

de petites dimensions par rapport à la longueur d'onde, ce rapport vaut simplement<sup>16</sup>  $-U(\ell)/U(0)$ . Nous trouvons alors :

$$-\frac{U(\ell)}{U(0)} = -\frac{\cosh [\Gamma(s_n)\ell + h_0(s_n)]}{\cosh h_0(s_n)} = (-1)^{n+1} \frac{\cosh h_\ell(s_n)}{\cosh h_0(s_n)}; \quad (7.66)$$

La dernière expression est obtenue en utilisant (7.64). Si on avait les mêmes impédances terminales, donc  $h_0 = h_\ell$ , le rapport serait égal à  $\pm 1$ , car le champ serait parfaitement symétrique, ou antisymétrique. On pourrait étudier ce résultat en détail ; nous remarquons seulement que pour les premiers modes, les fonctions  $h_0(s_n)$  et  $h_\ell(s_n)$  sont petites, et le rapport d'amplitude très voisin de l'unité<sup>17</sup>. En ce qui concerne la différence de phase des deux ouvertures, on obtient donc : pour le mode  $n = 1$ , les deux ouvertures sont en phase, alors que pour  $n = 2$ , elles sont en opposition de phase.  $n = 1$  correspond à la première fréquence de jeu, et  $n = 2$  à la deuxième fréquence de jeu, ou à une fréquence proche du deuxième harmonique de la première fréquence de jeu. Les conséquences de ces différences de phase sur la directivité sont très importantes : nous les analyserons dans la 4<sup>e</sup> partie.

## 4. Instruments coniques

Les instruments coniques jouent un très grand rôle dans la musique, et, en ce qui concerne les anches, c'est même eux qui ont pris l'essor le plus important avant les instruments cylindriques. La raison en est qu'ils octavent, au lieu de « quintoyer », comme le fait la clarinette, et qu'il y a donc moins de trous et clés à prévoir : le premier registre comporte seulement 12 demi-tons (une octave), au lieu de 18 (une douzième). Cette question est discutée à la fin de ce chapitre, au § 7.4.5. La forme conique, bien qu'élémentaire, donne lieu à un certain nombre de complications par rapport à la forme cylindrique.

### 4.1. Équations sans pertes et solutions

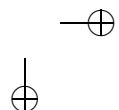
Considérons un tronc de cône, par exemple un saxophone sans trous latéraux. De même qu'aux basses fréquences, seules les ondes planes peuvent se propager dans un tuyau cylindrique avec parois parfaitement réfléchissantes (cf. ci-dessous § 6.2), seules des ondes à symétrie sphérique peuvent se propager dans un cône. La coordonnée spatiale est notée  $r$ , et est comptée à partir du sommet (cf. figure 7.9). Ces ondes sont solution de l'équation du son (1.111) ; il suffit pour cela d'écrire les opérateurs en coordonnées sphériques, et de considérer la symétrie sphérique, donc en particulier que la vitesse n'a qu'une composante radiale,  $v_r$ , notée  $v$  pour

<sup>16</sup> Pourquoi le signe  $-$  ? Parce que pour trouver la phase relative des pressions rayonnées, nous devons considérer les débits « sortants » de l'instrument (cf. 4<sup>e</sup> partie).

<sup>17</sup> On peut montrer qu'en fait il augmente avec la fréquence, car il vaut, si  $jk_n = s_n/c$  :

$$-\frac{U(\ell)}{U(0)} \simeq \frac{1 + k_n^2 \ell_m^2 (S/S_m)^2}{1 + k_n^2 \Delta \ell^2},$$

et nous avons vu que la correction de longueur de la bouche est sensiblement plus grande que celle de l'extrémité  $\ell$ .



simplifier. Pour introduire ultérieurement la dissipation en rendant simplement complexes masse volumique et compressibilité, nous partons des deux équations (1.109) et (1.110) :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v)}{\partial r} + \chi_s \frac{\partial p}{\partial t} = q_V(r, t) \quad (7.67)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} = \rho F_r. \quad (7.68)$$

