Plan du cours

M2 ATIAM
Acoust.
Générale

Introduction

M2 ATIAM
Acoust.
Générale

Introduction générale

Propagation acoustique avec amortissement dans les guides cylindriques

Propagation acoustique avec amortissement dans les guides cylindriques "larges"

Un outil numérique pour les géométries quelconques (avec pertes)

- La dissipation est partout en physique, en acoustique en particulier !
- Mécanisme de conversion d'une partie de l'énergie mécanique (ex : dans les instruments apportée par le musicien) en chaleur.
- Dûe à la présence de viscosité, dans les fluides, les solides, de couplages termo-élastiques, ou à la présence d'une "morceau" de musicien sur le trajet des ondes (ex : lèvres du trompettiste, amortissement ajouté aux anches en roseau par la lèvre, doigt du guitariste appuyant sur la corde ...)
- Du point de vue de la source sonore, le rayonnement apparaît comme un mécanisme dissipatif puisqu'il contribue à la diminution de l'énergie interne
- Dans ce cours on se concentre sur l'influence des pertes sur la propagation d'une onde acoustique dans les guides d'onde.

Dissipation volumique / aux frontières

- Lors de la propagation en espace libre, les pertes sont volumiques.
- Elles varient alors comme le carré de la fréquence
- Quand on s'intéresse à la propagation dans des guides d'onde (instruments de musique), ces pertes sont négligeables comparées aux pertes liées aux conditions aux limites : interactions visqueuses et thermiques avec les parois
- Les pertes varient alors comme la racine carrée de la fréquence

Importance pour les instruments de musique

Les phénomènes dissipatifs ne sont pas un simple "raffinement" car ils vont jouer un rôle très important dans :

- Les seuils d'oscillation, i.e. les conditions pour lesquelles l'énergie apportée par le joueur "équilibre" les pertes
- Le timbre de l'instrument via la dépendance en fréquence particulière des pertes (on y revient plus tard avec les impédances avec pertes)

Si on compare deux "ajouts" par rapport au cas "idéal" :

- à part en hautes fréquences les pertes visco-thermiques sont plus importantes que les "pertes" par rayonnement (le rendement des instruments est mauvais du point de vue de l'auditeur).
- Donc en première approximation, mieux vaut étudier la physique des instruments de musique sans rayonnement que sans pertes ! (ce qui a un côté paradoxal ...)

Plan du cours

Mécanismes d'amortissement dans les tuyaux cylindrique
[Chaigne et Kergomard, p202]

Deux mécanismes de natures différentes

- Aux fréquences audibles, deux mécanismes prédominent :
  - Les effets de viscosité aux parois
  - Les effets de conduction thermique aux parois
- Qu'est-ce que ça change ?
  - Nous considérions jusqu'ici que les ondes planes étaient celles qui se propageaient "naturellement" en BF dans les guides cylindriques
  - Le frottement aux parois, implique une vitesse tangentielle nulle (juste à la paroi), ce qui est contraire à l'hypothèse "onde plane", puisque le champ de vitesse dépend nécessairement de la coordonnée transverse

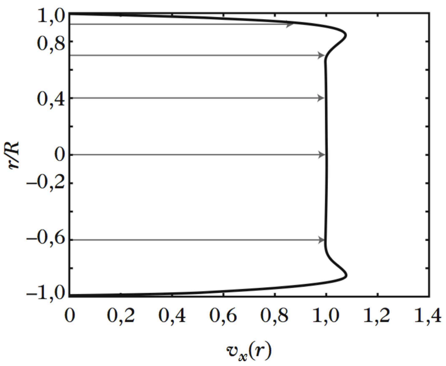


Figure 5.11. Profil de vitesse axiale dans un tuyau cylindrique, pour un nombre de Stokes égal à 21 : la vitesse s'annule sur les parois et est plane au centre du tuyau. En ordonnée, le rayon r, qui vaut R sur la paroi.

Est-ce que c'est grave ?

- La théorie complète de ce qui se passe aux parois existe et est due à Kirchhoff
- Pour mieux comprendre ce qui se passe près des parois et dans le guide, mieux vaut partir d'une théorie simplifiée, due à Zwikker et Kosten.
- C'est cette théorie qui est utilisée pour décrire la propagation dissipative dans les guides.
- Cette théorie permet de remplacer les équations de propagation d'une onde plane (vues au 1^{er} cours) par des équations qui restent 1D où les grandeurs acoustiques sont moyennées sur la surface du guide, et on peut retrouver un formalisme en lignes de transmission comme dans le cas sans pertes.
- Conclusion : ce n'est pas si grave que ça ...

