



Institut Mines-Télécom

Fondamentaux de traitement du signal

Roland Badeau

roland.badeau@telecom-paris.fr



Contexte académique } **sans modifications**
Voir Page 95

Master Sciences et Technologies - Parcours ATIAM - UE FpA



Contents

List of figures	4
Acronyms	5
Mathematical notation	6
1 Sampling and spectral observation	8
1 Fourier transforms and convolution	8
2 Sampling theorem	8
2.1 Case of low-pass signals	9
2.2 Case of infinite band low-pass signals	11
2.3 Practical reconstruction	12
3 Spectral observation	13
3.1 Resolution and windowing	13
3.2 Precision	15
2 Discrete filtering	17
1 Introduction	17
1.1 Causality and stability	17
1.1.1 Causality	17
1.1.2 Stability	18
1.2 Ideal filters	18
1.2.1 Ideal low-pass filter	18
1.2.2 Ideal band-pass filter	19
1.3 Transient and steady states of a causal filter	19
2 Z-transform	19
2.1 Definition	20
2.2 Basic properties	20
2.3 Examples of Z-transforms	21
2.3.1 Causal AR1 filter	21
2.3.2 Anti-causal AR1 filter	21
2.3.3 Implementations of the AR1 filter	21
3 Recursive filters	22
3.1 Definition	22
3.2 Examples of recursive filters	23
3.2.1 Autoregressive filters	23
3.2.2 Finite impulse response filters	23
3.2.3 Exercise: computation of the impulse response from the Z-transform	24
3.3 Geometric interpretation of the frequency response	24
4 Synthesis of FIR filters: window method	25



3	Random processes	28
1	The random model	28
2	General properties	29
2.1	Temporal law	29
2.2	Stationarity	31
2.3	Second order properties	32
3	Wide Sense Stationary (WSS) processes	33
4	Linear processes	35
4.1	Moving average processes	36
4.2	Autoregressive processes	37
4.3	Linear prediction method for AR estimation	38
5	Statistical inference	39
5.1	Parametric estimation	39
5.2	Estimation of the mean and of the autocovariance function	39
5.2.1	Estimation of the mean	39
5.2.2	Estimation of the autocovariance function	40
5.3	Estimation of the power spectral density	41
5.3.1	Periodogram	41
5.3.2	Blackman-Tukey method	44
	Bibliography	45
	Licence de droits d'usage	45
A	Représentations de Fourier des suites	46
1	Suites périodiques et TFD	46
1.1	Propriétés algébriques	47
1.2	L'algorithme <i>Fast Fourier Transform</i> (FFT)	48
2	Suites non périodiques et TFTD	48
2.1	Propriétés algébriques	49
2.2	Propriétés analytiques	49
2.2.1	Suites sommables	49
2.2.2	Séries de Fourier	50
2.2.3	Suites à décroissance rapide	52
2.2.4	Suites d'énergie finie	52
3	Convolution discrète	53
B	Représentations de Fourier des fonctions	55
1	Transformée de Fourier des fonctions non périodiques	55
1.1	Propriétés algébriques	56
1.2	Propriétés analytiques	57
1.2.1	Fonctions sommables	57
1.2.2	Inversion de la TFTC dans $L^1(\mathbb{R})$	59
1.2.3	Espace de Schwartz	61
1.2.4	Fonctions d'énergie finie	63
2	Convolution continue	65
	Exercices	66
	Quizz de vérification des prérequis pour le traitement du signal	66
	Exercices sur les transformées de Fourier et l'échantillonnage	67
	Exercices sur le filtrage	68
	Exercices sur les processus aléatoires	69

Corrigés des exercices	70
Corrigé du quizz de vérification des prérequis pour le traitement du signal	70
Corrigé des exercices sur les transformées de Fourier et l'échantillonnage	73
Corrigé des exercices sur le filtrage	74
Corrigé des exercices sur les processus aléatoires	76
Travaux pratiques	77
TP Filtrage, transformée de Fourier et échantillonnage	77
TP Processus et synthèse vocale	87
Sujets d'annales	93
Examen écrit 2023-2024	93

List of Tables

1.1 The four Fourier transforms and their inverses	8
2.1 Autoregressive filter of order 1	22



List of Figures

1.1	Processing architecture	9
1.2	Periodization of the spectrum by sampling	10
1.3	Pre-filtering of the signal before sampling	11
1.4	Reconstruction by zero-order hold	12
1.5	Output spectrum of the zero-order hold	13
1.6	DTFT of a complex sine with $\nu_0 = 7/32$ and $P = 32$ (rectangular window)	14
1.7	DTFT of a sum of two complex sines with $P = 32$ and $N = 128$ (rectangular window)	14
1.8	Common window shapes	16
2.1	Ideal low-pass filter	19
2.2	Z-transform	20
2.3	Geometric interpretation of the FR	25
2.4	Impulse and frequency responses of the ideal low-pass filter	25
2.5	Impulse and frequency responses of the FIR filter synthesized by the window method	26
2.6	Synthesis of an FIR filter by the window method: appearance of a transition band and of ripple in the passband and stopband	26
3.1	Visualization of a speech signal with a duration of 1/16th of a second	28
3.2	Isolated vowel /i/	29
3.3	Zoom in on vowel/i/	29
3.4	Trajectory of a white Gaussian noise of variance 1	35
3.5	PSD (in dB) of an MA(1) process with $\sigma = 1$ and $b_1 = -0.9$	36
3.6	Trajectories of a Gaussian AR(1) process, of length 500. Top: $a_1 = -0.7$. Center: $a_1 = 0.5$. Bottom: $a_1 = 0.9$	37
3.7	PSD of a Gaussian AR(1) process, with $\sigma = 1$ and $a_1 = 0.7$	38
3.8	Fejer kernel, $W_B(\nu)/W_B(0)$, for $N = 25$	42
3.9	Periodogram of a WSS process for $N = 128, 256, 512, 1024$	43



Acronyms

ACF *Auto-Covariance Function*

AR *Autoregressive*

BIBO *Bounded Input \Rightarrow Bounded Output*

dB *Decibels*

CDF *Cumulative Distribution Function*

CTFT *Continuous Time Fourier Transform*

DFT *Discrete Fourier Transform*

DTFT *Discrete Time Fourier Transform*

FFT *Fast Fourier Transform*

FIR *Finite Impulse Response*

FR *Frequency Response*

I/O *Input/Output*

IIR *Infinite Impulse Response*

IR *Impulse Response*

MA *Moving Average*

PDF *Probability Density Function*

PSD *Power Spectral Density*

WN *White Noise*

WSS *Wide Sense Stationary*

ZT *Z-Transform*



Mathematical notation

\triangleq equal by definition to

\mathbb{N}, \mathbb{Z} sets of natural numbers and integers

\mathbb{R}, \mathbb{C} sets of real and complex numbers

$Re(.), Im(.)$ real and imaginary parts of a complex number

$\arg(.)$ argument (phase) of a complex number

x (normal font, lower case) scalar

\mathbf{x} (bold font, lower case) vector

\mathbf{A} (bold font, upper case) matrix

$\text{diag}(\mathbf{x})$ diagonal matrix whose diagonal entries are those of vector \mathbf{x}

$\det(.)$ determinant of a square matrix

$\|\cdot\|_1$ l_1 -norm

$\|\cdot\|_\infty$ supremum

$l^1(\mathbb{Z})$ set of sequences whose l_1 -norm is finite

$l^\infty(\mathbb{Z})$ set of sequences whose l_∞ -norm is finite

\cdot^\top transpose of a vector/matrix

$\overline{(\cdot)}$ conjugate of a number/vector/matrix

\cdot^H conjugate transpose of a vector/matrix

$H(e^{2i\pi v}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) e^{-2i\pi v n}$ discrete time Fourier transform

$H(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) z^{-n}$ Z-transform

$\mathbf{1}_I(x)$ indicator function of set I ($\mathbf{1}_I(x) = 1$ if $x \in I$, or $\mathbf{1}_I(x) = 0$ otherwise)

$*$ convolution product between two sequences of numbers

$\widetilde{\cdot}$ conjugation and time reversal of time series ($\widetilde{h_t} = \overline{h_{-t}}$)

$\mathbb{P}[\cdot]$ probability

$\mathbb{E}[\cdot]$ mathematical expectation

$\text{var}[\cdot]$ variance

$\widehat{(\cdot)}$ estimator of a parameter

$\text{WN}(0, \sigma^2)$ centered white noise of variance σ^2



Foreword

The information extracted from the observation of a physical phenomenon is presented in the form of one or more physical quantities that evolve over time and/or space. In the problems encountered in practice we are often led to focus on one or the other of these two aspects. We speak of signals when we deal with a temporal evolution, and of images for a spatial "evolution". In this course, we are mainly interested in the properties of signals, being well understood that some results can be extended to images. The different processings that we apply to signals require the use of mathematical tools. These tools are the basis of signal processing theory. This course focuses on the study and especially the implementation of some of them. In signal processing theory, we model the observed physical quantity with a mathematical object depending on a real variable t representing time. In the following, the word *signal* will be used to refer either to the observed physical quantity or to the mathematical object used to model it. We usually consider the following cases:

Deterministic/random : the first distinction concerns our ability to predict the temporal evolution of the observed quantity. If we consider for example a sinusoidal oscillator of amplitude A and frequency ν_0 , we can then predict the value of the amplitude at any time with the expression $x(t) = A \cos(2\pi\nu_0 t)$. If A and ν_0 vary very slowly over time, then we can take an average value and use it in the model. Such a signal model is called deterministic. However, there are situations where it is not conceivable to represent the temporal evolution of the signal in this way. This is the case, for example, of the voltage generated at the output of a microphone or of the electric current produced by the thermal agitation of particles in a conductor (background noise). We cannot predict with certainty the value $x(t)$ at time t , but we can assume that this quantity is distributed according to a certain probability law. We then say that the signal is random.

Continuous time/discrete time : if, as is the case of the signal $x(t) = A \cos(2\pi\nu_0 t)$, time t takes its values in \mathbb{R} , we say that $x(t)$ is a continuous-time signal. However, in signal processing, we also encounter quantities which evolve only at discrete times t_n where $n \in \mathbb{Z}$. This is called a discrete-time signal or a digital signal. In mathematical terms, a continuous-time signal is a function of time, while a discrete-time signal is a sequence. The development and growth of digital techniques have made the solutions brought for processing discrete-time signals take an essential place today, compared to continuous-time signals. Consequently, this course focuses on discrete-time problems, on the transition from continuous to discrete-time (sampling theorem) and on digital signal processing.



Chapter 1

Sampling and spectral observation

1 Fourier transforms and convolution

A reminder of the course on Fourier transforms and convolution is presented in Appendices A page 46 and B page 55. This reminder is organized in the following way: we distinguish between the digital world, where objects are sequences indexed by discrete time, and the analog world, where objects are functions of continuous time.

In each of these two worlds, we present some classes (or spaces) of particular mathematical objects, and we give an equivalent description (or *representation*) in terms of frequency, thanks to the various Fourier transforms (or Fourier series, or Fourier integrals). These representations form an isometric basis change.

Then, we are interested in the *action* of elementary systems, the linear filters, on these particular objects: it turns out that Fourier transforms allow us to represent this action in a much simpler and more efficient way, in the sense that the diagonalization of a matrix makes it operate in a more straightforward way on a vector.

The definitions of the four Fourier transforms and their inverses are summarized in Table 1.1.

	Discrete time ⇔ Periodic frequency	Continuous time ⇔ Non-periodic frequency
Periodic time ⇔ Discrete frequency	DFT $\begin{cases} X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-i2\pi n \frac{k}{N}} \\ x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{+i2\pi n \frac{k}{N}} \end{cases}$	Fourier series $\begin{cases} X(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} x(t)e^{-i2\pi kt} dt \\ x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k)e^{+i2\pi kt} \end{cases}$
Non-periodic time ⇔ Continuous frequency	DTFT $\begin{cases} X(e^{i2\pi\nu}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-i2\pi\nu n} \\ x(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} X(e^{i2\pi\nu})e^{+i2\pi\nu n} d\nu \end{cases}$	CTFT $\begin{cases} X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-i2\pi ft} dt \\ x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f)e^{+i2\pi ft} df \end{cases}$

Table 1.1: The four Fourier transforms and their inverses

2 Sampling theorem

Sampling is an operation which consists in extracting from a continuous time signal a sequence of values, taken at a sequence of times $t_n, n \in \mathbb{Z}$. In this course, we will only consider the so-called *regular sampling* where $t_n = nT$ and T is the *sampling period*. The interest in sampling problems lies in the development of numerical signal processing techniques.

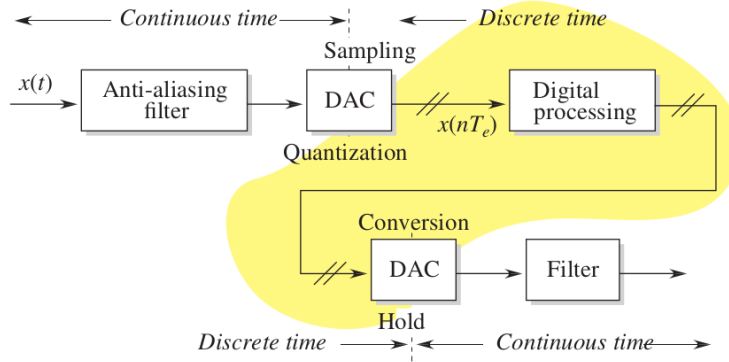


Figure 1.1: Processing architecture

The fundamental question asked in the following section is to know whether it is possible to reconstruct an analog signal $x(t)$ from the samples $x(nT)$, which is also a way of saying that we have not lost any information about the signal. At first sight there is an infinity of functions which pass through the values $x(nT)$ at times nT (to convince oneself of this, we can take a sinusoid $x(2f_0t)$, sample it at the frequency F_s , and check that all the sinusoids $\sin(2\pi(f_0 + kF_s)t)$ pass through the sampling points). However the sampling theorem shows that, for band-limited signals, the reconstruction is unique.

2.1 Case of low-pass signals

Theorem 1 (Poisson's formula). *Let $x(t)$ be an absolutely integrable signal ($x(t) \in L^1(\mathbb{R})$), whose Fourier transform $X(f)$ is itself absolutely integrable. Then for any $T > 0$:*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T}\right) = T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT) e^{-2i\pi k f T}. \quad (1.1)$$

We voluntarily use letter f for the frequency "in Herz", in order to avoid any confusion with the reduced frequency that will be denoted by the Greek letter ν .

Proof. The first member of (1.1) is a function of f of period $\frac{1}{T}$. It is thus expandable in Fourier series of the form $\sum_{k \in \mathbb{Z}} X_k e^{-2i\pi k f T}$, where X_k is given by:

$$X_k = T \int_{-1/2T}^{1/2T} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T}\right) \right) e^{-2i\pi k f T} df = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-1/2T}^{1/2T} X\left(f - \frac{n}{T}\right) e^{-2i\pi k f T} df.$$

By applying the change of variable $u = f - \frac{n}{T}$, we get:

$$\begin{aligned} X_k &= T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-1/2T - n/T}^{1/2T - n/T} X(u) e^{-2i\pi k u T} df \\ &= T \int_{-\infty}^{+\infty} X(u) e^{-2i\pi k u T} df = T x(-kT) \end{aligned}$$

and therefore $\sum_{n \in \mathbb{Z}} X\left(f - \frac{n}{T}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_k e^{2i\pi k f T}$, which gives the announced result. \square

Theorem 2 (Sampling theorem). *Let $x(t)$ be an absolutely integrable real signal ($x(t) \in L^1(\mathbb{R})$), with limited band B ($X(f) = 0 \forall |f| > B$) and let $F_s = \frac{1}{T}$ be a sampling frequency. We assume that $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |x(nT)| < +\infty$.*

If $F_s \geq 2B$, then $x(t)$ can be uniquely reconstructed from the sequence of samples $x(nT)$, according to the so-called interpolation formula:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) h(t - nT) \text{ where } h(t) = \frac{\sin(2\pi Bt)}{\pi F_s t}.$$

If $F_s < 2B$, the reconstruction is impossible. So the maximal possible frequency $B = \frac{F_s}{2}$ is called the Nyquist frequency.

This means that, for a signal that has energy at high frequencies and therefore rapid variations, a high sampling frequency must be selected. In practice, this result is applied intuitively when measuring a curve point by point: in the parts with rapid variations (high frequencies), the sampling frequency is increased by taking a greater number of points.

Proof. The problem of sampling, as it is posed here, consists in showing that, for a certain class of signals $x(t)$, it is possible to make $\tilde{x}(t)$ coincide with:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) h(t - nT) \quad (1.2)$$

for a certain function $h(t)$ to be determined.

The interpolation formula (1.2) is an equation analogous to the filtering equation encountered in the case of linear filtering, except that here the input is a discrete-time sequence, i.e. $x(nT)$, and the output is a continuous-time signal, i.e. $\tilde{x}(t)$.

In order to compare $\tilde{x}(t)$ and $x(t)$, we will move to the frequency domain. For that let us denote $H(f)$ the Fourier transform of $h(t)$. Then the Fourier transform of $h(t - nT)$ is $H(f)e^{-2\pi n f T}$. We deduce that the Fourier transform of $\tilde{x}(t)$ is:

$$\tilde{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) H(f) e^{-2\pi n f T}.$$

Moving $H(f)$ out of the sum and using the Poisson formula (1.1), we get:

$$\tilde{X}(f) = \frac{1}{T} H(f) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T}\right).$$

This expression means that the time sampling operation has the effect, in frequency, of periodizing the signal spectrum with a period equal to the sampling frequency $F_s = \frac{1}{T}$ (see Figure 1.2). Note that the result is true even when $X(f)$ is not band-limited. However, when $X(f)$ is band-limited, it is possible to choose $H(f)$ so that this expression coincides with $X(f)$.

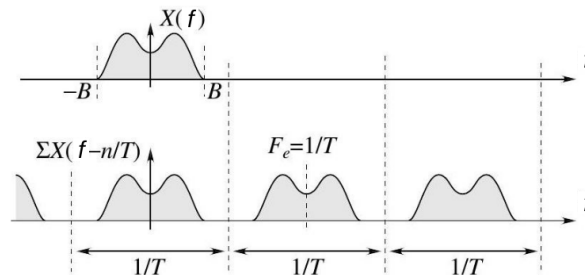


Figure 1.2: Periodization of the spectrum by sampling

Suppose that $X(f) = 0$ for $|f| > B$. Two cases are possible:

1. $F_s = \frac{1}{T} < 2B$: there is an overlap of the different curves obtained by periodization of $X(f)$. This is called *spectral aliasing*. The origin of this term can be explained as follows: the part of $X\left(f - \frac{n}{T}\right)$ which is added to $X(f)$ in the interval $\left(-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right)$ is the same as the part of $X(f)$ which lies beyond $\frac{n}{T}$. Everything happens as if we stacked in the interval $\left(-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right)$, after aliasing, the two extremities of $X(f)$. The consequence of spectral aliasing is the impossibility to reconstruct $X(f)$ from $\tilde{X}(f)$ and, in the same way, $x(t)$ from the samples $x(nT)$.
2. $F_s = \frac{1}{T} \geq 2B$ (see Figure 1.2): choosing $H(f) = T\mathbf{1}_{(-B,B)}(f)$, we get $X(f) = \tilde{X}(f)$ and thus $x(t) = \tilde{x}(t)$. The inverse Fourier transform of $H(f) = T\mathbf{1}_{(-B,B)}(f)$ is $h(t) = \frac{T \sin(2\pi Bt)}{\pi t}$. By substitution in (1.2), we obtain the interpolation formula:

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT) \frac{\sin(2\pi B(t - nT))}{\pi F_s(t - nT)}.$$

□

The interpolation formula shows that the real signal $x(t)$ is reconstructed in a unique way from the sequence of its samples $x(nT)$. But this operation is not causal since the reconstruction of $x(t)$ at time t requires to know the sequence $x(nT)$ beyond t . However, since the function $h(t)$ converges to zero when t tends to $-\infty$, it is possible to make a good causal approximation by introducing a finite delay. This is equivalent to saying that $x(t)$ is computed, in an approximate way, with a few samples beyond t .

2.2 Case of infinite band low-pass signals

In practice, when the sampling frequency is imposed, the spectral aliasing phenomenon cannot be avoided. There is therefore a loss of information about the signal to be sampled. The problem is to limit this loss as much as possible. For this, we choose to filter the signal before the actual sampling operation, according to the diagram shown in Figure 1.3.

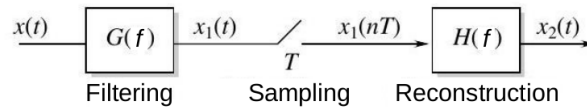


Figure 1.3: Pre-filtering of the signal before sampling

A priori the reconstructed signal $x_2(t)$ must contain all the frequencies compatible with the non-aliasing condition at the sampling frequency $F_s = \frac{1}{T}$: it is thus necessary to suppose that the band-width is $B = \frac{F_s}{2}$. In this case the complex gain of the filter is $H(f) = T\mathbf{1}_{(-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2})}(f)$.

In order to best determine filter $G(f)$, we will minimize the mean squared error:

$$\varepsilon^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) - x_2(t)|^2 dt$$

between the original signal $x(t)$ and the signal $x_2(t)$ obtained from the samples $x_1(nT)$. With obvious notations, using Parseval's formula, we also have:

$$\varepsilon^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f) - X_2(f)|^2 df.$$

Let us determine the expression of $X_2(f)$. Using Poisson's formula (1.1):

$$X_2(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_1(nT) H(f) e^{-2\pi i n f T} = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_1\left(f - \frac{n}{T}\right) H(f).$$

Since $H(f) = T\mathbf{1}_{(-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2})}(f)$ and $X_1(f) = X(f)G(f)$, we deduce that:

$$X_2(f) = \mathbf{1}_{(-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2})}(f) \sum_{n \in \mathbb{Z}} X\left(f - \frac{n}{T}\right) G\left(f - \frac{n}{T}\right) \quad (1.3)$$

and therefore that:

$$\varepsilon^2 = \int_{|f| < F_s/2} |X(f) - X_2(f)|^2 df + \int_{|f| > F_s/2} |X(f)|^2 df. \quad (1.4)$$

Since all terms are positive and the second term in the right-hand side of (1.4) does not depend on the choice of $G(f)$, the minimum is obtained by taking $G(f) = \mathbf{1}_{(-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2})}(f)$: indeed, in this case and according to (1.3), $X_2(f) = X(f)\mathbf{1}_{(-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2})}(f)$, which completely cancels the first term of (1.4).

This result is important, since it indicates that the sampling operation must be preceded by an ideal low-pass filter in the band $(-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2})$, called *anti-aliasing filter*. Obviously there is a loss of information and what can be reconstructed, at best, is the signal $x_1(t)$. Whatever is out of the band $(-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2})$ is lost.

Example 1 (PCM signal in digital telephony). *The telephony signal is sampled at a frequency of 8000 samples/s (Hz). In order to avoid aliasing, the signal is filtered in the (0 – 3400)Hz band, slightly narrower than the required minimum of 4000 Hz. Each sample is then coded on 8 bits. We thus obtain a rate of 64kbits/s. This sequence is called PCM (which stands for pulse-code modulation).*

2.3 Practical reconstruction

The conversion of the analog signal from the digital sequence requires a good causal approximation of an ideal low-pass filter. In practice, the simplest way to do this is to use a zero-order hold (*digital-to-analog converter* or DAC) which holds the digital value applied to the input for the entire time T between two samples. The signal obtained at the output of the zero-order hold has therefore the expression:

$$x_0(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT) h_0(t - nT) \text{ where } h_0(t) = \mathbf{1}_{(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})}\left(t - \frac{T}{2}\right).$$

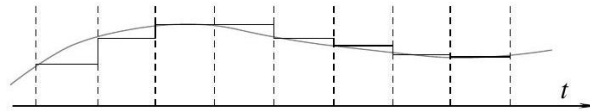


Figure 1.4: Reconstruction by zero-order hold

The signal $x_0(t)$ is a staircase signal whose steps have the amplitude $x((n+1)T) - x(nT)$. By taking the Fourier transform of $x_0(t)$ and using Poisson's formula (1.1), we obtain:

$$X_0(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} H_0(f) X\left(f - \frac{n}{T}\right) \text{ where } H_0(f) = \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} e^{-i\pi f T}.$$

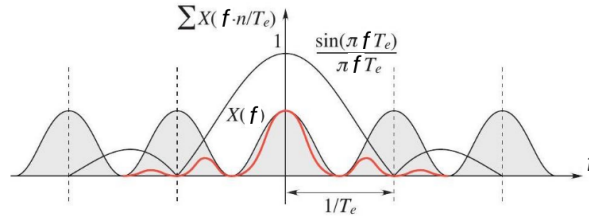


Figure 1.5: Output spectrum of the zero-order hold

By observing $|X_0(f)|$ represented in Figure 1.5, we can see two forms of distortions between the input signal $x(t)$ and the signal $x_0(t)$ at the output of the zero-order hold:

1. a distortion in the main band $\left(-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right)$ of the signal. A solution is to perform a compensation by the filter gain $\frac{\pi f T}{\sin(\pi f T)}$ before sampling;
2. a distortion outside the main band $\left(-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right)$. This distortion can be annoying: thus, in acoustics, if it is in the audible band, it is necessary to use a low-pass filter to remove these "high frequency" components.

The previous calculation shows that the width of the lobes of the sinc function is $\frac{1}{T}$, where T is the duration of the hold's reconstruction function, but also the sampling period of the signal. Hence the idea of introducing an interpolation operation of order n before the hold. We will see that this operation is possible because the signal satisfies the conditions of the sampling theorem. In this case the energy outside the main band is essentially located around frequency $\frac{n}{T}$. Thus in audio, by choosing a sufficiently large interpolation factor, the frequency band around $\frac{n}{T}T$ can even be out of the audible band, and listening does not require any additional filter at the output of the hold. This is what is done on the audio cards of the computers we use every day, when the sampling frequencies justify this processing.

3 Spectral observation

In this section, we will address the problem of computing and displaying the spectrum of a finite-length signal.

3.1 Resolution and windowing

Consider the digital signal of finite duration P , defined by:

$$x(n) = A \exp(2i\pi\nu_0 n) \text{ for } n \in \{0, \dots, P-1\}$$

where $\nu_0 \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. The expression of the *Discrete Time Fourier Transform* (DTFT) $X(e^{2i\pi\nu})$ of this signal is:

$$X(e^{2i\pi\nu}) = A \frac{\sin(\pi P(\nu - \nu_0))}{\sin(\pi(\nu - \nu_0))} e^{-i\pi(\nu - \nu_0)(P-1)}.$$

The shape of $|X(e^{2i\pi\nu})|$ shows a main lobe of width $\frac{2}{P}$ around frequency ν_0 , and secondary lobes of width $\frac{1}{P}$ (see Figure 1.6).

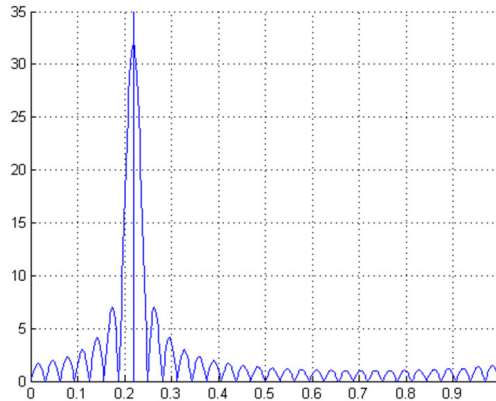


Figure 1.6: DTFT of a complex sine with $\nu_0 = 7/32$ and $P = 32$ (rectangular window)

Resolution Next, consider the sum of two complex exponentials:

$$x(n) = A \exp(2i\pi\nu_0 n) + A \exp(2i\pi\nu_1 n) \text{ for } n \in \{0, \dots, P-1\}$$

where ν_0 and $\nu_1 \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

The superposition of the two spectra in Figure 1.7 shows that if the difference $|\nu_1 - \nu_0|$ is greater than $\frac{1}{P}$ (in order of magnitude), then it is possible to distinguish the two frequencies ν_0 and ν_1 by examining the spectrum. $\frac{1}{P}$ is referred to as the *Fourier limit*.

Frequency resolution, or the ability to distinguish between two neighboring frequencies in the spectrum, is related to the number of points in the signal waveform.

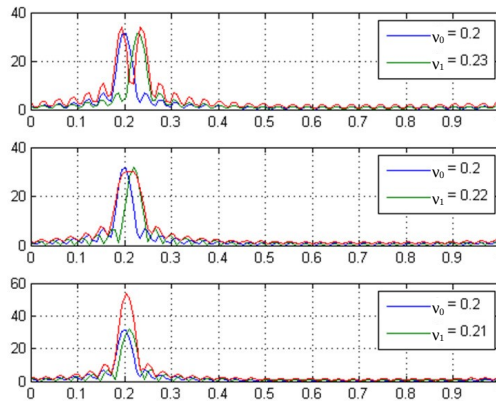


Figure 1.7: DTFT of a sum of two complex sines with $P = 32$ and $N = 128$ (rectangular window)

Windowing We now consider the case of the signal:

$$x(n) = A_0 \exp(2i\pi\nu_0 n) + A_1 \exp(2i\pi\nu_1 n) \text{ for } n \in \{0, \dots, P-1\}, A_0 > A_1$$

A masking of the main lobe of the ν_1 component can occur because of the undulations present in the spectrum of $A_0 \exp(2i\pi\nu_0 n)$. A solution to limit this phenomenon is to apply a weighting to the signal frame. We interpret this

by saying that a rectangular window introduces "brutal" discontinuities at the extremities of the signal frame, while the application of a continuous window "softens" this discontinuity.

So we build a new signal frame $\{x_h(n) = w(n)x(n)\}$.

Selection of the window's shape The selection of the window's shape is based on a trade-off between the level of the sidelobes and the width of the main lobe (see Figure 1.8). Usual windows include:

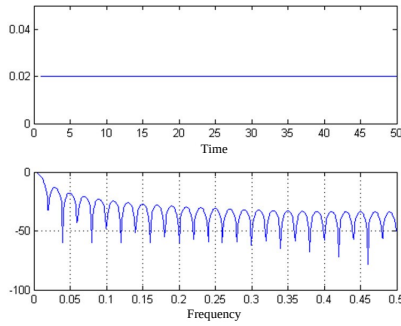
- the rectangular window (see Figure 1.8a) has width $\frac{2}{P}$, second lobe at -13 *Decibels* (dB), and decrease of -6 dB/octave;
- the Bartlett window (see Figure 1.8b) has width $\frac{4}{P}$, second lobe at -26 dB, and decrease of -12 dB/octave;
- the Hann window (see Figure 1.8c) has width $\frac{4}{P}$, second lobe at -31 dB, and decrease of -18 dB/octave;
- the Hamming window (see Figure 1.8d) has width $\frac{4}{P}$, second lobe at -41 dB, and decrease of -6 dB/octave;
- the Blackman window (see Figure 1.8e) has width $\frac{6}{P}$, second lobe at -57 dB, and decrease of -18 dB/octave.

3.2 Precision

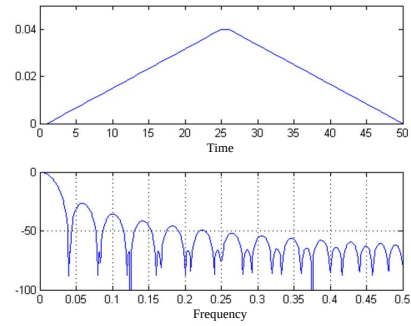
In practice, we compute $X(e^{2i\pi\nu})$ only for $\nu = \frac{k}{N}$ with $k \in \{0, \dots, N-1\}$. Parameter N only adjusts the precision of the "plot" of the spectrum and thus the determination of ν_0 .

Precision, or the ability to measure a frequency value, is related to the number of points in the signal spectrum.

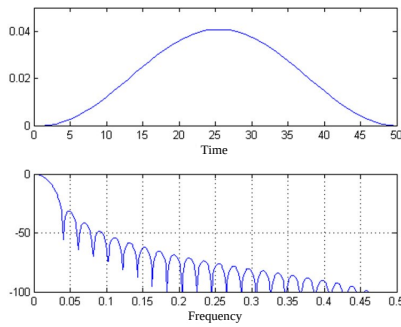




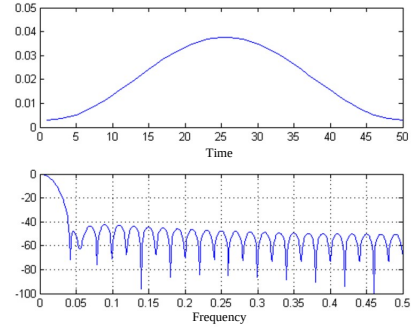
(a) Rectangular window:
 $w(n) = \mathbf{1}_{[0 \dots P-1]}(n)$.



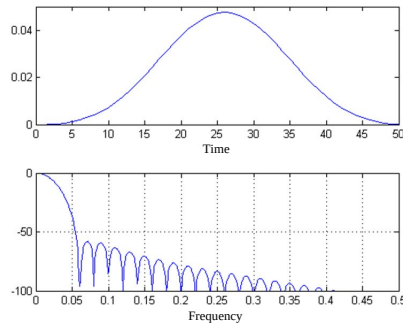
(b) Bartlett window:
 $w(n) = 1 - \left| \frac{2n}{P-1} - 1 \right|$.



(c) Hann window:
 $w(n) = 0.5 - 0.5 \cos(2\pi \frac{n}{P-1})$.



(d) Hamming window:
 $w(n) = 0.54 - 0.46 \cos(2\pi \frac{n}{P-1})$.



(e) Blackman window:
 $w(n) = 0.4266 - 0.4965 \cos(2\pi \frac{n}{P-1}) + 0.076 \cos(4\pi \frac{n}{P-1})$.

Figure 1.8: Common window shapes

Chapter 2

Discrete filtering

1 Introduction

In this chapter, a *signal* is a sequence of real or complex numbers $x(n)$, defined for all times $n \in \mathbb{Z}$. A *filter* is a transform which turns a signal into another signal, and which is both linear and invariant to translations over time: if $x(n)$ and $y(n)$ respectively denote the *input* and *output* signals of the filter, then for any $m \in \mathbb{Z}$, the same filter transforms $x(n - m)$ into $y(n - m)$.

It can be proved that all filters are characterized by their *Impulse Response* (IR) $h(n)$, which is defined as the transform of the impulse signal $\delta_0(n)$ (centered at time $n = 0$, i.e. $\delta_0(n) = 1$ if $n = 0$, and $\delta_0(n) = 0$ otherwise). Then the general relationship between the input and output signals is a *convolution product*:

$$y(n) = (h * x)(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h(m)x(n - m). \quad (2.1)$$

Note that both h and x have to satisfy some conditions for the convolution product (2.1) to be mathematically well-defined. The most commonly used condition in signal processing is the *Bounded Input \Rightarrow Bounded Output* (BIBO) stability condition that will be introduced in the next section.

When both h and x have well-defined Fourier transforms $H(e^{2i\pi\nu}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n)e^{-2i\pi\nu n}$ and $X(e^{2i\pi\nu})$ (defined in the same way) for all *normalized frequencies* $\nu \in \mathbb{R}$, then the Fourier transform of the output signal y is

$$Y(e^{2i\pi\nu}) = H(e^{2i\pi\nu})X(e^{2i\pi\nu}). \quad (2.2)$$

For this reason, function $H(e^{2i\pi\nu})$ is called the *Frequency Response* (FR) of the filter.

1.1 Causality and stability

Beyond its linearity and its invariance to translations over time, one may expect a filter to additionally fulfill one or both of the two following conditions: *causality* and *stability*.