On en déduit l'équation des ondes sphériques :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \rho \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} - \frac{\partial q_V}{\partial t} \right]. \quad (7.69)$$

En utilisant la variable  $pr$ , déjà utilisée pour l'équation (7.8), ou plutôt ici  $pr$ , puisque le rayon  $R$  est proportionnel à la distance  $r$ , l'équation devient :

$$\frac{\partial^2(pr)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(pr)}{\partial t^2} = \rho r \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} - \frac{\partial q_V}{\partial t} \right].$$

L'équation sans sources pour  $pr$  est simplement celle des ondes planes, la solution s'écritant :

$$p = \frac{f^+(t - r/c) + f^-(t + x/c)}{r} \quad (7.70)$$

Le facteur  $1/r$  est le facteur de divergence géométrique, assurant que la puissance moyenne d'une onde progressive reste, à travers une surface  $r = \text{constante}$ , indépendante de  $r$ . À ce facteur près, la propagation s'effectue comme pour une onde plane. Par contre, ce qui change, c'est la réflexion des ondes de pression, car la vitesse acoustique, elle, ne vérifie pas cette équation simple. Elle est solution de :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{rc} [f'^+(t - r/c) - f'^-(t + x/c)] + \frac{p}{r} \quad (7.71)$$

où  $f'(x)$  est la dérivée de  $f(x)$ . Le premier terme est similaire à celui d'une onde plane, mais le second est nouveau, et comme il faut intégrer cette équation par rapport au temps, on voit qu'une onde de pression impulsionale donne lieu à une onde de vitesse étalée dans le temps. Dans le domaine de Fourier, on a :

$$P = \frac{a^+ e^{-jkr} + a^- e^{jkr}}{r}; \quad (7.72)$$

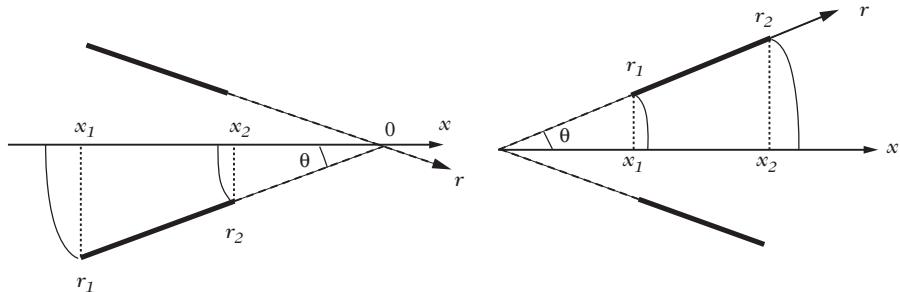
$$V\rho c = -\frac{1}{jk} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{a^+ e^{-jkr} - a^- e^{jkr}}{r} + \frac{P}{jkr} \quad (7.73)$$

Les admittances *spécifiques* des ondes aller et retour valent donc (on définit dans le sens de propagation  $Y_c^+ = V/P$ , et  $Y_c^- = -V/P$ ) :

$$Y_c^\pm = \frac{1}{\rho c} \left[ 1 \pm \frac{1}{jkr} \right] \quad (7.74)$$

(pour l'admittance acoustique, il faut multiplier par  $S(r)$ ). Elles sont d'une part variables avec  $r$ , et d'autre part différentes, ce qui est propre aux lignes de transmission asymétriques (il est évident que dans un trone de cône, au contraire d'un cylindre, l'entrée et la sortie ne peuvent jouer le même rôle!). Un point essentiel est l'apparition du paramètre  $kr$ , autrement dit le rapport entre la distance au sommet et la longueur d'onde. Plus il est grand, plus on se rapproche des ondes

planes : une sphère de grand rayon est localement proche d'un plan, et, si la longueur d'onde est petite, l'onde ne voit pas la courbure. Dans l'expression (7.73), on voit que le terme  $p/jkr$  est grand près du sommet aux basses fréquences, et qu'alors vitesse et pression sont presque en quadrature de phase, indépendamment de toute condition aux limites. Il n'y a alors pas de puissance moyenne, on peut dire que l'énergie est stationnaire ; en outre, elle est essentiellement cinétique, puisque le rapport vitesse/pression est très grand. Ce phénomène est caractéristique de sources de débit de petites dimensions (celles de l'entrée de l'instrument) devant la longueur d'onde, quand elles rayonnent dans un large espace (ici le tronc de cône).



