Fondamentaux pour l'Acoustique - M2 ATIAM

Résonateur de Helmholtz et équation des ondes

C. Vergez[1], vergez@lma.cnrs-mrs.fr

[1] *Laboratoire de Mécanique et Acoustique (LMA-CNRS), Marseille, France*

- Support du cours -

Avertissements

Avertissements :

- Ce document n'est qu'un support de cours. Le but est de gagner du temps sur la prise de note, pas de remplacer le cours.
- Le cours des différents intervenants en acoustique est construit autour du livre

  [A. Chaigne, J. Kergomard], *Acoustique des instruments de musique*, Belin.

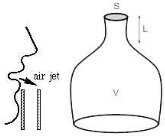
  Il y sera fait appel systématiquement en cours (renvoi aux pages concernées de la première édition du livre). Les notations choisies dans le cours sont en accord avec celles du livre.

Plan du cours

Plan du cours

Un instrument à une note : une expérience !

Qui n'a jamais soufflé dans le goulot d'une bouteille en essayant de produire un son ?



crédits images :
http://people.seas.harvard.edu/ jones/
https://interstices.info/

Démo : prévoir une bouteille de boisson orangée gazeuse + eau + cylindre en carton + demi bouchon en liège tranché dans le sens de la longueur :

- Production du son avec une bouteille
- Que se passe-t-il quand le volume varie (rempli en partie avec de l'eau) ?
- Et si la longueur du goulot augmente (grâce au cylindre en carton) ?
- Et quand la surface transverse du goulot diminue (mettre le demi-bouchon) ?

Question : **peut-on écrire un modèle physique qui explique tout ça quand on n'a jamais fait d'acoustique ?**

Un instrument à une note : le résonateur de Helmholtz

Définition :

- Les observations précédentes sont le résultat de ce qu'on appelle la "résonance de Helmholtz".
- Musicalement : ocarina, caisse de guitare, embouchure de cuivre, hang (vidéo) ...
- On appelle résonateur de Helmholtz un dispositif dont la géométrie est susceptible de donner naissance à une résonance du même nom.
- Le cas typique : un volume presque clos V (la bouteille) débouchant sur une partie étroite de longueur l et de section S (le goulot).

Comment ça marche ?

- L'air contenu dans le goulot intervient via son inertie (masse)
- L'air contenu dans le volume intervient par son élasticité/compressibilité (ressort)

  Eh oui ! volume fermé $\equiv$ ressort (en basses fréquences) : ex de la pompe à vélo bouchée par un doigt

On a donc un piston (l'air contenu dans le goulot) qui vient agir sur l'air contenu dans le volume.

Remarque : pour que cette analyse soit valable, il faut que la longueur d'onde ($\lambda = c_0 T$) soit grande devant toutes les dimensions du résonateur. Cela peut se vérifier a posteriori.

Modèle de résonateur de Helmholtz

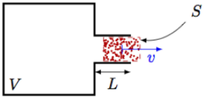


Image tirée de
`learn-electroacoustics.fr/`

- Sous l'effet d'une perturbation, un déplacement x de la masse d'air du goulot $M = \rho_0 LS$ se traduit par une variation de volume $dV = Sx$. On voudrait connaître la variation de pression correspondante dP dans le volume V.
- Pour cela, on suppose le système adiabatique (i.e. thermiquement isolé). En effet, vu les (petites) échelles de temps en acoustique, les échanges thermiques avec le milieu extérieur n'ont pas le temps de s'établir.
- On utilise alors la loi de Laplace : $PV^\gamma = \text{cste}$

  où $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = 1.4$ pour l'air (rapport des chaleurs massiques à pression et volume constant).
- Par différenciation on obtient : $dPV^\gamma + \gamma PV^{\gamma-1}dV = 0$
- Puis après division par V^γ : $dP = -\gamma P \frac{dV}{V}$.
- Cette variation de pression engendre une force F qui s'applique à M :

  $F = -\gamma P \frac{dV}{V} S$, or $dV = xS$ donc $F = -\gamma P \frac{S^2}{V} x$
- En appliquant le principe fondamental de la dynamique :

  $M\ddot{x} = F \implies \rho_0 LS\ddot{x} + \gamma P \frac{S^2}{V} x = 0$

  Que reconnait-on ?

