

- De la même manière, si l'on considère les modes de rang inférieur à n , on trouve :

$$Y_{ij} \simeq j\omega \sum_{l < n} \frac{\Phi_l(x_i) \Phi_l(x_j)}{m_l \omega_l^2} \simeq \frac{j\omega}{K} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{K} = \sum_{l < n} \frac{\Phi_l(x_i) \Phi_l(x_j)}{m_l \omega_l^2} . \quad (3.107)$$

La contribution à l'admittance des modes de rang inférieur à n est donc équivalente à une raideur de valeur K (résidu élastique). En résumé, au voisinage d'un mode n donné, l'admittance de transfert s'écrit de manière approchée :

$$Y_{ij}(\omega) \simeq j\omega \frac{\Phi_n(x_i) \Phi_n(x_j)}{m_n (\omega_n^2 - \omega^2)} + \frac{j\omega}{K} + \frac{1}{jM\omega} . \quad (3.108)$$

En règle générale, on ne peut se limiter au terme de rang n du développement de Y_{ij} et il est nécessaire de prendre en compte les résidus massique M et élastique K qui traduisent l'influence des autres modes.

4. Application aux instruments de percussion

Comme leur nom l'indique, les instruments de percussion sont soumis à une excitation brève, suivi d'un régime de vibration libre. Par conséquent, en régime linéaire, le contenu spectral du son produit pendant la durée d'extinction est composé des fréquences propres du système excité. Dans le premier chapitre de cet ouvrage, nous avons rappelé les équations de base qui gouvernent les vibrations des structures élémentaires qui composent les instruments de percussion : barres, plaques, membranes et coques. Nous avons également décrit dans ce même chapitre 1 les principaux mécanismes d'excitation par impact de ces instruments. Fort de ces résultats et des propriétés générales des modes énoncées dans le présent chapitre, nous sommes en mesure d'en décrire à présent les propriétés vibratoires.

4.1. Vibrations des barres

Les modèles de barres sont bien adaptés à la description du fonctionnement des instruments de percussion à clavier : xylophone, vibraphone, marimba, glockenspiel,... Pour ces instruments, les vibrations de flexion transversales sont prépondérantes, ce qui justifie une attention particulière. Cependant d'autres modes, et notamment les modes de torsion, peuvent être excités. Ceci est d'autant plus vrai que l'on s'intéresse aux barres dans les registres élevés, c'est-à-dire quand les hypothèses de "solide élancé" sont moins bien vérifiées⁸.

Dans ce paragraphe, nous nous limitons au cas des vibrations de flexion transversales. Nous examinons d'abord la solution de référence analytique fournie par le cas des barres de section constante. Nous étudions ensuite le cas des barres de section variable, qui correspond plus à la réalité instrumentale. Enfin, le cas particulier des barres précontraintes permet de faire le lien avec les vibrations transversales de cordes étudiées au paragraphe 3.

⁸ Le mot *lame* est le terme consacré communément employé pour désigner les barres de xylophone. Dans la suite, on utilisera indifféremment l'un ou l'autre terme. En dynamique des structures, on utilise le terme *poutre* pour désigner des solides élancés en régime de flexion, conservant le terme de *barre* pour les vibrations longitudinales. Nous n'effectuons pas cette distinction ici, qui est peu pratiquée en acoustique musicale.

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, l'équation des vibrations de flexion transversale des barres, dans le cadre de l'approximation d'Euler-Bernoulli et pour un matériau isotrope, s'écrit :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho(x) S(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (3.109)$$

on l'on a noté ici $y(x, t)$ le déplacement vertical transverse (selon \mathbf{e}_y). Les modes propres $y(x, t) = \Phi(x) \cos \omega t$ sont les solutions sinusoïdales en temps de (3.109) qui doivent satisfaire l'équation :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 \Phi}{dx^2} \right) - \omega^2 \rho(x) S(x) \Phi = 0. \quad (3.110)$$

L'équation (3.110) ne peut généralement pas se résoudre analytiquement, sauf dans quelques cas simples comme celui d'une barre de section constante traité au paragraphe 4.1.1 ci-après. Pour les sections variables, on est contraint d'utiliser des techniques de résolution approchées (voir le paragraphe 4.1.2), sauf dans quelques cas particuliers.

4.1.1. Barre libre-libre de section constante

Considérons le cas de référence d'une barre homogène, isotrope, de longueur L , de largeur b , d'épaisseur h , de section droite constante $S = bh$, dont le moment d'inertie par rapport à la fibre neutre en $z = h/2$ (voir figure 3.21) est égal à $I = bh^3/12$. Dans ce cas, l'équation (3.109) se réduit à :

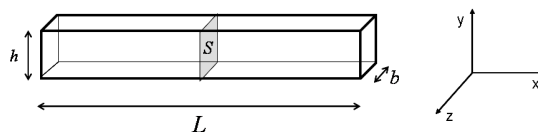


Figure 3.21. Géométrie de la barre de section constante.