1.1.1 Causality

The *causality* condition is compulsory when we need a filter to act in real-time. It is defined as follows:

Definition 1 (Causal filter). *A filter of impulse response $h(n)$ is causal if and only if, for any input signal $x(n)$, the output $y(n) = (h * x)(n)$ only depends on $x(k)$, $k \leq n$.*

Causality is characterized by the following necessary and sufficient condition:

Proposition 3 (Characterization of causality). *A filter of impulse response $h(n)$ is causal if and only if $h(m) = 0$ $\forall m < 0$.*



Proof. We note that $y(n) = \sum_{m<0} h(m)x(n-m) + \sum_{m\geq 0} h(m)x(n-m)$. However, if $m < 0$, then $n-m > n$, thus the definition is equivalent to $h(m) = 0 \forall m < 0$. \square

At first, causality was introduced as a property of filters. However, seeing its characterization in Proposition 3, we may like to extend its definition to signals:

Definition 2 (Causal signal). A signal $x(n)$ is causal if and only if $x(n) = 0 \forall n < 0$.

Now we will investigate what happens when a causal signal is filtered by a causal filter:

Proposition 4 (Causal filtering of a causal signal). If both the impulse response h and the input signal x are causal, then the output signal $y = h * x$ is also causal.

Proof. Since h is causal, we have $y(n) = \sum_{m\geq 0} h(m)x(n-m)$. However $\forall n < 0$ and $m \geq 0$, $n-m < 0$, hence $x(n-m) = 0$. Therefore $\forall n < 0$, $y(n) = 0$. \square

1.1.2 Stability

The stability condition is *always* required whenever we want to numerically compute the output of a filter, as we will see below. It is defined as follows:

Definition 3 (Bounded Input \Rightarrow Bounded Output stability). A filter of impulse response $h(n)$ is stable if and only if, for any bounded input signal $x \in l^\infty(\mathbb{Z})$, the output signal $y = h * x$ is also bounded: $y \in l^\infty(\mathbb{Z})$.

Stability is characterized by the following necessary and sufficient condition:

Proposition 5 (Characterization of stability). A filter of impulse response $h(n)$ is stable if and only if $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h(m)| < +\infty$ (i.e. $h \in l^1(\mathbb{Z})$). Consequently, the frequency response of a stable filter is always a continuous function.

Proof. First, let us prove that if $h \in l^1(\mathbb{Z})$, then the filter is stable. Indeed, suppose that $h \in l^1(\mathbb{Z})$ and $x \in l^\infty(\mathbb{Z})$. Then $|y(n)| \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} |h(m)||x(n-m)| \leq \sum_{m \in \mathbb{Z}} |h(m)||x|_\infty = \|h\|_1 \|x\|_\infty$. Therefore $\|y\|_\infty \leq \|h\|_1 \|x\|_\infty < +\infty$.

Reciprocally, let us prove that if the filter is stable, then $h \in l^1(\mathbb{Z})$. Indeed, suppose that the filter is stable. Then let $x(n) = e^{-i \arg h(-n)}$. This input signal is bounded: $x \in l^\infty(\mathbb{Z})$. Since the filter is stable, the output signal $y = h * x$ is also bounded. In particular, $|y(0)| < +\infty$. However, $y(0) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h(m)x(-m) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (|h(m)|e^{i \arg h(m)})e^{-i \arg h(m)} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |h(m)| = \|h\|_1$. Therefore $h \in l^1(\mathbb{Z})$. \square

Note that the stability property is compulsory to make the numerical implementation of any filter possible. Indeed, assume for instance that $x_q = x + e$ is a quantified version of the input signal x , where e denotes the rounding error. Then, by applying filter h to x_q , we get the output $y_q = y + h * e$. If $h \in l^1(\mathbb{Z})$, then $\|h * e\|_\infty \leq \|h\|_1 \|e\|_\infty$, so the resulting rounding error is bounded. However, if $h \notin l^1(\mathbb{Z})$, then $h * e$ may be unbounded: the resulting error can even dominate the desired output y .

1.2 Ideal filters

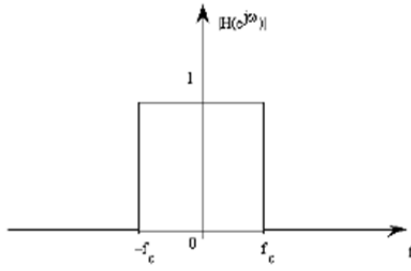
An ideal filter selects a given frequency band called *pass-band* of the input signal, and rejects all other frequencies, which form the *stop-band*.

1.2.1 Ideal low-pass filter

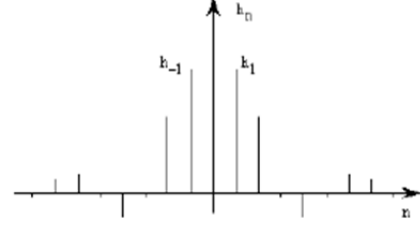
The *pass-band* of the ideal low-pass filter contains all frequencies lower (in absolute value) than a given threshold, called the *cut-off* frequency $\nu_c \in]0, \frac{1}{2}]$. Its frequency response is thus defined as

$$H_{LP}(e^{2i\pi\nu}) = \begin{cases} 1 & \text{if } |\nu| < \nu_c \\ 0 & \text{if } |\nu| > \nu_c \end{cases}$$

for all $\nu \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, and it is represented in Figure 2.1a (note that $H_{LP}(e^{2i\pi\nu})$ is a 1-periodic function):



(a) Frequency response of the ideal low-pass filter



(b) Impulse response of the ideal low-pass filter

Figure 2.1: Ideal low-pass filter

Its impulse response can be calculated by applying the inverse DTFT to H_{LP} :

$$h_{LP}(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} H_{LP}(e^{2i\pi v}) e^{+2i\pi v n} dv = \int_{-v_c}^{v_c} e^{+2i\pi v n} dv = 2v_c \operatorname{sinc}(2\pi v_c n). \quad (2.3)$$

This impulse response is represented in Figure 2.1b. Equation (2.3) shows that the ideal low-pass filter is neither causal ($\exists n < 0$ such that $h_{LP}(n) \neq 0$) nor stable ($h_{LP} \notin l^1(\mathbb{Z})$). Note that calculating the closed-form expression of $h_{LP}(n)$ was actually not necessary to prove it: indeed, since H_{LP} is real and even, then so is h_{LP} (therefore h_{LP} cannot be causal), and since H_{LP} is discontinuous, then $h_{LP} \notin l^1(\mathbb{Z})$ (therefore h_{LP} is not stable).

1.2.2 Ideal band-pass filter

The pass-band of the ideal *band-pass* filter is characterized by its *center frequency* v_0 , and its *bandwidth* $2v_c$. Its frequency response is thus defined as

$$H_{BP}(e^{2i\pi v}) = \begin{cases} 1 & \text{if } |v| - v_0 < v_c \\ 0 & \text{if } |v| - v_0 > v_c \end{cases}$$

for all $v \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, where v_0 and v_c are such that $v_0 - v_c > 0$ and $v_0 + v_c < \frac{1}{2}$.

We note that $H_{BP}(e^{2i\pi v}) = H_{LP}(e^{2i\pi(v-v_0)}) + H_{LP}(e^{2i\pi(v+v_0)})$. Therefore its impulse response is

$$h_{BP}(n) = h_{LP}(n) e^{2i\pi v_0 n} + h_{LP}(n) e^{-2i\pi v_0 n} = 4v_c \operatorname{sinc}(2\pi v_c n) \cos(2\pi v_0 n).$$

Again, the ideal band-pass filter is neither causal nor stable, for the same reasons as the ideal low-pass filter.

1.3 Transient and steady states of a causal filter

The transient and steady states of a filter are defined when a causal filter is applied to a causal input signal. Let us introduce these notions on an example. Consider for instance the causal averaging filter of length N : $h(n) = \frac{1}{N} 1_{[0, N-1]}(n)$. Then suppose that the input signal $x(n)$ is the unit step signal: $x(n) = 1_{[0, +\infty)}(n)$.

Due to Proposition 4, we already know that $y = h * x$ is a causal signal. Besides, we could expect that averaging the unit step signal produces $y(n) = 1$ for $n \geq 0$. This is untrue because of the causality: actually, $y(n) = 1$ only for $n \geq N - 1$. In the interval $n \in [0, N - 2]$, $y(n)$ looks like a ramp, which smoothly transitions from $y(n) = 0$ to $y(n) = 1$. This transition is called the *transient state* of the filter; its duration is $N - 1$ samples. This transient state is followed, for $n \geq N - 1$, by the *steady state* of the filter, where $y(n)$ becomes constant in this particular case.

2 Z-transform

The Z-Transform (ZT) is a very powerful tool for characterizing the properties of discrete filters.

2.1 Definition

Remember the definition of the DTFT of a discrete time signal $x \in l^1(\mathbb{Z})$: $X(e^{2i\pi\nu}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{2i\pi\nu n}$. By introducing the complex number $z = e^{i\pi\nu}$, we get $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$. If we now apply this expression to *any* complex number, we get the Z-transform of x :

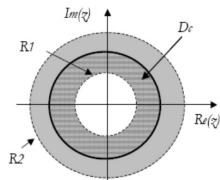
Definition 4. The Z-transform of a discrete time signal x is defined for $z \in \mathbb{C}$ as $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$. Its domain is defined as $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} / \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| |z|^{-n} < +\infty\}$.

We define the Z-transform of an impulse response h in the same way. In this case, $H(z)$ is often referred to as the *transfer function* of the filter. Let us study the domain of convergence of $H(z)$. We have

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) z^{-n} = \sum_{n<0} h(n) z^{-n} + \sum_{n\geq 0} h(n) z^{-n} = \sum_{n>0} h(-n) z^n + \sum_{n\geq 0} h(n) \left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

In the last member of this equality, the first series is the power series of the sequence $h(-n)$ for $n > 0$: its domain is thus a disk in \mathbb{C} , of radius $R_2 > 0$. The second series is the power series of the sequence $h(n)$ for $n \geq 0$: its domain is also a disk in \mathbb{C} . However, this second power series is applied to $\frac{1}{z}$, so its domain as a function of z is actually the complement of a disk, of radius $R_1 > 0$. Finally, the domain \mathcal{D} of $H(z)$ is the intersection of those two domains: \mathcal{D} is thus a ring (see Figure 2.2), in the most general sense:

- if h is a finite impulse response, then $\mathcal{D} = \mathbb{C}$ (possibly without $z = 0$ because of the terms in $\frac{1}{z}$);
- if h is causal ($h(-n) = 0$ for $n > 0$), \mathcal{D} is the complement of the disk of radius R_1 ;
- if h is anti-causal ($h(n) = 0$ for $n \geq 0$), \mathcal{D} is the disk of radius R_2 ;
- if e.g. $h(n) = e^{n^2}$, \mathcal{D} is empty.



$$\begin{aligned} z &= 1 \text{ at } \nu = 0 \\ z &= i \text{ at } \nu = 1/4 \end{aligned}$$

Figure 2.2: Z-transform

Finally, Proposition 5 shows that h is stable if and only if $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < +\infty$, which means that \mathcal{D} contains the unit circle. In this case, the frequency response of the filter is well-defined. We note in Figure 2.2 that $\nu = 0$ corresponds to $z = 1$, $\nu = 1/4$ to $z = i$, and the Nyquist frequency $\nu = \frac{1}{2}$ to $z = -1$.

2.2 Basic properties

The ZT satisfies the following properties (their proof is left to the reader):

- Linearity: for any $a_1 \in \mathbb{C}$ and $a_2 \in \mathbb{C}$, the ZT of the sequence $a_1 h_1 + a_2 h_2$ is $a_1 H_1 + a_2 H_2$ and its domain \mathcal{D} is such that $\mathcal{D} \supset \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$;
- Delay: two signals y and x are such that $y(n) = x(n - k)$ if and only if $Y(z) = z^{-k} X(z)$;
- Inversion of time direction: if $f(n) = h(-n) \forall n \in \mathbb{Z}$, then $F(z) = H(1/z)$ and $\mathcal{D}_F = 1/\mathcal{D}_H$;



- Convolution product: if $y = h * x$, then $Y(z) = H(z)X(z)$ and $\mathcal{D}_y \supset \mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_x$;
- Insertion of zeros: $Y(z) = X(z^L)$ if and only if $y(nL) = x(n) \forall n \in \mathbb{Z}$ and $y(m) = 0$ elsewhere;
- Inverse filter: the inverse filter h_i of a filter h is the filter such that $h * h_i = \delta_0$; it thus satisfies $H(z)H_i(z) = 1$ for $z \in \mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{h_i}$.

2.3 Examples of Z-transforms

Here are a few simple examples of ZT:

- Identity filter: $h(n) = \delta_0(n) \Rightarrow H(z) = 1 \forall z \in \mathbb{C}$;
- Step filter: $h(n) = \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(n) \Rightarrow H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \forall |z| > 1$;
- Rectangular filter: $h(n) = \mathbf{1}_{[0, \dots, N-1]}(n) \Rightarrow H(z) = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \forall z \neq 0$.

The *Autoregressive* (AR) filter of order 1 (also referred as the *AR1 filter*), which will be introduced in the next sections, provides us with another fundamental example of ZT that will lead us to the notion of *recursive filters*.

2.3.1 Causal AR1 filter

Let $h(n) = \begin{cases} a^n & \text{if } n \geq 0 \\ 0 & \text{if } n < 0 \end{cases}$, where $a \in \mathbb{C}$. This impulse response is causal, so we already know that \mathcal{D} is the complement of a disk. Then $H(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n)z^{-n} = \sum_{n \geq 0} a^n z^{-n} = \sum_{n \geq 0} (\frac{a}{z})^n$. This power series converges if and only if $|\frac{a}{z}| < 1$, therefore $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} / |z| > |a|\}$. Note that this filter is stable if and only if \mathcal{D} contains the unit circle, which means $|a| < 1$. Then for all $z \in \mathcal{D}$, $H(z) = \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{1}{1-az^{-1}}$.

2.3.2 Anti-causal AR1 filter

Let $h(n) = \begin{cases} -a^n & \text{if } n < 0 \\ 0 & \text{if } n \geq 0 \end{cases}$, where $a \in \mathbb{C}$. This impulse response is anti-causal, so we already know that \mathcal{D} is a disk. Then $H(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n)z^{-n} = \sum_{n < 0} -a^n z^{-n} = - \sum_{n > 0} a^{-n} z^n = -\frac{z}{a} \sum_{n \geq 0} (\frac{z}{a})^n$. This power series converges if and only if $|\frac{z}{a}| < 1$, therefore $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} / |z| < |a|\}$. Note that this filter is stable if and only if \mathcal{D} contains the unit circle, which means $|a| > 1$. Then for all $z \in \mathcal{D}$, $H(z) = -\frac{z}{a} \frac{1}{1-\frac{z}{a}} = \frac{1}{1-az^{-1}}$: the transfer function is the same as that of the causal AR1 filter. So the difference with the AR1 filter entirely lies in the domain of convergence.

2.3.3 Implementations of the AR1 filter

Since the causal and the anti-causal AR1 filters have the same transfer function, they will now be referred to as the two *implementations* of the same filter, that we will simply call the *AR1 filter*.

Indeed, in both cases we have $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-az^{-1}}$. Therefore $(1-az^{-1})Y(z) = X(z)$, which in the time domain can be rewritten $y(n) - ay(n-1) = x(n)$. This equation is called the *Input/Output* (I/O) relationship of the filter. It can be used to implement the filter in two different ways (note that in practice the filter cannot be implemented by means of a convolution product, because of its *Infinite Impulse Response* (IIR)):

- forward recursion: for increasing times n , $y(n) = ay(n-1) + x(n)$. This is the causal implementation introduced in Section 2.3.1. Indeed, this implementation is numerically stable if and only if $|a| < 1$, since any error in the computation $y(n-1)$ is reduced by a factor $|a|$ in $y(n)$.
- backward recursion: for decreasing times n , $y(n) = \frac{y(n+1)-x(n+1)}{a}$. This is the anti-causal implementation introduced in Section 2.3.2. Indeed, this implementation is numerically stable if and only if $|a| > 1$, since any error in the computation $y(n+1)$ is reduced by a factor $\frac{1}{|a|}$ in $y(n)$.



These observations are summarized in Table 2.1.

	I/O relationship Transfer function	$y(n) - ay(n-1) = x(n)$ $H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$
Implementation	$y(n) = ay(n-1) + x(n)$	$y(n) = \frac{y(n+1) - x(n+1)}{a}$
IR ($x(n) = \delta_0(n)$)	$h(n) = a^n 1_{\{n \geq 0\}}$	$h(n) = -a^n 1_{\{n < 0\}}$
Domain \mathcal{D}	$\{z \in \mathbb{C} / z > a \}$	$\{z \in \mathbb{C} / z < a \}$
Properties	causal, stable if $ a < 1$	anti-causal, stable if $ a > 1$

Table 2.1: Autoregressive filter of order 1

The different filter implementations, that we have here studied in the particular case of the AR1 filter, will be extended to the general context of *recursive filters* in Section 3.

3 Recursive filters

Recursive filters generalize the notion of AR1 filters that was summarized in Section 2.3.3.

3.1 Definition

A recursive filter is defined by its I/O relationship:

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k), \quad (2.4)$$

which relates the samples of the output signal y to those of the input signal x . Note that the I/O relationship actually defines a filter:

- the output samples are linear functions of the input samples;
- delaying the input signal is equivalent to delaying the output signal by the same delay.

Therefore we know that there is an impulse response h such that $y = h * x$ (but in the general case, h cannot be expressed as a simple function of the coefficients a_k and b_k , as we will see later).

The I/O relationship admits several implementations. For instance, the causal implementation is

$$y(n) = \frac{1}{a_0} \left[\sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \right].$$

Contrary to the impulse response, the transfer function can be expressed as a simple function of the coefficients a_k and b_k , as shown in the following proposition:

Proposition 6. *The transfer function of a recursive filter defined by its I/O relationship (2.4) can be written as*

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}, \quad (2.5)$$

where the coefficients c_k are referred to as the zeros of the filter, and the coefficients d_k are referred to as its poles.

Proof. Applying the Z-transform to the I/O relationship yields $\sum_{k=0}^N a_k Y(z) z^{-k} = \sum_{k=0}^M b_k X(z) z^{-k}$, or equivalently $\left(\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}\right) Y(z) = \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}\right) X(z)$. Therefore $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$. Since the numerator and denominator are polynomials of z^{-1} , they can be factorized as products of monomials, therefore $H(z) = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$. \square

Based on Proposition 6, we can particularize the general properties of the domain \mathcal{D} of the transfer function, that we have already investigated in Section 2.1, to the particular case of recursive filters:

- \mathcal{D} is a ring bounded by two poles, with no pole inside;
- the causal implementation is unique, and its domain \mathcal{D} is the complement of the disk whose radius is equal to the maximum modulus of the poles;
- there is a stable implementation, which is unique, if and only if there is no pole on the unit circle; in this case its domain \mathcal{D} is the largest ring containing the unit circle and no pole;
- there is a unique *stable and causal* implementation if and only if all poles are strictly inside the unit circle;
- if all coefficients a_k and b_k are real, then the poles and zeros are either real, or form conjugate pairs.

3.2 Examples of recursive filters

There are two particular classes of recursive filters which are widely employed in signal processing: the AR filters and the *Finite Impulse Response* (FIR) filters.

3.2.1 Autoregressive filters

AR filters are recursive filters such that $M = 0$ (so that they have no zero). In this case, we say that h is an AR filter of order N . The I/O relationship is simplified as

$$y(n) = \frac{b_0}{a_0} x(n) - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y(n-k).$$

AR filters are usually employed in speech processing, because they correspond to a physical model of the vocal tract.

3.2.2 Finite impulse response filters

FIR filters are recursive filters such that $N = 0$ (so that they have no pole). In this case, we say that h is an FIR filter of length M . Their impulse response admits a simple expression as a function of the coefficients a_k and b_k :

$$h(n) = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0} & \text{if } n = 0 \dots M, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

FIR filters are widely employed in signal processing because they are both causal and unconditionally stable.

3.2.3 Exercise: computation of the impulse response from the Z-transform

Let $H(z) = \frac{1}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}}$. Prove that this transfer function has three domains of convergence, and that for each of these domain, the impulse response is as follows:

- Domain $|z| < 1/2$ (anti-causal implementation): $h(n) = \begin{cases} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{2}{3} 2^{n+1} & \text{if } n \leq -1 \\ 0 & \text{if } n > -1 \end{cases}$;
- Domain $1/2 < |z| < 2$ (stable implementation): $h(n) = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$;
- Domain $|z| > 2$ (causal implementation): $h(n) = \begin{cases} -\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{2}{3} 2^{n+1} & \text{if } n \geq 0 \\ 0 & \text{if } n < 0 \end{cases}$.

We remind you the methodology that will allow you to compute the IR from the ZT:

1. If necessary, extract from $H(z)$ a term in z^n , so that the numerator and denominator of $H(z)$ only contain negative powers of z plus a constant;
2. Factorize the numerator and denominator as products of monomials of z^{-1} ;
3. Compute the partial fraction decomposition of $H(z)$ as a function of z^{-1} ;
4. Expand this partial fraction decomposition in power series:
 - of z^{-1} if we compute the causal IR, or if we compute the stable IR and if the pole is inside the unit circle;
 - of z if we compute the anti-causal IR, or if we compute the stable IR and if the pole is outside the unit circle.
5. Identify the coefficients of the resulting expression with those of $H(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n)z^{-n}$.

3.3 Geometric interpretation of the frequency response

The shape of the FR of a recursive filter can be easily deduced from the expression of its transfer function. For example, let us consider the causal AR2 filter:

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{1}{(1 - pz^{-1})(1 - \bar{p}z^{-1})}, \quad (2.6)$$

where we have assumed that the coefficients $a_1 \in \mathbb{R}$ and $a_2 \in \mathbb{R}$ are such that the two poles form a conjugate pair.

Then let M be the point in the Z-plane of affix z , let P be the point of affix p , and let Q be the point of affix \bar{p} , as represented in Figure 2.3a. Then equation (2.6) implies

$$|H(z)| = \frac{1}{PM \times QM} \quad (2.7)$$

and $\arg H(z) = 2 \arg(OM) - \arg(PM) - \arg(QM)$.

Applying equation (2.7) to $z = e^{2i\pi\nu}$ permits us to plot the magnitude of the frequency response $|H(e^{2i\pi\nu})|$, as in Figure 2.3b. Indeed, when ν goes from 0 to $+\frac{1}{2}$, M travels over the unit circle counterclockwise, from the point of affix $z = 1$ to the same point of affix $z = -1$. In particular, when M is closest to P , the distance PM is small, so $|H(z)|$ is high. Indeed, we observe a resonance in Figure 2.3b, at the resulting frequency $\nu = \frac{\arg p}{2\pi}$.



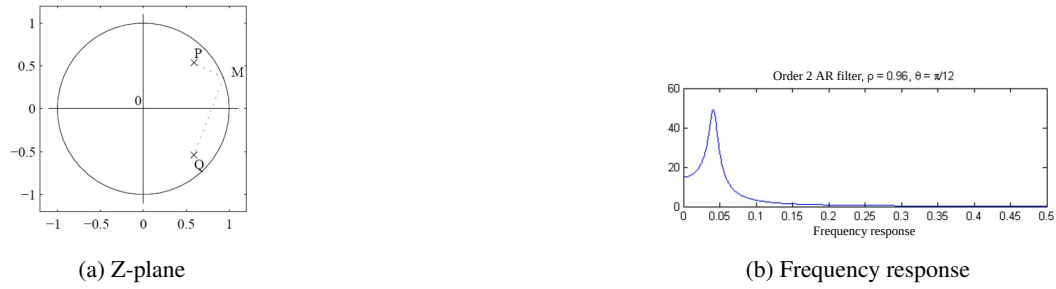


Figure 2.3: Geometric interpretation of the FR

4 Synthesis of FIR filters: window method

We consider an ideal frequency response, such as that given as $H_i(e^{j2\pi\nu}) = 1$ for $\nu \in [-\nu_c, \nu_c]$ and 0 elsewhere (modulo 1). The impulse and frequency responses of this ideal low-pass filter are represented in Figure 2.4.

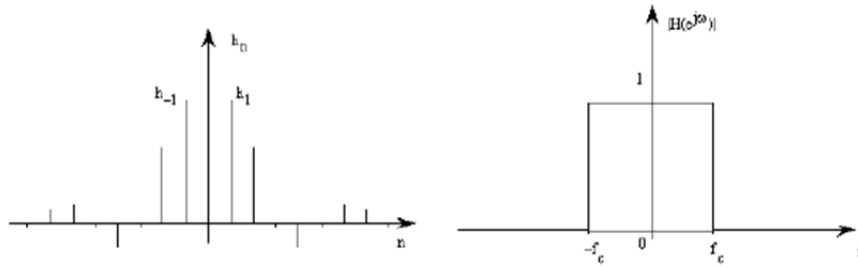


Figure 2.4: Impulse and frequency responses of the ideal low-pass filter

If a closed-form expression of the impulse response is known, we construct a finite impulse response by multiplication of this response by a finite window. We thus obtain an FIR filter that we can make causal by a temporal shift of the obtained response.

In the example cited above the closed-form expression is simply written (by inverse Fourier transform of H_i):

$$h_i(n) = 2\nu_c \operatorname{sinc}(2\nu_c n).$$

We can then construct a finite impulse response by means of a window $w(n)$ with finite temporal support:

$$h(n) = w(n)h_i(n).$$

The spectral result obtained in this way is a convolution of the Fourier transform of the ideal response and the Fourier transform of the window, that is:

$$H(e^{j2\pi\nu}) = \int_{-0.5}^{+0.5} W(e^{j2\pi\gamma}) H_i(e^{j2\pi(\nu-\gamma)}) d\gamma.$$

This result is illustrated in Figures 2.5 and 2.6.

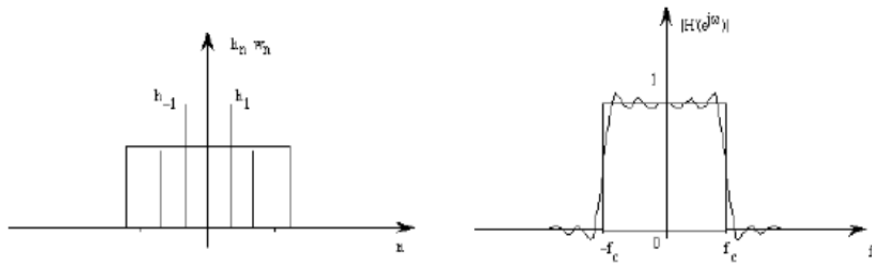


Figure 2.5: Impulse and frequency responses of the FIR filter synthesized by the window method

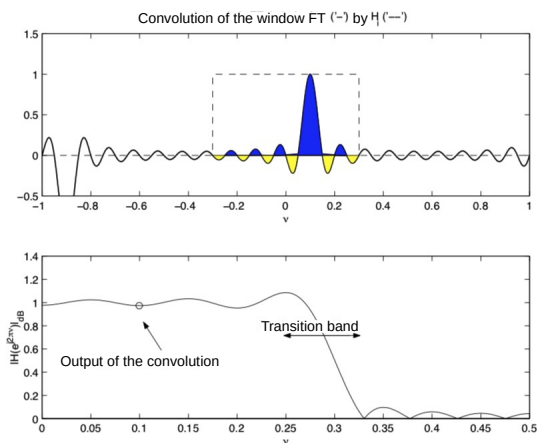


Figure 2.6: Synthesis of an FIR filter by the window method: appearance of a transition band and of ripple in the passband and stopband

Two effects appear:

- ripples in the passband and in the stopband, whose level is directly related to that of the sidelobes of $W(e^{j2\pi v})$. This also means that the stopband attenuation is also related to the level of these sidelobes;
- the obtained filter is no longer infinitely selective. A *transition band* appears between the passband and the stopband. The width of this transition band and therefore the filter selectivity are related to the width of the main lobe of $W(e^{j2\pi v})$.

The selection of the window's shape is based on a trade-off between the level of the sidelobes and the width of the main lobe (see Figure 1.8 page 16).

In practice, it is difficult to optimize the method — in the sense of respecting a given template while minimizing the order of the filter — using common windows such as the rectangular, Bartlett, Hann, . . . windows. Indeed, we cannot adjust the trade-off between the main lobe width and the sidelobe level.

Kaiser looked into this problem in the 1970s. The result is the family of Kaiser windows, parameterized by a coefficient β . This parameter adjusts the attenuation level (δ_2) in the stopband. We can then adjust the transition band by varying the length of the filter. Its expression is given, for a length $N = 2M + 1$ by:

$$w(n) = \frac{I_0(\beta \sqrt{1 - n^2/M^2})}{I_0(\beta)} \quad (2.8)$$

where I_0 denotes the modified Bessel function of the first kind. The result is a type I FIR filter. We also note that for the window method, we obtain a comparable ripple level in the two bands, *i.e.* $\delta_1 \approx \delta_2$.



Chapter 3

Random processes

1 The random model

So far, we have only encountered deterministic signals $x(n)$, i.e. sequences such that, at each time n , we have a rule allowing us to evaluate the quantity $x(n)$. This rule can be specified, as we have seen, in the form of a mathematical expression, or a recurrent equation or any other construction process.

Deterministic functions form the basis of mathematical analysis, but most of the phenomena we will have to model are not of this nature.

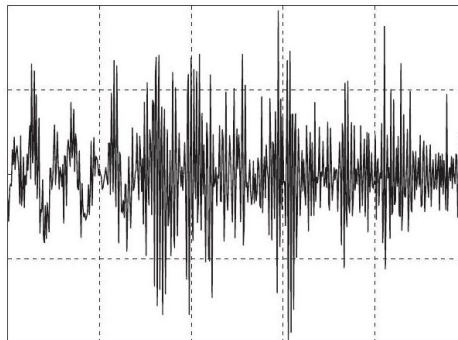


Figure 3.1: Visualization of a speech signal with a duration of 1/16th of a second

Let us consider the speech signal represented in Figure 3.1. It is clear from this graph that we cannot reduce these observations to a deterministic function of time. We might be able to find a deterministic function that correctly approximates the observed values over a time interval $[0, T]$, but this function would not be a valid approximation of the observation outside this interval, and this property would persist regardless of the duration $[0, T]$ of the observation. The plot in Figure 3.1 contains a very large number of irregularities, and these irregularities do not seem to respect a predictable evolution. The observations have a random character, in the sense that we cannot determine, for a given moment, what the precise value of the measurement will be. On the other hand, it is possible to indicate an interval of possible values, and possibly to specify how these values are distributed from a certain probability law.

The correct way of describing the behavior of the phenomenon is therefore to specify, at each time t , a probability distribution, allowing to describe the likelihood of each observation. In the language of probability, the observation X_t observed on the sensor at each time $t \in \mathbb{Z}$ is a random variable and its evolution over time is a random process. This example is the prototype of a large class of physical phenomena.

Let us now consider Figure 3.2, representing a recording of the vowel /i/.

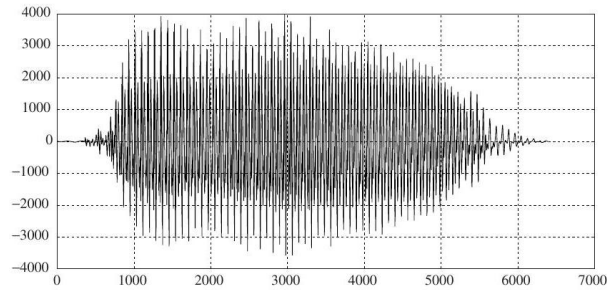


Figure 3.2: Isolated vowel /i/

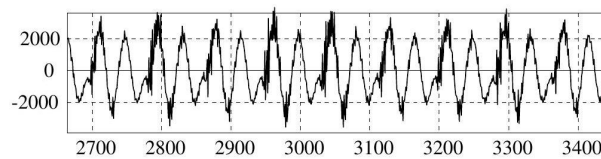


Figure 3.3: Zoom in on vowel/i/

A zoom in on the trajectory (see Figure 3.3) shows that we are dealing with an "almost" periodic signal that might be modeled as a deterministic function to which is superimposed a random component that presents many irregularities.

2 General properties

2.1 Temporal law

Definition 5. A random process $\{X_t\}$ is a family of random variables indexed by $t \in \mathbb{Z}$ and defined on a probability space (Ω, \mathcal{F}, P) . Each particular outcome of the process is called a trajectory.

To conform to the usual conventions in probability theory, Ω is the set of *samples*, ω is a particular sample, \mathcal{F} is the set of *events*, X_t is the random variable at time t and $X_t(\omega)$ is a particular outcome of the process for sample ω . At each time t , X_t is, by definition, a random variable, i.e. an application (measurable from Ω into \mathbb{R}) taking its values in a certain set, typically:

- \mathbb{R} or an interval of \mathbb{R} if the process is continuous,
- or $\mathcal{S} = \{x_i, i \in I\}$ where I is a finite or countable set, if the process is discrete.

This random variable defines on $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ a measure called probability law. This law can be characterized through its *Cumulative Distribution Function* (CDF).

Since a process is a collection of random variables (corresponding to the values taken by the process at all times), we are also interested in the joint laws of the variables $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k})$ corresponding to distinct observation times (t_1, t_2, \dots, t_k) . The choice of the observation times being arbitrary here, we will need the set of all these joint laws.

Definition 6. We call the finite-dimensional law of the random process X_t of order k the set of probability laws of the random vectors $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k})$ where (t_1, t_2, \dots, t_k) is an arbitrary k -tuple of distinct times.

The specification of second order finite-dimensional laws allows to evaluate expressions of the form

$$\mathbb{P}\{X_{t_1} \leq a, X_{t_2} \leq b\}$$

or $\mathbb{E}[f(X_{t_1})g(X_{t_2})]$, where $f(x_1)$ and $g(x_2)$ are integrable functions with respect to the joint law of X_{t_1} and X_{t_2} . More generally, the specification of k -dimensional laws allows to evaluate quantities involving the joint law of the random process at k successive times.

For random variables, defining the distribution is equivalent to defining the CDFs:

$$F(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k) = \mathbb{P}\{X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_k} \leq x_k\}. \quad (3.1)$$

In many situations, the CDFs are differentiable functions with respect to the variables (x_1, \dots, x_k) , which means that there are positive functions $p_X(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k)$ such that:

$$F(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_k} p_X(u_1, \dots, u_k; t_1, \dots, t_k) du_1 \dots du_k.$$

The positive function $p_X(u_1, \dots, u_k; t_1, \dots, t_k)$ is called the joint *Probability Density Function* (PDF) of variables X_{t_1}, \dots, X_{t_k} .

It is interesting to note that the CDFs (3.1) mechanically verify compatibility conditions. Let π be a permutation of the set $\{1, \dots, k\}$. We must have:

$$F(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k) = F(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(k)}; t_{\pi(1)}, \dots, t_{\pi(k)}). \quad (3.2)$$

In the same way, for any coordinate $i \in \{1, \dots, k\}$, we have

$$\lim_{x_i \rightarrow \infty} F(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k) = F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k; t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_k). \quad (3.3)$$

Definition 7 (Temporal law). *We call the temporal law of the process the set of finite-dimensional distributions at any order.*

Note that giving the temporal law allows one to specify the probability of events involving an arbitrary but finite number k of random variables X_{t_1}, \dots, X_{t_k} . For example:

$$\mathbb{P}\{f_1(X_{t_1}) \leq a_1, f_2(X_{t_2}) \leq a_2, \dots, f_k(X_{t_k}) \leq a_k\}$$

where (f_1, f_2, \dots, f_k) are k measurable functions. The difficult question that remains is the following: can the temporal law be used to evaluate the probability of events involving an infinite number of random variables, such as the probability of exceeding a certain level, that can be written in the form:

$$\mathbb{P}\left\{b \leq \sup_{t \in T} X_t \leq a\right\}.$$

Evaluating such quantities would require specifying the joint probability law of the set of random variables $\{X_t\}$ that forms the process. When the set of indexes T is infinitely countable (e.g. $T = \mathbb{Z}$), we have to define the joint probability law of an infinite set of random variables.