Modèle de résonateur de Helmholtz : oscillateur à 1ddl

- On reconnait un oscillateur linéaire à un degré de liberté :
  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, où la pulsation propre $\omega_0 = 2\pi f_0$ avec f_0 la fréquence propre.
- On en déduit : $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\gamma SP}{\rho_0 LV}} = \frac{c_0}{2\pi}\sqrt{\frac{S}{LV}}$ où $c_0 = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho_0}}$ la vitesse du son.
- Ce modèle permet de retrouver les observations expérimentales :

$$S \searrow \Longrightarrow f_0 \searrow, \qquad L \nearrow \Longrightarrow f_0 \searrow, \qquad V \searrow \Longrightarrow f_0 \nearrow$$

- Comme pour un oscillateur mécanique on peut faire apparaître
  - La masse acoustique $\rho_0 \frac{L}{S}$
  - La raideur acoustique $\gamma \frac{P}{V}$

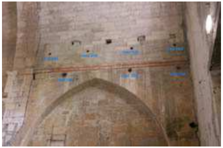
Modèle de résonateur de Helmholtz : remarques conclusives

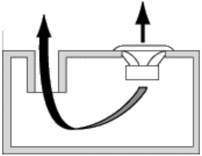
- A noter (rappel) que nous n'avons pas fait intervenir la notion d'onde (hypothèse basse-fréquence par rapport aux dimensions géométriques)
- Expérience et évaluation numérique à faire à la maison ! Vérifier $\lambda >>$dimensions.

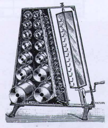
  Vous constaterez probablement un écart de fréquence entre f_0 calculée et mesurée dû principalement :
  - aux pertes dues aux frottements contre les parois, ignorées dans ce modèle
  - aux effets du rayonnement (pertes et correction de longueur) ignorés dans ce modèle
- Pour une guitare, les dimensions de la caisse (volume V) et de la rosace (goulot) sont telles que $f_0 \simeq 100 Hz$.

  Rôle primordial de cette résonance qui permet à l'instrument de rayonner efficacement en dessous de la fréquence de coupure de la table d'harmonie (comme un enceinte bass-réflex)
- Un résonateur de Helmholtz peut à l'inverse être utilisé en architecture pour amortir les sons dans une certaine bande de fréquence (dissipation par les parois du goulot ou dans le matériau poreux placé à l'intérieur) :

  Vases acoustiques dans les théâtres antiques, églises ou dans les tunnels, nacelle de réacteurs (A380, "le géant qui murmure") ...





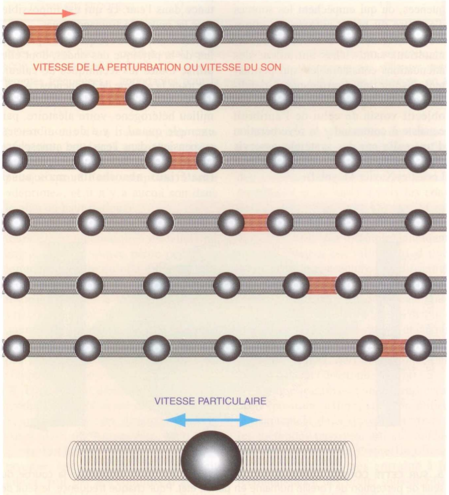


Autre application : Analyseur de sons de Helmholtz-Koening, l'ancêtre de la FFT !

Plan du cours

Le son ... un phénomène ondulatoire

(d'après "Le monde des sons", J. Kergomard, hors-série Pour la Science, été 2001)



L'air est compressible

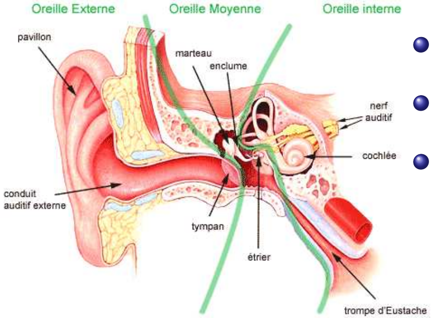
- L'air vibre mais reste en moyenne sur place
- C'est le mouvement vibratoire qui se propage (de proche en proche)
- Acoustique $\neq$ vent

Vitesse particulaire $\neq$ Vitesse de propagation

- Vitesse propagation : $340 m.s^{-1}$ dans l'air, 1500 $m.s^{-1}$ dans l'eau
- Vitesse particulaire : environ 10 milliards de fois plus petite au seuil d'audition