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (3.111)$$

La recherche de solutions propres de (3.111) sous la forme $y(x, t) = \Phi(x) \cos \omega t$ conduit à la solution générale [181] :

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= A \cosh kx + B \sinh kx + C \cos kx + D \sin kx \\ \text{avec } k &= \frac{\omega}{v} \quad \text{où } v = \sqrt{\omega}^4 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Cette expression montre que v , qui est la *vitesse de phase* des ondes de flexion, croît comme la racine carrée de la pulsation ω . On a donc affaire à des ondes dispersives, les fréquences élevées se propageant plus rapidement que les fréquences basses. L'équation de dispersion associée à (3.111) s'écrit :

$$EI k^4 - \rho S \omega^2 = 0, \quad (3.113)$$

d'où l'on tire v en fonction de k :

$$v = \frac{\omega}{k} = k \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}. \quad (3.114)$$

On montre que la vitesse de propagation de l'énergie est donnée non pas par la vitesse de phase, mais par la vitesse de groupe (voir, par exemple, [198]). Pour un

“paquet d’ondes” localisé en temps, cette vitesse s’identifie avec celle de l’enveloppe et se calcule par :

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = 2k \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} = 2v = 2\sqrt{\omega} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} . \quad (3.115)$$

La vitesse de groupe est ici exactement le double de la vitesse de phase. Ce résultat fait apparaître un phénomène paradoxal, à savoir que la vitesse de groupe des ondes élastiques de flexion dans la barre tend vers l’infini avec la fréquence. Ceci est contraire aux lois de la physique car cela signifierait que certaines ondes de flexion peuvent se propager plus vite que la vitesse de la lumière. Il n’en est rien évidemment. Ce paradoxe apparent est dû au modèle simplifié d’Euler-Bernoulli qui néglige les effets de rotation inertielle de la barre et la déformation des sections droites due au cisaillement. Lorsque l’on introduit ces deux phénomènes dans le modèle de barre (modèle de Timoshenko [197]), on trouve alors que la célérité des ondes de flexion varie en $\sqrt{\omega}$ en basses fréquences puis tend vers une asymptote lorsque la fréquence augmente, ce qui est plus raisonnable (voir la Figure 3.22). Pour poursuivre le calcul on introduit les conditions aux limites libres, qui cor-

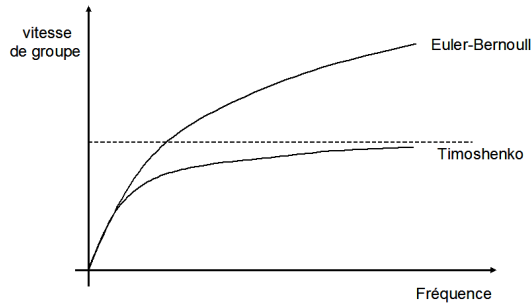


Figure 3.22. Vitesse de groupe des ondes de flexion dans une barre, pour différents modèles.

respondent à des forces et moments nuls exercés par le milieu extérieur sur les extrémités de la barre (cf. le chapitre 1) et qui s’écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0, t) &= \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(L, t) = 0, \\ \text{et } \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(0, t) &= \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(L, t) = 0 . \end{aligned} \quad (3.116)$$

On aboutit finalement à l’équation des fréquences propres pour une lame de section constante libre aux deux extrémités (voir Figure 3.24) :

$$\cos \frac{\omega L}{v} \cosh \frac{\omega L}{v} = 1 . \quad (3.117)$$

Remarque : Dans la pratique, les conditions aux limites libres sont réalisées par des suspensions souples. Celles-ci, conjuguées avec la masse totale de la barre fournissent un mode rigide supplémentaire à l’ensemble (cf § 3.1.1). Dans la pratique, ce mode rigide a une fréquence propre de quelques Hz, très faible devant la première fréquence propre de flexion transversale (voir la figure 3.23). Une résolution numérique de (3.117) montre que les racines sont telles que $k_n L \simeq (2n + 1)\pi$. A partir de l’équation de dispersion (3.113), on déduit les fréquences propres f_n (en Hz) :

$$f_n \simeq \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \frac{\pi}{8L^2} [3.011^2, 5^2, 7^2, \dots, (2n + 1)^2] . \quad (3.118)$$

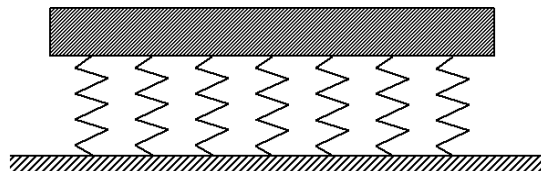


Figure 3.23. Barre de xylophone avec sa suspension.

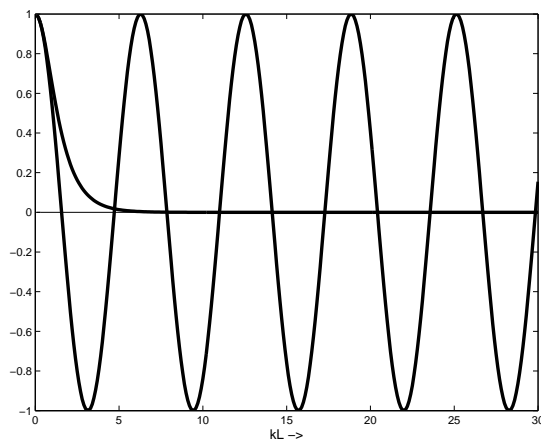


Figure 3.24. Résolution graphique de l'équation aux fréquences propres d'une barre libre homogène de section constante.