Théorie de Zwikker et Kosten dans les guides cylindriques : résultats

Théorie

La théorie est présentée dans le [Chaigne et Kergomard] p 203-210, mais par souci de concision, on admettra les résultats obtenus, qui nous serviront de point de départ. Ces résultats sont rappelés ci-dessous.

Résultats (équation des télégraphistes)

Cette théorie dissocie les effets visqueux des effets thermiques (en fréquentiel, lettres majuscules) :

$$\frac{dP}{dx} = -Z_v U$$ où Z_v est l'impédance linéïque en série, et rend compte des effets visqueux

$$\frac{dU}{dx} = -Y_t P$$ où Y_t est l'admittance linéïque en parallèle et rend compte de la conduction thermique

$$Z_v = \frac{j\omega\rho}{S}\left[1 - \frac{2}{k_v R}\frac{J_1(k_v R)}{J_0(k_v R)}\right]^{-1} \qquad Y_t = j\omega\chi_S S\left[1 + (\gamma - 1)\frac{2}{k_t R}\frac{J_1(k_t R)}{J_0(k_t R)}\right]$$

Détaillons un peu ...

- S est la section du guide, R son rayon
- J_0 et J_1 sont les fonctions de Bessel [a]
- $k_v = \sqrt{-\frac{j\omega}{cl_v}}$, nombre d'onde de diffusion visqueuse
  - $l_v = \frac{\mu}{\rho_0 c}$
  - μ est le coefficient de viscosité dynamique
- $k_t = \sqrt{-\frac{j\omega}{cl_t}}$, nombre d'onde de diffusion thermique
  - $l_t = \frac{\kappa}{\rho_0 c C_p}$
  - κ est le coefficient de conduction thermique
  - C_p est la chaleur spécifique [b] à pression constante
- χ_S la compressibilité adiabatique ($= 1/\rho_0 c^2$)
- γ le rapport des chaleurs spécifiques à pression et volume constant

---

a. $J_n(x)$, fonction de Bessel de première espèce, est solution $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$

b. quantité d'énergie à apporter par échange thermique pour élever d'un degré la température de l'unité de masse d'une substance

Au delà de la complexité apparente, on reconnait des choses ...

$$\frac{dP}{dx} = -Z_v U$$

- Evoque une version plus compliquée de l'équation d'Euler sans pertes
- En effet, si on ne retient que le terme $Z_v = j\omega\rho/S$, et qu'on fait une transformée de Fourier inverse : $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\rho}{S}\frac{\partial u}{\partial t}$

$$\frac{dU}{dx} = -Y_t P$$

- Evoque une version plus compliquée de l'équation de conservation de la masse sans pertes
- En effet, si on ne retient que le terme $Y_t = j\omega\chi_S S$, et qu'on fait une transformée de Fourier inverse : $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{S}{\rho_0 c^2}\frac{\partial p}{\partial t}$
- On revient à l'équation vue au premier cours grâce à $u/S = v$ et $p = \rho' c^2$

M2 ATIAM Acoust. Générale

Introduction générale

Propagation acoustique avec amortissement dans les guides cylindriques

Propagation acoustique avec amortissement dans les guides cylindriques "larges"

Un outil numérique pour les géométries quelconques (avec pertes)

Importance relative des effets visqueux et thermiques

- Dans beaucoup de situations, les effets sont du même ordre de grandeur.
  l_v et l_t les longueurs caractéristiques sont du même ordre puisque leur rapport, le nombre de Prandtl, vaut $P_r \simeq 0.71$.
- Les effets visqueux sont maximaux lorsque le débit est grand
  (conforme à l'intuition car la couche de cisaillement est plus importante)
- Les effets thermiques sont maximaux lorsque la pression est grande
  (conforme à l'intuition car les compression/décompression sont associés à des changements de température, cf. réfrigérateur acoustique)

Matrices de transfert (avec dissipation)

Forme des solutions des équations des lignes de transmission

(Notation complexe)

$$P = P^+ e^{-\Gamma x} + P^- e^{\Gamma x} \qquad \text{avec} \qquad \Gamma = \sqrt{Z_v Y_t}$$
$$U = Y_c \left[P^+ e^{-\Gamma x} - P^- e^{\Gamma x} \right] \qquad Z_c = 1/Yc = \sqrt{Z_v / Y_t}$$

- Similitudes avec le cas des ondes planes sans perte, mais :
    - la constante de propagation $\Gamma = jk_c$ fait intervenir un nombre d'onde k_c complexe (dont la partie réelle est liée à la propagation, et la partie complexe à l'amortissement)
    - l'impédance caractéristique Z_c est complexe
    - NB : en ignorant les contributions dues aux effets visco-thermiques, $Z_v = j\omega\rho/S$ et $Y_t = j\omega\chi_S S$, on retrouve : $\sqrt{Z_v Y_t} = \sqrt{-\omega^2/c^2} = \pm j\omega/c$ et $\sqrt{Z_v/Y_t} = \rho_0 c/S$