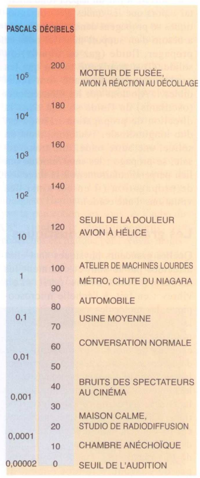
Grandeurs acoustiques - Qu'entend-on ?
(d'après "Le monde des sons", J. Kergomard, hors-série Pour la Science, été 2001)

- Beaucoup de grandeurs physiques sont modifiées par la présence d'une onde acoustique : vitesse, pression, température, densité
- Ces grandeurs oscillent autour de leur valeur moyenne (l'amplitude de la fluctuation est en général petite devant la valeur moyenne)
- C'est la fluctuation de pression (ou pression acoustique) que capte l'oreille



- Le tympan joue le rôle de la membrane du microphone
- Au seuil d'audition, pression acoustique $\simeq$ 5 milliards de fois plus petite que P_{atm}
- La pression acoustique peut aussi devenir très grande, dans des situations où (heureusement !) il n'est pas possible d'entendre (ex : intérieur d'un bec de clarinette ou embouchure de cuivre)

L'oreille ... logarithmique
(d'après "Le monde des sons", J. Kergomard, hors-série Pour la Science, été 2001)



- La sensibilité de l'oreille est logarithmique : même changement perceptif quand l'amplitude de la pression acoustique passe de 1 à 10 ou de 10 à 100
- C'est l'origine du decibel (dB) : $20log_{10}\left(\frac{P}{p_0}\right)$

  où $P = \sqrt{\frac{1}{T}\int_t^{t+T} p^2(u)du}$ est la pression quadratique moyenne, ou valeur efficace (RMS)
- 0dB = seuil d'audition à 1000Hz (i.e. $P_0 = 2.10^{-5}Pa$)
- 1dB $\simeq$ différence de niveau perceptible
- $+$20dB correspond à pression acoustique $\times$10
- Dynamique de l'oreille normale $\simeq$ 120dB (avant douleur)
- Exercice 1 : en supposant que l'amplitude du signal de pression mesuré dans l'embouchure d'une trompette est de 20kPa crête à crête (c'est un maximum), quel est le niveau sonore en dB ?

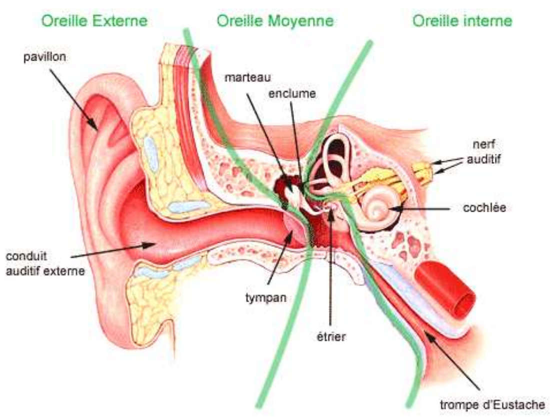
Pression, Niveau sonore, Energie, Intensité, Puissance ....

- Pour mesurer le niveau sonore d'une onde en terme de pression, on utilise le décibel comme on vient de le voir.
- Une source sonore diffuse de l'énergie acoustique E (mesurée en ? ?)
- On peut lui associer puissance acoustique $\mathcal{P} = \frac{E}{t}$ (mesurée en ? ?)

  (ex : voix normale $\simeq 10^{-5}\,W$, avion à réaction $\simeq 10^{3}\,W$)
- L'intensité acoustique est la puissance traversant une surface S placée sur le trajet de l'onde acoustique $\mathcal{I} = \frac{\mathcal{P}}{S}$ (mesurée en ? ?)
- Remarque : la puissance est indépendante de la distance à la source, l'intensité non ! (comme pour une ampoule électrique)

L'oreille ... et la transformée de Fourrier

(d'après "Le monde des sons", J. Kergomard, hors-série Pour la Science, été 2001)