**Figure 7.9.** Géométrie de troncs de cône divergent et convergent. On prendra garde au choix retenu pour les orientations. Notations :  $\ell = r_2 - r_1$ ;  $\tan \theta = R_1/x_1 = R_2/x_2 \simeq (R_2 - R_1)/\ell$ ;  $\sin \theta = R_1/r_1 = R_2/r_2 = (R_2 - R_1)/\ell$ .

Enfin, si on change la variable  $V$  et l'admittance  $Y$  en

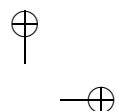
$$\tilde{V} = V - \frac{P}{jkr\rho c}; \quad \tilde{Y} = Y - \frac{S(r)}{jkr\rho c}, \quad (7.75)$$

tous les calculs valables pour les ondes planes (matrices de transfert, impédances ramenées, etc.) peuvent être étendus au couple de grandeurs  $P$  et  $\tilde{V}$  (on peut appeler cette vitesse  $\tilde{V}$  la vitesse « symétrisée » et l'admittance  $\tilde{Y}$  l'admittance symétrisée). Ainsi, si  $r_1$  est la coordonnée d'entrée du tronc de cône, et  $r_2 = r_1 + \ell$  celle de sortie (cf. (4.28)), on obtient :

$$\begin{pmatrix} Pr \\ \tilde{V}r\rho c \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} \cos k\ell & j \sin k\ell \\ j \sin k\ell & \cos k\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Pr \\ \tilde{V}r\rho c \end{pmatrix}_2. \quad (7.76)$$

#### 4.2. Validité de l'équation des pavillons pour un tronc de cône

Il est intéressant de comparer les équations (7.69) et (7.6). D'une part  $q_V = q/S$  (car  $q_V$  est le débit par unité de volume), et d'autre part  $S(x) = \pi R(x)^2$  est proportionnelle à  $x^2$ . Les deux équations sont donc identiques, à ceci près que la coordonnée n'est pas la même : pour (7.6), il s'agit de la distance du sommet du cône à la portion de sphère qui le limite,  $r$ , alors que  $x$  est la projection de  $r$  sur l'axe du cône, avec  $x = r \cos \theta$ , où  $\theta$  est le demi-angle au sommet (cf. figure 7.9). L'équation des pavillons, qui effectue un raccordement d'ondes planes, assimile donc le front d'ondes sphériques à un front d'onde plan. Ceci est intuitivement valable si la distance entre ces deux surfaces est petite devant la longueur d'onde ;



plus précisément, pour une onde (de pression) progressive, le rapport d'amplitude entre la sortie et l'entrée du tronc de cône est indépendant du choix retenu :  $r_1/r_2 = x_1/x_2 = R_1/R_2$ . Par contre il y a une différence sur la phase, qui vaut si  $\theta$  est petit :  $k(r_2 - r_1) - k(x_2 - x_1) = k\ell\theta^2/2 = k(R_2 - R_1)^2/2\ell$  (dans cette expression,  $\ell = r_2 - r_1 \simeq x_2 - x_1$ ). Pour les instruments coniques, on peut montrer que cette quantité est effectivement petite aux fréquences audibles. Ce qui suit est donc valable pour  $r$  comme pour  $x$ . Nous choisissons, par simplicité, la coordonnée  $x$ , donc l'approximation des ondes planes. Contrairement à un tuyau cylindrique, l'origine des  $x$  est ici fixée (au sommet du cône). Par ailleurs, *pour un cône convergent, il est pratique de choisir l'orientation vers le sommet*, afin que l'entrée et la sortie conservent les mêmes indices, on ait toujours la relation  $\ell = r_2 - r_1$ , avec  $\ell$  positif ; on a par conséquent  $r_2, r_1, x_2, x_1$  négatifs (cf. figure 7.9).

