ATIAM : Examen de Traitement du Signal Musical
Partie Analyse-Synthèse

Roland Badeau, Philippe Depalle
Mardi 09 janvier 2024

RENDRE DEUX COPIES: l'une pour Roland Badeau (première partie) et l'autre pour Philippe Depalle (deuxième partie)

Les documents sont autorisés, mais pas les appareils électroniques.

1 Sous-échantillonnage (Badeau)

Pour cet exercice, on rappelle les *identités nobles* : les opérations suivantes sont équivalentes :

— $\boxed{\downarrow M}\, G(z) \equiv G(z^M)\, \boxed{\downarrow M}$

— $G(z)\, \boxed{\uparrow L} \equiv \boxed{\uparrow L}\, G(z^L)$

Soit un signal à temps discret $x(n)$, que l'on souhaite sous-échantillonner d'un facteur 2. On rappelle le schéma standard de sous-échantillonnage :

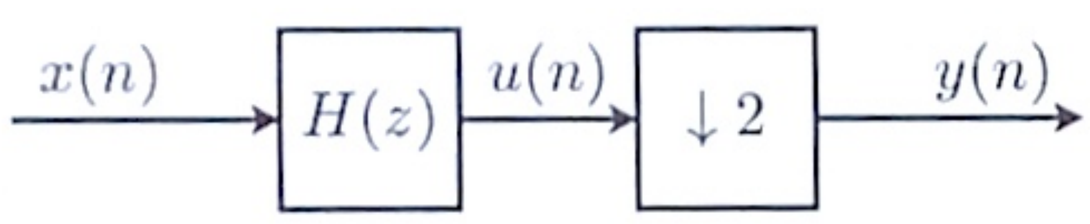

FIGURE 1 – Schéma de sous-échantillonnage

où H est un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $\frac{1}{4}$: $\forall \nu \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$, $H(e^{2i\pi\nu}) = 1$ si $\nu \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, et $H(e^{2i\pi\nu}) = 0$ sinon.

a) Quel est le rôle du filtre H dans la figure 1 ?

b) On définit le filtre de réponse en fréquence $G(e^{2i\pi\nu}) = e^{i\pi\nu}$ pour tout $\nu \in]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}[$.

1) Calculer sa réponse impulsionnelle $g(n)$ $\forall n \in \mathbb{Z}$.

2) Ce filtre est-il stable ? Est-il causal ? (justifiez)

3) Décrire la méthode de la fenêtre pour synthétiser un filtre RIF à phase linéaire qui approxime $g(n)$.

c) On considère le schéma de la figure 2.

