Traitement des signaux déterministes

Roland Badeau,
roland.badeau@telecom-paris.fr

Master Sciences et Technologies
Fondamentaux pour ATIAM

Partie I

Filtrage discret

Causalité et stabilité

- Causalité :
  - $y(n)$ ne dépend que de $x(k)$, $k \leq n$
  - CNS : $h(n) = 0$ si $n < 0$
  - Propriété : entrée causale $\Rightarrow$ sortie causale
  - Remarque : indispensable pour des traitements temps-réel
- Stabilité :
  - Définition : entrée bornée $\Rightarrow$ sortie bornée
  - CNS : $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| < +\infty$ (h dans $l^1(\mathbb{Z})$)
  - Propriété : réponse fréquentielle continue
  - Remarque : indispensable numériquement
    - Si $x_q = x + e$, alors $y_q = y + h * e$.
    - Si $h \in l^1(\mathbb{Z})$, $\|h * e\|_\infty \leq \|h\|_1 \|e\|_\infty$, sinon $h * e$ peut diverger.

Filtres idéaux

- Filtre passe-bas (spectre périodique)
  - Réponse en fréquence : $H(e^{2i\pi\nu}) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\nu| < \nu_c \\ 0 & \text{si } |\nu| > \nu_c \end{cases}$
  - Réponse impulsionnelle : $h(n) = 2\nu_c \,\mathrm{sinc}(2\pi\nu_c n)$
- Filtre passe-bande
  - Réponse en fréquence : $H(e^{2i\pi\nu}) = \begin{cases} 1 & \text{si } ||\nu| - |\nu_0|| < \nu_c \\ 0 & \text{si } ||\nu| - |\nu_0|| > \nu_c \end{cases}$
  - Réponse impulsionnelle : $h(n) = 4\nu_c \,\mathrm{sinc}(2\pi\nu_c n) \cos(2\pi\nu_0 n)$
- Causalité ? Stabilité ?

Régimes transitoire et stationnaire

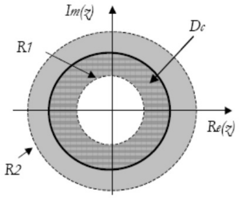
- Exemple :
  - $x(n)$ est un échelon : $x(n) = 1_{[0,+\infty[}(n)$
  - $h(n)$ est un filtre moyenneur : $h(n) = \frac{1}{N} 1_{[0,N-1]}(n)$
  - De $n = 0$ à $N-2$: régime transitoire (rampe)
  - De $n = N-1$ à $+\infty$: régime stationnaire ou permanent (constante)

Partie II

Transformée en Z

Transformée en Z

- Définition : $H(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) z^{-n}$, appelée Fonction de Transfert
- Domaine de convergence : $\mathscr{D} = \left\{ z / \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)||z|^{-n} < +\infty \right\}$
- Cas causal : $R = \inf\{|z|, z \in \mathbb{C} / \sum h(n) z^{-n} < +\infty\}$, $\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$



$z = 1$ en $\nu = 0$

$z = i$ en $\nu = 1/4$

- Filtres RIF : $D = \mathbb{C} \backslash 0$ ou ∞
- Anti-causalité : $\mathscr{D}$ est un disque
- Causalité : $\mathscr{D}$ est le complémentaire d'un disque
- Cas général : $\mathscr{D}$ est une couronne (ou $\emptyset$)

Propriétés élémentaires

- Stabilité : l'anneau $\mathscr{D}$ contient le cercle unité
  - La TZ coïncide avec la TFTD sur le cercle unité
- Linéarité : $a_1 h_1 + a_2 h_2 \rightarrow a_1 H_1 + a_2 H_2 \quad (\mathscr{D} \supset \mathscr{D}_1 \cup \mathscr{D}_2)$
- Retard : $h(n-k) \rightarrow z^{-k} H(z)$
- Inversion du sens du temps
  - Si $f(n) = h(-n)$, $F(z) = H(1/z)$ et $\mathscr{D}_F = 1/\mathscr{D}_H$
- Produit de convolution
  - Si $y = h * x$, $Y(z) = H(z)X(z)$, $\mathscr{D}_y \supset \mathscr{D}_h \cap \mathscr{D}_x$
- Filtre inverse
  - Si $h * h_i = \delta$, $H(z)H_i(z) = 1$ pour $z \in \mathscr{D}_h \cap \mathscr{D}_{h_i}$