It may therefore seem that, if we want to describe the dynamics of the process, it is necessary to consider infinite-dimensional probability distributions. Actually, but the demonstration of these properties is quite non-trivial, the knowledge of the temporal law (set of finite-dimensional distributions) is sufficient to define the set of laws of the process. The very statement of this result calls for advanced mathematical constructions, which go beyond the course.

It is also interesting to formulate the problem in the opposite direction. We give ourselves a family of CDFs that verify the compatibility conditions (3.2) and (3.3). Is there a probability space and a random process defined on this probability space whose temporal law coincides precisely with this set of CDFs? The answer to this question is affirmative and forms one of the key results of the theory of random processes: the Kolmogorov theorem [Bil79, chap. 7].

Theorem 7 (Kolmogorov). *Let $\mathcal{E} = \{F(\bullet; t_1, \dots, t_k), (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{Z}^k\}$ be a compatible family of CDFs. Then there exists a probability space (Ω, \mathcal{F}, P) and a random process defined on (Ω, \mathcal{F}, P) such that \mathcal{E} is the temporal law of $\{X_t\}$.*

2.2 Stationarity

It can happen that all the random variables X_t have the same probability distribution whatever the observation time t . We say that the random phenomenon is stationary, as it presents a certain permanence in its evolution. In a more general way, we get the following definition.

Definition 8 (Strict stationarity). *A random process is strictly stationary if the temporal law is invariant to any translation of time, i.e., for any k -tuple $(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{Z}^k$ and any $\tau \in \mathbb{Z}$:*

$$F(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k) = F(x_1, \dots, x_k; t_1 + \tau, \dots, t_k + \tau).$$

Example 2 (Binary random process). *Consider the random process X_t with values in the set $\{0, 1\}$. It is assumed that, for all t and any sequence of times $(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{Z}^k$, the random variables $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k}$ are independent. Its temporal law is then defined by the sequence $\alpha_t = \mathbb{P}\{X_t = 1\}$ with values in $(0, 1)$. If $\alpha_t = \alpha$ is independent of t , the process is strictly stationary. We can then write that $\forall k, (t_1, t_2, \dots, t_k) \in \mathbb{Z}^n$:*

$$\mathbb{P}\{X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_k} = x_k\} = \alpha^{\sum_{j=1}^k x_j} (1 - \alpha)^{k - \sum_{j=1}^k x_j}.$$

Gaussian random processes. Let us first recall some definitions regarding Gaussian random variables.

Definition 9. A Gaussian or normal random variable is a random variable whose probability law is defined by the following characteristic function:

$$\phi_X(u) \triangleq \mathbb{E}[e^{iuX}] = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}u^2 + i\mu u\right).$$

We deduce that $\mathbb{E}[X] = \mu$ and that $\text{var}[X] = \sigma^2$. If $\sigma \neq 0$, then the probability law has the following PDF:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Definition 10. A random vector of dimension d is said to be Gaussian if and only if any linear combination of its components is a Gaussian random variable.

The law of a Gaussian random vector is defined by the following characteristic function:

$$\phi_X(u_1, \dots, u_k) \triangleq \mathbb{E}[e^{iu^\top X}] = \exp\left(-\frac{1}{2}u^\top \mathbf{R}u + i\mu^\top u\right),$$

We deduce that $\mathbb{E}[X_n] = \mu_n$ and that $\text{covar}(X_m, X_n) = \mathbb{E}[(X_m - \mu_m)(X_n - \mu_n)] = \mathbf{R}_{mn}$. If $\det(\mathbf{R}) \neq 0$, then the probability law has the following PDF:

$$p_X(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} \sqrt{\det(\mathbf{R})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(X - \mu)^\top \mathbf{R}^{-1}(X - \mu)\right). \quad (3.4)$$

When the vector dimension is infinite, it is referred to as a *Gaussian random process*:

Definition 11. A random process is said to be Gaussian if and only if, whatever k and whatever the sequence of times $(t_1, t_2, \dots, t_k) \in \mathbb{Z}^k$, the k -dimensional random vector $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_k})$ is Gaussian.

Proposition 8.

- A Gaussian random process is defined by the function $\mu(t) = \mathbb{E}[X_t]$ where $t \in \mathbb{Z}$ and the function $R_{XX}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[(X_{t_1} - \mu(t_1))(X_{t_2} - \mu(t_2))]$ where $(t_1, t_2) \in \mathbb{Z}^2$. To obtain its temporal law, it is sufficient to replace in the expression (3.4) the vector μ by $(\mu(t_1), \dots, \mu(t_k))^\top$ and the matrix \mathbf{R} by the matrix of entries $R_{mn} = R_{XX}(t_m, t_n)$.

- We deduce that a Gaussian process is strictly stationary if and only if $\mu(t)$ is independent of t and $R_{XX}(t_1, t_2)$ depends only on the difference $(t_1 - t_2)$.
- Particular case: the non-correlation of random variables (X_{t_1}, X_{t_2}) , for any pair of times (t_1, t_2) , leads to the fact that \mathbf{R} is a diagonal matrix and that the random variables (X_{t_1}, X_{t_2}) are also independent. If the process is also stationary, then $\mathbf{R} = R_{XX}(0) \mathbf{I}_k$.

Definition 12 (Independent processes). We say that two processes $\{X_t\}$ and $\{Y_u\}$ defined on the same probability space (Ω, \mathcal{F}, P) are independent if and only if for any pair (k, m) and for any k -tuple $(t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{Z}^k$ and any m -tuple $(u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{Z}^m$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{X_{t_1} < x_1, \dots, X_{t_k} < x_k, Y_{u_1} < y_1, \dots, Y_{u_m} < y_m\} \\ = & \mathbb{P}\{X_{t_1} < x_1, \dots, X_{t_k} < x_k\} \mathbb{P}\{Y_{u_1} < y_1, \dots, Y_{u_m} < y_m\}. \end{aligned}$$

Complex random processes So far we have only considered real-valued processes. However, complex functions also play an important role in digital communications. In the case of bandpass signals, and in particular modulated signals, the so-called *complex envelope* representation is widely used. We show below how the previous definitions are transformed in the case of complex-valued processes.

A complex-valued random process X_t is defined through two real random processes U_t and V_t , according to $X_t = U_t + \imath V_t$. For the first order moment, we have:

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[U_t] + \imath \mathbb{E}[V_t].$$

For the second order properties, two moments can be defined. The first one is $N_{XX}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X_{t_1} X_{t_2}]$ and the second one is $M_{XX}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X_{t_1} \overline{X_{t_2}}]$. These two moments are related simply to those of U_t and V_t by:

$$\begin{aligned} N_{XX}(t_1, t_2) &= M_{UU}(t_1, t_2) - M_{VV}(t_1, t_2) + \imath (M_{UV}(t_1, t_2) + M_{VU}(t_1, t_2)) \\ M_{XX}(t_1, t_2) &= M_{UU}(t_1, t_2) + M_{VV}(t_1, t_2) + \imath (M_{UV}(t_1, t_2) - M_{VU}(t_1, t_2)). \end{aligned}$$

$M_{XX}(t_1, t_2)$ satisfies for any pair of times (t_1, t_2) the so-called *Hermitian symmetry* relation:

$$M_{XX}(t_1, t_2) = \overline{M_{XX}(t_2, t_1)}.$$

Definition 13. We call the autocovariance function of the complex random process X_t the function defined as:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X_{t_1}^c \overline{X_{t_2}^c}] \quad (3.5)$$

where $X_t^c = X_t - \mathbb{E}[X_t]$ denotes the centered process.

In the expression (3.5), the centered random variable $X_{t_2}^c$ is conjugated. This conjugation is important because the scalar product $\mathbb{E}[X\overline{Y}]$ equips the set of square integrable random variables $(E|X|^2 < +\infty)$ with a Hilbert space structure.

Definition 14. We call the covariance function of complex random processes X_t and Y_t the function defined as:

$$R_{XY}(t_1, t_2) = \mathbb{E}[X_{t_1}^c \overline{Y_{t_2}^c}]$$

where $X_t^c = X_t - \mathbb{E}[X_t]$ and $Y_t^c = Y_t - \mathbb{E}[Y_t]$ denote the centered processes.

2.3 Second order properties

The following properties apply whether the random processes are real or complex: in the real case, we can just replace $\overline{X_t}$ by X_t .

Proposition 9. The autocovariance function $R_{XX}(t_1, t_2)$ of a random process X_t satisfies the following properties:

(1) $R_{XX}(t, t) \geq 0$, the equality taking place if and only if X_t is almost certainly a constant;

(2) Hermitian symmetry:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \overline{R_{XX}(t_2, t_1)};$$

(3) Schwarz inequality:

$$|R_{XX}(t_1, t_2)|^2 \leq R_{XX}(t_1, t_1) R_{XX}(t_2, t_2);$$

(4) Non-negativity: for any k , for any sequence of times (t_1, \dots, t_k) and for any sequence of complex numbers $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ we have:

$$\sum_{i,j=1}^k \lambda_i \overline{\lambda_j} R_{XX}(t_i, t_j) \geq 0.$$

Proof. Point (1) can be shown as an exercise. To get point (2), it is sufficient to conjugate the expression defining $R_{XX}(t_1, t_2)$. To show point (3), it suffices to apply the Schwarz inequality to the centered random variables $X_{t_1}^c = X_{t_1} - \mathbb{E}[X_{t_1}]$ and $X_{t_2}^c = X_{t_2} - \mathbb{E}[X_{t_2}]$. Let us now prove point (4). For any sequence of complex numbers $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, we have:

$$\mathbb{E} \left[\left| \sum_{i=1}^k \lambda_i X_{t_i}^c \right|^2 \right] \geq 0$$

where $X_t^c = X_t - \mathbb{E}[X_t]$. By developing the square, we get:

$$\mathbb{E} \left[\left| \sum_{i=1}^k \lambda_i X_{t_i}^c \right|^2 \right] = \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^k \lambda_i X_{t_i}^c \sum_{j=1}^k \overline{\lambda_j X_{t_j}^c} \right] = \sum_{i,j=1}^k \lambda_i \overline{\lambda_j} \mathbb{E} [X_{t_i}^c \overline{X_{t_j}^c}]$$

which is the announced result. \square

The covariance function between two random processes does not verify a non-negativity property, but we still have the following results.

Proposition 10. The covariance function $R_{XY}(t_1, t_2)$ of the random processes X_t and Y_t satisfies the two following properties:

(1) Hermitian symmetry: $R_{XY}(t_1, t_2) = \overline{R_{YX}(t_2, t_1)}$;

(2) Schwarz inequality: $|R_{XY}(t_1, t_2)|^2 \leq R_{XX}(t_1, t_1) R_{YY}(t_2, t_2)$.

3 Wide Sense Stationary (WSS) processes

For more details on the content of this section, we refer the reader to [SM05, chap. 2].

Definition 15 (WSS process). A complex Wide Sense Stationary (WSS) process is a sequence of random variables $X_t \in \mathbb{C}$ for $t \in \mathbb{Z}$, such that

- $\mathbb{E}[|X_t|^2] < +\infty$;
- $\mathbb{E}[X_t] = \mu_X$ does not depend on t ;
- $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\text{cov}[X_{t+k}, X_t] = \mathbb{E}[X_{t+k}^c \overline{X_t^c}]$ (where $X_t^c = X_t - \mu_X$) does not depend on t ;

Proposition 11 (Strict vs. wide-sense stationarity). We have the following relationships between wide sense and strict stationarities:

- if X_t is a strictly stationary process such that $\mathbb{E}[|X_t|^2] < +\infty$, then X_t is also WSS;

- if X_t is a Gaussian process, then it is strictly stationary if and only if it is WSS.

Definition 16 (Autocovariance function). Let X_t be a complex WSS process. Its Auto-Covariance Function (ACF) is defined as

$$\forall k \in \mathbb{Z}, R_{XX}(k) = \text{cov}[X_{t+k}, X_t] = \mathbb{E}[X_{t+k}^c \overline{X_t}].$$

Proposition 12 (Properties of the autocovariance function). Let X_t be a complex WSS process. Then its ACF is such that

- $R_{XX}(0) = \text{var}[X_t] \geq 0$;
- $\forall k \in \mathbb{Z}, R_{XX}(-k) = \overline{R_{XX}(k)}$ (Hermitian symmetry);
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t_1 \dots t_k \in \mathbb{Z}, \forall \lambda_1 \dots \lambda_k \in \mathbb{C}, \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \lambda_i \overline{\lambda_j} R_{XX}(t_i - t_j) \geq 0$ (positive semi-definiteness);
- $\forall k \in \mathbb{Z}, |R_{XX}(k)| \leq R_{XX}(0)$ (boundedness);
- $P_X \triangleq \mathbb{E}[|X_t|^2] = R_{XX}(0) + |\mu_X|^2$ (power of a WSS process).

Definition 17 (Power spectral density). Let X_t be a complex WSS process. If $R_{XX} \in l^1(\mathbb{Z})$, then the Power Spectral Density (PSD) of X_t is defined as the DTFT of R_{XX} :

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, S_{XX}(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{XX}(k) e^{-2i\pi \nu k}.$$

Proposition 13 (Properties of the power spectral density). Let X_t be a complex WSS process such that $R_{XX} \in l^1(\mathbb{Z})$. Then:

- $R_{XX}(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} S_{XX}(\nu) e^{+2i\pi \nu k} d\nu$ (inversion of the DTFT);
- $\nu \mapsto S_{XX}(\nu)$ is a continuous function (as the DTFT of a $l^1(\mathbb{Z})$ sequence);
- $S_{XX}(\nu) \geq 0 \forall \nu \in \mathbb{R}$ (due to the Herglotz theorem);
- $P_X = R_{XX}(0) + |\mu_X|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} S_{XX}(\nu) d\nu + |\mu_X|^2$ (power of a WSS process).

Definition 18 (White noise). A White Noise (WN) is a centered WSS random process whose PSD is constant along the frequency axis.

If we denote σ^2 the PSD of a white noise, a direct consequence of the definition is that the autocovariance function of a white noise is the following:

$$R_{XX}(k) = \mathbb{E}[X_{t+k} \overline{X_t}] = \begin{cases} \sigma^2 & \text{if } k = 0 \\ 0 & \text{if } k \neq 0 \end{cases}.$$

This is the simplest example of a discrete time process which is memoryless, in the sense that the value of the process at time t is not correlated to (but not necessarily independent from) the value of the process at time $(t + k)$. Figure 3.4 shows a trajectory of $N = 500$ samples of a white Gaussian noise of mean zero and variance $\sigma^2 = 1$.

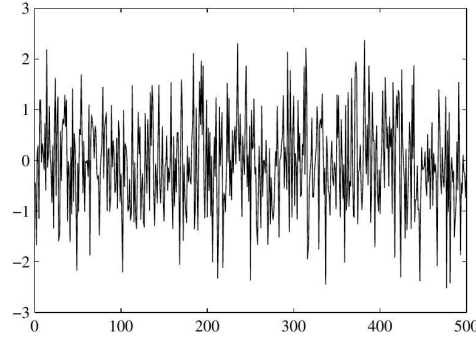


Figure 3.4: Trajectory of a white Gaussian noise of variance 1

Theorem 14 (Filtering theorem for WSS processes). *Let h_k be the impulse response of a stable filter of frequency response $H(v) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k e^{-2i\pi vk}$, let X_t be a complex WSS process, and let $Y_t = h * X_t$. Then Y_t is a WSS process of mean $\mu_Y = \mu_X H(0) = \mu_X \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k$ and of ACF $R_{YY} = h * \tilde{h} * R_{XX}$, where $\tilde{h}_t = \overline{h_{-t}}$.*

If in addition $R_{XX} \in l^1(\mathbb{Z})$, then the power spectral density of Y_t is

$$S_{YY}(v) = |H(v)|^2 S_{XX}(v). \quad (3.6)$$

Proof of Theorem 14. By applying the mathematical expectation to $Y_t = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m X_{t-m}$, we get

$$\mathbb{E}[Y_t] = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m \mathbb{E}[X_{t-m}] = \mu_X \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m,$$

so the random process Y_t is first order stationary.

In the same way,

$$\begin{aligned} R_{YY}(t_1, t_2) &= \text{cov}[Y_{t_1}, Y_{t_2}] \\ &= \text{cov}\left[\sum_{m_1 \in \mathbb{Z}} h_{m_1} X_{t_1-m_1}, \sum_{m_2 \in \mathbb{Z}} h_{m_2} X_{t_2-m_2}\right] \\ &= \sum_{m_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{m_2 \in \mathbb{Z}} h_{m_1} \overline{h_{m_2}} \text{cov}[X_{t_1-m_1}, X_{t_2-m_2}] \\ &= \sum_{m_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{m_2 \in \mathbb{Z}} h_{m_1} \overline{h_{m_2}} R_{XX}(t_1 - t_2 + m_2 - m_1) \\ &= h * \sum_{m_2 \in \mathbb{Z}} \overline{h_{m_2}} R_{XX}(t_1 - t_2 + m_2). \end{aligned}$$

Then, by defining $\tilde{h}_n = \overline{h_{-n}}$ and by applying the change of variable $m = -m_2$, we get:

$$\begin{aligned} R_{YY}(t_1, t_2) &= h * \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_m R_{XX}(t_1 - t_2 - m) \\ &= (h * \tilde{h} * R_{XX})(t_1 - t_2). \end{aligned}$$

Therefore the random process Y_t is also second order stationary, so it is WSS and $R_{YY} = h * \tilde{h} * R_{XX}$.

If in addition $R_{XX} \in l^1(\mathbb{Z})$, then applying the DTFT to this last equation yields (3.6), since the DTFT of \tilde{h} is \overline{H} . \square

4 Linear processes

This section is structured as follows: we first introduce the notion of linear processes, and two particular cases of interest: the *Moving Average* (MA) and the AR models (in Sections 4.1 and 4.2). Then in Section 4.3, we introduce the linear prediction approach for estimating AR models.

For more details on the content of this section, we refer the reader to [SM05, chap. 3].

Definition 19 (Linear process). $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is a linear process if and only if there is $\mu_X \in \mathbb{C}$, $Z_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$ and $(h_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in l_1(\mathbb{Z})$ such that $\forall t \in \mathbb{Z}$, $X_t = \mu_X + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n Z_{t-n}$. In addition,

- $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is causal with respect to $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ if and only if $h_n = 0 \forall n < 0$;
- $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is invertible with respect to $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ if and only if there is a sequence $(g_n)_{n \geq 0} \in l_1(\mathbb{N})$ such that $Z_t = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n (X_{t-n} - \mu_X) \forall t \in \mathbb{Z}$.

Proposition 15 (Properties of linear processes). Let X_t be a linear process as defined in Definition 19. Then X_t is a WSS process of mean μ_X , ACF $R_{XX}(k) = \mathbb{E}[(X_{t+k} - \mu_X)(\bar{X}_t - \bar{\mu}_X)] = \sigma^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_{n+k} \bar{h}_n$, and spectral density $S_{XX}(\nu) = \sigma^2 |H(\nu)|^2$ with $H(\nu) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-2i\pi \nu k}$.

Proof of Proposition 15. This proposition is a consequence of the filtering theorem for WSS processes (Theorem 14 page 35). \square

4.1 Moving average processes

MA processes are linear processes such that filter h has a FIR.

Definition 20 (MA(q) process). The process $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is moving average of order q (or MA(q)) if and only if $X_t = \sum_{n=0}^q b_n Z_{t-n}$ where $Z_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$, $b_n \in \mathbb{C}$ and $b_0 = 1$.

Proposition 16 (Properties of MA processes). Let X_t be an MA process as defined in Definition 20. Then X_t is a WSS process of mean 0, of ACF $R_{XX}(k) = \sigma^2 \sum_{n=0}^{q-k} b_{n+k} \bar{b}_n$ if $0 \leq k \leq q$ and $R_{XX}(k) = 0$ if $k > q$, and of spectral density $S_{XX}(\nu) = \sigma^2 \left| \sum_{n=0}^q b_n e^{-2i\pi \nu n} \right|^2$.

Proof of Proposition 16. This proposition is a consequence of the filtering theorem for WSS processes (Theorem 14 page 35). \square

The PSD of an MA(1) process is illustrated in Figure 3.5.

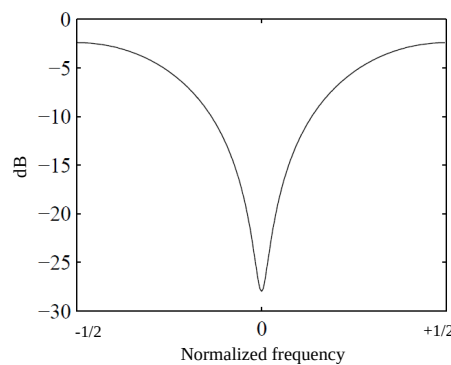


Figure 3.5: PSD (in dB) of an MA(1) process with $\sigma = 1$ and $b_1 = -0.9$

4.2 Autoregressive processes

AR processes are linear processes such that filter h is AR.

Definition 21 (AR(p) process). *The process $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is autoregressive of order p (or AR(p)) if and only if it is WSS and solution of the equation*

$$X_t = Z_t + \sum_{n=1}^p a_n X_{t-n} \quad (3.7)$$

where $Z_t \sim \text{WN}(0, \sigma^2)$, and $a_n \in \mathbb{C}$.

The existence and unicity of a WSS solution to equation (3.7) is a difficult question, which did not exist for MA processes.

Example 3 (AR(1) process). *Let X_t be an AR(p) process with $p = 1$. Then*

- if $|a_1| < 1$, we have $X_t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_1^n Z_{t-n}$ (convergence in L^2 and a.s.);
- if $|a_1| > 1$, we have $X_t = -\sum_{n=1}^{+\infty} a_1^{-n} Z_{t+n}$ (convergence in L^2 and a.s.);
- in both cases, the filtering theorem for WSS processes (Theorem 14 page 35) proves that if $|a_1| \neq 1$, X_t is WSS of mean 0 and of spectral density $S_{XX}(\nu) = \frac{\sigma^2}{|1 - a_1 e^{-2\pi j \nu}|^2}$.
- if $|a_1| = 1$, the recursive equation (3.7) does not admit any WSS solution.

Three trajectories of a causal Gaussian AR(1) process are represented in Figure 3.6.

The PSD of a causal Gaussian AR(1) process is illustrated in Figure 3.7.

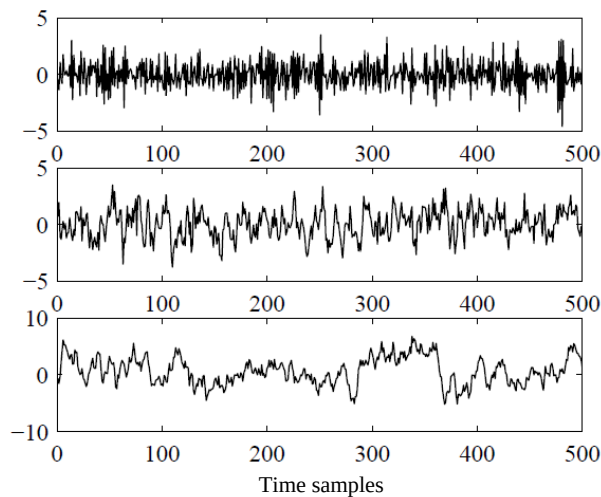


Figure 3.6: Trajectories of a Gaussian AR(1) process, of length 500. Top: $a_1 = -0.7$. Center: $a_1 = 0.5$. Bottom: $a_1 = 0.9$.

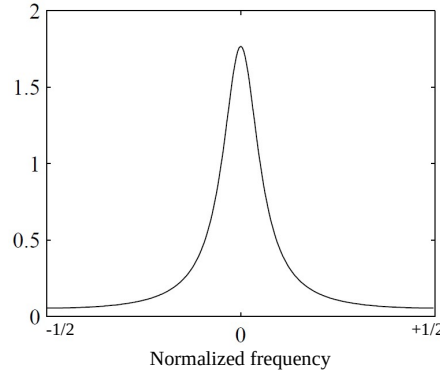


Figure 3.7: PSD of a Gaussian AR(1) process, with $\sigma = 1$ and $a_1 = 0.7$.

Let us now address the general case ($p \in \mathbb{N}^*$):

Proposition 17 (Properties of AR processes). *There is a WSS solution to equation (3.7) in Definition 21 if and only if $A(z) \triangleq 1 - \sum_{n=1}^p a_n z^{-n} \neq 0$ for $|z| = 1$. Then with $\frac{1}{A(z)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_n z^{-n}$ where $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |h_n| < +\infty$, we get $X_t = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n Z_{t-n}$. The AR process X_t has mean 0, ACF $R_{XX}(k) = \sigma^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_{n+k} \bar{h}_n$, and PSD $S_{XX}(\nu) = \frac{\sigma^2}{\left|1 - \sum_{n=1}^p a_n e^{-2j\pi\nu n}\right|^2}$. If all the zeros of $A(z)$ are strictly inside the unit circle, the solution is causal; if all the zeros of $A(z)$ are strictly outside the unit circle, the solution is anti-causal; otherwise, X_t is a mixed AR process.*

Proof of Proposition 17. This proposition is a consequence of the filtering theorem for WSS processes (Theorem 14 page 35). \square

4.3 Linear prediction method for AR estimation

The most popular way of estimating the parameters of a causal autoregressive process consists in predicting the value of the current sample X_t as a linear combination of the p previous samples:

$$\widehat{X}_t = \sum_{m=1}^p a_m X_{t-m}.$$

The *prediction coefficients* $a_1 \dots a_p$ are chosen so as to minimize the mean square error $\mathbb{E}[|Z_t|^2]$, where Z_t denotes the prediction error $Z_t = X_t - \widehat{X}_t$. Solving this minimization problem is equivalent to decorrelating Z_t from the past samples X_{t-k} (i.e. $\text{cov}(Z_t, X_{t-k}) = 0$) for $k \in \{1 \dots p\}$. This approach leads to the following set of linear equations: $\forall k \in \{1 \dots p\}$,

$$R_{XX}(k) = \sum_{j=1}^p a_j R_{XX}(k-j) \quad (3.8)$$

which can be solved to find the prediction coefficients a_k given the ACF $R_{XX}(k)$, and

$$R_{XX}(0) = \sigma_Z^2 + \sum_{k=1}^p a_k R_{XX}(k), \quad (3.9)$$

which permits us to estimate σ_Z^2 , since it implies $\sigma_Z^2 = R_{XX}(0) - \sum_{k=1}^p a_k R_{XX}(k)$.

These equations are known as the *Yule-Walker equations*. They can also be formulated in matrix form: we first estimate the covariance matrix $\mathbf{R}_{XX} = \mathbb{E}[X_t X_t^H]$, which can be defined indifferently from vector $X_t =$

$[X_t, X_{t+1} \dots X_{t+p-1}]^\top$ (forward data vector) or from vector $\mathbf{X}_t = [\overline{X_t}, \overline{X_{t-1}} \dots \overline{X_{t-p+1}}]^\top$ (backward data vector), leading to the same expression:

$$\mathbf{R}_{XX} = \begin{bmatrix} R_{XX}(0) & R_{XX}(-1) & \dots & R_{XX}(-(p-1)) \\ R_{XX}(1) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & R_{XX}(-1) \\ R_{XX}(p-1) & \dots & R_{XX}(1) & R_{XX}(0) \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

The Yule-Walker equations (3.8) can then be rewritten in matrix-vector form:

$$\mathbf{R}_{XX} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{XX}(1) \\ R_{XX}(2) \\ \vdots \\ R_{XX}(p) \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Note that the causal AR filter estimated by solving Yule-Walker equations is always stable [SN87].

In other respects, the Levinson-Durbin Algorithm [SS89, Mar87, Kay88] solves equation (3.11) recursively in the order p . Its computational complexity is thus $O(p^2)$ instead of $O(p^3)$.

5 Statistical inference

The section is structured as follows: after reminding some basics of parametric estimation in Section 5.1, we will introduce the estimation of the mean and the ACF of WSS processes in Section 5.2. Section 5.3 will then be devoted to PSD estimators, namely the periodogram and its Blackman-Tukey variant, and their performance analysis in terms of bias and variance.

For more details on the content of this section, we refer the reader to [SM05, chap. 2].

5.1 Parametric estimation

Let us first remind some basics of parametric estimation:

Definition 22 (Estimator). *Let X be a complex random variable whose distribution is parameterized by θ . An estimator $\hat{\theta}$ of θ is a function of X . Its bias is defined as $b(\theta, \hat{\theta}) = \mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}(X) - \theta]$, and its Mean Square Error (MSE) is defined as $R(\theta, \hat{\theta}) = \mathbb{E}_\theta \left[\left| \hat{\theta}(X) - \theta \right|^2 \right] = \text{var}[\hat{\theta}(X)] + |b(\theta, \hat{\theta})|^2$.*

There is a lower bound for $R(\theta, \hat{\theta})$ called the *Cramér-Rao lower bound* for unbiased estimators. [Kay93].

Definition 23 (Asymptotic approach of estimation). *Let $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_N]^\top$ be a complex random vector whose distribution is parameterized by θ . We say that an estimator $\hat{\theta}_N$ of θ is asymptotically unbiased if $\lim_{N \rightarrow +\infty} b(\theta, \hat{\theta}_N) = 0$. We say that it is mean square consistent if $\lim_{N \rightarrow +\infty} R(\theta, \hat{\theta}_N) = 0$.*

5.2 Estimation of the mean and of the autocovariance function

Given the observation of a few samples of a WSS process, one may want to estimate its mean and its autocovariance function.

5.2.1 Estimation of the mean

Definition 24 (Empirical mean). *Let X_t be a WSS process of mean μ_X and ACF R_{XX} . Given N observed samples $X_1 \dots X_N$, the empirical mean is defined as*

$$\hat{\mu}_X = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N X_t.$$

Proposition 18 (Properties of the empirical mean). *Let X_t be a WSS process of mean μ_X and ACF R_{XX} . Then*

- *the empirical mean is an unbiased estimator: $\mathbb{E}[\hat{\mu}_X] = \mu_X$;*
- *its variance is $\text{var}[\hat{\mu}_X] = \frac{1}{N} \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) R_{XX}(k)$;*
- *If in addition $R_{XX} \in l^1(\mathbb{Z})$, then it is mean square consistent: $\text{var}[\hat{\mu}_X] \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{N} S_{XX}(0)$.*

Proof of Proposition 18. The proof of the first assertion is straightforward. For the second assertion, we have

$$\begin{aligned} \text{var}[\hat{\mu}_X] &= \frac{1}{N^2} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{t_1=1}^N X_{t_1}^c \right) \left(\sum_{t_2=1}^N \overline{X_{t_2}^c} \right) \right] \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{t_1=1}^N \sum_{t_2=1}^N \mathbb{E} \left[X_{t_1}^c \overline{X_{t_2}^c} \right] \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{t_1=1}^N \sum_{t_2=1}^N R_{XX}(t_1 - t_2). \end{aligned}$$

Let $k = t_1 - t_2$. We get

$$\begin{aligned} \text{var}[\hat{\mu}_X] &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} (N - |k|) R_{XX}(k) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) R_{XX}(k). \end{aligned}$$

Let us now prove the third assertion. Let $\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{Z}, u_{N,k} = \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) R_{XX}(k) \mathbf{1}_{-(N-1), N-1}(k)$. Then we get $\text{var}[\hat{\mu}_X] = \frac{1}{N} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{N,k}$. Let us now apply the dominated convergence theorem to the sequence $u_{N,k}$. First, let us check that the assumptions of the theorem hold:

- $u_{N,k} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} R_{XX}(k)$;
- $\forall N \in \mathbb{N}^*, |u_{N,k}| \leq |R_{XX}(k)| \in l^1(\mathbb{Z})$.

Then the theorem proves that:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} N \text{var}[\hat{\mu}_X] = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{N,k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lim_{N \rightarrow +\infty} u_{N,k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_{XX}(k) = S_{XX}(0).$$

Therefore $\text{var}[\hat{\mu}_X] \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{N} S_{XX}(0)$. □

5.2.2 Estimation of the autocovariance function

From now on, we consider that the mean μ_X of the WSS process X_t is known, so without loss of generality we will assume that it is zero.

Definition 25 (Empirical autocovariance function). *Let X_t be a centered WSS process of ACF R_{XX} . Given N observed samples $X_1 \dots X_N$, the empirical ACF is defined as $\forall 0 \leq k < N$,*

$$\widehat{R}_{XX}(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} X_{t+k} \overline{X_t}, \quad (3.12)$$

$\forall |k| \geq N, \widehat{R}_{XX}(k) = 0$, and $\forall k \in \mathbb{Z}, \widehat{R}_{XX}(-k) = \overline{\widehat{R}_{XX}(k)}$.

Proposition 19 (Properties of the empirical autocovariance function). *Let X_t be a centered WSS process of ACF R_{XX} . Then:*

- *the empirical ACF \widehat{R}_{XX} is positive semi-definite;*
- *\widehat{R}_{XX} is an asymptotically unbiased estimator: $\mathbb{E}[\widehat{R}_{XX}(k)] = \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) R_{XX}(k)$;*
- *if in addition X_t is a strong linear process (which means that $X_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k Z_{t-k}$ where $h_k \in l^1(\mathbb{Z})$ and $Z_t \sim \text{IID}(0, \sigma^2)$ with $\mathbb{E}[|Z_t|^4] < +\infty$), then \widehat{R}_{XX} is mean square consistent: $\forall k \in \mathbb{Z}, \text{var}[\widehat{R}_{XX}(k)] = O\left(\frac{1}{N}\right)$.*



5.3 Estimation of the power spectral density

We can now address the estimation of the power spectral density of a WSS process.

5.3.1 Periodogram

Definition 26 (Periodogram and Correlogram). *Let $N \in \mathbb{N}^*$. Let X_t be a centered WSS process such that $R_{XX} \in l^1(\mathbb{Z})$. Its periodogram is defined as:*

$$\hat{S}_{P,XX}(\nu) = \frac{1}{N} \left| \sum_{t=1}^N X_t e^{-2i\pi\nu t} \right|^2. \quad (3.13)$$

Its correlogram is defined as:

$$\hat{S}_{C,XX}(\nu) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \widehat{R}_{XX}(k) e^{-2i\pi\nu k}, \quad (3.14)$$

where $\forall |k| \geq N$, $\widehat{R}_{XX}(k) = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\widehat{R}_{XX}(-k) = \overline{\widehat{R}_{XX}(k)}$, and $\forall k \in [0, N]$, $\widehat{R}_{XX}(k)$ is either:

- the unbiased estimator of the ACF:

$$\widehat{R}_{XX}(k) = \frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^{N-k} X_{t+k} \overline{X_t};$$

- or the biased (positive semi-definite) estimator of the ACF introduced in equation (3.12):

$$\widehat{R}_{XX}(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} X_{t+k} \overline{X_t}.$$

Proposition 20 (Relationship between the periodogram and the correlogram). *If \widehat{R}_{XX} is the biased estimator of the ACF, then the periodogram and the correlogram are equal: $\hat{S}_{P,XX}(\nu) = \hat{S}_{C,XX}(\nu)$.*

Proof of Proposition 20. First, we have

$$\begin{aligned} \hat{S}_{P,XX}(\nu) &= \frac{1}{N} \left| \sum_{t=1}^N X_t e^{-2i\pi\nu t} \right|^2 \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{t_1=1}^N X_{t_1} e^{-2i\pi\nu t_1} \right) \left(\sum_{t_2=1}^N \overline{X_{t_2}} e^{+2i\pi\nu t_2} \right) \\ &= \sum_{t_1=1}^N \sum_{t_2=1}^N \frac{1}{N} X_{t_1} \overline{X_{t_2}} e^{-2i\pi\nu(t_1-t_2)}. \end{aligned}$$

Let $k = t_1 - t_2$. With $\widehat{R}_{XX}(k)$ defined as in (3.12), we then get

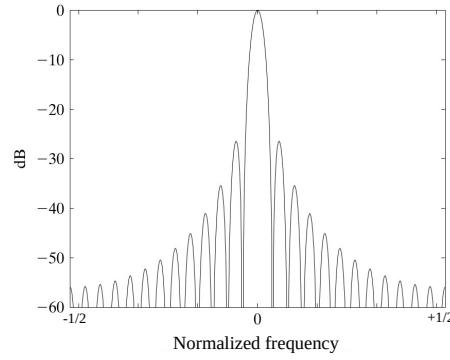
$$\begin{aligned} \hat{S}_{P,XX}(\nu) &= \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \widehat{R}_{XX}(k) e^{-2i\pi\nu k} \\ &= \hat{S}_{C,XX}(\nu). \end{aligned}$$

□

Bias analysis of the periodogram

Proposition 21. *The mean of the periodogram defined in equation (3.13) is*

$$\mathbb{E}[\hat{S}_{P,XX}(\nu)] = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) R_{XX}(k) e^{-2i\pi\nu k}. \quad (3.15)$$

Figure 3.8: Fejer kernel, $W_B(\nu)/W_B(0)$, for $N = 25$.