### 4.3. Matrice de transfert d'un tronc de cône

Nous voulons déduire de (7.76) la matrice de transfert en pression-débit, en remplaçant les distances  $r$  par des distances  $x$ . Après des calculs un peu fastidieux, on obtient entre deux abscisses d'indices 1 et 2 :

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ U_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_2 \\ U_2 \end{pmatrix} \text{ où} \quad (7.77)$$

$$A = \frac{R_2}{R_1} \cos k\ell - \frac{\sin k\ell}{kx_1}; B = j \frac{\rho c}{\pi R_1 R_2} \sin k\ell; D = \frac{R_1}{R_2} \cos k\ell + \frac{\sin k\ell}{kx_2};$$

$$C = \frac{\pi R_1 R_2}{\rho c} \left[ j \sin k\ell \left[ 1 + \frac{1}{k^2 x_1 x_2} \right] + \frac{\cos k\ell}{jk} \left( \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right) \right].$$

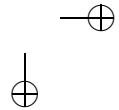
On retrouve aisément le résultat pour un cylindre ( $R_1 = R_2$ ;  $x_1$  et  $x_2$  infinis). On peut montrer que le déterminant de cette matrice de transfert est toujours égal à 1, ce qui correspond à la propriété de réciprocité, déjà vue à propos de la fonction de Green (équation (3.46) : l'équivalence de ces deux expressions de la réciprocité est classique, et nous ne la démontrons pas). Ce genre de calcul peut aussi se faire en utilisant des circuits électriques équivalents [14]<sup>18</sup>.

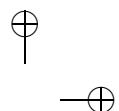
### 4.4. Fréquences propres : approximations élémentaires

Une première application des solutions obtenues est la recherche de fréquences propres. Considérons un tuyau « ouvert-ouvert », avec deux conditions d'impédance nulle aux deux extrémités, qui est la simplification la plus extrême d'une flûte. L'admittance symétrisée  $\tilde{Y}$  est infinie, donc l'effet de la conicité est nul : une flûte conique, divergente aussi bien que convergente, a en première approximation les mêmes fréquences propres qu'une flûte cylindrique de même longueur.

Considérons de façon plus précise un tuyau qui débouche sur l'impédance de rayonnement, en supposant que la conicité n'affecte pas la valeur (5.128) utilisée

<sup>18</sup> Si on fait tendre la fréquence vers 0 dans (7.77), on trouve (après quelques calculs) :  $A = D = 1$ ,  $B = j\omega L_a$ ,  $C = j\omega C_a$ , où  $L_a$  et  $C_a$  sont respectivement la masse et la compliance acoustique localisée obtenues en (7.16). On trouve que la section du cylindre équivalent à un tronc de cône de longueur  $\ell$  est : pour la masse acoustique  $S = \pi R_1 R_2$ ; et pour la compliance acoustique :  $S = \pi(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)/3$ . Ce type de résultat est utile par exemple pour dimensionner un trou latéral conique, en calculant le trou cylindrique équivalent.





jusque là. Pour calculer les fréquences propres, on peut se contenter de prendre en compte la partie imaginaire, et écrire  $Z_R = \rho c S_2^{-1} j k \Delta\ell$ , où  $S_2$  est la section de sortie et  $\Delta\ell = 0,6R_2$ ,  $R_2$  étant le rayon de sortie ; on obtient pour l'admittance acoustique symétrisée :

$$\widetilde{Y}_R = \frac{S_2}{\rho c} \left[ \frac{1}{j k \Delta\ell} - \frac{1}{j k x_2} \right]. \quad (7.78)$$

On déduit la correction effective de longueur de rayonnement utilisable pour (7.76) :  $\Delta\ell_{eff}^{-1} = \Delta\ell^{-1} - x_2^{-1}$ . L'effet de la conicité est négligeable si  $x_2 \gg \Delta\ell$ , ce qui est une condition souvent remplie pour un tronc de cône divergent ; la correction de longueur est alors la même que pour un tuyau cylindrique. Par contre pour un tronc de cône convergent, la correction de longueur de rayonnement peut être modifiée sensiblement par la conicité.