- L'oreille (grâce aux cellules cillées) réalise une analyse fréquentielle du signal de pression
- Une variante biologique de la transformée de Fourier
- Son périodique = somme de "sons purs" (i.e. composantes sinusoïdales)
- Un élément important dans la distinction de deux instruments de musique est le contenu spectral (i.e. fréquentiel) du son émis. On parle du timbre du son.
- Importance de l'analyse fréquentielle en acoustique

Plan du cours

Contexte ATIAM

Acoustique des salles

- La propagation des sons dans tout volume est régie par l'équation des ondes + des conditions aux limites (par exemple vitesse nulle aux parois)

Instruments de musique à vent

- C'est un cas particulier du point précédent puisque le volume d'air contenu dans un instrument de musique présente la plupart du temps une dimension grande devant les deux autres : on peut utiliser une réduction à une dimension de l'équation des ondes.
- Les conditions aux limites sont particulières ; elles traduisent :
  - soit le rayonnement (trous latéraux, pavillon) : linéaire le plus souvent
  - soit l'intéraction avec le musicien (anche ou lèvre vibrante, jet d'air oscillant) : forcément non linéaire

simu clarinette (thèse F. Silva) : FILMS/Montee_ar.avi

Introduction

Principe

- Deux équ. de conservation + équ. d'état $\xrightarrow{\textit{(élimination de deux variables)}}$ équ. des ondes !

Grandeurs acoustiques

Une grandeur acoustique est définie comme la variation de cette grandeur autour d'une valeur moyenne, considérée comme invariante dans le temps

- $P = p_0 + p$
- $T = T_0 + \tau$
- $\rho = \rho_0 + \rho'$
- $v = 0 + v$ (fluide au repos)

Ainsi on parlera de pression (resp. température, densité, vitesse) acoustique

Faible niveau

Faible niveau $\equiv x << X_0 \equiv$ petites fluctuations $\equiv$ DL d'ordre 1 admissibles

Equation d'état du gaz

[Chaigne, Kergomard], p42

Hypothèse : fluide adiabatique

- Pas d'échanges de chaleur entre éléments du fluide car on suppose la fréquence des ondes acoustiques trop élevée pour qu'ils aient le temps de s'établir
- On considère une équation d'état [*An introduction to Acoustics*, Rienstra et Hirschberg] :

$$P = P(\rho, S)$$

- Adiabatique $\equiv$ aucun transfert thermique n'intervient entre le système étudié et le milieu extérieur
- Dans l'hypothèse de transformations réversibles, on a en plus une transformation isentropique (S constante)
- Conséquence : les variations de pression peuvent s'écrire comme celles de la masse volumique uniquement :

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{S\ const} d\rho \qquad \text{Ce qu'on note : } dP = c^2 d\rho$$

$$\text{Soit : } p = c^2 \rho' \tag{1}$$

Conservation de la quantité de mouvement

[Chaigne, Kergomard], p43

Rappel : mécanique du solide

- Quantité de mouvement : produit "masse" $\times$ "vitesse"
- Connue sous le nom de relation fondamentale de la dynamique (RFD)
- Illustrations : boules de billards, recul du canon, freinage brusque ...

Mécanique des fluides

- Variables d'Euler (liées à l'observateur, et pas à la particule fluide)
- Introduction de la dérivée particulaire :

$$\frac{d}{dt} = (\mathbf{v}.\mathbf{grad}) + \frac{\partial}{\partial t}$$

- RFD appliquée à un volume élémentaire :

$$\rho \left[(\mathbf{v}.\mathbf{grad})\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right] = -\mathbf{grad}P + \rho \mathbf{F}$$

(connue comme l'équation d'Euler)

Rappels (ou pas ...) sur les définitions de quelques opérateurs différentiels (coordonnées cartésiennes 3D)

- Le gradient d'un champ de scalaires décrit un champ de vecteurs :
  $\mathbf{grad}p = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}p \\ \frac{\partial}{\partial y}p \\ \frac{\partial}{\partial z}p \end{pmatrix}$ que l'on note aussi $\boldsymbol{\nabla} p$ avec $\boldsymbol{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$
- La divergence d'un champ de vecteur est un scalaire défini par :
  $div\mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \boldsymbol{\nabla}.\mathbf{v}$ (produit scalaire)
- Le laplacien d'un champ est égal à la somme des dérivées secondes de ce champ par rapport à chacune des variables :
  $\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \nabla^2 p = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} p) = div\,(\boldsymbol{grad}\ p)$

Acoustique linéaire dans un fluide au repos

- Exercice 2 : démontrer qu'avec les hypothèses de faible niveau dans un fluide au repos, l'équation d'Euler linéarisée (donc à l'ordre 1) s'écrit :

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{grad}p + \rho_0 \mathbf{F} \tag{2}$$

  Où $\mathbf{F}$ est une force extérieure par unité de masse

NB : $\mathbf{F}$ est nécessairement d'ordre 1 car dans l'équation avant linéarisation, il n'y a aucun terme d'ordre 0, donc $\rho\mathbf{F}$ ne peut avoir d'ordre 0.