Proof of Proposition 21. Let us consider the correlogram formulation of the periodogram in equation (3.14); we get

$$\mathbb{E}[\hat{S}_{P,XX}(\nu)] = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \mathbb{E}[\widehat{R}_{XX}(k)] e^{-2i\pi\nu k}$$

where $\widehat{R}_{XX}(k)$ is the biased estimator of the ACF, so that $\mathbb{E}[\widehat{R}_{XX}(k)] = \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) R_{XX}(k)$ as shown in Proposition 19. We thus get equation (3.15). \square

Let us define the window function

$$w_B(k) = 1 - \frac{|k|}{N} \text{ if } |k| < N \text{ and } w_B(k) = 0 \text{ if } |k| \geq N, \quad (3.16)$$

whose expression appears in equation (3.15). Its Fourier transform is known as the *Fejer kernel*:

Proposition 22 (Fejer kernel). *The Fourier transform $W_B(\xi)$ of the window function $w_B(k)$ defined in (3.16) is called the Fejer kernel. Its closed-form expression is*

$$W_B(\xi) = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin(\pi\xi N)}{\sin(\pi\xi)} \right|^2.$$

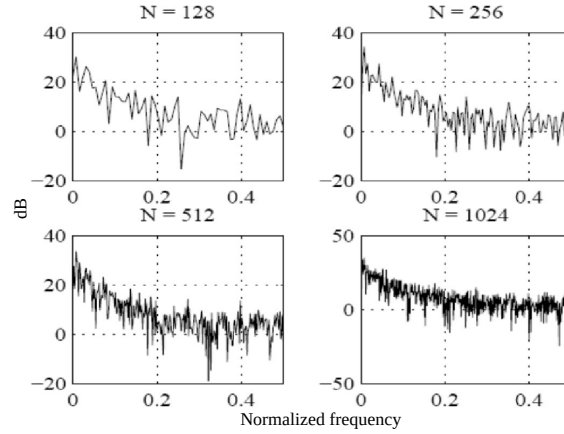
Proof of Proposition 22. Let $w_R(k) = \mathbf{1}_{[0, N-1]}(k)$. Then $w_B(k) = \frac{1}{N} (w_R * \tilde{w}_R)(k)$, therefore $W_B(\xi) = \frac{1}{N} |W_R(\xi)|^2$. However, $W_R(\xi) = \sum_{t=0}^{N-1} e^{-2i\pi\xi t} = \frac{1-e^{-2i\pi\xi N}}{1-e^{-2i\pi\xi}}$. Thus $|W_R(\xi)| = \left| \frac{\sin(\pi\xi N)}{\sin(\pi\xi)} \right|$. Therefore $W_B(\xi) = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin(\pi\xi N)}{\sin(\pi\xi)} \right|^2$. \square

Then equation (3.15) can be rewritten in the following form:

$$\mathbb{E}[\hat{S}_{P,XX}(\nu)] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_B(k) R_{XX}(k) e^{-2i\pi\nu k} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S_{XX}(\nu - \xi) W_B(\xi) d\xi. \quad (3.17)$$

Equation (3.17) shows that $\mathbb{E}[\hat{S}_{P,XX}(\nu)]$ can be seen as a local weighted average of the PSD, due to the convolution it with the Fejer kernel. The Fejer kernel is represented in Figure 3.8. Considering equation (3.17), it permits us to interpret the bias of the periodogram as follows:

- the main lobe of the kernel induces smearing (its width is $\frac{2}{N}$);
- the side lobes of the kernel induce leakage;
- there is a loss of spectral resolution (as defined in Section 3 page 13).

Figure 3.9: Periodogram of a WSS process for $N = 128, 256, 512, 1024$.

However, when $N \rightarrow +\infty$, the following proposition shows that the periodogram is asymptotically unbiased:

Proposition 23. *If $R_{XX} \in l^1(\mathbb{Z})$, then $\hat{S}_{P,XX}(\nu)$ is asymptotically unbiased: $\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[\hat{S}_{P,XX}(\nu)] = S_{XX}(\nu)$.*

Proof of Proposition 23. Let $\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{Z}, u_{N,k} = \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) R_{XX}(k) e^{-2i\pi\nu k} \mathbf{1}_{-(N-1), N-1}(k)$. Then equation (3.15) yields $\mathbb{E}[\hat{S}_{P,XX}(\nu)] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{N,k}$. Let us now apply the dominated convergence theorem to the sequence $u_{N,k}$. First, let us check that the assumptions of the theorem hold:

- $\forall k \in \mathbb{Z}, u_{N,k} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} R_{XX}(k) e^{-2i\pi\nu k}$;
- $\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{Z}, |u_{N,k}| \leq |R_{XX}(k)| \in l^1(\mathbb{Z})$.

Then the theorem proves that:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[\hat{S}_{P,XX}(\nu)] = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_{N,k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lim_{N \rightarrow +\infty} u_{N,k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_{XX}(k) e^{-2i\pi\nu k} = S_{XX}(\nu).$$

□

Variance analysis of the periodogram Analyzing the variance of the periodogram is a more difficult problem than analyzing its bias. The following theorem is thus given without proof.

Proposition 24 (Variance analysis of the periodogram of a stationary Gaussian process). *Let Z_t be a complex white Gaussian noise, and let*

$$X_t = \sum_{k=1}^{\infty} h_k Z_{t-k} \quad (3.18)$$

where $(h_k)_k \in l^1(\mathbb{N}^*)$. Then $\forall \nu, \xi \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \text{cov}[\hat{S}_{P,XX}(\nu), \hat{S}_{P,XX}(\xi)] = \begin{cases} S_{XX}(\nu)^2 & \text{if } \nu = \xi \\ 0 & \text{if } \nu \neq \xi \end{cases} \quad (3.19)$$

Proposition 24 shows that $\hat{S}_{P,XX}$ is not even asymptotically mean square consistent, since $\lim_{N \rightarrow +\infty} \text{var}[\hat{S}_{P,XX}(\nu)] = S_{XX}(\nu)^2 \neq 0$ (as illustrated in Figure 3.9).

5.3.2 Blackman-Tukey method

In order to reduce the variance of the periodogram, the Blackman-Tukey method consists in truncating the empirical ACF. Let X_t be a centered WSS process such that $R_{XX} \in l^1(\mathbb{Z})$. With $M < N$, the Blackman-Tukey estimator of its PSD is defined as:

$$\hat{S}_{BT,XX}(\nu) = \sum_{k=-M+1}^{M-1} \widehat{R}_{XX}(k) e^{-2i\pi\nu k}.$$

The Blackman-Tukey estimator satisfies the following properties (*cf.* [SM05, chap. 2, sec. 2.5]):

- if $M \rightarrow +\infty$, $\hat{S}_{BT,XX}$ is asymptotically unbiased;
- if $M/N \rightarrow 0$, $\text{var}(\hat{S}_{BT,XX}(\nu)) = O\left(\frac{M}{N}\right) \rightarrow 0$;
- in particular, if $M = N^\alpha$ with $0 < \alpha < 1$, $\hat{S}_{BT,XX}$ is mean square consistent.

The Blackman-Tukey method offers a trade-off between the spectral resolution (which is $O(\frac{1}{M})$) and the variance (which is $O(\frac{M}{N})$).

This approach can be further improved by introducing a symmetric window w of support $[-(M-1), (M-1)]$ with $M < N$, such that $w(0) = 1$. The Blackman-Tukey estimator can then be seen as a windowed periodogram:

$$\hat{S}_{BT,XX}(\nu) = \sum_{k=-(M-1)}^{M-1} w(k) \widehat{R}_{XX}(k) e^{-2i\pi\nu k}.$$

Then

$$\hat{S}_{BT,XX}(\nu) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{S}_{P,XX}(\nu - \xi) W(\xi) d\xi \quad (3.20)$$

where $W(\xi) = \sum_{k=-(M-1)}^{M-1} w_k e^{-2i\pi\xi k} \in \mathbb{R}$: the Blackman-Tukey method performs a local weighted average of the spectrum. Note that if in addition $w(k)$ is positive semidefinite, then $W(\xi) \geq 0$, therefore $\hat{S}_{BT,XX}(\nu) \geq 0 \forall \nu \in \mathbb{R}$.

The choice of the window's length is based on a trade-off between spectral resolution and variance. The selection of the window's shape is based on a trade-off between smearing and leakage effects (see Figure 1.8 page 16).

Bibliography

- [Bil79] P. Billingsley. *Probability and Measure*. J. Wiley, 1979.
- [Kay88] S. M. Kay. *Modern Spectral Estimation, Theory and Application*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1988.
- [Kay93] S. M. Kay. *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1993.
- [Mar87] L. Marple. *Digital Spectral Analysis with Applications*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1987.
- [SM05] P. Stoica and R.L. Moses. *Spectral Analysis of Signals*. Pearson Prentice Hall, 2005.
- [SN87] P. Stoica and A. Nehorai. On stability and root location of linear prediction models. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 35(4):582–584, 1987.
- [SS89] T. Söderström and P. Stoica, editors. *System Identification*. Prentice Hall International, London, England, 1989.



Contexte académique } sans modifications

Par le téléchargement ou la consultation de ce document, l'utilisateur accepte la licence d'utilisation qui y est attachée, telle que détaillée dans les dispositions suivantes, et s'engage à la respecter intégralement.

La licence confère à l'utilisateur un droit d'usage sur le document consulté ou téléchargé, totalement ou en partie, dans les conditions définies ci-après, et à l'exclusion de toute utilisation commerciale.

Le droit d'usage défini par la licence autorise un usage dans un cadre académique, par un utilisateur donnant des cours dans un établissement d'enseignement secondaire ou supérieur et à l'exclusion expresse des formations commerciales et notamment de formation continue. Ce droit comprend :

- le droit de reproduire tout ou partie du document sur support informatique ou papier,
- le droit de diffuser tout ou partie du document à destination des élèves ou étudiants.

Aucune modification du document dans son contenu, sa forme ou sa présentation n'est autorisée.

Les mentions relatives à la source du document et/ou à son auteur doivent être conservées dans leur intégralité.

Le droit d'usage défini par la licence est personnel et non exclusif. Tout autre usage que ceux prévus par la licence est soumis à autorisation préalable et expresse de l'auteur : sitedepedago@telecom-paristech.fr

Appendix A

Représentations de Fourier des suites

Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux suites numériques en temps discret : nous introduisons d'abord la représentation par *Transformée de Fourier Discrète* (TFD) des suites N -périodiques (en anglais, *Discrete Fourier Transform* (DFT)), puis la représentation par *Transformée de Fourier à Temps Discret* (TFTD) des suites non périodiques, qu'elles soient à décroissance rapide, sommables ou de carré sommable. L'application principale visée par ces modes de représentation est la *convolution discrète*.

1 Suites périodiques et TFD

Proposition 25. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. L'espace $\mathcal{S}_N(\mathbb{Z})$ des suites périodiques x_n telles que $x_{n+N} = x_n \forall n \in \mathbb{Z}$ est un espace vectoriel hermitien (de dimension N) pour le produit scalaire

$$(x, y)_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_n^*$$

Proposition 26. Pour tout $0 \leq k \leq N-1$, l'exponentielle $e_n^k = e^{2i\pi \frac{k}{N}n}$ est N -périodique, et la famille $\{e^k\}_{0 \leq k \leq N-1}$ forme une base orthonormée de $\mathcal{S}_N(\mathbb{Z})$.

Proof. On vérifie que $e_{n+N}^k = e_n^k$, $(e^k, e^l) = 0$ si $k \neq l$, et $\|e^k\|_N^2 = 1$. □

Proposition 27 (Définition et propriétés de la TFD). La TFD d'une suite $x_n \in \mathcal{S}_N(\mathbb{Z})$ est définie par les coefficients de cette suite dans la base $\{e^k\}_{0 \leq k \leq N-1}$:

$$X_k = (x, e^k)_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2i\pi \frac{k}{N}n}$$

1. La suite X_k appartient à $\mathcal{S}_N(\mathbb{Z})$, et $\|X\| = \|x\|_N$ (où $\|X\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |X_k|^2$ correspond à la norme hermitienne associée au produit scalaire canonique (\cdot, \cdot) , et $\|x\|_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x_n|^2$ correspond à la norme associée au produit scalaire $(\cdot, \cdot)_N$).

2. La suite x_n est entièrement déterminée par $X_k \in \mathcal{S}_N(\mathbb{Z})$, et vérifie $x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{+2i\pi \frac{k}{N}n}$.

Proof. Puisque les coefficients X_k sont les coordonnées de x dans la base orthonormée $\{e^k\}_{0 \leq k \leq N-1}$, x se décompose sous la forme $x = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^k$, et de plus $\|x\|_N = \|X\|$. □



Corollaire A.1 (Théorème de Parseval). *La TFD définit une isométrie surjective de $\mathcal{S}_N(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire une transformation unitaire sur $\mathcal{S}_N(\mathbb{Z})$ (à un facteur N près). En particulier, pour tout $x \in \mathcal{S}_N(\mathbb{Z})$, $\|X\|^2 = \|x\|_N^2$. De plus, pour tous x et $y \in \mathcal{S}_N(\mathbb{Z})$, $(X, Y) = (x, y)_N$.*

1.1 Propriétés algébriques

Définition A.1 (produit de convolution circulaire discret). *Soient h_n et x_n deux suites de $\mathcal{S}_N(\mathbb{Z})$. Alors la suite $y_n = (h \circledast x)_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} h_m x_{n-m} \forall n \in \mathbb{Z}$ est également N -périodique.*

Proposition 28 (Diagonalisation de l'opérateur de convolution). *Soit $h \in \mathcal{S}_N(\mathbb{Z})$. Alors la famille des exponentielles e^k pour $0 \leq k \leq N-1$ forme une base orthonormée de vecteurs propres de l'homomorphisme*

$$\begin{aligned} T : \mathcal{S}_N(\mathbb{Z}) &\rightarrow \mathcal{S}_N(\mathbb{Z}) \\ x &\mapsto h \circledast x \end{aligned}$$

associés aux valeurs propres $H_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-2i\pi \frac{k}{N} n}$, qui définissent la TFD de la suite h_n .

Proof. On vérifie que pour tout $0 \leq k \leq N-1$, $h \circledast e^k = H_k e^k$. De plus, on sait déjà que la famille $\{e^k\}_{0 \leq k \leq N-1}$ forme une base orthonormée de $\mathcal{S}_N(\mathbb{Z})$. \square

Proposition 29. *Si $y = h \circledast x$ où $h \in \mathcal{S}_N(\mathbb{Z})$ et $x \in \mathcal{S}_N(\mathbb{Z})$, alors $Y_k = H_k X_k$. Réciproquement, si $z = xy$ où $x \in \mathcal{S}_N(\mathbb{Z})$ et $y \in \mathcal{S}_N(\mathbb{Z})$, alors $Z = NX \circledast Y$, c'est-à-dire $Z_k = \sum_{l=0}^{N-1} X_{k-l} Y_l$.*

Proof. Comme $x = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^k$, $y = h \circledast x = \sum_{k=0}^{N-1} X_k h \circledast e^k = \sum_{k=0}^{N-1} X_k H_k e^k$, ce qui signifie précisément que la suite $X_k H_k$ est la TFD de y . La réciproque peut être démontrée de la même façon. \square

Remarque A.1 (Interprétation matricielle). On définit les vecteurs $\mathbf{x} = [x_0 \dots x_{N-1}]^T$ et $\hat{\mathbf{x}} = [X_0 \dots X_{N-1}]^T$. La TFD peut alors s'écrire sous la forme matricielle suivante : $\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^H \mathbf{x}$, où les coefficients de la matrice \mathbf{W} sont $W_{nk} = e^{+2i\pi \frac{k}{N} n}$. On remarque qu'à un facteur N près, la matrice \mathbf{W} est unitaire : $\mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^H$. On retrouve ainsi l'expression de la TFD inverse : $\mathbf{x} = \mathbf{W} \hat{\mathbf{x}}$.

Par ailleurs, le produit de convolution circulaire discret $y = h \circledast x$ peut aussi s'écrire sous forme matricielle : $y = \frac{1}{N} \mathbf{H} \mathbf{x}$, où \mathbf{H} est une matrice circulante :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_0 & h_{N-1} & \dots & h_1 \\ h_1 & h_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & h_{N-1} \\ h_{N-1} & \dots & h_1 & h_0 \end{bmatrix}$$

On remarque que \mathbf{H} se décompose sous la forme $\mathbf{H} = \sum_{n=0}^{N-1} h_n \mathbf{J}^{N-n}$, où

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

est une matrice de permutation circulaire : $\mathbf{J}^N = \mathbf{I}$. Il est facile de vérifier que les valeurs propres de \mathbf{J} sont $e^{2i\pi \frac{k}{N}}$, pour $0 \leq k \leq N-1$, associées aux vecteurs propres e^k . Ainsi \mathbf{J} peut être diagonalisée sous la forme

$J = \frac{1}{N} \mathbf{W} \mathbf{D} \mathbf{W}^H$, où $\mathbf{D} = \text{diag}(1, \dots, e^{2i\pi \frac{N-1}{N}})$. Par conséquent, la matrice \mathbf{H} peut être à son tour diagonalisée sous la forme $\mathbf{H} = \mathbf{W} \hat{\mathbf{H}} \mathbf{W}^H$, où $\hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h_n \mathbf{D}^{-n} = [H_0 \dots H_{N-1}]^T$. On remarque en particulier que la matrice circulante \mathbf{H} est diagonalisable dans la base \mathbf{W} , indépendante des coefficients h_n . Enfin, en multipliant l'équation $\mathbf{y} = \frac{1}{N} \mathbf{H} \mathbf{x}$ à gauche par $\frac{1}{N} \mathbf{W}^H$, on obtient $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{x}}$. On retrouve ainsi la relation $Y_k = H_k X_k$.

Proposition 30. Les propriétés suivantes se vérifient facilement sur des suites de $S_N(\mathbb{Z})$:

Linéarité : la TFD de la suite $ax_n + by_n$ est $aX_k + bY_k$.

Suite réelle : si $x_n \in \mathbb{R} \forall 0 \leq n \leq N-1$ alors X_k est à symétrie hermitienne, c'est-à-dire $X_{-k} = X_k^* \forall 0 \leq k \leq N-1$.

De plus, $X_0 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \in \mathbb{R}$, et si N est pair, $X_{N/2} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x_n \in \mathbb{R}$.

Suite à symétrie hermitienne : si $x_{-n} = x_n^* \forall 0 \leq n \leq N-1$, alors $X_k \in \mathbb{R} \forall 0 \leq k \leq N-1$.

Retard : si $y_n = x_{n-n_0}$, alors $Y_k = e^{-i2\pi \frac{k}{N} n_0} X_k$ (modulation fréquentielle).

Modulation : si $y = e^{ik_0} x$, alors $Y_k = X_{k-k_0}$ (décalage fréquentiel).

1.2 L'algorithme Fast Fourier Transform (FFT)

Le calcul direct d'une TFD requiert normalement de l'ordre de N^2 multiplications. Pour réduire cette complexité, Cooley et Tukey ont proposé en 1965 un algorithme rapide pour calculer une TFD, baptisé *Fast Fourier Transform* (FFT). Il s'agit d'une méthode de type "diviser pour régner" (*divide and conquer*). Supposons par exemple que N est un multiple de 2 : $N = 2M$. Alors on peut écrire

$$\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{M-1} x_{2m} e^{-2i\pi \frac{k}{N} (2m)} + \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{M-1} x_{2m+1} e^{-2i\pi \frac{k}{N} (2m+1)} \\ &= \frac{1}{2M} \sum_{m=0}^{M-1} x_{2m} e^{-2i\pi \frac{k}{M} m} + \frac{1}{2M} e^{-2i\pi \frac{k}{N}} \sum_{m=0}^{M-1} x_{2m+1} e^{-2i\pi \frac{k}{M} m} \\ &= \frac{1}{2} (X_k^0 + e^{-2i\pi \frac{k}{N}} X_k^1) \end{aligned}$$

où X_k^0 est la TFD d'ordre M de la suite x_{2m} , et X_k^1 est la TFD d'ordre M de la suite x_{2m+1} . Plus particulièrement, si N est une puissance de 2, cette équation peut être appliquée récursivement pour calculer la TFD d'ordre N de la suite x_n . Notons alors $C(N)$ le coût de calcul de la TFD d'ordre N par cette méthode (c'est-à-dire le nombre total de multiplications). On vérifie que $C(N) = 2C(N/2) + N$. On pose alors $f(k) = \frac{C(2^k)}{2^k}$, et on remarque que $f(k) = f(k-1) + 1$ et $f(0) = 0$, donc $f(k) = k$. Par conséquent, $C(N) = N \log_2(N)$. L'algorithme FFT réduit donc la complexité de la TFD de N^2 à $N \log_2(N)$ multiplications.

2 Suites non périodiques et TFTD

Soit e^ν la suite $e_n^\nu = e^{2i\pi \nu n}$. Si $\nu = \frac{k}{N}$, alors la suite e^ν est N -périodique ; si $\nu \notin \mathbb{Q}$, elle est non périodique. Comme $e^\nu = e^{\nu+1}$, on se restreindra à l'intervalle $\nu \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$. Plus précisément, on notera $I = (-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ l'intervalle fondamental (dont on ne spécifie pas s'il est ouvert ou fermé). Cette notation sera utilisée pour désigner les espaces de fonctions $L^p(I)$. On notera de plus $\bar{I} = [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$ l'intervalle fermé, qui sera utile pour désigner les espaces de fonctions $C_{\text{per}}^p(\bar{I})$.

Remarque A.2. Une fonction de l'espace $C_{\text{per}}^p(\bar{I})$ a des valeurs partout ; $X(\nu) \in C_{\text{per}}^p(\bar{I})$ signifie que $\forall k \leq p$, $X^{(k)}(-\frac{1}{2}) = X^{(k)}(+\frac{1}{2})$. En toute rigueur, il faudrait travailler sur le cercle unité ou sur le tore. En revanche une fonction de l'espace $L^p(I)$ n'est définie que *presque partout*.

L'idée d'étendre la TFD en posant $X(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-2i\pi \nu n}$ est séduisante, mais ne peut faire sens que lorsque la suite x_n décroît suffisamment rapidement lorsque $|n| \rightarrow +\infty$. On pourra ainsi envisager plusieurs cas :

- les suites sommables ($x_n \in l^1(\mathbb{Z})$),
- les suites à décroissance rapide,
- les suites d'énergie finie ($x_n \in l^2(\mathbb{Z})$).

On distinguera par ailleurs les propriétés algébriques de cette transformée de ses propriétés analytiques.

2.1 Propriétés algébriques

Définition A.2 (Convolution discrète $l^1(\mathbb{Z}) \overset{d}{\star} l^\infty(\mathbb{Z})$). Le produit de convolution discret de deux suites $h_n \in l^1(\mathbb{Z})$ et $x_n \in l^\infty(\mathbb{Z})$ est défini pour tout $n \in \mathbb{Z}$ par $(h \overset{d}{\star} x)_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m x_{n-m}$.

Proposition 31 (Diagonalisation de l'opérateur de convolution). Soit $h \in l^1(\mathbb{Z})$. Alors les exponentielles e^ν pour $\nu \in \bar{I}$ sont vecteurs propres de l'homomorphisme

$$\begin{aligned} T : l^\infty(\mathbb{Z}) &\rightarrow l^\infty(\mathbb{Z}) \\ x &\mapsto h \overset{d}{\star} x \end{aligned}$$

associés aux valeurs propres $H(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-2i\pi\nu n}$, qui définissent la TFTD de la suite h_n .

Proof. On vérifie que $\forall \nu \in \bar{I}, h \overset{d}{\star} e^\nu = H(\nu) e^\nu$. □

Remarque A.3. Dire que la famille $\{e^\nu\}_{\nu \in \bar{I}}$ forme une base de $l^\infty(\mathbb{Z})$ n'aurait aucun sens.

Proposition 32. Les propriétés suivantes se vérifient facilement sur des suites de $l^1(\mathbb{Z})$:

Linéarité : la TFTD de la suite $ax_n + by_n$ est $aX(\nu) + bY(\nu)$.

Suite réelle : si $x_n \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{Z}$ alors $X(\nu)$ est à symétrie hermitienne, c'est-à-dire $X(-\nu) = X(\nu)^* \forall \nu \in \bar{I}$. De plus, $X(0) \in \mathbb{R}$, et $X(1/2) \in \mathbb{R}$.

Suite à symétrie hermitienne : si $x_{-n} = x_n^* \forall n \in \mathbb{Z}$, alors $X(\nu) \in \mathbb{R} \forall \nu \in \bar{I}$.

Retard : si $y_n = x_{n-n_0}$, alors $Y(\nu) = e^{-i2\pi n_0 \nu} X(\nu)$ (modulation fréquentielle).

Modulation : si $y_n = e^{i\nu_0 n} x_n$, alors $Y(\nu) = X(\nu - \nu_0)$ (décalage fréquentiel).

2.2 Propriétés analytiques

2.2.1 Suites sommables

Remarque A.4. Si $x_n \in l^1(\mathbb{Z})$, alors

- $x_n \in l^\infty(\mathbb{Z})$;
- $x_n \rightarrow 0$ quand $|n| \rightarrow +\infty$;
- $x_n \in l^2(\mathbb{Z})$ et $\|x\|_{l^2(\mathbb{Z})} \leq \sqrt{\|x\|_{l^\infty(\mathbb{Z})} \|x\|_{l^1(\mathbb{Z})}}$.

Proposition 33 (Propriétés de la TFTD dans $l^1(\mathbb{Z})$). Soit une suite $x_n \in l^1(\mathbb{Z})$. On définit sa TFTD $X(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-2i\pi\nu n}$, et pour tout $N \in \mathbb{N}$, le polynôme trigonométrique $X_N(\nu) = \sum_{n=-N}^N x_n e^{-i2\pi\nu n}$, obtenu en tronquant cette série à l'ordre N .

1. La suite $\{X_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $X \in C_{\text{per}}^0(\bar{I})$.



2. La suite x_n est entièrement déterminée par X , et vérifie $x_n = \int_I X(\nu) e^{+2i\pi\nu n} d\nu$.

Proof.

1. Comme $X_{N+p} - X_N = \sum_{N < |n| \leq N+p} x_n e^{-2i\pi\nu n}$, on obtient

$$\|X_{N+p} - X_N\|_{L^\infty(I)} \leq \sum_{N < |n| \leq N+p} |x_n| \rightarrow 0 \text{ quand } N \rightarrow +\infty,$$

car $x \in l^1(\mathbb{Z})$ (il s'agit du reste d'une série de Cauchy). La suite $\{X_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy dans l'espace $L^\infty(I)$, qui est complet. Donc elle converge vers X dans $L^\infty(I)$, ce qui signifie qu'elle converge uniformément vers X . Toutes les fonctions X_N étant continues et de période 1, leur limite uniforme est également continue et de période 1.

2. $\int_I X(\nu) e^{+2i\pi\nu n} d\nu = \int_I \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} x_m e^{-2i\pi\nu m} \right) e^{+2i\pi\nu n} d\nu$. Comme cette double somme est absolument convergente ($\int_I \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} |x_m| \right) d\nu = \|x\|_{l^1(\mathbb{Z})} < +\infty$), le théorème de Fubini prouve que $\int_I X(\nu) e^{+2i\pi\nu n} d\nu = \sum_{m \in \mathbb{Z}} x_m \int_I e^{2i\pi\nu(n-m)} d\nu = \sum_{m \in \mathbb{Z}} x_m \delta(n-m) = x_n$.

□

Proposition 34 (Régularité). Soit $p \in \mathbb{N}$. Si la suite $(n^p x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ appartient à $l^1(\mathbb{Z})$, alors $X \in C_{\text{per}}^p(\bar{I})$, et sa dérivée $\frac{d^p X(\nu)}{d\nu^p}$ est la limite uniforme de la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-2i\pi n)^p x_n e^{-2i\pi\nu n}$.

Proof. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la dérivée d'ordre p de la fonction $\nu \mapsto x_n e^{-2i\pi\nu n}$ est $(-2i\pi n)^p x_n e^{-2i\pi\nu n}$. De plus, $\forall \nu \in I$, $|x_n (-2i\pi n)^p e^{-2i\pi\nu n}| \leq (2\pi n)^p |x_n|$, et la suite $(2\pi n)^p |x_n|$ est sommable. Le théorème de dérivation sous le signe somme prouve alors que la fonction $X(\nu)$ est p fois dérivable, et que sa dérivée d'ordre p est $\frac{d^p X(\nu)}{d\nu^p} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-2i\pi n)^p x_n e^{-2i\pi\nu n}$.

De plus, on peut remarquer que la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-2i\pi n)^p x_n e^{-2i\pi\nu n}$ est uniforme en ν . En effet,

$\left| \frac{d^p X(\nu)}{d\nu^p} - \sum_{|n| \leq N} (-2i\pi n)^p x_n e^{-2i\pi\nu n} \right| \leq \sum_{|n| > N} (2\pi n)^p |x_n| \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$ comme reste d'une série convergente, indépendamment de ν . Donc la dérivée $\frac{d^p X(\nu)}{d\nu^p}$ est continue et de période 1 comme limite uniforme de fonctions continues et de période 1.

□

Exemple 1. Les exemples suivants sont issus de problèmes classiques de traitement du signal :

Filtre à réponse impulsionnelle finie : Si x_n est une suite à support fini $[-N, +N]$, alors $X(\nu) = \sum_{n=-N}^N x_n e^{-2i\pi\nu n}$ est un polynôme trigonométrique, appartenant à l'espace $C_{\text{per}}^\infty(\bar{I})$.

Filtres autorégressifs stables d'ordre 1 : Si $x_n = a^n \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(n)$ avec $|a| < 1$, $X(\nu) = \frac{1}{1 - ae^{-i2\pi\nu}}$ (filtre AR1 causal). Si $x_n = -a^n \mathbf{1}_{]-\infty, -1]}(n)$ avec $|a| > 1$, $X(\nu) = \frac{1}{1 - ae^{-i2\pi\nu}}$ (filtre AR1 anticausal).

Remarque A.5. On a démontré que pour tout $p \in \mathbb{N}$, si x_n appartient à l'ensemble des suites telles que $n^p x_n \in l^1(\mathbb{Z})$, alors $X \in C_{\text{per}}^p(\bar{I})$. En revanche il s'agit d'une inclusion stricte : on ne sait pas caractériser simplement l'espace image de cet ensemble par la TFTD.

2.2.2 Séries de Fourier

Dans cette section, on rappelle brièvement quelques résultats sur les séries de Fourier, qui peuvent être interprétées comme la transformation réciproque de la TFTD.

Remarque A.6. Propriétés des espaces $L^1(I)$, $L^2(I)$ et $L^\infty(I)$:

- Si $X \in L^2(I)$, alors $X \in L^1(I)$ et $\|X\|_{L^1(I)} \leq \|X\|_{L^2(I)}$.
- Si $X \in L^\infty(I)$, alors $X \in L^2(I)$ et $\|X\|_{L^2(I)} \leq \|X\|_{L^\infty(I)}$.
- Si X est continue par morceaux sur \bar{I} , alors $X \in L^\infty(I) \subset L^2(I) \subset L^1(I)$ et $\|X\|_{L^1(I)} \leq \|X\|_{L^2(I)} \leq \|X\|_{L^\infty(I)}$.

Proposition 35 (Propriétés des séries de Fourier). Soit une fonction $X(v) \in L^1(I)$. On définit ses coefficients de Fourier $x_n = \int_I X(v) e^{+2i\pi v n} dv$.

1. Si $X(v)$ est C^1 par morceaux sur \bar{I} , alors en tout point v où la fonction X est continue, la TFTD de la suite $x_n = \int_I X(v) e^{+2i\pi v n} dv$ converge simplement vers $X(v)$.
2. Plus particulièrement, si $X(v) \in C_{\text{per}}^0(\bar{I})$ et si il existe un ensemble fini de K points $-\frac{1}{2} \leq v_0 < \dots < v_{K-1} < \frac{1}{2}$ tels que $X(v)$ est C^1 , et C^2 par morceaux, sur chaque intervalle ouvert borné par deux points consécutifs de l'ensemble $\{v_0, \dots, v_K\}$ (avec $v_K = v_0 + 1$), alors la TFTD de la suite $x_n = \int_I X(v) e^{+2i\pi v n} dv$ converge uniformément vers $X(v)$.

Proof.

1. Prouvons la convergence simple vers $X(v)$:

$$\begin{aligned} X(v) - \sum_{n=-N}^N x_n e^{-2i\pi v n} &= X(v) - \sum_{n=-N}^N \left(\int_I X(\xi) e^{+2i\pi \xi n} d\xi \right) e^{-2i\pi v n} \\ &= X(v) - \int_I X(\xi) \sum_{n=-N}^N e^{2i\pi(\xi-v)n} d\xi \\ &= \int_I (X(v) - X(\xi)) \frac{\sin(\pi(2N+1)(\xi-v))}{2 \sin(\pi(\xi-v))} d\xi \\ &= \Im m \left(\int_I \frac{X(v+\xi) - X(v)}{2 \sin(\pi \xi)} e^{-i2\pi(N+1/2)\xi} d\xi \right) \end{aligned}$$

Or $\forall v \in \bar{I}$, la fonction $\xi \mapsto \frac{X(v) - X(v+\xi)}{2 \sin(\pi \xi)}$ est continue par morceaux, et appartient donc à $L^1(I)$. Donc le membre de droite tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$ (résultat sur les séries de Fourier).

2. La proposition suivante prouve que sous ces hypothèses $x_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $x_n \in l^1(\mathbb{Z})$, et la série qui définit la TFTD converge uniformément vers $X(v)$.

□

Proposition 36 (Régularité). Soit $p \in \mathbb{N}$ et $X(v) \in L^1(I)$. Si $p > 0$, on suppose que $X(v) \in C_{\text{per}}^{p-1}(\bar{I})$.

1. Si $X(v)$ est C^p par morceaux sur \bar{I} , alors $x_n = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$.
2. Plus particulièrement, si il existe un ensemble fini de K points $-\frac{1}{2} \leq v_0 < \dots < v_{K-1} < \frac{1}{2}$ tels que $X(v)$ est C^p , et C^{p+1} par morceaux, sur chaque intervalle ouvert borné par deux points consécutifs de l'ensemble $\{v_0, \dots, v_K\}$ (avec $v_K = v_0 + 1$), alors $x_n = O\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$.

Proof.

1. En effectuant p intégrations par parties, on prouve que

$$(-i2\pi n)^p x_n = \int_I X^{(p)}(v) e^{+i2\pi v n} dv.$$

Comme $X^{(p)} \in L^1(I)$, le membre de droite tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$ (résultat sur les séries de Fourier).