Expression de la matrice de transfert

$$\begin{pmatrix} P(x_1,\omega) \\ U(x_1,\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\Gamma(x_2 - x_1) & Z_c \sinh\Gamma(x_2 - x_1) \\ Z_c^{-1} \sinh\Gamma(x_2 - x_1) & \cosh\Gamma(x_2 - x_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(x_2,\omega) \\ U(x_2,\omega) \end{pmatrix}$$

Rien ne change dans la forme puisque $\cosh(jx) = \cos(x)$ et $\sinh(jx) = j \sin x$

Plan du cours

Cas des tuyaux larges (avec dissipation)

Définition

On appelle tuyau large, un tuyau pour lequel le nombre de Stokes $r_v = |k_v R|$ est grand. Le nombre de Stokes est le rapport entre le rayon du guide et l'épaisseur de couche limite.

Pourquoi est-ce un cas particulier intéressant ?

- Parce que c'est le cas pour les instruments de musique (le vérifier !)
- Parce que dans ce cas on peut faire un développement asymptotique des fonctions de Kelvin (= fonction de Bessel avec argument en $\alpha\sqrt{-j}$) un développement à l'ordre 2 (termes en $1/r_v$ et $1/r_v^2$) est suffisant

Résultats bruts (à l'ordre 2)

- $\Gamma = \alpha + j\dfrac{\omega}{v_\varphi}$ où $\alpha = \dfrac{\omega}{c}\left[\dfrac{\alpha_1}{r_v} + \dfrac{\alpha_2}{r_v^2}\right]$ (avec $\alpha_1 = 1.044, \alpha_2 = 1.08$)
- $\dfrac{\omega}{v_\varphi} = \dfrac{\omega}{c}\left[1 + \dfrac{\alpha_1}{r_v}\right]$
- $Z_c = \dfrac{\rho_0 c}{S}\left[1 + \dfrac{\bar{\alpha_1}(1-j)}{r_v} - \dfrac{\bar{\alpha_2} j}{r_v^2}\right]$ (avec $\bar{\alpha_1} = 0.37, \bar{\alpha_2} = 1.147$)

M2 ATIAM Acoust. Générale

Introduction générale

Propagation acoustique avec amortissement dans les guides cylindriques

Propagation acoustique avec amortissement dans les guides cylindriques "larges"

Un outil numérique pour les géométries quelconques (avec pertes)

Interprétation

Compte tenu que le nombre de Stokes varie comme la racine carrée de la fréquence (puisque $r_v = |k_v R| = R\sqrt{\frac{\omega}{c l_v}}$) :

- L'amortissement α contient une partie constante et une partie qui croit comme la racine carrée de la fréquence et comme l'inverse du rayon
- La vitesse de phase v_φ décroit quand la fréquence baisse (par rapport à la valeur adiabatique c) , et ce d'autant plus que le rayon R est petit. En effet, puisque r_v est grand, à l'ordre 1 en $1/r_v$ on a $v_\varphi = c\left[1 - \frac{\alpha_1}{r_v}\right]$

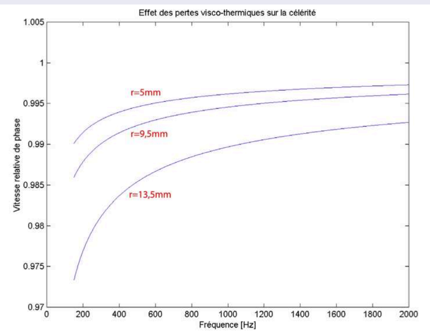


figure 5 : les pertes visco-thermiques aux parois du tuyau (de rayon 5mm [courbe du bas], 9,5mm et 13,5 mm [courbe du haut]) affectent la vitesse de propagation des ondes. Les couches limites étant d'autant plus épaisses que la fréquence est basse, l'effet de ralentissement de la propagation est plus marqué aux fréquences basses.

Extrait de B. Fabre *Les Bois : résonateur*, JPPIM 2000

M2 ATIAM Acoust. Générale

Interprétation ... (suite)

- Cette dépendance de la vitesse en la fréquence produit de l'inharmonicité (penser en termes d'aller-retours dans le tube)
- L'impédance caractéristique Z_c est souvent assimilée à sa valeur adiabatique (les variations sont faibles)

Une formule pour la vie de tous les jours ?

