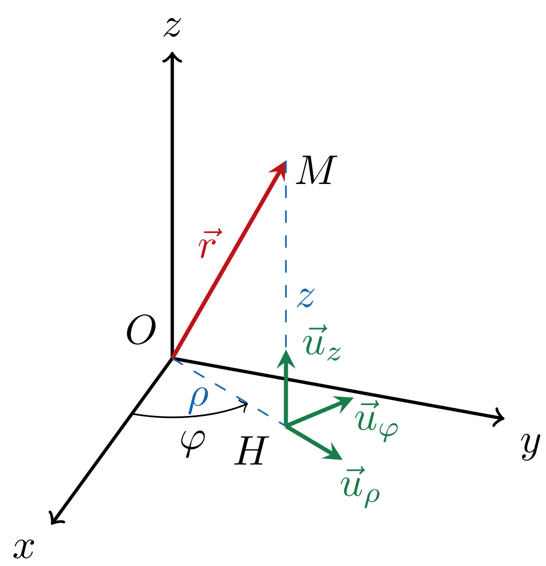


FIGURE 1.10 – Représentation des coordonnées cylindriques du point M. Le point H correspond à la projection orthogonale de M sur le plan (Oxy).

4. ρ est la lettre grecque *rho*. Attention à ne pas confondre avec la masse volumique, souvent désignée par le même symbole comme dans l'équation (**??**) au début de ce chapitre.

Le vecteur position en coordonnées cylindriques s'obtient en décomposant le vecteur position comme $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$. Or, $\overrightarrow{OH} = \rho\vec{u}_\rho$ et $\overrightarrow{HM} = z\vec{u}_z$, ce qui permet d'écrire

Position en coordonnées cylindriques dans l'espace

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix}. \tag{1.18}$$

1.3.4 Lien entre les coordonnées cylindriques et cartésiennes

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques suit la même démarche que celle exposée pour les coordonnées polaires. On obtient ainsi les coordonnées cartésiennes

$$x = \rho\cos\varphi \qquad y = \rho\sin\varphi \qquad z = z. \tag{1.19}$$

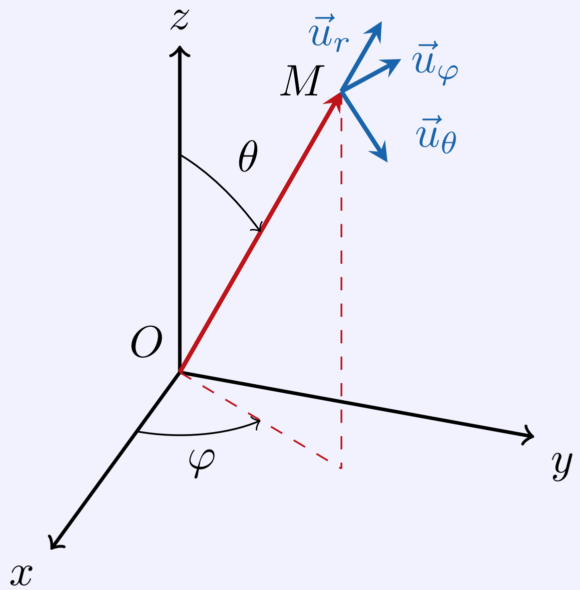
En exploitant le théorème de Pythagore dans le triangle OHM il vient

$$r = ||\overrightarrow{OM}|| = \sqrt{\rho^2 + z^2}. \tag{1.20}$$

Comme pour les coordonnées polaires on a aussi $\tan\varphi = y/x$ avec les mêmes remarques que précédemment concernant la détermination de l'angle φ.

Complément : Coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques un point est repéré par sa distance à l'origine $r = ||\overrightarrow{OM}||$ et deux angles. L'angle polaire θ (lettre grecque *theta*) entre l'axe Oz et $\overrightarrow{OM}$ et l'angle azimutal φ qui correspond à l'angle polaire dans le plan (Oxy)



$$r \geq 0\ , \quad \theta \in [0, \pi]\ , \quad \varphi \in [0, 2\pi[\tag{1.21}$$

Comme pour le cas des coordonnées polaires, la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ est une base mobile, attachée au point M. Le vecteur unitaire $\vec{u}_r$ est dirigé selon $\overrightarrow{OM}$, le vecteur unitaire $\vec{u}_\theta$ appartient au plan qui contient Oz et $\overrightarrow{OM}$ (plan méridien), il est orthogonal à $\vec{u}_r$ et dans le sens de θ croissant, le vecteur unitaire $\vec{u}_\varphi$, orthogonal au plan méridien et dirigé dans le sens de φ croissant, est tel que $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ forment une base directe. En décomposant le vecteur position sur la base, on a

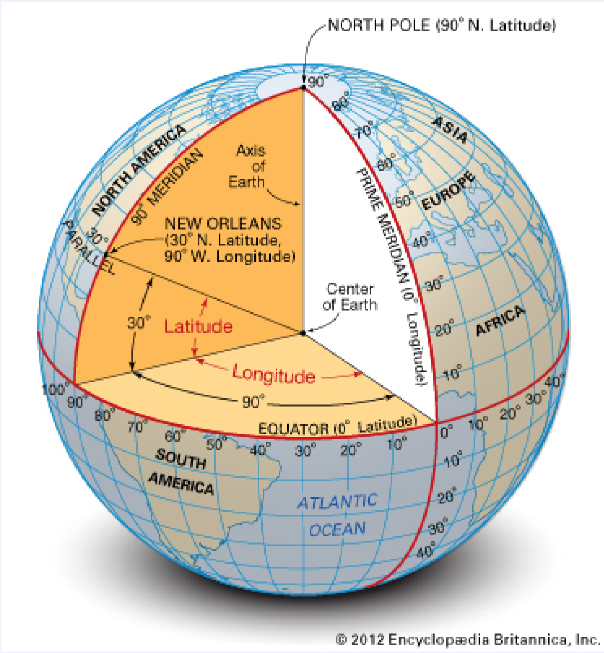
$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.22}$$

et le lien entre les coordonnées sphériques et cartésiennes est donné par

$$x = r \sin\theta \cos\varphi \qquad y = r \sin\theta \sin\varphi \qquad z = r \cos\theta \tag{1.23}$$

Complément : notations géographiques

Pour localiser un point sur la Terre, on quadrille la surface avec des méridiens reliant le pôle nord au pôle sud et des parallèles (comme l'Équateur) orthogonaux à ces méridiens. La longitude est donnée par φ, l'angle polaire par rapport au méridien de Greenwich (banlieue de Londres) qui correspond donc à $\varphi = 0°$. La latitude est associée à l'angle complémentaire de l'angle θ des coordonnées sphériques par rapport à l'Équateur. (On appelle en pratique θ la colatitude). Dans ce système, les longitude et latitude de Paris sont ($48°\ 51'\ 24''$ nord et $2°\ 21'\ 07''$ est).



1.4 Trajectoire, vecteurs déplacement, vitesse et accélération

On se place dans un référentiel $\mathcal{R}$ avec un repère spatial d'origine O pour étudier le mouvement d'un point M. Le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ est le **vecteur position**.

Trajectoire et équation horaire

La **trajectoire** d'un point M dans un référentiel $\mathcal{R}$ est l'ensemble des points par lesquels M passe au cours du temps. Elle peut être décrite par une équation qui relie les coordonnées du point, par exemple $y = f(x)$ dans le plan. On peut aussi paramétrer la courbe en donnant la position $\overrightarrow{OM}(t)$ (par exemple $x(t)$ et $y(t)$ dans un plan) en fonction du temps. On appelle dans ce cas ces équations les **équations horaires** du mouvement.

Un exemple de visualisation de trajectoire est donnée sur la figure 1.11.

FIGURE 1.11 – Visualisation de la trajectoire d'un ballon de basket.

1.4.1 Vecteur déplacement et vitesse moyenne

Pour étudier le mouvement du point M, on introduit d'abord le **vecteur déplacement** $\Delta\vec{r} = \Delta\overrightarrow{OM}$ qui correspond à la variation du vecteur position entre les temps t et $t + \Delta t$, comme illustré sur la figure 1.12 :

$$\Delta\vec{r} = \Delta\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)} \tag{1.24}$$

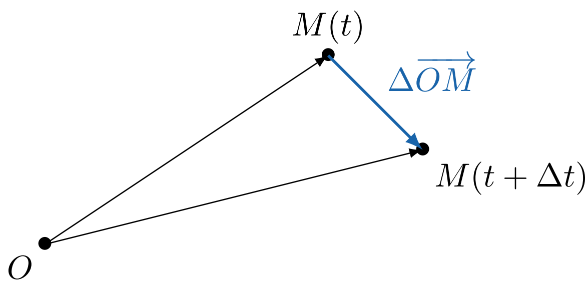


FIGURE 1.12 – Définition du vecteur déplacement entre deux instants t et $t + \Delta t$.

À partir du vecteur déplacement, on introduit la **vitesse moyenne** $\langle\vec{v}\rangle$ entre le temps t et $t+\Delta t$:

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{1.25}$$

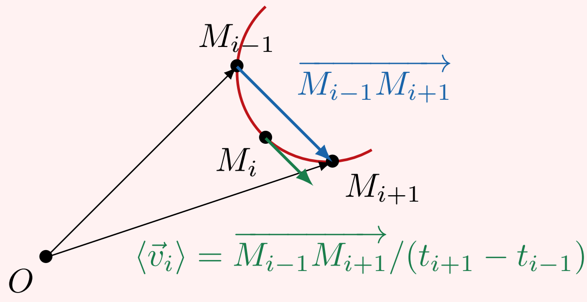
Le vecteur vitesse moyenne est donc un vecteur colinéaire au vecteur déplacement dont la norme est égale à la distance entre les 2 points divisée par la durée du déplacement. La dimension de cette quantité est une distance divisée par un temps. Elle s'exprime donc en m/s. Si la trajectoire suivie entre t et $t + \Delta t$ est approximativement rectiligne, alors la norme du vecteur vitesse moyenne correspond effectivement à la distance moyenne parcourue par unité de temps.

Détermination graphique de la vitesse moyenne

On peut estimer graphiquement la vitesse d'un point à partir d'un échantillonnage en temps de sa position. Si par exemple la position $\vec{r}_i$ de M est relevée aux temps t_i, pour chaque position $\vec{r}_i$ on pourra calculer la vitesse moyenne entre t_{i-1} et t_{i+1} par la formule

$$\langle \vec{v}_i \rangle = \frac{\overrightarrow{OM}_{i+1} - \overrightarrow{OM}_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}. \tag{1.26}$$

Le principe utilisé pour la détermination graphique est décrit sur la figure ci-dessous. On considère 3 points successifs de la trajectoire M_{i-1}, M_i et M_{i+1}. Le numérateur de l'équation (1.26) s'écrit $\overrightarrow{OM}_{i+1} - \overrightarrow{OM}_{i-1} = \overrightarrow{M_{i-1}M_{i+1}}$ et est représenté en bleu. La vitesse est obtenue en divisant ce vecteur par $(t_{i+1} - t_{i-1})$ que l'on suppose égal à 2 unités de temps ici. Ce vecteur vitesse est représenté en vert avec une origine choisie en M_i.



On montre sur la figure 1.13 un exemple de trajectoire échantillonnée à des temps t_i et des positions M_i. On a sur cet exemple reconstruit le vecteur vitesse en M_3 et M_8 à l'aide de la formule (1.26) et en prenant des temps t_i équidistants et séparés de 1 unité ($t_{i+1} - t_{i-1} = 2$).

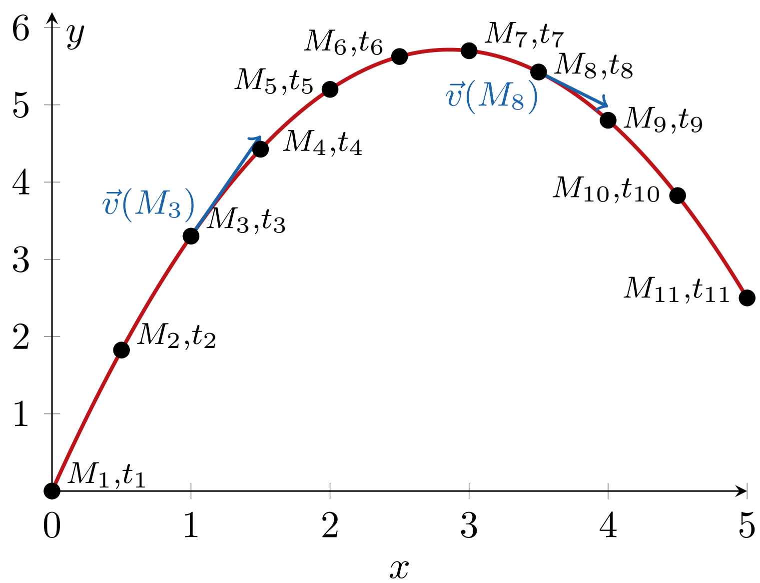


FIGURE 1.13 – Estimation graphique de la vitesse moyenne à partir d'une trajectoire échantillonnée à différents instants.

1.4.2 Déplacement infinitésimal et vitesse instantanée

La vitesse moyenne est définie pour un intervalle de temps quelconque. Dans cette section, nous introduisons la notion de vitesse instantanée qui va être associée à la limite de cette vitesse moyenne lorsque l'intervalle de temps sur lequel est calculé la vitesse devient infinitésimal. Pour ce faire, nous allons utiliser la notion de déplacement infinitésimal après un bref rappel de la définition de la différentielle d'une fonction et son lien avec la dérivée de cette même fonction.

Variation infinitésimale d'une grandeur

Considérons une fonction scalaire f d'un unique paramètre t. On note $df(t)$ la variation infinitésimale (ou différentielle) de cette fonction lorsque le paramètre t varie d'une quantité infinitésimale dt (la notation dt sous-entend donc $dt \to 0$). On écrit alors

$$df(t) = f(t+dt) - f(t) \tag{1.27}$$

En "divisant" cette quantité par dt on fait le lien avec la notion de dérivée :

$$\frac{df}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} = f'(t). \tag{1.28}$$

Cela permet d'écrire aussi

$$df(t) = f'(t)dt = \frac{df}{dt}dt. \tag{1.29}$$

Pour une fonction vectorielle $\vec{A}(t)$ de la seule variable t on généralise les définitions précédentes sous la forme

$$d\vec{A}(t) = \vec{A}(t+dt) - \vec{A}(t) \tag{1.30}$$

et

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t}. \tag{1.31}$$

Déplacement infinitésimal et vitesse instantanée

Appliquons les outils précédents à l'étude du vecteur déplacement. Lorsque l'intervalle de temps Δt devient infinitésimal, on le note dt et le déplacement $\Delta\vec{r}$ devient alors lui aussi infinitésimal. On le note $d\vec{r}$ et il correspond au changement du vecteur position entre les instants t et $t+dt$ (voir figure 1.14) :

Déplacement infinitésimal

$$d\vec{r} = \vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t). \tag{1.32}$$

De façon analogue à la définition de la vitesse moyenne, on définit la vitesse instantanée qui est associée à la variation infinitésimale de déplacement pendant le temps infinitésimal dt. On a donc

Vitesse instantanée au temps t

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{1.33}$$

La vitesse instantanée s'obtient donc comme la dérivée du vecteur position par rapport au temps :

$$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}[\vec{r}(t)]$$

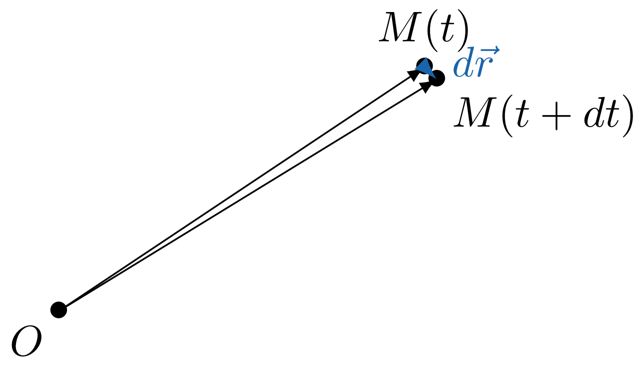


FIGURE 1.14 – Définition du vecteur déplacement infinitésimal entre deux instants t et $t+dt$. Bien entendu, la définition mathématique est associée à la limite d'un dt qui tend vers zéro et que l'on représente ici simplement comme une quantité aussi petite que possible mais visible pour le lecteur.

L'équation précédente peut être réécrite sous la forme $d\vec{r} = \vec{v}dt$. Le vecteur déplacement infinitésimal $d\vec{r}$ est donc donné par le vecteur vitesse multiplié par l'intervalle de temps infinitésimal dt.

Propriétés :

- Les vecteurs $d\vec{r}$ et $\vec{v}$ sont parallèles entre eux et tangents à la trajectoire en $M(t)$.
- Le vecteur vitesse dépend du référentiel d'étude.

1.4.3 Accélération

Nous avons défini la vitesse à partir de la variation du vecteur position en fonction du temps. De façon tout à fait analogue, nous allons définir l'accélération comme la variation temporelle du vecteur vitesse. Une accélération s'exprime donc en m.s^{-2}.

On définit l' accélération moyenne $\langle\vec{a}\rangle$ entre t et $t+\Delta t$ par

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}. \tag{1.34}$$

L'**accélération instantanée** s'obtient en faisant tendre Δt vers zéro :

Accélération instantanée

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{1.35}$$

Pour un mouvement linéaire l'accélération est parallèle à la trajectoire. En effet, si le vecteur vitesse ne change pas de direction entre t et $t+dt$ alors $\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)$ est parallèle à la trajectoire et donc $\vec{a}$ aussi.

L'accélération est une quantité obtenue à partir de la dérivée d'un vecteur. On prendra garde à noter que l'on peut parfaitement avoir une accélération non-nulle alors que la norme de la vitesse est constante. En effet, une accélération peut être provoquée par une unique variation de la direction du vecteur vitesse. Plus précisément, on peut remarquer à l'aide de la figure 1.15 que la composante tangentielle (ou parallèle) de l'accélération ($\propto d\vec{v}_{\parallel}$) correspond à un **changement de norme** du vecteur vitesse. La composante normale (ou perpendiculaire) de l'accélération ($\propto d\vec{v}_{\perp}$) correspond à un **changement d'orientation** du vecteur vitesse et donc à une courbure de la trajectoire. En effet, la variation du vecteur vitesse entre t et $t+dt$ est donnée par le vecteur $d\vec{v}$. On peut décomposer ce vecteur en une composante parallèle à $\vec{v}(t)$, notée $d\vec{v}_{\parallel}$ et une composante normale notée $d\vec{v}_{\perp}$. On constate que dans la limite des petits $d\vec{v}$ la variation de la norme du vecteur $\vec{v}$ (autrement dit la différence entre la longueur de la flèche bleue et la longueur de la flèche rouge) est donnée par la composante parallèle $\propto d\vec{v}_{\parallel}$ de l'accélération alors que la composante normale de l'accélération ($\propto d\vec{v}_{\perp}$) correspond au changement d'orientation du vecteur vitesse et donc au changement d'orientation de la trajectoire du point matériel considéré.On obtiendra ce résultat plus formellement dans la suite de ce chapitre.

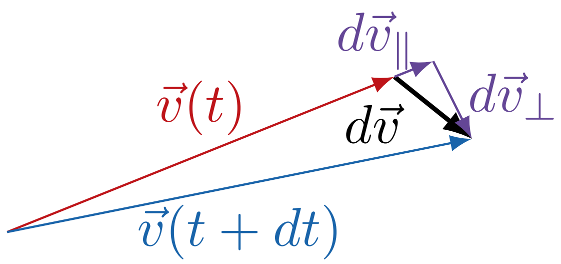


FIGURE 1.15 – Variations tangentielle et normale du vecteur vitesse.

1.5 Expression des vecteurs vitesses et accélération dans différents systèmes de coordonnées

Dans cette section, nous allons relier les expressions des vecteurs vitesses et accélérations aux dérivées temporelles des coordonnées spatiales du problème.

1.5.1 Vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes

On se place dans un référentiel $\mathcal{R}$ lié au repère fixe $(Oxyz)$ pour étudier le mouvement d'un point M. À chaque instant, on exprime $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ dans la base fixe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Le caractère fixe de la base est crucial puisque cela implique que les différenciations ou dérivées n'auront pas d'action sur ces vecteurs. On traite directement le cas à 3 dimensions et à partir de

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z \tag{1.36}$$

on trouve

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[x(t)\vec{u}_x\right] + \frac{d}{dt}\left[y(t)\vec{u}_y\right] + \frac{d}{dt}\left[y(t)\vec{u}_z\right] \tag{1.37}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\,\vec{u}_x + x\frac{d\vec{u}_x}{dt} + \frac{dy(t)}{dt}\,\vec{u}_y + y\frac{d\vec{u}_y}{dt} + \frac{dz(t)}{dt}\,\vec{u}_z + z\frac{d\vec{u}_z}{dt} \tag{1.38}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}(t)\,\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}(t)\,\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}(t)\,\vec{u}_z \tag{1.39}$$

où les dérivées des vecteurs unitaires $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ sont nulles puisque dans ce référentiel ces vecteurs sont fixes. On voit sur cet exemple qu'il est important de préciser le référentiel dans lequel le calcul des dérivées temporelles est effectué : le résultat de la dérivation dépend du référentiel choisi !

De même, on montre que

$$d\vec{r}(t) = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z \tag{1.40}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}(t)\,\vec{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}(t)\,\vec{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2}(t)\,\vec{u}_z \tag{1.41}$$

On introduit aussi les notations $\dot{f} = \frac{df}{dt}$ et $\ddot{f} = \frac{d^2f}{dt^2}$ pour les dérivées temporelles. On a ainsi

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\,\vec{u}_x + \dot{y}(t)\,\vec{u}_y + \dot{z}(t)\,\vec{u}_z \tag{1.42}$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\,\vec{u}_x + \ddot{y}(t)\,\vec{u}_y + \ddot{z}(t)\,\vec{u}_z \tag{1.43}$$

Au final, on peut résumer les résultats précédents comme suit :

Vecteurs cinématiques en coordonnées cartésiennes

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; ; \quad d\vec{r} = d\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \; ; \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \; ; \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \tag{1.44}$$

1.5.2 Vitesse et accélération en coordonnées polaires et cylindriques

En coordonnées polaires ou cylindriques, il faut prendre garde à la dépendance temporelle des vecteurs de base. Ces vecteurs étant unitaires, on va dans un premier temps s'intéresser au calcul de la dérivée d'un vecteur unitaire en toute généralité. Nous appliquerons ensuite le résultat obtenu au cas particulier des vecteurs de la base polaire.

Dérivée d'un vecteur unitaire

On se place dans un plan (Oxy). Considérons un vecteur unitaire $\vec{u}$. On peut toujours le décomposer dans la base cartésienne sous la forme

$$\vec{u} = \cos[\alpha(t)]\vec{u}_x + \sin[\alpha(t)]\vec{u}_y \tag{1.45}$$

où $\alpha(t)$ est l'angle entre le vecteur $\vec{u}$ et l'axe Ox à l'instant t. En utilisant les formules de dérivation d'une fonction composée on a $\frac{d}{dt}\cos[\alpha(t)] = -\dot{\alpha}\sin\alpha$ et $\frac{d}{dt}\sin[\alpha(t)] = \dot{\alpha}\cos\alpha$. D'où

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{\alpha}\{-\sin[\alpha(t)]\vec{u}_x + \cos[\alpha(t)]\vec{u}_y\}. \tag{1.46}$$

On peut immédiatement noter que le vecteur dérivée est orthogonal au vecteur unitaire : $\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0$ [5]. On peut montrer que le vecteur dérivé forme un angle de $+\pi/2$ avec le vecteur unitaire en vérifiant que $\vec{u} \wedge \frac{d\vec{u}}{dt} = \dot{\alpha}\vec{u}_z$. La norme de $\frac{d\vec{u}}{dt}$ vaut $\dot{\alpha}\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \dot{\alpha}$. Elle est donc d'autant plus grande que l'angle que fait le vecteur unitaire avec l'axe Ox varie vite avec le temps. En résumé,

Dérivée d'un vecteur unitaire

La dérivée d'un vecteur unitaire dans le plan Oxy est un vecteur dont l'orientation est obtenue par une rotation d'angle $+\pi/2$ autour de l'axe Oz et dont la norme est donnée par la dérivée par rapport au temps de l'angle de ce vecteur par rapport à l'axe Ox.

Fort de ce résultat, revenons à la discussion de la fin de la section 1.4.3 sur l'interprétation des accélérations tangentielles et normales. On écrit le vecteur vitesse sous la forme $\vec{v} = v\vec{u}$, autrement dit sous la forme d'un vecteur de norme v et de direction donnée par le vecteur unitaire $\vec{u}$ (tangent à la trajectoire). La dérivée de ce produit donne

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[v\vec{u}] = \frac{dv}{dt}\vec{u} + v\frac{d\vec{u}}{dt}. \tag{1.47}$$

On retrouve donc bien que la composante tangentielle de l'accélération ($\propto \vec{u}$) donne la variation de la norme de la vitesse. L'autre terme ($\propto \frac{d\vec{u}}{dt}$) est, comme nous venons de le montrer, normal au vecteur vitesse et donne la variation de la direction du vecteur vitesse.

Vitesse en coordonnées polaires

Pour obtenir la vitesse en coordonnées polaires, explicitons d'abord les dérivées temporelles des vecteurs de base. En appliquant le résultat précédent aux vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\varphi$, qui sont bien des vecteurs unitaires, on a

5. Résultat attendu puisque $\frac{d||\vec{u}||^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{u}\cdot\vec{u}) = \frac{d\vec{u}}{dt}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt} = 2\vec{u}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt} = 0$ car le vecteur est de norme constante.

Dérivée des vecteurs de la base polaire

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi \qquad ; \qquad \frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\,\vec{u}_r. \tag{1.48}$$

Le lecteur est vivement encouragé à retrouver ce résultat à partir des équations (1.11). On obtient ainsi

Vitesse dans la base polaire

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{u}_r) = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\left(\frac{d\vec{u}_r}{dt}\right) = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi. \tag{1.49}$$

Accélération en coordonnées polaires

De la même manière que pour déterminer la vitesse à partir du vecteur position, l'accélération s'obtient en dérivant la vitesse trouvée en (1.49) par rapport au temps.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{r}\,\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi) + (\dot{r}\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi + r\ddot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\,\vec{u}_r), \tag{1.50}$$

ce qui donne, en regroupant les termes,

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\,\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\,\vec{u}_\varphi \tag{1.51}$$

On a au final :

En coordonnées polaires

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \; d\vec{r} = d\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} dr \\ r\,d\varphi \end{pmatrix} \; ; \; \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\varphi} \end{pmatrix} \; ; \; \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} \end{pmatrix} \tag{1.52}$$

1.5.3 Vitesse et accélération en coordonnées cylindriques

À trois dimensions, pour les coordonnées cylindriques, on a appliqué la même démarche en décomposant le vecteur position comme $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$ avec $\overrightarrow{HM} = z\vec{u}_z$. La dérivée de cette somme fait intervenir le même calcul qu'en coordonnées polaires pour le premier terme et le même calcul que pour les coordonnées cartésiennes pour le deuxième terme. On obtient donc directement :

En coordonnées cylindriques

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \; ; \; d\vec{r} = d\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} d\rho \\ \rho\,d\varphi \\ dz \end{pmatrix} \; ; \; \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \rho\dot{\varphi} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \; ; \; \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 \\ 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \tag{1.53}$$

1.5.4 Vecteur vitesse angulaire

Définition

Considérons un point M animé d'un mouvement circulaire. Ce mouvement s'effectue donc dans un plan. De plus, la trajectoire (circulaire) est parcourue dans un certain sens plus ou moins rapidement. Le vecteur **vitesse angulaire** $\vec{\omega}$ permet de rassembler ces différentes informations en une seule grandeur :

- La direction du vecteur $\vec{\omega}$ est la direction perpendiculaire au plan du mouvement de M.
- Le sens du vecteur $\vec{\omega}$ est lié au sens dans lequel la trajectoire est parcourue. La convention utilisée est appelée “**règle du tire-bouchon**” : le vecteur $\vec{\omega}$ pointe dans le sens où se déplacerait un tire-bouchon (ou une vis) tournant dans le même sens que M (voir figure 1.16)
- La norme du vecteur $\vec{\omega}$ s'appelle la **vitesse angulaire** et elle est égale à la variation angulaire par unité de temps.

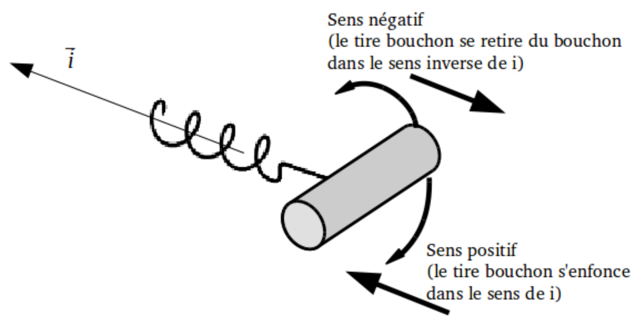


FIGURE 1.16 – Illustration de la règle du tire-bouchon.

Le vecteur vitesse angulaire est donc un vecteur qui exprime la vitesse angulaire d'un système ainsi que l'axe autour duquel le système tourne. La vitesse angulaire est l'analogue pour un mouvement de rotation, de la vitesse pour un mouvement de translation. La vitesse angulaire s'exprime en rad/s mais on peut la trouver en tour/min (un disque vinyle de 78 tours signifie que le disque doit tourner à 78 tours/min pour reproduire le plus fidèlement possible le son enregistré).

Vitesse angulaire pour un mouvement circulaire

Si on considère un point M animé d'un mouvement circulaire de centre O dans le plan (Oxy) (voir figure 1.17), la position de M est repérée uniquement par l'angle polaire φ. Dans ce cas, on définit le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ par

$$\vec{\omega}(t) = \dot{\varphi}(t)\,\vec{u}_z \tag{1.54}$$

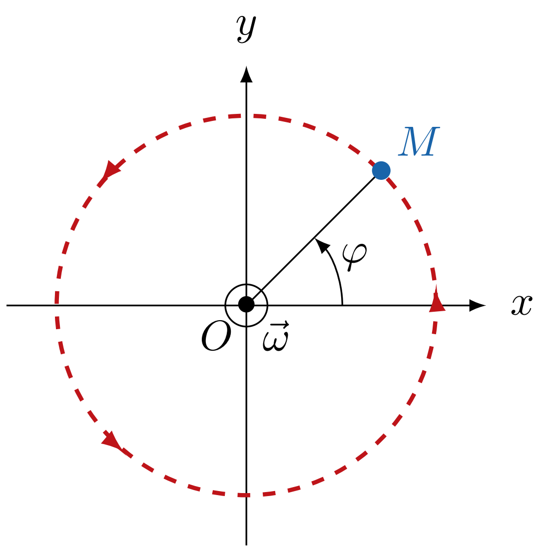


FIGURE 1.17 – Représentation de la vitesse angulaire dans le cas d'un mouvement circulaire plan d'un point matériel M.

Vitesse angulaire et dérivée des vecteurs de la base polaire

Nous avons vu que la dérivée d'un vecteur unitaire dans le plan Oxy est donné par un vecteur qui lui est perpendiculaire. On peut donc le construire grâce à un produit vectoriel avec le vecteur unitaire et le vecteur vitesse angulaire qui est porté par $\vec{u}_z$. Ainsi, en se rappelant que $\vec{u}_z = \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\varphi$, on peut écrire de façon concise

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_r \qquad ; \qquad \frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_\varphi \tag{1.55}$$

En effet, la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi, \vec{u}_z)$ étant orthonormée et directe on a :

$$\dot{\vec{u}}_r = \dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi = \dot{\varphi}\,\vec{u}_z \wedge \vec{u}_r = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_r \tag{1.56}$$

$$\dot{\vec{u}}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\vec{u}_r = \dot{\varphi}\,\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\varphi = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_\varphi. \tag{1.57}$$

Notons que l'on peut définir le vecteur vitesse angulaire dans un cadre plus général. Pour toute trajectoire courbe, on peut localement l'approximer par un mouvement circulaire (cercle osculateur à la trajectoire) et appliquer le raisonnement précédent pour définir un vecteur vitesse angulaire.

1.5.5 Vitesse en coordonnées sphériques

Complément : coordonnées sphériques

On se place dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié au repère fixe $(Oxyz)$ et on utilise la base mobile des coordonnées sphériques $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$. On a $\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\vec{u}_r$ et on considère un déplacement infinitésimal $d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'}$ où M' est un point de coordonnées $(r + dr, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$. On montre que le déplacement infinitésimal peut s'écrire comme une somme de déplacements dans lesquels une seule coordonnée change :

- déplacement à θ et φ fixés : $d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{u}_r$
- déplacement à r et φ fixés (dans le plan méridien) : $d\overrightarrow{OM} = rd\theta\,\vec{u}_\theta$
- déplacement à r et θ fixés : $d\overrightarrow{OM} = r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi$

On a donc pour le déplacement infinitésimal :

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi} \tag{1.58}$$

Remarquons que $\sin\theta \geq 0$ puisque $\theta \in [0, \pi]$. À partir de l'expression du déplacement infinitésimal on obtient facilement l'expression de la vitesse en coordonnées sphériques

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi \tag{1.59}$$

1.6 Mouvement rectiligne et mouvement uniformément accéléré

Dans cette section, nous considérons des exemples de mouvements simples et définissons les termes rectiligne, uniforme et uniformément accéléré.