Contrairement au cas d'une corde idéale, les fréquences propres de flexion de la barre de section constante sont inharmoniques, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas multiples entières d'un fondamental. Cette propriété est visible sur la Figure 3.25 qui montre le spectre d'amplitude de vibration d'une lame de section constante. Sur cette même figure, on peut voir un pic spectral supplémentaire voisin de zéro (qq. Hertz) qui correspond à la résonance de suspension des lames. Cette résonance, non prévue par l'équation (3.117) ne produit aucun son. Du point de vue

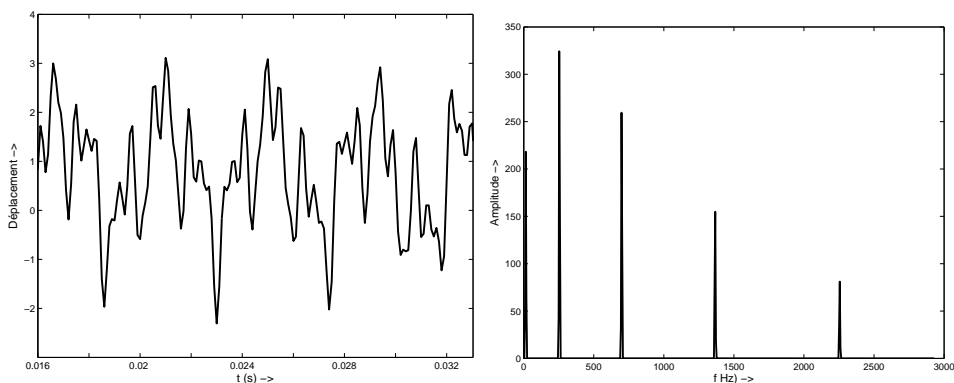


Figure 3.25. Forme d'onde et spectre d'amplitude de la vibration d'une lame de section constante. La forme d'onde n'est pas périodique et les composantes spectrales ne sont pas dans des rapports entiers entre elles.

musical, l'inconvénient majeur d'un spectre inharmonique est que la (ou les) hauteur(s) perçue(s) est (sont) moins nette(s) que pour un spectre harmonique. Pour

cette raison, les facteurs d'instruments de percussion à clavier taillent les lames sur leur partie inférieure. Lorsque la lame est ainsi taillée, le problème aux fréquences propres se calcule à partir de (3.110). Dans ce cas, il n'existe pas de solutions analytiques et il faut avoir recours à des approximations numériques. On montre qu'il est possible d'optimiser la largeur et la profondeur de la taille (tout en respectant d'autres critères comme, par exemple, la non-apparition de vibrations de torsion ou la limite d'élasticité de la lame) afin de faire en sorte que les partiels d'ordre supérieur soient proches des multiples entiers du fondamental.

4.1.2. Barre de section variable

Nous exposons ci-dessous les principes de résolution d'un problème aux valeurs propres pour les vibrations de flexion d'une barre de section variable par la méthode dite de Galerkin [297]. Celle-ci s'applique aussi bien aux problèmes conservatifs que non-conservatifs. Il s'agit d'une méthode approchée où la solution $\Phi(x)$ de (3.110) est recherchée sous la forme de la somme finie sur p termes :

$$\Phi^{(p)}(x) = \sum_{j=1}^p a_j \phi_j(x) , \quad (3.119)$$

où les fonctions $\phi_j(x)$ sont des données arbitraires qui doivent satisfaire les conditions aux limites cinématiques de la barre : elles sont dites *cinématiquement admissibles*. En introduisant (3.119) dans (3.110) et en définissant $\lambda^{(p)} = (\omega^{(p)})^2$ les valeurs propres approchées d'ordre p , on définit le *résidu de Galerkin* :

$$\mathcal{R} [\Phi^{(p)}(x)] = \frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 \Phi^{(p)}}{dx^2} \right) - \lambda^{(p)} \rho(x) S(x) \Phi^{(p)} , \quad (3.120)$$

qui s'écrit, compte tenu de (3.119) :

$$\mathcal{R} [\Phi^{(p)}(x)] = \sum_{j=1}^p a_j \left\{ \frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 \phi_j(x)}{dx^2} \right) - \lambda^{(p)} \rho(x) S(x) \phi_j(x) \right\} . \quad (3.121)$$

On met à profit les fonctions $\phi_j(x)$ pour obtenir une *formulation faible* du problème aux valeurs propres, soit après multiplication par une fonction ϕ_i quelconque et intégration sur toute la longueur de la barre :

$$\int_0^L \phi_i(x) \sum_{j=1}^p a_j \left\{ \frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 \phi_j(x)}{dx^2} \right) - \lambda^{(p)} \rho(x) S(x) \phi_j(x) \right\} dx = 0 . \quad (3.122)$$