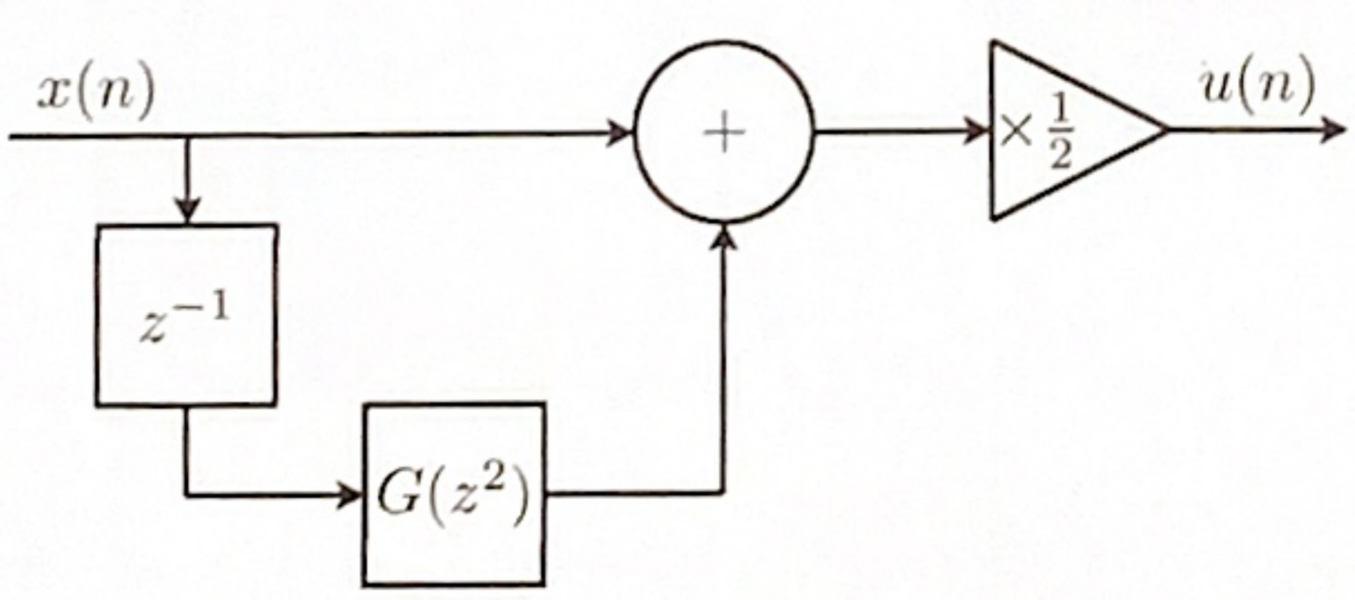

FIGURE 2 – Implémentation équivalente du filtre H

1) Exprimer $U(z)$ en fonction de $G(z)$ et $X(z)$.

2) Évaluer $G(z^2)$ en $z = e^{2i\pi\nu}$, pour $\nu \in [0, \frac{1}{4}[$ d'une part et $\nu \in]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ d'autre part.

3) En déduire la relation entre $U(e^{2i\pi\nu})$ et $X(e^{2i\pi\nu})$, et en conclure que ce schéma définit une implémentation équivalente du filtre H.

d) On considère le schéma de la figure 3.