1.6.1 Mouvements rectilignes

Considérons tout d'abord des mouvements qui ont lieu sur une droite $\mathcal{D}$. On parle alors de **mouvement rectiligne**. On se place dans un référentiel fixe avec une origine O sur la droite et un vecteur unitaire $\vec{u}_x$ qui oriente cette droite. La position du point M est $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x$, la vitesse $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x$ et l'accélération $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x$.

Un **mouvement rectiligne uniforme** est un mouvement rectiligne avec une accélération nulle $\vec{a} = \vec{0}$. La projection sur l'axe Ox donne donc $\ddot{x} = 0$. On obtient la vitesse après intégration par rapport au temps

$$\dot{x}(t) - \dot{x}(t=0) = v(t) - v(t=0) = \int_0^t dt\,\ddot{x} = 0. \tag{1.60}$$

En posant $v(t=0) = v_0$ on aboutit à $\dot{x}(t) = v_0$ et donc à un mouvement avec une vitesse constante. Une deuxième intégration par rapport au temps entraîne

$$x(t) - x(t=0) = \int_0^t dt\,\dot{x} = \int_0^t dt\,v_0 = v_0 t. \tag{1.61}$$

En définissant la position initiale comme $x(t=0) = x_0$, on en déduit $x(t) = x_0 + v_0 t$, ce que l'on peut récrire sous forme vectorielle comme

$$\vec{a} = \vec{0} \quad ; \qquad \vec{v} = v_0\,\vec{u}_x \quad ; \qquad \vec{r} = (x_0 + v_0 t)\,\vec{u}_x \tag{1.62}$$

Dans un **mouvement uniformément accéléré**, le point M est soumis à une accélération constante. Pour un mouvement rectiligne suivant Ox, on a $\vec{a} = a_0\,\vec{u}_x$ ou encore $\ddot{x} = a_0$. On pose les conditions initiales $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$ et une première intégration par rapport au temps donne donc $\dot{x}(t) = v_0 + a_0 t$. Une nouvelle intégration par rapport au temps permet d'obtenir $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t^2$, ce que l'on peut récrire comme

$$\vec{a} = a_0\,\vec{u}_x \quad ; \qquad \vec{v} = (v_0 + a_0 t)\,\vec{u}_x \quad ; \qquad \vec{r} = \left(x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t^2\right)\vec{u}_x \tag{1.63}$$

On remarquera que x_0, v_0 et a_0 sont des quantités algébriques (donc positives ou négatives).

1.6.2 Mouvement plan uniformément accéléré

Considérons un corps lancé dans le vide avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ et soumis à une accélération constante, qui serait par exemple l'accélération de pesanteur $\vec{a}_0 = \vec{g}$. Si $\vec{v}_0$ est parallèle à $\vec{g}$, le mouvement sera rectiligne uniformément accéléré, comme vu plus haut. Par contre, si $\vec{v}_0$ possède une composante orthogonale à $\vec{g}$, alors le mouvement sera plan (dans le plan qui contient $\vec{v}_0$ et $\vec{g}$).

On prend $\vec{a} = -g\vec{u}_y$, une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\cos(\theta)\vec{u}_x + v_0\sin(\theta)\vec{u}_y$ avec $\theta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, et une position initiale $\vec{r}(0) = \vec{0}$. La projection de ces équations sur l'axe Ox correspond à un mouvement uniforme. La projection sur l'axe Oy à un mouvement uniformément accéléré. En suivant la démarche des paragraphes précédents, on aboutit donc à

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_0\cos(\theta) \\ v_0\sin(\theta) - gt \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} [v_0\cos(\theta)]t \\ [v_0\sin(\theta)]t - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}. \tag{1.64}$$

On obtient l'équation de la trajectoire $y(x)$ en substituant le temps dans la composante y de $\vec{r}$ grâce à l'expression de $x(t)$. On trouve

$$y = [\tan(\theta)]\,x - \left[\frac{g}{2v_0^2(\cos(\theta))^2}\right]x^2, \tag{1.65}$$

qui correspond à l'équation d'une parabole.

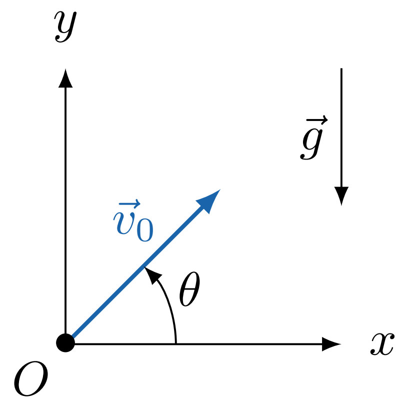


FIGURE 1.18 – Orientation des vecteurs pour un point soumis à une accélération constante $\vec{g}$ et lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$.

1.7 Mouvements circulaires

1.7.1 Caractéristiques générales

Dans cette section nous considérons des mouvements qui ont lieu sur un cercle de rayon fixé égal à R. Nous utiliserons un référentiel fixe avec l'origine au centre du cercle et un repère polaire. À partir des relations générales que nous avons dérivées pour la vitesse et l'accélération en coordonnées polaires, pour $r = R$, donc $\dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$, nous avons : $\vec{v} = R\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi$ et $\vec{a} = -R\dot{\varphi}^2\,\vec{u}_r + R\ddot{\varphi}\vec{u}_\varphi$. Nous observons que

- La vitesse est tangente au cercle et de module égal à $|R\dot{\varphi}|$.
- L'accélération a une composante radiale de norme $a_c = R\dot{\varphi}^2 = \frac{v^2}{R}$ et une composante tangentielle de norme $a_t = |R\ddot{\varphi}|$.

En introduisant la vitesse angulaire $\dot{\varphi} = \omega(t)$, on obtient en coordonnées polaires.

Mouvement circulaire quelconque

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -R\omega^2 \\ R\dot{\omega} \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ R\omega \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.66}$$

On remarquera aussi que l'on peut écrire simplement le vecteur vitesse comme

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \tag{1.67}$$

1.7.2 Mouvement circulaire uniforme

Dans un mouvement circulaire uniforme le point M a une vitesse qui est constante en norme $\dot{\varphi}(t) = \omega$. On a donc sur la base polaire

Mouvement circulaire uniforme

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -R\omega^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ R\omega \end{pmatrix} \quad ; \quad \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.68}$$

On remarque que l'accélération possède uniquement une composante sur $\vec{u}_r$ et que cette composante est négative. On parle alors d'accélération centripète pour dire qu'elle est dirigée vers le centre de la trajectoire. Ce résultat est à comparer au cas non uniforme pour lequel l'accélération possède une composante suivant $\vec{u}_\varphi$.

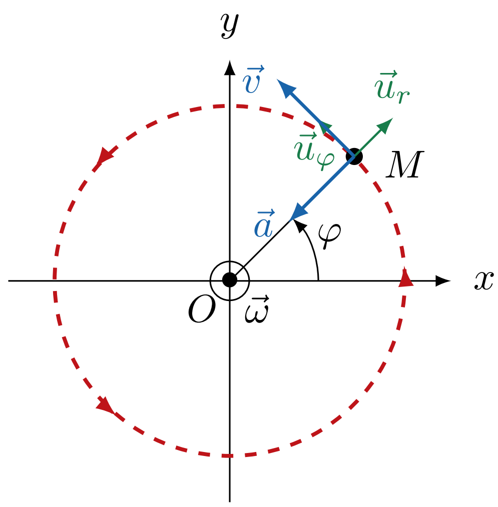


FIGURE 1.19 – Représentation des vecteurs vitesse et accélération pour un mouvement circulaire uniforme.

La direction de $\vec{\omega}$ donne le sens de la rotation (sens trigonométrique pour $\vec{\omega} \cdot \vec{u}_z > 0$). La période du mouvement est définie comme le temps T au bout duquel l'angle φ reprend pour la première fois la même valeur modulo 2π.

Comme on a $\dot{\varphi} = \omega$, il suit que

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \omega t \tag{1.69}$$

et donc que φ varie de 2π lorsque le temps varie de $2\pi/\omega$. Notons que telle que définie jusqu'ici ω est une quantité algébrique (positive ou négative). La période est elle usuellement définie comme une quantité toujours positive. Il est d'usage d'écrire que $T = \frac{2\pi}{\omega}$ où, cette fois, ω est la norme du vecteur vitesse angulaire. Cette ambiguïté de la notion ω qui peut être associée indifféremment à la norme ou à la projection du vecteur vitesse angulaire ne prête généralement pas à confusion en pratique.

De façon générale, pour un mouvement périodique, on définit

Mouvement périodique

période T	:	durée minimale au bout de laquelle le phénomène se reproduit à l'identique
fréquence ν	:	nombre de période par unité de temps
pulsation ω	:	pour un mouvement circulaire, c'est la vitesse angulaire

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu} \tag{1.70}$$

1.8 Mouvement curviligne et base de Frenet

Nous venons de voir deux types simples de trajectoires : rectilignes et circulaires. Bien entendu, des trajectoires courbes plus complexes sont possibles et on parle alors de trajectoires curvilignes. Dans ce cas, on introduit une nouvelle base dite de Frenet. L'idée générale est que localement autour d'un point M de la trajectoire on peut approximer cette trajectoire par une portion de cercle de rayon R et de centre C. Ce cercle est appelé cercle osculateur, son centre et son rayon, qui changent en fonction du temps si la trajectoire n'est pas strictement circulaire, sont respectivement appelés centre de courbure et rayon de courbure. Nous pouvons donc définir une base similaire à la base polaire mais avec une origine qui dépend du temps. On introduit les vecteurs ($\vec{u}_T$ et $\vec{u}_N$) où $\vec{u}_T$ est tangent à la trajectoire en M dans le sens du mouvement, et $\vec{u}_N$ est normale à la trajectoire en M dans le sens de la concavité de la trajectoire, comme illustré sur la figure 1.20. Dans ce cas, le vecteur $\vec{u}_T$ correspond au vecteur $\vec{u}_\varphi$ de la base polaire centrée sur le cercle de rayon R et le vecteur $\vec{u}_N$ correspond au vecteur $-\vec{u}_r$. Aux deux vecteurs de la base dans le plan de la trajectoire, on ajoute un troisième vecteur de base $\vec{u}_B$ orthogonal au plan et tel que $\vec{u}_T \wedge \vec{u}_N = \vec{u}_B$ afin de former une base orthonormée directe. Cette base dépend du temps.

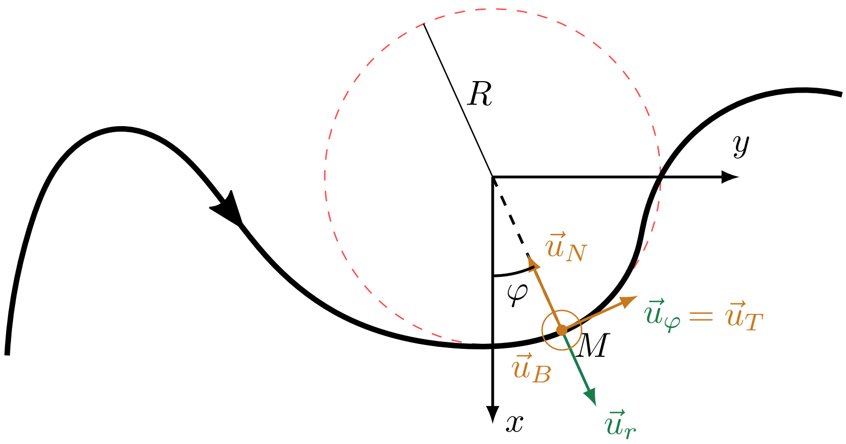


FIGURE 1.20 – Schéma représentant la définition de la base de Frenet.

Exprimons la vitesse et l'accélération dans cette base de Frenet. On a, par définition,

Vitesse dans la base de Frenet

$$\vec{v} = v(t)\,\vec{u}_T \tag{1.71}$$

L'accélération s'obtient en prenant la dérivée temporelle de cette expression. Pour ce faire, on remarque que $\dot{\vec{u}}_T = \dot{\vec{u}}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{u}_r = |\dot{\varphi}|\,\vec{u}_N = \frac{v}{R}\vec{u}_N$. On en déduit

Accélération dans la base de Frenet

$$\vec{a} = \dot{v}\,\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\,\vec{u}_N \tag{1.72}$$

De façon générale, on obtient de nouveau la décomposition de l'accélération en une partie tangentielle liée au changement de la norme du vecteur vitesse et une partie normale, ici explicitée en fonction du rayon de courbure $R(t)$ de la trajectoire. On retrouve l'idée qu'une accélération normale importante (donc un petit rayon de courbure) correspond à une forte variation de la direction du vecteur vitesse. Inversement, une faible accélération normale (grand rayon de courbure) correspond à une trajectoire plutôt rectiligne et donc à un changement d'orientation faible du vecteur vitesse.

1.9 Changement de référentiel

La caractérisation du mouvement d'un point matériel (position, vitesse, accélération) dépend du référentiel dans lequel ces quantités sont exprimées. Ainsi, connaissant les équations d'un mouvement dans un référentiel donné il est utile de savoir exprimer la nouvelle forme de ces équations dans un référentiel différent. Par exemple, la trajectoire de la lune dans le référentiel géocentrique ou dans le référentiel héliocentrique obéit à des équations différentes.

On considère dans la suite deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Pour chaque référentiel on définit un repère cartésien (fixe) : (O, $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$) et (O', $\vec{u}_{x'}$, $\vec{u}_{y'}$ et $\vec{u}_{z'}$)

Le mouvement relatif de ces deux référentiels est a priori quelconque mais dans le cadre de ce cours on distinguera deux cas simples avant de donner le résultat général en fin de section :

- Les deux référentiels sont en **translation** : les axes d'un référentiel conservent une direction constante par rapport à l'autre référentiel. Les vecteurs de base $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y$ et $\vec{u}_z\}$ et $\{\vec{u}_{x'}, \vec{u}_{y'}$ et $\vec{u}_{z'}\}$ sont donc constants dans les deux référentiels. L'origine O' est en mouvement dans $\mathcal{R}$. La translation est dite rectiligne si le mouvement de O' dans $\mathcal{R}$ est rectiligne. C'est le cas par exemple du référentiel associé à un train se déplaçant en ligne droite par rapport au référentiel terrestre. Attention, une translation n'est pas nécessairement rectiligne. Si O' a un mouvement de rotation dans $\mathcal{R}$ et que les axes de $\mathcal{R}'$ dans $\mathcal{R}$ sont constants, on parle de translation circulaire. C'est le cas du référentiel géocentrique par rapport au référentiel héliocentrique (voir définitions au début de ce cours dans la section 1.2) dans l'approximation d'une trajectoire circulaire pour le centre de la Terre.
- Les deux référentiels sont en **rotation** autour de l'axe Oz : les origines O et O' des deux référentiels coïncident, mais leurs axes dans le plan Oxy sont en rotation les uns par rapport aux autres. C'est le cas par exemple d'une personne assise sur une chaise de bureau et qui peut tourner autour de son axe.

1.9.1 Notations

On définit $\vec{r}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$ les vecteurs position, vitesse et accélération d'un point M dans $\mathcal{R}$. De même, on pose $\vec{r'}$, $\vec{v'}$ et $\vec{a'}$ les vecteurs position, vitesse et accélération de M dans $\mathcal{R}'$. Ces quantités sont définies de la façon suivante :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} \qquad \text{et} \qquad \vec{r}' = \overrightarrow{O'M} \tag{1.73}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}' = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{\mathcal{R}'} \tag{1.74}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_{\mathcal{R}} \qquad \text{et} \qquad \vec{a}' = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}\right|_{\mathcal{R}'} \tag{1.75}$$

$\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}}$ signifie qu'on calcule la dérivée temporelle de $\overrightarrow{OM}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$, c'est-à-dire en considérant O, $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ constants (puisqu'ils sont reliés à $\mathcal{R}$).

Pour tout mouvement relatif, on a une relation simple entre les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{r'}$. En utilisant la relation de Chasles on a

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}. \tag{1.76}$$

C'est ce que l'on appelle la loi de composition des positions :

Loi de compoistion des positions

$$\vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r'} \tag{1.77}$$

1.9.2 Cas de deux référentiels en mouvement relatif de translation

Transformation de la vitesse et de l'accélération

On considère le référentiel $\mathcal{R}$ d'origine O et le référentiel $\mathcal{R}'$ en translation par rapport à $\mathcal{R}$ et d'origine O'. Les deux référentiels sont dotés de la même base cartésienne fixe $\{\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\}$ comme représenté sur la figure 1.21.

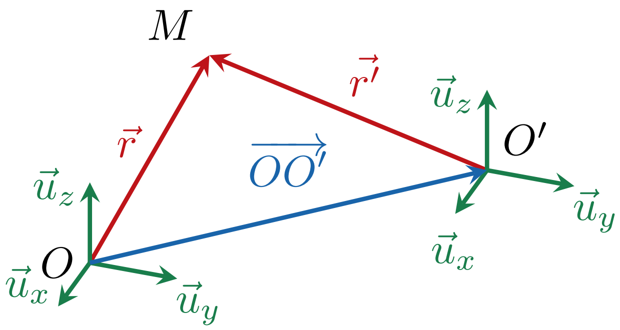


FIGURE 1.21 – Position relative des deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$

Dérivons par rapport au temps et dans le référentiel $\mathcal{R}$ la loi de composition des positions. On obtient

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} \tag{1.78}$$

Dans le cas particulier d'un mouvement de translation, la dérivée de $\overrightarrow{O'M}$ dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$ coïncident puisque les deux référentiels ont les mêmes axes. On a donc $\left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{\mathcal{R}'} = \vec{v}'$. D'autre part, le terme $\left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_{\mathcal{R}}$ s'interprète comme la vitesse du point O' dans le référentiel $\mathcal{R}$. Comme O' est l'origine du référentiel $\mathcal{R}'$ on appelle aussi cette quantité vitesse relative du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ et on la note $\vec{v}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}}$. Au final on aboutit à la loi de composition des vitesses suivante :

Transformation de la vitesse pour deux référentiels en translation

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}}(t) + \vec{v}'(t) \tag{1.79}$$

où l'on a introduit $\vec{v}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} = \frac{d\vec{OO'}}{dt}|_{\mathcal{R}}$ la vitesse de O' par rapport à O.

Un calcul suivant exactement la même démarche en dérivant une deuxième fois dans $\mathcal{R}$ permet d'obtenir la loi de composition des accélérations :

Transformation de l'accélération pour deux référentiels en translation

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}}(t) + \vec{a}'(t) \tag{1.80}$$

où $\vec{a}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}}$ est l'accélération de O' par rapport à O.

Les termes $\vec{v}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}}$ et $\vec{a}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}}$, qui sont respectivement la vitesse et l'accélération dans $\mathcal{R}$ d'un point qui serait immobile dans $\mathcal{R}'$, s'appellent aussi couramment **vitesse d'entraînement** et **accélération d'entraînement**.

Exemple

Illustrons ces formules sur un exemple simple à une dimension illustré sur la figure 1.22. On étudie le mouvement d'un passager (point M) dans un train auquel on associe le référentiel $\mathcal{R}'$ d'origine O' et un vecteur unitaire $\vec{u}_x$. Le passager se déplace à la vitesse $\vec{v'} = v_P \vec{u}_x$ suivant l'axe $O'x$. À l'instant $t = 0$, il a une position $x'(t = 0) = x_0$ où $x' = \overline{O'M}$. Le train se déplace dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ d'origine O et aussi suivant la direction donnée par le vecteur unitaire $\vec{u}_x$. Il se déplace à la vitesse $\vec{v}_T = v_0 \vec{u}_x$ et sa position, repérée par le point O' est, à $t = 0$, donnée par $x_T(t = 0) = \overline{OO'} = 0$.

On cherche à déterminer la position du passager dans le référentiel $\mathcal{R}'$ en utilisant les lois de composition des positions et vitesses.

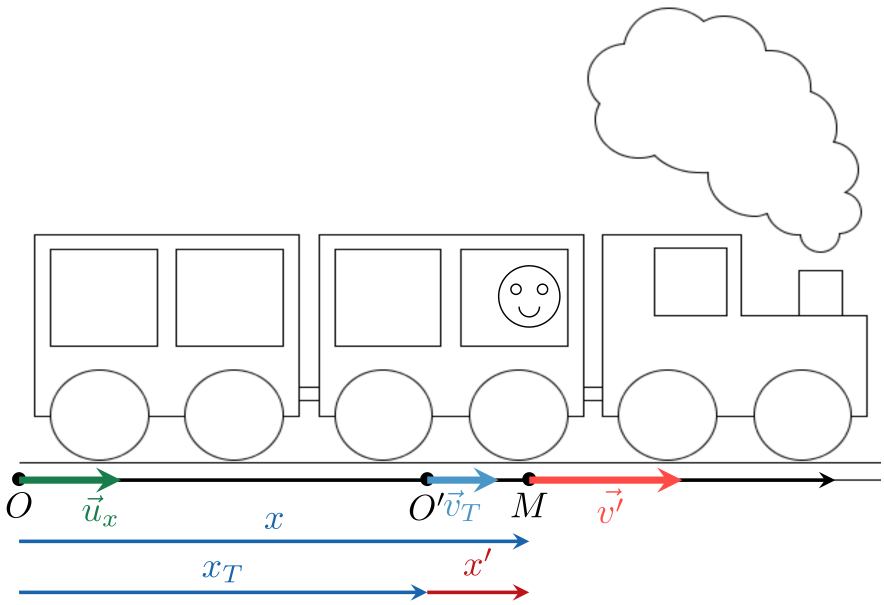


Figure 1.22 – Exemple de changement de référentiel pour des mouvements à une dimension suivant l'axe Ox.

Déterminons tout d'abord les équations horaires du mouvement du passager dans $\mathcal{R}'$ et du train dans $\mathcal{R}$.

Le mouvement du passager dans $\mathcal{R}'$ est un mouvement rectiligne uniforme. En reprenant les résultats de la section 1.6 on obtient donc $x'(t) = x_0 + v_P t$ et $v'(t) = v_P$.

Le mouvement du train (décrit par le point O') dans $\mathcal{R}$ est aussi rectiligne uniforme et donc donné par $x_T(t) = v_T t$ et $v_T(t) = v_0$.

Utilisons maintenant la loi de composition des positions pour déterminer le position $x(t)$ du passager dans $\mathcal{R}$. La projection de la formule (1.77) sur $\vec{u}_x$ donne directement

$$x(t) = x_T(t) + x'(t) = x_0 + (v_P + v_0)t \tag{1.81}$$

puisque $\overrightarrow{OO'} \cdot \vec{u}_x = x_T$.

De même, on utilise ensuite la loi de composition des vitesses (1.79) pour déterminer la vitesse $v(t)$ du passager dans $\mathcal{R}$:

$$v(t) = v_T(t) + v'(t) = v_0 + v_P \tag{1.82}$$

puisque $\frac{d\vec{OO'}}{dt}|_{\mathcal{R}} \cdot \vec{u}_x = v_T$. On vérifie enfin la cohérence du résultat en notant que $v = \dot{x}$.

1.9.3 Cas de deux référentiels en mouvement relatif de rotation

Complément : Cas de deux référentiels en mouvement relatif de rotation

Considérons le cas où les origines des deux référentiels coïncident, mais où leurs axes dans le plan Oxy sont en rotation les uns par rapport aux autres. On note $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{u}_z$ la vitesse de rotation des vecteurs unitaires $\vec{u'}_x$ et $\vec{u'}_y$ de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ qui est supposé fixe.
Remarquons d'abord qu'un point immobile M dans $\mathcal{R}'$ décrit un mouvement circulaire dans $\mathcal{R}$, sa vitesse étant donnée par $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$. Si le point possède de plus une vitesse $\vec{v'}$ dans $\mathcal{R}'$, sa vitesse dans $\mathcal{R}$ sera donnée par $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{v'}$. En effet, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'M} = \vec{r'}$ et donc

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(x'\vec{u'}_x + y'\vec{u'}_y + z'\vec{u'}_z) = \vec{v'} + x'\frac{d\vec{u'}_x}{dt} + y'\frac{d\vec{u'}_y}{dt}. \tag{1.83}$$

Utilisant le fait que $\frac{d\vec{u'}_x}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u'}_x$ et $\frac{d\vec{u'}_y}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u'}_y$, on peut récrire sous une forme compacte

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r'} \tag{1.84}$$

le deuxième terme, qui est la vitesse dans $\mathcal{R}$ d'un point qui serait fixe dans $\mathcal{R}'$, est la vitesse d'entraînement. Calculons maintenant l'accélération, toujours en nous plaçant dans le référentiel $\mathcal{R}$. On a

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}|_{\mathcal{R}} = \frac{d\vec{v'}}{dt}|_{\mathcal{R}} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}|_{\mathcal{R}} \wedge \vec{r'} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r'}}{dt}|_{\mathcal{R}} \tag{1.85}$$

Nous pouvons évaluer séparément les différents termes. D'une part

$$\frac{d\vec{v'}}{dt} = \vec{a'} + v'_x\frac{d\vec{u'}_x}{dt} + v'_y\frac{d\vec{u'}_y}{dt} = \vec{a'} + \vec{\omega} \wedge \vec{v'} \tag{1.86}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r'}}{dt} &= \vec{\omega} \wedge \frac{d}{dt}(x'\vec{u'}_x + y'\vec{u'}_y + z'\vec{u'}_z) && (1.87)\\
&= \vec{\omega} \wedge \left(\vec{v'} + x'\frac{d\vec{u'}_x}{dt} + y'\frac{d\vec{u'}_y}{dt}\right) && (1.88)\\
&= \vec{\omega} \wedge \vec{v'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r'}) && (1.89)
\end{aligned}$$

Au final, on obtient

$$\vec{a} = \vec{a'} + \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r'})\right] + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v'} \tag{1.90}$$

Le terme entre crochet est l' accélération d'entraînement, et le dernier terme, qui est non nul pour un point qui n'est pas au repos dans $\mathcal{R}'$, est l'**accélération de Coriolis**.
Dans le cas d'une rotation uniforme, où $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0}$, l'accélération d'entraînement est purement centripète

$$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r'}) = -\omega^2 r'\,\vec{u'}_r \tag{1.91}$$

1.9.4 Cas général

Complément : Cas général

Dans le cas général où $\mathcal{R}'$ serait en mouvement de translation et rotation par rapport à $\mathcal{R}$, on obtient des formules similaires à celle que nous venons d'exposer pour le cas de deux référentiels en rotation, à l'exception du fait qu'il faut sommer la vitesse d'entraînement de translation et l'accélération d'entraînement de translation à celles de rotation

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{v}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} + \vec{\omega} \wedge \vec{r'} \tag{1.92}$$

$$\vec{a} = \vec{a'} + \left[\vec{a}_{\mathcal{R}'|\mathcal{R}} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r'} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r'}) \right] + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v'} \tag{1.93}$$

Chapitre 2

Dynamique du point matériel

Objectifs d'apprentissage

- Enoncer et appliquer les 3 lois de Newton
- Définir la quantité de mouvement
- Exprimer et représenter sur un schéma les forces suivantes : force de gravitation, force de Coulomb, force de Lorentz, frottement visqueux, frottement solide dynamique
- Manipuler la 2ème loi de Newton en coordonnées cartésiennes, polaires et cylindriques

La dynamique s'intéresse aux causes physiques (les forces) de la mise en mouvement d'un objet (système). Les trois lois du mouvements ont été énoncées par Isaac Newton (1642-1727), fondateur de la mécanique classique (dite aussi "Newtonienne"), et publiées en 1687 dans son ouvrage : *"Philosophiae naturalis principia mathematica"*. Nous allons présenter ces lois de Newton dans le cadre du modèle du point matériel.

Les limites de la mécanique classique

La mécanique classique permet de décrire de façon très satisfaisante [a] le mouvement d'objets dont la vitesse est petite par rapport à la vitesse de la lumière. Lorsque cette hypothèse n'est pas vérifiée, il faut faire appel à la théorie de la relativité développée par Einstein au début du XX^{e} sècle. L'autre limite de la théorie de Newton se situe au niveau atomique. C'est l'incapacité de la mécanique classique de prédire correctement les propriétés des atomes qui a conduit les physiciens à construire vers les années 1920-1930 une nouvelle théorie, appelée *mécanique quantique*, capable de rendre compte des propriétés atomiques de façon satisfaisante.

a. C'est à dire qu'il y a un bon accord entre les prédictions que cette théorie permet de faire et les observations expérimentales.

Un petit point d'histoire des sciences : Emilie du Châtelet et la théorie de Newton en France

Émilie Du Châtelet (1706-1749) est un maillon clé de la diffusion de la pensée de Newton en France. Elle commenta et traduisit (1759) les Principia mathematica (1687) du latin en français et surtout transposa le langage euclidien de Newton dans le langage analytique codifié par Leibniz. Elle a été pendant plus d'une quinzaine d'année la compagne de Voltaire grâce à qui elle découvrit les travaux de Newton alors qu'il revenait d'un voyage en Angleterre. Hypermotivée, elle a appris la physique auprès de Maupertuis et Clairaut et les mathématiques de Leibniz auprès de l'Allemand Samuel Koenig.

2.1 Première loi de Newton : le principe d'inertie

Lorsqu'un point matériel ne subit aucune action (interaction, force) venant de l'extérieur, on dit que ce point matériel est **isolé**. On utilise le terme **pseudo-isolé** lorsque ce point matériel subit des forces de la part d'autres systèmes mais que la somme de ces forces est nulle :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

Lorsqu'un point matériel est pseudo-isolé, tout se passe donc comme s'il était isolé. Le concept de système isolé est en fait un concept idéal qui n'est jamais parfaitement réalisé. En effet, une masse est toujours soumise au moins à l'attraction gravitationnelle des objets qui l'entourent. Même si ces objets sont très loin, la force de gravitation qu'ils exercent n'est jamais rigoureusement nulle et un point matériel ne peut jamais être parfaitement isolé.

Énoncé du principe d'inertie (1re loi de Newton)

Il existe des référentiels privilégiés, appelés **galiléens** ou **inertiels**, dans lesquels un point matériel isolé est soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

Sous cette forme, la première loi de Newton

1. définit les référentiels galiléens / inertiels
2. postule leur existence

Le principe d'inertie ne régit que le mouvement du centre d'inertie d'un corps (donc d'un point matériel). Par exemple, si un hockeyeur frappe un palet qui glisse sur la glace sans frottement celui-ci peut avoir un mouvement de rotation mais son centre d'inertie décrira une trajectoire rectiligne uniforme.

Définitions : mouvement rectiligne uniforme

Un point matériel est animé d'un mouvement rectiligne uniforme si sa trajectoire est une droite et que sa vitesse est de norme constante. La trajectoire étant rectiligne, cela signifie que le vecteur vitesse ne change pas d'orientation. Comme de plus la norme de la vitesse est constante on en déduit que

$$\begin{aligned} \text{mouvement rectiligne uniforme} \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{v} \ \text{ est constant} \\ &\Leftrightarrow \quad \vec{a} = \vec{0} \end{aligned}$$

Théorème

Tout référentiel animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui aussi galiléen.

Démonstration :

On considère un référentiel $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ galiléen, et un référentiel $\mathcal{R}'(O', x', y', z')$ animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}$. On considère également un point matériel M isolé. Les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ étant en translation l'un par rapport à l'autre, la loi de composition des accélérations s'écrit :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_{O'/\mathcal{R}} + \vec{a}_{M/\mathcal{R}'}$$

Puisque $\mathcal{R}'$ est en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}$, on a $\vec{a}_{O'/\mathcal{R}} = \vec{0}$. De plus, comme M est supposé isolé et que $\mathcal{R}$ est galiléen, on a $\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{0}$. On en déduit donc que $\vec{a}_{M/\mathcal{R}'} = \vec{0}$. Cela signifie que si un point matériel est isolé, alors dans le référentiel $\mathcal{R}'$ il est animé d'un mouvement rectiligne uniforme. Le référentiel $\mathcal{R}'$ est donc lui aussi galiléen. Inversement, on peut montre que si le référentiel $\mathcal{R}'$ n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}$, alors $\mathcal{R}'$ n'est pas galiléen.

Expérimentalement on constate que le **référentiel de Copernic** ($\approx$ référentiel héliocentrique) est une très bonne approximation de référentiel galiléen. Le **référentiel géocentrique** n'est pas animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel de Copernic. Il ne peut donc pas être considéré comme galiléen de manière générale. En effet, bien que les axes du référentiel géocentrique puissent être considérés comme fixes par rapport à ceux du référentiel de Copernic (ils pointent tous vers des astres lointains), l'origine du référentiel géocentrique (le centre de masse de la Terre) est animé d'un mouvement circulaire dans le référentiel de Copernic. Cependant, si on considère une expérience dont la durée est très petite par rapport à la période de rotation de la Terre autour du Soleil (1 an), alors, on peut considérer qu'au cours de cette expérience, la trajectoire du centre de la Terre est approximativement rectiligne et uniforme. On peut alors considérer que le référentiel géocentrique est approximativement galiléen.