La formule approchée qui maximise le rapport "précision / simplicité" est la suivante :

$$\Gamma = j\frac{\omega}{c} + (1+j)3.10^{-5}\frac{\sqrt{f}}{R} \qquad \text{et } Z_c = \frac{\rho_0 c}{S}$$

On y voit clairement apparaître, comparé au cas sans perte, les effets de la dispersion et de la dissipation.

Conséquences pour la facture

- Qui dit inharmonicité dit fréquences de résonances non proportionnelles dans un cylindre.
- Donc instrument potentiellement faux lors des changements de registre si l'inharmonicité n'est pas compensée par la géométrie !
- Une variation de la vitesse de propagation de quelques pourcents peut paraître anecdotique mais : 1/2 ton $\equiv \times 2^{1/12} \simeq 6\%$

Comparaison tuyau large dissipatif / non dissipatif

M2 ATIAM Acoust. Générale

Fonction de réflexion

Considérons un tuyau ouvert à l'extrémité aval, de longueur l, pour lequel on néglige le rayonnement :

- Dans le cas sans pertes, on rappelle que :
  - le coefficient de réflexion à l'entrée est $R(x=0,\omega) = -exp\left[-j\frac{\omega 2l}{c}\right]$
  - la fonction de réflexion $r(t) = -\delta(t - 2l/c)$ (par transformée de Fourier inverse)
- Dans le cas d'un tuyau large avec dissipation :
  - on a $R(x=0,\omega) = -exp\left[-\Gamma 2l\right]$
  - la fonction de réflexion (qu'on sait écrire analytiquement !) vaut

$$r(t) = -H\left(t - \frac{2l}{c}\right)\frac{\alpha_1 l}{Rc\pi^{1/2}}\sqrt{\frac{2l_v}{c}}\frac{exp\left[-\frac{\frac{\alpha_1^2 2l_v/c}{4R^2}\left(\frac{2l}{c}\right)^4}{t-2l/c}\right]}{(t-2l/c)^{3/2}}exp\left[-\alpha_2\frac{2l_v l}{cR^2}\right]$$

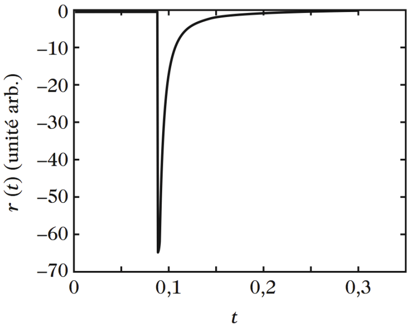


Figure 5.13. Fonction de réflexion pour un long tuyau cylindrique ouvert de rayon 4 mm et longueur 15 m (équation (5.145), calcul au premier ordre ($\alpha_2 = 0$)). Le calcul au 2e ordre multiplierait la courbe par un facteur 0,93. On remarque la lente décroissance après le maximum.

[Chaigne et Kergomard p214]

Fonction de réflexion (suite) : interprétation

- La fonction de Heaviside traduit la causalité : aucun signal ne se propage plus vite que c : rien ne revient avant $t = 2l/c$
- L'analyse p214 montre que le temps de montée croit quand l croit
- De même $max|r(t)|$ décroit quand l croit
- La décroissance est très lente (pas exponentielle) ce qui pose des difficultés pour les simulations numériques

M2 ATIAM Acoust. Générale

Introduction générale
Propagation acoustique avec amortissement dans les guides cylindriques
Propagation acoustique avec amortissement dans les guides cylindriques "larges"
Un outil numérique pour les géométries quelconques (avec pertes)

Impédance d'entrée

- Elle peut être calculée à partir des formules de la matrice de transfert

$$Z_e = Z_c \tanh\left[\Gamma l + arg\tanh(Z_R/Z_c)\right]$$

- Pour l'impédance de rayonnement on peut choisir au choix :
  - $Z_R = 0$: $Z_e = Z_c \tanh[\Gamma l]$
  - à l'ordre 2 en kR : $Z_R = Z_c\left[jk\Delta l + \frac{1}{4}(kR)^2\right]$ (avec $\Delta l \simeq 0.6R$ et $k = \omega/v_\varphi$) :

$$Z_e = Z_c \tanh\left[j\frac{\omega}{v_\varphi}(l + \Delta l) + \alpha l + \frac{1}{4}(kR)^2\right]$$

- Dans ce dernier cas, on peut montrer qu'à l'ordre 1 en $1/r_v$ les fréquences des maxima et des minima sont approximés par ([Chaigne et Kergomard, p215]) :