2. On découpe ensuite l'intervalle I en K segments :

$$(-i2\pi n)^p x_n = \sum_{k=0}^{K-1} \int_{v_k}^{v_{k+1}} X^{(p)}(v) e^{+i2\pi v n} dv$$

En effectuant une intégration par parties sur chaque segment, on obtient finalement

$$(-i2\pi n)^{p+1} x_n = \sum_{k=0}^{K-1} X^{(p)}(v_k^+) e^{+i2\pi v_k n} - X^{(p)}(v_{k+1}^-) e^{+i2\pi v_{k+1} n} + \int_{v_k}^{v_{k+1}} X^{(p+1)}(v) e^{+i2\pi v n} dv.$$

Par conséquent, $|(2\pi n)^{p+1} x_n| \leq \|X^{(p+1)}(v)\|_{L^1(I)} + 2K\|X^{(p)}(v)\|_{L^\infty(I)}$.

□

Exemple 2. Les exemples suivants sont issus de problèmes classiques de traitement du signal :

Filtre passe-bas : Soit $v_0 \in]0, \frac{1}{2}[$. Les coefficients de Fourier de la fonction $X(v) = \mathbf{1}_{(-v_0, v_0)}(v)$ pour $v \in I$ sont $x_n = \frac{\sin(2\pi v_0 n)}{\pi n}$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$ et $x_0 = 2v_0$.

Filtre dérivateur : Les coefficients de Fourier de la fonction $X(v) = 2i\pi v$ pour $v \in I$ sont $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$ et $x_0 = 0$.

Filtre dérivateur retardé d'1/2 échantillon : Les coefficients de Fourier de la fonction $X(v) = 2i\pi v e^{-i\pi v}$ pour $v \in I$ sont $x_n = \frac{(-1)^n}{\pi(n-\frac{1}{2})} \in l^1(\mathbb{Z})$.

Remarque A.7. On a démontré que pour tout $p \in \mathbb{N}$, si $X(v) \in C_{\text{per}}^{p-1}(\bar{I})$ est C^p par morceaux sur \bar{I} , alors x_n appartient à l'ensemble des suites telles que $x_n = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$. En revanche il s'agit d'une inclusion stricte : on ne sait pas caractériser simplement l'espace image de cet ensemble.

2.2.3 Suites à décroissance rapide

Nous introduisons dans cette section une restriction *stable* de la TFTD, aux suites à décroissance rapide.

Définition A.3. Une suite x_n est à décroissance rapide si et seulement si $\forall p \in \mathbb{N}$, $n^p x_n \rightarrow 0$ quand $|n| \rightarrow +\infty$.

Exemple 3. Suites à support fini, filtres autorégressifs stables, gaussiennes ($x_n = e^{-n^2}$).

Remarque A.8. Dans ce qui suit l'ensemble des suites à décroissance rapide sera dénoté $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$, et l'ensemble $C_{\text{per}}^\infty(\bar{I})$ sera dénoté $\mathcal{S}_{\text{per}}(\bar{I})$, par analogie avec l'espace de Schwartz.

Corollaire A.2. La TFTD définit une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ dans $\mathcal{S}_{\text{per}}(\bar{I})$, et les dérivées successives $\frac{d^p X(v)}{dv^p}$ d'une fonction $X \in \mathcal{S}_{\text{per}}(\bar{I})$ s'expriment comme la limite uniforme de la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-2i\pi n)^p x_n e^{-2i\pi v n}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2.2.4 Suites d'énergie finie

Remarque A.9. Nous introduisons dans cette section une extension *stable* de la TFTD, dans l'espace de Hilbert $l^2(\mathbb{Z})$. On rappelle que :

- Si $x \in l^1(\mathbb{Z})$, alors $x_n \in l^2(\mathbb{Z})$ et $\|x\|_{l^2(\mathbb{Z})} \leq \sqrt{\|x\|_{l^\infty(\mathbb{Z})} \|x\|_{l^1(\mathbb{Z})}}$.
- Si X est continue par morceaux sur \bar{I} , alors $X \in L^2(I)$ et $\|X\|_{L^2(I)} \leq \|X\|_{L^\infty(I)}$.

Proposition 37 (Rappel sur l'espace de Hilbert $L^2(I)$). *L'espace $L^2(I)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(X, Y) = \int_I X(v)Y(v)^* dv$, et la famille $(e^n)_{n \in \mathbb{Z}}$, où $e^n(v) = e^{-2i\pi v n}$, forme une base hilbertienne de cet espace.*

Corollaire A.3 (Propriétés des séries de Fourier dans $L^2(I)$). *Soient une fonction $X \in L^2(I)$, et la suite $x_n = \int_I X(v) e^{+2i\pi v n} dv$.*

1. La suite x_n appartient à $l^2(\mathbb{Z})$, et $\|x_n\|_{l^2(\mathbb{Z})} = \|X\|_{L^2(I)}$.
2. La fonction X est définie presque partout par la suite x_n , et vérifie $X(v) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-2i\pi v n}$ dans $L^2(I)$.

Proof.

1. La suite x_n correspond aux coefficients de la fonction $X \in L^2(I)$ dans la base hilbertienne $(e^n)_{n \in \mathbb{Z}}$. En particulier, $\|x_n\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \|X\|_{L^2(I)} < +\infty$.
2. Comme le système orthonormal $(e^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est total dans $L^2(I)$, la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-2i\pi n \nu}$ converge vers $X(\nu)$ dans $L^2(I)$.

□

Corollaire A.4 (Propriétés de la TFTD dans $\ell^2(\mathbb{Z})$). Soient $x_n \in \ell^2(\mathbb{Z})$, et $X_N(\nu) = \sum_{n=-N}^N x_n e^{-i2\pi n \nu}$ le polynôme trigonométrique obtenu en tronquant la TFTD de x_n .

1. La suite $\{X_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite X dans l'espace $L^2(I)$, et $\|X\|_{L^2(I)} = \|x_n\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$.
2. La suite x_n est entièrement déterminée par $X(\nu)$, et vérifie $x_n = \int_I X(\nu) e^{+i2\pi n \nu} d\nu$.

Proof.

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\|X_{N+p} - X_N\|_{L^2(I)}^2 = \sum_{N < |n| \leq N+p} |x_n|^2 \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$, puisque $x_n \in \ell^2(\mathbb{Z})$ (il s'agit du reste d'une série de Cauchy). Ainsi la suite X_N est une suite de Cauchy dans $L^2(I)$; elle possède donc une limite X dans $L^2(I)$. En particulier, $\|X\|_{L^2(I)}^2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \|X_N\|_{L^2(I)}^2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N |x_n|^2 = \|x\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2$.
2. $X(\nu)$ est une fonction de $L^2(I)$. Comme la famille $(e^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(I)$, la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{x}_n e^n$, où $\tilde{x}_n = (X, e^n) = \int_I X(\nu) e^{+i2\pi n \nu} d\nu$ converge vers X dans $L^2(I)$. Comme $X(\nu)$ est également la somme de la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^n$, l'unicité de la décomposition de $X(\nu)$ dans la base hilbertienne $(e^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ prouve que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $x_n = \tilde{x}_n = \int_I X(\nu) e^{+i2\pi n \nu} d\nu$.

□

Remarque A.10. Si $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$, alors $x_n \rightarrow 0$ quand $|n| \rightarrow +\infty$. En revanche, on ne peut pas dire que la fonction $X(\nu)$ est continue dans le cas général. On ne peut même pas écrire $X(\nu) = (x, e^\nu)_{\ell^2(\mathbb{Z})}$, car $\forall \nu \in \bar{I}$, la suite e^ν n'appartient pas à $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Corollaire A.5 (Théorème de Parseval). La TFTD définit une isométrie surjective de $\ell^2(\mathbb{Z})$ dans $L^2(I)$, c'est-à-dire une transformation unitaire entre deux espaces de Hilbert distincts. En particulier, pour tout $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$, $\|X\|_{L^2(I)} = \|x\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$. De plus, pour tous x et $y \in \ell^2(\mathbb{Z})$, $(X, Y)_{L^2(I)} = (x, y)_{\ell^2(\mathbb{Z})}$.

Proof. Il reste à démontrer l'identité du produit scalaire, qui découle de l'identité polaire : pour tous x et $y \in \ell^2(\mathbb{Z})$,

$$\begin{aligned} (X, Y)_{L^2(I)} &= \frac{1}{4} (\|X + Y\|_{L^2(I)}^2 - \|X - Y\|_{L^2(I)}^2) + i \frac{1}{4} (\|iX + Y\|_{L^2(I)}^2 - \|iX - Y\|_{L^2(I)}^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|x + y\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2 - \|x - y\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2) + i \frac{1}{4} (\|ix + y\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2 - \|ix - y\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}^2) \\ &= (x, y)_{\ell^2(\mathbb{Z})}. \end{aligned}$$

□

3 Convolution discrète

Proposition 38. Si h et u sont deux suites de supports finis de longueurs respectives N et M , alors la suite $y = h \star^d u$ possède également un support fini, de longueur $N + M - 1$. Si $h \in \ell^1(\mathbb{Z})$, le produit de convolution $y = h \star^d u$ est bien défini dans les cas suivants :



- Si $u = e^v$, alors $y = H(v)u$.
- Si u est une suite N -périodique, alors la suite y est également N -périodique. De plus, $Y_k = H\left(\frac{k}{N}\right)U_k$.
- Si $u \in l^\infty(\mathbb{Z})$, alors la suite y appartient à $l^\infty(\mathbb{Z})$ et $\|y\|_\infty \leq \|h\|_1 \|u\|_\infty$ (pas de relation équivalente dans le domaine fréquentiel en général).
- Si $u \in l^1(\mathbb{Z})$, alors la suite y appartient à $l^1(\mathbb{Z})$ et $\|y\|_1 \leq \|h\|_1 \|u\|_1$ avec $Y(v) = H(v)U(v)$ dans $C^0_{\text{per}}(\bar{I})$.
- Si $u \in l^2(\mathbb{Z})$, alors la suite y appartient à $l^2(\mathbb{Z})$ et $\|y\|_2 \leq \|h\|_1 \|u\|_2$ avec $Y(v) = H(v)U(v)$ dans $L^2(I)$.

Réciproquement, si $x \in l^2(\mathbb{Z})$ et $y \in l^2(\mathbb{Z})$, alors le produit $z = xy$ appartient à $l^1(\mathbb{Z})$, et $Z = X \otimes Y$, c'est-à-dire $Z(v) = \int_I X(v - \xi)Y(\xi)d\xi$.

Proof. Nous démontrons ici le résultat sur la TFTD du produit de deux suites de $l^2(\mathbb{Z})$. On a $Z(v) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n y_n e^{-2i\pi v n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (x_{-n} e^{+2i\pi v n}) (y_{-n}^*)^*$. Or la TFTD de la suite $x_{-n} e^{+2i\pi v n}$ est $\xi \mapsto X(v - \xi)$, et la TFTD de la suite y_{-n}^* est $\xi \mapsto Y(\xi)^*$. On applique alors le théorème de Parseval : $\sum_{n \in \mathbb{Z}} (x_{-n} e^{+2i\pi v n}) (y_{-n}^*)^* = \int_I X(v - \xi)Y(\xi)d\xi$. D'où le résultat. \square



Appendix B

Représentations de Fourier des fonctions

1 Transformée de Fourier des fonctions non périodiques

Pour un signal à temps continu non périodique $x(t)$, on a envie de définir la TFTC $X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-2i\pi ft} dt$ (en anglais, *Continuous Time Fourier Transform* (CTFT)), où toutes les fréquences f sont possibles ($f \in \mathbb{R}$). Ainsi les fonctions de base sont les exponentielles $e^f = e^{2i\pi ft}$ pour tout $f \in \mathbb{R}$. Mais $\int_{\mathbb{R}} |e^f(t)|^2 dt = +\infty$: aucune de ces fonctions n'est d'énergie finie ! Néanmoins il est facile de vérifier que la TFTC est bien définie pour des fonctions bornées, à support compact (non périodiques), et si besoin, des fonctions C^∞ à support compact dans \mathbb{R} . Plus généralement, nous aborderons les cas suivants :

- les fonctions sommables ($x(t) \in L^1(\mathbb{R})$),
- l'espace de Schwartz ($x(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$),
- les fonctions d'énergie finie ($x(t) \in L^2(\mathbb{R})$).

Nous distinguerons par ailleurs les propriétés algébriques de cette transformée de ses propriétés analytiques.

On notera $C_0^0(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues, bornées, et qui tendent vers 0 à l'infini, et plus généralement, pour tout $p \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $C_0^p(\mathbb{R})$ désignera l'espace des fonctions $x \in C^p(\mathbb{R})$ telles que $x^{(k)} \in C_0^0(\mathbb{R}) \forall 0 \leq k \leq p$. On notera également $C_c^p(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de $C^p(\mathbb{R})$ à support compact, qui est inclus dans $C_0^p(\mathbb{R})$. Commençons par rappeler une propriété fondamentale des espaces de Lebesgue, que nous utiliserons à plusieurs reprises dans ce chapitre.

Définition B.1 (Translatée d'une fonction). Soient x une fonction et τ un réel. La τ -translatée de x est notée x_τ et définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, x_\tau(t) = x(t - \tau).$$

On remarque que si $x \in L^p(\mathbb{R})$ alors toutes ses translatées sont dans $L^p(\mathbb{R})$ et ont la même norme ($\|x_\tau\|_p = \|x\|_p$).

Théorème B.1 (Continuité de la translation). Si $x \in L^p(\mathbb{R})$ avec $p < +\infty$, alors la fonction T de \mathbb{R} dans $L^p(\mathbb{R})$ qui est définie par

$$T(u) = (v \mapsto x_u(v) = x(v - u))$$

est une fonction uniformément continue. Autrement dit, la fonction T associe à u la u -translatée de x .

Proof.

Soit $\epsilon > 0$. Soit $y \in C_c^0(\mathbb{R})$ une fonction continue à support compact qui vérifie

$$\begin{cases} \text{Supp}(y) \subset [-A, A], A > 0 \\ \|x - y\|_p \leq \epsilon \end{cases}$$



Un tel choix est possible en raison de la densité des fonctions continues à support compact dans tous les espaces $L^p(\mathbb{R})$ avec $p < +\infty$. Mais y est uniformément continue (car continue à support compact) donc

$$\exists \eta > 0, \forall u, v, |u - v| < \eta \Rightarrow |y(u) - y(v)| \leq \frac{\epsilon}{(4A)^{\frac{1}{p}}}$$

De plus, on peut choisir $\eta < A$ (car si la propriété est vraie pour η_0 elle est vraie pour tout η vérifiant $0 < \eta \leq \eta_0$). Si u et v sont proches à η près ($|u - v| < \eta$), alors $\forall t \in \mathbb{R}, |y(t) - y(t - (v - u))| \leq \epsilon$ et si t n'est pas dans l'intervalle $I = [-2A, 2A]$ alors $|y(t) - y(t - (u - v))| = 0$ car $t \notin [-A, A]$ et $t - (v - u) \notin [-A, A]$.

Montrons que $\|y_u - y_v\|_p \leq \epsilon$:

$$\|y_u - y_v\|_p^p = \|y - y_{v-u}\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |y(t) - y(t - (v - u))|^p dt + \int_{\mathbb{R}} |y(t) - y(t - (v - u))|^p dt \leq \frac{\epsilon^p}{4A} \mu(I) + 0 = \epsilon^p.$$

Pour conclure,

$$\begin{aligned} \forall u, v, |u - v| \leq \eta &\Rightarrow \|x_u - x_v\|_p = \|x_u - y_u + y_u - y_v + y_v - x_v\|_p \\ &\leq \|x_u - y_u\|_p + \|y_u - y_v\|_p + \|y_v - x_v\|_p \leq \epsilon + \epsilon + \epsilon. \end{aligned}$$

□

1.1 Propriétés algébriques

Proposition 39 (Convolution $L^1(\mathbb{R}_t) \star L^\infty(\mathbb{R}_t)$). *Le produit de convolution de deux fonctions $h(t) \in L^1(\mathbb{R}_t)$ et $x(t) \in L^\infty(\mathbb{R}_t)$, défini pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $(h \star x)(t) = \int_{\mathbb{R}} h(\tau)x(t - \tau)d\tau$, est une fonction continue et bornée.*

Proof. La fonction $y = h \star x$ est essentiellement bornée car $\|y\|_\infty \leq \|x\|_\infty \|h\|_1 < +\infty$. De plus,

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, |y(t + \varepsilon) - y(t)| = \left| \int_{\mathbb{R}} (h(t + \varepsilon - \tau) - h(t - \tau))x(\tau)d\tau \right| \leq \|x\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |h(t + \varepsilon) - h(t)| du.$$

Or d'après le théorème B.1, la translation temporelle définit un opérateur continu de $L^1(\mathbb{R}_t)$. Par conséquent, $|y(t + \varepsilon) - y(t)| \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, ce qui prouve la continuité de la fonction y . □

Proposition 40 (Diagonalisation de l'opérateur de convolution). *Soit $h \in L^1(\mathbb{R}_t)$. Alors les exponentielles e^f pour $f \in \mathbb{R}$ sont vecteurs propres de l'homomorphisme*

$$\begin{array}{ccc} T : L^\infty(\mathbb{R}_t) & \rightarrow & L^\infty(\mathbb{R}_t) \\ x & \mapsto & h \star x \end{array}$$

associés aux valeurs propres $H(f) = \int_{\mathbb{R}} h(t)e^{-2\pi f t} dt$, qui définissent la TFTC de la fonction $h(t)$.

Proof. On vérifie que $\forall f \in \mathbb{R}, h \star e^f = H(f)e^f$. □

Proposition 41. *Les propriétés suivantes se vérifient facilement pour des fonctions de $L^1(\mathbb{R}_t)$:*

Linéarité : la TFTC de la fonction $ax(t) + by(t)$ est $aX(f) + bY(f)$.

Fonction réelle : si $x(t) \in \mathbb{R} \forall t \in \mathbb{R}$ alors $X(f)$ est à symétrie Hermitienne, c'est-à-dire $X(-f) = X(f)^* \forall f \in \mathbb{R}$.
De plus, $X(0) \in \mathbb{R}$.

Fonction à symétrie Hermitienne : si $x(-t) = x(t)^* \forall t \in \mathbb{R}$, alors $X(f) \in \mathbb{R} \forall f \in \mathbb{R}$.

Retard : si $y(t) = x(t - t_0)$, alors $Y(f) = e^{-i2\pi f t_0} X(f)$ (modulation fréquentielle).

Modulation : si $y = e^{f_0 t} x$, alors $Y(f) = X(f - f_0)$ (décalage fréquentiel).

Changement d'échelle : si $y(t) = x\left(\frac{t}{a}\right)$, alors $Y(f) = |a|X(af)$ (changement d'échelle).



1.2 Propriétés analytiques

1.2.1 Fonctions sommables

Remarque B.1. Contrairement à ce qui avait été observé dans le cas discret, les fonctions de $L^1(\mathbb{R}_t)$ ne sont pas nécessairement dans $L^\infty(\mathbb{R}_t)$ ni dans $L^2(\mathbb{R}_t)$, et ne tendent pas nécessairement vers 0 à l'infini.

Lemme B.1. Soit $x(t)$ une fonction de la variable réelle, à valeurs complexes. Si x est limite uniforme d'une suite x_n de fonctions continues et tendant vers zéro à l'infini, x est également continue et elle tend également vers zéro à l'infini.

Proof. La continuité de la limite x découle de la convergence uniforme. Par ailleurs, pour tout $\varepsilon > 0$, on trouvera n tel que $|x(t) - x_n(t)| < \varepsilon/2$ pour tout t et un t_0 tel que $|t| > t_0 \Rightarrow |x_n(t)| < \varepsilon/2$. Par conséquent, $|t| > t_0 \Rightarrow |x(t)| \leq |x_n(t)| + \varepsilon/2 < \varepsilon$ et x tend bien vers zéro à l'infini. \square

Proposition 42 (Propriétés de la TFTC dans $L^1(\mathbb{R}_t)$). Soit une fonction $x(t) \in L^1(\mathbb{R}_t)$. On définit sa TFTC $X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2i\pi f t} dt$, que l'on notera aussi $X = \mathcal{F}(x)$. Alors $X \in C_0^0(\mathbb{R}_f)$, ce qui signifie que X est continue, bornée ($\|X\|_\infty \leq \|x\|_1$) et tend vers 0 à l'infini.

Proof.

- La majoration $\|X\|_\infty \leq \|x\|_1$ découle de la définition de la TFTC.
- Si la fonction x est de la forme $x = \mathbf{1}_{[a,b]}$, où $[a, b]$ est un intervalle borné, on a simplement :

$$X(f) = \int_a^b e^{-2i\pi f t} dt = \frac{e^{-2i\pi a f} - e^{-2i\pi b f}}{2i\pi f}$$

et l'on voit que X est continue et qu'elle tend vers zéro à l'infini. Il en sera encore de même de toute combinaison linéaire d'indicatrices d'intervalles, c'est-à-dire de toute fonction en escalier. Soit maintenant $x \in L^1(\mathbb{R}_t)$ quelconque. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier x_ε telle que $\int_{\mathbb{R}} |x(t) - x_\varepsilon(t)| dt < \varepsilon$. Par conséquent, $\forall f \in \mathbb{R}$,

$$|X(f) - X_\varepsilon(f)| = \left| \int_{\mathbb{R}} (x(t) - x_\varepsilon(t)) e^{-2i\pi f t} dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |x(t) - x_\varepsilon(t)| dt < \varepsilon$$

ce qui prouve qu'il existe une suite (x_n) de fonctions en escalier telles que la suite (X_n) converge uniformément vers X . On conclue donc au moyen du Lemme B.1. \square

Remarque B.2. Contrairement à la TFTD, la TFTC d'une fonction sommable n'est pas toujours inversible.

Proposition 43 (Décroissance et régularité). Soit $p \in \mathbb{N}$. Si la fonction $t^p x(t)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}_t)$, alors $X \in C_0^p(\mathbb{R}_f)$, et pour tout $k \leq p$, $\frac{d^k X(f)}{df^k} = \int_{\mathbb{R}} (-2i\pi t)^k x(t) e^{-2i\pi f t} dt$ est la TFTC de la fonction $(-2i\pi t)^k x(t)$.

Proof. Pour tout $k \leq p$, la fonction $f \mapsto x(t) e^{-2i\pi f t}$ est C^k , et sa dérivée d'ordre k est $(-2i\pi t)^k x(t) e^{-2i\pi f t}$. De plus, $\forall f \in \mathbb{R}$, $|x(t)(-2i\pi t)^k e^{-2i\pi f t}| \leq |2\pi t|^k |x(t)|$, et la fonction $|2\pi t|^k |x(t)|$ est sommable. Les théorèmes de continuité et de dérivation sous le signe somme prouvent alors que la fonction $X(f)$ est C^k , et que sa dérivée d'ordre k est

$$\frac{d^k X(f)}{df^k} = \int_{\mathbb{R}} (-2i\pi t)^k x(t) e^{-2i\pi f t} dt,$$

c'est-à-dire la TFTC de la fonction $(-2i\pi t)^k x(t) \in L^1(\mathbb{R}_t)$. Donc $\forall k \leq p$, $\frac{d^k X(f)}{df^k} \in C_0^0(\mathbb{R}_f)$, ce qui prouve que $X \in C_0^p(\mathbb{R}_f)$. \square

Proposition 44 (Régularité et décroissance). Soit $p \in \mathbb{N}$ et $x(t) \in L^1(\mathbb{R}_t)$. Si $p > 0$, on suppose que $x(t) \in C^{p-1}(\mathbb{R})$.

1. Si $x(t)$ est C^p par morceaux sur \mathbb{R} et si toutes les dérivées de x jusqu'à l'ordre p sont dans $L^1(\mathbb{R}_t)$, alors $X(f) = o\left(\frac{1}{|f|^p}\right)$, et $\forall 0 \leq k \leq p$, la TFTC de $x^{(k)}(t)$ est la fonction $(i2\pi f)^k X(f)$.
2. Plus particulièrement, si il existe un ensemble fini de K points $t_0 < \dots < t_{K-1}$ tels que $x(t)$ est C^p , et C^{p+1} par morceaux, sur chaque intervalle ouvert délimité par deux points consécutifs de l'ensemble $\{-\infty, t_0, \dots, t_{K-1}, +\infty\}$, et si toutes les dérivées de x jusqu'à l'ordre $p+1$ sont dans $L^1(\mathbb{R}_t)$, alors $X(f) = O\left(\frac{1}{|f|^{p+1}}\right)$.

Proof. La preuve ci-dessous s'appuie sur le résultat suivant (utile pour les intégrations par parties) : si une fonction $x \in L^1(\mathbb{R}_t)$ admet une dérivée $\frac{dx}{dt} \in L^1(\mathbb{R}_t)$, alors $x(t) \in C_0^0(\mathbb{R})$. En effet, remarquons d'abord que si x est dérivable, $x \in C^0(\mathbb{R})$. On peut alors écrire $x(t) = x(0) + \int_0^t \frac{dx}{du} du$. Comme $\frac{dx}{dt} \in L^1(\mathbb{R}_t)$, on en déduit que $x(t)$ admet une limite en $+\infty$ et en $-\infty$. Mais comme $x \in L^1(\mathbb{R}_t)$, cette limite est nécessairement nulle, donc $x(t) \in C_0^0(\mathbb{R}_t)$.

1. En effectuant k intégrations par parties, on prouve que

$$(i2\pi f)^k X(f) = \int_{\mathbb{R}} x^{(k)}(t) e^{-i2\pi f t} dt.$$

Ainsi la fonction $(i2\pi f)^k X(f)$ est la TFTC de $x^{(k)}(t)$. De plus, pour $k = p$, comme $x^{(p)} \in L^1(\mathbb{R}_t)$, la TFTC $(i2\pi f)^p X(f)$ tend vers 0 quand $|f| \rightarrow +\infty$, donc $X(f) = o\left(\frac{1}{|f|^p}\right)$.

2. On découpe ensuite l'intervalle \mathbb{R} en $K+1$ segments :

$$(i2\pi f)^p X(f) = \int_{-\infty}^{t_0} x^{(p)}(t) e^{-i2\pi f t} dt + \int_{t_{K-1}}^{+\infty} x^{(p)}(t) e^{-i2\pi f t} dt + \sum_{k=1}^{K-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} x^{(p)}(t) e^{-i2\pi f t} dt.$$

En effectuant une intégration par parties sur chaque segment, on obtient finalement

$$\begin{aligned} (i2\pi f)^{p+1} X(f) &= -x^{(p)}(t_0^-) e^{-i2\pi f t_0} + \int_{t_0}^{t_1} x^{(p+1)}(t) e^{-i2\pi f t} dt \\ &+ x^{(p)}(t_{K-1}^+) e^{-i2\pi f t_{K-1}} + \int_{t_{K-1}}^{+\infty} x^{(p+1)}(t) e^{-i2\pi f t} dt \\ &+ \sum_{k=1}^{K-1} x^{(p)}(t_{k-1}^+) e^{-i2\pi f t_{k-1}} - x^{(p)}(t_k^-) e^{-i2\pi f t_k} + \int_{t_{k-1}}^{t_k} x^{(p+1)}(t) e^{-i2\pi f t} dt. \end{aligned}$$

Par conséquent, $|(2\pi f)^{p+1} X(f)| \leq \|x^{(p+1)}(t)\|_1 + 2K \|x^{(p)}(t)\|_\infty$.

□

Exemple 4. Les exemples suivants sont issus de problèmes classiques de traitement du signal :

Filtre à réponse impulsionnelle finie : Si $x(t)$ est une fonction bornée à support fini $[-T, +T]$, alors $X(f) = \int_{-T}^T x(t) e^{-i2\pi f t} dt$ appartient à l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Filtres passe-bas du premier ordre : Si $x(t) = e^{-\alpha t} \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(t)$ avec $\alpha > 0$, $X(f) = \frac{1}{\alpha + i2\pi f}$ (filtre causal). Si $x(t) = -e^{-\alpha t} \mathbf{1}_{]-\infty, 0]}(t)$ avec $\alpha < 0$, $X(f) = \frac{1}{\alpha + i2\pi f}$ (filtre anticausal).

Transformée de Fourier d'une porte : La TFTC de la fonction $x(t) = \mathbf{1}_{(-t_0, t_0)}(t)$, où $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$, est $X(f) = \frac{\sin(2\pi t_0 f)}{\pi f}$ pour $f \in \mathbb{R}^*$ et $X(0) = 2t_0$.

Remarque B.3. On a démontré que pour tout $p \in \mathbb{N}$, si $x(t)$ appartient à l'ensemble des fonctions telles que $t^p x(t) \in L^1(\mathbb{R}_t)$, alors $X \in C_0^p(\mathbb{R})$. En revanche il s'agit d'une inclusion stricte : on ne sait pas caractériser simplement l'espace image de cet ensemble par la TFTC. Réciproquement, on a démontré que pour tout $p \in \mathbb{N}$, si $x(t) \in C^{p-1}(\mathbb{R})$ est C^p par morceaux sur \mathbb{R} , et si toutes les dérivées de x jusqu'à l'ordre p sont dans $L^1(\mathbb{R}_t)$, alors $X(f)$ appartient à l'ensemble des fonctions telles que $X(f) = o\left(\frac{1}{|f|^p}\right)$. Il s'agit là encore d'une inclusion stricte, et on ne sait pas caractériser simplement l'espace image de cet ensemble par la TFTC.



1.2.2 Inversion de la TFTC dans $L^1(\mathbb{R})$

Définition B.2 (Un couple de fonctions auxiliaires). On définit, pour tout $n \geq 1$ entier, les deux fonctions H_n et h_n par

$$H_n(t) = e^{-\frac{|t|}{n}} \text{ et } h_n(t) = n \frac{2}{1 + 4\pi^2 n^2 t^2}$$

Remarquer que H_n est une homothétie de H_1 ($H_n(nt) = H_1(t)$) et h_n est presque une homothétie de h_1 ($h_n(t) = n h_1(nt)$) sauf qu'elle est multipliée par un facteur qui assure que l'intégrale de h_n est égale à celle de h_1 .

Proposition 45 (propriétés des fonctions auxiliaires). On a les propriétés suivantes

1. $\forall n \geq 1, \forall 1 \leq p \leq +\infty, h_n \in L^p(\mathbb{R})$ et $H_n \in L^p(\mathbb{R})$.
2. $\mathcal{F}(H_n) = h_n$.
3. $\int_{\mathbb{R}} h_n(t) dt = 1$.
4. Si $x \in L^p(\mathbb{R})$ alors $h_n \star x$ tend vers x dans $L^p(\mathbb{R})$.
5. Si $x \in L^1(\mathbb{R}_t)$ alors $\forall t \in \mathbb{R}, (x \star h_n)(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) H_n(f) e^{2i\pi f t} df$
6. Si x est une fonction bornée et si elle est continue en un point t alors $(x \star h_n)(t)$ tend vers $x(t)$ quand n tend vers l'infini.

Remarque B.4.

Noter que l'on ne dit pas encore que la transformée de Fourier de h_n est H_n . Cela sera une conséquence du théorème d'inversion dont les fonctions h_n et H_n sont des éléments de démonstration.

Si cela était vrai (et ça l'est) la propriété numéro (v) serait un théorème d'inversion appliqué à la fonction $x \star h_n$. Le théorème d'inversion sera donc prouvé en passant par un de ses cas particuliers qu'est la propriété (v).

Proof.

1. Il est clair que h_n et H_n sont à la fois bornées et dans $L^1(\mathbb{R})$. Soit une fonction $x \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ on va montrer qu'elle est dans tous les espaces $L^p(\mathbb{R})$ avec $1 < p < +\infty$. Pour cela, il suffit de montrer que la fonction $|x|^p$ est dans $L^1(\mathbb{R})$. Mais $|x|^p = |x| |x|^{p-1}$. La fonction $|x|$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ et la fonction $|x|^{p-1}$ est bornée. Leur produit est donc bien dans $L^1(\mathbb{R})$.

2.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \mathcal{F}(H_n)(f) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-u} e^{-2i\pi n f u} du \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-u} e^{-2i\pi n f u} du + \int_{-\infty}^0 e^{+u} e^{-2i\pi n f u} du \\ &= \left[\frac{e^{-(1+2i\pi n f)u}}{-(1+2i\pi n f)} \right]_0^{+\infty} + \left[\frac{e^{(1-2i\pi n f)u}}{1-2i\pi n f} \right]_{-\infty}^0 \\ &= \frac{1}{1+2i\pi n f} + \frac{1}{1-2i\pi n f} \\ &= \frac{2}{1+4\pi^2 n^2 f^2} = \frac{1}{n} h_n(f) \end{aligned}$$

$$3. \int_{\mathbb{R}} h_n(t) dt = \int_{\mathbb{R}} h_1(u) du = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{1+4\pi^2 u^2} du = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+v^2} dv = \frac{1}{\pi} [\arctan]_{-\infty}^{+\infty} = 1.$$

4. Remarquons d'abord que $x \star h_n$ est le produit de convolution d'une fonction de $L^p(\mathbb{R})$ par une fonction de $L^1(\mathbb{R})$, c'est donc également une fonction de $L^p(\mathbb{R})$. On a

$$(x \star h_n)(t) - x(t) = \int_{\mathbb{R}} h_n(\tau) (x(t - \tau) - x(t)) d\tau = \int_{\mathbb{R}} h_1(u) \left(x\left(t - \frac{u}{n}\right) - x(t) \right) du$$

L'inégalité de Jensen (inégalité de convexité) nous permet d'affirmer que

$$|(x \star h_n)(t) - x(t)|^p \leq \int_{\mathbb{R}} h_1(u) \left| x\left(t - \frac{u}{n}\right) - x(t) \right|^p du,$$



et après application du théorème de Fubini

$$\|x \star h_n - x\|_p^p \leq \int_{\mathbb{R}} h_1(u) \|x_{\frac{u}{n}} - x\|_p^p du$$

La suite de fonctions $u \mapsto h_1(u) \|x_{\frac{u}{n}} - x\|_p^p$ est dominée par $2^p \|x\|_p^p h_1(u)$ et tend en tout point u vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$ (par continuité de l'opérateur de translation dans $L^1(\mathbb{R})$, énoncée dans le théorème B.1). Le théorème de convergence dominée permet donc de conclure que $x \star h_n$ tend bien vers x en norme $L^p(\mathbb{R})$.

5. Commençons par vérifier que la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par

$$(t, f) \mapsto |x(t)| H_n(f)$$

est bien intégrable sur \mathbb{R}^2 . Pour cela, comme c'est une fonction positive, il suffit de vérifier que, par exemple, son intégrale par rapport à f est intégrable par rapport à t

$$\int_{\mathbb{R}} |x(t)| \left(\int_{\mathbb{R}} H_n(f) df \right) dt = \int_{\mathbb{R}} |x(t)| 2ndt = 2n \|x\|_1.$$

Ce résultat justifiera les interversions d'ordre d'intégration dans le calcul qui suit.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} X(f) H_n(f) e^{2i\pi f t} df &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} x(\tau) e^{-2i\pi f \tau} d\tau \right) H_n(f) e^{2i\pi f t} df \\ &= \int_{\mathbb{R}} x(\tau) \left(\int_{\mathbb{R}} H_n(f) e^{-2i\pi f (\tau - t)} df \right) d\tau = \int_{\mathbb{R}} x(\tau) h_n(\tau - t) d\tau = \int_{\mathbb{R}} x(\tau) h_n(t - \tau) d\tau = (x \star h_n)(t) \end{aligned}$$

6. La fonction x étant dans $L^\infty(\mathbb{R})$ et h_n dans $L^1(\mathbb{R})$, le produit de convolution $x \star h_n$ est bien défini et est continu :

$$(x \star h_n)(t) = \int_{\mathbb{R}} h_n(\tau) x(t - \tau) d\tau = \int_{\mathbb{R}} h_1(u) x\left(t - \frac{u}{n}\right) du$$

La suite de fonctions $u \mapsto h_1(u) x\left(t - \frac{u}{n}\right)$ est dominée par $\|x\|_\infty h_1(u)$ et tend en tout point u vers $x(t)$ quand $n \rightarrow +\infty$ (par continuité de x en t). Le théorème de convergence dominée permet de conclure que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x \star h_n)(t) = \int_{\mathbb{R}} h_1(u) x(t) du = x(t).$$

□

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème d'inversion. Nous commençons par définir la transformée de Fourier inverse.