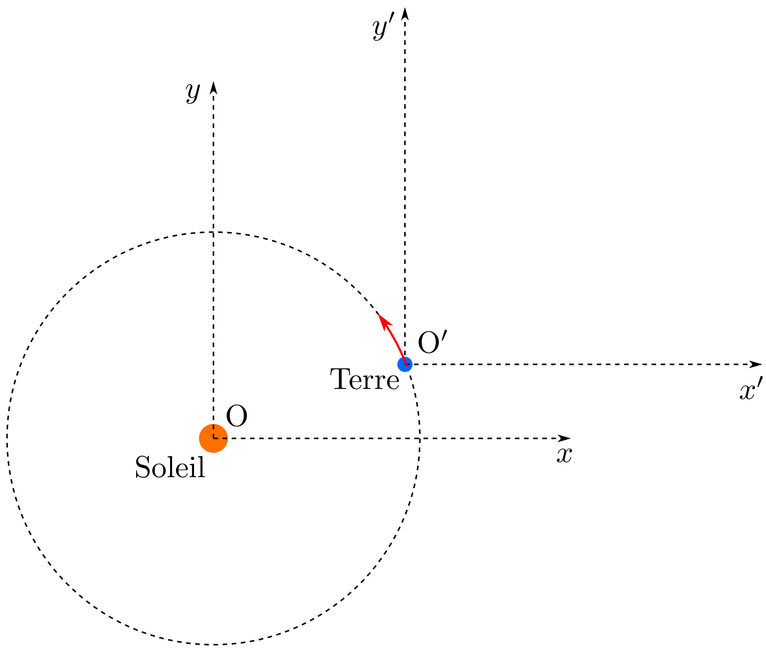


FIGURE 2.1 – Référentiels héliocentrique (O, x, y) et géocentrique (O', x', y). On a représenté en rouge la trajectoire du centre de la Terre pendant une durée petite par rapport à la période de rotation de la Terre autour du Soleil. Cette portion de cercle peut être considérée comme approximativement rectiligne. Au cours de ce déplacement, le référentiel géocentrique peut donc être considéré comme animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel héliocentrique.

De la même manière, le référentiel terrestre n'est pas animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel de Copernic. Il ne peut donc pas être considéré comme galiléen de manière générale. Cependant, si on considère une expérience dont la durée est petite par rapport à la période de rotation de Terre autour de son axe (24h), alors on peut considérer que le référentiel terrestre est approximativement en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel géocentrique que l'on peut considérer comme galiléen pour cette durée. Dans ce cas, le référentiel terrestre peut donc être considéré comme approximativement galiléen. En conclusion :

Caractère galiléen des référentiels courants

- les référentiels de Copernic et héliocentrique sont considérés comme de très bonnes approximation d'un référentiel galiléen
- le référentiel géocentrique peut être considéré comme galiléen pour des expériences dont la durée est petite par rapport à 1 an
- le référentiel terrestre peut être considéré comme galiléen pour des expériences dont la durée est petite par rapport à 1 jour

2.2 Deuxième loi de Newton : principe fondamental de la dynamique

2.2.1 Principe fondamental de la dynamique

La deuxième loi de Newton ou principe fondamental de la dynamique (PFD) relie le mouvement d'un point matériel aux forces exercées sur ce point matériel par le milieu extérieur [1]. La somme de toutes les forces exercées sur le point matériel est appelée **résultante des forces**. Cette loi permet en principe de déterminer le mouvement d'un point matériel si on connaît toutes les forces qui lui sont appliquées ainsi que la position et la vitesse initiales.

Énoncé du PFD

Dans un référentiel galiléen, un point matériel de masse m soumis à une résultante des forces $\vec{F}$ possède une accélération $\vec{a}$ telle que :

$$m\,\vec{a} \;=\; \vec{F}$$

Remarques :

- Le vecteur accélération correspond à la variation par unité de temps du vecteur vitesse. Cette relation signifie donc que les forces exercées sur un point matériel engendrent une variation du vecteur vitesse.
- Au cours du mouvement d'un point matériel dans un référentiel galiléen, cette relation doit être vérifiée à tout instant : $m\,\vec{a}(t) = \vec{F}(t)$
- Pour une force $\vec{F}$ donnée, l'accélération produite est proportionnelle à $\frac{1}{m}$. Donc plus la masse du point matériel est grande, plus l'accélération produite est faible.
- Le vecteur accélération correspond à la dérivée seconde du vecteur position : $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}(t)$. Les forces exercées sur un point matériel peuvent dépendre
  - de la position $\vec{r}$ de ce point (ex : rappel d'un ressort, gravitation, force électrostatique)
  - de sa vitesse $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ (ex : frottement visqueux, force de Lorentz)
  - directement du temps (ex : force de traction dont l'intensité est contrôlée par un opérateur)

  Le PFD est donc de manière générale une équation reliant la fonction $\vec{r}(t)$ et ses deux premières dérivées :

  $$m\,\ddot{\vec{r}} \;=\; \vec{F}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$$

  Mathématiquement, la deuxième loi de Newton correspond donc à une équation différentielle du second ordre pour la fonction $\vec{r}(t)$.

1. Le fait de préciser que les forces exercées sur un point matériel sont les forces exercées par le milieu extérieur est redondant puisque par définition, un point matériel est un objet qui ne possède pas de structure interne. Il ne peut donc pas y avoir de force *intérieures* dans le cas d'un point matériel. Les forces intérieures ne peuvent exister que dans le cas d'un système composé de plusieurs sous-systèmes en interaction les uns avec les autres.

- L'expression $m\vec{a} = \vec{F}$ est une équation vectorielle, c'est à dire une égalité entre 2 grandeurs vectorielles. Pour pouvoir résoudre cette équation, il est en général nécessaire de projeter cette relation sur une base vectorielle adaptée au problème étudié (cartésienne, polaire, cylindrique, sphérique).

2.2.2 La quantité de mouvement

Vecteur quantité de mouvement : $\vec{p}$

La **quantité de mouvement** d'un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{v}$ est définie par

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

La masse d'un point matériel étant supposée constante, $\dot{\vec{p}} = m\vec{a}$. On peut donc ré-écrire le principe fondamental de la dynamique sous la forme :

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$$

où $\vec{F}$ est la résultante des forces appliquées au point matériel. Il s'agit d'une forme équivalente au principe fondamental de la dynamique pour un point matériel mais elle présente l'avantage d'être généralisable à un système matériel quelconque. Le vecteur quantité de mouvement dépend du référentiel dans lequel est exprimée la vitesse. Il s'exprime en kg.m.s^{-1}.

2.3 Troisième loi de Newton : le principe des actions réciproques

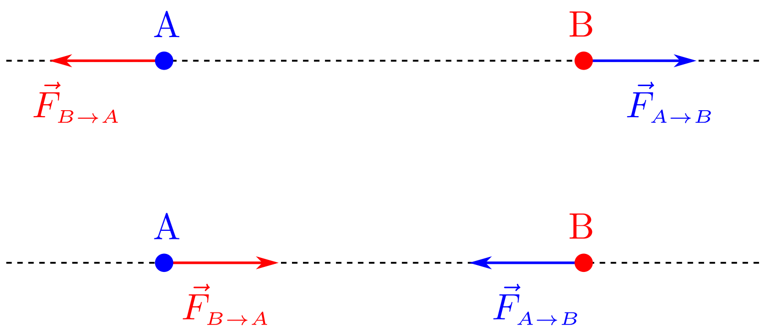
La troisième loi de Newton est aussi connue sous le nom de principe de l'action et de la réaction, ou principe des actions réciproques.

Énoncé du principe des actions réciproques

Si un point matériel A exerce une force sur un point matériel B, alors le point matériel B exerce simultanément sur A une force d'intensité égale, de même direction, mais de sens opposé.

$$\vec{F}_{A \to B} = -\vec{F}_{B \to A}$$

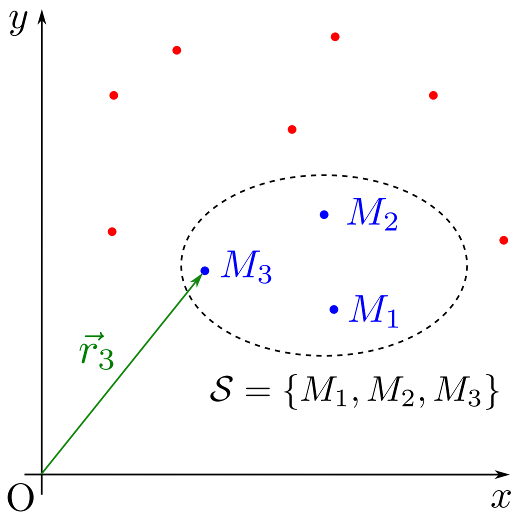
Ces deux forces sont portées par la droite d'action (AB).



2.4 Mouvement du centre de masse d'un système

On va considérer ici un système $\mathcal{S}$ constitué par un ensemble de N points matériels M_i de masse m_i ($i = 1$ à N). Tout ce qui n'appartient pas à ce système est appelé *extérieur du système*. Lorsqu'on s'intéresse à un tel système, il faut distinguer

- les **forces intérieures** à $\mathcal{S}$, c'est-à-dire les forces que les points matériels appartenant à $\mathcal{S}$ exercent les uns sur les autres
- les **forces extérieures** à $\mathcal{S}$, c'est-à-dire les forces que le milieu extérieur exercent sur les points matériels appartenant à $\mathcal{S}$



2.4.1 Mouvement du centre de masse d'un système

Pour caractériser le mouvement du centre de masse d'un système, nous allons tout d'abord exprimer l'accélération du centre de masse d'un système composé de 2 points matériels avant de généraliser au cas d'un système de N points matériels.

Système de 2 points matériels

Considérons un système $\mathcal{S}$ composé de 2 points matériels m_1 et m_2 ayant pour positions $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ et pour vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, respectivement. Les forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ sont les résultantes des forces totales (forces externes et internes) exercées sur chacun des points matériels. Ces forces se décomposent de la façon suivante :

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{21} \quad \text{et} \quad \vec{F}_2 = \vec{F}^{ext} + \vec{F}_{12}$$

avec $\vec{F}_{21}$ la force exercée par m_2 sur m_1 et $\vec{F}_1^{ext}$ la résultante des forces extérieures appliquées sur m_1. On définit de manière similaire les forces exercées sur m_2.

En appliquant la deuxième loi de Newton sur m_1 et m_2 on peut écrire :

$$\begin{aligned} m_1\vec{a}_1 &= \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{21} \\ m_2\vec{a}_2 &= \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{12} \end{aligned}$$

En faisant la somme de ces 2 relations on obtient :

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}$$

D'après la troisième loi de Newton (principe des actions réciproques) : $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$. En notant $\vec{F}^{ext} = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext}$ la résultante des forces extérieures appliquées au système on peut alors écrire :

$$m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 = \vec{F}^{ext}$$

On note G le centre de masse du système et $M = m_1 + m_2$ la masse totale du système. À partir de la définition du centre de masse, on montre que

$$\vec{a}_G = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{a}_i$$

On peut donc finalement écrire :

$$M\,\vec{a}_G \;=\; \vec{F}^{ext}$$

Système de N points matériels

La généralisation du résultat précédent peut être obtenue simplement. De la même manière que précédemment, on écrit :

$$\begin{aligned}
&\vec{F}_1 = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{21} + ... + \vec{F}_{N1}\\
&\vec{F}_2 = \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{12} + ... + \vec{F}_{N2}\\
&...\\
&\vec{F}_N = \vec{F}_N^{ext} + \vec{F}_{1N} + \vec{F}_{2N} + ... + \vec{F}_{(N-1)N}
\end{aligned}$$

En sommant la deuxième loi de Newton appliquée sur chaque point M_i du système et en utilisant la troisième loi de Newton pour chaque paire de points matériels, on obtient finalement le principe fondamentale de la dynamique pour un système :

Principe fondamental de la dynamique pour un système

Dans un référentiel galiléen, l'accélération du centre de masse d'un système de masse M soumis à une résultante des forces extérieures $\vec{F}^{ext}$ s'écrit

$$M\,\vec{a}_G \;=\; \vec{F}^{ext}$$

Cette relation, formellement identique à la deuxième loi de Newton, relie l'accélération du centre de masse à la résultante des forces extérieures appliquées au système. Elle montre que le centre de masse d'un système se déplace comme un point matériel dont la masse serait égale à la masse totale du système et qui serait soumis à la résultante des forces extérieures agissant sur le système. Cette relation permet de justifier la démarche consistant à approximer un système par un point matériel, dès lors que l'on ne s'intéresse qu'au mouvement du centre de masse du système.

Cas d'un système isolé

Pour un système isolé (ou pseudo-isolé), la résultante des forces extérieures est nulle et le centre de masse est donc animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

2.5 Les forces

La notion de force a été largement abordée dans l'UE Mécanique - Physique 1 (S1), ici, nous n'allons aborder que des forces qui n'ont été que peu ou pas vues au S1. Les forces sont les causes du mouvement non rectiligne uniforme et modélisent des interactions. Elles résultent de l'action d'un objet sur un autre par contact (pression, frottement visqueux, dynamique ...) ou à distance (force d'interaction gravitationnelle, électromagnétique, coulombienne...). Les forces sont modélisées par un vecteur exprimé aussi bien dans la base cartésienne liée au référentiel que dans une base locale (coordonnées polaires, cylindriques).

Comment connaît-on l'expression des forces ?

À partir du principe d'inertie qui stipule que la quantité de mouvement $\vec{p_t}$ d'un système isolé est conservée, on peut déduire que si une planète de masse m_1 subit une action extérieure de la part du soleil de masse m_2 alors sa quantité de mouvement varie au cours du temps. On a donc :

$$\frac{d\vec{p_t}}{dt} \neq \vec{0}$$

La dérivée d'un vecteur étant un vecteur, on peut définir un vecteur $\vec{F}$, appelé force exercée par le soleil sur la masse m_1, et écrire :

$$\frac{d\vec{p_t}}{dt} = \vec{F}$$

On peut alors étudier la trajectoire de la masse m_1 soumise à l'action de m_2. En calculant pour chaque point de la trajectoire la quantité $\frac{d\vec{p_t}}{dt}$, on découvre les propriétés du vecteur $\vec{F}$. On voit ainsi que $\vec{F}$ varie comme l'inverse du carré de la distance de la planète au soleil. Si on change de planète et que l'on considère que cette interaction à une nature universelle correspondant à l'interaction entre deux masses, on va s'apercevoir que $\vec{F}$ est proportionnel à la masse de la planète. Par symétrie du problème, puisqu'on a une masse en interaction avec une autre, on en déduit que $\vec{F}$ est également proportionnelle à la masse du soleil. Par ailleurs, on constate que $\vec{F}$ est dirigé de la planète vers le soleil en chaque point. On peut donc postuler l'existence d'une force universelle régissant l'interaction entre deux masses ayant la forme suivante :

$$\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1} = -G\frac{m_1m_2}{r^2}\vec{u}_{12}$$

où $\vec{F}_{1\to2}$ (resp. $\vec{F}_{2\to1}$) est la force exercée par la masse m_1 sur la masse m_2 (resp. m_2 sur m_1), r la distance entre les deux masses et $\vec{u}_{12}$ le vecteur unitaire allant de 1 vers 2. G est une constante qu'il faut alors mesurer sur un système particulier pour en connaître la valeur.
Notons que c'est le caractère universel de cette force qui nous permet d'inverser la logique pour postuler que deux autres masses m et M en interaction subiront une force de même nature. On obtient alors le mouvement de la masse m sous l'action de la masse M en résolvant l'équation :

$$\frac{d\vec{p_t}}{dt} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{u}_{12}$$

L'inconnue est maintenant $\vec{p_t}$. On a maintenant une équation qui correspond à la seconde loi de Newton pour une force unique. Pour obtenir la seconde loi de Newton usuelle que vous avez énoncée au premier semestre, il faut postuler que si un système est soumis à un ensemble de forces extérieures, la force totale qu'il subit est la somme vectorielle de toutes ces forces, d'où son nom usuel de "Principe fondamental de la dynamique". Pour chaque autre force universelle, on procède de la même manière et on obtient ainsi sa modélisation vectorielle. Cette dernière connue, on peut ensuite être l'utiliser dans d'autres situations analogues via la seconde loi de Newton pour déterminer la loi du mouvement associée à ces nouvelles situations.

2.5.1 Forces d'interaction à distance

Force de gravitation

C'est en 1650, que Newton (*encore*) suppose que le mouvement de la Lune autour de la Terre a la même cause que la chute de corps sur la surface de la Terre. Il énonce donc qu'il existe une force d'attraction exercée par une masse m_1 sur une masse m_2 qui est d'autant plus grande que les masses sont grandes et que la distance entre celles-ci est petite. Cette force est nommée force d'interaction gravitationnelle ou force de gravitation newtonnienne.

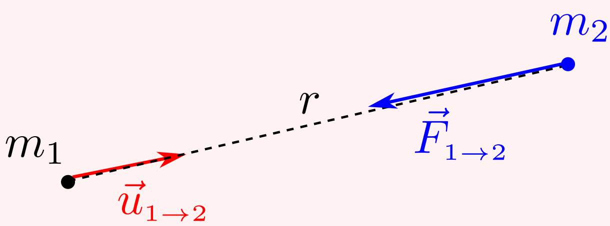
Énoncé : Force de gravitation

La force d'**interaction gravitationnelle** exercée par un point matériel de masse m_1 sur un point matériel de masse m_2 s'écrit

$$\vec{F}_{1\to 2} \;=\; -G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\vec{u}_{12}$$

où r est la distance entre les deux masses et $\vec{u}_{12}$ le vecteur unitaire allant de m_1 vers m_2. G est la **constante de gravitation universelle** et vaut

$$G \;\approx\; 6.67\times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$$



Remarques :

- La masse étant une grandeur toujours positive, la force de gravitation est toujours attractive (à cause du signe $-$).
- On peut montrer que la force de gravitation exercée par un objet de symétrie sphérique (ex : planète, étoile) de masse M centré en O sur un point matériel de masse m situé en $\vec{r}$ s'écrit

$$\vec{F} \;=\; -G\,\frac{Mm}{r^2}\,\vec{u}_r \qquad \text{avec} \qquad \vec{u}_r \;=\; \frac{\vec{r}}{r}$$

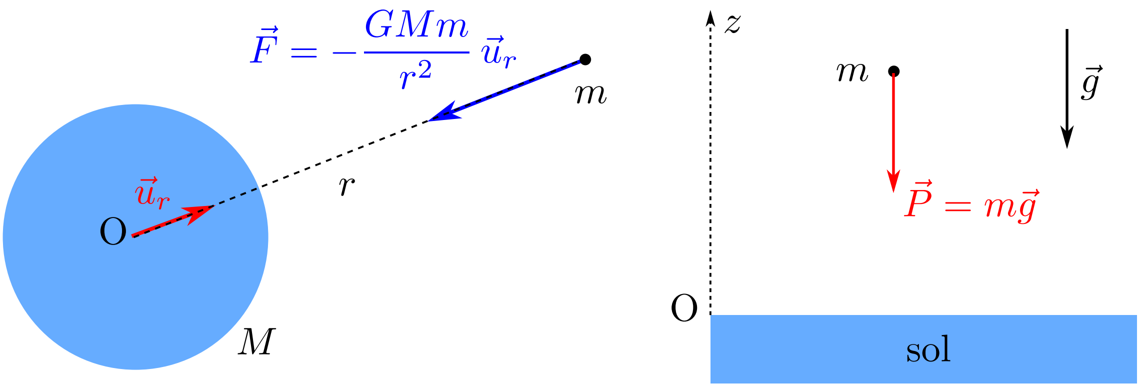


Figure 2.2 – Gauche : représentation générale de la force de gravitation exercée par une planète / étoile sur une masse ponctuelle m. Droite : représentation de la force de gravitation exercée par une planète sur un objet situé au voisinage de sa surface.

Un cas particulier mais important de la force de gravitation est celle qui s'exerce sur un objet au voisinage de la surface de la Terre, elle est appelée **force de pesanteur**, ou **poids**. Dans ce cas la masse m_1 est la masse de la Terre ($M_T \approx 6\times 10^{24}$ kg) et la masse m_2 celle du corps (m) au voisinage de sa surface. **La force gravitationnelle exercée par la Terre sur ce corps est donc le poids de celui-ci :**

$$\vec{F}_{M\to m} = m\vec{g} = -G\frac{M_T m}{R_T^2}\,\vec{u}_r$$

avec R_T ($\approx$ 6400 km) le rayon de la Terre[2] et $\vec{g}$ le vecteur appelé **accélération de la pesanteur**. Pour un objet évoluant dans une région dont les dimensions sont petites par rapport au rayon de la Terre, l'orientation du vecteur $\vec{u}_r$ reste approximativement constante, "vers le bas". On peut alors définir un axe (Oz) correspondant à cette direction, qui sera alors appelée *verticale*. On peut alors écrire

$$\vec{g} \;=\; -G\frac{M_T}{R_T^2}\,\vec{u}_z \qquad \text{avec} \qquad \|\vec{g}\| \approx 9.81\ \text{m.s}^{-2}$$

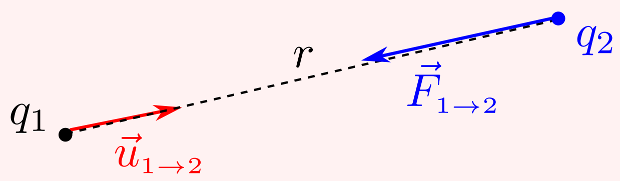
Force d'interaction coulombienne

La **force coulombienne**, ou **force électrostatique**, est la force qui s'exerce entre deux charges électrique fixes ou se déplaçant avec une vitesse faible par rapport à la vitesse de la lumière. L'expression de cette force a été déterminée en 1785 par le physicien Charles-Augustin Coulomb.

Énoncé : Force d'interaction coulombienne

La force d'interaction exercée par une charge q_1 sur une charge q_2 s'écrit :

$$\vec{F}_{1\to 2} \;=\; K\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\vec{u}_{12}$$



avec

- r est la distance entre les deux charges
- $\vec{u}_{12}$ le vecteur unitaire orienté de q_1 vers q_2
- $K \;\approx\; 9\times 10^9$ USI   la constante d'interaction coulombienne[a]

a. On écrit très souvent K sous la forme $K = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}$ où ϵ_0 est la constante diélectrique du vide.

La force coulombienne a une forme très similaire à la force gravitationnelle mais elle présente cependant une différence importante : si les deux charges ont le même signe l'interaction est **répulsive** alors que si elles sont de signes opposés, elle est **attractive**.

Y a-t-il des forces d'actions à distance ?

Les forces précédentes introduites en mécanique newtonnienne sont des forces qui décrivent des actions à distance et instantanées. Plusieurs théoriciens se sont élevés contre un tel concept car ils ne concevaient pas qu'un objet puisse interagir à distance sur un autre sans le toucher. Cette critique est devenue plus importante à la fin du XIXème siècle quand on a découvert que rien n'allait plus vite que la lumière et qu'une action instantanée était un problème. Pour résoudre cette contradiction, les théories modernes des interactions décrivent les interactions comme l'échange de particules qui se déplacent au mieux à la vitesse de la lumière d'une masse à l'autre. La source d'interaction émet une telle particule en lui transférant de la quantité de mouvement qui est ensuite transférée à la seconde masse quand elle absorbe cette particule virtuelle.

2. On suppose en effet que l'objet dont on étudie le mouvement reste au voisinage de la surface de la Terre, et donc que $r(t) \approx R_T$.

Force de Lorentz

Énoncé : Force d'interaction électromagnétique

La force de Lorentz ou force d'interaction électromagnétique est la force que subit une charge électrique q animée d'une vitesse $\vec{v}$ lorsqu'elle est en présence d'un champ électrique $\vec{E}$ et d'un champ magnétique $\vec{B}$. Cette force s'écrit :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse de la particule chargée dans le référentiel où $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont mesurés.

Dans le cas où il n'y a pas de champ magnétique, on a donc $\vec{F} = q\vec{E}$. Si le champ électrique est uniforme [3] et constant [4] alors la force subie par une charge q est constante (en norme et en orientation) au cours de son mouvement. S'il n'y a pas d'autre force on aura donc, comme dans le cas d'une masse soumise uniquement à son poids, un mouvement uniformément accéléré.

Dans le cas où il n'y a pas de champ électrique, on a donc $\vec{F} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$. Les propriétés de cette force découlent directement des propriétés du produit vectoriel : elle est perpendiculaire à $\vec{v}$ et à $\vec{B}$. en l'absence d'autre force, le fait que cette force soit constamment $\perp$ $\vec{v}$ implique que l'accélération tangentielle est nulle (voir base de Frenet), et donc que le mouvement est uniforme. Dans la cas fréquent où l'on considère un champ magnétique uniforme et constant le fait que cette force soit $\perp$ $\vec{B}$ implique que l'accélération dans la direction du champ est nulle. Par exemple, si $\vec{B} = B\,\vec{u}_z$, alors on aura $a_z(t) = 0$.

2.5.2 Force de contact entre deux solides

Considérons un solide (système A) posé sur une table (système B), le tout étant placé dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ (voir figure 2.3, gauche). Le système A est donc soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$. En l'absence d'autre force le solide A devrait donc avoir un mouvement accéléré vers le bas. Le fait que A ne passe pas à travers la table implique que ce solide est soumis, en plus de son poids, à une force exercée par la table $\vec{F}_{B\to A}$ qui va empêcher la pénétration de A dans la table. Cette force est qualifiée de **force de réaction** exercée par la table sur le solide A. On peut également la qualifier de **force de contact**.

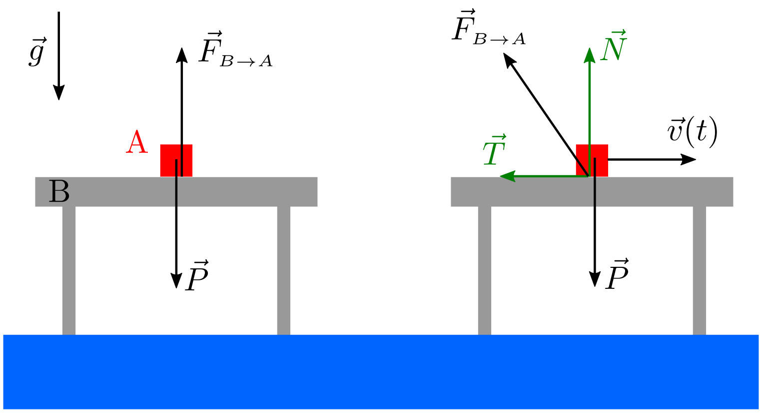


FIGURE 2.3

Considérons maintenant le cas où le solide A l'on fait glisser le solide A sur la table en le lançant avec une vitesse initiale v_0 (voir figure 2.3, droite). Tant que le solide reste sur la table, on constate qu'il se déplace horizontalement et que sa vitesse diminue au cours de son mouvement. S'il était

3. c'est à dire identique en tout point de l'espace.
4. c'est à dire qu'il ne varie pas au cours du temps.

soumis uniquement à son poids, le solide A devrait avoir une trajectoire courbée vers le bas et sa vitesse horizontale devrait être constante. Le fait que la trajectoire de l'objet soit horizontale et non pas courbée vers le bas est dû à la réaction de la table exercée sur A. Cette force de réaction aura donc une composante opposée à $\vec{P}$. Si la vitesse de A diminue au cours de son mouvement, cela implique que la table exerce une force tangentielle à $\vec{v}$, et de sens opposé. Cette force est lié à l'existence de frottements au niveau de la zone où A et B sont en contact. La réaction du support possède donc ici deux composantes :

- une composante normale $\vec{N}$, perpendiculaire au support et qui s'oppose à la pénétration de A dans B
- une composante tangentielle $\vec{T}$, opposée à la vitesse de A par rapport à B et qui traduit l'existence de frottements entre les 2 solides

$$\vec{F}_{B\to A} \;=\; \vec{N} \;+\; \vec{T}$$

Force de contact en absence de frottement

En l'absence de frottement, la force de contact exercée sur un point matériel en mouvement sur une surface solide est perpendiculaire à cette surface, au point de contact.

Expression de la force de frottement solide dynamique

Lorsqu'un point matériel glisse sur une surface solide avec une vitesse (relative) $\vec{v}$, il subit une force de frottement de sens opposé à $\vec{v}$ et de norme proportionnelle à la composante normale de la force de contact entre le point matériel et le solide :

$$F_{frottement} \;=\; \mu_d\, N$$

Le coefficient de proportionnalité μ_d est appelé *coefficient de frottement dynamique*. Sa valeur dépend de la nature des matériaux en contact et de la rugosité des surface en contact.

Propriété : la norme de la force de frottement solide ne dépend pas de la vitesse avec laquelle le point matériel glisse.

Sur la figure 2.4 on a représenté deux situations courantes où intervient la réaction d'un support. Sur la figure de gauche, on considère un point matériel M glissant sans frottement sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Dans cette situation, le point M a un mouvement rectiligne suivant (Ox). Son accélération suivant (Oy) est donc constamment nulle. Il faut donc que les forces exercées sur M suivant cette direction se compensent. Si M n'est soumis qu'à son poids $\vec{P}$ et à la réaction normale $\vec{N}$, alors on en déduit que cette réaction normale doit être égale à l'opposé de la composante suivant (Oy) du poids : $\vec{N} = mg\cos\alpha\,\vec{u}_y$.

Sur la figure 2.4 droite, on considère cette fois-ci un point matériel glissant sur une surface hémisphérique de centre O et rayon R. On rappelle que l'accélération d'un point animé d'un mouvement circulaire de rayon s'écrit en coordonnées polaires :

$$\vec{a} \;=\; -R\dot{\varphi}^2\,\vec{u}_r \;+\; R\ddot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi$$

Les forces exercées sur M sont le poids $\vec{P} = -mg\cos\varphi\,\vec{u}_r + mg\sin\varphi\,\vec{u}_\varphi$ et la réaction du support $\vec{N} = N\,\vec{u}_r$ (on suppose qu'il n'y a pas de frottements). En projetant la 2^{e} loi de Newton suivant $\vec{u}_r$ on obtient

$$-mR\dot{\varphi}^2 \;=\; -mg\cos\varphi \;+\; N$$

Puisque $v = R|\dot{\varphi}|$, on peut écrire $R\dot{\varphi}^2 = \frac{v^2}{R}$ et donc

$$N(t) \;=\; mg\cos\varphi(t) \;-\; \frac{mv(t)^2}{R}$$

Dans cette situation, on constate donc que la réaction du support n'est pas constante et n'est pas égale à l'opposé de la composante du poids perpendiculaire au support. Ceci est dû au fait que pour un mouvement qui n'est pas rectiligne, l'accélération perpendiculaire (à $\vec{v}$) ne doit pas être nulle.

Le calcul qui vient d'être effectué montre que N (la norme de la réaction du support) est la somme de 2 termes

- $mg\cos\varphi$: positif, décroît lorsque φ varie entre 0 et $\pi/2$, et s'annule en $\pi/2$
- $-\dfrac{mv(t)^2}{R}$: négatif, dont la valeur absolue augmente au cours de la chute de M

Par conséquent, il existe une valeur $\varphi_{lim} \in [0, \pi/2[$ où N va s'annuler. N étant la norme de la force de réaction, elle ne peut pas prendre de valeur négative. Que se passe t-il donc alors ?

$\rightarrow$ en φ_{lim}, M va décoller ; l'annulation de la réaction du support correspond à la situation où le contact entre M et le support disparaît.

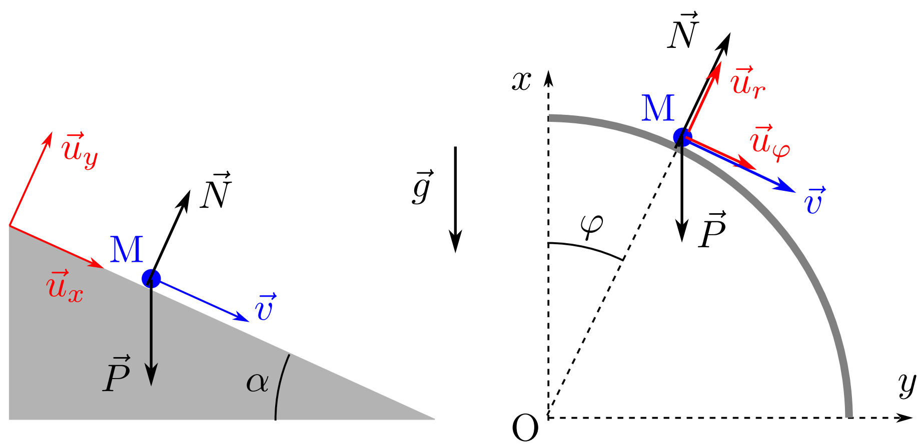


FIGURE 2.4 – Gauche : objet glissant sur un plan incliné rectiligne. Droite : objet glissant sur une surface courbe circulaire.

Remarque :
La situation serait différente si M était une perle coulissant le long d'un fil rigide. Dans ce cas, M ne pourrait pas décoller, mais la réaction du fil pourrait alors être orienté suivant $-\vec{u}_r$, à partir de l'instant où M tente de décoller.

2.5.3 Force de frottement fluide

Cette force apparaît lorsque un objet est en mouvement par rapport à un fluide. Elle résulte des collisions entre les molécules du fluide et la surface de l'objet. On l'appelle force de frottement car elle s'oppose toujours au mouvement de l'objet par rapport au fluide. Cette force possède 2 caractéristiques :

- elle est orientée dans le sens opposé au vecteur vitesse de l'objet par rapport au fluide
- sa norme est une fonction croissante de la vitesse de l'objet par rapport au fluide

Expression de la force de frottement fluide

Selon les valeurs de la viscosité du fluide, sa masse volumique, la taille et la vitesse de l'objet, principalement deux régimes existent :

- **régime visqueux** : ce régime s'observe pour des objets plutôt petits en mouvement à vitesse plutôt lente dans des fluides plutôt visqueux. Dans le régime visqueux, la force de frottement a pour expression :
$$\vec{F} = -\alpha\vec{v}$$
où α est un coefficient positif qui dépend de la forme du corps et des propriétés du fluide et $\vec{v}$ le vecteur vitesse de l'objet. Dans ce régime, la norme de la force de frottement est donc proportionnelle à la vitesse de l'objet par rapport au fluide.
- **régime inertiel** : ce régime s'observe pour des objets plutôt gros en mouvement à vitesse plutôt rapide dans des fluides plutôt peu visqueux. Dans le régime inertiel, la force de frottement a pour expression :
$$\vec{F} = -\beta v^2\vec{u}$$
où β est un coefficient positif qui dépend de la forme du corps et des propriétés du fluide, v la norme de la vitesse du corps et $\vec{u}$ le vecteur unitaire orienté dans le sens du déplacement. Dans ce régime, la norme de la force de frottement est donc proportionnelle au carré de la vitesse de l'objet par rapport au fluide.