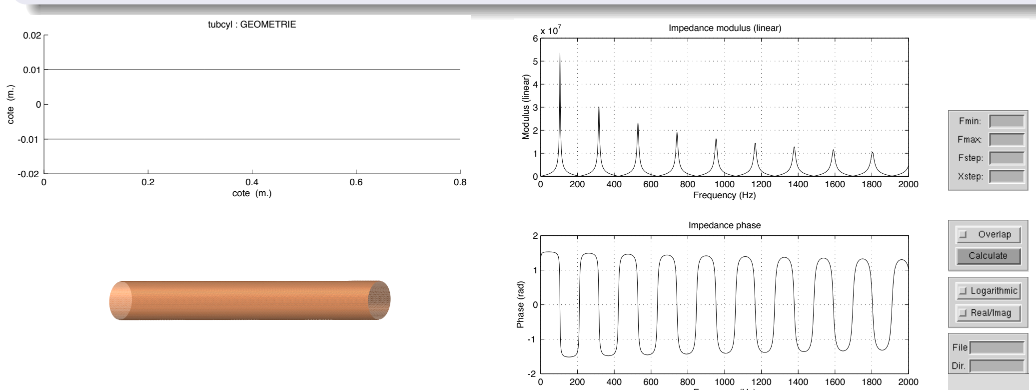
$$f_{max_n} = (2n+1)v_\varphi/4(l+\Delta l) \qquad \text{et} \qquad f_{min_n} = nv_\varphi/2(l+\Delta l)$$

$$|Z_e|_{max} \simeq Z_c/tanh\left[\alpha l + \frac{1}{4}(kR)^2\right] \qquad \text{et} \qquad |Z_e|_{min} \simeq Z_c tanh\left[\alpha l + \frac{1}{4}(kR)^2\right]$$

Impédance d'entrée ... suite ....

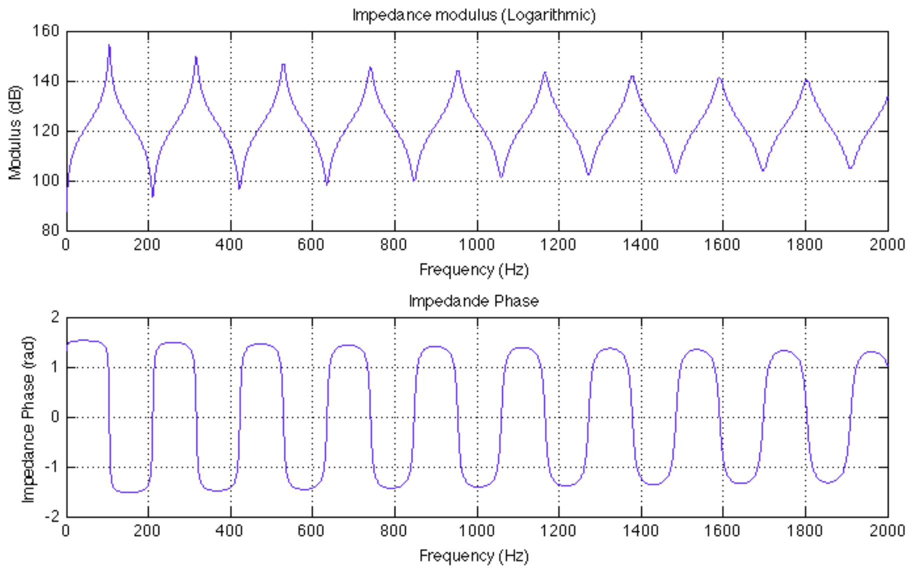
Conséquence : tant que cette approximation est valable, (en basse fréquence, donc pour les premiers pics), on en déduit que l'amplitude des max varie comme $\omega^{-1/2}$ et celle des min comme $\omega^{1/2}$ (car à l'ordre 1 en $1/r_v$, α varie comme $\sqrt{\omega}$)

D'où la "règle du pouce" en facture instrumentale : pour conserver un comportement similaire quand on change d'échelle, on peut souhaiter conserver $\alpha(f_n)l$ constant quand l change : une longueur $\times n$ est associée à un changement de rayon $\times\sqrt{n}$. En effet on rappelle que α varie comme la racine carrée de la fréquence et l'inverse du rayon, donc aux fréquences de résonance, $\alpha(f_n)l$ varie comme $\sqrt{l}/R$ (le vérifier !).



Remarque : à comparer au cas sans pertes/pertes indépendantes de la fréquence

- Même impédance en échelle logarithmique
- Permet de mettre en évidence la symétrie de croissance/décroissance des creux/pics



Plan du cours

Introduction

Choix de l'approche

On tire avantage de l'approche "matrice de transfert" qui permet de calculer directement dans le domaine fréquentiel, et d'approximer des géométries compliquées par succession de géométries élémentaires.

Quelles géométries élémentaires ?