Conservation de la masse ([Chaigne, Kergomard], p45)

Formulation intégrale

Dans un volume D, la variation de masse par unité de temps est égale à la somme :

- de la masse échangée par franchissement des frontières du volume (le flux de matière à travers la surface S)
- de la masse "produite" à l'intérieur du volume

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_D \rho dD = \iiint_D \rho q(\mathbf{r}, t) dD - \iint_S \rho \mathbf{v}.\mathbf{dS}$$

où q est une source de masse

Si ce n'est pas clair, penser à l'évolution au cours de l'année de la masse de poissons dans un volume de mer (franchissement des limites du domaine + naissance/mort des poissons)

Formulation différentielle

Après utilisation du théorème de flux-divergence, ou théorème de Green-Ostrogradski ($\iiint_D div\mathbf{F} = \iint_S \mathbf{F}.\mathbf{dS}$) et en considérant que la relation est valable dans tout domaine D, la relation peut être écrite sous forme différentielle :

$$div(\rho\mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho q(\mathbf{r}, t)$$

Acoustique linéaire dans un fluide au repos

Exercice 3 : montrer qu'à l'ordre 1, la linéarisation conduit à :

$$\rho_0 div\mathbf{v} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} = \rho_0 q(\mathbf{r}, t) \tag{3}$$

NB : q est d'ordre 1 pour les mêmes raisons que F dans l'équation d'Euler

Etablissement de l'équation des ondes avec sources

Principe :

Equation d'état (Eq. (1))

+

Equation de conservation de la quantité de mouvement (Eq. (2))

+

Equation de conservation de la masse (Eq. (3))

$$\Delta p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \rho_0 \left(div\mathbf{F} - \frac{\partial q}{\partial t} \right)$$

Exercice 4 : retrouver ce résultat (nécessite d'éliminer ρ' par substitution (grâce à Eq.(1)) puis la vitesse par dérivation croisée des equations (2) et (3))

Remarques sur les sources acoustiques

([Chaigne, Kergomard], p53)

L'établissement de l'équation des ondes fait apparaître deux types de sources :

Sources de débit

- Source = variation temporelle de débit
- Exemple idéalisé : membrane ponctuelle pulsante le long (de la paroi) d'un tube
- Illustration : instruments à anche et cuivres pour lesquels la source de débit dépend de la pression à l'entrée du résonateur (cf. cours à venir)

Exemple : les lèvres du trompettiste, par leur oscillation, créent une source de débit oscillant (crédit vidéo : Murray Campbell) FILMS/murraya1ff.avi

Sources de force

- Source = force exercée sur le fluide
- Exemple idéalisé : membrane perpendiculaire à un tube
- Illustration : instruments de type flûte où la source de force est de nature aéroacoustique (cf. cours à venir)

Exemple : l'interaction entre le jet et le biseau crée une source de pression (crédit vidéo : François Blanc) FILMS/Film d'un transitoire de flûte à bec (FilmE).avi

Remarques sur l'équation des ondes

Lien avec la corde homogène 1D de tension uniforme

- cf. cours de J.L. Le Carrou, vibration des cordes
- Equation sans sources formellement identique
- Sources de natures différentes : traduisent pincement, choc ou frottement
- Pour la corde on peut considérer le déplacement transverse, longitudinal ou la propagation d'ondes de torsion
- Pour l'air, seules les vibrations longitudinales sont considérées (l'air n'est pas assez "rigide")

Plan du cours

Ondes planes

Définition

- Une onde pour laquelle la pression est constante sur tout plan perpendiculaire à la direction de propagation
- Le front d'onde est un plan

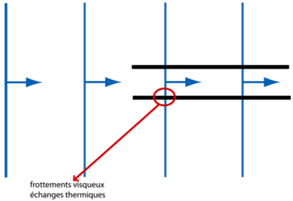


figure 2 : l'onde plane constitue une solution "intuitive" de propagation à l'intérieur d'un tuyau cylindrique

Une onde plane dont la direction de propagation est orientée selon l'axe d'un tuyau cylindrique n'est pas (en première approximation) perturbée par la présence du tube. L'onde plane semble être une bonne solution (intuitive) pour la propagation dans un tube de section constante.

