

Mécanique de la corde vibrante

Chapitre 4

Claude Valette et Christian Cuesta

Hermès, Paris, 1993

Chapitre 4

Évolution temporelle, mécanismes d'amortissement

4.1. Introduction

Une corde à usage musical est une corde de raideur faible. Pour de telles cordes, nous avons vu que la forme à l'instant initial est proche de deux segments de droite. En théorie, l'attaque serait instantanée (établissement d'un front de montée). Dans cette description, le mouvement persisterait sans entretien.

Il n'en est pas de même en pratique. La phase de croissance de la vibration (le transitoire d'attaque) n'est pas instantanée; nous étudierons ces effets de non-linéarité au chapitre 6. La phase de décroissance est contrôlée par les mécanismes d'amortissement et son étude est l'objet du présent chapitre.

4.2. Étude expérimentale

4.2.1. *Composante longitudinale de la force*

L'étude de la composante longitudinale de la force exercée permet tout d'abord d'avoir accès à chaque instant à la tension, paramètre important dans toute tentative de modélisation.

4.2.1.1. Vibration d'octave

Dans l'approximation linéaire où nous nous plaçons pour ce chapitre, le mouvement résulte de la superposition des modes de flexion indépendants entre eux. Chaque mode est amorti indépendamment des autres et exerce une force longitudinale à la fréquence double (l'étirement étant le même quand la corde se déplace transversalement dans un sens ou dans l'autre). Son amplitude est proportionnelle au carré de l'amplitude du mode transversal correspondant et son temps de décroissance deux fois plus court. Cet effort d'octave est assez bien connu, on peut se référer, par exemple, à une publication sur les cordes de piano [Boutillon, 9].

4.2.1.2. Onde de compression

Il est possible de produire de l'onde de compression en l'absence de flexion en frottant un doigt humide le long de la corde. Lorsqu'on arrête l'excitation, on constate que le temps de décroissance est très court. Par exemple sur du fer de Zuckermann (corde de la fig.[6.5]), le temps de décroissance à 10 dB du fondamental de compression est de 45 ms, ce qui donne par [4.1] : $Q = 200$.

Le changement de volume associé à la propagation de cette classe d'onde génère des irréversibilités thermiques (échauffement et refroidissement, donc transport de chaleur). Mais nous verrons que là n'est pas la raison de cet amortissement important, qui résulte de la viscoélasticité.

Quand on excite la corde en flexion pure avec le plectre (voir paragraphe 2.2), l'onde de compression devrait être absente, les modes longitudinaux étant découplés. Nous verrons dans le chapitre 6 que l'onde de compression s'introduit à cause des non-linéarités de la corde.

4.2.2. Composante transversale de la force

La composante transversale possède une réponse initiale qui suit assez bien la forme "en créneau". En première approximation le spectre est entièrement déterminé par la position du point de pincement, indépendant de la forme du plectre et de l'amplitude de vibration ; les différences de couleur qu'on peut obtenir pour un même point de pincement, ne dépendent *a priori* que de l'évolution temporelle due aux différences des temps de décroissance des partiels d'une corde à l'autre. Nous avons mesuré le temps de décroissance $\Delta t(f)$ de chaque partie de fréquence f et nous en avons déduit le facteur de qualité $Q(f)$.

Quand le temps de décroissance est pris à 10dB, $Q(f)$ est donné par la relation :