Exemples de TZ

- $h(n) = \delta(n) \Rightarrow H(z) = 1 \ \forall z \in \mathbb{C}$
- $h(n) = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(n) \Rightarrow H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \ \forall |z| > 1$
- $h(n) = \mathbf{1}_{[0\ldots N-1]}(n) \Rightarrow H(z) = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \ \forall z \neq 0$
- Filtre AR1 :
  - $h(n) = \begin{cases} a^n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases} \Rightarrow H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$, $\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C} / |z| > |a|\}$
  - $h(n) = \begin{cases} -a^n & \text{si } n < 0 \\ 0 & \text{si } n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$, $\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C} / |z| < |a|\}$

Filtre autorégressif d'ordre 1

Relation E/S	$y(n) - ay(n-1) = x(n)$
Fonction de transfert	$H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$

Implémentation	$y(n) = ay(n-1) + x(n)$	$y(n) = \frac{y(n+1) - x(n+1)}{a}$
RI $(x(n) = \delta_0(n))$	$h(n) = a^n 1_{\{n \geq 0\}}$	$h(n) = -a^n 1_{\{n<0\}}$
Domaine $\mathscr{D}$	$\{z \in \mathbb{C} / \lvert z\rvert > \lvert a\rvert\}$	$\{z \in \mathbb{C} / \lvert z\rvert < \lvert a\rvert\}$
Propriétés	causale, stable si $\lvert a\rvert < 1$	anti-causale, stable si $\lvert a\rvert > 1$

Partie III

Filtres récursifs

Filtres récursifs

- Relation entrée-sortie : $\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$
- Calcul de la sortie (implémentation causale)

$$y(n) = \frac{1}{a_0} \left[\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) \right]$$

- Fonction de transfert : $H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{k=1}^{M} (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N} (1 - d_k z^{-1})}$

Exemples de filtres récursifs

- Filtres Auto-Régressifs (si $M=0$, AR d'ordre N)

$$y(n)=\frac{b_0}{a_0}x(n)-\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{a_0}y(n-k)$$

- Filtres à Réponse Impulsionnelle Finie
  - Si $N=0$, filtre RIF de taille M
  $h(n)=\begin{cases}\frac{b_n}{a_0} & \text{si } n=0\dots M\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$
  - Filtres causaux, inconditionnellement stables
  - Si la RI est symétrique ou antisymétrique, la phase est linéaire

Filtres récursifs

- Fonction de transfert d'un filtre récursif

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M}b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}}=\frac{b_0}{a_0}\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})}$$

  - Définition des pôles et des zéros
  - Domaine de convergence : $\mathscr{D}$ est un anneau limité par 2 pôles, et n'en contenant aucun
  - Filtres stables : $\mathscr{D}$ est le plus grand anneau contenant le cercle unité et aucun pôle
  - Filtres stables et causaux : dont tous les pôles sont strictement à l'intérieur du cercle unité
  - Si les a_k et b_k sont réels, les pôles et zéros sont soit réels, soit vont par paires conjuguées

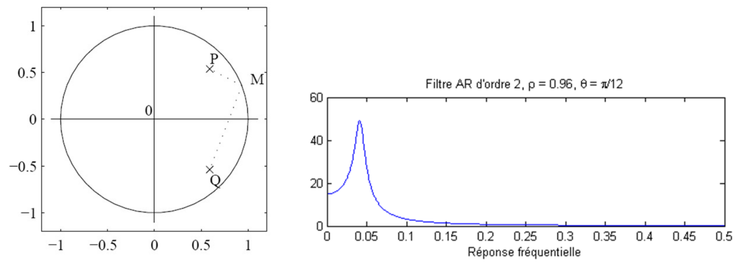
Calcul de la RI à partir de la TZ

1. Extraire si nécessaire de $H(z)$ un terme en z^n, de sorte que les numérateur et dénominateur de $H(z)$ ne contiennent plus que des puissances négatives de z plus une constante
2. Factoriser le numérateur et dénominateur en monômes en z^{-1}
3. Décomposer $H(z)$ en éléments simples en z^{-1}
4. Développer les éléments simples en séries entières :
   - en z^{-1} si on calcule la RI causale, ou si on calcule la RI stable et que le pôle est à l'intérieur du cercle unité ;
   - en z si on calcule la RI anti-causale, ou si on calcule la RI stable et que le pôle est à l'extérieur du cercle unité.
5. Identifier l'expression obtenue avec $H(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}h(n)z^{-n}$