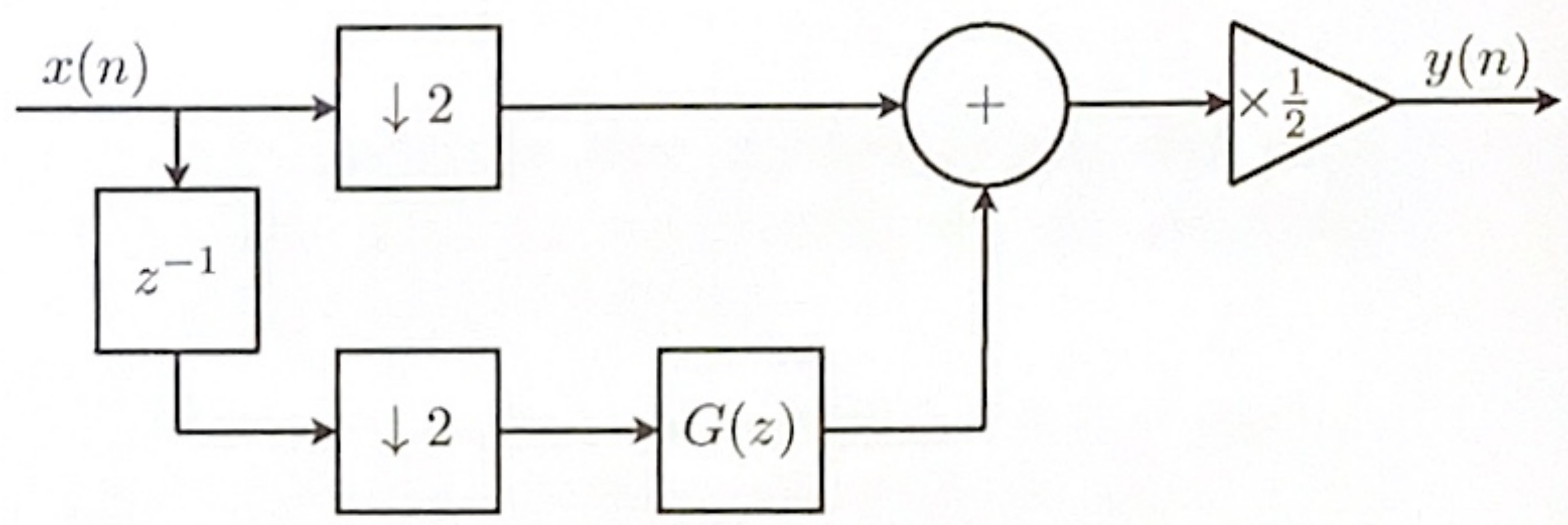

FIGURE 3 – Implémentation efficace

1) Vérifier que ce schéma est équivalent à celui de la figure 1 (on pourra utiliser l'une des identités nobles).

2) Quel est l'avantage de l'implémentation du schéma de la figure 3 par rapport au schéma de la figure 1 ?

2 Analyse de signaux sinusoïdaux non-stationnaires par des méthodes dérivées (Ph. Depalle)

Le but de ce problème est d'estimer les paramètres d'un signal sinusoïdal non-stationnaire en le modélisant sous la forme d'une exponentielle de polynôme, ce qui permet de représenter de manière unifiée diverses situations réelles.

La stratégie est d'extraire l'information sur les paramètres du modèle en effectuant des produits scalaires du signal avec des signaux de référence, appelés atomes, ainsi qu'avec leurs dérivées. Pour certains choix d'atomes, le produit scalaire se révèle en fait, être une transformée de Fourier à court-terme.

2.1 Produit scalaire et Transformée temps-fréquence

On définit le produit scalaire $< x, y >$ entre deux signaux x et y comme étant :

$$< x, y >= \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x(\tau) y^*(\tau)\, \mathrm{d}\tau \tag{1}$$

1. On note $x' = \frac{dx}{dt}$ la dérivée d'un signal x. Montrer que si le signal y vaut 0 quand $\tau = \pm\infty$, alors :

$$< x, y' >= - < x', y > \tag{2}$$

2. Lorsque le signal y, appelé atome temps-fréquence, est une fonction $\gamma_{t,f}$ localisée au temps t et à la fréquence f, valant 0 quand $\tau = \pm\infty$ ($\gamma_{t,f}(\pm\infty) = 0$), le produit scalaire définit alors une transformée temps-fréquence :

$$F_{s,\gamma}(t, f) = < s, \gamma_{t,f} > \tag{3}$$

Donner l'expression de la transformée temps-fréquence, notée $F_{s,w}(t, f)$ lorsque l'atome $\gamma_{t,f}$ est construit à partir d'une fenêtre w réelle, symétrique et de durée finie, décalée en temps (retard) et en fréquence (modulation) :

$$\gamma_{t,f}(\tau) = w(\tau - t) e^{2\pi j f \tau} \tag{4}$$

3. En déduire que $F_{s',w}(t, f)$ vaut, en supposant que la fenêtre w est dérivable :

$$F_{s',w}(t, f) = 2\pi j f F_{s,w}(t, f) - F_{s,w'}(t, f) \tag{5}$$

$= j 2\pi f S(f)$

4. En quoi le résultat de la question précédente peut-il être utile en pratique ?

2.2 Modèle de signal de type exponentielle de polynôme

Une manière de prendre en compte la non-stationnarité d'une composante sinusoïdale est de la modéliser sous la forme :

$$s(\tau) = \exp\left(\sum_{k=0}^{k=K} \alpha_k \tau^k\right) \tag{6}$$

où K est un entier positif qui détermine l'ordre du polynôme et où les α_k sont des coefficients à valeurs complexes.

1. En reformulant le signal comme :

$$s(\tau) = a(\tau)\, e^{j\phi(\tau)} \tag{7}$$

où $a(\tau)$ est l'amplitude (réelle) du signal, dépendante du temps, et $\phi(\tau)$ désigne la phase du signal, donner l'expression de $a(\tau)$ et de $\phi(\tau)$ en fonction des coefficients α_k.