Le problème revient à rechercher les coefficients a_j qui annulent le résidu $\mathcal{R} [\Phi^{(p)}(x)]$. La formulation (3.122) s'écrit donc :

$$\sum_{j=1}^p k_{ij} a_j - \lambda^{(p)} \sum_{j=1}^p m_{ij} a_j = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \dots, p , \quad (3.123)$$

où les coefficients de masse et de raideur sont donnés par :

$$\begin{aligned} k_{ij} &= \int_0^L \phi_i(x) \frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 \phi_j(x)}{dx^2} \right) dx, \\ \text{et } m_{ij} &= \int_0^L \phi_i(x) \rho(x) S(x) \phi_j(x) dx . \end{aligned} \quad (3.124)$$

On remarque que (3.123) s'écrit sous la forme matricielle :

$$[\mathbb{K} - \lambda \mathbb{M}] \mathbf{a} = 0 , \quad (3.125)$$

où \mathbf{a} est un vecteur de dimension p et où \mathbb{K} et \mathbb{M} sont des matrices de dimensions $p \times p$. On se ramène donc à résoudre un problème aux valeurs propres identique à

celui que nous avons développé en début de chapitre pour les systèmes discrets.

L'exemple le plus simple d'une barre de section variable est illustré par la figure 3.26 qui représente une barre creusée uniformément en son milieu. Enlever de la matière au centre réduit l'inertie (proportionnelle à l'épaisseur), mais encore plus la raideur (proportionnelle au cube de l'épaisseur), et donc ceci fait décroître les fréquences dont les déformées présente un maximum au centre, c'est-à-dire celles des modes impairs. On comprend que l'on peut ainsi contrôler l'écartement des fréquences propres par creusement.



Figure 3.26. Barre creusée.

4.1.3. Application à la conception et au dimensionnement d'un xylophone

En pratique, on cherche à éviter de réaliser des profils de lames similaires à celui représenté sur la figure 3.26. En effet, les angles droits sont toujours la cause de concentrations de contraintes élevées dans la structure qui la fragilisent. Il est préférable d'usiner des profils qui présentent des rayons de courbure le plus élevé possible sans discontinuités de pente.

Encore aujourd'hui, les découpes de lames des claviers d'instruments à percussion sont réalisées le plus souvent de manière empirique. En creusant vers le milieu, on arrive à baisser la fréquence f_1 du premier partiel de façon significative, à conserver à peu près la fréquence f_2 du second, et à baisser un peu la fréquence f_3 du troisième. Le facteur règle à l'oreille (ou avec un analyseur de fréquences) les rapports $R_1 = f_2/f_1$ et $R_2 = f_3/f_1$. En pratique il devient difficile de chercher à contrôler les partiels de rang supérieur, et l'on se contente de ces deux paramètres. La profondeur du creusement est limitée par la limite de résistance de la lame et par le fait que, si la lame devient trop fine au centre, les vibrations de torsion deviennent importantes. Partant d'une lame de section constante, les valeurs initiales de paramètres (avant creusement) sont, d'après (3.118) égales à :

$$R_{10} = \frac{25}{9} = 2.754 \quad \text{et} \quad R_{20} = \frac{49}{9} = 5.404 . \quad (3.126)$$

L'expérience montre que, pour satisfaire toutes les conditions du problème, le creusement des lames permet d'obtenir R_1 compris entre 3 et 4, et R_2 compris entre 6 et 10, au mieux. Les accords standard retenus par les fabricants sont le plus souvent :

- $R_1 = 3$ et $R_2 = 6$,
- $R_1 = 4$ et $R_2 = 8$,
- $R_1 = 3$ et $R_2 = 9$,
- $R_1 = 4$ et $R_2 = 10$.

Sur les claviers réels, on constate toutefois que ces accords ne sont réalisés que sur les lames correspondant aux notes les plus basses. Dès que l'on atteint le milieu du clavier, les deuxième et troisième partiels ne sont plus en rapport harmonique avec le fondamental. Ceci est dû au fait que les hypothèses de solide élancé "1-D" deviennent caduques dès que la longueur des lames diminue. Orduña-Bustamante a proposé de creuser des profils paraboliques pour l'accord des lames [325]. L'idée

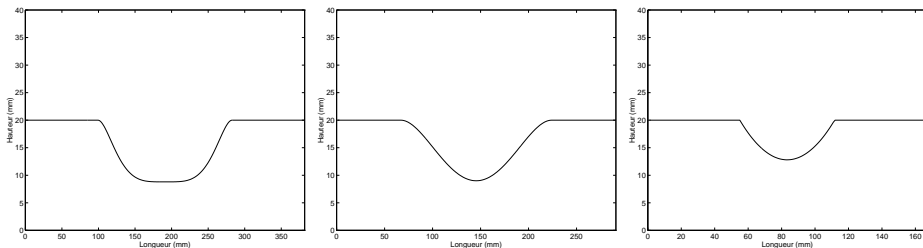


Figure 3.27. Exemples de profils de découpe polynomiaux pour des lames de xylophone. (Gauche) Polynôme d'ordre 8 pour une barre C4 ($f_1 = 262$ Hz); (Centre) Polynôme d'ordre 4 pour une barre C5 ($f_1 = 524$ Hz); (Droite) Polynôme d'ordre 2 pour une barre C7 ($f_1 = 2093$ Hz). D'après [89].