- Considérons maintenant un instrument à anche conique (divergent), comme un hautbois ou un saxophone. Les fréquences de jeu sont voisines des fréquences propres d'un tuyau « fermé-ouvert ». L'admittance d'entrée est nulle, donc l'admittance symétrisée vaut  $\widetilde{Y}_e = -S(x_1)/jkx_1\rho c$ , où  $x_1$  est le rayon d'entrée. En ramenant l'admittance symétrisée de la sortie vers l'entrée, on obtient par ailleurs, comme pour un cylindre,

$$\widetilde{Y}_e = -\frac{S_1}{\rho c} j \cot k\ell \quad (7.79)$$

où la longueur  $\ell$  inclut la correction de longueur de rayonnement. On tire ainsi l'équation des fréquences propres :

$$\boxed{\tan k\ell = -kx_1.} \quad (7.80)$$

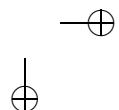
Ce type d'équation nous est familier : si la distance du sommet du cône à l'entrée du tronc de cône,  $x_1$ , est petite devant la longueur d'onde, on peut écrire

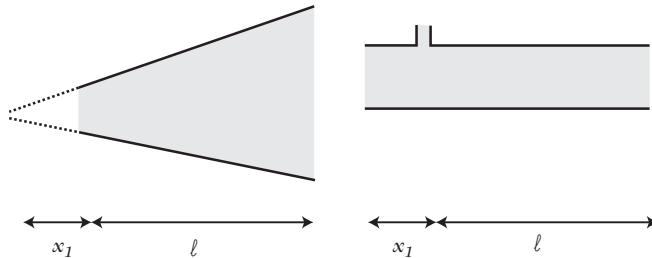
$$kx_1 \simeq \tan kx_1 \text{ d'où} \quad (7.81)$$

$$f = nc/(2(\ell + x_1)). \quad (7.82)$$

Les fréquences propres d'un instrument tronconique à anche sont donc à peu près harmoniques, et sont les multiples entiers de la fréquence fondamentale, correspondant à une longueur d'onde double de la longueur de l'instrument, rallongé jusqu'à son sommet. Pour les basses fréquences, le cône peut être vu comme un cylindre de longueur  $\ell + x_1$  avec deux conditions d'impédance nulle aux extrémités. Un saxophone soprano d'une longueur comparable à celle d'une clarinette ne peut donc pas produire des notes aussi graves. On note que si l'équation (7.80) reste valable pour un cylindre ( $x_1$  infini !), il n'en est rien pour la formule (7.82). En fait l'approximation (7.81) revient à avoir assimilé l'instrument conique à un « saxophone traversier », qui serait un cylindre de longueur  $\ell + x_1$ , où le bec serait placé à la distance  $x_1$  de l'entrée (cf. figure 7.10). Ceci donne un certain nombre d'idées qualitatives, que nous exploiterons et discuterons (§ 4.8, ch. 9), notamment en utilisant l'analogie avec une corde frottée [109], excitée à un point pour lequel on note souvent  $\beta$  le rapport  $x_1/(\ell + x_1)$ .

Les instruments à anche coniques sont donc « octaviants », et non « quintoyants ». En fait, l'approximation faite est de moins en moins valable quand le numéro de la fréquence propre augmente : plus il augmente, plus on se rapproche d'une série





**Figure 7.10.** Saxophone « traversier » équivalent, aux basses fréquences, à un saxophone conique : le bec est placé sur le côté d'un tuyau cylindrique. Les fréquences propres des deux tuyaux sont les mêmes.

1,3,5,..(2n + 1)... (celle d'un cylindre, cf. éq. (4.50)). Ainsi la deuxième fréquence est plus haute que 2 fois la première, et le décalage avec la série 1,2,3...n... s'accroît avec le numéro de la fréquence. Et bien entendu plus  $x_1$  augmente, plus le décalage augmente, jusqu'à ce qu'on retrouve le comportement du cylindre.