2. En déduire l'expression de la fréquence instantanée $\mu(\tau)$.

3. Afin de mieux appréhender ce que ce modèle recouvre, donner les valeurs particulières de K, et de(s) α_k pour :
   - un signal de fréquence constante f_0, d'amplitude constante a_0, et de phase initiale ϕ_0.
   - un signal d'amplitude constante, de fréquence variant linéairement dans le temps, pour lequel fréquence, amplitude, et phase initiales valent respectivement f_0, a_0, et ϕ_0, tandis que la pente de fréquence vaut ν.
   - Enfin quels sont les paramètres du modèle pour un signal formé par la modulation en amplitude du signal précédent par une Gaussienne centrée à l'instant zéro et de variance σ^2 ?

2.3 Estimation des paramètres du modèle par la méthode de la dérivée distribuée (DDM)

Dans cette partie du problème, l'idée est d'estimer les paramètres α_k du modèle en analysant un signal s observé, supposé obéir à l'évolution modélisée par l'équation 6, par produit scalaire avec un ou des atomes γ_i 'bien' choisis.

1. Calculer la dérivée du signal s dont l'expression est fournie par l'équation 6.

2. En déduire une expression linéaire en les coefficients α_k faisant intervenir un atome γ_i ainsi que sa dérivée γ_i'.

3. En déduire qu'il est possible de trouver tous les paramètres α_k sauf un par résolution d'un système linéaire de K équations à K inconnues. Quel est le paramètre α_k manquant ?

4. Proposer un moyen simple de trouver ce dernier paramètre.

5. Lorsque les atomes γ_i sont ceux définis par l'équation 4, quels choix d'atomes (i.e. quelles valeurs de t, et de f) vous paraissent judicieux ?

Remarque : En pratique les questions 3 et 4 sont résolues par la méthode des moindres carrés en utilisant un nombre d'atomes/d'équations plus grand que le nombre de paramètres du modèle.

2.4 Estimation des paramètres du modèle par la méthode de réallocation (GRM)

Dans la partie précédente, K paramètres du modèle sont estimés par produit scalaire avec K atomes différents. Dans cette partie, une autre stratégie est explorée ; elle consiste à évaluer les produits scalaires avec K dérivées successives d'un seul atome. On considère donc un atome γ qui est dérivable K fois, et on note $\gamma^{(i)}$ la dérivée d'ordre i de γ.

1. Pour une valeur de i donnée ($i \in [1, K]$), établir l'expression donnant le produit scalaire entre le signal s et $\gamma^{(i)}$en fonction de paramètres α_k et de produits scalaires faisant intervenir la dérivée de γ à l'ordre $i-1$, $\gamma^{(i-1)}$.
2. Pour un modèle d'ordre 2 ($K=2$), écrire le système linéaire d'ordre 2 permettant de retrouver 2 des 3 coefficients α_k.
3. On considère désormais que l'atome γ est défini par l'équation 4. Donner l'expression des coefficients de la matrice 2x2 du système précédent en fonction des grandeurs $F_{s,w}(t,f)$, $F_{s,w'}(t,f)$, $F_{s,\mathcal{T}w}(t,f)$ et $F_{s,\mathcal{T}w'}(t,f)$, où $\mathcal{T}w$ est définie comme la fonction telle que pour tout τ, $(\mathcal{T}w)(\tau) = \tau\, w(\tau)$.
4. Donner l'expression des coefficients du second membre en fonction de $F_{s,w}(t,f)$, $F_{s,w'}(t,f)$ et $F_{s,w''}(t,f)$. Il n'est pas demandé de résoudre le système dans le cadre de l'examen car trop calculatoire.

Remarque : Cette stratégie permet de retomber sur une méthode, appelée méthode de réallocation généralisée.