Définition B.3. Si $X \in L^1(\mathbb{R}_f)$, on appelle transformée de Fourier inverse, que l'on note $\overline{\mathcal{F}}(X)$, la fonction continue définie par

$$\overline{\mathcal{F}}(X)(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{2i\pi f t} df.$$

Théorème B.2 (Le théorème d'inversion). Si $x \in L^1(\mathbb{R})$ et $X \in L^1(\mathbb{R})$, alors pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, $\overline{\mathcal{F}}(X)(t) = x(t)$. L'égalité ayant lieu presque partout on peut donc écrire

$$\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(x)) = x$$

l'égalité étant prise dans $L^1(\mathbb{R})$. En particulier, on déduit de ce qui précède que si $X \in L^1(\mathbb{R})$ alors x est égale presque partout à une fonction continue (car x est la transformée de Fourier inverse de X et que la transformée de Fourier inverse a les mêmes propriétés que la transformée de Fourier).

Corollaire B.1.

Si $x \in L^1(\mathbb{R})$ et $X = 0$ alors $x = 0$. Autrement dit, la transformée de Fourier est injective.

Proof.

La preuve du corollaire à partir du théorème est immédiate car la fonction nulle est bien $L^1(\mathbb{R})$ et sa transformée de Fourier inverse est nulle.

Passons à la preuve du théorème. On sait que $x \star h_n$ tend vers x en norme $L^1(\mathbb{R})$. On peut donc extraire une sous suite $x \star h_{n^k}$ et un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ de mesure nulle tels que

$$\forall t \notin E, \lim_{k \rightarrow \infty} (x \star h_{n^k})(t) = x(t). \quad (\text{B.1})$$

Par ailleurs, on sait que (point (v) de la proposition 45)

$$\forall t \in \mathbb{R}, (x \star h_{n^k})(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) H_{n^k}(f) e^{2i\pi f t} df$$

Mais la suite de fonctions

$$f \mapsto X(f) H_{n^k}(f) e^{2i\pi f t}$$

tend ponctuellement vers $X(f) e^{2i\pi f t}$ et est dominée par $|X|$ qui est $L^1(\mathbb{R})$ par hypothèse. Le théorème de convergence dominée permet donc de dire

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lim_{k \rightarrow \infty} (x \star h_{n^k})(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) e^{2i\pi f t} df = \overline{\mathcal{F}}(X)(t) \quad (\text{B.2})$$

En combinant (B.2) et (B.1) on obtient

$$\forall t \notin E, x(t) = \overline{\mathcal{F}}(X)(t).$$

□

1.2.3 Espace de Schwartz

D'après les résultats précédents, si l'on veut avoir une classe de fonctions stable par TFTC, il faut que chacune de ces fonctions soit à la fois très régulière et très décroissante à l'infini, ainsi sa transformée de Fourier aura aussi ces deux propriétés. Du moins, on l'espère. C'est l'intérêt de la classe de Schwartz.

Définition B.4 (La classe $\mathcal{S}(\mathbb{R})$). On dit qu'une fonction x est dans la classe de Schwartz et on note $x \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ si

1. x est C^∞ et
2. $\forall q, p \in \mathbb{N}, x^{(q)}(t) t^p \rightarrow 0$ quand $|t| \rightarrow \infty$.

Autrement dit, x est indéfiniment dérivable et le produit de x ou de n'importe laquelle de ses dérivées par un polynôme tend vers 0 à l'infini.

On a les propriétés suivantes pour la classe $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Proposition 46. Dans ce qui suit x et y sont des éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et P est un polynôme à une variable. On a

1. $x^{(q)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
2. $xy \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
3. $Px \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$



4.

$$\forall 1 \leq p \leq \infty, x \in L^p(\mathbb{R})$$

5.

$$C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

et donc $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans tous les $L^p(\mathbb{R})$ ($p < \infty$).

La classe $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est donc stable par dérivation, produit, produit par un polynôme et elle est dense dans les $L^p(\mathbb{R})$ pour p fini.

Proof.

La plupart des points sont des conséquences de la définition de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Le dernier prouve qu'elle n'est pas réduite à $\{0\}$ (un exemple typique d'élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est la gaussienne $e^{-\pi t^2}$ dont le calcul de la transformée de Fourier fait l'objet d'un exercice de TD).

1. Les dérivées de $x^{(q)}$ sont des dérivées de x .

2. Formule de Leibnitz

$$(xy)^{(q)} = \sum_{p=0}^q C_q^p x^{(p)} y^{(q-p)}.$$

3. La fonction Px vérifie trivialement les conditions nécessaires pour appartenir à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

4. Il suffit de montrer que x est à la fois dans $L^1(\mathbb{R})$ et bornée. La fonction x est bornée parce que, par définition, elle est continue et tend vers 0 à l'infini (prendre $p = 0$ dans la définition de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$). Par ailleurs, $(1 + t^2)x(t)$ tend vers 0 à l'infini et est continue, elle est donc bornée.

$$\exists M, |x(t)| \leq \frac{M}{1 + t^2}.$$

Cette dernière fonction étant $L^1(\mathbb{R})$, x l'est aussi.

5. Une fonction de $C_c^\infty(\mathbb{R})$ vérifie trivialement les conditions qu'il faut pour appartenir à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (elle est constante, égale à 0 hors d'un compact).

□

Le théorème suivant rend les fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ très agréables à manipuler dans le cadre de la théorie des distributions. Il dit que la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Théorème B.3.

Si $x \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors $X \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Proof. La fonction x étant $L^1(\mathbb{R})$, X a un sens. La proposition 43 nous dit que X est C^∞ car pour tout q entier $t^q x(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$.

De plus, on a (en appliquant les résultats des propositions 43 et 44)

$$\begin{aligned} f^p X^{(q)}(f) &= \frac{1}{(2i\pi)^p} (2i\pi f)^p X^{(q)}(f) = \frac{1}{(2i\pi)^p} (2i\pi f)^p [\mathcal{F}(t \mapsto (-2i\pi t)^q x(t))](f) \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^p} [\mathcal{F}([t \mapsto (-2i\pi t)^q x(t)]^{(p)})](f) \end{aligned}$$

Mais la fonction $[t \mapsto (-2i\pi t)^q x(t)]^{(p)}$ est une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (multiplication par un polynôme puis dérivation répétée) donc aussi une fonction de $L^1(\mathbb{R})$. Sa transformée de Fourier tend vers 0 à l'infini. Ce qui prouve que X satisfait bien aux conditions d'appartenance à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. □



Théorème B.4.

La TFTC est une bijection sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, et son inverse est $\tilde{\mathcal{F}}$.

Proof. Si $x \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors $X \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$. On peut donc appliquer le théorème d'inversion qui nous donne $x = \tilde{\mathcal{F}}(X)$. Par ailleurs, $\tilde{\mathcal{F}}(t \mapsto y(-t)) = \mathcal{F}(y)$ ce qui permet de conclure que \mathcal{F} est surjective sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (en effet, un antécédent de x est donné par $f \mapsto X(-f)$). Elle est injective parce qu'injective sur $L^1(\mathbb{R})$ qui contient $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et son inverse est $\tilde{\mathcal{F}}$ par ce qui précède. \square

1.2.4 Fonctions d'énergie finie

Nous introduisons dans cette section la définition de la TFTC dans le cadre *stable* de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}_t)$. On remarquera cependant que ce cadre *n'inclut pas* le cadre $L^1(\mathbb{R}_t)$, puisque $L^1(\mathbb{R}_t) \not\subset L^2(\mathbb{R}_t)$.

Théorème B.5. On a les propriétés suivantes

1. Si $x \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{F}(x) \in L^2(\mathbb{R})$ et $\|\mathcal{F}(x)\|_2 = \|x\|_2$.
2. Il existe une unique application linéaire de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$ qui est une isométrie et qui est égale à \mathcal{F} sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. On la notera encore \mathcal{F} .
3. $\text{Im}(\mathcal{F})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.
4. \mathcal{F} est bijective de L^2 dans lui-même.
5. On étend la fonction "transformée de Fourier inverse" $\overline{\mathcal{F}}$, à $L^2(\mathbb{R})$ de la même manière que l'on étend la transformée de Fourier. Alors $\forall x \in L^2(\mathbb{R}), \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(x)) = x$.

Proof.

1. Soit $x \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. On note \tilde{x} la fonction définie par $\tilde{x}(t) = x(-t)^*$. La fonction $y = x \star \tilde{x}$ est à la fois $L^1(\mathbb{R})$ comme convolution de deux fonctions $L^1(\mathbb{R})$ et continue de limite nulle à l'infini comme convolution de deux fonctions $L^2(\mathbb{R})$ (ces propriétés de la convolution seront énoncées dans la proposition 47 ci-dessous). Elle est donc dans tous les espaces $L^p(\mathbb{R})$, et vérifie $y(0) = \|x\|_2^2$. La fonction $(y \star h_n)(0)$ tend donc vers $y(0)$ (par continuité de y en 0) et est égale à (par le fait que $y \in L^1(\mathbb{R})$)

$$(y \star h_n)(0) = \int_{\mathbb{R}} H_n(f) Y(f) df.$$

De plus $Y = X X^* = |X|^2$ (produit de convolution de deux fonctions $L^1(\mathbb{R})$).

La suite de fonctions

$$f \mapsto H_n(f) Y(f)$$

tend de manière croissante (à f fixé) vers la fonction

$$f \mapsto Y(f) = |X(f)|^2.$$

Le théorème de convergence monotone permet de conclure que la fonction $|X|^2$ est intégrable et que son intégrale est égale à la limite des intégrales des fonctions

$f \mapsto H_n(f) Y(f)$ et on sait que

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(f) Y(f) df = (y \star h_n)(0)$$

D'où

$$X \in L^2(\mathbb{R}) \text{ et } \|X\|_2^2 = y(0) = \|x\|_2^2.$$



2. L'espace $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ contient les fonctions continues à support compact. Il est donc dense dans $L^2(\mathbb{R})$. Si $x \in L^2(\mathbb{R})$ on peut l'approcher par une suite de fonctions $x_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Comme \mathcal{F} est une isométrie, la suite $(\mathcal{F}(x_n))$ est une suite de Cauchy. Elle admet donc une limite X dans $L^2(\mathbb{R})$ (qui est complet). Il est facile de voir que cette limite ne dépend pas de la suite x_n (prendre deux suites qui convergent vers x et les mélanger). Ainsi, l'opérateur linéaire continu qui étend \mathcal{F} à $L^2(\mathbb{R})$ tout entier est uniquement défini (la limite ne dépend pas de la suite choisie) et il est bien défini (toute fonction de $L^2(\mathbb{R})$ peut-être approchée par une suite de fonctions de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$).

Par ailleurs comme la fonction $x \mapsto \|x\|_2$ est continue sur $L^2(\mathbb{R})$ et que $\|\mathcal{F}(x)\|_2 = \|x\|_2$ est vrai sur un sous-ensemble dense de $L^2(\mathbb{R})$ ($L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$) cela reste vrai sur $L^2(\mathbb{R})$ tout entier.

3. $\text{Im}(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R})$. Pour montrer sa densité il suffit de montrer que son orthogonal est réduit à $\{0\}$. Soit $w \in L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in L^2(\mathbb{R}), (w, \mathcal{F}(x)) = 0.$$

H_n est une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ et sa transformée de Fourier, h_n , est donc un élément de $\text{Im}(\mathcal{F})$. Mais le produit de H_n par une exponentielle complexe est aussi dans $L^2(\mathbb{R})$ donc toutes les translatées de h_n sont aussi dans l'image de \mathcal{F} . Ceci s'écrit

$$\forall t \in \mathbb{R}, \int_{\mathbb{R}} w(\tau) h_n(t - \tau) d\tau = w \star h_n(t) = 0.$$

Mais $w \star h_n$ tend vers w en norme 2. Donc $w = 0$ presque partout.

4. L'opérateur \mathcal{F} est une isométrie et son image est dense dans $L^2(\mathbb{R})$. Il est injectif (comme toute isométrie) et il nous reste à montrer qu'il est surjectif.

Soit $X \in L^2(\mathbb{R})$. Soit $X_n = \mathcal{F}(x_n)$ une suite qui approche X et qui se trouve dans l'image de \mathcal{F} . On a

$$\forall m, n, \|X_n - X_m\|_2 = \|\mathcal{F}(x_n - x_m)\|_2 = \|x_n - x_m\|_2.$$

La suite x_n est donc de Cauchy et admet une limite x dans $L^2(\mathbb{R})$. La continuité de la transformée de Fourier nous permet de conclure que

$$\mathcal{F}(x) = X \text{ et } X \in \text{Im}(\mathcal{F}).$$

5. L'égalité à démontrer est vraie pour les fonctions de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dont les transformées de Fourier sont $L^1(\mathbb{R})$ (théorème d'inversion). Or cet ensemble de fonctions est dense dans $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. En effet, soit $x \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Alors les fonctions $x \star h_n$ vérifient cette propriété ($\mathcal{F}(x \star h_n) = X H_n \in L^1(\mathbb{R})$ car X est bornée et H_n est $L^1(\mathbb{R})$), et $x \star h_n$ tend vers x (en norme 2 ou 1). Comme de plus $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, on en déduit que l'ensemble des fonctions de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dont les transformées de Fourier sont $L^1(\mathbb{R})$ est lui-même dense dans $L^2(\mathbb{R})$. Par continuité, l'égalité est donc vraie sur $L^2(\mathbb{R})$ tout entier.

□

Remarque B.5. Si $x \in L^2(\mathbb{R}_t)$, on ne peut pas dire que la fonction $X(f)$ est continue dans le cas général (l'intégrale qui définit la TFTC dans $L^1(\mathbb{R}_t)$ n'est même pas définie pour toutes les fonctions de $L^2(\mathbb{R}_t)$).

Corollaire B.2 (Théorème de Plancherel). *La TFTC définit une isométrie surjective sur $L^2(\mathbb{R})$. En particulier, pour tout $x \in L^2(\mathbb{R}_t)$, $\|X\|_2 = \|x\|_2$. De plus, pour tous x et $y \in L^2(\mathbb{R}_t)$, $(X, Y)_2 = (x, y)_2$.*

Proof. Il reste à démontrer l'identité du produit scalaire, qui découle de l'identité polaire : pour tous x et $y \in L^2(\mathbb{R}_t)$,

$$\begin{aligned} (X, Y)_2 &= \frac{1}{4} (\|X + Y\|_2^2 - \|X - Y\|_2^2) + i \frac{1}{4} (\|iX + Y\|_2^2 - \|iX - Y\|_2^2) \\ &= \frac{1}{4} (\|x + y\|_2^2 - \|x - y\|_2^2) + i \frac{1}{4} (\|ix + y\|_2^2 - \|ix - y\|_2^2) \\ &= (x, y)_2. \end{aligned}$$

□



2 Convolution continue

Proposition 47. Si h et u sont deux fonctions de supports finis de longueurs respectives T_1 et T_2 , alors la fonction $y = h \star u$ possède également un support fini, de longueur $T_1 + T_2$. Si $h \in L^1(\mathbb{R}_t)$, le produit de convolution $y = h \star u$ est bien défini dans les cas suivants :

- Si $u = e^f$, alors $y = H(f)u$.
- Si u est une fonction T -périodique, alors la fonction y est également T -périodique. De plus, les coefficients de Fourier des fonctions y et u vérifient $Y_k = H(f_k) U_k$ avec $f_k = \frac{k}{T}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $u \in L^\infty(\mathbb{R}_t)$, alors la fonction y appartient à $L^\infty(\mathbb{R}_t)$ et $\|y\|_\infty \leq \|h\|_1 \|u\|_\infty$ (pas de relation équivalente dans le domaine fréquentiel en général).
- Si $u \in L^1(\mathbb{R}_t)$, alors la fonction y appartient à $L^1(\mathbb{R}_t)$ et $\|y\|_1 \leq \|h\|_1 \|u\|_1$ avec $Y(f) = H(f)U(f)$ dans $C_0^0(\mathbb{R}_f)$.
- Si $u \in L^2(\mathbb{R}_t)$, alors la fonction y appartient à $L^2(\mathbb{R}_t)$ et $\|y\|_2 \leq \|h\|_1 \|u\|_2$ avec $Y(f) = H(f)U(f)$ dans $L^2(\mathbb{R}_f)$.

Par ailleurs, si $x \in L^2(\mathbb{R}_t)$ et $y \in L^2(\mathbb{R}_t)$, alors le produit $z = xy$ appartient à $L^1(\mathbb{R}_t)$, et $Z = X \star Y$, c'est-à-dire $Z(f) = \int_{\mathbb{R}} X(f - \xi)Y(\xi)d\xi$.

Réciproquement, si $h \in L^2(\mathbb{R}_t)$ et $u \in L^2(\mathbb{R}_t)$, alors la fonction $y = h \star u$ appartient à $C_0^0(\mathbb{R}_t)$ et $\|y\|_\infty \leq \|h\|_2 \|u\|_2$ avec $y = \overline{\mathcal{F}}(H U)$.

Proof. Nous démontrons ici les résultats sur le produit et la convolution de deux fonctions de $L^2(\mathbb{R}_t)$:

- On a $Z(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t)y(t)e^{-2\pi f t} dt = \int_{\mathbb{R}} (x(-t)e^{+2\pi f t})(y(-t)^*)^* dt$. Or la TFTC de la fonction $x(-t)e^{+2\pi f t}$ est $\xi \mapsto X(f - \xi)$, et la TFTC de la fonction $y(-t)^*$ est $\xi \mapsto Y(\xi)^*$. On applique alors le théorème de Plancherel : $\int_{\mathbb{R}} (x(-t)e^{+2\pi f t})(y(-t)^*)^* dt = \int_{\mathbb{R}} X(f - \xi)Y(\xi)d\xi$. D'où le résultat.
- La majoration $\|y\|_\infty \leq \|h\|_2 \|u\|_2$ découle de l'inégalité de Cauchy-Schwartz. La propriété $y = \overline{\mathcal{F}}(H U)$ peut être démontrée comme la réciproque de la propriété précédente, en utilisant le fait que la TFTC est une bijection sur $L^2(\mathbb{R}_t)$. En particulier comme HU , produit de deux fonctions de $L^2(\mathbb{R}_f)$, appartient à $L^1(\mathbb{R}_f)$, $y \in C_0^0(\mathbb{R}_t)$.

□



MASTER ATIAM
Quizz de vérification des prérequis pour le traitement du signal
 Roland Badeau

1. Espaces vectoriels hermitiens.
 - (a) Soit \mathbb{E}_N l'ensemble des suites $x_n \in \mathbb{C}$ de période $N \in \mathbb{N}^*$. Prouver que \mathbb{E}_N est un espace vectoriel.
 - (b) Prouver que $\langle x, y \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_n^*$ définit un produit scalaire sur \mathbb{E}_N .
 - (c) Pour tout $k \in \{0 \dots N-1\}$, soit e^k le vecteur de coefficients $e_n^k = e^{\frac{2i\pi kn}{N}}$. Vérifier que $(e^k)_{0 \leq k < N}$ est une base orthonormée de \mathbb{E}_N .
 - (d) Soit $h \in \mathbb{E}_N$. Pour tout $x \in \mathbb{E}_N$, on pose $f(x) = y$ où $y_n = \sum_{m=0}^{N-1} h_m x_{n-m}$. Vérifier que f est un endomorphisme de \mathbb{E}_N .
 - (e) Vérifier que e^k est vecteur propre de f , associé à la valeur propre $\lambda_k = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-2i\pi \frac{k}{N} n}$.
 2. Séries entières : on rappelle qu'une "série entière" est une fonction définie par la somme de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n$ pour $c_n, z \in \mathbb{C}$.
 - (a) Rappeler la forme du domaine de convergence d'une série entière.
 - (b) Calculer la somme de la série entière définie par $c_n = \frac{1}{2^n}$. Quel est son rayon de convergence ?
 3. Fractions rationnelles
 - (a) Soit $a \in \mathbb{C}$. Développer $f(z) = \frac{1}{1-az}$ en série entière sur z . Quel est son rayon de convergence ?
 - (b) Soient $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Décomposer la fraction rationnelle $f(z) = \frac{1}{1-2\rho \cos(\theta)z + \rho^2 z^2}$ en éléments simples. En utilisant la question précédente, en déduire son développement en série entière. Quel est son rayon de convergence ?
 4. Espaces de Lebesgue : on rappelle que $f \in L^p(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt < +\infty$ (où $p \geq 1$).
 - (a) Prouver que $L^p(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. On admettra alors que $\|f\|_p = (\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur $L^p(\mathbb{R})$.
 - (b) Est-ce que $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$?
 - (c) Pour quelle valeur de p l'espace $L^p(\mathbb{R})$ est-il un espace de Hilbert ? Quel est le produit scalaire associé ? Rappelez ce qui différencie un espace de Hilbert d'un espace vectoriel hermitien.
 5. Produit de convolution : on rappelle que $(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(u)g(t-u)du$.
 - (a) Prouver que le produit de convolution est commutatif, associatif et distributif.
 - (b) Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$. Prouver que $f * g \in L^1(\mathbb{R})$.
 - (c) Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$. Prouver que $f * g \in L^2(\mathbb{R})$.
 - (d) Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ ($L^\infty(\mathbb{R})$ désigne l'espace de Lebesgue des fonctions essentiellement bornées, muni de la norme $\|g\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |g(t)|$). Prouver que $f * g \in L^\infty(\mathbb{R})$.
 - (e) Soient $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$. Prouver que $f * g \in L^\infty(\mathbb{R})$.
 6. Séries de Fourier : on rappelle qu'une série de Fourier est de la forme $X(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{+2i\pi \nu n}$ et que ses coefficients vérifient $x_n = \int_0^1 X(\nu) e^{-2i\pi \nu n} d\nu$.
 - (a) Quelle est la période de la fonction $X(\nu)$?
 - (b) Prouver que si $x_n \in \mathbb{R}$, $X(\nu)$ est symétrique hermitienne ($X(-\nu) = X(\nu)^*$).
 - (c) Prouver que si $X(\nu) \in \mathbb{R}$, x_n est symétrique hermitienne ($x_{-n} = x_n^*$).
 - (d) Soit $X(\nu) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]}$ pour $\nu \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Calculer ses coefficients de Fourier.
 - (e) Soit $X(\nu) = 1 - 2|\nu|$ pour $\nu \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Calculer ses coefficients de Fourier.
 - (f) Comparer, dans les deux exemples précédents, la régularité de la fonction $X(\nu)$ et la décroissance des coefficients x_n .
-

FONDAMENTAUX POUR ATIAM :
Exercices sur les transformées de Fourier et l'échantillonnage
 Roland Badeau

(a) **Filtrage.** Dire si les systèmes suivants, associant à une entrée $x(n)$ une sortie $y(n)$, sont linéaires/non linéaires, invariants dans le temps/non invariants (justifiez vos réponses) :

1. $x(n) \longrightarrow y(n) = x(2n - 2)$
2. $x(n) \longrightarrow y(n) = |x(n - 3)|$
3. $y(n) = 2x(n) + x(n - 1)$

(b) **Echantillonnage.** Soit $x_a(t)$ un signal analogique sommable et de spectre à bande limitée dans l'intervalle $[-B, +B]$. On considère le signal à temps discret $x(n)$, échantillonné à la fréquence $F_e = 1/T_e$.

1. Exprimer $x(n)$ à l'aide de x_a et T_e .
2. Quelle condition doit vérifier B pour pouvoir reconstituer $x_a(t)$ à partir des échantillons $x(n)$?
3. Si B ne vérifie pas cette condition, à quel phénomène assiste-t-on ?
4. Comment se prémunir contre ce phénomène ?

(c) **Observation spectrale.** On considère un signal discret $x(n)$, à valeurs nulles en dehors de l'intervalle $\{0 \dots N - 1\}$.

1. Donner l'expression de sa TFTD $X(e^{j2\pi\nu})$ et de sa TFD d'ordre $M \geq N$ notée $X_M[k]$. Donner l'expression de X_M en fonction de X .
2. Rappelez ce que sont les notions de "résolution spectrale" et de "précision spectrale", ainsi que leur dépendance par rapport aux deux paramètres N et M .

(d) **TFD d'une suite décalée en temps.** On note $X(k)$ la TFD d'une suite $x(n)$ périodique de période N . On pose $y(n) = x(n - n_0)$. Déterminer l'expression de la TFD $Y(k)$ de $y(n)$ en fonction de $X(k)$.

(e) **TFD inverse.** On considère une suite $x(n)$ réelle, avec n allant de 0 à $N - 1$. On note $X(k)$ sa TFD sur N points. On considère la suite $y(k) = X^*(k)$. Déterminer l'expression de sa transformée de Fourier discrète *directe*. En déduire une façon de réaliser la transformée de Fourier discrète inverse.

(f) **Echantillonnage d'une TFTD.** On considère un signal discret $x(n)$ et sa TFTD $X(e^{j2\pi\nu})$. On définit la suite $Y(k) = X(e^{j2\pi\frac{k}{N}})$ pour tout $k \in \{0 \dots N - 1\}$, et le signal discret $y(n)$ qui admet $Y(k)$ pour TFD.

1. Exprimer $y(n)$ en fonction de $x(n)$. Quel phénomène observe-t-on ?
2. Comment doit-on choisir N si $x(n)$ est un signal à support fini, afin d'obtenir l'égalité entre y et x sur ce même support ?

1 Questions courtes

(a) **Propriétés des filtres.** Soit le filtre de fonction de transfert $H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 1.2z^{-1}}$.

1. Son implémentation stable est-elle causale ($h(n) = 0 \ \forall n < 0$), anti-causale ($h(n) = 0 \ \forall n \geq 0$), bilatère (i.e. ni causale, ni anticausale) ?
2. Calculer sa réponse impulsionnelle (indication : on remarquera que $H(z) = \frac{-1}{1.2} \frac{1}{1-z/1.2}$, puis on développera la fraction rationnelle en série entière, et on identifiera le résultat avec l'expression $H(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n)z^{-n}$).
3. Est-il RIF (de réponse impulsionnelle finie) ou RII (de réponse impulsionnelle infinie) ?
4. Est-il plutôt passe-bas (i.e. il accentue les basses fréquences), passe-haut (il accentue les hautes fréquences), passe-bande (il accentue les fréquences intermédiaires) ?
5. Exprimer la relation entrée-sortie correspondant à $H(z)$.

(b) **Filtre différentiateur.** On considère un filtre de fonction de transfert $H(z) = 2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$.

1. Ce filtre est-il stable ? Est-il RIF/RII ? Quelle est la relation entrée/sortie correspondante ?
2. On considère l'implémentation causale de ce filtre. Donner le domaine de définition de $H(z)$ et la réponse impulsionnelle $h(n)$ correspondante.

(c) **Filtre passe-tout.** Soit $c \in \mathbb{C}$. Soit le filtre causal de fonction de transfert $G(z) = \frac{c^* - z^{-1}}{1 - cz^{-1}}$.

1. Dans quel cas ce filtre est-il stable ? Calculer alors sa réponse impulsionnelle.
2. Montrer que sa réponse en fréquence vaut 1 en module $\forall \nu \in \mathbb{R}$.

(d) **Filtres à phase minimale.** On dit qu'un filtre est à *phase minimale* s'il est causal stable et d'inverse causal stable. On considère le filtre de fonction de transfert $H(z) = \frac{1 - 1.8z^{-1} + 0.81z^{-2}}{1 + 0.7z^{-1}}$, dont la réponse impulsionnelle est dans $l_1(\mathbb{Z})$ (sommable).

1. Quels sont les pôles et les zéros du filtre ?
2. Ce filtre est-il à réponse impulsionnelle infinie (RII) ou à réponse impulsionnelle finie (RIF) ? causal ou non causal ? à minimum de phase ? (vous justifierez vos réponses).

2 Interprétation géométrique d'une réponse en fréquence

On s'intéresse au filtrage causal de réponse impulsionnelle $h(n)$ définie par la relation entrée-sortie $y(n) = ay(n-1) + x(n)$, avec $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$.

1. Donner l'expression de la fonction de transfert $H(z)$.
2. On pose $z = e^{2i\pi\nu_0}$. Tracer le lieu de $M(z)$ des points d'affixe z dans le plan complexe quand ν_0 varie de 0 à 1. Préciser les points $\nu_0 = 0, \nu_0 = 0.25, \nu_0 = 0.5$ et $\nu_0 = 1$.
3. Montrer que $|H(e^{2i\pi\nu_0})| = OM/AM$, O désignant l'origine du repère et A étant un point du plan que l'on précisera. En déduire l'allure de $|H(e^{2i\pi\nu_0})|$ lorsque $a = 0.1, a = 0.9, a = -0.9$. Quels sont les types des filtres correspondants ? (passe-bas, passe-bande, passe-haut ?)

1 Questions courtes

(a) Soit $B(n)$ un processus aléatoire réel centré, i.i.d. (indépendant et identiquement distribué), de variance σ_B^2 . Montrer qu'il est SSL et donner l'expression de $R_{BB}(k)$.

(b) Soit le processus $X(n) = 2n + B(n)$, $B(n)$ étant le processus défini à la question (a). Est-il stationnaire à l'ordre 1 ? à l'ordre 2 ? Est-il SSL ?

2 Petits exercices

(a) On considère le processus réel à temps discret $X(n) = A \cos(2\pi\nu_0 n + \Phi)$ où A et Φ sont deux variables aléatoires indépendantes avec $A : \mathcal{N}(\mu_A, \sigma_A^2)$ et $\Phi : \mathcal{U}([0, 2\pi])$. Montrer que ce processus est SSL et calculer sa moyenne et sa fonction d'autocovariance.

(b) On considère le processus réel $X(n) = aX(n-1) + B(n)$ où $B(n)$ est un processus réel i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et a est un réel tel que $|a| < 1$.

1. Montrer que $X(n)$ s'obtient à partir d'un filtrage causal stable de $B(n)$ dont on donnera la fonction de transfert $H(z)$.
 2. Justifier l'affirmation $X(n)$ est SSL.
 3. Donner la formule du filtrage des moyennes et l'appliquer pour trouver $\mathbb{E}[X] = \mu_X$.
 4. Calculer la densité spectrale de puissance (DSP) de $B(n)$, notée $S_{BB}(e^{2i\pi\nu})$ et en déduire la densité spectrale de puissance de X , notée $S_{XX}(e^{2i\pi\nu})$, en fonction des données.
 5. Donner l'expression de $X(n)$ en fonction des $B(n)$ et de a .
-

MASTER ATIAM
Corrigé du quizz de vérification des prérequis pour le traitement du signal
 Roland Badeau

1. Espaces vectoriels hermitiens.

- (a) Soit \mathbb{E}_N l'ensemble des suites $x_n \in \mathbb{C}$ de période $N \in \mathbb{N}^*$. Prouver que \mathbb{E}_N est un \mathbb{C} -espace vectoriel.

Soient $x, y \in \mathbb{E}_N$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $z = \lambda x + y$. Alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, $z_{n+N} = \lambda x_{n+N} + y_{n+N} = \lambda x_n + y_n = z_n$, donc $z \in \mathbb{E}_N$. On en conclut que \mathbb{E}_N est un \mathbb{C} -espace vectoriel.

- (b) Prouver que $\langle x, y \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_n^*$ définit un produit scalaire sur \mathbb{E}_N .

La forme $\langle x, y \rangle$ est clairement sesquilinéaire (linéaire en x et anti-linéaire en y). Par ailleurs, $\forall x \in \mathbb{E}_N$, $\langle x, x \rangle \geq 0$, et si de plus $\langle x, x \rangle = 0$, alors $x_n = 0 \forall n \in [[0, N-1]]$, donc $x = 0$ (par périodicité de période N). On en conclut que $\langle x, y \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_n^*$ définit un produit scalaire sur \mathbb{E}_N .

- (c) Pour tout $k \in \{0 \dots N-1\}$, soit e^k le vecteur de coefficients $e_n^k = e^{\frac{2i\pi kn}{N}}$. Vérifier que $(e^k)_{0 \leq k < N}$ est une base orthonormée de \mathbb{E}_N .

Pour tous $k, l \in \{0 \dots N-1\}$, $\langle e^k, e^l \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi(k-l)n}{N}} = 1$ si $k = l$, ou 0 si $k \neq l$. Donc la famille $(e^k)_{0 \leq k < N}$ est orthonormée. Par ailleurs, l'application linéaire $f : \mathbb{E}_N \rightarrow \mathbb{C}^N$, qui à $x \in \mathbb{E}_N$ associe $f(x) = \{x_0, \dots, x_{N-1}\}$ est clairement injective ($f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$), donc $\dim(\mathbb{E}_N) \leq \dim(\mathbb{C}^N) = N$. On en déduit que $\dim(\mathbb{E}_N) = N$ et $(e^k)_{0 \leq k < N}$ est une base orthonormée de \mathbb{E}_N .

- (d) Soit $h \in \mathbb{E}_N$. Pour tout $x \in \mathbb{E}_N$, on pose $f(x) = y$ où $y_n = \sum_{m=0}^{N-1} h_m x_{n-m}$. Vérifier que f est un endomorphisme de \mathbb{E}_N .

L'application f est clairement linéaire. Soient $x \in \mathbb{E}_N$ et $y = f(x)$. Alors $y_{n+N} = \sum_{m=0}^{N-1} h_m x_{n+N-m} = \sum_{m=0}^{N-1} h_m x_{n-m} = y_n$, donc $y \in \mathbb{E}_N$. On en conclut que f est un endomorphisme de \mathbb{E}_N .

- (e) Vérifier que e^k est vecteur propre de f , associé à la valeur propre $\lambda_k = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-2i\pi \frac{k}{N} n}$.

Soit $y^k = f(e^k)$. Alors $y_n^k = \sum_{m=0}^{N-1} h_m e^{\frac{2i\pi k(n-m)}{N}} = e^{\frac{2i\pi kn}{N}} \sum_{m=0}^{N-1} h_m e^{-\frac{2i\pi km}{N}} = \lambda_k e_n^k$, donc $y^k = \lambda_k e^k$. On en déduit que e^k est vecteur propre de f , associé à la valeur propre $\lambda_k = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-2i\pi \frac{k}{N} n}$.

2. Séries entières : on rappelle qu'une "série entière" est une fonction définie par la somme de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n$ pour $c_n, z \in \mathbb{C}$.

- (a) Rappeler la forme du domaine de convergence d'une série entière.

Le domaine de convergence d'une série entière est un disque (plus précisément, la série entière converge à l'intérieur du disque, et éventuellement sur tout ou partie du bord du disque ; elle diverge à l'extérieur du disque).

- (b) Calculer la somme de la série entière définie par $c_n = \frac{1}{2^n}$. Quel est son rayon de convergence ?

On a $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\frac{z}{2})^n = \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$ si $|z| < 2$; la série diverge si $|z| > 2$. Donc son rayon de convergence est égal à 2.

3. Fractions rationnelles

- (a) Soit $a \in \mathbb{C}$. Développer $f(z) = \frac{1}{1-az}$ en série entière sur z . Quel est son rayon de convergence ?

On a $f(z) = \frac{1}{1-az} = \sum_{n \in \mathbb{N}} a^n z^n$ pour tout z tel que $|z| < \frac{1}{|a|}$ (avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$) ; la série diverge si $|z| > \frac{1}{|a|}$. Son rayon de convergence est donc $\frac{1}{|a|}$.