est d'ajuster la profondeur h_c et la largeur x_c du creusement pour régler R_1 et R_2 . Cette idée a été étendue ultérieurement par Doutaut qui a proposé des profils polynomiaux d'ordre 4 et 8 qui permettent une plus grande latitude dans la modification des fréquences propres de la lame (voir la figure 3.27)[89]. Pour faire varier la hauteur d'une lame à l'autre sur un clavier complet, on joue simultanément sur la taille du profil et sur la longueur des lames. Pour un instrument possédant quatre octaves, le rapport des fondamentaux de la lame la plus aiguë à la lame la plus grave est $f_{max}/f_{min} = 2^4 = 16$. Les fréquences propres des lames varient comme l'inverse du carré de la longueur, cf. (3.118), on pourrait penser qu'il suffit d'ajuster les longueurs des lames de telle sorte que $D = L_{max}/L_{min} = 4$. Or, si l'on mesure les lames des instruments usuels, on observe que le rapport D est plutôt voisin de 3 que de 4. Il y a plusieurs raisons à cela : la première est liée à la facilité de jeu car l'instrumentiste a du mal à jouer sur des lames trop courtes dans l'aigu. À l'inverse, les lames trop longues dans le grave sont plus difficiles à usiner, plus encombrantes et utilisent plus de matière. La seconde est liée à la fabrication, car il existe des contraintes liées au système de fixation des lames. Enfin, comme nous l'avons souligné plus haut, il est préférable d'avoir des lames suffisamment longues dans l'aigu en raison de la difficulté d'accord dans ce registre dû au fait que l'on se rapproche d'un solide "3-D" dès que les trois dimensions deviennent comparables. Concrètement, pour réaliser un clavier chromatique où les fréquences fondamentales varient de 6 % d'une note à l'autre, environ 5 % de ces variations sont obtenues en modifiant la longueur la lame et les 1 % restants en jouant sur le creusement. On part de la longueur voulue dans l'aigu, et on creuse donc un peu plus les lames au fur et à mesure que l'on descend vers les notes graves.

4.1.4. Cas d'une barre précontrainte, ou corde raide

Une corde d'instrument de musique est faite de matériaux élastiques et possède, par conséquent, un module d'Young fini. C'est la raison pour laquelle il est impossible d'obtenir expérimentalement une discontinuité de pente (un coude) sur une corde lorsqu'on la tord. Ceci est particulièrement vrai pour les cordes métalliques et, principalement, pour les cordes de piano de grand diamètre. On remarque, d'ailleurs, que lorsque l'on tient une telle corde à une extrémité, celle-ci se tient d'elle-même presque droite, à la manière d'une barre. Par conséquent, il est nécessaire de raffiner le modèle des cordes par rapport à celui d'une corde idéale, en tenant compte à la fois de la précontrainte axiale appliquée (la tension T par unité de section droite) et de la raideur. L'équation des vibrations transversales de la corde raide (ou, de manière équivalente, de la barre précontrainte) s'écrit donc :

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} . \quad (3.127)$$

Pour une onde propagative de la forme $y(x, t) = e^{j(\omega t - kx)}$, on obtient l'équation de dispersion :

$$\omega^2 = k^2 c^2 \left(1 + \frac{EI}{T} k^2 \right) . \quad (3.128)$$

Pour une corde de longueur L , les ordres de grandeurs usuels sont tels qu'il est justifié de définir un coefficient adimensionné $\varepsilon = \frac{EI}{TL^2}$ petit devant l'unité de sorte que l'équation (3.128) devient :

$$\omega^2 = k^2 c^2 (1 + \varepsilon k^2 L^2) . \quad (3.129)$$

Pour le cas simple d'une corde raide supposée appuyée à ses deux extrémités, il faut imposer déplacement et moment nuls en ces deux points, ce qui fournit la condition sur les nombres d'onde :

$$\sin kL = 0 \quad \text{soit} \quad k_n L = n\pi . \quad (3.130)$$

On en déduit par (3.129) les pulsations propres de la corde raide :

$$\omega_n \simeq \frac{n\pi c}{L} \left(1 + \varepsilon \frac{n^2 \pi^2}{2} \right) . \quad (3.131)$$

On constate que, sous l'effet de sa raideur intrinsèque, les fréquences propres de la corde sont supérieures à celles de la corde idéale correspondante. Cet écart augmente avec le rang n du partiel. C'est ce que l'on observe, par exemple, sur les cordes de piano [340]. L'inharmonicité de raideur d'un partiel de rang n d'une corde d'instrument de musique est définie comme le rapport :

$$i_n = \frac{\omega_n - \omega_{no}}{\omega_{no}} , \quad (3.132)$$

où ω_{no} est la pulsation propre en l'absence de raideur. L'application de cette définition au cas présent conduit à :

$$i_n = \varepsilon \frac{n^2 \pi^2}{2} . \quad (3.133)$$

Dans la réalité, l'inharmonicité de raideur vient s'ajouter à l'inharmonicité due au couplage avec la table d'harmonie, étudiée au paragraphe 3.5.