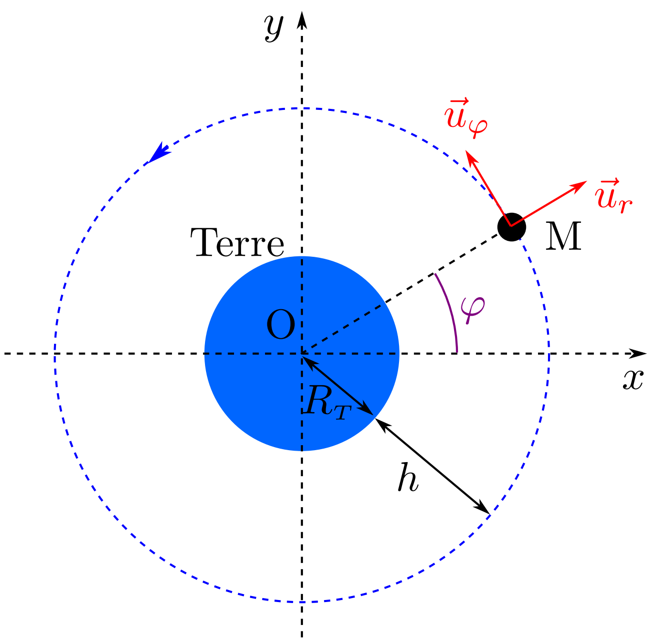
Le critère quantitatif permettant de déterminer quel régime est concerné sera détaillé dans le chapitre **Dynamique des fluides**.

2.6 Exemples d'application

Dans cette section nous allons traiter deux exemples qui vont nous permettre d'utiliser la deuxième loi de Newton pour étudier le mouvement d'un point matériel.

2.6.1 Le satellite géostationnaire

On étudie le mouvement d'un satellite S assimilé à une masse ponctuelle m décrivant une **orbite circulaire** autour de la Terre à une altitude h. La Terre est assimilée à une sphère homogène de masse M_T et de rayon R_T.



1. Dans quel référentiel est-il commode de se placer pour étudier le mouvement d'un satellite en orbite autour de la Terre ?
2. Montrer que dans ce référentiel le mouvement du satellite est uniforme.

3. Établir les expressions de la vitesse v et de la période T du satellite en fonction de son altitude h. Le mouvement du satellite est-il dépendant de sa masse ?
4. Exprimer et calculer l'altitude h à laquelle doit se trouver le satellite pour qu'il soit géostationnaire.
5. La base de Kourou utilisée pour le lancement des fusées Ariane est proche de l'équateur. En quoi est-ce intéressant ?

Données : masse de la Terre : $M_T \approx 6 \times 10^{24}$ kg, rayon de la Terre : $R_T \approx 6400$ km, constante de gravitation : $G \approx 6.67 \times 10^{-11}$m. kg^{-1}.s^{-2}

CORRECTION :

1. Le référentiel le plus adapté pour étudier le mouvement d'un satellite en orbite autour de la Terre est le référentiel géocentrique. C'est dans ce référentiel que l'orbite du satellite est la plus facile à décrire (c'est un cercle) et à l'échelle de quelques heures (ou dizaines d'heures) ce référentiel peut être considéré comme approximativement galiléen.
2.
   - Système : satellite S assimilé à un point matériel de masse m
   - Référentiel : géocentrique supposé galiléen
     On choisit un repère cartésien (O, x, y, z) tel que l'origine O coïncide avec le centre de la Terre et tel que l'orbite du satellite se trouve dans le plan (Oxy). La position du satellite est repérée par les coordonnées polaire (r, φ), avec $r = R_T + h = cte$ puisque l'orbite est supposée circulaire.
   - Forces appliquées au satellite : attraction gravitationnelle exercée par la Terre

   $$\vec{F} = -G\frac{M_T m}{r^2}\vec{u_r}$$

   Une façon simple de montrer que le mouvement est uniforme consiste à dire que puisque la seule force exercée sur le satellite est orientée suivant $\vec{u}_r$ et que la vitesse est orientée suivant $\vec{u}_\varphi$ (mouvement circulaire), il n'y a pas d'accélération tangentielle. La norme de la vitesse est donc constante au cours du mouvement. Ce résultat apparaît explicitement lorsqu'on applique la 2e loi de Newton : $m\vec{a} = \vec{F}$

   Dans la base polaire, l'accélération du satellite s'écrit (attention, ici $r = R_T + h = cte$) :

   $$\vec{a} = -r\dot{\varphi}^2\,\vec{u}_r + r\ddot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi$$

   En projetant la loi de Newton sur la base polaire on obtient les 2 équations suivantes :

   $$-mr\dot{\varphi}^2 = -\frac{GM_T m}{r^2} \qquad \text{et} \qquad mr\ddot{\varphi} = 0$$

   Soit :

   $$\dot{\varphi}^2 = \frac{GM_T}{r^3} \tag{2.1}$$
   $$\ddot{\varphi} = 0 \tag{2.2}$$

   Puisque $r =$ cte, ces équations impliquent toutes les deux que $\dot{\varphi} =$ cte, et donc que la vitesse $v = r|\dot{\varphi}|$ est constante.
3. Puisque $v^2 = r^2\dot{\varphi}^2$, l'équation 2.1 conduit à la relation

   $$v^2 = \frac{GM_T}{r}$$

Soit :

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}}}$$

L'expression de la vitesse est indépendante de la masse du satellite donc son mouvement l'est aussi.

La vitesse angulaire du satellite est $\omega = |\dot{\varphi}| = \sqrt{\dfrac{GM_T}{r^3}}$

$$\Rightarrow \quad \text{période :} \quad T \;=\; \frac{2\pi}{\omega} \;=\; 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_T}} \;=\; 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{GM_T}}$$

On peut par exemple calculer la vitesse et la période de révolution d'un satellite situé à basse altitude ($h \approx 400$ km) comme par exemple la station spatiale internationale (ISS) :

$$h = 400 \text{ km} \qquad \to \qquad v \;\approx\; 28\,000 \text{ km/h} \qquad \text{et} \qquad T \approx 1\,\text{h}\,30\,\text{min}$$

4. Un satellite géostationnaire est un satellite qui est immobile dans le référentiel terrestre. Puisque l'orbite d'un satellite passe nécessairement par le centre de la Terre (à cause de la symétrie du problème), il faut qu'un satellite géostationnaire ait
   - son orbite dans le plan de l'équateur
   - une période orbitale égale à celle de la Terre : $T = 23\text{h}56\text{min} = 8,62.10^4$ s

   On extrait tout d'abord r^3 de l'expression de la période T. Soit $T^2 = 4\pi^2 \dfrac{r^3}{GM_T}$, d'où :

$$r^3 = \frac{T^2 GM_T}{4\pi^2} = (R_T + h)^3 \quad \text{soit} \quad R_T + h = \left(\frac{T^2 GM_T}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{h = \left(\frac{T^2 GM_T}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R_T = 35\ 800 \text{ km}}$$

5. La base de Kourou est intéressante car dans le référentiel géocentrique, ce sont les objets situés à l'équateur qui ont la plus grande vitesse. C'est en effet au niveau de l'équateur que la distance par rapport à l'axe de rotation est la plus grande. Une fusée lancée depuis l'équateur possède donc une vitesse initiale plus grande que si elle était lancée depuis un point située à une autre latitude. Cela permet de réduire la quantité de carburant nécessaire pour mettre les satellites en orbite.

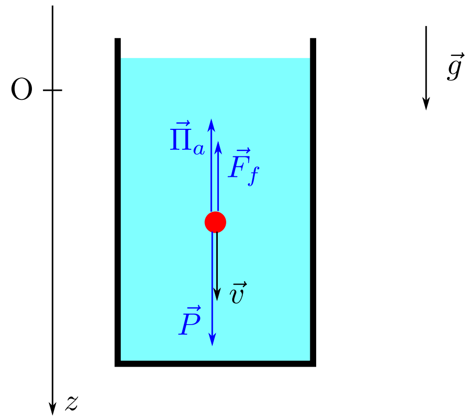
Remarque : Du fait de l'immobilité apparente des satellites géostationnaires (pour un observateur situé sur Terre), il est facile de «les viser» pour leur envoyer des ondes à transmettre ou pour recueillir le ondes qu'ils réfléchissent. Ils servent de relais entre un point de l'hémisphère nord et un point de l'hémisphère sud. Ils sont utilisés pour la transmission des ondes radio ou de télévision.

2.6.2 Chute visqueuse de bille dans un train

Dans ce problème on va s'intéresser au mouvement d'une bille lâchée sans vitesse dans un fluide visqueux. Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre que l'on supposera galiléen. La position de la bille est repérée le long d'un axe vertical (Oz) orienté vers le bas. On suppose que

- à l'instant $t = 0$, la bille est lâchée sans vitesse en $z = 0$
- la force de frottement peut être modélisée par une force de norme proportionnelle à la vitesse de la bille

$$\vec{F}_f \;=\; -\alpha\,\vec{v} \;=\; -\alpha\, v_z\, \vec{u}_z$$



1. En utilisant la 2ᵉ loi de Newton, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $v_z(t)$.
2. Intégrer cette équation pour déterminer $v_z(t)$.
3. Intégrer cette équation pour déterminer $z(t)$.
4. Représenter ces deux fonctions sur un graphe.

CORRECTION :

1. En plus de la force de frottement, la bille est soumise à
   - son poids $\vec{P} = mg\,\vec{u}_z$
   - la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}_a = -\rho\, V\, g\, \vec{u}_z = -m' g\, \vec{u}_z$

   où ρ est la masse volumique du fluide et V le volume de la bille.

   Si on projette la 2ᵉ loi de Newton sur l'axe (Oz) on peut écrire

   $$m\dot{v}_z \;=\; mg \;-\; m'g \;-\; \alpha\, v_z$$

   Le fait d'écrire l'accélération de la bille sous la forme $\dot{v}_z$ nous permet de montrer que la 2ᵉ loi de Newton conduit ici à une équation différentielle linéaire du premier ordre pour la fonction $v_z(t)$:

   $$\dot{v}_z \;+\; \frac{\alpha}{m}\, v_z \;=\; \frac{m - m'}{m}\, g \tag{2.3}$$

2. Cette équation ayant un second membre, nous allons écrire la solution comme la somme de la solution générale de l'équation homogène (équation sans second membre) et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

   $$\text{équation homogène :}\quad \dot{v}_z \;+\; \frac{\alpha}{m}\, v_z \;=\; 0 \quad\rightarrow\quad \frac{\dot{v}_z}{v_z} \;=\; -\frac{\alpha}{m} \quad\rightarrow\quad v_{z,EH} \;=\; K\, e^{-t/\tau}$$

   avec $\tau = m/\alpha$ et K une constante d'intégration $\in \mathbb{R}$. Le second membre de l'équation 2.3 étant constant, on peut écrire une solution particulière sous la forme

   $$v_{z,SP} \;=\; \frac{m - m'}{\alpha}\, g$$

   La solution générale de l'équation 2.3 s'écrit donc

   $$v_z(t) \;=\; v_{z,EH} + v_{z,SP} \;=\; K\, e^{-t/\tau} \;+\; \frac{m - m'}{\alpha}\, g$$

   On peut maintenant déterminer la constante d'intégration en utilisant les conditions initiales. Puisque la bille est lâchée sans vitesse on peut écrire

   $$v_z(0) = 0 \quad\rightarrow\quad 0 \;=\; K \;+\; \frac{m - m'}{\alpha}\, g \quad\rightarrow\quad K \;=\; -\frac{m - m'}{\alpha}\, g$$

Le terme $\frac{m-m'}{\alpha}g$ est homogène à une vitesse. En notant $\boxed{v_\infty = \frac{m-m'}{\alpha}g}$, la solution de l'équation du mouvement s'écrit finalement :

$$\boxed{v_z(t) \;=\; v_\infty \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \; v_\infty}$$

La vitesse, initialement nulle, tend donc vers la valeur v_∞ lorsque $t \gg \tau$. La grandeur $\tau = m/\alpha$ correspond à un **temps caractéristique de l'évolution du système**. Pour s'en convaincre, regardons comment varie le facteur $\exp(-t/\tau)$:

$t\;=$	$0\,\tau$	$1\,\tau$	$2\,\tau$	$3\,\tau$	$4\,\tau$	$5\,\tau$
$\exp(-t/\tau)$	1.000	0.368	0.135	0.050	0.018	0.007

On constate qu'au bout d'une durée de quelques τ, le terme exponentiel a une valeur négligeable par rapport à 1. Le temps τ correspond donc à une durée caractéristique de l'évolution de la vitesse vers sa valeur limite.

3. L'expression de $v_z(t)$ peut ensuite être intégrée pour déterminer $z(t)$:

$$z(t) \;=\; v_\infty\, t \;+\; v_\infty\, \tau\, e^{-t/\tau} \;+\; C$$

A l'instant initial, $z(0) = 0$

$$0 \;=\; 0 + v_\infty\, \tau + C \quad \rightarrow \quad C = -v_\infty\, \tau$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{z \;=\; v_\infty\Big(t - \tau + \tau\, e^{-t/\tau}\Big)}$$

Lorsque $t \gg \tau$, $z \;\approx\; v_\infty(t-\tau)$. Ce résultat est cohérent avec la conclusion précédente : si v_z tend vers une valeur limite, alors l'évolution de z doit être linéaire lorsque $t \gg \tau$.

4. On a représenté sur la figure 2.5 l'évolution au cours du temps de la vitesse et de la position de la bille.

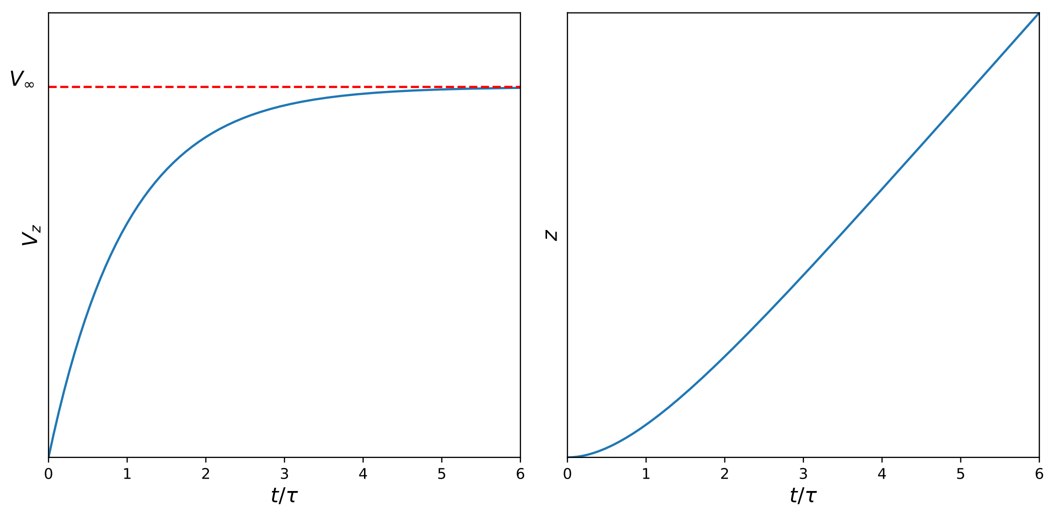


Figure 2.5 – Evolution au cours du temps de la vitesse v_z (gauche) et de la position z (droite).

2.7 Annexe

2.7.1 La masse inertielle - la masse pesante

La masse pesante ou masse grave m_g caractérise la force d'attraction gravitationnelle que génère la masse de cet objet sur tous les autres objets de l'univers. Elle est donc une mesure de la capacité d'un objet à interagir avec un champ de gravitation. Elle caractérise la force de gravitation (cf 2.5.1) alors que la masse inertielle modifie une accélération. Elles interviennent donc chacune de part et autre de l'égalité dans l'une équation de la dynamique.
Einstein a posé l'équivalence (pas l'égalité) de ces deux masses dans son "principe d'équivalence", postulat de base de la relativité générale. Eötvös l'a montré expérimentalement au début du XX$^{\text{eme}}$ siècle, elles sont équivalentes à 3.10^{-11} près.

D'un point de vue pratique, votre masse inertielle est celle qui va vers l'avant quand le métro freine brusquement, votre masse pesante est celle de votre poids sur la balance.

2.7.2 Quantité de mouvement d'un système

Quantité de mouvement d'un système

Si on considère un système matériel composé de N points matériels de masse m_i, on peut écrire le PFD pour chacun de ces objets $\vec{F_i} = \dfrac{d\vec{p_i}}{dt}$. En faisant la somme de toutes ces quantités de mouvement, on obtient :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p_t}}{dt}$$

où $\vec{p_t} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p_i} = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v_i}$ est la quantité de mouvement totale du système et $\vec{F}$ la résultante de toutes les forces qui s'exercent sur chaque élément du système. Il s'agit aussi bien des forces extérieures que des forces intérieures au système. Les forces intérieures se compensent de sorte que $\vec{F}$ se réduit à la résultante des forces extérieures au système.

Forme générale du principe fondamental de la dynamique

On peut également obtenir la généralisation de la deuxième loi de Newton en utilisant la quantité de mouvement d'un système.
Comme définie précédemment, dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement totale ($\vec{p_t}$) d'un système matériel est égale à la résultante des forces extérieurs qui s'exercent sur le système ($\vec{F}$) : $\vec{F} = \dfrac{d\vec{p_t}}{dt}$. Il s'agit de la forme générale du PFD qui présente l'avantage d'être valide pour n'importe quel système $\mathcal{S}$ composé de plusieurs éléments. Il peut être déformable mais également voir sa masse varier au cours du temps.

Généralisation du PFD via la quantité de mouvement

En introduisant l'expression du centre de masse G du système : $M\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i\overrightarrow{OM}_i$, avec $M = \sum_i m_i$ la masse totale du système, que l'on dérive en suite par rapport au temps, on obtient :

$$M\vec{v}_G = \sum_i m_i\vec{v}_i = \vec{p}_t$$

D'où l'expression du PFD généralisé :

$$M\frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{F}$$

interprétation : pour un système composé de plusieurs objets, le mouvement de son centre de masse/gravité est identique à celui d'un seul point matériel, où serait concentrée la masse totale du système et où seraient appliquées toutes les forces extérieures s'exerçant sur le système.

Chapitre 3

Oscillateurs

Objectifs d'apprentissage

- Modéliser la dynamique d'un système au voisinage d'une position d'équilibre (développer une énergie potentielle au voisinage d'une position d'équilibre et déterminer l'équation dynamique linéarisée)
- Reconnaître l'équation de l'oscillateur harmonique non amorti et amorti et déterminer sa période ou pseudo période d'oscillation
- Donner la solution générale en fonction des conditions initiales et des régimes d'oscillation pour l'oscillateur amorti, tracer la solution
- Identifier les paramètres de l'oscillateur à partir de la donnée du déplacement au cours du temps, en manipulant, par exemple, le décrément logarithmique
- Définir pulsation, fréquence, période, taux d'amortissement, décrément logarithmique et donner les relations entre ces grandeurs
- Décrire le système équivalent à un assemblage de ressorts en parallèle / série

3.1 Introduction

Les phénomènes oscillatoires sont très fréquents aussi bien en physique qu'en ingénierie. On peut citer, par exemple, l'oscillation des atomes au sein d'un cristal, le système de suspension d'un véhicule, les oscillations du champ électro-magnétique associé à une onde lumineuse (ou du champ de pression associé à une onde acoustique), ou encore les vibrations du sol dues aux mouvements des plaques terrestres. Malgré sa simplicité, l'oscillateur mécanique permet de modéliser, en basse fréquence, ce type de phénomènes.

Un oscillateur mécanique est un système qui possède une position d'équilibre et qui, lorsqu'il est écarté de cette position, est soumis à une force qui tend à le ramener vers cette position. L'exemple le plus simple est constitué par une masse ponctuelle fixée à l'extrémité d'un ressort dont l'autre extrémité est fixe. Dans ce cas, on parle d'un système à un degré de liberté (1 d.d.l.) lorsque la masse a un mouvement suivant une seule direction (translation ou rotation autour d'un axe fixe).

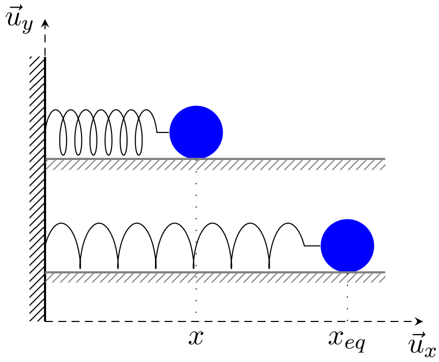
Lorsque le déplacement par rapport à la position d'équilibre est suffisamment faible, la force de rappel peut être considérée comme approximativement proportionnelle au déplacement. Ceci constitue la loi de Hooke, que nous allons utiliser pour modéliser le comportement d'un système de type masse-ressort. Nous allons tout d'abord considérer la situation où le système est soumis uniquement à cette force de rappel, ce qui le conduit à osciller indéfiniment. Dans un second temps, nous considérerons le cas où, en plus de cette force, le système est soumis à une force de frottement visqueuse proportionnelle à la vitesse. Ce terme de frottement nous permettra de modéliser de façon simple des phénomènes d'amortissement des oscillations que l'on observe en pratique.

3.2 Oscillateur non amorti en régime libre

Dans cette section, nous allons établir et résoudre l'équation du mouvement pour un oscillateur masse-ressort en configuration horizontale et verticale dans le champ de pesanteur. Dans les deux cas, nous ne prendrons pas en compte le frottement sur le support ou dans l'air : l'oscillateur est dit « non amorti » ou « conservatif ». Nous supposerons également qu'aucune force excitatrice extérieure n'est considérée : l'oscillateur est dit « en régime libre » ou « homogène ».

3.2.1 Oscillateur horizontal

On suppose que le ressort est fixé en $x = 0$ et que la masse m fixée à son extrémité est ponctuelle et ne peut se déplacer que suivant l'axe Ox. La longueur du ressort à un instant donné est donc $x(t)$. On note k la constante de raideur et ℓ_0 la longueur à vide du ressort.



- Système d'étude : $\{masse\}$
- Référentiel d'étude : terrestre supposé galiléen
- Bilan des forces extérieures appliquées au système :
  - la force de rappel du ressort $\vec{F}_{res} = -k(x - \ell_0)\vec{u}_x$
  - le poids $\vec{P} = -mg\,\vec{u}_y$
  - la force de réaction $\vec{R} = R\,\vec{u}_y$
- Accélération : $\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{u}_x$

En projetant le principe fondamental de la dynamique suivant l'axe Ox, il vient :

$$m\ddot{x} = -k(x - \ell_0) \qquad \text{ou encore} \qquad \ddot{x} + \frac{k}{m}(x - \ell_0) = 0 \tag{3.1}$$

La position d'équilibre de la masse, notée x_{eq}, est obtenue lorsque $\sum \vec{F} = \vec{0}$. On a donc ici $x_{eq} = \ell_0$. Pour étudier les mouvements de la masse autour de cette position d'équilibre on effectue le changement de variable suivant : $X(t) = x(t) - x_{eq}$. On peut donc écrire : $\dot{X}(t) = \dot{x}(t)$ et $\ddot{X}(t) = \ddot{x}(t)$. On peut ainsi ré-écrire l'équation 3.1 de la manière suivante :

$$\ddot{X}(t) + \frac{k}{m}\left(X(t) + x_{eq} - \ell_0\right) = 0$$

ou encore puisque $x_{eq} = \ell_0$

$$\ddot{X}(t) + \frac{k}{m}X(t) = 0.$$

Équation de l'oscillateur harmonique non amorti en régime libre

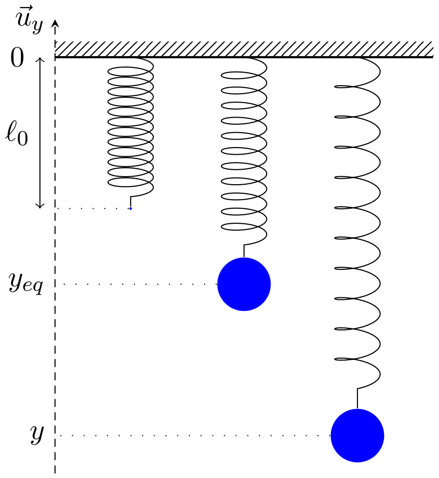
$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0 \tag{3.2}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, la pulsation propre du système.

L'équation de l'oscillateur harmonique est donc une équation différentielle linéaire du second ordre d'inconnue $X(t)$. Cette équation joue un rôle extrêmement important en physique et en ingénierie. Il est important de savoir la reconnaître et de connaître sa solution.
ATTENTION : le signe devant ω_0^2 de l'équation 4.6 est essentiel pour avoir une solution de type sinusoïdal et donc qui oscille. Un système régit par une équation de la forme $\ddot{X} - \omega_0^2 X = 0$ n'est pas un oscillateur.

3.2.2 Oscillateur vertical

On suppose que le ressort est fixé en $y = 0$ et que l'axe (Oy) est vertical et orienté vers le haut. La longueur du ressort est alors $l(t) = -y(t)$ et la force de rappel du ressort s'écrit $\vec{F}_{res} = k(-y - \ell_0)\vec{u}_y$.



- Système d'étude : $\{masse\}$
- Référentiel d'étude : terrestre supposé Galiléen
- Bilan des forces extérieures appliquées au système :
  - la force de rappel du ressort $\vec{F}_{res} = -k(y + \ell_0)\vec{u}_y$
  - le poids $\vec{P} = -mg\,\vec{u}_y$
- Accélération : $\vec{a} = \ddot{y}\,\vec{u}_y$

En projetant le principe fondamental de la dynamique suivant l'axe Oy, il vient :

$$m\ddot{y} = -k(y + \ell_0) - mg \qquad \text{ou encore} \qquad \ddot{y} + \frac{k}{m}(y + \ell_0 + \frac{mg}{k}) = 0 \tag{3.3}$$

La position d'équilibre statique y_{eq} du système est trouvée pour

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow -k(y_{eq} + \ell_0) - mg = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_{eq} = -\ell_0 - \frac{mg}{k} \tag{3.4}$$

Pour étudier les mouvements de la masse autour de la position d'équilibre on effectue le changement de variable suivant : $Y(t) = y(t) - y_{eq}$. On peut donc écrire : $\dot{Y}(t) = \dot{y}(t)$ et $\ddot{Y}(t) = \ddot{y}(t)$. Il vient, avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

$$\ddot{Y} + \omega_0^2 Y = 0 \tag{3.5}$$

On retrouve alors l'équation de l'oscillateur harmonique. On constate donc que l'ajout d'une force constante (ici le poids) colinéaire à la force de rappel ne modifie pas l'équation du mouvement de la masse, mais seulement sa position d'équilibre.

Remarque sur le signe de la force de rappel du ressort

Comme vous avez pu le constater dans les deux exemples précédents (sous-section 3.2.1 et 3.2.2), le signe devant k de la force de rappel du ressort est différent :

oscillateur horizontal : $\vec{F}_{res} = -k(x - \ell_0)\vec{u}_x$ oscillateur vertical : $\vec{F}_{res} = k(-y - \ell_0)\vec{u}_y$

Il faut retenir que **cette force s'oppose toujours à l'allongement du ressort**. Dans le cas de l'oscillateur horizontal, le ressort s'allonge lorsque le point matériel se déplace dans le sens $+\vec{u}_x$, la force de rappel est donc portée par $-\vec{u}_x$. Dans le cas de l'oscillateur vertical, le ressort s'allonge dans le sens de $-\vec{u}_y$, la force de rappel est donc orientée vers $+\vec{u}_y$. Pour ce dernier cas, compte tenu de la position de l'origine, $y + \ell_0$ est négatif; on vient mettre un signe - devant l'allongement du ressort de telle sorte que la force de rappel soit bien orientée vers $+\vec{u}_y$. Le signe devant la force de rappel est dicté par le choix de l'orientation du vecteur $\vec{u}_x$ ou $\vec{u}_y$.

Si on souhaite utiliser la forme générique suivante :

$$\vec{F}_{res} = -k(\ell - \ell_0)\vec{i}$$

où l est la longueur du ressort (la longueur qui sépare les deux extrémités du ressort) et ℓ_0 la longueur à vide, il faudra veiller à orienter $\vec{i}$ dans le sens de l'élongation du ressort.

3.2.3 Solution de l'équation du mouvement

Au cours du premier semestre, vous avez appris que la solution de l'équation différentielle du mouvement est, pour $\omega_0^2 > 0$, une fonction périodique de la forme :

Solution générale de l'équation de l'oscillateur harmonique non amorti

$$X(t) \;=\; A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) \qquad \text{ou} \qquad X(t) \;=\; C\cos(\omega_0 t + \phi) \tag{3.6}$$

où A, B, C et ϕ [a] dépendent des conditions initiales en déplacement et en vitesse. ω_0 est la pulsation propre ou fréquence angulaire. Un rappel de la résolution d'une équation différentielle linéaire du second orde à coefficients constants et sans second membre est proposé en Annexe en section 3.5.1.

a. On peut montrer avec les formules de trigonométrie usuelles que $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ et que $\phi = \arctan\left(\frac{A}{B}\right)$ ou encore que $A = C\sin\phi$ et que $B = C\cos\phi$.

À l'état initial, c'est-à-dire à l'instant $t = 0$, le déplacement et la vitesse valent :

$$x_0 = X(0) = A \;\; \text{et} \;\; v_0 = \dot{X}(0) = B\omega_0. \tag{3.7}$$

Le mouvement de la masse s'écrit donc

$$X(t) = x_0\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t \;\; \text{ou} \;\; X(t) = \frac{\sqrt{\omega_0^2 x_0^2 + v_0^2}}{\omega_0}\sin\left(\omega_0 t + \arctan\frac{\omega_0 x_0}{v_0}\right) \tag{3.8}$$

C'est une fonction harmonique à la pulsation ω_0 dont l'amplitude est imposée par les conditions initiales. Cette amplitude est constante car la modélisation n'a pas pris en compte la dissipation d'énergie présente dans tout système mécanique. Comme nous pouvons ainsi le voir dans les graphiques de la figure 4.8 qui décrivent le déplacement et la vitesse de la masse en fonction du temps et des conditions initiales.

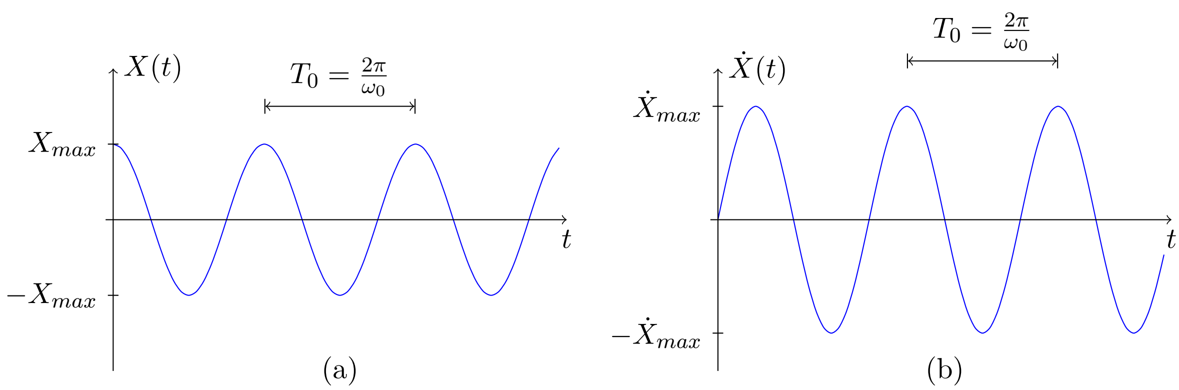


FIGURE 3.1 – (a) Déplacement et (b) Vitesse de la masse en oscillation en fonction du temps. La période d'oscillation T_0 est indiquée.

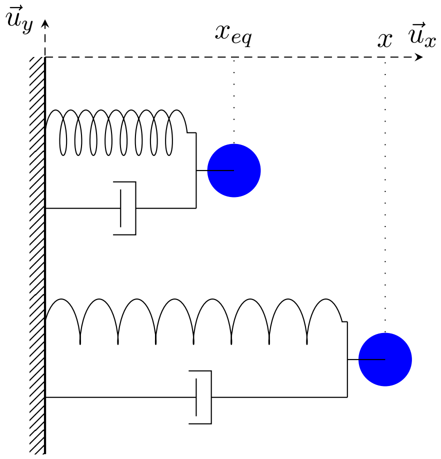
3.3 Oscillateur amorti en régime libre

Dans la section précédente, nous avons considéré des systèmes qui oscillent sans dissipation. Dans la réalité, des forces de frottement vont s'exercer sur la masse qui oscille (frottement visqueux dû au milieu dans lequel la masse se déplace, frottement solide si la masse est en contact avec un support solide, frottemetns internes au ressort). Nous ne considérerons ici que les forces de frottement visqueuses qui exercent sur la masse un effort proportionnel à sa vitesse, de la forme suivante :

$$\vec{F}_d \;=\; -\gamma\dot{x}\,\vec{u}_x \tag{3.9}$$

3.3.1 Équation du mouvement

On suppose que la masse est soumise uniquement à la force de rappel du ressort et à la force de frottement.