- Cylindres : on a vu précédemment la matrice de transfert dans le cas dissipatif
- Troncs de cônes : on accède à la matrice de transfert au prix d'hypothèses supplémentaires (ondes planes, pertes obtenues pour un rayon "moyen")

Remarque

On passe sous silence dans ce cours les jonctions ([Chaigne et Kergomard, p311]), trous latéraux ([Chaigne et Kergomard, p316]), et les discontinuités de sections ([Chaigne et Kergomard, p316]) mais on peut en donner une représentation en matrices de transfert (cf. les pages mentionnées)

La méthode de l'impédance ramenée
Colonnes d'air de formes non triviales (avec pertes)

Principe :

- Décrire aussi précisément que souhaité la géométrie interne de l'instrument
- Réaliser une segmentation "adaptée" en tronçons de cylindres/cônes
- Modéliser la propagation (linéaire, onde plane) dans chaque segment :

$$\begin{bmatrix} p_e \\ u_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_s \\ u_s \end{bmatrix}$$

  où les coefficients A, B, C, D dépendent de la géométrie du segment, ainsi que de la viscosité de l'air et de la dissipation thermique sur les parois.
- Calculer l'état $\begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}$ à chaque jonction de manière rétrograde, en partant de l'extrémité rayonnante de l'instrument

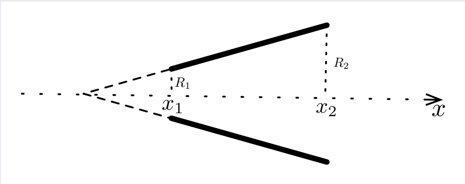
Avantages de la représentation quadri-polaire

- Concaténation des tronçons constitutifs de l'instrument par simple multiplication matricielle

$$\begin{bmatrix} p_{e_1} \\ u_{e_1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ \mathbb{C} & \mathbb{D} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} p_{s_n} \\ u_{s_n} \end{bmatrix}$$

- Conséquence : si on connaît le vecteur pression/débit à une abscisse quelconque du résonateur, on peut le connaître à n'importe quelle autre abscisse.
- A partir de manipulations simples sur les coefficients complexes $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{D}$, à des grandeurs utiles pour la modélisation physique :
  - Impédance d'entrée $Z_e(\omega) = \frac{p_{e_1}}{u_{e_1}}$
  - Fonction de transfert en pression $T_p(\omega) = \frac{p_{s_n}}{p_{e_1}}$

Le cas du tronc de cône



$$\begin{bmatrix} P_1 \\ U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

où, si $l \triangleq r_2 - r_1 \simeq x_2 - x_1$ (faible conicité)

Cas sans pertes :

- $A = \frac{R_2}{R_1} \cos kl - \frac{\sin kl}{kx_1}$
- $B = j\frac{\rho_0 c}{\pi R_1 R_2} \sin kl$
- $C = \frac{\pi R_1 R_2}{\rho_0 c} \left[j \sin kl \left[1 + \frac{1}{k^2 x_1 x_2} \right] + \frac{\cos kl}{jk} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) \right]$
- $D = \frac{R_1}{R_2} \cos kl + \frac{\sin kl}{kx_2}$

Cas avec pertes : on admet (cf. p282) qu'on remplace :

- ρ_0 par $\rho_v = \rho_0 \left[1 + 2\sqrt{-j}/r_v \right]$
- χ_S par $\chi_t = \chi_S \left[1 + 2(\gamma - 1)\sqrt{-j}/r_t \right]$
- k par $\frac{\omega}{c} \left[1 + \alpha_1 \frac{\sqrt{-2j}}{r_v} \right]$ avec $r_t = \sqrt{P_r} r_v$