■ Domaine temporel. Précurseur

Pour les cordes pourvues de raideur, l'équation de dispersion (3.129) montre que la vitesse de phase $v_\phi = \omega/k$ et la vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ sont, toute deux des fonctions monotones croissantes de la fréquence. Dans le domaine temporel on observe, en effet, sur les formes d'onde présentant des pentes raides (comme, par exemple les signaux de force sur une corde de guitare ou de clavecin) des oscillations de fréquence élevées qui précèdent la pente en question. Ces petites

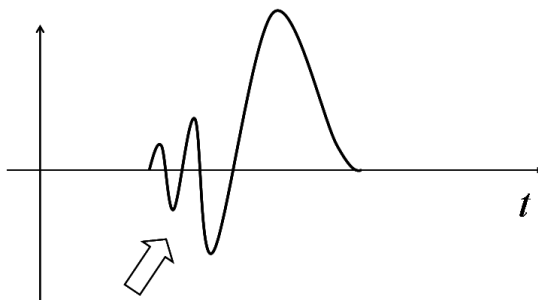


Figure 3.28. Précurseur dû à la raideur en régime linéaire.

ondes sont baptisées “précurseur” et ont été notamment étudiées par Cuesta et Valette [420]. Ces auteurs soulignent également les modifications de ce précurseur sous l’effet de non-linéarités d’amplitude (voir le chapitre 8) et leur importance perceptive.

4.2. Vibrations des membranes dans le vide

On peut faire pour les systèmes bidimensionnels la même distinction que la précédente entre les cordes et les barres. Ainsi, on convient d’appeler *membrane idéale* une structure mince, c’est-à-dire d’épaisseur faible devant ses autres dimensions, où la raideur est due exclusivement à une précontrainte, c.-à-d. à une tension surfacique appliquée sur son pourtour. De la même manière, on appelle *plaque* une structure mince bidimensionnelle où la raideur est due à l’élasticité interne du matériau. Comme pour les cordes, les membranes réelles possèdent un module d’élasticité non nuls. Enfin, on rencontre également en acoustique musicale des plaques précontraintes comme, par exemple, les tables d’harmonie du piano. D’une façon générale, on peut considérer que, pour la quasi-totalité des instruments à cordes, le corps de l’instrument est précontraint par la tension statique des cordes. Pour les membranes, l’une des spécificités importantes résulte de l’action du fluide (air) qui en modifie profondément le régime vibratoire. Ceci provient de l’éten-due de la surface d’échange fluide-solide et de la faible épaisseur de la membrane. Dans ce paragraphe, nous n’examinons pour l’instant que le cas des vibrations des membranes dans le vide en gardant présent à l’esprit qu’il ne s’agit que d’un cas limite qui ne présente aucun intérêt pratique en acoustique. Il s’agit cependant d’un modèle de référence dont nous aurons besoin au chapitre 15 lorsque nous aborderons la description de la timbale.

4.2.1. Vibrations transversales libres d’une membrane circulaire

Les membranes sont utilisées dans les instruments de percussion (timbales, tambours, grosse caisse, ...) et dans certains instruments à cordes (banjo, kora africaine,...). Afin d’obtenir un champ de tension surfacique aussi homogène que possible, on utilise quasiment exclusivement la géométrie circulaire. Dans tous les cas, les membranes sont excitées par chocs et donc, une fois terminée la phase d’interaction avec l’excitateur (maillet, baguette), les oscillations sont libres. Nous nous limitons ici à l’étude de ce type d’oscillations. En faisant l’hypothèse des petits déplacements (ce qui n’est, en général, pas justifié pendant la phase d’excitation), on peut admettre que le déplacement transversal libre $z(r, \theta, t)$ dans le vide d’une membrane de densité surfacique σ (en kg.m^{-2}) et de tension par unité de longueur τ (en N.m^{-1}) obéit à l’équation des ondes 2-D (voir le chapitre 1) :

$$\sigma \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \tau \Delta z = \tau \left[\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \right]. \quad (3.134)$$

La résolution de (3.134) est classique et s’effectue par la méthode de séparation des variables [198]. On ajoute, en général, une condition de déplacement nul aux bords $z(r = a, \theta, t) = 0$. Dans la réalité (cas d’une timbale, par exemple) la membrane subit des pertes à sa périphérie consécutives à la présence de matériaux amortissants sur le pourtour et à la transmission de vibrations au corps de l’instrument, mais nous n’en tenons pas compte dans ce chapitre. Pour une membrane circulaire

idéale, le déplacement transversal s'écrit sous la forme [198] :

$$z(r, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} Z_{mn}(r, \theta) (A_{nm} \cos \omega_{mn} t + B_{nm} \sin \omega_{mn} t) + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{Z}_{mn}(r, \theta) (\tilde{A}_{nm} \cos \omega_{mn} t + \tilde{B}_{nm} \sin \omega_{mn} t) \right\}. \quad (3.135)$$