- Système d'étude : $\{masse\}$
- Référentiel d'étude : terrestre supposé galiléen
- Bilan des efforts extérieurs appliqués au système :
  - la force de rappel du ressort (avec $\vec{u}_x$ orienté dans le sens de l'élongation du ressort !) : $\vec{F}_{res} = -k(x - \ell_0)\vec{u}_x$
  - la force de frottement $\vec{F}_d = -\gamma \dot{x}\, \vec{u}_x$
- Accélération s'exprime par $\vec{a} = \ddot{x}\, \vec{u}_x$

En projetant le principe fondamental de la dynamique suivant l'axe Ox, il vient :

$$m\ddot{x} = -k(x - \ell_0) - \gamma \dot{x} \tag{3.10}$$

La position d'équilibre du système est la même que celle trouvée précédemment (sous-section 3.2.1).

Equation du mouvement d'un oscillateur harmonique amorti

En effectuant le changement de variable $X = x - x_{eq}$, il vient, sous forme canonique (ou normalisée),

$$\ddot{X} + 2\xi\omega_0 \dot{X} + \omega_0^2 X = 0 \tag{3.11}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ la pulsation propre

et $\xi = \dfrac{\gamma}{2m\omega_0}$ le taux d'amortissement de l'oscillateur

3.3.2 Solution de l'équation du mouvement

En posant $X(t) = \alpha e^{rt}$, l'équation du mouvement de l'oscillateur devient :

$$\alpha \left(r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 \right) e^{rt} = 0 \tag{3.12}$$

Puisque αe^{rt} ne peut pas être nul quel que soit t, l'équation caractéristique suivante doit être vérifiée :

$$r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0 \tag{3.13}$$

En fonction de la valeur de ξ, trois types de mouvement peuvent être observés :

- $0 < \xi < 1$, le mouvement sous-amorti (oscillations amorties). Dans ce cas, les racines de l'équation caractéristique sont :

$$r_1 = -\xi\omega_0 + i\,\omega_0\sqrt{1 - \xi^2} \quad \text{et} \quad r_2 = -\xi\omega_0 - i\,\omega_0\sqrt{1 - \xi^2} \tag{3.14}$$

  La solution de l'équation du mouvement est alors de la forme

$$X(t) = Ce^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_d t + \phi) \tag{3.15}$$

  où C et ϕ dépendent des conditions initiales et ω_d est la pseudo pulsation

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2} \tag{3.16}$$

Les conditions initiales en déplacement x_0 et en vitesse v_0 permettent de déterminer C et ϕ de la manière suivante :

$$C = \sqrt{\frac{(v_0 + \xi\omega_0 x_0)^2 + (x_0\omega_d)^2}{\omega_d^2}} \tag{3.17}$$

$$\phi = \arctan \frac{x_0\omega_d}{v_0 + \xi\omega_0 x_0} \tag{3.18}$$

- $\xi > 1$, le mouvement sur-amorti (retour à la position d'équilibre sans oscillation). Les racines de l'équation caractéristique sont :

$$r_1 = -\xi\omega_0 + \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} \quad \text{ou} \quad r_2 = -\xi\omega_0 - \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} \tag{3.19}$$

La solution du déplacement est

$$X(t) = \left(a_1 e^{\sqrt{\xi^2-1}\omega_0 t} + a_2 e^{-\sqrt{\xi^2-1}\omega_0 t}\right) e^{-\xi\omega_0 t} \tag{3.20}$$

où a_1 et a_2 dépendent des conditions initiales de la manière suivante :

$$a_1 = \frac{v_0 + \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\omega_0 x_0}{2\omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}} \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{-v_0 + \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\omega_0 x_0}{2\omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}} \tag{3.21}$$

- $\xi = 1$, le mouvement avec amortissement critique, qui correspond à la limite entre les deux cas précédents où l'équation caractéristique admet une double racine :

$$r_1 = r_2 = -\xi\omega_0 = -\omega_0 \tag{3.22}$$

La solution générale de l'équation du mouvement est, dans ce cas,

$$X(t) = (a_1 + a_2 t)\, e^{-\omega_0 t} \tag{3.23}$$

en déterminant a_1 et a_2 en fonction des conditions initiales, il vient :

$$X(t) = (x_0 + \omega_0 x_0 t + v_0 t)\, e^{-\omega_0 t} \tag{3.24}$$

3.3.3 Régime pseudo-périodique

Mouvement sous-amorti

Lorsque le taux d'amortissement est faible ξ, compris entre 0 et 1, la solution $X(t)$ du déplacement de la masse d'un oscillateur à 1 degré de liberté est de la forme (voir équation 3.15) :

$$X(t) = Ce^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_d t + \phi) \tag{3.25}$$

avec ω_d la pseudo-pulsation qui vaut $\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$, ω_0 étant la pulsation propre et C et ϕ deux constantes qui dépendent des conditions initiales.

La figure 3.2 représente l'allure du déplacement de la masse au cours du temps (avec un déplacement initial non nul et une vitesse initiale nulle).

Pseudo-période

Comme nous pouvons le voir sur la figure 3.2, la masse oscille entre deux exponentielles ($Ce^{-\xi\omega_0 t}$ et $-Ce^{-\xi\omega_0 t}$) qui représentent l'enveloppe du mouvement de l'oscillateur. La décroissance des fonctions exponentielles est guidée par ξ qui traduit l'amortissement plus ou moins fort du mouvement. Lorsque

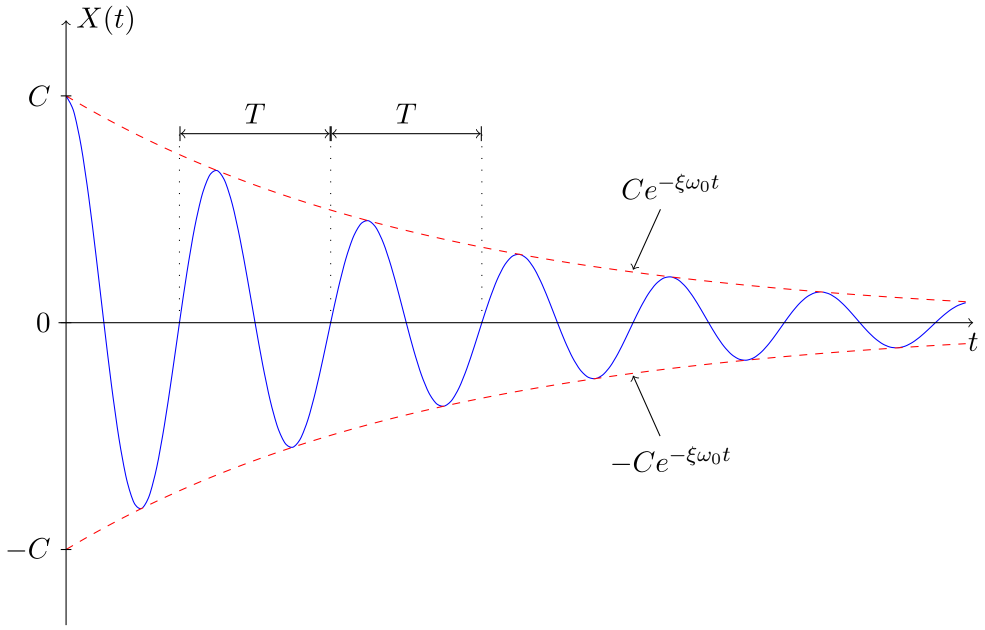


FIGURE 3.2 – Mouvement de la masse d'un oscillateur amorti pour un amortissement faible. L'amplitude décroît de manière exponentielle (traits pointillés rouge). Le régime est pseudo-périodique, T représente la pseudo période.

ξ est nul, le mouvement est non amorti et nous retrouvons le cas de l'oscillateur vu dans la section 3.2.

Le terme $\sin(\omega_d t + \phi)$ traduirait la périodicité du mouvement s'il n'y avait pas d'amortissement. Le mouvement n'est plus strictement périodique puisqu'au bout du temps T le mouvement de la masse n'a pas la même valeur : $x(t) \neq x(t+T)$ puisque l'amplitude des oscillations diminue avec le temps. On parle donc d'un mouvement *pseudo-périodique*, de pseudo-période T qui correspond à l'intervalle de temps qui sépare deux passages par la position d'équilibre en $x(t) = 0$ (voir figure 3.2).

La pseudo-période

Pour un mouvement sous-amorti d'un oscillateur à 1 degré de liberté, la pseudo-période d'oscillation vaut :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\xi^2}} \tag{3.26}$$

où ω_d est la pseudo-pulsation, ξ le taux d'amortissement, T_0 la période propre de l'oscillateur (dans le cas où il est non amorti).

La pseudo-période est supérieure à la période propre T_0. Du fait des frottements, la masse met un peu plus de temps pour faire un aller et un retour et l'amplitude de son mouvement diminue.

Décrément logarithmique

Il est bien souvent utile de mesurer avec précision le taux d'amortissement de l'oscillateur. Alors que pour la masse et la raideur une simple mesure statique permet d'estimer leur valeur (répétées pour plus de précision), l'amortissement nécessite une mesure dynamique. Une approche consiste à mesurer la décroissance de l'enveloppe pour un système sous-amorti : entre deux maxima aux instants t et $t + T$ qui correspondent aux amplitudes $Ce^{-\xi\omega_0 t}$ et $Ce^{-\xi\omega_0(t+T)}$. Cette approche conduit au concept de *décrément logarithmique*.

Le décrément logarithimique

On définit le décrément logarithimique par

$$\delta = \ln \frac{X(t)}{X(t+T)} \tag{3.27}$$

En d'autres termes,

$$\delta = \ln \frac{Ce^{-\xi\omega_0 t}\sin(\omega_d t + \phi)}{Ce^{-\xi\omega_0 (t+T)}\sin(\omega_d (t+T) + \phi)} \tag{3.28}$$

et comme $\omega_d T = 2\pi$, il vient :

$$\delta = \ln \frac{Ce^{-\xi\omega_0 t}\sin(\omega_d t + \Phi)}{Ce^{-\xi\omega_0 t}e^{-\xi\omega_0 T}\sin(\omega_d t + \Phi)} = \ln e^{\xi\omega_0 T} = \xi\omega_0 T \tag{3.29}$$

En posant $T = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$, le décrément logarithmique s'écrit $\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$ et permet d'exprimer le taux d'amortissement

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \tag{3.30}$$

3.3.4 Régime apériodique

Lorsque l'amortissement est fort, c'est-à-dire pour $\xi \geq 1$, l'allure de la fonction $x(t)$ est donnée dans la figure 3.3. Il n'y a plus d'oscillation : l'oscillateur retourne vers sa position d'équilibre sans osciller. Le régime est dit apériodique (absence de période).

Le temps que va mettre l'oscillateur à revenir à sa position d'équilibre est appelé temps de relaxation ou temps caractéristique. Il correspond à la durée nécessaire pour que l'écart à la position d'équilibre diminue d'un facteur e.[1] Après une durée de 5τ l'exponentielle est quasiment nulle. Pour le mouvement sur-amorti, la solution du déplacement admet deux exponentielles, définissant chacune un temps caractéristique :

$$\tau_+ = \frac{1}{|\omega_0\sqrt{\xi^2-1} - \xi\omega_0|} \quad \text{et} \quad \tau_- = \frac{1}{|-\omega_0\sqrt{\xi^2-1} - \xi\omega_0|} \tag{3.31}$$

Le temps le plus long est τ_+, c'est donc ce temps qui définira le temps de relaxation de l'oscillateur.

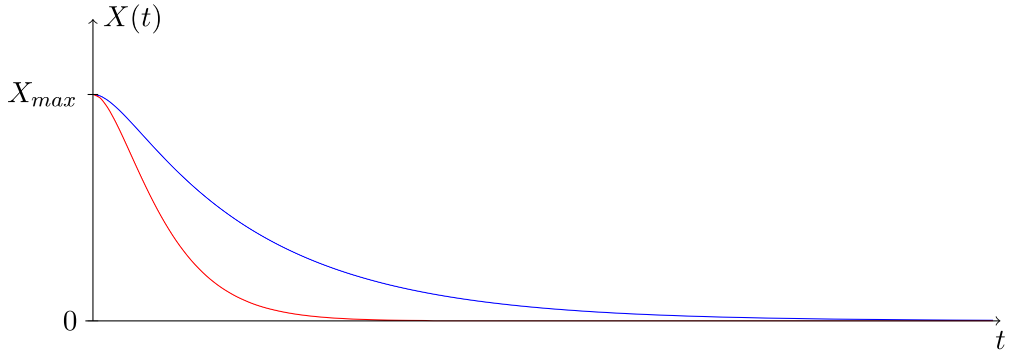


FIGURE 3.3 – Mouvement de la masse d'un oscillateur amorti pour un amortissement fort (en bleu) ou critique (en rouge). L'amplitude décroît de manière exponentielle sans aucune oscillation.

Lorsque l'amortissement est critique ($\xi = 1$), le retour à la position d'équilibre se fait plus rapidement que pour le mouvement sur-amorti. Le temps de relaxation pour le régime critique est

$$\tau_c = \frac{1}{\omega_0} \tag{3.32}$$

1. la décroissance d'une exponentielle du type $e^{-\lambda t}$ où $\lambda > 0$, est caractérisée par le temps $\tau = \frac{1}{\lambda}$ au bout duquel l'exponentielle est divisée par e.

Ce temps est toujours plus petit que pour le mouvement sur-amorti. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\omega_0\sqrt{\xi^2-1}-\xi\omega_0|} &< \frac{1}{\omega_0} \\ \omega_0\sqrt{\xi^2-1}-\xi\omega_0 &> \omega_0 \\ \sqrt{\xi^2-1}-\xi &> 1 \\ \sqrt{1-\frac{1}{\xi^2}} &> 0 \end{aligned}$$

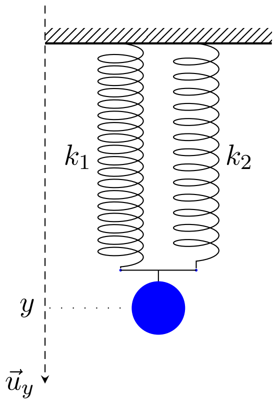
cette dernière expression étant toujours vérifié.

Contrairement à ce que l'on peut penser, un amortissement trop important retarde le retour à l'équilibre de l'oscillateur. Dans le cas où l'on souhaite régler un retour rapide à l'équilibre, comme pour un amortisseur de voiture, il est préférable de l'ajuster le plus proche possible du mouvement avec amortissement critique.

3.4 Raideurs équivalentes

Dans bon nombre d'applications ou de modélisations, plusieurs ressorts peuvent être associés pour fournir la raideur à l'oscillateur. Pour faciliter la résolution, il est bien souvent commode d'identifier une raideur équivalente à l'ensemble des ressorts. Dans la suite de cette section, nous rechercherons les raideurs équivalentes à l'association de ressorts en parallèle et en série.

3.4.1 Raideurs en parallèle



- Système d'étude : $\{masse\}$
- Référentiel d'étude : terrestre supposé Galiléen
- Bilan des efforts extérieurs appliqués au système :
  - la force de rappel du ressort 1 : $\vec{F}_{res1} = -k_1(y-\ell_{01})\vec{u}_y$
  - la force de rappel du ressort 2 : $\vec{F}_{res2} = -k_2(y-\ell_{02})\vec{u}_y$
  - le poids $\vec{P} = mg\vec{u}_y$

En projetant le principe fondamental de la dynamique suivant l'axe Oy (nous pourrons remarquer au passage que l'axe $\vec{u}_y$ est maintenant orienté dans le sens de l'élongation du ressort !), il vient :

$$m\ddot{y} = -k_1(y-\ell_{01}) - k_2(y-\ell_{02}) + mg \quad \text{ou encore} \quad m\ddot{y} + k_1(y-\ell_{01}) + k_2(y-\ell_{02}) - mg = 0 \tag{3.33}$$

La position d'équilibre statique du système est trouvée pour :

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow -k_1(y_{eq}-\ell_{01}) - k_2(y_{eq}-\ell_{02}) + mg = 0 \Leftrightarrow y_{eq} = \frac{k_1\ell_{01}+k_2\ell_{02}+mg}{k_1+k_2} \tag{3.34}$$

En étudiant les petits mouvements autour de la position d'équilibre du système, pour $Y = y - y_{eq}$, il vient :

$$\begin{aligned} m\ddot{Y} + (k_1+k_2)Y &= 0 \\ \ddot{Y} + \omega_0^2 Y &= 0, \end{aligned}$$

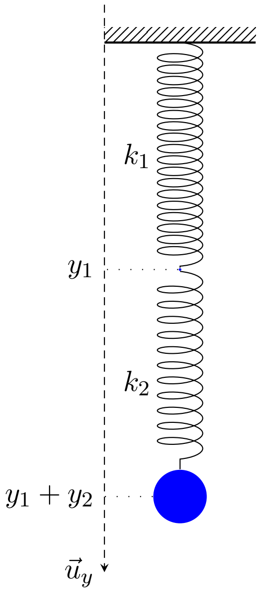
avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}} = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} \tag{3.35}$$

Par identification, on en déduit que la raideur équivalente k_{eq} relative à l'association en parallèle de deux ressorts est :

$$k_{eq} = k_1 + k_2 \tag{3.36}$$

3.4.2 Raideurs en série



Dans ce cas, nous allons décomposer le problème en deux systèmes d'étude. L'un correspondant à la masse $\{masse\}$ et l'autre en masse fictive, de masse nulle, se trouvant entre les deux ressorts $\{masse\, nulle\}$. Pour ces deux systèmes, le référentiel d'étude terrestre est supposé Galiléen.

- Bilan des efforts extérieurs appliqués à $\{masse\}$:
  - la force de rappel du ressort 2 : $\vec{F}_{res2}^{\{masse\}} = -k_2(y_2 - \ell_{02})\vec{u}_y$
  - le poids $\vec{P} = mg\vec{u}_y$
- Bilan des efforts extérieurs appliqués à $\{masse\, nulle\}$:
  - la force de rappel du ressort 1 $\vec{F}_{res1}^{\{masse\, nulle\}} = -k_1(y_1 - \ell_{01})\vec{u}_y$
  - la force de rappel du ressort 2 $\vec{F}_{res2}^{\{masse\, nulle\}} = -\vec{F}_{res2}^{\{masse\}} = k_2(y_2 - l_{02})\vec{u}_y$

Pour le système $\{masse\}$, en appliquant le principe fondamental de la dynamique suivant l'axe Oy, il vient :

$$m(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) = -k_2(y_2 - \ell_{02}) + mg \tag{3.37}$$

Pour le système $\{masse\, nulle\}$ de masse nulle, en appliquant le principe fondamental de la dynamique suivant l'axe Oy, il vient :

$$0 = -k_1(y_1 - \ell_{01}) + k_2(y_2 - \ell_{02}) \tag{3.38}$$

En considérant les variations autour de la position d'équilibre $Y_1 = y_1 - y_{eq1}$ et $Y_2 = y_2 - y_{eq2}$, les équations 3.37 et 3.38 deviennent :

$$m(\ddot{Y}_1 + \ddot{Y}_2) + k_2 Y_2 = 0 \tag{3.39}$$

$$k_1 Y_1 = k_2 Y_2 \tag{3.40}$$

Par un jeu d'écriture sur l'équation 3.40, nous pouvons trouver la relation entre les variables Y_1 et Y_2 comme suit

$$\Rightarrow k_2 Y_2 + k_1 Y_2 - k_1 Y_2 = k_1 Y_1 \Rightarrow Y_2 = \frac{k_1}{k_1 + k_2}(Y_1 + Y_2) \tag{3.41}$$

et en réinjectant cette expression dans 3.39, il vient :

$$m(\ddot{Y}_1 + \ddot{Y}_2) + \frac{k_2 k_1}{k_1 + k_2}(Y_1 + Y_2) = 0 \tag{3.42}$$

En posant $Y = Y_1 + Y_2$, le déplacement de la masse suivant l'axe Oy, il vient :

$$\ddot{Y} + \omega_0^2 Y = 0, \tag{3.43}$$

avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}} = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} \tag{3.44}$$

On en déduit donc que la raideur équivalente k_{eq} à l'association en série de deux ressorts :

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \tag{3.45}$$

Les raideurs équivalentes

Lorsqu'un oscillateur à 1 degré de liberté présente i ressorts accrochés à la masse, de raideur respective k_i, la raideur équivalente (modélisant l'ensemble des ressorts)

- pour des ressorts en parallèle est
$$k_{eq} = \sum_i k_i$$
- pour des ressorts en série est
$$\frac{1}{k_{eq}} = \sum_i \frac{1}{k_i}$$

3.5 Annexe

3.5.1 Résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et sans second membre

Cas général

Vous trouverez ci-dessous un résumé de ce que vous devez retenir concernant la résolution des équations différentielles du second ordre.

Considérons une fonction $y(t)$ solution de l'équation différentielle suivante

$$a\,\frac{d^2y}{dt^2} \;+\; b\,\frac{dy}{dt} \;+\; c\,y \;=\; 0 \tag{3.46}$$

Pour déterminer la solution de cette équation il faut résoudre l'équation caractéristique [2] d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

dont le discriminant est

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si $\Delta > 0$ alors $\lambda_\pm = -\dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

  on pose $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

  La solution générale de l'équation 3.46 s'écrit alors

$$y(t) \;=\; A\,e^{\lambda_+ t} \;+\; B\,e^{\lambda_- t} \;=\; e^{\alpha t}\left(A\,e^{\beta t} \;+\; B\,e^{-\beta t}\right)$$

- Si $\Delta = 0$ alors $\lambda_\pm = -\dfrac{b}{2a}$

  on pose $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$

  La solution générale de l'équation 3.46 s'écrit alors

$$y(t) \;=\; e^{\alpha t}\left(A \;+\; B\,t\right)$$

2. On obtient cette équation en cherchant des solutions sous la forme de fonctions exponentielles. Pour plus de détails, consultez votre cours de mathématiques.

- Si $\Delta < 0$ alors $\lambda_\pm = -\dfrac{b}{2a} \pm i\,\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

  on pose $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta' = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

  Si $y(t)$ est une fonction réelle, la solution générale de l'équation 3.46 s'écrit alors

$$y(t) \;=\; e^{\alpha t}\Big(A\,\cos(\beta' t) \;+\; B\,\sin(\beta' t)\Big) \;=\; C\,e^{\alpha t}\,\cos\left(\beta' t \;+\; \phi\right)$$

Cas sans terme du premier ordre

Appliquons la méthode précédente au cas de l'équation d'un oscillateur harmonique non amorti (sans terme du premier ordre) :

$$\frac{d^2y}{dt^2} \;+\; \omega_0^2\,y \;=\; 0 \tag{3.47}$$

L'équation caractéristique est $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$.

discriminant : $\Delta = -4\omega_0^2 < 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \pm i\,\omega_0$

En utilisant les notations définies dans la partie précédente on a dans ce cas $\alpha = 0$ et $\beta' = \omega_0$. La solution générale de l'équation 3.47 s'écrit donc

$$y(t) \;=\; A\,\cos(\omega_0 t) \;+\; B\,\sin(\omega_0 t) \;=\; C\,\cos\left(\omega_0 t + \phi\right)$$

On peut écrire indifféremment $C\cos\left(\omega_0 t + \phi\right)$ ou $C\sin\left(\omega_0 t + \phi\right)$. En effet, ces fonctions sont identiques, à un déphasage de $\pi/2$ près. On peut donc choisir indifféremment l'une ou l'autre. Ce qui changera, ce sera la valeur de la constante ϕ qui sera obtenue en prenant en compte les conditions initiales.

Exemple 1 :

Supposons que les conditions initiales sont $y(0) = y_0$ et $\dot{y}(0) = 0$, et que l'on écrive la solution générale de l'équation différentielle sous la forme

$$y(t) \;=\; C\cos\left(\omega_0 t + \phi\right)$$

On peut alors écrire $\dot{y}(t) = -\omega_0 C\sin(\omega_0 t + \phi)$. On a donc

$$\dot{y}(0) = 0 = -\omega_0 C\sin(\phi)$$

Les solutions de cette équation sont $C = 0$ ou $\varphi = 0$ ou π. La solution $C = 0$ n'est pas pertinente car elle conduit à $y(t) = 0 \quad \forall\, t$.

Exemple 2 :

Supposons maintenant que nous ayons les mêmes conditions initiales que pour l'exemple précédent mais que l'on écrive la solution générale de l'équation différentielle sous la forme :

$$y(t) \;=\; C\sin\left(\omega_0 t + \phi\right)$$

On peut alors écrire $\dot{y}(t) = \omega_0 C\cos(\omega_0 t + \phi)$. On a donc

$$\dot{y}(0) = 0 = \omega_0 C\cos(\phi)$$

Les solutions de cette équation sont $C = 0$ ou $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{3\pi}{2}$. Le choix de l'une ou l'autre des formes de la solution générale aboutie à deux solutions exactes dont le paramètre φ va dépendre.

Chapitre 4

Énergie mécanique

Objectifs d'apprentissage

- Écrire l'expression du travail infinitésimal d'une force
- Calculer le travail d'une force le long d'un chemin rectiligne ou circulaire
- Définir la puissance instantanée / moyenne d'une force
- Définir l'énergie cinétique, Énoncer et démontrer le théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel sous forme infinitésimale (travail, puissance) et intégrée
- Définir une force motrice / résistante
- Appliquer le théorème de l'énergie cinétique en choisissant correctement l'état initial et l'état final
- Identifier les situations où le théorème de l'énergie cinétique est avantageux par rapport au PFD / où un bilan énergétique est suffisant pour résoudre le problème
- Définition d'une force conservative, expression du travail d'une force conservative
- Établir et connaître les principales énergies potentielles : pesanteur, élastique, gravitationnelle, électrostatique, à une constante près
- Exprimer l'additivité des énergies potentielles pour un point matériel soumis à plusieurs forces conservatives.
- Définir une position d'équilibre stable / instable
- Pour un système à 1 ddl : caractériser les positions d'équilibre à partir de l'étude de l'énergie potentielle
- Représenter l'énergie potentielle en fonction de la position
- Exploiter un graphe énergétique pour décrire l'évolution du système, telle que celui d'un oscillateur
- Définir le facteur de qualité
- Définir de l'énergie mécanique d'un point matériel
- Énoncer et démontrer le théorème de l'énergie mécanique : forme différentielle et intégrale
- Pour un système, distinguer forces intérieures et forces extérieures
- Appliquer le théorème de l'énergie cinétique aux cas où il existe des forces intérieures qui travaillent

Introduction

L'énergie est un concept essentiel que l'on retrouve dans à peu près toutes les branches de la physique et de l'ingénierie. Il s'agit d'un concept abstrait qui permet de traduire le fait qu'au cours de l'évolution d'un système il existe une certaine grandeur qui est conservée. Par exemple, lorsqu'on lance un objet vers le haut, sa vitesse diminue à mesure que son altitude augmente. La vitesse initialement communiquée à l'objet est donc progressivement convertie en élévation d'altitude. En termes énergétiques on dit que l'énergie de mouvement (énergie cinétique) de l'objet est convertie en énergie de pesanteur. Si on considère maintenant un objet glissant sur le sol, on constate qu'il s'arrête après avoir parcouru une certaine distance. On constate également que la température de l'objet et la température du sol ont augmenté. Dans cette situation, l'énergie de mouvement macroscopique de l'objet est convertie en énergie d'agitation microscopique (énergie thermique).

Ces exemples illustrent plusieurs propriétés de l'énergie : c'est une grandeur qui se manifeste sous différentes formes, qui peut être convertie d'une forme en une autre et qui peut être échangée entre deux systèmes. Le point le plus important est que pour un système isolé (c'est à dire qui n'échange pas d'énergie avec l'extérieur), la quantité d'énergie qu'il contient est constante. Elle pourra être convertie d'une forme en une autre, elle pourra être échangée entre différentes sous-parties du système mais sa valeur totale sera toujours la même. Il ne peut donc pas y avoir de création ou de destruction d'énergie mais seulement des échanges entre différents systèmes ou des conversions entre les différentes formes de l'énergie.

Dans le chapitre précédent nous nous sommes intéressés à la dynamique d'un point matériel à partir du concept de force : la 2$^{\text{e}}$ loi de Newton est une relation entre le vecteur accélération d'un point matériel et la résultante des forces qui lui sont appliquées. Dans le cadre de la mécanique newtonienne nous allons maintenant introduire différentes grandeurs énergétiques et nous montrerons que la dynamique d'un point matériel peut également être étudiée sur la base de théorèmes relatifs à ces grandeurs. Nous terminerons ce chapitre en montrant que dans le cas d'un système il est important de prendre en compte les échanges énergétiques internes au système si l'on veut rendre compte correctement de sa dynamique.

4.1 Énergie cinétique d'un point matériel, travail et puissance

Reprenons tout d'abord l'exemple donné en introduction d'un objet lancé vers le haut et soumis au champ de pesanteur (voir figure 4.1). On suppose qu'à l'instant initial l'objet se trouve à l'altitude z_0 et possède une vitesse v_0 vers le haut. Au cours de son ascension sa vitesse diminue : la variation de son énergie de mouvement est associée à une variation de son altitude. Analysons cette situation à l'aide de la 2$^{\text{e}}$ loi de Newton (on suppose l'axe (Oz) orienté vers le haut) :

$$m\ddot{z} = -mg \quad \rightarrow \quad \dot{z}(t) = v(t) = v_0 - gt \quad \rightarrow \quad z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + z_0$$

Si on exprime t en fonction de v et que l'on injecte cette expression dans la 3$^{\text{e}}$ relation on obtient :

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = -g(z - z_0)$$

En multipliant par m de chaque côté on peut alors écrire : $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -mg(z - z_0)$

On obtient donc : $\Delta(\frac{1}{2}mv^2) = -mg\Delta z = -P\Delta z$. Cette relation relie la variation de la grandeur $\frac{1}{2}mv^2$ et la variation d'altitude Δz. Cet exemple permet de justifier la façon dont nous allons définir l'énergie cinétique d'un point matériel et nous allons maintenant montrer qu'une relation de même nature peut être écrite dans un cadre beaucoup plus général.

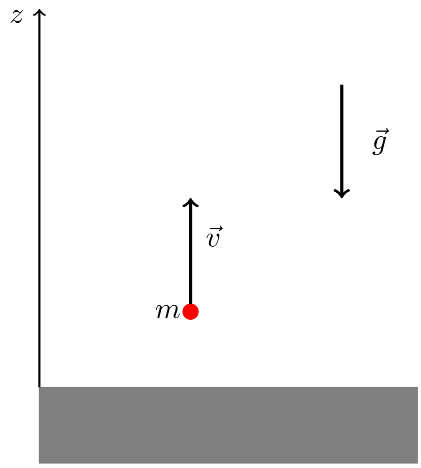


FIGURE 4.1 – Masse m lancée vers le haut et soumise au champ de pesanteur $\vec{g}$.

4.1.1 Énergie cinétique, puissance d'une force

Définition : énergie cinétique

On considère un point matériel de masse m possédant une vitesse v dans le référentiel $\mathcal{R}$. **L'énergie cinétique** de ce point matériel est définie par :

$$E_c = \frac{1}{2} m\, v^2$$

Propriétés :

- dimension : $[E_c] = M.L^2.T^{-2}$ unité SI : le Joule (J)
- l'énergie cinétique est une grandeur **scalaire** positive : $E_c \geq 0$
- l'énergie cinétique dépend du référentiel d'étude puisque son expression fait intervenir la vitesse qui est une grandeur dépendante du choix du référentiel
- notations :

$$\left.\begin{array}{lll} v = ||\vec{v}|| & \rightarrow & v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \\ \vec{v}^{\,2} = \vec{v}\cdot\vec{v} & \rightarrow & \vec{v}^{\,2} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\vec{v}^{\,2} = v^2}$$

L'énergie cinétique peut donc être notée indifféremment $\frac{1}{2}mv^2$ ou $\frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2}$

On souhaite maintenant caractériser la variation au cours du temps de cette grandeur. Pour cela nous allons calculer l'expression de sa dérivée par rapport au temps et nous allons utiliser le fait que $\vec{v}^{\,2} = v^2$ afin de faire apparaître la grandeur $\dot{\vec{v}}$ qui nous permettra de relier la variation de l'énergie cinétique à la résultante des forces appliquées grâce à la 2e loi de Newton :

$$\frac{dE_c}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2}\right) = m\,\vec{v}\cdot\dot{\vec{v}}$$

On suppose que le référentiel d'étude est galiléen et que le point matériel étudié est soumis à la résultante des forces $\vec{F}$. D'après la 2e loi de Newton on a alors : $m\dot{\vec{v}} = \vec{F}$ et on peut donc écrire :

$$\frac{dE_c}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

La variation de l'énergie cinétique du point matériel par unité de temps est donc égale au produit scalaire de la résultante des forces et de son vecteur vitesse.