Exemple : $H(z)=\frac{1}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}$

Interprétation géométrique de la RF

Exemple (filtre AR 2) : $H(z)=\frac{1}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}=\frac{1}{(1-pz^{-1})(1-p^*z^{-1})}$



$$|H(z)|=\frac{1}{PM\times QM}$$
$$\arg H(z)=2\arg(OM)-\arg(PM)-\arg(QM)$$

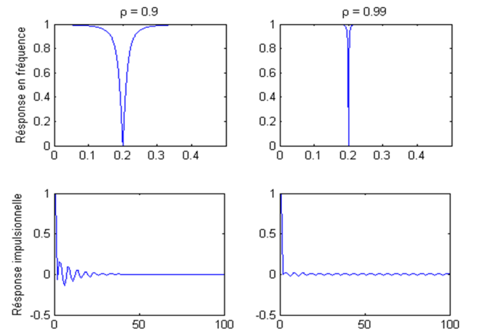
Partie IV

Synthèse de filtres récursifs

Filtre réjecteur (effet Larsen)

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \frac{1-e^{+i2\pi\nu_c}\,z^{-1}}{1-\rho\, e^{+i2\pi\nu_c}\,z^{-1}}\,\frac{1-e^{-i2\pi\nu_c}\,z^{-1}}{1-\rho\, e^{-i2\pi\nu_c}\,z^{-1}}\\
&= \frac{1-2\cos(2\pi\nu_c)z^{-1}+z^{-2}}{1-2\rho\cos(2\pi\nu_c)z^{-1}+\rho^2 z^{-2}}
\end{aligned}
$$

- Remarque : la RI est longue si $\rho \to 1$

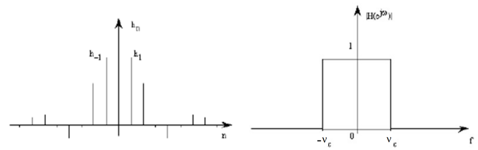


Partie V

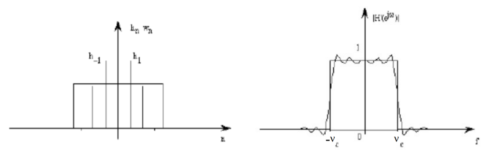
Synthèse de filtres RIF

Méthode de la fenêtre

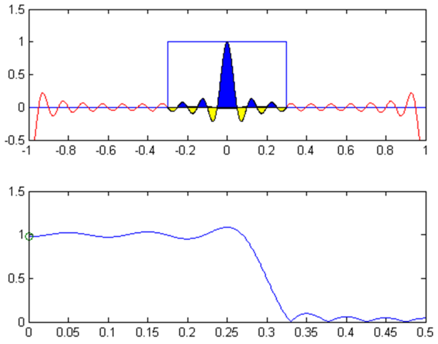
- Exemple : le filtre passe-bas
- Filtre passe-bas idéal : $h(n) = 2\nu_c\,\mathrm{sinc}(2\pi\nu_c n)$
  - La réponse est RII non causale, non stable



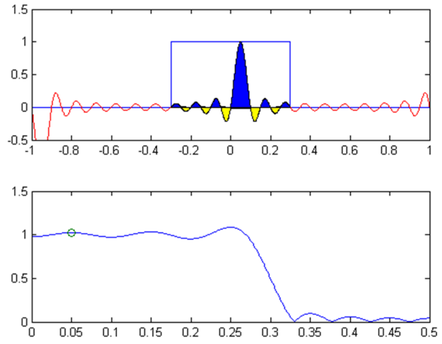
- Synthèse d'un filtre RIF causal de type I
  - Troncature et décalage temporel