Dans l'expression (3.135), les déformées propres de la membrane sont données par :

$$Z_{mn}(r, \theta) = J_n(\beta_{mn} r) \cos n\theta \quad \text{et} \quad \tilde{Z}_{mn}(r, \theta) = J_n(\beta_{mn} r) \sin n\theta. \quad (3.136)$$

Les indices m et n correspondent respectivement au nombre de cercles nodaux et de diamètres nodaux (voir figure 3.29). Le premier cercle nodal ($m = 1$) correspond

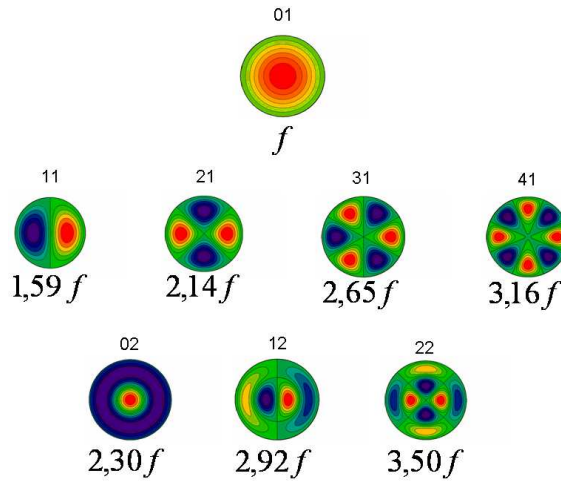


Figure 3.29. Déformées modales d'une membrane circulaire dans le vide. Chaque mode est désigné par nm où n est le nombre de diamètres nodaux et m le nombre de cercles nodaux. Les fréquences propres correspondantes sont indiquées sous chaque déformée.

à la périphérie de la membrane. Les modes dits *symétriques* correspondent au cas $n = 0$, c'est-à-dire lorsqu'il n'existe aucun diamètre nodal. Dans ce cas, seules les déformées du type $Z_{mn}(r, \theta)$ subsistent. Ces modes sont excités lorsque l'on tape près du centre de la membrane. Dans tous les autres cas, on a affaire à un dédoublement des modes qui possèdent, 2 à 2, la même dépendance en r mais qui diffèrent les uns des autres par un décalage angulaire de $\pi/2n$. Les fonctions J_n sont les *fonctions de Bessel de première espèce d'ordre n* [1]. Les valeurs discrètes des nombres d'ondes β_{mn} sont imposées par la condition de fixation au bord. Celle-ci impose :

$$J_n(\beta a) = 0. \quad (3.137)$$

A chaque valeur de n correspond la suite infinie β_{mn} des racines de l'équation (3.137). Pour $n = 0$, par exemple, on trouve que $J_0(\beta a) = 0$ fournit les solutions $\beta_{m0}a = 2.405, 5.520, 8.654, 11.792, 14.931, \dots$. De même les solutions de $J_1(\beta a) = 0$ sont données par $\beta_{m1}a = 3.832, 7.016, 10.173, 13.324, 16.471, \dots$. Les modes $m1$ sont fortement excités lorsque l'on tape près du bord, et s'avèrent être les plus importants musicalement (voir le chapitre 15). Les pulsations propres ω_{mn} sont obtenues à partir de l'équation des ondes 2-D (3.134) :

$$\omega_{mn} = c\beta_{mn} \quad \text{où} \quad c = \sqrt{\frac{\tau}{\sigma}}. \quad (3.138)$$

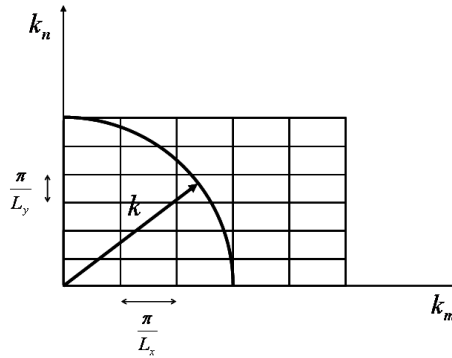


Figure 3.30. Calcul du nombre de modes et de la densité modale pour un système bidimensionnel.

Contrairement au cas des cordes idéales, les fréquences propres d'une membrane dans le vide ne sont pas harmoniques entre elles. Nous verrons au chapitre 15 que l'action conjointe de l'air extérieur et du volume d'air enfermé dans la coque située sous la membrane d'une timbale peut contribuer à rendre quasiment harmoniques les premiers modes $m1$ et à conférer ainsi une hauteur identifiable à la note jouée par percussion près du bord de l'instrument.

4.2.2. Densité modale d'une membrane

Les vibrations transversales d'une membrane *in vacuo* sont gouvernées par une équation des ondes à deux dimensions, soit une généralisation "2-D" de l'équation des cordes vibrantes idéales. L'une des différences principales entre ces deux systèmes concerne la *densité modale* (ou nombre de modes par Hz) que l'on observe dans leurs spectres respectifs.