Définition : puissance d'une force

On considère un point matériel animé d'une vitesse $\vec{v}$ et soumis à une force $\vec{F}$. On appelle **puissance de la force** (ou puissance exercée / transmise par la force) la grandeur scalaire $\mathcal{P}$ définie par :

$$\mathcal{P} \;=\; \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Propriétés :

- dimension : $[\mathcal{P}] = M.L^2.T^{-3} = \dfrac{[E]}{T}$ unité : le Watt (W) 1 W = 1 J/s
- la puissance est une grandeur scalaire positive ou négative

  $$\widehat{(\vec{F},\vec{v})} \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P} \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \widehat{(\vec{F},\vec{v})} \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{P} \leq 0$$

  cas particulier important : si $\vec{F} \perp \vec{v}$ alors $\mathcal{P} = 0$
- La puissance d'une force est une grandeur définie à chaque instant t : $\mathcal{P}(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t)$

Nous pouvons maintenant reformuler la relation précédemment obtenue à l'aide de cette grandeur :

Théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel (1re forme)

La variation d'énergie cinétique par unité de temps d'un point matériel en mouvement dans un référentiel galiléen est égale à la puissance de la résultante des forces $\vec{F}$:

$$\frac{dE_c}{dt}(t) \;=\; \mathcal{P}_{\vec{F}}(t) \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{P}_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Le théorème de l'énergie cinétique nous permet de donner une interprétation à la notion de puissance : la puissance d'une force correspond à la quantité d'énergie transmise par unité de temps au point matériel par l'intermédiaire de cette force.

4.1.2 Travail d'une force

Puisque $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ où $\vec{r}$ est le vecteur position, on peut s'écrire : $\dfrac{dE_c}{dt} \;=\; \vec{F} \cdot \dfrac{d\vec{r}}{dt}$

En multipliant cette équation par dt on obtient alors : $dE_c \;=\; \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Définition : travail infinitésimal (ou élémentaire) d'une force

On considère un point matériel M effectuant un déplacement infinitésimal $d\vec{r}$ (entre les instants t et $t + dt$). Au cours de ce déplacement, M est soumis à une force $\vec{F}$. On appelle **travail infinitésimal** de la force $\vec{F}$ la grandeur notée δW et définie par :

$$\delta W \;=\; \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

On considère un point matériel M en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$ le long de la trajectoire $\mathcal{C}$ et soumis à une force $\vec{F}$. On note $\vec{u}$ le vecteur unitaire tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du déplacement. On peut écrire le déplacement infinitésimal de M sous la forme $d\vec{r} = d\ell\,\vec{u}$ où $d\ell$ représente la distance parcourue par M entre t et $t+dt$. La force $\vec{F}$ peut s'écrire quant à elle : $\vec{F} = F_{\parallel}\,\vec{u} + \vec{F}_{\perp}$ où $\vec{F}_{\perp}$ représente la composante de $\vec{F}$ perpendiculaire à $\vec{u}$ (voir figure 4.2). Le travail effectué par $\vec{F}$ au cours de ce déplacement s'écrit donc :

$$\delta W \;=\; \vec{F}\cdot d\vec{r} \;=\; (F_{\parallel}\,\vec{u} + \vec{F}_{\perp})\cdot d\ell\,\vec{u} \;=\; F_{\parallel}\,d\ell$$

Le travail élémentaire d'une force est donc égal au produit de la composante de cette force parallèle au déplacement et de la distance parcourue au cours de ce déplacement.

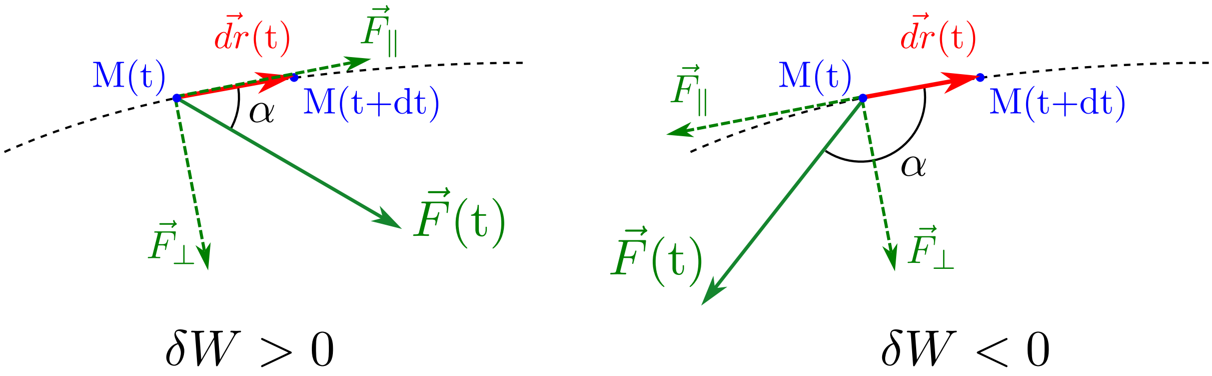


FIGURE 4.2 – A gauche : cas d'une force effectuant un travail positif. A gauche : cas d'une force effectuant un travail négatif.

Propriétés :

- dimension : $[\delta W] = [F].L = M.L^2.T^{-2}$ $\;\rightarrow$ le travail est homogène à une énergie
- unité : le Joule (J)
- **attention :** la notation δW ne désigne pas une petite variation d'une grandeur W (que nous n'avons pas encore défini). Cette notation δW représente une quantité infinitésimale de travail définie par $\vec{F}.d\vec{r}$
- Cas où la force $\vec{F}$ est la résultante d'un ensemble de forces $\vec{F_i}$: $\quad \vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i}$

$$\delta W_{\vec{F}} \;=\; \vec{F}\cdot d\vec{r} \;=\; \left(\sum_{i=1}^{N}\vec{F_i}\right)\cdot d\vec{r} \;=\; \left(\vec{F_1}+\vec{F_2}+...+\vec{F_N}\right)\cdot d\vec{r} \;=\; \vec{F_1}\cdot d\vec{r}+\vec{F_2}\cdot d\vec{r}+...+\vec{F_N}\cdot d\vec{r}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\delta W_{\vec{F}} \;=\; \sum_i \delta W_{\vec{F_i}}}$$

Théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel (2e forme)

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel au cours d'un déplacement infinitésimal $d\vec{r}$ est égale au travail de la résultante des forces $\vec{F}$, effectué au cours de ce déplacement :

$$dE_c \;=\; \delta W_{\vec{F}} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} \delta W_{\vec{F}} = \vec{F}\cdot d\vec{r} \\ dE_c = E_c(t+dt) - E_c(t) \end{cases}$$

Sous cette forme, le théorème de l'énergie cinétique montre que le travail effectué par une force lors d'un déplacement infinitésimal correspond à la quantité d'énergie transmise au point matériel par l'intermédiaire de cette force au cours du déplacement.

Remarques :

- La première forme que nous avons donnée du théorème de l'énergie cinétique, $\dot{E}_c(t) = \mathcal{P}_{\vec{F}}(t)$, est une relation valable à chaque instant t. Elle relie la variation d'énergie cinétique par unité de temps à l'instant t, à la puissance de la résultante des forces à cet instant.
- La deuxième forme du théorème de l'énergie cinétique, $dE_c = \delta W_{\vec{F}}$, correspond à un bilan d'énergie au cours du déplacement infinitésimal $d\vec{r}$ effectué entre les instants t et $t + dt$:
  - ☐ $dE_c = E_c(t + dt) - E_c(t)$ est la variation d'énergie cinétique du point matériel entre les instants t et $t + dt$, c'est à dire au cours du déplacement
  - ☐ $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ est le travail effectué par la résultante des forces au cours de ce déplacement

4.1.3 Forme intégrale du théorème de l'énergie cinétique

Nous allons maintenant intégrer cette 2ᵉ forme du théorème afin d'établir un bilan d'énergie pour un déplacement quelconque du point matériel le long d'une trajectoire. Pour illustrer le raisonnement que nous allons suivre sur un cas particulièrement simple, considérons tout d'abord un point matériel M qui se trouve successivement aux positions A, B et C aux instants t, $t+dt$ et $t+2dt$. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique pour les déplacements $A \to B$ et $B \to C$ on obtient les relations suivantes :

$$\begin{array}{ll} A \to B & E_c(t + dt) - E_c(t) = \delta W_{A\to B} \\ B \to C & E_c(t + 2dt) - E_c(t + dt) = \delta W_{B\to C} \end{array}$$

En additionnant ces deux relations on obtient : $E_c(t+2dt) - E_c(t) = \delta W_{A\to B} + \delta W_{B\to C}$. La variation d'énergie cinétique entre A et C est donc égale à la somme des travaux effectués par la résultante des forces appliquées à M au cours de son déplacement.

On peut reprendre ce raisonnement pour un déplacement quelconque entre deux points A et B le long d'une trajectoire $\mathcal{C}$:

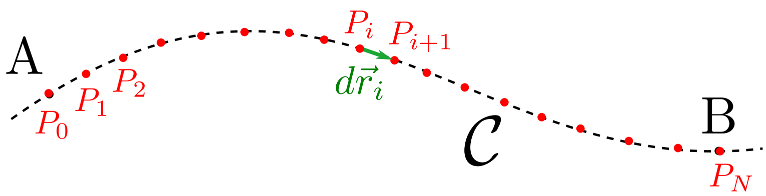


FIGURE 4.3 – Division du chemin entre A et B en segments infinitésimaux $[P_i, P_{i+1}]$.

1. on découpe le chemin parcouru par M en un ensemble de segments infinitésimaux $[P_i, P_{i+1}]$
2. sur chacun de ces segments on applique le théorème de l'énergie cinétique :

   $dE_c(P_i \to P_{i+1}) = \delta W_{P_i\to P_{i+1}} \qquad \to \qquad E_c(P_{i+1}) - E_c(P_i) = \delta W_{P_i\to P_{i+1}}$
3. on additionne toutes ces relations :

   $[E_c(P_1) - E_c(P_0)] + [E_c(P_2) - E_c(P_1)] + ... \;=\; \delta W_{P_0\to P_1} + \delta W_{P_1\to P_2} + ...$

   Dans le membre de gauche, tous les termes à l'exception du premier et du dernier s'annulent deux à deux. On obtient donc la relation :

   $$E_c(B) - E_c(A) \;=\; \sum_i \delta W_{P_i\to P_{i+1}}$$

   La variation d'énergie cinétique du point matériel est donc égale à la somme des travaux effectués par la résultante des forces au cours de son déplacement entre les points A et B.

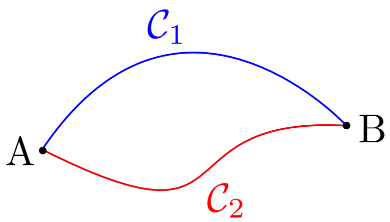
Comme le travail δW est une grandeur infinitésimale, la somme est une somme de grandeurs infinitésimales et on remplace alors le symbole de somme discrète $\sum_i$ par une intégrale $\int_{\underset{\mathcal{C}}{A \to B}}$. Ce dernier symbole se lit : « intégrale entre A et B le long du chemin $\mathcal{C}$ ».

Définition : travail d'une force le long d'un chemin

Le travail total effectué par une force $\vec{F}$ appliquée sur point matériel au cours d'un déplacement entre 2 points A et B le long de la trajectoire $\mathcal{C}$ est égale à la somme des travaux effectués par cette force au cours de ce déplacement :

$$W_{\underset{\mathcal{C}}{A \to B}} = \int_{\underset{\mathcal{C}}{A \to B}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Il est important de préciser le chemin le long duquel est calculé le travail car il n'y a pas de raison a priori pour que la valeur du travail effectué par une force le long d'un chemin donné soit égale à celle effectué par cette même force le long d'un autre chemin. Si on considère 2 chemins $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ reliant 2 points A et B, et un point matériel soumis à une force $\vec{F}$ lors de son déplacement entre ces 2 points, alors on a en général :



$$W^{\vec{F}}_{\underset{\mathcal{C}_1}{A \to B}} \neq W^{\vec{F}}_{\underset{\mathcal{C}_2}{A \to B}}$$

Avec cette notation pour le travail effectué par une force le long d'une trajectoire nous pouvons maintenant formuler le théorème de l'énergie cinétique pour un déplacement quelconque :

Théorème de l'énergie cinétique (3e forme)

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel est égale au travail effectué par la résultante des forces le long de la trajectoire.

Pour un point matériel soumis à la résultante des forces $\vec{F}$ et se déplaçant le long de la trajectoire $\mathcal{C}$ entre 2 points A et B, on peut écrire :

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = W^{\vec{F}}_{\underset{\mathcal{C}}{A \to B}}$$

De manière plus formelle, le passage de la forme infinitésimale du théorème de l'énergie cinétique à sa forme intégrale peut s'écrire de la façon suivante :

$$dE_c = \vec{F}.d\vec{r} \qquad \text{pour un déplacement infinitésimal}$$

$$\Rightarrow \int_{\underset{\mathcal{C}}{A \to B}} dE_c = \int_{\underset{\mathcal{C}}{A \to B}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad \text{pour un déplacement entre A et B le long de } \mathcal{C}$$

$$\Rightarrow E_c(B) - E_c(A) = W_{\underset{\mathcal{C}}{A \to B}}$$

Forces motrices / résistantes

Définitions :

- Une force est **motrice** si le travail qu'elle fournit le long d'un chemin donné est positif.
- Une force est **résistante** si le travail qu'elle fournit le long d'un chemin donné est négatif.
- On dit d'une force dont le travail est nul qu'elle ne **travaille pas**.

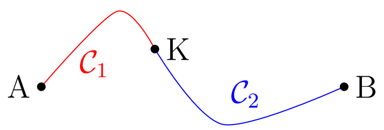
Remarques :

- D'après le théorème de l'énergie cinétique, une force motrice tend à augmenter la vitesse du point matériel sur lequel elle est appliquée. Au contraire, une force résistante tend à diminuer la vitesse du point matériel. Une force qui ne travaille pas ne modifie pas la norme de la vitesse ; elle tend seulement à courber la trajectoire.
- Une force n'est pas intrinsèquement motrice ou résistante, le caractère moteur ou résistant d'une force dépend du contexte dans lequel cette force est appliquée. Par exemple, pour un objet lancé vers le haut le poids sera une force résistante durant la phase d'ascension mais il sera moteur lors de la phase de descente.

4.1.4 Calcul du travail le long d'un chemin

Décomposition d'un chemin

Le travail total effectué par une force est défini comme la somme des travaux infinitésimaux effectués par cette force le long du chemin parcouru. Si l'on considère une trajectoire $\mathcal{C}$ entre 2 points A et B, et un 3^e point K situé entre A et B sur cette trajectoire, alors pour calculer le travail total $W_{\underset{\mathcal{C}}{A \to B}}$ on peut calculer séparément la somme des travaux infinitésimaux entre les points A et K, et celle entre les points K et B, puis additionner les 2 résultats obtenus.



$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$

$$\int_{\underset{\mathcal{C}}{A\to B}} \vec{F}\cdot d\vec{r} \;=\; \int_{\underset{\mathcal{C}_1}{A\to K}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\underset{\mathcal{C}_2}{K\to B}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

soit : $\boxed{W_{\underset{\mathcal{C}}{A\to B}} \;=\; W_{\underset{\mathcal{C}_1}{A\to K}} \;+\; W_{\underset{\mathcal{C}_2}{K\to B}}}$

Une telle décomposition est utile si on doit par exemple calculer le travail effectué sur un point matériel se déplaçant sur une trajectoire constituée d'une portion rectiligne suivie d'une portion circulaire. On peut alors définir un repère cartésien bien adapté au calcul du travail sur la portion rectiligne, puis un repère polaire bien adapté au calcul sur la portion circulaire. Il ne reste alors plus qu'à ajouter les deux résultats pour obtenir le travail total. Nous allons maintenant montrer comment calculer le travail d'une force le long d'un chemin dans quelques situations simples.

Force ne travaillant pas :

Dans le cas d'une force $\vec{F}$ constamment perpendiculaire au déplacement infinitésimal $d\vec{r}$ (où ce qui est équivalent perpendiculaire au vecteur vitesse), le travail infinitésimal $\delta W = \vec{F}.d\vec{r}$ est toujours nul et le travail total, égal à la somme des travaux infinitésimaux, est nul également. Exemples : réaction normale d'un support, tension d'un fil souple, composante magnétique de la force de Lorentz.

Force constante :

Si le **vecteur force** est constant le long du chemin suivi alors : $\int_{\underset{\mathcal{C}}{A\to B}} \vec{F}.d\vec{r} = \vec{F}.\int_{\underset{\mathcal{C}}{A\to B}} d\vec{r} = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$

En utilisant la relation de Chasles, on montre en effet facilement que la somme vectorielle de tous déplacement infinitésimaux effectués effectués entre A et B est égale au déplacement total $\overrightarrow{AB}$.

Exemple : poids, charge dans un champ électrostatique uniforme

Force de norme constante et colinéaire au déplacement :

On note $d\vec{r}(t) = d\ell(t)\,\vec{u}(t)$, où $d\ell$ représente la distance parcourue entre t et $t+dt$, et $\vec{u}(t)$ est un vecteur unitaire orienté dans le sens du déplacement à cet instant. Si on considère une force de la forme $\vec{F}(t) = F\,\vec{u}(t)$ où F est constante, on a alors :

$$\int_{\underset{\mathcal{C}}{A\to B}} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{\underset{\mathcal{C}}{A\to B}} F\,\vec{u}.d\ell\,\vec{u} = F\int_{\underset{\mathcal{C}}{A\to B}} d\ell = F\,L$$

où L représente la distance parcourue entre les points A et B le long de la trajectoire ($\neq \|\overrightarrow{AB}\|$ si la trajectoire n'est pas rectiligne).

Force quelconque, déplacement rectiligne :

Nous allons illustrer ce cas à l'aide de l'exemple suivant. Une masse m pouvant glisser sans frottement sur une table est fixée à l'extrémité d'un ressort horizontal de raideur k et longueur à vide ℓ_0. Le ressort, initialement étiré d'une longueur $\ell_0/2$ par rapport à sa longueur à vide, est lâché sans vitesse. On souhaite calculer le travail effectué par le ressort entre l'instant initial et l'instant où la masse passe par la position où le ressort n'est ni étiré ni comprimé.

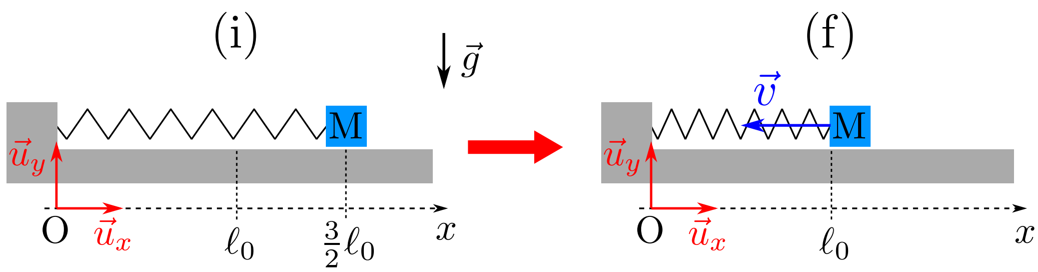


FIGURE 4.4

Force exercée par le ressort : $\vec{F} = -k(x-\ell_0)\,\vec{u}_x$

Déplacement infinitésimal de la masse : $d\vec{r} = dx\,\vec{u}_x$

$\Rightarrow$ travail infinitésimal effectué par le ressort : $\delta W = -k(x-\ell_0)\,dx$

Pour calculer le travail total il ne reste plus qu'à intégrer cette expression le long du trajet suivi :

$$W = \int_{x=\ell_0+\frac{\ell_0}{2}}^{x=\ell_0} -k(x-\ell_0)\,dx = \left[-\frac{k}{2}(x-\ell_0)^2\right]_{\frac{3\ell_0}{2}}^{\ell_0} = \frac{k\ell_0^2}{8}$$

On peut alors utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour en déduire la valeur de la vitesse de la masse lorsque le ressort passe en $x=\ell_0$. Dans cet exemple seul le ressort travaille puisque le poids et la réaction du support sont perpendiculaires au déplacement. Si on note A la position initiale, et B la position $x=\ell_0$ on peut donc écrire :

$$E_c(B) - E_c(A) = W_{ressort} \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} E_c(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 \\ E_c(A) = 0 \\ W_{ressort} = \frac{k\ell_0^2}{8} \end{array}\right\} \quad v(B) = \sqrt{\frac{k\ell_0^2}{4m}} = \frac{\ell_0}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

De manière plus générale :

On considère un point matériel en mouvement rectiligne entre 2 points A et B. On peut définir un repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ tel que l'axe (Ox) est orienté le long de la droite (AB). Le vecteur déplacement élémentaire s'écrit alors $d\vec{r} = dx\,\vec{u}_x$. Si on suppose que la force $\vec{F}$ ne dépend pas explicitement du temps, on peut écrire :

$$\vec{F} = F_x(x,y,z)\,\vec{u}_x + F_y(x,y,z)\,\vec{u}_y + F_z(x,y,z)\,\vec{u}_z$$

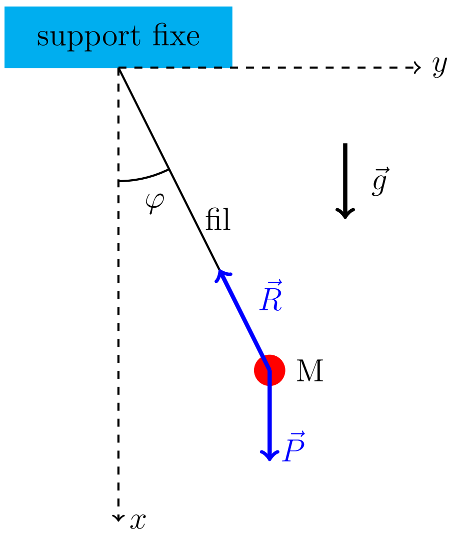
On a alors : $\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x(x,y,z)\,dx$ et donc :

$$W_{A\underset{\mathcal{C}}{\to}B} = \int_{A\underset{\mathcal{C}}{\to}B} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{x_A}^{x_B} F_x(x, y=0, z=0)\,dx = \int_{x_A}^{x_B} F_x(x)\,dx$$

On est donc ramené au calcul d'une intégrale d'une fonction d'une seule variable.

Force quelconque, déplacement circulaire :

Nous allons ici considérer un pendule de masse m et longueur ℓ lâché sans vitesse à partir d'un angle φ_0. On souhaite calculer la vitesse angulaire lorsque le pendule passe par la verticale. Au cours de son mouvement le pendule n'est soumis qu'à son poids $\vec{P}$ et à la tension du fil $\vec{R}$ qui ne travaille pas (car elle est perpendiculaire au déplacement).



Déterminons le travail effectué par le poids :

$\vec{P} = mg\,(\cos\varphi\,\vec{u}_r - \sin\varphi\,\vec{u}_\varphi)$

$d\vec{r} = \ell\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi$

$\Rightarrow \quad \delta W = -mg\ell\sin\varphi\,d\varphi$

$$W = \int_{\varphi=\varphi_0}^{\varphi=0} -mg\ell\sin\varphi\,d\varphi$$

$$= \Big[mg\ell\cos\varphi\Big]_{\varphi_0}^{0}$$

$$= mg\ell(1-\cos\varphi_0)$$

De manière plus générale

On considère un point matériel en mouvement circulaire, de rayon R, entre 2 points A et B. On définit un repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ tel que la trajectoire se trouve dans le plan (Oxy) avec son centre en O. Le déplacement élémentaire s'écrit alors $d\vec{r} = R\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi$. Si l'on suppose que la force $\vec{F}$ ne dépend pas explicitement du temps, on peut écrire en coordonnées cylindriques :

$$\vec{F} = F_r(r,\varphi,z)\,\vec{u}_r + F_\varphi(r,\varphi,z)\,\vec{u}_\varphi + F_z(r,\varphi,z)\,\vec{u}_z \quad \rightarrow \quad \delta W = \vec{F}\cdot d\vec{r} = R\,F_\varphi(r,\varphi,z)\,d\varphi$$

$$\text{et donc} \qquad W_{A\underset{\mathcal{C}}{\to}B} = R\int_{\varphi_A}^{\varphi_B} F_\varphi(r=R,\varphi,z=0)\,d\varphi = R\int_{\varphi_A}^{\varphi_B} F_\varphi(\varphi)\,d\varphi$$

On est donc ramené au calcul d'une intégrale d'une fonction d'une seule variable.

4.2 Forces conservatives, énergie potentielle

4.2.1 Définitions

Nous avons souligné dans la partie précédente le fait que le travail effectué par une force entre 2 points A et B dépend en général du chemin suivi entre ces deux points. Cependant il existe un certain nombre de forces pour lesquelles ceci n'est pas vrai : ces forces sont dites **conservatives**.

Définition : force conservative

Une force $\vec{F}$ est dite **conservative** si et seulement si :

le travail effectué par $\vec{F}$ au cours d'un déplacement entre 2 points A et B ne dépend que des coordonnées de A et de B, et pas du chemin suivi entre ces 2 points ou de la vitesse avec laquelle ce chemin est parcouru

$\Leftrightarrow$ il existe une fonction $E_p(\vec{r})$, appelée **énergie potentielle**, telle que

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} \ = \ -\, dE_p$$

c'est à dire si le travail élémentaire δW de cette force correspond à la différentielle d'une certaine fonction ne dépendant que des coordonnées de l'espace

Remarque : on peut noter indifféremment

- $E_p(\vec{r})$: énergie potentielle au point de vecteur position $\vec{r}$
- $E_p(x, y, z)$: énergie potentielle au point de coordonnées (x, y, z)
- $E_p(M)$: énergie potentielle au point M

L'énergie potentielle est donc une forme d'énergie associée à certaines forces particulières. L'intérêt d'introduire cette notion ainsi que la justification du signe négatif dans la relation $\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dE_p$ apparaîtront plus clairement lorsque nous présenterons la notion d'énergie mécanique.

4.2.2 Différentielle d'une fonction

On considère une fonction dont la valeur dépend des coordonnées du point considéré : $f(x, y, z)$. Par exemple, dans le cas d'un objet dont la température ne serait pas uniforme, il pourrait être intéressant de caractériser la température aux différents points de cet objet. La fonction $T(x, y, z)$ caractériserait alors la façon dont la température varie suivant le point de l'objet considéré. La différentielle de la fonction $f(x, y, z)$, notée df s'écrit

$$df \ = \ \frac{\partial f}{\partial x}\, dx \ + \ \frac{\partial f}{\partial y}\, dy \ + \ \frac{\partial f}{\partial z}\, dz$$

où $\frac{\partial f}{\partial x}$ est la dérivée partielle de f par rapport à x, c'est à dire la dérivée de f par rapport à la variable x, les variables y et z étant considérées comme constantes. On peut montrer que dans la limite où dx, dy et dz tendent vers zéro, cette différentielle vaut

$$df \ \approx \ f(x + dx, y + dy, z + dz) \ - \ f(x, y, z)$$

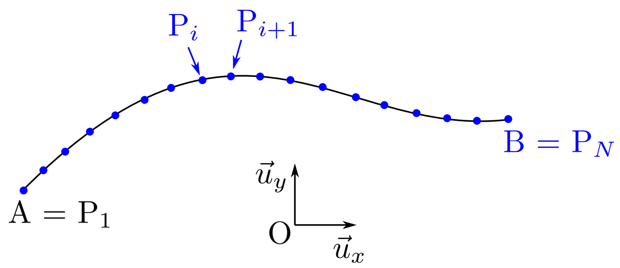
La différentielle d'une fonction correspond donc à la variation de cette fonction lorsqu'on fait varier de façon infinitésimale les variables dont elle dépend. Dans le cas d'une fonction qui ne dépend que d'une seule variable $f(x)$, on retrouve l'expression connue reliant df à dx

$$df \ = \ \frac{\partial f}{\partial x}\, dx \ = \ f'(x)\, dx$$

Remarque : dans cette expression on aurait pu écrire $\frac{df}{dx}$ plutôt que $\frac{\partial f}{\partial x}$ puisque la fonction f ne dépend que d'une seule variable.

Dans le cadre de ce cours, nous nous ramènerons toujours à une expression de l'énergie potentielle comme fonction d'une seule variable.

Intégrale d'une différentielle :



On considère une fonction $f(x, y, z)$ ainsi que 2 points A(x_A, y_A, z_A) et B(x_B, y_B, z_B), et un chemin $\mathcal{C}$ reliant ces 2 points. L'expression

$$\int_{\underset{\mathcal{C}}{A \to B}} df$$

signifie que l'on va

1. diviser le chemin $\mathcal{C}$ en $N-1$ portions infinitésimales $[P_i P_{i+1}]$, avec $1 \leq i \leq N-1$, $P_1 = A$ et $P_N = B$
2. calculer la valeur de la différentielle df sur chacune de ces portions

$$df_i \;=\; f(P_{i+1}) - f(P_i)$$

3. faire la somme de toutes les valeurs obtenues

$$\begin{aligned}
\int_{\underset{\mathcal{C}}{A \to B}} df \;&=\; \sum_{i=1}^{N-1} f(P_{i+1}) - f(P_i) \\
&=\; \Big(f(P_2) - f(P_1)\Big) \;+\; \Big(f(P_3) - f(P_2)\Big) \;+\; \ldots \;+\; \Big(f(P_N) - f(P_{N-1})\Big) \\
&=\; f(P_N) \;-\; f(P_1) \\
&=\; f(B) \;-\; f(A)
\end{aligned}$$

On en déduit donc que l'intégrale de la différentielle d'une fonction ne dépend pas du chemin suivi et qu'elle est égale à la variation de la fonction entre le point de départ et le point d'arrivée.

4.2.3 Travail d'une force conservative

On considère un point matériel se déplaçant le long d'une trajectoire $\mathcal{C}$ et soumis à une force conservative $\vec{F}$ associée à l'énergie potentielle E_p. Au cours du déplacement entre 2 points A et B le long de cette trajectoire, le travail effectué par cette force est :

$$W_{\underset{\mathcal{C}}{A \to B}} = \int_{\underset{\mathcal{C}}{A \to B}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{\underset{\mathcal{C}}{A \to B}} dE_p$$

Or l'intégrale de la différentielle d'une fonction est simplement égale à la variation de cette fonction entre le point de départ et le point d'arrivée, indépendemment du trajet parcouru entre ces deux points. On obtient donc le résultat important suivant :

Travail d'une force conservative

$$W_{\underset{\mathcal{C}}{A\to B}} \;=\; -\left[E_p(B) - E_p(A)\right] \;=\; -\,\Delta E_p$$

4.2.4 Quelques forces conservatives importantes

Pour déterminer si une force $\vec{F}$ est conservative, il faut chercher s'il existe une fonction $E_p(\vec{r})$ telle que $dE_p = -\,\vec{F}\cdot d\vec{r}$. Si cette fonction existe, alors la force est bien conservative et on a du même coup déterminé l'énergie potentielle qui lui est associée. Les forces conservatives les plus courantes sont les suivantes :

Poids

On se place dans le référentiel terrestre muni d'un axe (Oz) orienté vers le haut. Une masse m est alors soumise au poids $\vec{P} = -mg\,\vec{u}_z$. Considérons maintenant le travail infinitésimal effectué par cette force lors d'un déplacement infinitésimal quelconque $d\vec{r} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z$:

$$\delta W = \vec{P}\cdot d\vec{r} = -mg\,\vec{u}_z\cdot(dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z) = -mg\,dz$$

On doit maintenant déterminer s'il existe $E_p(x,y,z)$ telle que : $\quad dE_p = -\delta W = mg\,dz$

soit : $\dfrac{dE_p}{dz} = mg$

en intégrant on obtient : $\quad E_p(z) = mgz \;+\; \text{cte}$

Remarque :

Si on avait choisi un axe (Oz) orienté vers le bas on aurait : $\vec{P} = +mg\,\vec{u}_z$ et donc :

$$\delta W = \vec{P}\cdot d\vec{r} = mg\,\vec{u}_z\cdot(dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z) = mg\,dz$$

On a alors $\quad dE_p = -\delta W = -mg\,dz \qquad \to \qquad E_p(z) = -\,mgz \;+\; \text{cte}$

$\Rightarrow$ le signe devant le terme mgz dépend de l'orientation de l'axe (Oz) !!!