M2 ATIAM
Acoust.
Générale

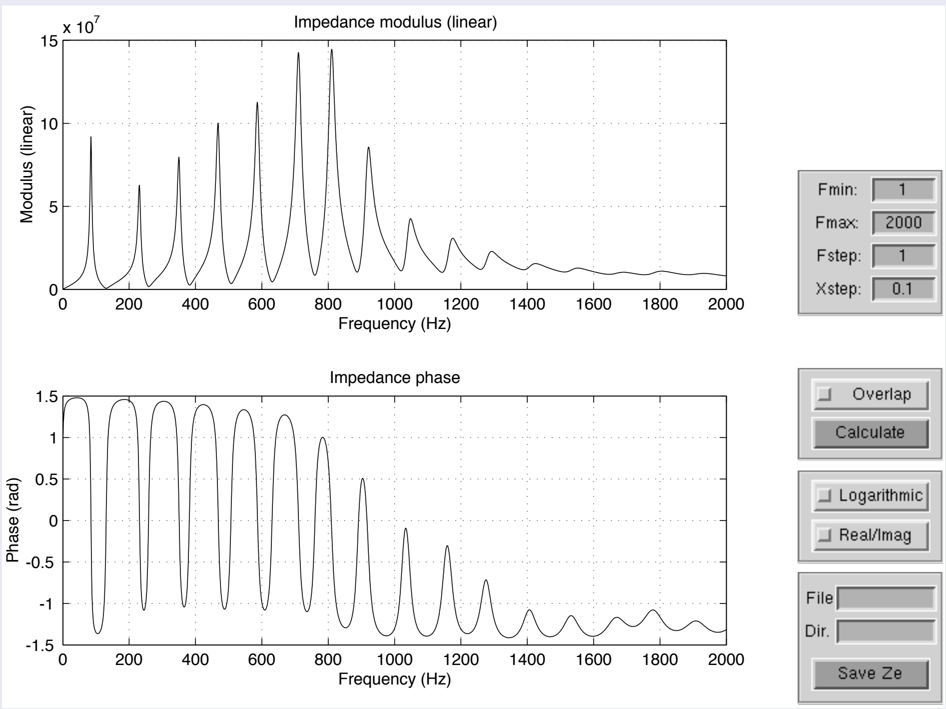
Introduction générale

Propagation acoustique avec amortissement dans les guides cylindriques

Propagation acoustique avec amortissement dans les guides cylindriques "larges"

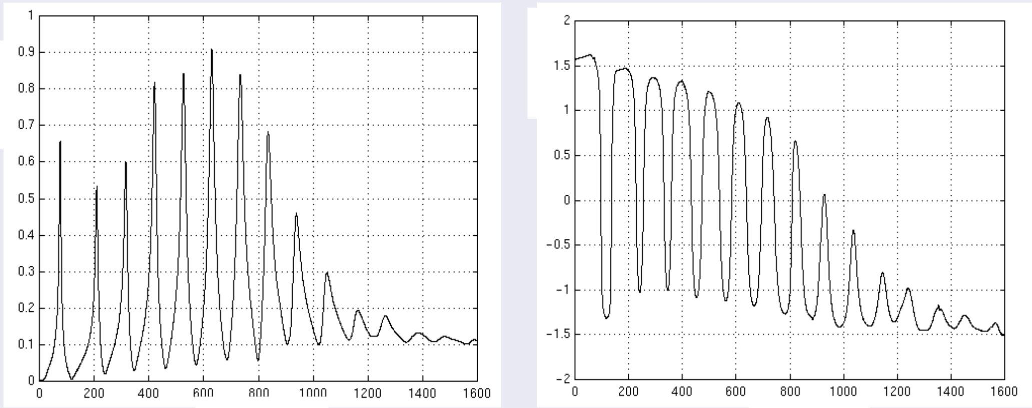
Un outil numérique pour les géométries quelconques (avec pertes)

Impédance d'entrée de trompette (calculée) par décomposition en tronçons



Remarques : différences avec l'impédance du cylindre

Impédance mesurée de trompette pour comparaison (adimensionnée par l'impédance caractéristique)



Remarque : les difficultés de la mesure incitent à la prudence : la mesure n'est pas forcément la référence et les écarts ne sont pas forcément des défauts de l'approche numérique

M2 ATIAM
Acoust.
Générale

Introduction générale

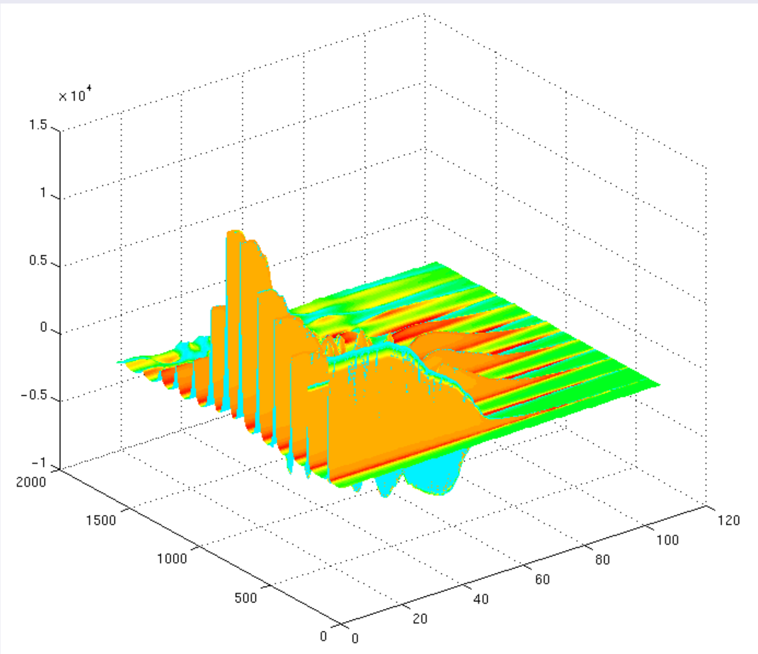
Propagation acoustique avec amortissement dans les guides cylindriques