Extrait de "Les Bois : Résonateurs", B. Fabre, JPPIM 2000

Réduction de l'équation des ondes

- L'équation des ondes se ramène alors à une équation 1D dans la direction de propagation :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \qquad \text{(cas sans source)}$$

Ondes planes progressives, solution de D'Alembert

Factorisation

- L'équation des ondes 1D sans source se réécrit :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) p = 0$$

Solutions de D'Alembert

- Le champ de pression $p(x,t)$ s'écrit comme la somme de deux ondes progressives :

$$p(x,t) = f^+(x - ct) + f^-(x + ct)$$

- f^+ et f^- sont de formes quelconques, et se propagent à la vitesse c, dans la direction "x" mais dans des sens opposés.
- Les formes d'onde sont simplement convectées : pas de déformation de la forme d'onde lors de la propagation.

Exercice 5 :

Montrer qu'on obtient un résultat identique pour la vitesse $v(x,t)$ avec $v^+ = \frac{1}{\rho_0 c} p^+$ et $v^- = \frac{-1}{\rho_0 c} p^-$ (utiliser l'équation d'Euler)

Notation en complexe

- Nous venons de voir que la solution générale de l'équation des ondes sans source était la superposition de deux ondes progressives aller et retour.
- En fréquentiel cette décomposition s'écrit [a] :

$$P(x,\omega) = P^+(\omega)e^{-jkx} + P^-(\omega)e^{+jkx} \qquad \text{pour la variable de pression}$$

$$U(x,\omega) = Z_c^{-1}\left[P^+(\omega)e^{-jkx} - P^-(\omega)e^{+jkx}\right] \qquad \text{pour la variable de débit}$$

P^+ et P^- sont complexes, $Z_c = \frac{\rho_0 c}{S}$ est l'impédance acoustique caractéristique

a. TF de la solution de d'Alembert avec changement de variable $t' = t \pm x/c$

Limite de l'hypothèse de linéarité

Acoustique à fort niveau sonore

- La propagation n'est plus linéaire
- Ainsi un développement à l'ordre deux est nécessaire pour obtenir les équations de l'acoustique (plus de linéarisation)
- Les formes d'onde ne sont plus simplement convectées lors de la propagation : distorsion de la forme d'onde
- La distorsion conduit en un temps fini à la formation d'ondes de choc
- Illustration : les cuivres ... cuivrent !

Un apparté : propagation non linéaire

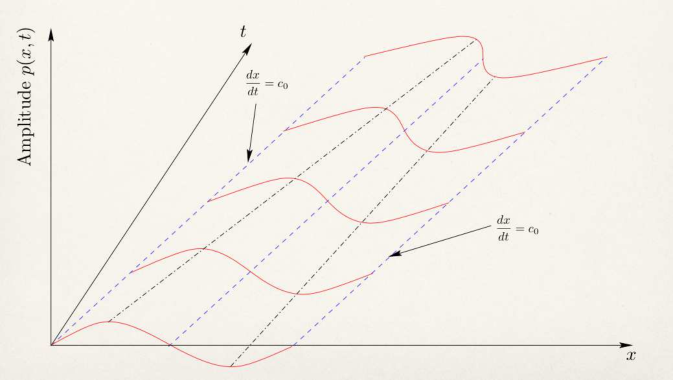


Illustration sonore : SONS/son_Chet2_propagNL.wav, SONS/Becquet_Trombonne_PropagNL.wav

Ondes planes, impédance spécifique

Définitions

- On appelle impédance acoustique spécifique d'une onde, le rapport p/v
- Dans le cas d'une onde progressive, on parle d'impédance spécifique caractéristique ($Z_S = \frac{p^+}{v^+} = \frac{p^-}{-v^-}$) et vaut alors $Z_S = \rho_0 c$
- $Z_S = 415 kg/m^2/s$ dans l'air à $20^o C$
- $Z_S = 1.48 \times 10^6 kg/m^2/s$ dans l'eau à $20^o C$