Gravitation

On considère 2 masses m et m' situées à une distance r l'une de l'autre. On se place dans un repère ayant pour origine la masse m' et on va supposer que le mouvement s'effectue dans le plan (Oxy)[1]. La force exercée sur la masse m s'écrit :

$$\vec{F} = -\,\frac{Gmm'}{r^2}\,\vec{u}_r$$

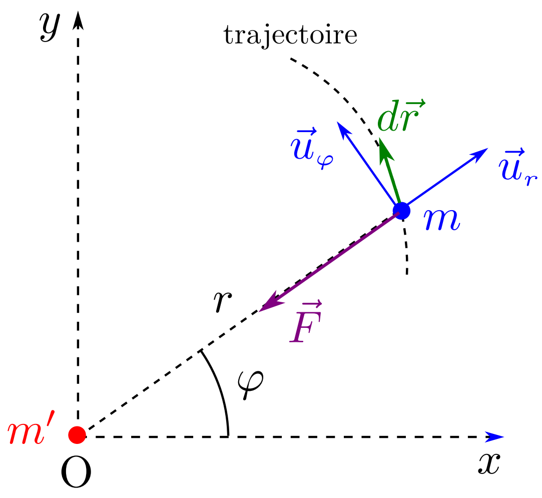
Au cours d'un déplacement infinitésimal on a (on suppose que le mouvement est plan)

$$d\vec{r} \;=\; dr\,\vec{u}_r + r d\varphi\,\vec{u}_\varphi$$

Le travail effectué est :

$$\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{r} \;=\; -\,\frac{Gmm'}{r^2}\,\vec{u}_r\cdot(dr\,\vec{u}_r + r d\varphi\,\vec{u}_\varphi) \;=\; -\,\frac{Gmm'}{r^2}\,dr$$

1. Une démonstration plus générale pour un mouvement quelconque nécessiterait d'utiliser les coordonnées sphériques.



Pour déterminer si cette force est conservative, on cherche une fonction $E_p(r,\varphi)$ telle que :

$$dE_p \;=\; -\,\delta W \;=\; \frac{Gmm'}{r^2}\,dr \qquad \text{soit :} \qquad \frac{dE_p}{dr} \;=\; \frac{Gmm'}{r^2}$$

Par intégration on obtient : $\quad E_p(r) = -\,\dfrac{Gmm'}{r} \;+\; \text{cte}$

Électrostatique

On considère 2 charges électriques q et q' situées à une distance r l'une de l'autre. Dans un repère ayant la charge q' pour origine la force exercée sur la charge q s'écrit :

$$\vec{F} = \frac{Kqq'}{r^2}\,\vec{u}_r$$

Par analogie avec le cas précédent on peut écrire

$$E_p(r) = \frac{Kqq'}{r} \;+\; \text{cte}$$

Élastique

On considère un ressort de raideur k et longueur à vide ℓ_0 dont une extrémité est fixée en O. La position de l'autre extrémité est repérée par les coordonnées polaires (r,φ) (on se place dans le plan (Oxy)). La force exercée sur cette extrémité s'écrit $\vec{F} = -k(r-\ell_0)\,\vec{u}_r$. Au cours d'un déplacement infinitésimal de cette extrémité $d\vec{r} = dr\,\vec{u}_r + rd\varphi\,\vec{u}_\varphi$ le travail effectué par cette force est :

$$\delta W = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -k(r-\ell_0)\,\vec{u}_r\cdot(dr\,\vec{u}_r + rd\varphi\,\vec{u}_\varphi) = -k(r-\ell_0)\,dr$$

Pour déterminer si cette force est conservative, on cherche une fonction $E_p(r,\varphi)$ telle que :

$$dE_p = -\,\delta W = k(r-\ell_0)\,dr \qquad \text{soit :} \qquad \frac{dE_p}{dr} = k(r-\ell_0)$$

par intégration on obtient : $\quad E_p(r) = \dfrac{k}{2}\,(r-\ell_0)^2 \;+\; \text{cte}$

Puisque r correspond à la longueur du ressort on peut écrire cette relation sous la forme :

$$E_p(\ell) = \frac{k}{2}\,(\ell-\ell_0)^2 \;+\; \text{cte}$$

Forces conservatives les plus courantes

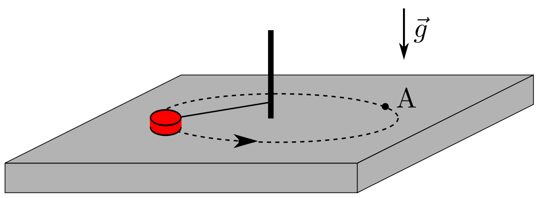
Interaction	Force	Énergie potentielle
pesanteur	$\pm\, mg\, \vec{u}_z$	$\pm\, mgz\ +\ \text{cte}$
gravitationnelle	$-\dfrac{Gmm'}{r^2}\,\vec{u}_r$	$-\dfrac{Gmm'}{r}\ +\ \text{cte}$
électrostatique	$\dfrac{Kqq'}{r^2}\,\vec{u}_r$	$\dfrac{Kqq'}{r}\ +\ \text{cte}$
élastique	$\pm k(\ell-\ell_0)\,\vec{u}_x$	$\dfrac{k}{2}\,(\ell-\ell_0)^2\ +\ \text{cte}$

Remarque :

Une charge électrique q placée dans un champ électrique $\vec{E}$ uniforme et constant subit une force $\vec{F} = q\vec{E}$ constante (vectoriellement). La situation est donc tout à fait similaire à une masse m placée dans un champ de pesanteur $\vec{g}$. On peut donc là aussi définir une énergie potentielle associée au champ électrique $\vec{E}$.

4.2.5 Exemples de forces non conservatives

Les forces de frottement sont non conservatives. Pour s'en convaincre, on va considérer le cas d'un mobile glissant sur un plan horizontal et relié par un fil inélastique à un axe fixe vertical et passant par l'origine (voir figure). On suppose que le fil est toujours tendu et que le mobile se déplace donc sur une trajectoire circulaire. On note A le point de départ où le mobile est lancé avec une vitesse initiale v_0 sur cette trajectoire. Si on suppose que le mobile est soumis à des frottements au cours de son mouvement (frottement fluide dû à l'air ou frottement solide dû au glissement sur le plan horizontal), alors l'expérience montre que la vitesse du mobile lorsqu'il se retrouve en A après avoir effectué un tour complet est plus petite que v_0. D'après le théorème de l'énergie cinétique, cela signifie que les forces de frottement ont effectué un travail négatif sur le mobile [2].



Or si ces forces de frottement étaient conservatives, on pourrait leur associer une énergie potentielle E_p telle que le travail effectué entre 2 passages successifs par le point A s'écrive

$$W_{A\to A}\ =\ E_p(A)\ -\ E_p(A)\ =\ 0$$

puisque par définition, la fonction énergie potentielle ne dépend que des coordonnées de l'espace. On en déduit donc que si ces forces étaient conservatives, leur travail entre 2 passages successif en A devrait être nul, ce qui est contraire à l'expérience.

4.2.6 Cas des forces qui ne travaillent pas

Dans le cas des forces qui ne travaillent pas (réaction normale d'un support, tension d'un fil, composante magnétique de la force de Lorentz), on a pour tout déplacement élémentaire

$$\delta W\ =\ 0$$

2. Les autres forces (poids, réaction normale, tension du fil) ne travaillent pas car elles sont perpendiculaires au déplacement.

On pourrait donc associer à ces forces une énergie potentielle constante puisque la relation $dE_p = -\delta W$ serait constamment vérifiée. Cette constante étant arbitraire, on la choisit toujours nulle. L'énergie potentielle de ces forces ne joue aucun rôle puisque le travail de ces forces, égal à la variation de leur énergie potentielle est toujours nul. Ces forces ne sont en général considérées ni comme conservatives, ni comme non conservatives. Ce sont simplement des forces qui ne travaillent pas et n'interviendront pas dans les théorèmes énergétiques.

4.2.7 Propriétés de l'énergie potentielle

Choix de la constante d'intégration

La fonction énergie potentielle $E_p(\vec{r})$ est définie par la relation $dE_p = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$, donc par l'expression de sa différentielle. Pour obtenir $E_p(\vec{r})$ on doit donc intégrer cette relation, ce qui fait apparaître une constante d'intégration dans l'expression de E_p. L'énergie potentielle est donc définie à une constante additive près : si la fonction $E_p(\vec{r})$ vérifie la relation $dE_p = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$, alors la fonction $E_p(\vec{r}) + C$, avec C une constante, la vérifie aussi puisque $d[E_p(\vec{r}) + C] = d[E_p(\vec{r})] + dC = dE_p(\vec{r}) = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$.

Le choix de la constante d'intégration est ici totalement arbitraire [3]. Cette liberté de choix vient du fait que toutes les grandeurs mesurables en lien avec l'énergie potentielle correspondent en fait à une variation d'énergie potentielle entre 2 points. Or, une variation d'énergie potentielle est indépendante du choix de cette constante :

$$E_p(\vec{r}) = f(\vec{r}) + C \quad \rightarrow \quad E_p(B) - E_p(A) = \Big[f(B) + C\Big] - \Big[f(A) + C\Big] = f(B) - f(A)$$

Puisque le choix de la constante est arbitraire, on choisit en général cette constante nulle.

Remarque : choix de l'origine des énergies potentielles

Choisir une valeur de la constante d'intégration revient en fait à choisir une position dans l'espace où l'énergie potentielle sera nulle. Cette position est appelée *origine de l'énergie potentielle*. Pour fixer la valeur de cette constante on choisit donc une position où il semble le plus naturel de considérer que l'énergie potentielle du système est nulle.

Dans le cas d'un point matériel soumis à la force de gravitation où à la force électrostatique, on choisit en général que l'énergie potentielle est nulle lorsque le point matériel est infiniment loin du système avec lequel il interagit ($r \to +\infty$), c'est à dire lorsque l'interaction entre les 2 objets est négligeable :

$$E_p = -\frac{Gmm'}{r} + cte \quad \rightarrow \quad E_p(r \to +\infty) = cte$$

En choisissant $E_p(r \to +\infty) = 0$ on obtient donc $cte = 0$.

Dans le cas d'un point matériel soumis à la force élastique, on choisit en général que l'énergie potentielle est nulle lorsque le ressort n'est ni étiré ni comprimé, c'est à dire lorsque la force exercée par le ressort est nulle :

$$E_p = \frac{k}{2}(\ell - \ell_0)^2 + cte \quad \rightarrow \quad E_p(\ell = \ell_0) = cte$$

En choisissant $E_p(\ell = \ell_0) = 0$ on obtient donc $cte = 0$.

3. Contrairement aux constante d'intégration qui apparaissent lorsqu'on intègre la 2e loi de Newton, dont la valeur est fixée par les conditions initiales.

Pour les 3 cas que nous venons de citer (gravitation, électrostatique, élastique), le choix d'une énergie potentielle nulle à une position où la force est nulle ($E_p = 0 \Leftrightarrow$ interaction négligeable) conduit à une constante d'intégration nulle, et donc à l'expression la plus simple de la fonction énergie potentielle.

Dans le cas du poids il n'existe pas de position où l'interaction est négligeable [a]. Il n'y a donc pas ici de considération physique pour nous guider dans le choix de l'origine de l'énergie potentielle. Le choix le plus simple consiste à prendre l'énergie potentielle nulle à l'altitude qui a été choisie comme origine ($z = 0$), ce qui conduit là encore à prendre la constante d'intégration nulle.

Il peut être plus compliqué de choisir une constante d'intégration en lui donnant un sens physique dans le cas d'un objet soumis simultanément à plusieurs forces conservatives (voir paragraphe suivant). Mais même dans ces situations il ne faut pas oublier que le choix de la constante d'intégration est arbitraire et n'a aucune conséquence sur le comportement ou les propriétés du système étudié.

a. Lorsqu'on considère le poids, et non pas l'interaction gravitationnelle, on ne peut pas considérer une position infiniment loin de la Terre puisque la notion de poids n'a de sens qu'au voisinage de la surface de la Terre.

Additivité des énergies potentielles

On considère un point matériel soumis à deux forces conservatives $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$. Ces forces sont respectivement associées aux énergies potentielles $E_{p,1}$ et $E_{p,2}$. Pour un déplacement infinitésimal $d\vec{r}$ on a donc les relations :

$$\begin{aligned} \vec{F_1} \cdot d\vec{r} &= -\,dE_{p,1} \\ \vec{F_2} \cdot d\vec{r} &= -\,dE_{p,2} \end{aligned}$$

En additionnant ces relations on obtient : $(\vec{F_1} + \vec{F_2}).d\vec{r} \;=\; -\,d(E_{p,1} + E_{p,2})$

Cette relation montre que le travail infinitésimal de la résultante $\vec{F_1} + \vec{F_2}$ est égal à l'opposé de la différentielle de la fonction $E_{p,1} + E_{p,2}$.

Conclusion : la résultante d'un ensemble de forces conservatives est une force conservative à laquelle on associe une énergie potentielle égale à la somme des énergies potentielles de ces différentes forces.

Expression de la force en fonction de E_p

Supposons que l'on connaisse une énergie potentielle $E_p(x)$ et que l'on cherche à déterminer l'expression de la force conservative $\vec{F}$ associée. Puisque par hypothèse E_p ne dépend que de la variable x on peut donc écrire :

$$dE_p \;=\; \frac{dE_p}{dx}\,dx$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{F} &= F_x\,\vec{u}_x + F_y\,\vec{u}_y + F_z\,\vec{u}_z \\ d\vec{r} &= dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z \end{aligned}\right\} \qquad \delta W = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

Puisque $\vec{F}$ est la force associée à l'énergie potentielle E_p on doit donc vérifier la relation :

$$dE_p \;=\; -\,\delta W \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} F_x = -\,\dfrac{dE_p}{dx} \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \end{cases}$$

on en déduit donc : $\vec{F} = -\,\dfrac{dE_p}{dx}\,\vec{u}_x$

De même, supposons que l'on connaisse une énergie potentielle $E_p(r)$ et que l'on cherche à déterminer l'expression de la force conservative $\vec{F}$ associée. Puisque par hypothèse E_p ne dépend que de la variable r on peut donc écrire :

$$dE_p \;=\; \frac{dE_p}{dr}\,dr$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F} = F_r\,\vec{u}_r + F_\varphi\,\vec{u}_\varphi + F_z\,\vec{u}_z \\ d\vec{r} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi + dz\,\vec{u}_z \end{array}\right\} \quad \delta W = F_r\,dr + r\,F_\varphi\,d\varphi + F_z\,dz$$

Puisque $\vec{F}$ est la force associée à l'énergie potentielle E_p on doit donc vérifier la relation :

$$dE_p \;=\; -\,\delta W \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} F_r = -\,\dfrac{dE_p}{dr} \\ F_\varphi = 0 \\ F_z = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{F} = -\,\frac{dE_p}{dr}\,\vec{u}_r$$

Ces relations permettent, si l'on connaît l'expression d'une énergie potentielle $E_p(x)$ ou $E_p(r)$, de déterminer l'expression de la force associée. Elles font apparaître la force comme une dérivée de l'énergie potentielle. C'est pour cette raison que l'on dit qu'une force conservative *dérive d'une énergie potentielle*. Ces relations peuvent être généralisées à l'aide de l'opérateur *gradient* (voir encadré ci-dessous).

Opérateur gradient

Considérons une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

On note df la différentielle de cette fonction et $d\vec{r}$ un déplacement infinitésimal quelconque.

Le vecteur $\vec{A}$ tel que $\boxed{df = \vec{A}\cdot d\vec{r}}$ est appelé **gradient** de la fonction f

On le note $\overrightarrow{\text{grad}}\,f$, ou $\vec{\nabla} f$

Gradient en coordonnées cartésiennes :

On considère la fonction $f(x, y, z)$. Puisque l'on travaille en coordonnées cartésiennes, on va exprimer le déplacement élémentaire et le vecteur $\vec{A}$ à l'aide de ces coordonnées :

$$\left.\begin{array}{l} d\vec{r} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z \\ \vec{A} = A_x\,\vec{u}_x + A_y\,\vec{u}_y + A_z\,\vec{u}_z \end{array}\right\} \rightarrow \; \vec{A}\cdot d\vec{r} = A_x\,dx + A_y\,dy + A_z\,dz$$

$$f = f(x, y, z) \quad \rightarrow \quad df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz$$

Puisque la relation $df = \vec{A}\cdot d\vec{r}$ doit être vérifiée quels que soient dx, dy et dz, on a donc :

$$A_x = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad A_y = \frac{\partial f}{\partial y} \qquad A_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\text{soit :} \qquad \overrightarrow{\text{grad}}\, f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{u}_z$$

Gradient en coordonnées polaires :

On considère la fonction$f(r,\varphi)$. Puisque l'on travaille en coordonnées polaires, on va exprimer le déplacement élémentaire et le vecteur $\vec{A}$ à l'aide de ces coordonnées :

$$\left.\begin{array}{l} d\vec{r} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi \\ \vec{A} = A_r\,\vec{u}_r + A_\varphi\,\vec{u}_\varphi \end{array}\right\} \rightarrow \ \vec{A}\cdot d\vec{r} = A_r\,dr + r\,A_\varphi\,d\varphi$$

$$f = f(r,\varphi) \quad \rightarrow \quad df = \frac{\partial f}{\partial r}\,dr + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\,d\varphi$$

Puisque la relation $df = \vec{A}\cdot d\vec{r}$ doit être vérifiée quels que soient dr et $d\varphi$, on a donc :

$$A_r = \frac{\partial f}{\partial r} \qquad A_\varphi = \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$\text{soit :} \qquad \overrightarrow{\text{grad}}\, f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial r}\,\vec{u}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\vec{u}_\varphi$$

Gradient de l'énergie potentielle :

Le gradient d'une fonction $f(\vec{r})$ est donc le vecteur $\vec{A}$ tel que $df = \vec{A}\cdot d\vec{r}$

Une force est dite conservative si et seulement si il existe une fonction $E_p(\vec{r})$ telle que $dE_p = -\vec{F}\cdot d\vec{r}$

Nous en déduisons immédiatement que pour une force conservative :

$$\vec{F} \ = \ -\,\overrightarrow{\text{grad}}\,E_p$$

Cette relation permet de déterminer l'expression d'une force conservative, si l'on connaît celle de l'énergie potentielle associée.

4.2.8 Positions d'équilibre

Nous allons maintenant montrer que lorsque l'énergie potentielle ne dépend que d'une seule variable x, l'observation du graphe $E_p(x)$ permet de repérer et de caractériser très simplement les positions d'équilibre du système.

Rappels : système à 1 degré de liberté, équilibre stable / instable

On appelle système à 1 degré de liberté un système pour lequel il existe une seule variable spatiale indépendante qui évolue au cours du temps.

Exemples simples :

- masse qui glisse le long d'un axe (Ox) $\rightarrow$ $x(t)$
- pendule $\rightarrow$ $\varphi(t)$

Exemple un peu plus compliqué : point matériel glissant sur un support dans le plan (Oxy) (voir figure 4.5). Dans cet exemple, les coordonnées x et y du point matériel vont varier au cours du temps. Cependant, si on suppose que le point matériel reste en contact avec le support, alors les variations de x et de y sont liées par la géométrie du support. Ici le point matériel se déplace suivant une courbe $y(x)$ imposée par les conditions extérieures. Il n'y a donc qu'une seule variable spatiale variant indépendemment au cours du temps : si on connaît $x(t)$, alors on connaît automatiquement $y(t)$ puisque $y(x)$ est connu.

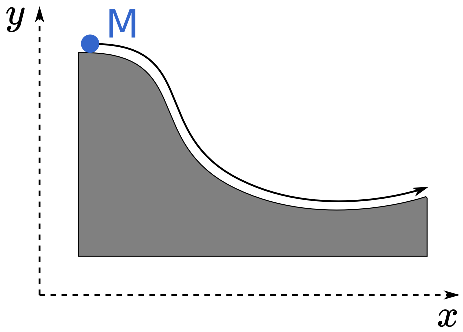


FIGURE 4.5 – Point matériel en mouvement sur un support dans le plan (Oxy).

Définitions

Position d'équilibre : position telle que si on lâche le système sans vitesse dans cette position alors il reste immobile

- **équilibre stable** : si on écarte légèrement le système de cette position, alors il tend spontanément à y revenir
- **équilibre instable** : si on écarte légèrement le système de cette position, alors il tend spontanément à s'en écarter encore plus

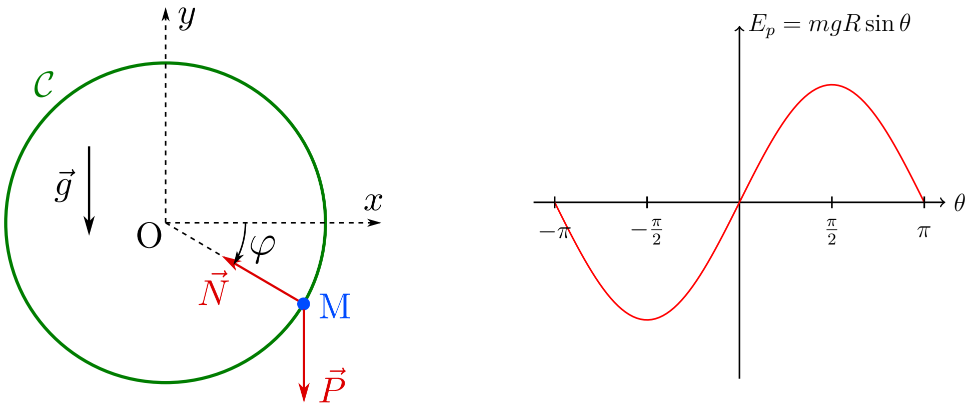
Exemple : équilibre d'une masse coulissant sur un cercle

Dans cet exemple, on souhaite montrer comment l'étude de la fonction énergie potentielle permet de déterminer et caractériser les positions d'équilibre d'un système à 1 degré de liberté. On considère un anneau $\mathcal{C}$ de centre O et rayon R, immobile dans le référentiel terrestre. On souhaite déterminer les positions d'équilibre d'une masse m (repérée par le point M) pouvant coulisser sans frottement autour de cet anneau (comme une perle sur un fil). La masse est soumise au poids $\vec{P}$ et à la réaction normale $\vec{N}$ de l'anneau. Dans cet exemple, l'objet étudié est donc soumis à une force conservative et à une force qui ne travaille pas. Puisque l'on veut déterminer les positions d'équilibre de M, on va supposer qu'on lâche M sans vitesse à un angle φ donné. Quelle condition doit vérifier φ pour que M reste immobile ?

La réaction $\vec{N}$ étant normale au cercle, elle ne tend pas à faire coulisser M dans un sens ou dans l'autre. En ce qui concerne le poids, on peut le décomposer sur la base polaire :

$$\vec{P} = P_r\,\vec{u}_r + P_\varphi\,\vec{u}_\varphi = -mg\sin\varphi\,\vec{u}_r - mg\cos\varphi\,\vec{u}_\varphi$$

De même que la réaction $\vec{N}$, la composante P_r ne tend pas à faire coulisser M dans un sens ou dans l'autre. Il n'y a donc que la composante P_φ qui peut mettre M en mouvement lorsqu'on le lâche.



(a) Représentation du problème. (b) Diagramme d'énergie potentielle.

FIGURE 4.6 – Masse coulissant sur un anneau.

Pour que M reste à l'équilibre il faut donc que P_φ soit nul, ce qui se produit en $\varphi = \pm\pi/2$. Nous avons ainsi déterminé les positions d'équilibre à partir de l'étude des forces exercées sur M. Nous allons maintenant utiliser cette analyse pour montrer comment ces positions peuvent être obtenues à partir de l'énergie potentielle.

Dans cet exemple l'énergie potentielle de M est l'énergie potentielle de pesanteur. La position de M peut être repérée à l'aide d'une seule variable spatiale φ. On va donc écrire l'expression de l'énergie potentielle comme fonction uniquement de cette variable :

$$\left.\begin{array}{l} E_p = mgy \\ y = R\sin\varphi \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad E_p(\varphi) = mgR\sin\varphi$$

Le poids étant la force conservative associé à cette énergie potentielle, la relation $\vec{P}.d\vec{r} = -dE_p$ doit être vérifiée pour un déplacement $d\vec{r}$ quelconque. Elle doit donc être vérifiée en particulier pour un déplacement de M le long de l'anneau $d\vec{r} = Rd\varphi\,\vec{u}_\varphi$:

$$(P_r\,\vec{u}_r + P_\varphi\,\vec{u}_\varphi).Rd\varphi\,\vec{u}_\varphi = -dE_p \quad \Rightarrow \quad P_\varphi\,Rd\varphi = -dE_p \quad \Rightarrow \quad P_\varphi = -\frac{1}{R}\frac{dE_p}{d\varphi}$$

On peut donc en déduire que : $\quad P_\varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{dE_p}{d\varphi} = 0$

La condition d'équilibre que nous avions trouvé par l'analyse des forces peut donc se formuler de la façon suivante : les positions d'équilibre de M correspondent à des extremums de l'énergie potentielle ($\rightarrow$ E_p doit être minimale ou maximale). Dans l'exemple que nous traitons, E_p présente un maximum en $\varphi = \pi/2$ et un minimum en $\varphi = -\pi/2$. On retrouve donc bien le même résultat que celui obtenu par une analyse des forces.

Pour déterminer le caractère stable ou instable d'une position d'équilibre, il faut étudier le comportement du système lorsqu'on l'écarte légèrement de cette position.

Supposons tout d'abord qu'on lâche M sans vitesse à partir d'un angle $\varphi = \frac{\pi}{2} + \delta$, avec $\delta > 0$ et petit. Puisque E_p est maximale en $\varphi = \frac{\pi}{2}$, cela signifie que $\frac{dE_p}{d\varphi}$ est une fonction décroissante au voisinage de cette position. Par conséquent :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dE_p}{d\varphi}(\varphi = \frac{\pi}{2}) = 0 \\ \dfrac{dE_p}{d\varphi} \text{ décroissante au voisinage de } \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \frac{dE_p}{d\varphi}(\varphi = \frac{\pi}{2} + \delta) < 0$$

Or puisque $P_\varphi = -\dfrac{1}{R}\dfrac{dE_p}{d\varphi}$, on en déduit que $P_\varphi(\varphi = \frac{\pi}{2}+\delta) > 0$, et donc que cette force va tendre à éloigner M de la position d'équilibre. Un raisonnement analogue en $\varphi = \frac{\pi}{2} - \delta$ conduirait à un résultat identique. On peut donc en conclure que la position $\varphi = \frac{\pi}{2}$ correspond à un équilibre instable.

On peut reprendre ce raisonnement pour étudier la stabilité de la position $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$. On trouvera alors que lorsqu'on écarte M de cette position, la composante P_φ tend à ramener M vers la position d'équilibre. La position $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ correspond donc à un équilibre stable.

Étude des positions d'équilibre à partir de l'énergie potentielle

Les extremums de l'énergie potentielle correspondent à des positions d'équilibre. Pour un système à 1 degré de liberté caractérisé par la variable spatiale x on peut déterminer les positions d'équilibre x_e en résolvant l'équation

$$\frac{dE_p}{dx}(x_e) \; = \; 0$$

Parmi ces positions d'équilibre, celles pour lesquelles l'énergie potentielle est minimale (respectivement maximale) correspondent à des positions d'équilibre stable (respectivement instable). On peut donc écrire :

$$\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_e) > 0 \quad \leftrightarrow \quad \text{équilibre stable}$$

$$\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_e) < 0 \quad \leftrightarrow \quad \text{équilibre instable}$$

Complément : généralisation

On considère un point matériel M astreint à se déplacer sans frottement sur une trajectoire $\mathcal{C}$. Sur cette trajectoire, on repère un point particulier que l'on choisit comme origine O. On va également orienter cette trajectoire en choisissant un sens de parcours positif. On appelle *abscisse curviligne*, que l'on notera s, la position de M par rapport à O le long de $\mathcal{C}$. La valeur de s est donc égale à la distance entre O et M, le long de $\mathcal{C}$, comptée positivement si M s'est déplacé dans le sens positif, et négativement dans le cas contraire. s est donc la variable spatiale qui repère la position de M sur la courbe $\mathcal{C}$ [a].

On suppose que M est soumis à un ensemble de forces conservatives de résultante $\vec{F}$, associée à l'énergie potentielle E_p, ainsi qu'à la réaction du support $\vec{N}$, perpendiculaire à la trajectoire puisqu'on suppose qu'il n'y a pas de frottements. L'énergie potentielle étant une fonction des coordonnées de l'espace, on va supposer qu'on peut l'écrire comme fonction uniquement de la variable s : $E_p = E_p(s)$.

On note $\vec{u}_\parallel$ le vecteur unitaire tangent à la trajectoire. Le déplacement infinitésimal de M s'écrit donc $d\vec{r} = ds\,\vec{u}_\parallel$. La résultante des forces conservatives peut s'écrire sous la forme : $\vec{F} = F_\parallel\,\vec{u}_\parallel + \vec{F}_\perp$, où $\vec{F}_\perp$ est la composante de $\vec{F}$ perpendiculaire à $\vec{u}_\parallel$. La réaction du support $\vec{N}$ étant elle aussi perpendiculaire à $\vec{u}_\parallel$, la condition d'équilibre de M est la nullité de $F_\parallel$.

La relation $\vec{F}\cdot d\vec{r} = -dE_p$ devant être vérifiée pour le déplacement $d\vec{r} = ds\,\vec{u}_\parallel$ on peut écrire :

$$(F_\parallel\,\vec{u}_\parallel + \vec{F}_\perp).ds\,\vec{u}_\parallel = -dE_p \quad \Rightarrow \quad F_\parallel\,ds = -dE_p \quad \Rightarrow \quad F_\parallel = -\frac{dE_p}{ds}$$

L'équilibre de M correspond donc aux extremums de la fonction $E_p(s)$. Des raisonnements identiques à ceux que nous avons utilisés dans l'exemple de la masse coulissant sur un anneau permettent de montrer que les minimums (resp. maximums) de E_p correspondent à des positions d'équilibre stable (resp. instable).

a. Dans l'exemple de la masse coulissant sur l'anneau, s correspondrait à $R\varphi$.

4.2.9 Mouvement au voisinage d'une position d'équilibre

Nous allons montrer ici que le modèle de l'oscillateur harmonique est très général car il permet de représenter la dynamique d'un très grand nombre de système au voisinage d'une position d'équilibre stable. À titre d'exemple, considérons une masse ponctuelle astreinte à un mouvement unidimensionnel le long de l'axe (Ox), soumise à des forces conservatives et éventuellement à des forces qui ne travaillent pas (donc $\perp$ (Ox)). On suppose que cette masse possède une position d'équilibre stable en x_0, qui correspond donc à un minimum de l'énergie potentielle :

$$\frac{dE_p}{dx}(x_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0) > 0 \tag{4.1}$$

Si nous nous intéressons à un mouvement de petite amplitude autour de la position d'équilibre , on peut écrire $x(t) = x_0 + \epsilon(t)$ où $\epsilon(t)$ est très petit par rapport aux longueurs caractéristiques du problème. On peut alors exprimer l'énergie potentielle de la masse au voisinage de x_0 à l'aide d'un développement limité au second ordre :

$$E_p(x) \approx E_p(x_0) + \frac{dE_p}{dx}(x_0)\ (x - x_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0)\ (x - x_0)^2 \tag{4.2}$$

Soit, en notant $k = \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0) > 0$,

$$E_p(x) = E_p(x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 \tag{4.3}$$

Au voisinage de x_0, la force exercée sur la masse ponctuelle s'écrit donc approximativement :

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dx}\,\vec{u}_x = -k(x - x_0)\,\vec{u}_x \tag{4.4}$$

On retrouve là l'expression de la force de rappel exercée par un ressort de raideur k et de longueur à vide x_0. En appliquant la deuxième loi de Newton projetée sur l'axe Ox on obtient l'équation du mouvement suivante :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_0) \tag{4.5}$$

En effectuant le changement de variable suivant $X(t) = x(t) - x_0$ et en notant $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, l'équation du mouvement devient :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0. \tag{4.6}$$

On retrouve ici l'équation de l'oscillateur harmonique vue au chapitre 3 : une équation différentielle linéaire du second ordre d'inconnue $X(t)$. Nous avons ainsi montré que pour un point matériel pouvant se mouvoir suivant un seul axe, soumis à des forces conservatives et possédant une position d'équilibre stable, le mouvement est celui d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. La constante de raideur *équivalente* k est directement liée à la courbure de l'énergie potentielle $E_p(x)$. Pour obtenir ce résultat, nous n'avons fait que 2 hypothèses :

1. l'existence d'une position d'équilibre

2. le système n'est soumis qu'à des forces conservatives ou qui ne travaillent pas

Il y a donc une grande universalité de ce phénomène. Pour des perturbations de plus grande amplitude autour de la position d'équilibre, il est nécessaire d'aller au delà du second ordre dans le développement limité de l'énergie potentielle. On obtient alors l'équation du mouvement d'un oscillateur *anharmonique* qui tend vers celui de l'oscillateur harmonique quand l'amplitude de vibration tend vers zéro.

4.3 Énergie mécanique d'un point matériel

4.3.1 Définition de l'énergie mécanique, théorème de l'énergie mécanique

On considère un point matériel de masse m en mouvement dans un référentiel inertiel $\mathcal{R}$ et soumis à un ensemble de forces (conservatives, non conservatives ou qui ne travailllent pas). On note :

- E_p l'énergie potentielle associée à la résultante des forces conservatives
- δW^c le travail effectué par les forces conservatives au cours d'un déplacement infinitésimal
- δW^{nc} le travail effectué par les forces non conservatives au cours d'un déplacement infinitésimal

Définition : énergie mécanique

On appelle énergie mécanique d'un point matériel la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle :

$$E_m = E_c + E_p$$

Théorème de l'énergie mécanique

Dans un référentiel inertiel, la variation d'énergie mécanique d'un point matériel est égale au travail des forces non conservatives qui lui sont appliquées :

- pour un déplacement infinitésimal : $dE_m = \delta W^{nc}$
- pour un déplacement entre deux points A et B le long d'une trajectoire $\mathcal{C}$:

$$\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = W^{nc}_{\underset{\mathcal{C}}{A \to B}}$$

- à l'instant t : $\dfrac{dE_m}{dt}(t) = \mathcal{P}^{nc}(t)$

  où $\mathcal{P}^{nc}$ est la puissance des forces non conservatives

Interprétation :

Le théorème de l'énergie mécanique montre que l'on peut définir une grandeur, l'énergie mécanique, qui est constante lorsque le travail des forces non conservatives est nul. Dans cette situation, l'évolution du système ne peut se traduire d'un point de vue énergétique par des phénomènes de conversion entre l'énergie cinétique (associée au mouvement de la masse) et l'énergie potentielle (associée aux forces conservatives).

Dans le cas d'un point matériel soumis à des forces non conservatives, l'énergie mécanique n'est pas constante et la variation de cette grandeur est égale au travail effectué par les forces non conservatives.

