Master ATIAM

Quizz de vérification des prérequis pour le traitement du signal

Roland Badeau

1. Espaces vectoriels hermitiens.
   (a) Soit $\mathbb{E}_N$ l'ensemble des suites $x_n \in \mathbb{C}$ de période $N \in \mathbb{N}^*$. Prouver que $\mathbb{E}_N$ est un espace vectoriel.
   (b) Prouver que $\langle x, y\rangle = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n\, y_n^*$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{E}_N$.
   (c) Pour tout $k \in \{0 \ldots N-1\}$, soit e^k le vecteur de coefficients $e_n^k = e^{\frac{2i\pi kn}{N}}$. Vérifier que $(e^k)_{0\leq k<N}$ est une base orthonormée de $\mathbb{E}_N$.
   (d) Soit $h \in \mathbb{E}_N$. Pour tout $x \in \mathbb{E}_N$, on pose $f(x) = y$ où $y_n = \sum_{m=0}^{N-1} h_m x_{n-m}$. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{E}_N$.
   (e) Vérifier que e^k est vecteur propre de f, associé à la valeur propre $\lambda_k = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-2i\pi\frac{k}{N}n}$.
2. Séries entières : on rappelle qu'une "série entière" est une fonction définie par la somme de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$ pour $c_n, z \in \mathbb{C}$.
   (a) Rappeler la forme du domaine de convergence d'une série entière.
   (b) Calculer la somme de la série entière définie par $c_n = \frac{1}{2^n}$. Quel est son rayon de convergence ?
3. Fractions rationnelles
   (a) Soit $a \in \mathbb{C}$. Développer $f(z) = \frac{1}{1-az}$ en série entière sur z. Quel est son rayon de convergence ?
   (b) Soient $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Décomposer la fraction rationnelle $f(z) = \frac{1}{1-2\rho\cos(\theta)z+\rho^2z^2}$ en éléments simples. En utilisant la question précédente, en déduire son développement en série entière. Quel est son rayon de convergence ?
4. Espaces de Lebesgue : on rappelle que $f \in L^p(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt < +\infty$ (où $p \geq 1$).
   (a) Prouver que $L^p(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. On admettra alors que $\|f\|_p = (\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur $L^p(\mathbb{R})$.
   (b) Est-ce que $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ est dans $L^1(\mathbb{R})$?
   (c) Pour quelle valeur de p l'espace $L^p(\mathbb{R})$ est-il un espace de Hilbert ? Quel est le produit scalaire associé ? Rappelez ce qui différentie un espace de Hilbert d'un espace vectoriel hermitien.
5. Produit de convolution : on rappelle que $(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(u)g(t-u)du$.
   (a) Prouver que le produit de convolution est commutatif, associatif et distributif.
   (b) Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$. Prouver que $f * g \in L^1(\mathbb{R})$.
   (c) Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$. Prouver que $f * g \in L^2(\mathbb{R})$.
   (d) Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ ($L^\infty(\mathbb{R})$ désigne l'espace de Lebesgue des fonctions essentiellement bornées, muni de la norme $\|g\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |g(t)|$). Prouver que $f * g \in L^\infty(\mathbb{R})$.
   (e) Soient $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$. Prouver que $f * g \in L^\infty(\mathbb{R})$.
6. Séries de Fourier : on rappelle qu'une série de Fourier est de la forme $X(\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e^{+2i\pi\nu n}$ et que ses coefficients vérifient $x_n = \int_0^1 X(\nu)e^{-2i\pi\nu n}d\nu$.
   (a) Quelle est la période de la fonction $X(\nu)$?
   (b) Prouver que si $x_n \in \mathbb{R}$, $X(\nu)$ est symétrique hermitienne ($X(-\nu) = X(\nu)^\star$).
   (c) Prouver que si $X(\nu) \in \mathbb{R}$, x_n est symétrique hermitienne ($x_{-n} = x_n^\star$).
   (d) Soit $X(\nu) = \mathbf{1}_{[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]}$ pour $\nu \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Calculer ses coefficients de Fourier.
   (e) Soit $X(\nu) = 1 - 2|\nu|$ pour $\nu \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Calculer ses coefficients de Fourier.
   (f) Comparer, dans les deux exemples précédents, la régularité de la fonction $X(\nu)$ et la décroissance des coefficients x_n.