- Pour être plus précis, on peut utiliser une méthode analogue à celle qui a abouti à la formule (7.21), et compliquer un peu le problème pour tenir compte de l'existence d'un bec de volume  $V$ , dont les dimensions sont petites devant la longueur d'onde. L'admittance de sortie du bec vaut, puisqu'à l'entrée l'admittance est nulle :  $Y = -j\omega V/\rho c^2$  (cf. équation (1.153)). On a donc en  $x_1$ ,  $\tilde{Y} = -j\omega V/\rho c^2 - S_1/jkx_1\rho c$ , qu'on doit égaler à la valeur (7.79), d'où :

$$\cot k\ell = \frac{kV}{S_1} - \frac{1}{kx_1}. \quad (7.83)$$

Si nous écrivons que le second membre vaut  $-\cot k\Delta\ell$ , nous déduisons, au 3<sup>e</sup> ordre en  $kx_1$  :

$$\Delta\ell = \frac{1}{k} \arctan \left[ \frac{kx_1}{1 - k^2 x_1 V / S_1} \right] \simeq x_1 \left[ 1 + k^2 x_1^2 \left( \frac{V}{x_1 S_1} - \frac{1}{3} \right) \right]. \quad (7.84)$$

Si le volume du bec est nul ou trop petit, on en conclut que la correction de longueur due à la longueur finie de  $x_1$  décroît avec la fréquence, donc les fréquences aiguës sont effectivement trop hautes par rapport à la série 1,2,3...n.... Pour améliorer l'harmonicité des fréquences propres, on voit qu'on a intérêt à disposer d'un volume de bec égal à  $x_1 S_1 / 3$ , qui n'est autre que le volume de la partie manquante du tronc de cône. En effet la surface  $S_1$  vaut  $\pi R_e^2$  et le volume d'un cône  $\pi R_e^3 / 3$ ; en coordonnées sphériques, on aurait respectivement  $2\pi r^2(1 - \cos\theta)$ , et  $2\pi r^3(1 - \cos\theta)/3$ .

C'est ce qu'on trouve approximativement pour les saxophones, mais le volume réel peut être plus petit, en raison des effets de l'ancre (cf. chapitre 9). Pour un hautbois, on a pu montrer que les facteurs avaient en outre placé un changement de conicité au début de l'instrument, ce qui améliore encore l'harmonicité des fréquences propres, et compense l'effet du 5<sup>e</sup> ordre en  $kx_1$  [16, 41].

- Quels sont les paramètres caractérisant un instrument conique ? Les rayons d'entrée et de sortie, et la longueur ; mais comme la longueur effective dépend de la note, ainsi que le rayon de sortie effectif, il est bien préférable de choisir l'angle au sommet  $2\theta$  et le rayon d'entrée  $R_1$ . En fait, la distance du sommet à l'entrée,  $x_1$ , peut être également intéressante pour évaluer l'inharmonicité (elle vaut environ

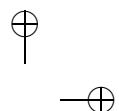
$R_1/\theta$ ). On trouvera de nombreux relevés de dimensions dans [106]. On peut noter que pour un hautbois, l'angle  $2\theta$  est de l'ordre de 0,026 radians ( $1,5^\circ$ ), beaucoup moins que pour un saxophone soprano, de tessiture comparable, où il vaut environ 0,07 ( $4^\circ$ ). Pour un basson, instrument plus grave, l'angle  $2\theta$  vaut 0,014 ( $0,8^\circ$ ) ; pour un saxophone ténor, 0,054 ( $3^\circ$ ). Les angles au sommet des instruments d'une même famille sont donc plus grands pour un instrument aigu que pour un instrument grave. On a pu remarquer aussi que dans la famille des saxophones actuels, l'angle était supérieur à celui de la famille créée par Sax. Le choix des dimensions, déjà compliqué pour une famille d'instruments cylindriques, reste encore à élucider.



**Figure 7.11.** Saxophones soprano, ténor et baryton ; on remarque que l'angle au sommet est plus grand pour les instruments aigus que pour les instruments graves.