$$Q(f) = 2,73f\Delta t(f) \quad [4.1]$$

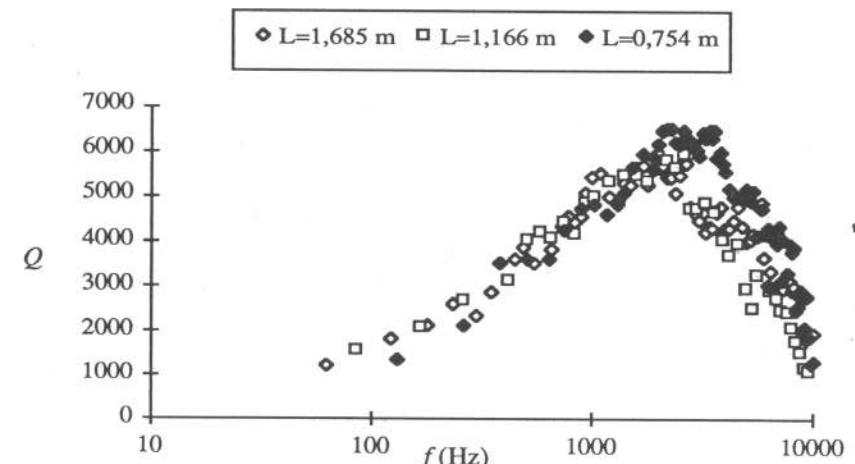


Figure 4.1. Variation du facteur de qualité Q en fonction de la fréquence pour trois longueurs différentes de "laiton ressort", diamètre : 0,35mm, tension : 3,3 daN.

Pour la composante transversale nous disposons maintenant d'un nombre important d'enregistrements de décroissance de l'amplitude. Les résultats présentés ici résument l'étude d'une quinzaine de bobines de fil de clavicin. Pour chaque bobine, nous avons étudié plusieurs cordes de longueurs différentes, à diverses tensions. Pour une corde à une tension donnée, nous avons relevé la courbe de décroissance de chaque partie par l'intermédiaire d'un filtre à bande étroite. Nous avons constaté que ces courbes de décroissance suivent presque toujours une courbe exponentielle, et ceci sur une dynamique de 30 ou même 40 dB. Nous trouvons cependant systématiquement, à forte amplitude, des décroissances un peu plus rapides, l'amortissement plus important étant signe d'un fonctionnement non linéaire. Nous n'observons pas de phénomène de double décroissance du type étudié par Weinreich sur le piano [Weinreich, 89]. Ceci est d'ailleurs logique puisque nous n'avons ni cordes doubles ni mouvements de chevalet.

4.2.2.1. Présence de battements sur certaines cordes

Sur la bobine de “*laiton ressort*” de diamètre 0,45 mm, nous avons obtenu des battements importants sur certains partiels, variables d'une corde à l'autre suivant la longueur et la tension. Malgré le grand nombre de cordes mesurées, toutes possèdent des battements. Ceci concorde avec l'expérience des facteurs d'instruments qui disent volontiers que lorsqu'une bobine est “mauvaise”, elle est inutilisable sur toute sa longueur. La bobine de “*laiton ressort*” de diamètre 0,3 mm, du même fabricant, est au contraire de grande qualité.

Remarque : effet de l'oxydation

L'oxydation de certaines cordes, a pour effet d'introduire d'importants battements, sans doute dus à des modifications locales de la raideur de la corde, et de faire chuter la courbe de $Q(f)$. Il suffit alors de nettoyer la corde pour retrouver le comportement antérieur. Ceci a été particulièrement net sur les cordes en laiton de chez Weber Métaux (“*laiton ressort*”). Sur d'autres cordes dont l'aspect visuel semble plus “attaqué” (“*fer de Zuckermann*”), nous n'avons pas constaté d'effets sur la courbe de $Q(f)$ ni de battements. Il est remarquable que l'oxydation ait des effets aussi différents en intensité selon les cordes.

4.2.2.2. Caractérisation d'un fil donné par le relevé de $Q(f)$

Sur un fil de bonne qualité, la dispersion sur les temps de décroissance reste faible d'une corde à l'autre comme on peut le voir sur la figure 4.1. Le fait que les courbes obtenues pour trois longueurs de fils soient bien superposables (alors qu'une fréquence donnée correspond à un numéro de partiel différent d'une corde à l'autre) montre que la courbe $Q(f)$ caractérise bien une propriété du fil de la bobine, commune à toutes les cordes qu'on peut en tirer, du moins tant que la longueur n'est pas trop courte.

4.2.2.3. Comparaison entre différents fils

Pour différentes bobines, on obtient des courbes $Q(f)$ différentes : les différences dans les temps de décroissance des partiels seront donc responsables sur un instrument donné, toutes choses supposées égales par ailleurs en ce qui concerne l'adaptation de la corde à l'instrument, des différences de couleur sonore selon que l'on utilise tel ou tel type de corde.