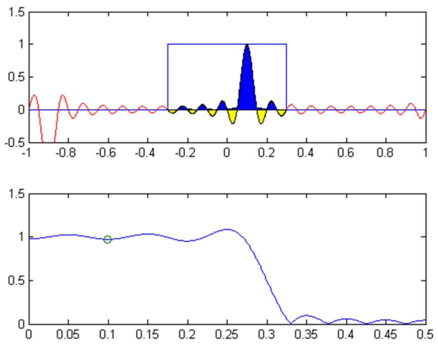
Phénomène de Gibbs



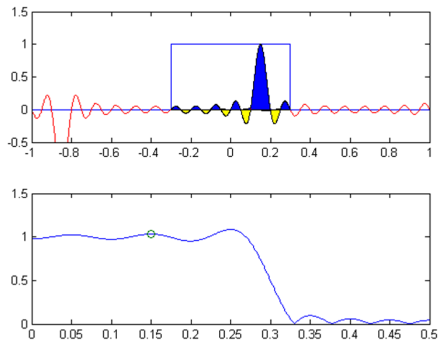
Phénomène de Gibbs



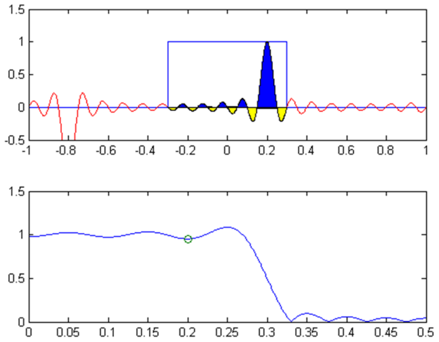
Phénomène de Gibbs



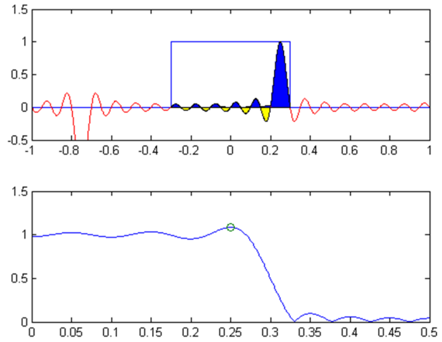
Phénomène de Gibbs



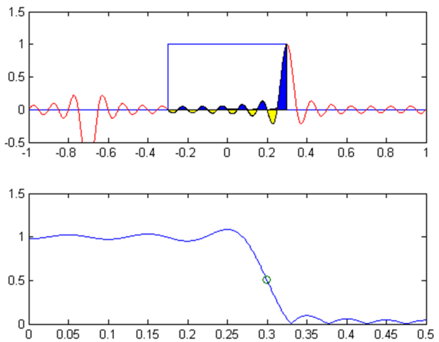
Phénomène de Gibbs



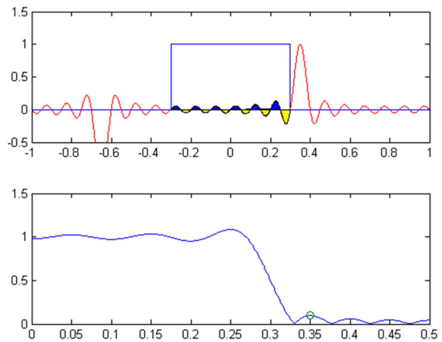
Phénomène de Gibbs



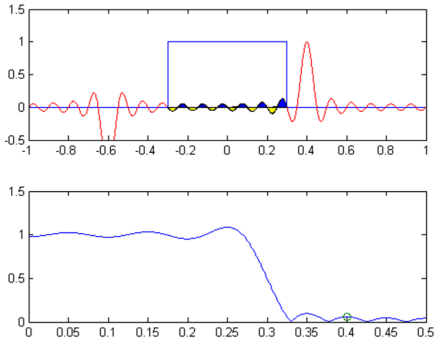
Phénomène de Gibbs



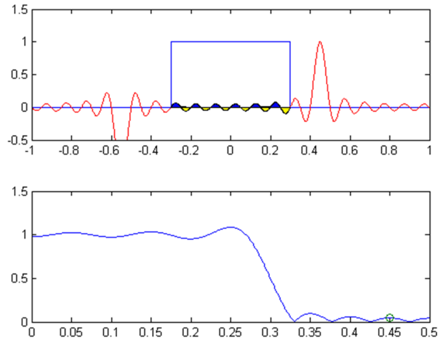
Phénomène de Gibbs



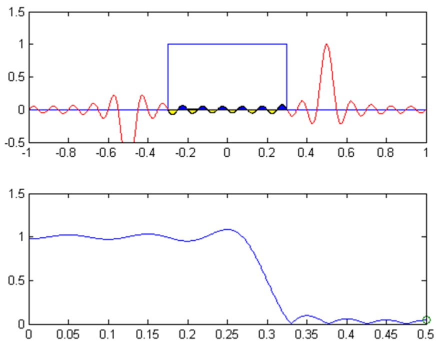
Phénomène de Gibbs



Phénomène de Gibbs



Phénomène de Gibbs



Choix d'une fenêtre adéquate

$$h(n) = 2\nu_c \operatorname{sinc}(2\pi\nu_c n)\, w(n)$$

où $w(n)$ est une fenêtre symétrique de support fini