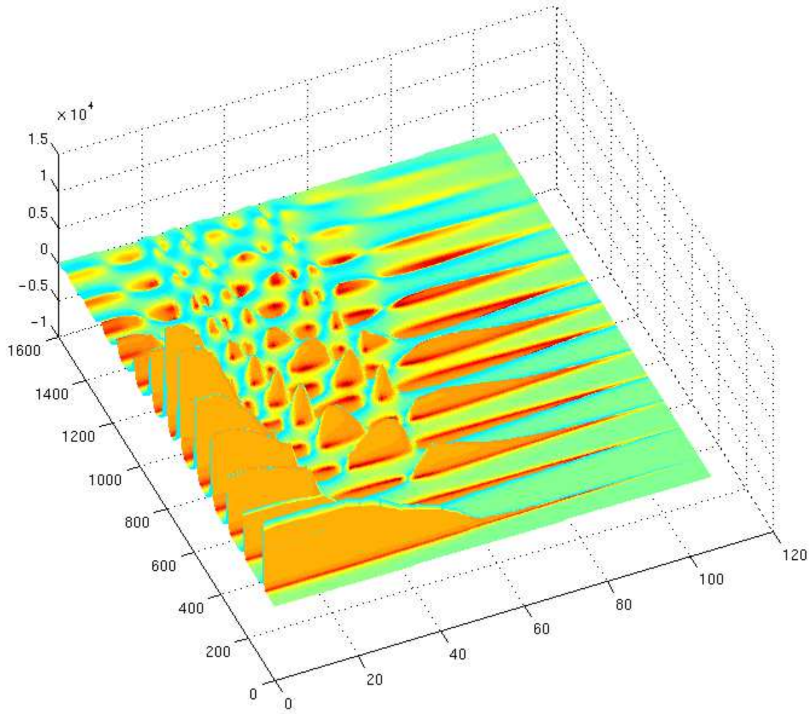
Propagation acoustique avec amortissement dans les guides cylindriques "larges"

Un outil numérique pour les géométries quelconques (avec pertes)

Sous produit de l'approche : l'exploration du champ interne

Exemple : calcul champ de pression interne (débit d'entrée connu, normalisé)





Influence de l'embouchure

M2 ATIAM
Acoust.
Générale

Introduction générale

Propagation acoustique avec amortis-sement dans les guides cylindriques

Propagation acoustique avec amortis-sement dans les guides cylindriques "larges"

Un outil numérique pour les géométries quelconques (avec pertes)

D'après Fletcher et Rossing, *Physics of musical instruments*, p436

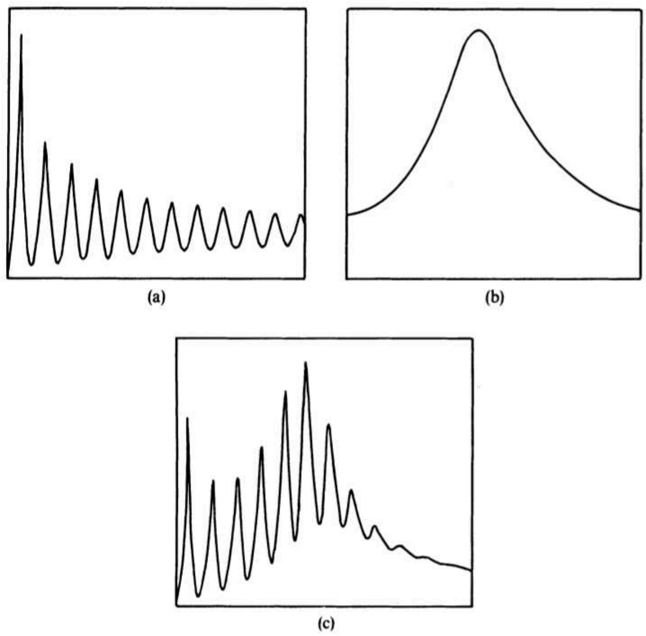


FIGURE 14.5. Calculated input impedance of (a) a cylindrical tube of radius 10 mm and length 2 m; (b) a simple mouthpiece of volume 5 cm^3, choke diameter 3 mm, and choke length 20 mm, loaded by the characteristic impedance of the tube; and (c) the mouthpiece fitted to the tube. The frequency scale is 0–1000 Hz.