Deux des cordes de la figure 4.2 montrent un comportement très opposé : le

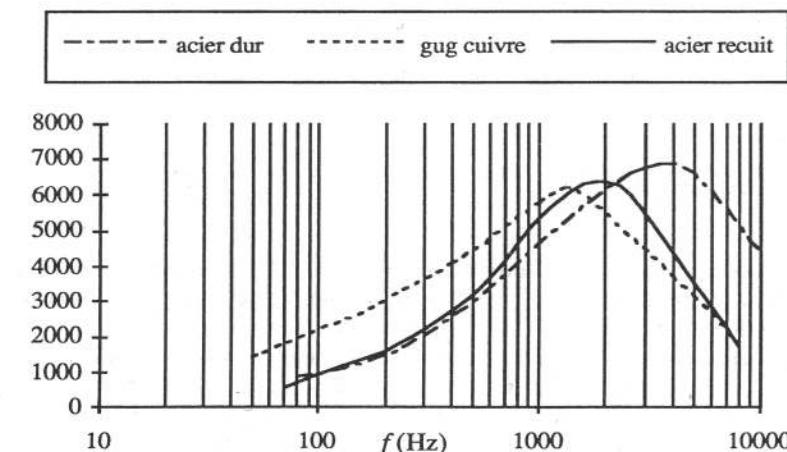


Figure 4.2. Comparaison des valeurs moyennes de Q obtenues sur des fils de composition et de métallurgie différentes.

“cuivre de Gug” a une forte valeur de Q à basse fréquence et une valeur très faible vers 10kHz; au contraire, l’“acier dur” a une valeur plus faible à basse fréquence, mais très forte vers 10kHz. Les deux bobines d'acier diffèrent seulement par la nature du traitement métallurgique : on constate que le recuit, qui rend le matériau plus mou, a pour effet de faire chuter Q à 10 kHz. La bobine de cuivre, faite d'un métal plus dense et de plus gros diamètre, donne une valeur de Q plus importante à basse fréquence.

4.2.2.4. Commentaires sur l'intérêt de mesurer $Q(f)$

Toutes les cordes de clavecin que nous avons mesurées ont une courbe $Q(f)$ qui comporte un maximum assez prononcé dans une zone allant de 1000 Hz à 4000 Hz. On constate que les facteurs d'instrument ont su trouver empiriquement les matériaux qui fournissent une tenue de son plus longue dans la zone de fréquence où l'oreille est particulièrement sensible et où les clavecins émettent beaucoup d'énergie.

La figure 4.2 montre également tout l'intérêt, pour faire des comparaisons, de représenter Q en fonction de la fréquence (comme nous l'avons fait pour la première fois dans la référence [Valette, 84]), plutôt que de représenter le temps de décroissance comme il est fait généralement. Dans une représentation des temps de

décroissance en fonction de la fréquence, ou dans une représentation de type sonagraphique, de telles différences subtiles seraient beaucoup moins visibles.

Un tel relevé pourrait fournir une technique extrêmement sensible pour le contrôle de la qualité (figure 4.1 : fil de bonne qualité).

4.2.2.5. Rôle de la tension

Nous avons étudié, pour toutes les cordes, le rôle de la tension. A basse fréquence, la valeur de Q est indépendante de la tension appliquée, même pour de larges variations de la tension. En revanche, la valeur de Q au maximum, Q_{\max} , décroît lorsque l'on diminue la tension T . Les facteurs d'instrument savent bien que le son d'une corde insuffisamment tendue perd de sa richesse. Nous avons mis en évidence un fait qui ne semble pas avoir été signalé auparavant : il n'est pas nécessaire d'augmenter la tension jusqu'au voisinage de la rupture pour qu'une corde de clavecin ait une bonne tenue de son sur toute l'étendue de son spectre. On observe en effet qu'au-dessus d'une certaine tension, que nous proposons d'appeler tension utile T_u , apparaît un phénomène de saturation. Nous y reviendrons ultérieurement de façon plus quantitative.

