MASTER ATIAM (Année 2020-2021)
Examen de Traitement du Signal Musical
Partie Analyse-Synthèse

Philippe Depalle, Roland Badeau
Mardi 5 janvier 2021

RENDRE DEUX COPIES: l'une pour Philippe Depalle (première partie) et l'autre pour Roland Badeau (deuxième partie).

Les documents sont autorisés, mais pas les appareils électroniques.

1 Étude de la précision de l'estimation de la fréquence instantanée dans le vocodeur de phase (P. Depalle)

Le but de ce problème est d'étudier la précision de la technique habituelle d'estimation de la fréquence instantanée en sortie de chaque canal du vocodeur de phase. Ceci est d'une grande importance pour la modification de l'échelle temporelle ainsi que pour la transposition des sons puisque la fréquence instantanée joue un rôle primordial dans le calcul de la correction de phase avant re-synthèse du signal. Le problème se déroule en deux étapes. Dans une première partie, la technique d'estimation de fréquence instantanée est passée en revue dans le cas d'un signal à une seule composante. Puis dans une deuxième partie, l'effet de la présence d'une composante perturbatrice est évaluée.

On rappelle que la Transformée de Fourier à Court-Terme (TFCT) $X(b, f)$ donne, à l'instant b en échantillon et à la fréquence normalisée f, une représentation temps-fréquence d'un signal temporel x. On utilise comme définition de la TFCT $X(b, f)$ l'expression suivante :

$$X(b,f) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x[n]\ w[n-b]\ e^{-2\pi jfn} \tag{1}$$

où w est une fenêtre à valeur réelle, causale, et de durée finie M échantillons.

Dans tout le document M est considéré comme un entier impair (que l'on pourra écrire sous la forme $M = 2P + 1$ avec P entier, à chaque fois que cela allégera les notations) et w comme une fonction symétrique par rapport à l'axe vertical passant par son milieu.

1.1 Estimation de la fréquence instantanée dans le cas d'un signal mono-composante

1. Partant de la définition de la fenêtre w, préciser quel intervalle temporel du signal x est utilisé dans l'expression de la TFCT $X_1(b, f)$.
2. On considère le signal exponentiel complexe x_1 dont les paramètres de fréquence, amplitude et phase initiale sont respectivement f_1, a_1 et φ_1 :

   $$x_1[n] = a_1 \exp(j \times (2\pi f_1 n + \varphi_1)) \tag{2}$$

   Calculer la TFCT $X_1(b, f)$ du signal exponentiel complexe x_1 en fonction de ses paramètres et de W, transformée de Fourier de la fenêtre w.
3. Afin d'étudier la phase de $X_1(b, f)$, il faut préciser la contribution de phase de W. Montrer que W peut se mettre sous la forme :

   $$W(f) = \widetilde{W}(f)\ e^{j\Phi_W(f)} \tag{3}$$

   où $\widetilde{W}$ est la transformée de Fourier d'un signal pair $\widetilde{w}$ et Φ_W est une fonction linéaire de la fréquence f. Donner les expressions de $\widetilde{w}$ et de Φ_W.
4. Considérons le cas particulier d'une fenêtre rectangulaire paire de durée M. L'expression de sa transformée de Fourier est $\widetilde{R}(f) = \frac{sin(\pi f M)}{sin(\pi f)}$.

   Quelle est la phase de $\widetilde{R}(f)$?

   À la lumière de ce résultat particulier, en déduire la condition (C_1) que doit satisfaire $\widetilde{W}$ afin que Φ_W soit exactement la phase de W.
5. À partir de maintenant la fenêtre w est choisie parmi celles dont la transformmée de Fourier de sa version centrée $\widetilde{w}$ satisfait la condition (C_1). Ce peut être une fenêtre triangulaire par exemple.

   Donner l'expression de la fonction de phase $\Phi_{X_1}(b, f)$ de la TFCT $X_1(b, f)$ en fonction de φ_1, f_1 et P.
6. Un signal y, a priori quelconque, est observé puis analysé en TFCT pour donner $Y(b, f)$. On décide d'estimer la fréquence instantanée $\widehat{f_y}(b, f)$ du signal

sortant du canal f de la TFCT $Y(b,f)$. Pour cela on utilise l'hypothèse classique que le signal sortant du canal f contient au plus un signal exponentiel complexe.

Montrer que sous cette hypothèse, on peut estimer la fréquence par calcul de la pente de l'accroissement de phase[1] de $Y(b,f)$ constaté entre deux instants b et $b+H$ et donner l'expression de la fréquence estimée $\widehat{f_y}(b,f)$ en fonction de Y et H.

7. En déduire que lorsque le signal observé y est formé de la seule exponentielle complexe x_1, l'estimée $\widehat{f_y}$ vaut la fréquence f_1, pourvu que H ne soit pas trop grand. Donner la condition sur H.

1.2 Perturbation de l'estimation de fréquence instantanée due à la présence d'une deuxième composante

Dans cette partie, on étudie à nouveau l'estimation de la fréquence instantanée du signal exponentiel complexe x_1, de fréquence f_1, d'amplitude a_1 et de phase initiale φ_1 à la sortie du canal de fréquence f d'un vocodeur de phase, lorsqu'elle est perturbée par la présence d'un autre signal exponentiel complexe x_2, de fréquence f_2, d'amplitude a_2 et de phase initiale φ_2.