- (b) Soient $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Décomposer la fraction rationnelle $f(z) = \frac{1}{1-2\rho \cos(\theta)z + \rho^2 z^2}$ en éléments simples. En utilisant la question précédente, en déduire son développement en série entière. Quel est son rayon de convergence ?

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \frac{1}{\rho}$, on a

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-2\rho \cos(\theta)z + \rho^2 z^2} \\ &= \frac{1}{(1-\rho e^{+i\theta}z)(1-\rho e^{-i\theta}z)} \\ &= \frac{1}{e^{+i\theta}-e^{-i\theta}} \left(\frac{e^{+i\theta}}{1-\rho e^{+i\theta}z} - \frac{e^{-i\theta}}{1-\rho e^{-i\theta}z} \right) \\ &= \frac{1}{e^{+i\theta}-e^{-i\theta}} \left(e^{+i\theta} \sum_{n \in \mathbb{N}} \rho^n e^{in\theta} z^n - e^{-i\theta} \sum_{n \in \mathbb{N}} \rho^n e^{-in\theta} z^n \right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \rho^n \frac{e^{i(n+1)\theta} - e^{-i(n+1)\theta}}{e^{+i\theta} - e^{-i\theta}} z^n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \rho^n \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} z^n, \end{aligned}$$

et la série diverge si $|z| > \frac{1}{\rho}$. Donc son rayon de convergence est $\frac{1}{\rho}$.

4. Espaces de Lebesgue : on rappelle que $f \in L^p(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt < +\infty$ (où $p \geq 1$).

- (a) Prouver que $L^p(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. On admettra alors que $\|f\|_p = (\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur $L^p(\mathbb{R})$.

Soient f et $g \in L^p(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $h = \lambda f + g$. Alors $|h(t)|^p = 2^p \left| \frac{\lambda f(t)}{2} + \frac{g(t)}{2} \right|^p \leq 2^p \left(\frac{1}{2} |\lambda f(t)|^p + \frac{1}{2} |g(t)|^p \right)$, par convexité de la fonction $x \mapsto |x|^p$.

Ainsi $\int_{\mathbb{R}} |h(t)|^p dt \leq 2^{p-1} (|\lambda|^p \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt + \int_{\mathbb{R}} |g(t)|^p dt) < +\infty$, donc $h \in L^p(\mathbb{R})$. On en déduit que $L^p(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

- (b) Est-ce que $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$?

Il y a un piège : on peut démontrer que $\int_{\mathbb{R}} f(t) dt < +\infty$, mais $\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt = +\infty$. Donc $f(t)$ n'est pas dans $L^1(\mathbb{R})$.

- (c) Pour quelle valeur de p l'espace $L^p(\mathbb{R})$ est-il un espace de Hilbert ? Quel est le produit scalaire associé ? Rappelez ce qui différencie un espace de Hilbert d'un espace vectoriel hermitien.

Pour la valeur $p = 2$, la norme $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt}$ est associée au produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)^* dt$. L'espace vectoriel $L^2(\mathbb{R})$ est donc pré-hilbertien. On peut également démontrer qu'il est complet (toutes les suites de Cauchy convergent dans cet espace), ce qui prouve qu'il s'agit d'un espace de Hilbert. Ce qui différencie un espace de Hilbert d'un espace vectoriel hermitien, c'est qu'un espace de Hilbert peut être de dimension infinie ; un espace hermitien est un cas particulier d'espace de Hilbert dont la dimension est finie.

5. Produit de convolution : on rappelle que $(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(u)g(t-u)du$.

- (a) Prouver que le produit de convolution est commutatif, associatif et distributif.

On vérifie respectivement que $(f * g)(t) = (g * f)(t)$, $(f * (g * h))(t) = ((f * g) * h)(t)$ et $(f * (g + h))(t) = (f * g)(t) + (f * h)(t)$.

- (b) Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$. Prouver que $f * g \in L^1(\mathbb{R})$.

On a $\int_{\mathbb{R}} |(f * g)(t)| dt = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(u)g(t-u)du \right| dt \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(u)||g(t-u)|dudt = \int_{\mathbb{R}} |f(u)| \left(\int_{\mathbb{R}} |g(t-u)|dt \right) du = \int_{\mathbb{R}} |f(u)||g|_1 du = \|f\|_1 \|g\|_1 < +\infty$, donc $f * g \in L^1(\mathbb{R})$.

- (c) Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$. Prouver que $f * g \in L^2(\mathbb{R})$.

On a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |(f * g)(t)|^2 dt &= \int_{\mathbb{R}} |(f * g)(t)| |(f * g)(t)| dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(u)g(t-u)du \right| \left| \int_{\mathbb{R}} f(v)g(t-v)dv \right| dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(u)||g(t-u)|du \int_{\mathbb{R}} |f(v)||g(t-v)|dv dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(u)||f(v)| \left(\int_{\mathbb{R}} |g(t-u)||g(t-v)|dt \right) dudv \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(u)||f(v)| \|g\|_2^2 dudv \\ &= \|f\|_1^2 \|g\|_2^2 < +\infty, \end{aligned}$$

donc $f * g \in L^2(\mathbb{R})$.

- (d) Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ ($L^\infty(\mathbb{R})$ désigne l'espace de Lebesgue des fonctions essentiellement bornées, muni de la norme $\|g\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |g(t)|$). Prouver que $f * g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

On a $|(f * g)(t)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(u)| |g(t-u)| du \leq \int_{\mathbb{R}} |f(u)| \|g\|_\infty du = \|f\|_1 \|g\|_\infty < +\infty$. Donc $f * g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

- (e) Soient $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$. Prouver que $f * g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

On a $|(f * g)(t)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(u)| |g(t-u)| du \leq \|f\|_2 \|g\|_2 < +\infty$. Donc $f * g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

6. Séries de Fourier : on rappelle qu'une série de Fourier est de la forme $X(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{+2i\pi\nu n}$ et que ses coefficients vérifient $x_n = \int_0^1 X(\nu) e^{-2i\pi\nu n} d\nu$.

- (a) Quelle est la période de la fonction $X(\nu)$?

On a $X(\nu+1) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{+2i\pi(\nu+1)n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{+2i\pi\nu n} = X(\nu)$, donc $X(\nu)$ est de période 1.

- (b) Prouver que si $x_n \in \mathbb{R}$, $X(\nu)$ est symétrique hermitienne ($X(-\nu) = X(\nu)^*$).

Si $x_n \in \mathbb{R}$, $X(\nu)^* = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{+2i\pi\nu n} \right)^* = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-2i\pi\nu n} = X(-\nu)$.

- (c) Prouver que si $X(\nu) \in \mathbb{R}$, x_n est symétrique hermitienne ($x_{-n} = x_n^*$).

Si $X(\nu) \in \mathbb{R}$, $x_n^* = \left(\int_0^1 X(\nu) e^{-2i\pi\nu n} d\nu \right)^* = \int_0^1 X(\nu) e^{+2i\pi\nu n} d\nu = x_{-n}$.

- (d) Soit $X(\nu) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]}$ pour $\nu \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Calculer ses coefficients de Fourier.

On a $x_n = \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} e^{-2i\pi\nu n} d\nu = \left[\frac{e^{-2i\pi\nu n}}{-2i\pi n} \right]_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\pi n}$ si n est impair, ou 0 si n est pair et non nul, ou encore $\frac{1}{2}$ si $n = 0$.

- (e) Soit $X(\nu) = 1 - 2|\nu|$ pour $\nu \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Calculer ses coefficients de Fourier.

On a $x_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1 - 2|\nu|) e^{-2i\pi\nu n} d\nu = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2i\pi\nu n} d\nu + 2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 \nu e^{-2i\pi\nu n} d\nu - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \nu e^{-2i\pi\nu n} d\nu$.

On intègre par parties :

$$\begin{aligned} x_n &= \left[\frac{e^{-2i\pi\nu n}}{-2i\pi n} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + 2 \left[\nu \frac{e^{-2i\pi\nu n}}{-2i\pi n} \right]_{-\frac{1}{2}}^0 - 2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{e^{-2i\pi\nu n}}{-2i\pi n} - 2 \left[\nu \frac{e^{-2i\pi\nu n}}{-2i\pi n} \right]_0^{\frac{1}{2}} + 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-2i\pi\nu n}}{-2i\pi n} d\nu \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-2i\pi\nu n}}{-2i\pi n} d\nu - 2 \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{e^{-2i\pi\nu n}}{-2i\pi n} d\nu \\ &= 2 \left[\frac{e^{-2i\pi\nu n}}{-4\pi^2 n^2} \right]_0^{\frac{1}{2}} - 2 \left[\frac{e^{-2i\pi\nu n}}{-4\pi^2 n^2} \right]_{-\frac{1}{2}}^0 \\ &= 2 \left(\frac{e^{-i\pi n} - 1}{-4\pi^2 n^2} \right) - 2 \left(\frac{1 - e^{i\pi n}}{-4\pi^2 n^2} \right) \\ &= \frac{2}{\pi^2 n^2} \end{aligned}$$

si n est impair, ou 0 si n est pair et non nul, ou encore $\frac{1}{2}$ si $n = 0$.

- (f) Comparer, dans les deux exemples précédents, la régularité de la fonction $X(\nu)$ et la décroissance des coefficients x_n .

Dans le premier cas, la fonction $X(\nu)$ est discontinue et \mathcal{C}^1 par morceaux, et ses coefficients de Fourier décroissent en $\frac{1}{n}$; dans le second cas, elle est continue et \mathcal{C}^2 par morceaux, et ses coefficients décroissent en $\frac{1}{n^2}$. D'une manière générale, plus une fonction est régulière, et plus ses coefficients de Fourier décroissent vite.

FONDAMENTAUX POUR ATIAM :
Exercices sur les transformées de Fourier et l'échantillonnage
 Corrigé.
 Roland Badeau

(a) **Filtrage.**

1. linéaire, non invariant dans le temps
2. non linéaire, invariant dans le temps
3. linéaire, invariant dans le temps

(b) **Echantillonnage.**

1. $x(n) = x_a(nT_e)$
2. $B < F_e/2$
3. On assiste à un phénomène de repliement spectral (*aliasing*).
4. On doit appliquer un filtre passe-bas de fréquence de coupure $F_e/2$ avant l'échantillonnage du signal analogique.

(c) **Observation spectrale.**

1. $X(e^{2i\pi\nu}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-2i\pi\nu n}$ et $X_M[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-2i\pi\frac{k}{M}n}$. Donc $X_M[k] = X(e^{2i\pi\frac{k}{M}})$.
2. La résolution spectrale est l'écart minimum entre deux fréquences pures pour que celles-ci puissent être distinguées dans le spectre observé. Elle est proportionnelle à $1/N$. La précision spectrale est l'écart fréquentiel entre deux coefficients de Fourier successifs dans le spectre observé. Elle est égale à $1/M$.

(d) **TFD d'une suite décalée en temps.**

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n - n_0)e^{-2i\pi\frac{k}{N}n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-2i\pi\frac{k}{N}(n+n_0)} = e^{-2i\pi\frac{k}{N}n_0} X(k)$$

(e) **TFD inverse.**

Soit $Y(n)$ la TFD de $y(k)$. On a $Y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} y(k)e^{-2i\pi\frac{n}{N}k} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{+2i\pi\frac{k}{N}n} \right)^* = Nx(n)^*$. La TFD inverse peut donc être calculée en appliquant successivement une conjugaison, une TFD directe, une seconde conjugaison et une multiplication par $1/N$.

(f) **Echantillonnage d'une TFTD.**

1. On calcule $y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(e^{i2\pi\frac{k}{N}})e^{+2i\pi\frac{k}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} x(m)e^{-2i\pi\frac{k}{N}m} \right) e^{+2i\pi\frac{k}{N}n} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} x(m) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-2i\pi\frac{k}{N}(m-n)} \right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} x(m) 1_{\{m=n[N]\}}$. Le signal $y(n)$ est donc obtenu en périodisant le signal x à la période N .
2. Il faut choisir N supérieur ou égal à la longueur du support de x , afin d'éviter un phénomène de repliement temporel.

1 Questions courtes

(a) Propriétés des filtres

1. L'implémentation stable du filtre de fonction de transfert $\frac{1}{1 - 1.2z^{-1}}$ est anti-causale, car ce filtre possède un pôle en 1.2, qui est en dehors du cercle unité (le domaine de définition qui inclut le cercle unité est donc un disque). Mais la réponse impulsionnelle de $H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 1.2z^{-1}}$ est retardée de 1 échantillon à cause du numérateur z^{-1} , on peut donc seulement dire qu'elle est bilatère.
2. La version stable de $H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 1.2z^{-1}}$ se développe sur les puissances positives de z . On trouve $h(n) = -(5/6)^{1-n} \times \mathbf{1}_{]-\infty, 0[}(n)$.
3. Il est RII.
4. Il est plutôt passe-bas (l'argument de son pôle complexe, qui engendre une résonance dans la réponse en fréquence, correspond à la fréquence nulle).
5. La relation entrée-sortie est $y(n) - 1.2y(n-1) = x(n-1)$.

(b) Filtre différentiateur.

1. Ce filtre ne peut jamais être stable, car il possède un pôle sur le cercle unité. Il est RII car il possède un pôle. La relation entrée-sortie est $y(n) + y(n-1) = 2(x(n) - x(n-1))$.
2. Le domaine de définition de l'implémentation causale d'un filtre est toujours une couronne de rayon extérieur infini (c'est à dire le complémentaire d'un disque). Ici, comme il y a un pôle en $z = -1$, les deux domaines possibles sont le disque de rayon 1 et son complémentaire. Le domaine de l'implémentation causale est donc le complémentaire du disque de rayon 1. Pour calculer la réponse impulsionnelle, il faut appliquer la relation entrée sortie à $x = \delta_0$ et $y = h$. On trouve alors $h(n) = 0 \ \forall n < 0$, $h(0) = 2$ et $h(n) = 4(-1)^n \ \forall n > 0$.

(c) Filtre passe-tout.

1. L'implémentation causale d'un filtre est stable ssi tous les pôles sont strictement à l'intérieur du cercle unité. Ici, cela signifie que $|c| < 1$. Pour calculer la réponse impulsionnelle on identifie $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n)z^{-n} = G(z) = \frac{c^* - z^{-1}}{1 - cz^{-1}} = (c^* - z^{-1}) \sum_{n \geq 0} c^n z^{-n} = c^* + \sum_{n \geq 1} (|c|^2 - 1)c^{n-1}z^{-n}$, donc $g(n) = 0 \ \forall n < 0$, $g(0) = c^*$ et $g(n) = (|c|^2 - 1)c^{n-1} \ \forall n > 0$.
2. $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, $G(z) = -z \frac{c^* - z^{-1}}{c - z}$. Or $c^* - z^{-1}$ est le conjugué de $c - z$. Donc $|G(z)| = \frac{|c^* - z^{-1}|}{|c - z|} = 1$.

(d) Filtres à phase minimale.

1. On remarque que $H(z) = \frac{(1 - 0.9z^{-1})^2}{1 + 0.7z^{-1}}$, donc ce filtre possède un pôle en $z = -0.7$ et un zéro double en $z = 0.9$.
2. Ce filtre est RII car il possède un pôle. Comme il possède un pôle à l'intérieur du cercle unité et qu'il est stable, il est donc causal. De plus son inverse est également causal et stable, car les pôles de H^{-1} sont les zéros de H , et sont donc à l'intérieur du cercle unité. Le filtre H est donc à minimum de phase.

2 Interprétation géométrique d'une réponse en fréquence

1. On a $H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$.
 2. Le lieu de $M(z)$ est le cercle unité. Le point $\nu_0 = 0$ est le plus à droite, $\nu_0 = 0.25$ est le plus haut, $\nu_0 = 0.5$ est le plus à gauche et $\nu_0 = 1$ est le même que $\nu_0 = 0$.
 3. On a $H(z) = \frac{z-0}{z-a}$, donc $|H(e^{2i\pi\nu_0})| = OM/AM$, où O est l'origine du repère et A est le point d'affixe a . Lorsque $a = 0.1$ ou $a = 0.9$ le filtre est un passe-bas, lorsque $a = -0.9$ c'est un passe-haut.
-

1 Questions courtes

- (a) $B(n)$ centré \implies stationnaire à l'ordre 1, $R_{BB}(k) = \sigma_B^2 \delta_0(k) \implies$ stationnaire à l'ordre 2. d'où SSL.
- (b) $\mathbb{E}[X(n)] = 2n$ donc non stationnaire à l'ordre 1, et $X_c(n) = B(n)$ donc stationnaire à l'ordre 2. Il n'est pas SSL.

2 Petits exercices

(a) $\mathbb{E}[X(n)] = \mathbb{E}[A]\mathbb{E}[\cos(2\pi\nu_0 n + \Phi)]$ (en raison de l'indépendance des variables aléatoires). Ainsi $\mathbb{E}[X(n)] = \mu_A \times 0 = 0$, il est donc stationnaire au premier ordre. D'autre part, $R_{XX}(n+k, n) = \mathbb{E}[X(n+k)X(n)]$ (processus réel centré) soit, $R_{XX}(n+k, n) = \mathbb{E}[A^2]\mathbb{E}[\frac{1}{2}\cos(2\pi\nu_0(2n+k) + 2\Phi) + \frac{1}{2}\cos(2\pi\nu_0 k)] = \frac{\mu_A^2 + \sigma_A^2}{2}\cos(2\pi\nu_0 k)$, il est donc stationnaire au second ordre. De plus $X(n)$ est évidemment de carré intégrable $\forall n$. Il est donc SSL.

(b)

1. X est obtenu par le filtrage de B par le filtre de fonction de transfert $H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$. La version causale de ce filtre est ici stable car $|a| < 1$.
 2. B est i.i.d. donc SSL. X est obtenu par filtrage linéaire stable d'un processus SSL donc il est SSL lui-même.
 3. $\mathbb{E}[B(n)] = \mu$, $\mu_X = H(1)\mu$ où $H(z=1) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) = \frac{1}{1-a}$.
 4. $R_{BB}(n+k, n) = \mathbb{E}[(B(n+k) - \mu)(B(n) - \mu)] = \sigma^2 \delta_0(k)$. $S_{BB}(e^{2i\pi\nu}) = \sum_k R_{BB}(k)e^{-j2\pi\nu k} = \sigma^2$.
Formule de filtrage : $S_{XX}(e^{2i\pi\nu}) = |H(e^{j2\pi\nu})|^2 S_{BB}(e^{2i\pi\nu}) = \frac{\sigma^2}{1-2a\cos(2\pi\nu)+a^2}$.
 5. $h(n) = a^n \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(n)$ soit, en écrivant la convolution : $X(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k B(n-k)$.
-



Institut Mines-Télécom

Filtrage, transformée de Fourier et échantillonnage sous Python

Roland Badeau



Contexte académique } **sans modifications**

Voir page 9

Master Sciences et Technologies - Parcours ATIAM - UE FpA



1 Introduction à Python et filtrage

1.1 Préliminaires : utilisation de Python

Python est langage de programmation que nous utiliserons en mode interactif dans l'interface Spyder.

On peut exécuter une commande soit en la tapant directement dans le mode interactif soit en exécutant un script qui est une suite de commandes qui se trouvent dans un fichier dont l'extension est ".py". Le mieux est de taper les commandes dans l'éditeur de Spyder, sélectionner puis F9 pour exécuter les commandes sélectionnées. Cela permet de revenir sur les commandes et de les modifier en cas d'erreur. On peut aussi lancer toute une cellule avec Ctrl+Entrée.

Téléchargez le fichier TP_Intro_Python.zip depuis le Moodle du Master ATIAM. Il contient des données et du code Python. Vous travaillerez dans le répertoire résultant de sa décompression. Dans ce répertoire se trouve un fichier scratch_TP_Filtrage.py dans lequel la plupart des commandes sont déjà écrites. Lancez l'environnement Spyder. Dans Spyder ouvrez le fichier scratch_TP_Filtrage.py et exécutez la section de modules à importer.

Ce TP a pour objectif de prendre en main l'utilisation de Python et d'effectuer des opérations de manipulation simples sur les filtres (systèmes linéaires et invariants). Tout le TP peut se faire en mode interactif, Python permettant de définir des fonctions en mode interactif. Pendant la partie 1, vous êtes encouragés à taper les commandes et à en comprendre le résultat. En mode tutoriel le résultat d'une commande est affiché. Exemple

```
3+4; # Vous n'êtes pas obligés de taper les commentaires.
3+4 # ou comment utiliser 10^9 opérations par seconde pour calculer 7
```

1.1.1 Les bases

Sous Python un package indispensable est le package numpy abrégé en np dans ce qui suit (**import numpy as np** et cette commande est à taper dans chaque nouvelle console Python ouverte. Chaque tableau numpy peut avoir une ou plusieurs dimensions. Les matrices seront des tableaux de dimension 2. Les vecteurs de dimension 1. Cependant, pour traiter la multiplication matrice vecteur il est utile de considérer un vecteur comme un tableau à deux dimension dont l'une vaut 1 (selon que l'on veuille une colonne ou une ligne). Il seront par défaut remplis de valeurs de type float64.

1.1.2 Générer une matrice

Il y a divers moyens de générer une matrice ou un vecteur

- **np.zeros((m,n))** : Génère une matrice de taille $m \times n$ pleine de zéros.
- **np.ones((m,n))** : Cette fois-ci la matrice est pleine de 1.
- **np.arange(a,c,b)** : Génère un vecteur ligne commençant à a et incrémenté de b tant que l'on est encore strictement plus petit que c . Si on tape (a, c) l'incrément par défaut est 1. Essayez

```
np.arange(0,7,3)
np.arange(1,7)
np.arange(0,1.01,0.1)
np.arange(0,1,0.1)
np.arange(5,0,-1)
```
- Entrer directement les valeurs entre crochets :

```
[1, 2 ,3] # ceci est une liste
np.asarray([1,2,3]) # ceci un tableau numpy
```



```

np.asarray([1,2,3]).reshape((1,3)) # tableau numpy sous forme de vecteur ligne
np.asarray([1,2,3]).reshape((1,-1)) # idem ci-dessus
np.asarray([[1,2],[3,4]])
np.asarray([1,2,3,4]).reshape((2,2)) # idem ci-dessus
np.asarray([1,2,3,4]).reshape((-1,2)) # idem ci-dessus

```

1.1.3 Opérations sur les tableaux

- **A+B** : Renvoie la somme des deux tableaux qui doivent être de même taille. **Exception** : Si A ou B est un scalaire, il est ajouté à toutes les entrées de l'autre matrices. L'opération "-" fonctionne de la même manière pour la soustraction.

```

np.ones((2,2))+np.ones((2,2))
np.ones((2,2))+1 # on ajoute 1 à toutes les entrées.

```
- **A@B** : Renvoie la multiplication des matrices¹ A et B qui doivent avoir des tailles respectives de $m \times n$ et $n \times l$. Le résultat est de taille $m \times l$. Notez que si $m = l = 1$ alors cette opération est un produit scalaire entre le vecteur ligne A et le vecteur colonne B .

```

A=np.asarray([[1,2],[ 3 ,4]])
B=np.asarray([[ -2,1],[ 1.5 , -0.5]])
A@B
B@A
A@np.asarray([[1, 0],[ 0 ,1]])
np.arange(1,20)@np.arange(1,20) # Bien que arange renvoie un tableau à une seule
                                # dimension, un vecteur prend la forme nécessaire
                                # pour permettre le produit matriciel

A@np.arange(3,5)
np.arange(3,5)@A
A.T
# A.T est la transposée de la matrice A

```
- **A*B** : Multiplication point par point. A et B doivent avoir la même taille. Même exception pour les scalaires.

```

Comparez
A*B
A@B

```
- **Fonctions unaires** : Numpy dispose d'un grand nombre de fonctions usuelles prédéfinies telles que : sin, cos, exp, tan, log ... Les appliquer à un tableau signifie appliquer la fonction à chaque élément du tableau

```

i=np.complex(0,1) # creer le complexe i
pi=np.pi # donner un nom plus commode à pi
np.exp(i*pi)
idx=np.arange(0,11)
np.exp(2*i*pi*0.123*idx) # Onde de Fourier sur Z de fréquence 0.123, entre 0 et 10
np.real(np.exp(2*i*pi*0.123*idx)) # Partie réelle de l'onde
plt.plot(np.real(np.exp(2*i*pi*0.123*idx))) # "plot" affiche son argument
# voir plus bas pour plus de précisions sur plt.plot

```
- **sum()** : Renvoie la somme des éléments d'un tableau. Si on précise un axe, on obtient la somme suivant cet axe

```

np.ones(10).sum()
np.arange(1,101).sum()
np.ones((2,3)).sum(axis=0) # somme colonne par colonne
np.ones((2,3)).sum(axis=1) # somme ligne par ligne
(np.arange(1,10)**2).sum() # somme du carré des entiers entre 1 et 9

```
- **np.concatenate** : Concaténation, par défaut empile les colonnes. L'argument est un n-uplet des tableaux à

1. Seulement valable pour les version de Python supérieures à 3.5.

- concaténer.
- ```
np.concatenate((np.ones((2,3)) , np.ones((2,3))))
np.concatenate((np.ones((2,3)) , np.ones((2,3))), axis=1)
np.concatenate((np.ones((3,3)) , np.ones((2,3))))
np.concatenate((np.ones((3,3)) , np.ones((2,3))), axis=1) # erreur
```
- **A.reshape(-1)** : Quelle que soit la forme de A, renvoie un vecteur monodimensionnel qui est la concaténation verticale des colonnes de A. A est parcourue ligne par ligne. Utile pour s'assurer que deux vecteurs ont la même forme.
 

```
A=np.asarray([[1,2],[3,4]])
A.reshape(-1)
u=np.asarray([1, 2, 2, 1]) # matrice ligne
v=np.asarray([1],[2],[3],[4]) # matrice colonne
u*v # résultat inattendu
u.reshape(-1)*v.reshape(-1) #on est sûr
ur de la forme c'est le produit point a point
```
  - **x\*\*A** : élève le scalaire x à la puissance chacune des entrées de A (fonctionne aussi si A est un scalaire)
 

```
(-1/2)**np.arange(0,11) # les puissances de -1/2 de 0 à 10
```

### 1.1.4 Les variables

Les variables sont créées lors de leur première affectation, attention aux effets de bord.

```
u=np.ones((2,2))
v=u
v[0,0]=7
u
u a été modifié par l'action sur v car v n'est qu'une copie de pointeur
v=u.copy() # voici la bonne manière de créer une copie indépendante de u
v[0,0]=8
u
```

Les indices des tableaux commencent à 0 : **h(0)** est le premier élément du vecteur **h**. **A[2,1]** est l'élément situé à la ligne numérotée 2 (troisième ligne) colonne numérotée 1 (deuxième colonne) de la matrice **A**. On peut aussi accéder à une collection de valeurs en indiquant une collection d'indices :

```
h=np.arange(0,10);
h[1:3]
h[1:10].sum() # somme les éléments numéro 1 à 9 de h
h[:-1].sum() #somme tous les éléments de h sauf le dernier
h[0::2].sum() # h[0]+h[2]+...+h[plus grand indice pair possible]
h[::-1] # renvoie le vecteur h à l'envers
h[2:5]=np.ones(3) # remplace certaines entrées de h par des 1
```

## 1.2 Réaliser une convolution et écouter un écho

Dans cette partie vous allez réaliser une convolution entre deux suites. Vous appliquerez cela à un signal sonore pour simuler un écho et écouterez le résultat. Certes, Python possède des packages capables de faire cela (scipy.signal), mais, pour vous exercer vous en réaliserez une vous même.

### 1.2.1 Création d'une fonction

On définit une fonction en Python de la manière suivante

```
def mafonction(a,b,c):
 tmp=a+b
 toto=c-b
 titi=tmp/toto
 return titi
```

Le résultat renvoyé par cette fonction est  $(a + b)/(c - b)$ . Les variables internes (tmp, toto et titi) seront oubliées après l'appel de cette fonction. Pour ce TP, nous définirons toutes les fonctions dans un seul fichier de travail pour ne pas multiplier les fichiers, mais un gros projet demanderait plus d'organisation.

### 1.2.2 Modélisation en vue de la convolution

L'opération de convolution entre deux suites  $h$  et  $u$  donne une suite, que l'on va noter  $v$  définie par

$$v_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_m u_{n-m}$$

Sur un ordinateur, et dans Python en particulier, on ne peut avoir que des suites à support fini. Ce que nous signifions par "opération de convolution" doit tenir compte de cette limitation. Quitte à décaler les suites, on peut toujours supposer qu'une suite à support fini a son support du type  $\{0, \dots, N-1\}$  pour un certain entier  $N$ . Si deux suites ont leur support dans  $\{0, \dots, N-1\}$  et  $\{0, \dots, M-1\}$  respectivement, alors leur produit de convolution a son support dans  $\{0, \dots, N+M-2\}$ . Ainsi la convolution entre deux vecteurs de taille  $N$  et  $M$  sera un vecteur de taille  $N+M-1$ . Nous ferons la convention que, si un vecteur Python  $\mathbf{h}$ <sup>2</sup> représente une suite  $h$  alors le premier élément du vecteur  $\mathbf{h}$  (i.e.  $\mathbf{h}(0)$ ) est la valeur de  $h_0$  et le support de la suite  $h$  est supposé être dans  $\{0, \dots, \text{length}(\mathbf{h}) - 1\}$ .

### 1.2.3 Valeur en un point

Avec ces conventions, écrire une fonction qui prend en entrée deux vecteurs  $\mathbf{h}$  et  $\mathbf{u}$  et un entier  $n$  et renvoie la valeur de leur convolution en  $n$  (i.e.  $(h * u)_n$ ). S'il n'y avait pas de problèmes de bord cela s'écrirait

```
def valconv(h,u,n):
 a=len(h) # pour un tableau numpy len(v)==v.shape[0]
 b=len(u)
 u=u.reshape(-1) #s'assurer que u et v son de la meme forme
 h=h.reshape(-1) #
 idx=np.arange(0,a); # les indices pour h
 return (h[idx]*u[n-idx]).sum()
```

Après avoir bien compris l'expression dans `"(...).sum()"` proposer une manière de remédier au problème des bords. On remarquera que pour que  $\mathbf{h}(\mathbf{m})$  ( $m$  sera un élément du vecteur `idx`) intervienne dans la somme sans poser de problème d'indice, il faut et il suffit d'avoir

$$\begin{aligned} 0 \leq m \leq a - 1 & \text{ pour que } \mathbf{h}(\mathbf{m}) \text{ existe} \\ 0 \leq n - m \leq b - 1 & \text{ pour que } \mathbf{u}(\mathbf{n-m}) \text{ existe} \end{aligned}$$

---

2. à partir de maintenant, on écrira en gras des variables Python et en italique leur représentation mathématique

En déduire la formule correcte pour le vecteur **idx** en utilisant `min(x,y)` et `max(x,y)` qui renvoient le minimum et le maximum entre  $x$  et  $y$ .

Testez votre fonction avec

```
valconv(np.ones(3),np.ones(2),0) # doit renvoyer 1
valconv(np.ones(3),np.ones(2),2) # doit renvoyer 2
```

### 1.2.4 Convolution complète

Modifiez votre fonction pour qu'elle renvoie le vecteur entier de la convolution (on supprime le paramètre  $n$ ). Pour cela on utilisera une boucle

```
out = np.zeros(a+b-1)
for n in range(a+b-1): #La boucle va être parcourue avec n parcourant le vecteur 0,1,...
 idx=... # Formule trouvée précédemment
 out[n]= (h[idx]*u[n-idx]).sum()
return out
```

Testez votre fonction avec de petites suites dont vous calculerez la convolution à la main pour vérifier.

### 1.2.5 Ecoute d'un écho

Charger un son dans Python à l'aide de la fonction

```
[x,Fe]=sf.read('piano.wav')
```

Cela va charger une variable **x** qui contient un son. La valeur de  $Fe$  est la fréquence d'échantillonnage. La commande suivante permet d'écouter un son :

```
play(x,Fe)
```

Que donne la commande suivante ?

```
play(x,Fe/2)
```

On peut modéliser un écho par le fait que le son s'ajoute à lui même avec un certain retard, si  $u$  représente le signal sonore original, le signal reçu sera du type

$$v_n = u_n + 0.8u_{n-t_1}$$

Ceci signifie que le son rebondit sur un obstacle, perd 20% de son amplitude et arrive retardé de  $t_1$ . On constate que cette modélisation revient à réaliser la convolution du son  $u$  avec une réponse impulsionnelle  $h$  définie par  $h_0 = 1$ ,  $h_{t_1} = 0.8$  (tous les autres termes de  $h$  sont nuls).

Créer le vecteur **h** correspondant à un retard approximatif de 0,01 seconde (on rappelle que le son utilisé ici est échantillonné à  $Fe$  échantillons par seconde). Convoler, avec votre programme, ce vecteur **h** avec le signal sonore **y** (stockez le résultat dans une variable).

À combien estimez-vous le temps de calcul pris par votre programme ?

Utilisez la commande

```
z=scipy.convolve(h,y);
```

Cette fonction est une fonction Python qui fait ce que fait votre programme de convolution. Que constatez-vous sur le temps de calcul ?

Écoutez le son **z**. (`play(z,Fe)`)

Augmentez le temps de l'écho à 0,1 seconde, quel impression cela donne-t-il ? En termes de distance parcourue par le son, que représentent 0,1 et 0,01 secondes, cela vous aide-t-il à interpréter l'effet de l'écho ?

### 1.3 Filtre rejecteur

Dans la suite on utilise la commande Python `lfilter` (qui doit être définie par `lfilter=scipy.signal.lfilter`).

Après avoir consulté l'aide par `help lfilter`, dire comment utiliser `lfilter` pour effectuer une convolution d'un signal contre un RIF (réponse impulsionnelle finie).

Dans la suite nous allons voir comment utiliser `lfilter` pour effacer une fréquence parasite dans un son. Pour cela nous créons une version polluée de la variable **y** :

```
n=np.arange(len(y)); #le temps discret que dure le signal y
f0=1261;
yb=y+0.1*cos(2*pi*f0/Fe*n); #on ajoute une onde parasite
```

Écouter le son **y<sub>b</sub>** à la fréquence **Fe**. Quelle est la fréquence en Hz et fréquence réduite de l'onde parasite ?

Donner la TZ de la RI du filtrage qu'effectue la fonction `rejette1`. Écouter le résultat de ce filtrage sur le signal **y<sub>b</sub>**. Cela vous paraît-il satisfaisant ?

Donner la TZ de la RI du filtrage qu'effectue la fonction `rejette2`. Écouter le résultat sur le signal **y<sub>b</sub>**.

Pour une valeur de **rho** proche de 1, placer les zéros et les pôles des TZ précédentes dans le plan complexe. Utiliser ces positions pour tracer (approximativement) le module des deux TFtD correspondantes (sur l'intervalle  $[-1/2, 1/2]$ ). Conclure quant à la qualité comparée des deux filtrages.

Pourquoi rho (paramètre de `rejette2`) doit-il toujours être strictement plus petit que 1 ?

En transmettant à la fonction `rejette2` une fréquence **f0=1267** et un paramètre **rho** très très proche de 1, conclure au compromis nécessaire dans le choix de **rho**.

## 2 Transformation de Fourier et échantillonnage

### 2.1 Préliminaires

Dans cette partie nous illustrons les propriétés de la transformation de Fourier. Nous manipulons la fonction `fft` pour visualiser des transformées de Fourier et bien en comprendre le fonctionnement. Nous verrons en particulier comment l'algorithme Fast Fourier Transform peut être utilisé pour calculer rapidement des choses qui, a priori, n'ont pas de rapport avec la transformation de Fourier.

Nous abordons ensuite les problèmes que pose l'échantillonnage des signaux, en écoutant l'effet qu'a un sous-échantillonnage sur un son.