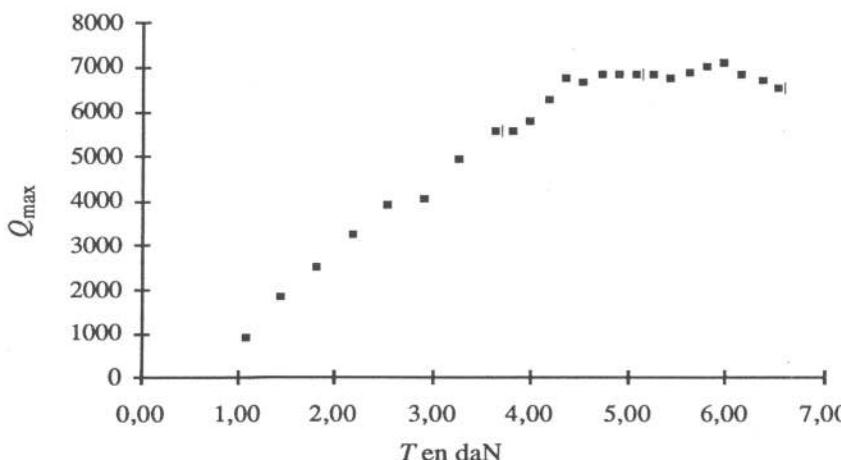


Figure 4.3. Variation du maximum de Q , Q_{\max} , avec la tension (fréquence : 2300 Hz) pour une corde en "acier recuit". On constate l'existence d'une tension utile T_u .

La figure 4.3 montre un exemple où la saturation se produit de façon particulièrement brutale. Dans d'autres cas elle est plus progressive, mais elle existe sur toutes les cordes que nous avons mesurées. Les autres courbes sont reportées en annexe.

4.2.2.6. Rôle de l'écrouissage

Il est admis parmi les facteurs de clavecin que certaines cordes ont besoin de "se faire" : la corde neuve tout juste montée sonne mal, mais les choses s'arrangent après un certain temps de mise en tension.

Notre banc de mesures a permis de suivre ainsi l'histoire de quelques cordes, jusqu'à une durée maximum de six mois [Caracciolo, 16].

Laiton Zuckermann

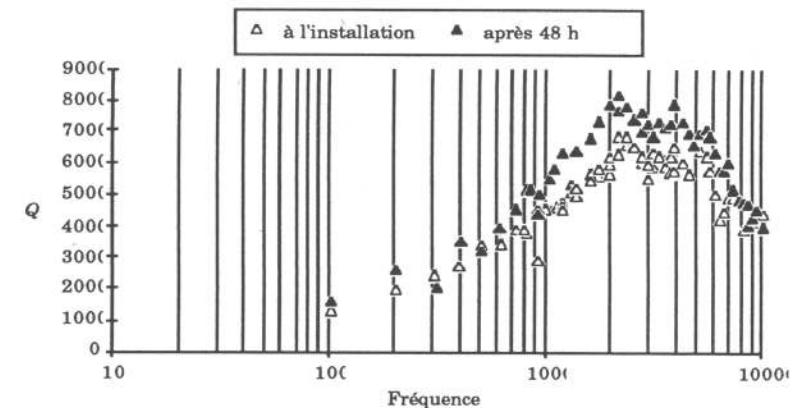


Figure 4.4. Effet d'écrouissage sur une corde neuve.

L'étude a montré que le laiton, en particulier, évolue sensiblement. L'évolution se fait principalement dans les premières 48 heures, et peu de choses changent ensuite. L'écrouissage d'un fil par traction ayant pour effet principal d'introduire des dislocations, c'est une influence de celles-ci sur l'amortissement qui est ainsi mis en évidence. Les résultats expérimentaux seront commentés quantitativement au paragraphe 4.3.7.1.

4.2.2.7. Pertes thermiques aux extrémités

Des pertes se produisent aux extrémités par transport de chaleur à travers la corde, à chaque cycle, pendant un temps relativement long (une fraction de la période). Pour des faibles longueurs de corde, elles deviennent prépondérantes. Les mesures ci-dessous [Caracciolo, 16] montrent la détérioration du facteur de qualité quand la corde devient anormalement courte :