Démonstration :

D'après le théorème de l'énergie cinétique on peut écrire pour un déplacement infinitésimal du point matériel : $dE_c = \delta W^c + \delta W^{nc}$

Par définition de l'énergie potentielle (voir 4.2.1) on a $\delta W_c = -dE_p$

$\Rightarrow \; dE_c + dE_p = \delta W^{nc} \quad \Rightarrow \quad d(E_c + E_p) = \delta W^{nc} \quad \Rightarrow \quad dE_m = \delta W^{nc}$

Remarques :

- ce théorème n'est rien d'autre qu'une reformulation du théorème de l'énergie cinétique où l'on exprime W^c comme la variation d'énergie potentielle
- l'introduction du signe négatif dans la définition de l'énergie potentielle ($dE_p = -\delta W$) permet de définir l'énergie mécanique comme la somme de 2 termes énergétiques

4.3.2 Diagramme énergétique

Considérons un point matériel possédant 1 seul degré de liberté soumis uniquement à des forces conservatives ou à des forces qui ne travaillent pas. Si on note x la variable spatiale caractérisant l'évolution du système, on peut écrire l'énergie potentielle comme fonction dépendant uniquement de cette variable : $E_p(x)$. L'énergie mécanique est quant à elle constante. On peut alors construire un **diagramme énergétique** sur lequel on trace la courbe $E_p(x)$ ainsi que la valeur de l'énergie mécanique E_m qui sera représentée par une droite horizontale [4].

Considérons par exemple une masse m pouvant glisser sans frottement sur un plan horizontal et fixée à l'extrémité d'un ressort horizontal dont l'autre extrémité est accrochée en point fixe du référentiel terrestre. L'énergie potentielle s'écrit : $E_p(x) = \frac{k}{2}(x - \ell_0)^2$ et est représentée en bleu sur la figure 4.7. La valeur de l'énergie mécanique, quant à elle, est fixée par les conditions initiales : si on suppose qu'à $t = 0$ la masse se trouve en x_0 avec une vitesse v_0 alors à tout instant l'énergie mécanique aura pour valeur :

$$E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{k}{2}(x_0 - \ell_0)^2.$$

Cette quantité est représentée en rouge sur la figure 4.7.

L'étude de ce type de diagramme énergétique (voir figure 4.7) permet notamment de déterminer la plage des valeurs de x accessible au système. En effet, puisque

$$E_m = E_c + E_p$$

on peut écrire

$$E_m - E_p(x) = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0.$$

On en déduit que la relation suivante doit nécessairement être vérifiée à tout instant :

$$E_p(x) \;\leq\; E_m$$

Cette relation implique que seules les valeurs de x pour lesquelles l'énergie potentielle est inférieure à la valeur de l'énergie mécanique sont accessibles au système. Dans notre exemple cela signifie que la masse ne peut se déplacer qu'entre les abscisses x_1 et x_2 représentées sur le graphe. De plus si on considère une position x située entre ces 2 abscisses, puisque $E_c + E_p = E_m$, alors la distance entre la courbe représentant $E_p(x)$ et la droite horizontale représentant E_m est égale à la valeur de l'énergie cinétique du point matériel (à cette abscisse). Dans notre exemple on peut ainsi constater

4. Puisque $E_m = E_c + E_p$ et que $E_c \geq 0$, la valeur de l'énergie mécanique est nécessairement plus grande que le minimum de E_p.

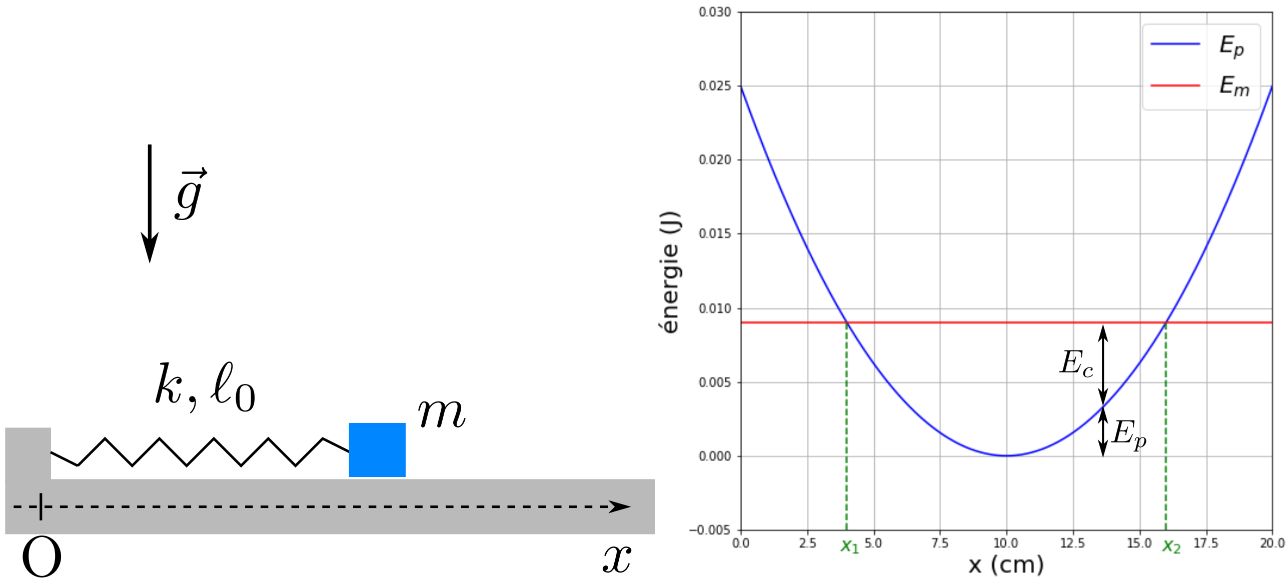


Figure 4.7 – Diagramme énergétique du système masse-ressort. Les valeurs indiquées sur le graphe correspondent aux paramètres suivants : $m = 100$ g, $k = 5$ N/m, $\ell_0 = 10$ cm, $x_0 = 12$ cm et $v_0 = 0.4$ m/s

graphiquement que l'énergie cinétique sera maximale lorsque l'énergie potentielle sera minimale, c'est à dire en $x = \ell_0$.

Montrons maintenant comment ce **diagramme énergétique** permet de décrire l'évolution du système :

- On suppose que la masse se trouve en $x = 12.5$ cm et se déplace vers la droite (x augmente)
- Au cours de cette phase la distance entre la courbe bleue et la droite rouge diminue, donc l'énergie cinétique aussi. Cette phase se poursuit jusqu'à ce que la masse atteigne la position x_2 où l'énergie cinétique (et donc la vitesse) s'annule.
- On se trouve alors dans la situation où la masse est immobile et soumise à la force $\vec{F} = -\frac{dE_p}{dx}\,\vec{u}_x$, orientée suivant $-\vec{u}_x$ puisque $E_p(x)$ est croissante en x_2.
- La masse va donc se mettre en mouvement vers la gauche. Son énergie cinétique va augmenter jusqu'à être maximale lorsque la masse passe en $x = \ell_0$. L'énergie cinétique diminue ensuite et s'annule lorsque la masse atteint la position x_1.
- En x_1 la masse est donc immobile et soumise à la force $\vec{F} = -\frac{dE_p}{dx}\,\vec{u}_x$, orientée suivant $+\vec{u}_x$ puisque $E_p(x)$ est décroissante en x_1. La masse repart alors vers la droite.

Remarque : dans cet exemple, l'énergie potentielle présentant un minimum en $x = \ell_0$, cette position est une position d'équilibre stable. On retrouve le résultat obtenu au chapitre précédent sur l'oscillateur horizontal.

4.3.3 Étude énergétique de l'oscillateur harmonique

Au chapitre 3, nous avons vu qu'un oscillateur harmonique (non amorti) a comme solution en déplacement autour de sa position d'équilibre ($X(t) = x(t) - x_{eq}$) et en vitesse :

$$X(t) \;=\; C\,\cos(\omega_0 t + \phi) \qquad \rightarrow \qquad \dot{X}(t) \;=\; -\omega_0\, C\,\sin(\omega_0 t + \phi)$$

L'énergie cinétique s'écrit donc comme suit

$$E_c \;=\; \frac{1}{2}m\dot{X}^2 \;=\; \frac{1}{2}m\omega_0^2 C^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi)$$

et l'énergie potentielle

$$E_p \;=\; \frac{k}{2}\,X^2 \;=\; \frac{k}{2}\,C^2\,\cos^2(\omega_0 t+\phi).$$

L'énergie mécanique, somme de l'énergie potentielle et cinétique, s'écrit donc

$$E_m \;=\; \frac{1}{2}m\omega_0^2 C^2\sin^2(\omega_0 t+\phi) \;+\; \frac{k}{2}\,C^2\,\cos^2(\omega_0 t+\phi).$$

Puisque $\omega_0=\sqrt{k/m}$ on peut donc écrire

$$E_m \;=\; \frac{k}{2}C^2\left(\sin^2(\omega_0 t+\phi)+\cos^2(\omega_0 t+\phi)\right)$$

En utilisant le fait que $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ on obtient finalement

$$E_m \;=\; \frac{k}{2}C^2 \;=\; \text{cte}$$

Nous retrouvons ici le fait que l'énergie mécanique d'un système conservatif est constante au cours du temps. Il y a échange continuel entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique. L'énergie potentielle est maximale lorsque $\sin(\omega_0 t+\phi)=1$, c'est à dire lorsque $X(t)=\pm C$. On a ainsi $E_p=\frac{1}{2}kC^2$ et l'énergie cinétique est nulle. L'énergie cinétique est maximale lorsque la masse passe par sa position d'équilibre qui correspond à $E_p=0$.

Au cours d'une oscillation complète, la masse passe 2 fois par la position d'équilibre et atteint 2 fois les positions extrêmes $+C$ et $-C$. Les énergies potentielle et cinétique oscillent donc deux fois plus vite que l'amplitude, voir figure 4.8. La période des oscillations de ces énergies correspond à la moitié de la période T_0 des oscillations. Ce doublement de la fréquence des termes énergétiques se voit clairement sur l'expression de $E_c(t)$ et $E_p(t)$ puisque $\sin^2\theta=\frac{1-\cos(2\theta)}{2}$ et $\cos^2\theta=\frac{1+\cos(2\theta)}{2}$.

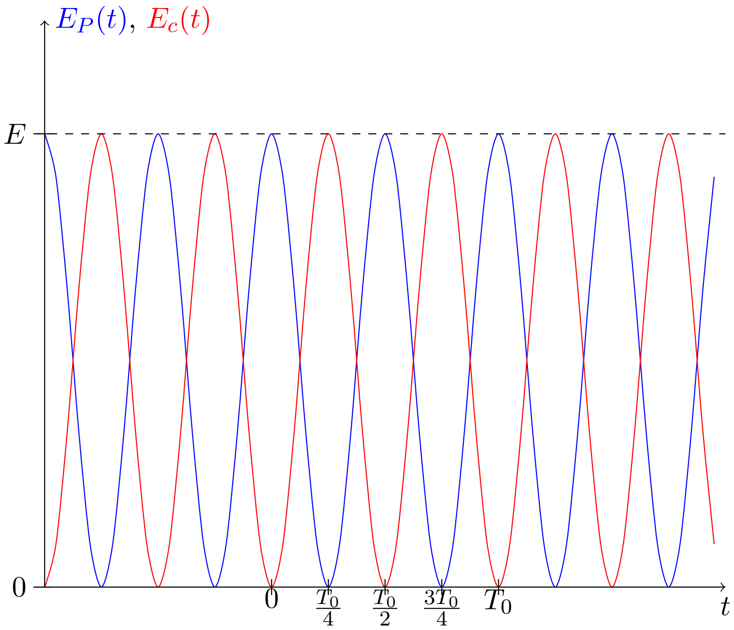


FIGURE 4.8 – Énergie potentielle ($E_p(t)$), cinétique ($E_c(t)$) et mécanique (E). Les énergies potentielle et cinétique oscillent avec une période égale à la moitié de la période propre T_0 des oscillations de la masse $X(t)$.

4.3.4 Facteur de qualité

Contrairement à l'oscillateur harmonique, l'oscillateur amorti n'est pas un système conservatif. L'énergie du système n'est pas constante et sa variation au cours du temps va correspondre au travail négatif des forces de frottement. Cette énergie diminue et la perte correspondante est en général évacuée sous forme de chaleur.

On suppose que la force de frottement est proportionnelle à la vitesse : $\vec{F}_d = -\gamma\,\vec{v}$. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique, la variation infinitésimal de l'énergie mécanique s'écrit [5] :

$$dE = \delta W^{NC} = \vec{F}_d.dx\vec{u}_x = (-\gamma\dot{x}\vec{u}_x).(\dot{x}dt\vec{u}_x) = -\gamma\dot{x}^2dt \tag{4.7}$$

La variation d'énergie par unité de temps est donc égale à :

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma\dot{x}^2 < 0 \tag{4.8}$$

On retrouve bien une variation négative de l'énergie, c'est-à-dire une perte d'énergie au cours du temps.

Dans le cas d'un amortissement très faible il est possible d'estimer la perte d'énergie au cours du temps. L'amplitude des oscillations est de la forme $X(t) = X_0\,e^{-\xi\omega_0 t}\,\cos(\omega_d t+\phi)$ avec $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$. Si $\xi \ll 1$ alors $\omega_d \approx \omega_0$ et on peut écrire

$$X(t) \;\approx\; X_0\,e^{-\xi\omega_0 t}\,\cos(\omega_0 t+\phi)$$

Pour la vitesse, on a donc

$$\dot{X}(t) \;=\; X_0\,e^{-\xi\omega_0 t}\left[-\xi\omega_0\cos(\omega_0 t+\phi) - \omega_0\sin(\omega_0 t+\phi)\right]$$

Puisque $\xi \ll 1$ on peut négliger le premier terme de la vitesse par rapport au second et on a donc

$$\dot{X}(t) \;\approx\; -\omega_0 X_0\,e^{-\xi\omega_0 t}\,\sin(\omega_0 t+\phi)$$

L'énergie cinétique et l'énergie potentielle peuvent donc s'écrire respectivement

$$\begin{aligned} E_c &\approx \frac{1}{2}m\omega_0^2 X_0^2 e^{-2\xi\omega_0 t}\sin^2(\omega_0 t+\phi) \;=\; \frac{k}{2}X_0^2 e^{-2\xi\omega_0 t}\sin^2(\omega_0 t+\phi) \\ E_p &\approx \frac{k}{2}X_0^2 e^{-2\xi\omega_0 t}\cos^2(\omega_0 t+\phi) \end{aligned}$$

Dans le cas d'un amortissement très faible, l'énergie mécanique du point matériel s'écrit donc approximativement sous la forme

$$E(t) \;\approx\; \frac{k}{2}X_0^2 e^{-2\xi\omega_0 t} \tag{4.9}$$

Grâce à cette expression on peut déterminer la variation relative d'énergie mécanique à chaque pseudo-période :

$$\frac{E(t)-E(t+T)}{E(t)} \;=\; 1 - e^{-2\xi\omega_0 T}$$

Puisque $\xi \ll 1$ on a $T \approx T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ et donc $2\xi\omega_0 T \approx 4\pi\xi$. En utilisant un développement limité au premier ordre de $e^{4\pi\xi}$ on obtient finalement

$$\frac{E(t)-E(t+T)}{E(t)} \;\approx\; 4\pi\xi \tag{4.10}$$

5. En se rappelant que le déplacement infinitésimal s'écrit $d\vec{r} = dx\,\vec{u}_x = \frac{dx}{dt}\,dt\,\vec{u}_x = \dot{x}dt\,\vec{u}_x$

Facteur de qualité

Pour caractériser la dissipation d'énergie, il est pratique d'introduire un coefficient sans dimension appelé *facteur de qualité*, noté Q et défini par :

$$Q = \frac{2\pi}{\text{perte d'énergie relative par période}} \tag{4.11}$$

Plus ce facteur Q est important et plus la perte relative d'énergie est faible. Il sert à caractériser un oscillateur. Pour l'oscillateur très faiblement amorti, ce facteur vaut :

$$Q = \frac{1}{2\xi} \tag{4.12}$$

Dans le cas du système masse-ressort-amortisseur étudié dans le chapitre précédent où $\xi = \dfrac{\gamma}{2m\omega_0}$ et $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, on a :

$$Q = \frac{1}{2\xi} = \frac{m\omega_0}{\gamma} = \frac{k}{\gamma\omega_0} = \frac{1}{\gamma}\sqrt{mk} \tag{4.13}$$

Plus l'amortissement est faible (petite valeur du coefficient de frottement) et plus ce facteur Q est important (moins de perte relative d'énergie). Q augmente aussi avec la masse m et la raideur k de l'oscillateur.

Remarque 1 : le facteur de qualité peut s'exprimer en fonction du décrément logarithmique (voir chapitre 3) $\delta = \xi\omega_0 T$. La perte relative d'écrit :

$$\frac{|\Delta E|}{E} = 1 - e^{-2\xi\omega_0 T} = 1 - e^{-2\delta} \tag{4.14}$$

Si l'amortissement est très faible, on a $\delta \ll 1$ et on peut écrire :

$$\frac{|\Delta E|}{E} = 1 - e^{-2\delta} \approx 2\delta \tag{4.15}$$

On obtient alors :

$$Q = 2\pi\frac{E}{\Delta E} = \frac{2\pi}{2\delta} = \frac{\pi}{\delta} \tag{4.16}$$

Remarque 2 : On peut aussi interpréter le facteur de qualité comme le nombre de cycles qu'il faut à l'oscillateur pour que son amplitude diminue de $1/e^{\pi}$ de sa valeur initiale. En effet, pour caractériser l'amortissement des oscillations après n pseudo-périodes (avec $T = 2\pi/\omega_d$), on peut calculer le rapport

$$\frac{X(t+nT)}{X(t)} = \frac{C\,e^{-\xi\omega_0(t+nT)}\sin(\omega_d(t+nT)+\phi)}{C\,e^{-\xi\omega_0 t}\sin(\omega_d t+\phi)} = e^{-\xi\omega_0 nT} = e^{-n\delta}$$

Donc, si $n = Q = \dfrac{\pi}{\delta}$ on obtient

$$\frac{X(t+nT)}{X(t)} = e^{-\pi}$$

Au bout d'un nombre de cycles égal à Q, l'amplitude des oscillations est donc multipliée par $e^{-\pi}$, c'est à dire divisée par e^{π}.

2^e loi de Newton vs théorèmes énergétiques

Comment décider s'il vaut mieux utiliser la 2^eloi de Newton ou un théorème énergétique pour résoudre un problème donné ?

- 2^e loi de Newton : dans un référentiel inertiel $m\vec{a} = \vec{F}$

  Lorsqu'elle est possible, l'intégration de cette relation conduit à l'expression de la vitesse et de la position au cours du temps.

- théorèmes énergétiques : dans un référentiel inertiel $\Delta E_c = W$ et $\Delta E_m = W^{nc}$

  Ces théorèmes relient la variation de v^2 au travail des forces exercées au cours du déplacement.

Donc si l'on souhaite déterminer l'évolution du système au cours du temps il faut plutôt opter pour la 2^e loi de Newton. En revanche si on s'intéresse seulement à la variation de v entre 2 points il faut plutôt choisir un théorème énergétique [a].

a. En fait les théorèmes énergétiques permettent également d'obtenir une partie des équations du mouvement lorsqu'on les utilise sous la forme de relations instantanées : $\dot{E}_c = \mathcal{P}$ ou $\dot{E_m} = \mathcal{P}^{nc}$. Par rapport à la seconde loi de Newton, ils présentent la particularité de ne pas faire intervenir les forces qui ne travaillent pas. Selon le problème considéré cela peut être un avantage ou un inconvénient.

4.4 Introduction à l'étude énergétique des systèmes

Depuis le début de ce chapitre nous nous sommes restreint à l'étude énergétique d'un point matériel. Nous allons maintenant utiliser les relations que nous avons établies afin d'établir les théorèmes énergétiques applicables à un système. Dans cette partie nous considérerons un système $\mathcal{S}$ constitué de N points matériels M_i (i = 1 à N). On note m_i, $\vec{r}_i$, $\vec{v}_i$ et $\vec{a}_i$ la masse, la position, la vitesse et l'accélération du point $M_i \in \mathcal{S}$. On note également $\vec{F}_{ji}$ la force exercée par le point $M_j \in \mathcal{S}$ sur le point $M_i \in \mathcal{S}$, et $\vec{F}_{ext,i}$ la résultante de toutes les forces exercées sur M_i par des objets qui ne font pas partie du système $\mathcal{S}$.

4.4.1 Énergie cinétique d'un système, théorème de l'énergie cinétique

Définition : énergie cinétique d'un système

On définit l'énergie cinétique d'un système comme la somme des énergies cinétiques de tous les points matériels qui constituent le système :

$$E_c(\mathcal{S}) \;=\; \sum_{i=1}^{N} E_c(M_i) \;=\; \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\, m_i\, v_i^2$$

Théorème de l'énergie cinétique pour 2 points matériels

Pour établir le théorème de l'énergie cinétique dans le cas d'un système, nous allons considérer tout d'abord un système constitué seulement de 2 points matériels M_1 et M_2 en mouvement dans un référentiel galiléen. Nous pouvons appliquer séparément le théorème de l'énergie cinétique à chacun de ces 2 points :

$$\left.\begin{aligned} dE_{c1} &= \vec{F}_{ext,1}\cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21}\cdot d\vec{r}_1 \\ dE_{c2} &= \vec{F}_{ext,2}\cdot d\vec{r}_2 + \vec{F}_{12}\cdot d\vec{r}_2 \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad d(E_{c1}+E_{c2}) = \vec{F}_{ext,1}\cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{ext,2}\cdot d\vec{r}_2 + \vec{F}_{21}\cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{12}\cdot d\vec{r}_2$$

Or, d'après la 3e loi de Newton : $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. On a donc :

$$\vec{F}_{21}\cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{12}\cdot d\vec{r}_2 = \vec{F}_{21}\cdot(d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) = \vec{F}_{21}\cdot d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{M_2M_1}$

$\Rightarrow$ $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ correspond au vecteur position de M_1 dans un repère ayant M_2 pour origine. Ce vecteur représente donc la position relative de M_1 par rapport à M_2.

$$\rightarrow \qquad dE_c(\mathcal{S}) \;=\; \vec{F}_{ext,1}\cdot d\vec{r}_1 \;+\; \vec{F}_{ext,2}\cdot d\vec{r}_2 \;+\; \vec{F}_{21}\cdot d\overrightarrow{M_2M_1}$$

- $\vec{F}_{ext,1}\cdot d\vec{r}_1$ et $\vec{F}_{ext,2}\cdot d\vec{r}_2$ correspondent au travail effectué par les forces que l'extérieur exerce sur le système.

$$\delta W^{ext} = \vec{F}_{ext,1}\cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{ext,2}\cdot d\vec{r}_2 \qquad \rightarrow \textbf{ travail des forces extérieures}$$

- $\vec{F}_{21}\cdot d\overrightarrow{M_2M_1}$ correspond au travail effectué par les forces qui s'exercent entre M_1 et M_2.

$$\delta W^{int} = \vec{F}_{21}\cdot d\overrightarrow{M_2M_1} \qquad \rightarrow \textbf{ travail des forces intérieures}$$

Le théorème de l'énergie cinétique pour le système $\mathcal{S} = \{M_1, M_2\}$ peut donc finalement s'écrire :

$$dE_c(\mathcal{S}) \;=\; \delta W^{ext} + \delta W^{int}$$

En divisant par dt on obtient : $\dfrac{dE_c}{dt} \;=\; \mathcal{P}^{ext} + \mathcal{P}^{int}$

En intégrant le long d'un chemin : $E_c(B) - E_c(A) \;=\; W^{ext}_{\underset{\mathcal{C}}{A\to B}} + W^{int}_{\underset{\mathcal{C}}{A\to B}}$

Cas d'un système de N points matériels

Le raisonnement précédent se généralise à un système de N points matériels (voir encadré).

Théorème de l'énergie cinétique pour un système

Dans un référentiel inertiel, la variation d'énergie cinétique d'un système est égale au travail effectué par les forces **extérieures et intérieures** :

- Pour une évolution infinitésimale entre t et $t+dt$: $dE_c \;=\; \delta W^{ext} \;+\; \delta W^{int}$
- Pour une évolution entre 2 intants t_A et t_B : $E_c(B) - E_c(A) \;=\; W^{ext}_{\underset{\mathcal{C}}{A\to B}} + W^{int}_{\underset{\mathcal{C}}{A\to B}}$
- A l'instant t : $\dfrac{E_c}{dt}(t) \;=\; \mathcal{P}^{ext}(t) + \mathcal{P}^{int}(t)$

4.4.2 Énergie potentielle et énergie mécanique d'un système

Énergie potentielle extérieure / intérieure

- On définit l'**énergie potentielle extérieure** d'un système comme la somme de toutes les énergies potentielles associées aux forces extérieures conservatives appliquées au système.

  Exemple : énergie potentielle de pesanteur d'un système

  On considère un système $\mathcal{S} = \{M_i \ , \ i = 1..N\}$ soumis au champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$. On cherche à déterminer l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur de ce système. Cette énergie sera égale à la somme des énergies potentielles de pesanteur de chaque point M_i du système :

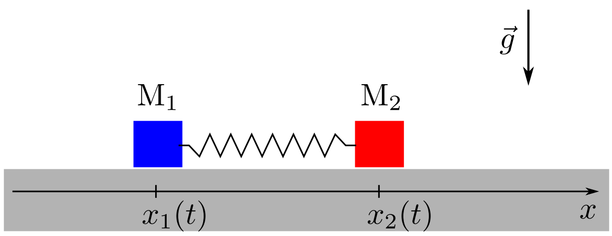
  $$E_{p,pes}(\mathcal{S}) = \sum_i m_i\, g\, z_i = g\left(\sum_i m_i z_i\right)$$

  or d'après la définition du centre de masse : $\vec{r}_c = \dfrac{1}{M}\sum_i m_i\,\vec{r}_i$ $\qquad$ (M : masse totale de $\mathcal{S}$)

  on en déduit : $M z_c = \sum_i m_i z_i$

  $$\Rightarrow \quad \boxed{E_{p,pes}(\mathcal{S}) = M\, g\, z_c}$$

- Pour définir l'énergie potentielle intérieure, considérons à titre d'exemple 2 points matériels M_1 et M_2 pouvant se déplacer le long d'un axe (Ox) et reliés par un ressort de raideur k et longueur à vide ℓ_0. Calculons le travail total effectué par le ressort (c'est à dire par la force d'interaction s'exerçant entre les 2 points matériels) au cours d'une évolution infinitésimale du système $\{M_1, M_2\}$:



  - au cours de cette évolution M_1 se déplace de dx_1 et M_2 se déplace de dx_2
  - forces exercées par le ressort sur M_1 et M_2 : $\vec{F}_1 = k(\ell - \ell_0)\,\vec{u}_x \qquad \vec{F}_2 = -k(\ell - \ell_0)\,\vec{u}_x$
  - travail exercé sur M_1 et M_2 : $\delta W_1 = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 = k(\ell - \ell_0)\,dx_1 \qquad \delta W_2 = \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 = -k(\ell - \ell_0)\,dx_2$
  - travail total : $\delta W = \delta W_1 + \delta W_2 = -\,k(\ell - \ell_0)d(x_2 - x_1) = -\,k(\ell - \ell_0)d\ell$

  On peut donc définir une fonction $\quad E_p(\ell) = \dfrac{k}{2}(\ell - \ell_0)^2 \quad$ telle que $\delta W = -dE_p$.

  On voit sur cet exemple que l'énergie potentielle élastique $\frac{k}{2}(\ell - \ell_0)^2$ n'est pas l'énergie potentielle de M_1 ou de M_2. Cette énergie caractérise l'interaction entre M_1 et M_2, c'est l'énergie potentielle intérieure du système $\{M_1, M_2\}$. Par extension, on définit l'**énergie potentielle intérieure** du système comme la somme des énergies potentielles de chaque paire $\{M_i, M_j\}$.

Énergie mécanique d'un système

Définition : énergie mécanique d'un système

L'énergie mécanique d'un système est égale à la somme de son énergie cinétique, son énergie potentielle extérieure et intérieure :

$$E_m = E_c + E_p \qquad \text{avec} \qquad E_p = E_p^{ext} + E_p^{int}$$

Théorème de l'énergie mécanique pour un système

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie mécanique d'un système est égale au travail des forces non conservatives extérieures et intérieures :

$$\Delta E_m = W^{ext,nc} + W^{int,nc}$$

4.4.3 Application : mise en mouvement d'un véhicule à moteur

Roulement sans glissement

On considère un disque de centre C et rayon R qui roule sur un support solide horizontal fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$. On dit que le roulement s'effectue sans glissement si à tout instant la vitesse dans $\mathcal{R}$ du point du disque qui se trouve en contact avec le support est nulle.

Considérons le référentiel $\mathcal{R}'$, de centre C et dont les axes sont parallèles à ceux de $\mathcal{R}$. Considérons également un point A à la périphérie du disque. Le mouvement de A dans le référentiel $\mathcal{R}'$ est circulaire donc sa vitesse s'écrit : $\vec{v}_{A/\mathcal{R}'}(t) = R\dot{\varphi}(t)\,\vec{u}_\varphi(t)$. A l'instant t où A arrive en contact avec le support cette vitesse peut s'écrire : $\vec{v}_{A/\mathcal{R}'}(t) = -\,R\dot{\varphi}(t)\,\vec{u}_x$.

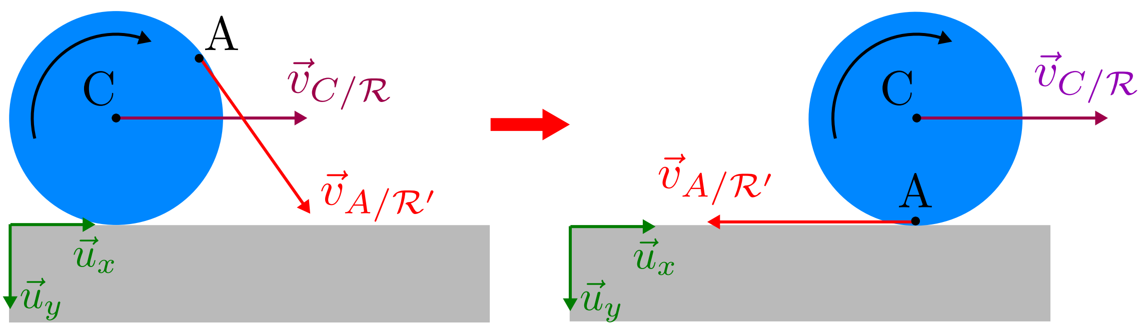


FIGURE 4.9 – Roulement sans glissement

En utilisant la loi de composition des vitesse on peut écrire : $\vec{v}_{A/\mathcal{R}} = \vec{v}_{C/\mathcal{R}} + \vec{v}_{A/\mathcal{R}'}$ avec $\vec{v}_{C/\mathcal{R}} = v_c\,\vec{u}_x$. Donc à l'instant où A entre en contact avec le support on a la relation :

$$\vec{v}_{A/\mathcal{R}} = \left[v_c - R\dot{\varphi}\right]\vec{u}_x$$

Si le roulement est sans glissement on a par définition $\vec{v}_{A/\mathcal{R}} = \vec{0}$ et donc : $\boxed{v_c = R\,\dot{\varphi}}$

En multipliant cette relation par dt on obtient : $dx_c = R\,d\varphi$. On en déduit immédiatement que lorsque le disque effectue un tour complet ($\Delta\varphi = 2\pi$), le centre du disque parcourt une distance égale à $2\pi R$.

Accélération d'une voiture

Considérons une voiture, initialement immobile, qui démarre et accélère en ligne droite. On choisit comme système étudié la voiture et on néglige le frottement de l'air. On supposera que toutes les roues sont motrices, comme c'est le cas pour un 4×4[6]. Les forces extérieures exercées sur le système sont :

- le poids $\vec{P}$ vertical, appliqué au centre de masse
- la réaction normale du sol $\vec{N}$ verticale, appliquée au point de contact entre les roues et le sol
- la force de frottement solide exercée par le sol sur les roues $\vec{T}$ horizontale, appliquée au point de contact entre les roues et le sol

Si on applique le principe fondamental de la dynamique à ce système on conclut que la force qui met la voiture en mouvement est la force de frottement exercée par le sol sur les roues de la voiture puisqu'il n'y a pas d'autre force extérieure horizontale. Cette analyse est correcte du point de vue des forces. Cependant si on calcule la puissance fournie par cette force de frottement à la voiture on obtient que cette puissance est nulle. En effet la puissance est égale au produit scalaire du vecteur force et du vecteur vitesse du point d'application. Si l'on suppose que la voiture roule sans glisser, ce qui est généralement le cas, alors la vitesse du point de contact roue-sol est nulle et la puissance transmise par la force de frottement est donc nulle également.

Pour comprendre d'où vient l'énergie qui permet à la voiture d'augmenter sa vitesse il faut appliquer le théorème de l'énergie cinétique en considérant la voiture comme un système :

$$\Delta E_c = W^{ext} + W^{int}$$

Dans notre exemple, le travail des forces extérieures est nul : $\vec{P}$ et $\vec{N}$ sont $\perp$ au déplacement et la vitesse du point d'application de la force de frottement du sol est nulle. En revanche il y a au niveau du moteur de la voiture des forces intérieures qui travaillent et qui vont permettre d'augmenter la vitesse de la voiture.

6. Cela nous permet de ne pas avoir à faire de distinction entre les roues avant et les roues arrières.