Reprenant la terminologie de la question 6, on considère le signal observé y :

$$y[n] = x_1[n] + x_2[n] \tag{4}$$

comme résultant du mixage du signal utile x_1 déjà défini et du signal perturbateur x_2 :

$$x_2[n] = a_2 \exp(j \times (2\pi f_2 n + \varphi_2)) \tag{5}$$

1. Exprimer la TFCT $Y(b,f)$ en fonction de $X_1(b,f)$ et du rapport des TFCT X_1 et X_2, noté Γ :
$$\Gamma(b,f) = X_2(b,f)/X_1(b,f) \tag{6}$$
2. En déduire l'expression de $\Gamma(b,f)$ en fonction des paramètres des signaux x_1 et x_2 et de $\widetilde{W}$ et P.
3. Que peut-on dire de l'évolution de la phase de $\Gamma(b,f)$ en fonction de la fréquence f ? et de son évolution en fonction du temps b ?
4. Que peut-on dire de l'évolution du module de $\Gamma(b,f)$ en fonction du temps b ? Dans quelles conditions le module de $\Gamma(b,f)$ est-il petit devant 1 ?
5. En exprimant $\Gamma(b+H,f)$ en fonction de $\Gamma(b,f)$, où H est un intervalle de temps, en déduire que l'accroissement de Γ entre les deux instants b et $b+H$ vaut :
$$\Gamma(b+H,f) - \Gamma(b,f) = 2je^{j\pi H(f_2-f_1)} \sin(\pi H(f_2-f_1))\, \Gamma(b,f)$$
6. En reprenant la structure de l'estimateur de fréquence instantanée $\widehat{f_y}(b,f)$ établie à la question 6 comme fonction de l'accroissement de phase de $Y(b,f)$ entre deux instants b et $b+H$, montrer que la fréquence estimée $\widehat{f_y}(b,f)$ peut s'exprimer comme $\widehat{f_{x_1}}(b,f)$, fréquence estimée en l'absence de composante x_2 ($x_2 = 0$), à laquelle s'ajoute un facteur correctif, noté $\epsilon_\Gamma(b,f)$, dû à la présence de la composante x_2. Expliciter $\epsilon_\Gamma(b,f)$. On rappelle la propriété simple sur l'argument du produit de deux nombres complexes z_1, z_2 :
$$arg(z_1\ z_2) = arg(z_1) + arg(z_2) \tag{7}$$
7. En utilisant les résultats établis aux questions 5 et 6 de cette partie, et le fait que pour un nombre complexe z de module petit devant 1, $arg(1+z)$ peut être approximé à l'ordre 1 par $\Im(z)$, partie imaginaire de z ($arg(1+z) \approx \Im(z)$) reformuler la perturbation $\epsilon_\Gamma(b,f)$ en fonction de $\Gamma(b,f)$ lorsque le module de ce dernier est petit devant 1.
8. En déduire que lorsque $\Gamma(b,f)$ est de module petit devant 1, $\epsilon_\Gamma(b,f)$, perturbation de l'estimation de la fréquence du signal x_1 en présence du signal x_2, peut s'écrire :
$$\epsilon_\Gamma(b,f) = \frac{1}{\pi H}\frac{a_2}{a_1}\frac{\widetilde{W}(f-f_2)}{\widetilde{W}(f-f_1)}\sin(\pi H(f_2-f_1)) \cos((\varphi_2-\varphi_1) + 2\pi(b+P+\tfrac{H}{2})(f_2-f_1))$$
9. On considère qu'au signal x_1 préalablement défini se superpose un signal constant de valeur positive c petite devant a_1. On estime la fréquence instantanée $\widehat{f_y}(b,f)$ dans un canal de fréquence f proche de la fréquence f_1 du signal x_1.
Montrer que la présence de la composante continue crée une modulation de la fréquence instantanée estimée $\widehat{f_y}(b,f)$. Quelle est la fréquence de modulation ?

1. En pratique, la phase estimée est obtenue modulo 2π de la phase vraie. Elle est alors déroulée, ici selon l'axe temporel, au moyen d'une fonction telle que `unwrap` en MATLAB® afin de restaurer l'accès aux pentes vraies.

2 Conversion de fréquence et bancs de filtres (R. Badeau)

Exercice 1 (Conversion de fréquence CD/DAT)

On cherche à réaliser la conversion de fréquence d'échantillonnage de signaux issus d'un lecteur de Compact Disc (CD) vers un magnétophone numérique (DAT). Les normes de fréquence d'échantillonnage sont les suivantes : 44.1 kHz pour le CD, 48 kHz pour le DAT.

1. *A quelle fréquence d'échantillonnage intermédiaire est-on obligé d'interpoler les signaux issus d'un CD ? (on remarquera que $441 = 3 \times 147$ et que $480 = 3 \times 160$)*
2. *Dessiner le schéma (sans implémentation efficace) des opérations de cette conversion de fréquence. Indiquer en particulier les différentes fréquences d'échantillonnage des signaux, et les caractéristiques du filtre, incluant sa fréquence de coupure (en fréquence absolue et en fréquence normalisée) et son amplitude en bande passante.*
3. *A-t-on perdu de la qualité en effectuant cette opération ? Justifier votre réponse.*
4. *Si l'on cherchait à effectuer la conversion inverse (DAT vers CD), le résultat serait-il le même qu'à la question 3 ? Justifier votre réponse.*

Exercice 2 (Implémentations efficaces)

On veut implémenter un sous-échantillonnage d'ordre 3 d'un signal $x(n)$.

1. *Dessiner le schéma (sans implémentation efficace) des opérations à réaliser. On précisera notamment les caractéristiques du filtre utilisé.*
2. *Dessiner ensuite le schéma d'une implémentation efficace de ce sous-échantillonnage, en utilisant les composantes polyphases du filtre.*