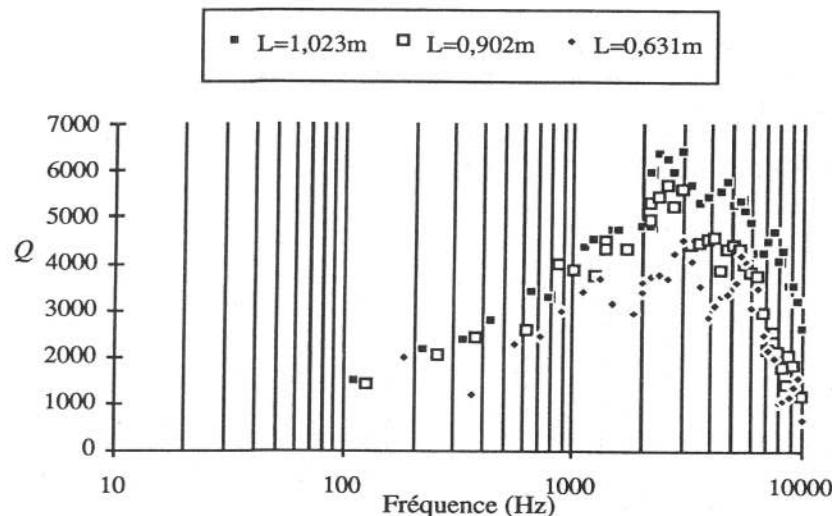


Figure 4.5. Corde en laiton ressort. Comparaison de Q pour différentes longueurs.

La figure 4.5 compare, pour une corde en "laiton ressort", des mesures pour différentes longueurs. Comme on peut le remarquer, le maximum de la courbe de Q s'aplatit dans la zone 1-5 kHz. On peut expliquer qualitativement le phénomène.

Nous savons que la flexion de la corde aux extrémités n'est fonction que des angles que l'on aurait en appuis simples (voir paragraphe 3.2.4), déterminés uniquement par l'équilibre des trois forces et par suite, indépendants de la longueur. L'énergie dissipée aux extrémités est donc elle aussi indépendante de la longueur. En revanche, celle dissipée par les autres mécanismes pris en compte, dans le modèle théorique, est proportionnelle à la longueur de la corde. Il n'est pas étonnant qu'avec la diminution de la longueur le mécanisme de dissipation par transmission de chaleur devienne rapidement prépondérant. Cependant, nous n'avons fait que peu de mesures sur des cordes très courtes car elles ne sont pas utilisées musicalement.

4.2.2.8. Cas des cordes filées

On est souvent amené, en musique, pour des raisons que nous allons préciser, à utiliser des cordes filées. Elles sont fabriquées en bobinant à spires jointives, sur une âme en acier, en nylon ou en soie, un fil de trait constitué d'un matériau dense et relativement mou. L'idée est d'obtenir une valeur élevée de la masse par unité de longueur, tout en conservant une grande souplesse en flexion. Une corde monofilament dont la masse par unité de longueur serait la même aurait nécessairement un diamètre relativement important, donc une souplesse en flexion bien moindre. Un tel besoin apparaît, dans les applications musicales, sur les cordes graves. L'obtention d'une basse fréquence, si l'on veut éviter d'utiliser une très grande longueur qui entraînerait un encombrement excessif, ne peut se réaliser qu'au moyen d'une grande masse par unité de longueur. Or, pour une raison psychoacoustique, on demande aux mêmes cordes de fonctionner sur un grand nombre de partiels avec une faible inharmonicité, ce qui n'est réalisable que si la corde possède une grande souplesse. Cette raison psychoacoustique a un caractère général, elle tient à l'impression d'homogénéité de timbre que l'on demande en principe à un instrument de musique quel qu'il soit, sur toute sa tessiture. Pour obtenir cette impression d'homogénéité il faut que l'étendue spectrale totale pour chaque son soit, grossso-modo, la même aussi bien pour les notes de l'aigu que pour celles du grave. Dans ces conditions, le nombre de partiels présent doit être beaucoup plus grand pour une note du grave que pour une note de l'aigu. Cependant, pour des raisons d'accord et de qualité de timbre, on souhaite également que l'inharmonicité ne soit pas plus gênante dans le grave que dans l'aigu, malgré l'utilisation de partiels de rang élevé. La seule solution est alors d'assurer une très grande souplesse en flexion, que l'on obtient facilement par filage. Tout ceci est bien connu, dans le cas du piano par exemple [Fletcher et Rossing, 37].