#### 4.5. Équations avec pertes « moyennées », matrices de transfert

Tenir compte des couches limites de façon rigoureuse nous emmènerait très loin. La résolution des équations avec couches limites en coordonnées sphériques est possible [26], mais comme l'angle au sommet est faible, nous admettons la validité de l'équation (7.12), qui repose sur le raccordement d'ondes planes. Elle n'a pas de solution analytique ; avant de montrer que le calcul des modes est une méthode approchée de résolution, nous étudions d'abord une solution encore plus approchée : nous calculons la matrice de transfert d'un tuyau conique dans lequel on suppose que les pertes sont obtenues pour un rayon « moyen »,  $r_m$ , admettant que les quantités  $r_v$  et  $r_t$  incluses dans (7.13) sont indépendantes de  $x$ , calculées pour ce rayon  $r_m$ .



Les équations (7.77) restent valides à condition de remplacer  $\rho$  par  $\rho_v$ , donnée par (7.13), et de même  $\chi_s$  par  $\chi_t$ . Cela donne une nouvelle valeur de la vitesse du son et donc du nombre d'onde (cf. (5.141)) :

$$k = \frac{\omega}{c} \left[ 1 + \alpha_1 \frac{\sqrt{-2j}}{r_v} \right]. \quad (7.85)$$

On peut encore simplifier le résultat en admettant, comme pour les cylindres, que l'impédance caractéristique (spécifique)  $\rho c$ , donnée par (5.143) n'est pas affectée par les pertes. Quand il n'y a pas de pertes, les coefficients de la matrice de transfert ont les propriétés suivantes :  $A$  et  $D$  sont réels, et  $B$  et  $C$  imaginaires purs, ce qui est dû au fait que la puissance entrante doit être égale à la puissance sortante quelles que soient les conditions aux extrémités. Quand il y a des pertes les 4 coefficients sont complexes, mais le déterminant reste égal à l'unité.

L'intérêt de la matrice de transfert (7.77) avec pertes constantes apparaîtra pour le calcul numérique des pavillons, au § 5.2.

## 4.6. Décomposition modale pour un instrument tronconique à anche

Après avoir déterminé les fréquences propres, nous cherchons la décomposition modale comme pour les autres géométries, afin de connaître les pics d'impédance. En raison de la variation des pertes avec le rayon, nous ne disposons pas d'une forme compacte analytique, solution de (7.12). Des méthodes de type perturbation ont été employées [106, 78]. Avant de montrer que la décomposition modale est aussi une méthode pour résoudre cette difficulté, nous étudions le saxophone « traversier », qui donne des informations qualitatives intéressantes.

### 4.6.1. Modes pour un saxophone « traversier »

Nous avons résolu un problème similaire au chapitre 5, avec la formule simplifiée (5.180). Cette fois la source n'est pas à l'entrée, mais en  $x = x_1$ , et les deux extrémités sont ouvertes : le calcul est exactement le même, mais on a une condition aux limites d'impédance nulle en  $x = 0$ . Ceci donne pour l'impédance en  $x = x_1$ , excité au même point :

$$P = \frac{2}{L} j\omega \frac{\rho c^2}{S} U_s \sum_{n>0} \sin^2 k_n x_1 \frac{j\omega + \frac{1}{2}\omega_{n0} Q_n^{-1}}{\omega_{n0}^2 + j\omega\omega_{n0} \frac{1}{Q_n} - \omega^2}. \quad (7.86)$$

Les fréquences propres  $\omega_{n0}$  ont déjà été étudiées, quant au facteur modal, il est ici :  $\sin^2 k_n x_1$ . On peut l'écrire, en utilisant l'approximation (7.81) :

$$\frac{\tan^2 k_n x_1}{1 + \tan^2 k_n x_1} = \frac{1}{1 + 1/(k_n x_1)^2}. \quad (7.87)$$

Aux basses fréquences, l'impédance d'entrée est donc nettement plus basse que pour un cylindre excité à l'entrée. C'est pourquoi les notes les plus graves des saxophones sont difficiles à émettre, d'autant que le deuxième pic est plus haut que le premier, ce qui provoque une tendance à octavier. En fait il y a une compétition entre l'évolution de ce facteur et le facteur d'amortissement, proportionnel à  $Q_n/\omega_n$ , qui lui décroît en  $\sqrt{\omega}$ . Pour les notes correspondant à une longueur plus