Dans le répertoire résultant de la décompression du fichier TP\_Intro\_Python.zip, se trouve un fichier `scratch_TP_Fourier.py` dans lequel la plupart des commandes sont déjà écrites.

### 2.2 Transformation de Fourier

Sur ordinateur, on ne manipule que des suites finies de nombres. En cours, nous avons vu diverses transformations de Fourier. A priori, seule la TFD (contrairement à la TFTD, TFTC et coefficients de Fourier) peut être calculée sur ordinateur.

On fera la convention que, si  $h$  dénote une suite à support fini, alors  $\mathbf{h}$  dénote le vecteur Python qui la représente et on a  $\mathbf{h}(0) = h_0$  car Python indexe les éléments d'un tableau à partir de 0.

Si  $\mathbf{h}$  est vecteur Python et  $M$  un entier. Alors<sup>3</sup> :

```
fft(h) # renvoie un tableau de même taille que h et qui en est la TFD
fft(h,M) # Si M est plus grand que la taille de h, renvoie la TFD de h complété par
des zéros pour atteindre la taille M.
Si M est plus petit que la taille du vecteur h alors: renvoie la TFD
du vecteur h[0:M] (i.e. les M premiers échantillons de h)
```

On rappelle que la TFD d'une séquence finie  $h_0, \dots, h_{N-1}0\dots$  où l'on a complété la séquence  $h_n$  par des zéros pour obtenir un signal de taille  $M$  est exactement l'échantillonnée de la TFTD de la séquence  $h_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  aux fréquences  $k/M$  pour  $k$  allant de 0 à  $M - 1$ .

Il ne faut pas confondre FFT et TFD. La FFT est un algorithme rapide de calcul de la TFD. Numpy fait cette confusion, c'est dommage. L'algorithme de la FFT est particulièrement rapide pour des vecteurs de taille une puissance de 2. Il s'exécute en un temps proportionnel à  $N \log(N)$  où  $N$  est la taille du signal.

- Créer deux vecteurs de longueur 100 qui sont deux ondes de Fourier de fréquence 0.1 et 0.123. Et observer leur TFD par la commande `plot(abs(fft(x)))`<sup>4</sup> ( $\mathbf{x}$  est le vecteur). Quelles différences remarquez-vous entre les deux cas ? Pourquoi ? (souvenez-vous de la différence entre une onde de Fourier sur  $\mathbb{Z}$  et une onde de Fourier sur  $\{0, \dots, N - 1\}$ )
- Pouvez-vous expliquer la position exacte du pic dans TFD du signal de fréquence 0.1 (=10/100) ? (en bougeant le curseur on a en bas de la figure l'affichage de  $x, y$ <sup>5</sup>). Expliquer aussi la position du second pic qui apparaît dans le cas où l'on trace la TFD de la partie réelle de l'onde de fréquence 0.1

3. En fait `fft` est un raccourci pour `numpy.fft.fft`

4. on peut aussi utiliser `stem` à la place de `plot` pour de petits signaux

5. Pour cela il faut configurer Spyder pour effectuer les affichages de figures en extérieur Outils->Préférences->Console iPython->Graphique et relancer une nouvelle console iPython

(`plot(abs(fft(real(x))))`). Pour un signal réel, il est inutile de tracer toute la TFD, seule la moitié de celle-ci suffit, le reste se déduisant par symétrie hermitienne.

- La commande `plot(x,y)` trace la courbe représentant les `y` en fonction de `x`. Pour avoir un axe des abscisses bien indexé lors de la visualisation d'une TFD il convient de faire

```
t=np.arange(0,100); #vecteur 0,N-1 pour N=100
nu=0.1; #fréquence
onde=exp(2*i*pi*nu*t); #création de l'onde de fréquence nu
plot(t/100,abs(fft(onde))); #tracé correctement indexé de la TFD
```

- Vérifier sur des exemples simples que le produit de convolution est bien transformé en multiplication en Fourier (exemple, la séquence `[1, 2, 3]` convoluée avec `[1, 1, 0]` dont on calcule la convolution circulaire à la main). Vérifier également que la multiplication par une onde de Fourier conduit à une translation de la TFD.

- Enfin, la fonction `ifft(y)` réalise la TFD inverse de `y`. Que donnent les commandes suivantes ?

```
ifft(fft([1, 1, 1]))
ifft(fft([1, 1, 1],4))
ifft(fft([1, 2, 3]).*fft([1, 1, 0]))-[4, 3, 5]
```

Comme vu en cours la formule de TFD inverse est très proche de celle de la TFD. L'algorithme qui la calcule est aussi rapide que la FFT.

- **Simuler une convolution sur  $\mathbb{Z}$  grâce à une convolution circulaire :** Si  $h_0, \dots, h_{N-1}$  et  $g_0, \dots, g_{N-1}$  sont deux séquences de taille  $N$  et si `h` et `g` sont les vecteur (ligne) Python qui les représentent. Que donne la séquence Python suivante ? (dans la variable `out`)

```
N=len(h);# supposé égale à length(g)
hz=np.concatenate((h, ...)) # compléter par de zéros
gz=np.concatenate((h, ...))
out=ifft(fft(hz)*fft(gz)) #TFD inverse de produit de TFD
out=out(1:2*N-1)
```

Cette méthode permet en particulier de calculer le produit de deux polynôme de degré  $N - 1$  en un temps proportionnel à  $N \log(N)$  alors qu'il faudrait de l'ordre de  $N^2$  opérations en appliquant simplement la formule qui donne les coefficients du polynôme produit en fonction des coefficients des polynômes d'origine.

## 2.3 Fréquence en Hz, fréquence réduite

Si  $h_n = f(nT_e)$  est le résultat de l'échantillonnage d'une fonction  $f$  à la fréquence  $F_e = 1/T_e$  alors une onde de Fourier sur  $\mathbb{R}$  de fréquence  $\nu$  va donner

$$h_n = e^{2i\pi\nu n T_e} = e^{2i\pi \frac{\nu}{F_e} n}$$

soit une onde de Fourier à la fréquence  $\frac{\nu}{F_e}$ . Ainsi, la bonne normalisation pour l'axe des abscisses, si on connaît la fréquence d'échantillonnage  $F_e$ , est

```
Fe=1000; Te=1/Fe; t=np.arange(0,300)*Te; #fréquence d'échant. 1000Hz. t qui représente le t
pour 300 échantillons
xi=100; #fréquence en Hertz
h=cos(2*pi*xi*t); # équivalent à cos(2*pi*(nu/Fe)*(0:299))
fh=fft(h)
fh=fh[1:151] # comme h est réel inutile de garder plus de la moitié de la TF
plot(np.arange(0,151)/300*Fe, abs(fh)); # on indexe en vraies fréquences.
la position 150 dans la TFD donne Fe/2=500Hz, ici.
```

Générer une onde de fréquence 0,01 et longue de 10000 échantillons ( $n \mapsto e^{2i\pi\nu n}$ ,  $\nu$  est la fréquence). Écoutez sa partie réelle(`np.real(u)`) par

```
play(real(u),44100) # Le son est joué à 44100 échantillons par seconde
play(real(u),22050)# le son est joué à 22050 échantillons par seconde
```

Quelles fréquences en Hz ( $1\text{Hz}=1/\text{seconde}$ ) percevez-vous dans les deux cas ?

On dit que la fréquence en Hz est la fréquence réelle (ce qui nécessite de connaître la fréquence d'échantillonnage) alors que la fréquence 0,06 est la fréquence réduite (qui est toujours, pour un signal défini sur  $\mathbb{Z}$ , entre  $-1/2$  et  $1/2$ ).



Contexte académique } sans modifications

*Par le téléchargement ou la consultation de ce document, l'utilisateur accepte la licence d'utilisation qui y est attachée, telle que détaillée dans les dispositions suivantes, et s'engage à la respecter intégralement.*

La licence confère à l'utilisateur un droit d'usage sur le document consulté ou téléchargé, totalement ou en partie, dans les conditions définies ci-après, et à l'exclusion de toute utilisation commerciale.

Le droit d'usage défini par la licence autorise un usage dans un cadre académique, par un utilisateur donnant des cours dans un établissement d'enseignement secondaire ou supérieur et à l'exclusion expresse des formations commerciales et notamment de formation continue. Ce droit comprend :

- le droit de reproduire tout ou partie du document sur support informatique ou papier,
- le droit de diffuser tout ou partie du document à destination des élèves ou étudiants.

Aucune modification du document dans son contenu, sa forme ou sa présentation n'est autorisée.

Les mentions relatives à la source du document et/ou à son auteur doivent être conservées dans leur intégralité.

Le droit d'usage défini par la licence est personnel et non exclusif. Tout autre usage que ceux prévus par la licence est soumis à autorisation préalable et expresse de l'auteur : [sitepedago@telecom-paristech.fr](mailto:sitepedago@telecom-paristech.fr)



## **Processus et synthèse vocale sous Python**

**Roland Badeau**



# 1 Étude théorique : Analyse du mélange de deux processus

Soit un signal que l'on modélise par un processus  $X$  centré, réel et SSL. Un autre signal est lui aussi modélisé par un processus centré et SSL noté  $Y$ . Les processus  $X$  et  $Y$  sont supposés indépendants. Le processus  $X$  est filtré par un filtre dont la RI est  $h$ , que l'on ne connaît pas. Il s'ajoute à  $Y$  pour donner un processus  $Z$  que l'on mesure. Cela s'écrit :

$$Z = h * X + Y$$

On admet sans démonstration que pour toute suite sommable  $g$ , le processus  $g * X$  est indépendant du processus  $Y$ .

On note  $T = h * X$ . Montrer que

$$S_Z(\nu) = S_Y(\nu) + S_T(\nu)$$

(pour cette preuve, il suffit d'utiliser le fait que  $T$  et  $Y$  sont indépendants, pas besoin de faire intervenir explicitement le filtre  $h$ ).

On suppose que l'on a mesuré le processus  $X$ . Par exemple  $X$  est l'un des instruments participant à un orchestre devant lequel se trouve un micro qui ne mesure que cet instrument.  $Z$  est le son produit par tout l'orchestre mesuré loin de tous les instruments. Et on veut annuler l'effet de l'instrument  $X$ .

Montrer que quelle que soit la suite sommable  $h^1$  et on notant  $Z^1$  le processus  $Z^1 = Z - h^1 * X$  on a

$$R_{Z^1}(0) \geq R_Y(0)$$

et que si  $h^1 = h$  alors

$$R_{Z^1}(0) = R_Y(0)$$

## Interprétation :

- On interprète  $Z^1$  comme le processus  $Z$  débarrassé de tout écho dû à  $X$  (on a éliminé l'effet de l'un des instruments).
- On rappelle que  $R_B(0)$  (où  $B$  est un processus SSL centré) est la puissance de ce processus. L'inégalité démontrée porte donc sur la puissance de  $Z^1$  par rapport à celle de  $Y$ .
- Les inégalités démontrées permettent de dire que le problème de retrouver  $h$  se réduit à la minimisation de la puissance de  $Z - h^1 * X$  où  $h^1$  est l'inconnue.
- Il peut paraître étrange de supposer connu un processus, ici  $X$ , que l'on modélise par de l'aléa. Mais il y a des cas où cela est une hypothèse réaliste. Un autre exemple, à part l'orchestre de musique, est la communication entre un téléphone mobile et son antenne relais. Dans ce cas  $X$  est une séquence connue que l'antenne envoie au téléphone portable afin d'identifier le canal (les échos des ondes sur les bâtiments, véhicules...) c'est-à-dire trouver  $h$ . Et  $Y$  est un bruit électromagnétique inconnu.

Dans les sections suivantes nous allons mettre en pratique cette idée dans différents scénarios.

**Un programme :** Une brique fondamentale vous est donnée. Il s'agit de la fonction `moindres_carres`. Elle prend en entrée un entier  $p$  qui est la taille du filtre  $h$  à trouver -1 (par souci d'homogénéité des notations avec la partie suivante). Elle prend aussi deux signaux  $x$  et  $z$  qui jouent les rôles des processus  $X$  et  $Z$ . Elle renvoie une séquence  $h^1$  de taille  $p + 1$  qui minimise l'énergie du signal  $z - h^1 * x$ .

Téléchargez le fichier **TP\_Alea\_Python.zip** depuis le Moodle du Master ATIAM. Il contient des données et du code Python. Vous travaillerez dans le répertoire résultant de sa décompression.

## 1.1 Première application : Identifier un canal

Dans le cas de l'identification de canal, nous ne connaissons pas le canal, c'est-à-dire la RI  $h$ . On se donne un signal  $X$  que l'on connaît et un signal  $Y$  parasite que l'on ne connaît pas. On observe

$$Z = h * X + Y$$

On veut retrouver  $h$  à partir de  $X$  et de  $Z$ . Cela s'écrit en Python :

```
h=np.asarray([1,1/2]) # la RI du canal, on fait semblant de ne pas la connaître...
N=1000
taille des signaux
X=randn(N)
sigma=0.1
Y=sigma*randn(N) # un signal qui s'ajoute
Z=lfilter(h,[1],X)+Y # X subit l'effet du canal (convolution à h) et Y (inconnu ici) s'ajoute
hestime=moindres_carres(1,X,Z) #trouver h^1
hestime # on trouve le canal (sa RI)
```

Pour différentes valeurs du bruit estimez l'erreur commise sur l'estimation de  $h$ ; en Python l'erreur relative commise s'écrit

```
norm(hestime-h)/norm(h)
```

(on prendra au moins  $\sigma = 0.1, 1, 10$ )

Que constatez vous lorsque  $\sigma$  devient trop grand? Pour  $\sigma = 10$ , à partir de quelle valeur de  $N$  l'estimation de  $h$  redevient-elle acceptable (moins de 10% d'erreur relative, par exemple)?

Dans le programme que nous venons de faire nous connaissons la longueur de la séquence  $h$ . Que proposez-vous si la longueur de  $h$  n'est pas connue?

Comparez, pour  $\sigma = 1$  l'efficacité du choix d'une séquence  $X = \text{randn}(1, N)$  avec l'approche intuitive consistant à prendre  $X = \delta$ , i.e introduire une impulsion dans le canal et écouter la sortie. À quoi attribuez-vous le manque d'efficacité de l'approche par envoi d'une impulsion?

## 1.2 Seconde application : Suppression d'un son qui en parasite un autre.

Dans ce cas,  $Y$  est un son qui nous intéresse mais n'est pas connu.  $X$  est un son connu, dont on veut éliminer la présence dans  $Z$ . Étant donné  $Z$  et  $X$  on veut estimer  $h$  et en déduire une estimation de  $Y$  par l'équation

$$Y = Z - h * X$$

Après avoir chargé le fichier "parasite.mat", la variable **Xparasite** contient le signal  $X$  et la variable **Zparasite** contient le son mesuré  $Z$  dont on veut éliminer l'influence de  $X$ . Utiliser un programme sur le modèle suivant

```
hestim=moindres_carres(p_est_inconnu,Xparasite,Zparasite)
Y=Zparasite-lfilter(hestim,1,Xparasite)
```

Comment avez-vous fait pour estimer la taille du filtre? Quel filtre  $h$  avez-vous trouvé? Ecoutez **Zparasite** et **Y** par la commande `play(VARIABLE,22050);`<sup>1</sup> pour vous assurer que vous avez bien éliminé l'influence du son parasite.

---

1. les sons de ce TP sont échantillonnés à 22050 Hz

## 2 Le modèle auto-régressif pour la synthèse de parole

Dans le modèle auto-régressif on suppose que le signal enregistré est  $X$  et qu'il est obtenu à partir d'un bruit blanc  $\epsilon$  suivant le filtre récursif suivant

$$X_n + h_1 X_{n-1} + \dots + h_p X_{n-p} = \epsilon_n$$

Ceci modélise le fait qu'un signal qui possède les statistiques d'un bruit blanc, ici  $\epsilon$ , passe dans un filtre qui se trouve être récursif. Dans ce problème il y a deux inconnus, les  $h_j$  et le signal  $\epsilon$ .

**Un autre programme :** La fonction `lpc_morceau` calcule les coefficients  $h_j$ . Elle est très semblable à la fonction `moindres_carres` : elle minimise la norme de  $h * X$ , sauf qu'écrit comme cela il suffit de prendre  $h = 0$  pour obtenir une solution imbattable. On force  $h_0 = 1$  pour éviter une solution triviale et on minimise  $\|h * X\|$ .

### 2.1 Test du modèle et du programme fourni

À l'issue des commandes suivantes, on voudrait avoir **hestim=h**

```
N=1000
h=np.asarray([1,1/2])
sigma=1
epsilon=sigma*randn(N)
X=lfilter([1],h,epsilon) # help(lfilter) pour comprendre la position du h
hestim=lpc_morceau(1,X)
hestim
```

Retrouvez-vous bien le filtre  $h$  utilisé ? Que se passe-t-il sous Python lorsque la première ligne est remplacée par **h=[1 2]** ? Comment expliquez-vous cela ? (on peut se reporter à la partie filtrage du polycopié).

Revenez à un filtre  $h$  qui n'a pas de pôle à l'extérieur du cercle unité (causal).

Expliquez la valeur affichée par la suite de commandes (pour cela il faut bien lire l'aide de la commande `lfilter`, "help lfilter")

```
tmp=lfilter(hestim,1,X); #Remarquer la position de hestim
sum(tmp**2)/(N*sigma**2)
```

### 2.2 Application du modèle à un signal de parole

La fonction `lpc` découpe un signal en trames d'une taille prescrite et recherche pour chaque trame les coefficients  $h$  qui expliquent le mieux le signal observé. Elle renvoie un tableau dont chaque ligne contient les coefficients de  $h$  pour la trame correspondante et un vecteur qui contient l'écart-type de  $\epsilon$  pour chacune des trames.

La fonction `joue_lpc` fabrique un son en générant un bruit blanc  $\epsilon$  de même écart-type que celui calculé par la fonction `lpc` puis le fait passer dans le filtre spécifié pour chaque trame.

Chargez le son `aeiou` (voix) qui se trouve dans le fichier `modelear.mat`.

```
[lpcs,res]=lpc(aeiou,15,2000);
joue_lpc(lpcs,res,2000,22050);
```

Qu'entendez-vous ? Que se passe-t-il si on élimine le préfiltrage au début du programme `lpc` ?

Remarquez-vous une grande amélioration/dégradation lorsque le paramètre  $p$  varie ?

Modifiez la fonction `joue_lpc` afin qu'elle regénère le son non pas en introduisant un bruit blanc mais un signal formé d'impulsions éloignées de 0.01 secondes entre elles (on rappelle que les sons traités ici sont échantillonnés à 22050Hz).

En utilisant la fonction `affiche_spectrogramme` dire à quelle fréquence les impulsions devraient être envoyées dans le filtre.

Que pouvez-vous suggérer pour améliorer la qualité de la restitution sonore ? (voir l'alternative dans le programme `joue_lpc`)

### 3 Estimation de la densité spectrale de puissance : périodogramme

On cherche à estimer la densité spectrale de puissance (DSP) d'un processus  $X_n$  stationnaire au sens large et de moyenne nulle, observé sur un intervalle  $n \in [0 \dots N-1]$ , à l'aide de la transformée de Fourier discrète (TFD), implémentée dans la fonction Numpy `fft.fft`. On rappelle que la DSP  $S_X(e^{2i\pi\nu})$  est définie comme la transformée de Fourier à temps discret (TFTD) de la fonction d'autocovariance  $R_X(k)$  :  $S_X(e^{2i\pi\nu}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_X(k) e^{-2i\pi\nu k}$ .

1. Soit  $\hat{R}_N(k)$  l'estimateur biaisé de la fonction d'autocovariance du processus  $X_n$ . On rappelle que le périodogramme de  $X$ , que nous noterons  $\hat{S}_N(e^{2i\pi\nu})$ , est défini comme  $\hat{S}_N(e^{2i\pi\nu}) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \hat{R}_N(k) e^{-2i\pi\nu k}$ . Exprimer  $\hat{S}_N(e^{2i\pi\nu})$  en fonction de la TFTD du signal  $X_0 \dots X_{N-1}$ .
2. En déduire un algorithme de calcul de  $\hat{S}_N(e^{2i\pi k/M})$  pour  $k \in [0 \dots M-1]$ , où  $M \geq N$  est l'ordre de la TFD utilisée, que vous implémenterez en Python. Testez-le sur un bruit blanc.
3. Comment obtenir la séquence  $\hat{R}_N(k)$  de l'estimateur biaisé de la fonction d'autocovariance à partir de  $\hat{S}_N(e^{2i\pi k/M})$  ? Quelle précaution faut-il prendre sur  $M$  ? Écrire une fonction qui calcule  $\hat{R}_N(k)$  en exploitant cette propriété. Testez-la sur un bruit blanc. Comparer sa complexité algorithmique à celle d'un calcul direct de  $\hat{R}_N(k)$ .
4. Toujours dans le cas du bruit blanc, estimer la variance du périodogramme pour plusieurs horizons d'observation  $N$ , comme fonction de la fréquence réduite  $\nu$ . Qu'observez-vous ?
5. Implémentez la méthode du périodogramme fenêtré présentée en cours, que vous testerez sur un bruit blanc. Estimez la variance de ce périodogramme fenêtré pour plusieurs horizons d'observation  $N$ . Qu'en concluez-vous ?



Contexte académique } sans modifications

***Par le téléchargement ou la consultation de ce document, l'utilisateur accepte la licence d'utilisation qui y est attachée, telle que détaillée dans les dispositions suivantes, et s'engage à la respecter intégralement.***

La licence confère à l'utilisateur un droit d'usage sur le document consulté ou téléchargé, totalement ou en partie, dans les conditions définies ci-après, et à l'exclusion de toute utilisation commerciale.

Le droit d'usage défini par la licence autorise un usage dans un cadre académique, par un utilisateur donnant des cours dans un établissement d'enseignement secondaire ou supérieur et à l'exclusion expresse des formations commerciales et notamment de formation continue. Ce droit comprend :

- le droit de reproduire tout ou partie du document sur support informatique ou papier,
- le droit de diffuser tout ou partie du document à destination des élèves ou étudiants.

Aucune modification du document dans son contenu, sa forme ou sa présentation n'est autorisée.

Les mentions relatives à la source du document et/ou à son auteur doivent être conservées dans leur intégralité.

Le droit d'usage défini par la licence est personnel et non exclusif. Tout autre usage que ceux prévus par la licence est soumis à autorisation préalable et expresse de l'auteur : [sitepedago@telecom-paristech.fr](mailto:sitepedago@telecom-paristech.fr)

## Rappels et notations

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations et définitions suivantes :

- Transformée de Fourier à Temps Continu (TFTC) d'un signal analogique  $x_a(t)$  :

$$X_a(f) = \int_{\mathbb{R}} x_a(t) e^{-2i\pi f t} dt$$

- TFTC inverse :  $x_a(t) = \int_{\mathbb{R}} X_a(f) e^{+2i\pi f t} df$
- Transformée de Fourier à Temps Discret (TFTD) d'un signal discret  $x(n)$  :

$$X(e^{2i\pi\nu}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) e^{-2i\pi\nu n}$$

- TFTD inverse :  $x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(e^{2i\pi\nu}) e^{+2i\pi\nu n} d\nu$
- Transformée de Fourier Discrète (TFD) d'ordre  $M$  d'un signal discret fini  $x_M(n)$  :

$$X_M(k) = \sum_{n=0}^{M-1} x_M(n) e^{-2i\pi \frac{k}{M} n}$$

- TFD inverse :  $x_M(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X_M[k] e^{+2i\pi \frac{k}{M} n}$
- Transformée en Z d'un signal discret  $x(n)$  :

$$X(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) z^{-n}$$

- Formule d'échantillonnage : si  $\forall n \in \mathbb{Z}, x_e(n) = x_a(nT)$  où  $T \in \mathbb{R}_+^*$ , alors

$$X_e(e^{2i\pi\nu}) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_a\left(\frac{\nu + k}{T}\right) \quad (1)$$

- Fonction d'autocovariance d'un processus  $X(n)$  stationnaire au sens large (SSL) réel :

$$R_X(k) = \mathbb{E}((X(n+k) - m_X)(X(n) - m_X)) \text{ indépendamment de } n, \text{ où } m_X = \mathbb{E}(X(n)) \forall n \in \mathbb{Z}$$

- Densité spectrale de puissance (DSP) d'un processus  $X(n)$  SSL :

$$S_X(e^{2i\pi\nu}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_X(k) e^{-2i\pi\nu k}$$

- **Filtrage des processus SSL** : Soit  $Y(n)$  le processus obtenu par filtrage stable, de réponse impulsionnelle  $h(n)$  et de fonction de transfert  $H(z)$ , d'un processus SSL  $X(n)$ . Alors  $Y(n)$  est SSL :
  - de moyenne  $m_Y = H(1) m_X$  (où  $H(1)$  est la valeur de la réponse en fréquence en  $\nu = 0$ ),
  - de fonction d'autocovariance  $R_Y = h * \tilde{h} * R_X$  (où  $\tilde{h}(n) = h(-n)^*$ ),
  - de DSP  $S_Y(e^{2i\pi\nu}) = |H(e^{j2\pi\nu})|^2 S_X(e^{2i\pi\nu})$ .
- Formules trigonométriques :

$$\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b)) \quad (2)$$

$$\cos(\theta - \phi) = \cos(\theta) \cos(\phi) + \sin(\theta) \sin(\phi) \quad (3)$$

## 1 Questions courtes

- a) **TFTD d'une suite hermitienne.** Soit un signal  $x(n)$  tel que  $x(n) = x^*(-n)$  (propriété de symétrie hermitienne). On veut utiliser cette propriété pour simplifier le calcul de sa TFTD  $X(e^{2i\pi\nu})$ .
- 1) Soit  $y(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ x(0)/2 & \text{si } n = 0. \\ x(n) & \text{si } n > 0 \end{cases}$   
En remarquant que  $x(n) = y(n) + y(-n)^*$ , exprimer  $X(e^{2i\pi\nu})$  en fonction de la TFTD  $Y(e^{2i\pi\nu})$ .
- 2) En déduire une façon de calculer la transformée  $X_M(k) = \sum_{n=-N+1}^{N-1} x(n)e^{-2i\pi\frac{kn}{M}}$  (avec  $M \geq 2N-1$ ) d'un signal  $x(n)$  de support  $[-N+1, N-1]$ , à partir de la TFD d'ordre  $M$  d'un signal  $y(n)$  de support  $[0, N-1]$ .
- b) **Filtrage.** Soit le filtre défini par sa relation entrée-sortie  $y(n) = x(n+1) + 0.5x(n) + 0.5x(n-1) + x(n-2)$ .
- 1) Ce filtre est-il à réponse impulsionnelle finie (RIF) ou à réponse impulsionnelle infinie (RII), causal ou non causal ?
- 2) Exprimer sa réponse impulsionnelle (RI)  $h(n)$ .
- 3) Calculer sa réponse en fréquence sous la forme  $H(e^{j2\pi\nu}) = H_1(\nu)H_R(\nu)$  où  $H_R \in \mathbb{R}$  et  $|H_1(\nu)| = 1 \forall \nu$ . On précisera les expressions de  $H_1$  et  $H_R$ .
- c) **Processus MA.** On considère un processus aléatoire  $Z(n)$  obtenu par filtrage d'un bruit blanc réel  $B(n)$  de variance  $\sigma^2$  par un filtre RIF réel dont la réponse impulsionnelle  $h(n)$  a pour support  $[0 \dots M-1]$ .
- 1) Rappeler l'expression de la fonction d'autocovariance  $R_B(k)$  et de la DSP  $S_B(e^{2i\pi\nu})$  du bruit blanc.
- 2) Démontrer ensuite que  $Z(n)$  est un processus SSL centré, que sa fonction d'autocovariance est  $R_Z(k) = \sigma^2 h \star \tilde{h}$  (où  $\tilde{h}(n) = h(-n)$ ) et que sa densité spectrale de puissance est  $S_Z(e^{2i\pi\nu}) = \sigma^2 |H(e^{2i\pi\nu})|^2$  (on pourra appliquer le théorème de filtrage des processus SSL).
- d) **Somme de deux processus SSL.** Soient deux processus  $X_1(n)$  et  $X_2(n)$  indépendants, SSL, centrés, de fonctions d'autocovariance  $R_{X_1}$  et  $R_{X_2}$ , et de DSP  $S_{X_1}$  et  $S_{X_2}$ . Prouver que le processus  $X(n) = X_1(n) + X_2(n)$  est aussi SSL, centré, de fonction d'autocovariance  $R_X(k) = R_{X_1}(k) + R_{X_2}(k)$  et de DSP  $S_X(e^{2i\pi\nu}) = S_{X_1}(e^{2i\pi\nu}) + S_{X_2}(e^{2i\pi\nu})$ .

## 2 Modèles sinusoïdaux à amplitude aléatoire

Soit le signal

$$X(n) = A(n) \cos(2\pi\nu_0 n) + B(n) \sin(2\pi\nu_0 n)$$

où  $\nu_0$  est une pulsation réduite donnée et  $A(n)$  et  $B(n)$  sont deux processus stationnaires au sens large (SSL) indépendants, d'espérance nulle et de même fonction d'autocovariance notée  $R(k)$ .

- (a) Démontrer que  $X(n)$  est un processus SSL centré de fonction d'autocovariance  $R_X(k) = R(k) \cos(2\pi\nu_0 k)$ .
- (b) Exprimer la densité spectrale de puissance de  $X(n)$ ,  $S_X(e^{j2\pi\nu})$ , en fonction de la densité spectrale de puissance commune de  $A(n)$  et  $B(n)$  (que l'on notera  $S(e^{j2\pi\nu})$ ).

## 3 Estimation de hauteur

Soient  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $\nu_1 = 1/N$ . On considère le processus aléatoire  $P(n) = \sum_{h=1}^H a_h \cos(2\pi\nu_h n + \phi_h)$ , où  $\forall h \in [1 \dots H]$ , l'amplitude  $a_h \in \mathbb{R}_+^*$  et la fréquence  $\nu_h = h\nu_1$  sont des constantes fixées, la phase  $\phi_h$  est une variable aléatoire de densité de probabilité uniforme dans l'intervalle  $[0, 2\pi[$  ( $\phi_h \sim \mathcal{U}([0, 2\pi[)$ ), et toutes les phases sont supposées indépendantes. L'objectif est d'estimer la période  $N$  à partir des échantillons  $P(n)$ .

- a) Prouver que  $P(n)$  est un processus stationnaire au sens large de moyenne nulle, et de fonction d'autocovariance  $R_P(k) = \sum_{h=1}^H \frac{a_h^2}{2} \cos(2\pi\nu_h k)$ .
- b) Quelle est la période de la fonction  $R_P$  ? Pour quelles valeurs de  $k$  cette fonction atteint-elle son maximum ? En déduire une méthode pour estimer la période  $N$ .



- c) On suppose à présent que le signal observé n'est plus  $P(n)$ , mais un signal bruité  $X(n) = P(n) + Z(n)$ , où le bruit  $Z(n)$  est modélisé comme le résultat du filtrage d'un bruit blanc  $B(n)$  de variance  $\sigma^2$  par un filtre RIF dont la réponse impulsionnelle  $h(n)$  a pour support  $[0 \dots M-1]$ . En supposant que  $B(n)$  est indépendant des phases  $\phi_h$ , prouver que  $X(n)$  est un processus SSL centré, et déterminer l'expression de  $R_X(k)$  (on pourra utiliser le résultat de la question 1.d) : la fonction d'autocovariance de la somme de deux processus SSL indépendants est égale à la somme de leurs fonctions d'autocovariance).
- d) Quel est le support de la fonction  $R_Z(k)$ ? (on pourra utiliser le résultat de la question 1.c)2)) En déduire une condition sur  $M$  et  $N$  pour que la méthode d'estimation de la période  $N$  évoquée dans la question 3.b) reste applicable (en supposant  $M$  connu).

## 4 Filtre dérivateur

On considère un signal  $x(t)$  à temps continu à l'entrée d'un filtre de fonction de transfert  $H(f)$  (où  $f$  est la fréquence exprimée en Hz). On note  $y(t)$  le signal en sortie. Connaissant  $H(f)$ , on se propose de déterminer un filtre à temps discret de fonction de transfert  $H_e(e^{i2\pi\nu})$  (où  $\nu$  est la fréquence réduite) qui, ayant en entrée les échantillons  $x_e(n) = x(nT)$ , aurait pour sortie les échantillons  $y_e(n) = y(nT)$  (voir la figure 1).

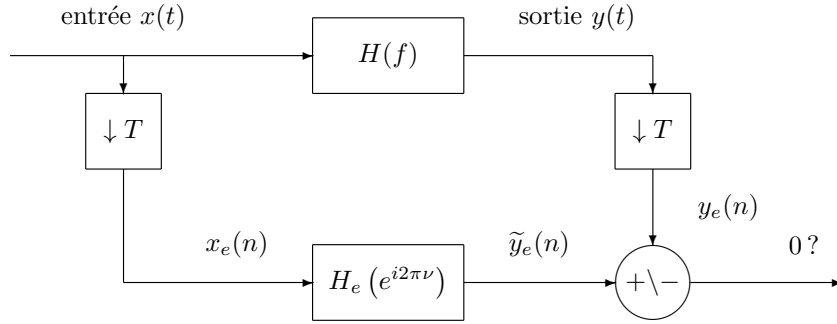


FIGURE 1 – Comparaison des sorties aux instants d'échantillonnage

- a) En utilisant la formule (1) page 1, exprimer les TFTD  $Y_e(e^{i2\pi\nu})$  et  $\tilde{Y}_e(e^{i2\pi\nu})$  des signaux à temps discret  $y_e(n)$  et  $\tilde{y}_e(n)$ , en fonction de  $T$ ,  $H(f)$ ,  $H_e(e^{i2\pi\nu})$  et  $X(f)$ .
- b) Démontrer que le filtre discret, défini par la relation  $H_e(e^{i2\pi\nu}) = H(\frac{\nu}{T})$  pour tout  $\nu \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$ , est tel que pour tout signal  $x(t)$  à bande limitée  $[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$ ,  $\tilde{y}_e(n) = y_e(n) \forall n \in \mathbb{Z}$ .
- c) On souhaite à présent synthétiser un filtre dérivateur. On suppose que  $x(t)$  est une fonction sommable ( $x \in L^1(\mathbb{R})$ ) de classe  $\mathcal{C}^1$ , dont la dérivée  $x'(t)$  est également sommable. Prouver que  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0$ , et calculer la transformée de Fourier de  $x'(t)$  (si vous ne parvenez pas à démontrer que  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0$ , vous pouvez admettre ce résultat et simplement calculer  $x'(t)$ ).
- d) En déduire que la dérivation peut être vue comme un filtre de réponse en fréquence  $H(f) = i2\pi f$ , et exprimer le gain complexe  $H_e(e^{i2\pi\nu})$  du filtre linéaire à temps discret correspondant (on utilisera le résultat de la question b)).
- e) En déduire la réponse impulsionnelle  $h_e(n)$  de ce filtre. Ce filtre est-il stable?
- f) On considère maintenant le filtre discret de réponse en fréquence  $H'_e(e^{i2\pi\nu}) = H_e(e^{i2\pi\nu})e^{-i\pi\nu}$  (le terme  $e^{-i\pi\nu}$  peut être vu comme un retard d'1/2 échantillon, ce qui ne change pas fondamentalement le caractère dérivateur de ce filtre). Calculer sa réponse impulsionnelle  $h'_e(n)$ . Ce filtre est-il stable?
- g) Comparer les vitesses de décroissance des réponses impulsionnelles  $h_e(n)$  et  $h'_e(n)$  calculées aux questions e) et f).
- h) Vérifier que la réponse en fréquence  $H_e(e^{i2\pi\nu})$  définie en d) est discontinue, alors que  $H'_e(e^{i2\pi\nu})$  définie en f) est continue. Quelle propriété de la transformée de Fourier aurait permis d'anticiper la réponse à la question g) sans même calculer les réponses impulsionnelles?