Les mesures que nous avons effectuées sur des cordes filées, principalement des cordes de guitare, ont montré un comportement très inattendu en ce qui concerne les amortissements. Pour beaucoup de ces cordes, le facteur de qualité s'effondre complètement dans la partie intermédiaire du spectre. Un mécanisme supplémentaire de pertes est spectaculairement présent dans toute la gamme des fréquences intermédiaires. Nous avons pu apporter la preuve que ce mécanisme consiste en un frottement entre elles des spires consécutives du filage. Cette démonstration a été faite grâce à C. Besnainou qui nous a préparé des cordes dans lesquelles les spires du filage ne se touchaient plus et ne pouvaient donc plus frotter entre elles. Les mesures faites séparément sur l'âme seule et sur ces cordes "demi-filées" ont montré que le comportement redevenait complètement habituel dès que ce frottement était supprimé. Les résultats sont montrés sur les figures 4.6 et 4.7. Ils seront commentés quantitativement dans la partie théorique (voir paragraphe 4.3.7.3).

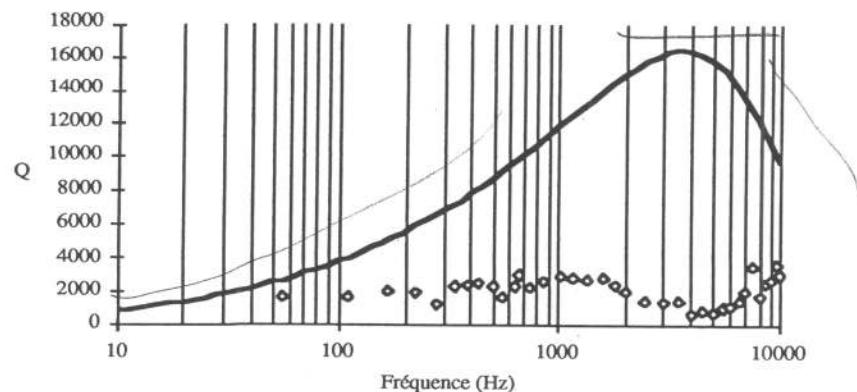


Figure 4.6. Corde filée : trait de laiton sur âme en acier ($L = 1,38 \text{ m}$; $T = 80 \text{ N}$).

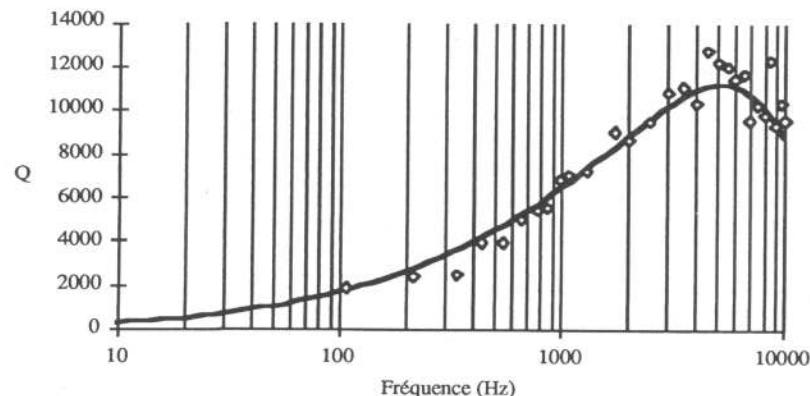


Figure 4.7. Corde demi-filée : mêmes matériaux, mais les spires ne sont pas jointives.

4.2.2.9. Autres effets structurels dans des cordes non monofilament

Une autre manière d'améliorer la souplesse en flexion est de fabriquer des cordes commises, c'est-à-dire des cordes constituées de plusieurs fibres torsadées entre elles. Il en est ainsi, par exemple, des cordes commises en boyau que l'on utilise sur certains luths ou bien, dans d'autres domaines, des cordes de marine, des

cordes d'escalade, des câbles de téléphériques, etc. Nous avons pu montrer que certaines cordes de luth, dont les fibres sont faiblement liées entre elles par du collagène, possèdent un mécanisme supplémentaire de frottements internes qui se traduit par un renforcement de l'amortissement à basse fréquence. Un phénomène analogue existe sur les cordes en fibre végétale (J. Razafindrakoto, Mémoire du diplôme d'Acoustique du CNSMP, 1990), tirées directement du corps de l'instrument, que l'on utilise sur certaines Valihas. La Valiha est une cithare tubulaire jouée à Madagascar. Avec d'autres techniques de fabrication des cordes en boyau, on obtient un glissement aisément des fibres entre elles en supprimant le collagène. Nous avons pu montrer que ce mécanisme dissipatif à basse fréquence disparaît alors (C. Besnainou, International Symposium on Musical Acoustics, ISMA, Mittenwald, 1989). Nous y reviendrons dans la partie théorique.