Ondes planes stationnaires

Définition

- On appelle onde stationnaire une onde qui "semble rester sur place"
- Plus précisément, c'est une onde dont tous les points (en espace) vibrent en phase ou en opposition de phase au cours du temps
- Les ondes stationnaires sont également des solutions particulières de l'équation des ondes. Elles apparaissent lorsque l'on cherche des ondes à variables séparées en temps et en espace
- Dans le cas des ondes planes, les calculs conduisent ([Chaigne et Kergomard, p47]) à l'expression générale :

$$p(x,t) = (A\cos kx + B\sin kx)\cos(\omega t + \phi)$$

  (solution particularisée en fonction d'éventuelles conditions aux limites et conditions initiales)
- Les modes (d'une corde, d'une colonne d'air ...) correspondent à des ondes stationnaires (lien avec le cours de JL Le Carrou)

FILMS/InitiationAcoustiqueBelin/009.mov [crédit vidéo : Antonio Fischetti]

Ondes sphériques

Définition

- On appelle onde sphérique une onde dont le front d'onde est une sphère (même principe que le caillou dans la mare, mais en 3D)

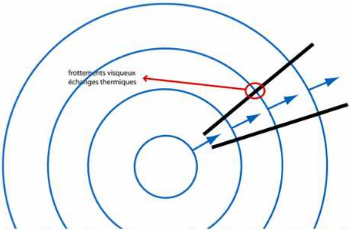


figure 3 : l'onde sphérique constitue une solution "intuitive" de propagation à l'intérieur d'un tuyau conique.

De la même manière que l'onde plane apparaît être une solution intuitive pour la propagation dans un cylindre à section constante, l'onde sphérique apparaît être une solution intuitive dans un cône.

Extrait de "Les Bois : Résonateurs", B. Fabre, JPPIM 2000

Equation des ondes spériques

- On pourra suivre dans [Chaigne et Kergomard, p276] l'établissement de l'équation des ondes sphériques, qui comme pour les ondes planes est 1D (une dimension radiale r + symmétrie) :

$$\frac{\partial^2(pr)}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2(pr)}{\partial r^2} = 0 \text{ (cas sans source)}$$

- On reconnait une équation formellement identique à celle des ondes planes, mais pour la variable (pr)

Lien ondes planes et sphériques : raisonnement intuitif (géométrique)

- "Loin" de la source, la sphère est grande : sa surface apparaît localement "plane"
- L'onde plane reste donc une approximation raisonnable loin de la source.
- Ce raisonnement sera quantifié dans quelques slides.

Ondes sphériques et ondes progressives

Ondes de pression

- Comme l'équation des ondes sans source en la variable rp est identique au cas des ondes planes, on en déduit :

$$p = \frac{f^+(t - r/c) + f^-(t + r/c)}{r}$$

- Le facteur $1/r$ traduit que la puissance moyenne à travers une surface ne change pas avec la distance à la source

Ondes de vitesse

- On a toujours la conservation de la quantité de mouvement $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r}$, mais du fait de l'expression de p, l'expression de v est plus compliquée.
- Dans le domaine de Fourier, si $P = \frac{a^+ e^{-jkr} + a^- e^{jkr}}{r}$, alors :

$$V = \frac{1}{\rho_0 c} \left(\frac{a^+ e^{-jkr} - a^- e^{jkr}}{r} + \frac{P}{jkr} \right)$$

Premier terme identique aux ondes planes + terme additionnel en $1/kr$

Ondes sphériques et impédances spécifiques

Définition

On appelle admittance caractéristique spécifique des ondes aller et retour les rapports :

- $Y_c^+ = V^+/P^+$
- $Y_c^- = -V^-/P^-$

  D'où

$$Y_c^{\pm} = \frac{1}{\rho_0 c}\left[1 \pm \frac{1}{jkr}\right]$$

L'inverse de l'admittance spécifique (caractéristique) est l'impédance spécifique (caractéristique).

Remarques :

- A la différence des ondes planes, $Y_c^{\pm}$ variables avec r, et différentes l'une de l'autre
- Si $kr >> 1$, on retrouve l'admittance spécifique caractéristique d'une onde plane. Confirme et quantifie l'intuition précédente : "grande distance" de la source est à considérer par rapport à la longeur d'onde.