Dans ce livre, nous aurons l'occasion à plusieurs reprises d'évoquer cette notion de densité modale. Elle intervient, en effet, de façon décisive dans les phénomènes de couplages linéaires et non linéaires, dans les phénomènes de rayonnement acoustique, ou encore dans la représentation statistique des phénomènes vibratoires en hautes fréquences. Pour l'heure nous effectuons une comparaison entre les densités modales d'une corde idéale tendue entre deux extrémités fixes, d'une part, et d'une membrane rectangulaire fixée rigidement sur son pourtour, d'autre part. La géométrie rectangulaire est choisie ici uniquement pour des commodités de calcul, mais les résultats obtenus sont généralisables à d'autres géométries. Nous commençons par calculer le nombre de modes $N(f)$ de fréquences inférieures à une fréquence f donnée. Sur l'échelle des nombres d'onde k , les modes successifs d'une corde sont espacés de π/L . Par conséquent nous avons :

$$N(f) = \frac{k}{\frac{\pi}{L}} = \frac{2Lf}{c} . \quad (3.139)$$

La densité modale est, par définition :

$$D(f) = \frac{dN}{df} = \frac{2L}{c} = \frac{1}{f_1} . \quad (3.140)$$

On retrouve le résultat évident que le nombre de modes par Hz est égal, pour une corde idéale, à l'inverse du fondamental.

Pour une membrane rectangulaire de longueur L_x et de largeur L_y , nous procédons de manière analogue. Les fréquences propres peuvent être obtenues, par exemple,

par la méthode de séparation des variables exposée au paragraphe 3.5. Le lecteur vérifiera, à titre d'exercice, que les nombres d'onde sont donnés par :

$$k_{mn} = \sqrt{k_m^2 + k_n^2} = \sqrt{\frac{m^2 \pi^2}{L_x^2} + \frac{n^2 \pi^2}{L_y^2}} \quad \text{avec} \quad m, n \geq 1. \quad (3.141)$$

Dans le plan (k_m, k_n) , chaque valeur de k_{mn} est représentée par un vecteur d'origine 0 et dont l'extrémité est l'un des noeuds du maillage réalisé avec les pas d'espace $\pi/L_x, \pi/L_y$ (voir la figure 3.30). Le nombre $N(f)$ est obtenu en divisant l'aire du quart de cercle de rayon k par l'aire élémentaire du maillage, soit :

$$N(f) = \frac{\pi}{4} \frac{4\pi^2 f^2}{c^2} \frac{L_x L_y}{\pi^2} = \frac{S f^2}{c^2}, \quad (3.142)$$

où S est la surface de la membrane. On en déduit la densité modale :

$$D(f) = \frac{dN}{df} = \frac{2S}{c^2} f. \quad (3.143)$$

La densité modale d'une membrane est donc proportionnelle à la fréquence. Nous verrons au chapitre 5 que dans les matériaux dont sont faits les peaux de tambour ou de timbale l'amortissement augmente également avec la fréquence. Il en résulte un recouvrement modal tel qu'il n'est plus possible de séparer expérimentalement les modes les uns des autres. Le spectre des signaux vibratoires devient quasiment continu.

4.3. Vibrations transversales des plaques minces

Les plaques planes peuvent être considérées comme des barres à deux dimensions, la troisième dimension (épaisseur) étant, là encore, considérée comme faible devant les deux autres. Les tables d'harmonie du piano, de la guitare et de bien d'autres instruments à cordes (harpe, luth,...) sont convenablement représentées par des modèles de type "plaque". Des plaques métalliques librement suspendues peuvent également être utilisées comme instruments de percussion [366].

On se place dans le cadre de l'approximation linéaire pour les déplacements. En outre, lorsque l'épaisseur est faible et que le domaine de fréquences considéré est tel qu'il est légitime de négliger le cisaillement transverse et l'inertie de rotation, alors on montre que les vibrations transversales des plaques obéissent au modèle de Kirchhoff-Love (voir le chapitre 1). Ce modèle généralise le modèle d'Euler-Bernoulli, précédemment étudié, au cas des plaques.

On rappelle brièvement ci-dessous les expressions des modes de vibration d'une plaque rectangulaire appuyée sur ses bords. Les tables d'instruments à cordes étant réalisées le plus souvent en bois, on privilégie le cas orthotrope. On examine ensuite le cas limite isotrope. Enfin, on discute de l'effet des conditions aux limites. Comme pour les membranes, on se limite dans ce paragraphe au cas des plaques vibrantes dans le vide. L'étude du couplage vibroacoustique entre une plaque vibrante et l'air fait l'objet du chapitre 14.

4.3.1. Plaque rectangulaire orthotrope appuyée sur ses bords

En coordonnées cartésiennes, pour un matériau orthotrope dont les axes d'orthotropie coïncident avec les axes des coordonnées, dans les hypothèses de Kirchhoff-Love, nous avons présenté au chapitre 1 l'équation qui gouverne le déplacement de