4.3. Modélisation des ondes transversales en présence des amortissements

Nous abordons, maintenant, une partie centrale de ce livre puisqu'il s'agit de la modélisation, dans un cadre très général, des différentes classes d'ondes que l'on peut trouver dans les cordes vibrantes, nous parlons là des cordes réelles, dans toute leur variété, avec tous les mécanismes d'amortissements qui agissent sur les différents modes vibratoires. Nous nous restreignons bien entendu au cas linéaire, permettant une présentation modale, où ces classes d'ondes sont découpées et au cas où les amortissements sont tous de petites perturbations. Nous commençons par les vibrations de flexion.

4.3.1. Vibrations transversales amorties des cordes fortement précontraintes

Une façon générale et commode de prendre en compte des mécanismes dissipatifs aussi variés, dans la limite où ils n'agissent sur le mouvement des cordes que comme une faible perturbation par rapport à un mouvement idéal non amorti (les valeurs trouvées pour le facteur de qualité Q sont toujours très élevées) consiste à décrire le système mécanique au moyen des équations aux dérivées partielles du premier ordre reliant l'effort tranchant transversal et la vitesse transversale. Le rapport de l'effort tranchant à la vitesse transversale en un point n'est rien d'autre que l'impédance mécanique en ce point. Ce formalisme est classique en électricité et en acoustique : l'effort tranchant sera l'analogie de la tension ou de la pression acoustique et la vitesse transversale celui de l'intensité ou de la vitesse acoustique.

Au chapitre 3, nous avons relié l'effort tranchant V compté selon Oy avec la

composante de la tension et du moment fléchissant. De l'expression de l'effort tranchant transversal :

$$V = -Ty' + EIy''' \quad [4.2]$$

on tire l'équation de conservation suivante :

$$\dot{V} = -Tu' + EIu''' \quad [4.3]$$

Pour décrire le comportement du système mécanique, il faut y ajouter l'équation fondamentale de la dynamique

$$\rho_L \ddot{u} = -V - Ru \quad [4.4]$$

Nous avons ici tenu compte d'une résistance mécanique, R , dont nous verrons qu'elle peut représenter l'effet des frottements visqueux dans l'air, aussi bien que d'autres phénomènes de frottements que l'on trouve parfois dans des cordes non monofilament. L'irréversibilité introduite par les effets viscoélastiques et thermoélastiques sera décrite par un angle de perte viscoélastique et un angle de perte thermoélastique dans le module d'Young, introduisant une composante en quadrature, c'est-à-dire un retard de la déformation sur la contrainte. Un angle de perte éventuel sur la tension T décrira, d'une façon analogue, un retard de l'effort tranchant sur la pente de la corde, correspondant au temps nécessaire à deux spires consécutives du filage pour glisser l'une sur l'autre. Enfin, dans un instrument à cordes, de l'énergie mécanique est prélevée à la corde au niveau du chevalet et communiquée à la table d'harmonie, qui en rayonne une partie sous forme d'énergie acoustique. On en tiendra compte dans une condition aux limites en considérant une admittance au chevalet, faible mais non nulle, alors que l'admittance au sillet, à l'autre extrémité de la longueur vibrante, sera considérée comme nulle. Finalement, dans les équations [4.3] et [4.4], la plupart des paramètres pourront devenir complexes : nous renonçons, pour alléger la présentation, à distinguer dans l'écriture ceux qui le sont effectivement. De plus, ils pourront dépendre de la fréquence.

Prenons l'origine des abscisses en ce dernier point, supposé parfaitement immobile.

Admettons, pour rendre le calcul plus commode, que la corde est en appui simple à ses deux extrémités. Les solutions les plus générales (voir paragraphe 3.3.1) pour la vitesse transversale sont de la forme

$$u = u_0 \sin kx e^{-j\omega t} \quad [4.5]$$

où la partie imaginaire de ω , comme éventuellement celle de k , est petite devant la partie réelle (faible amortissement).

En reportant cette solution dans [4.4] on obtient

$$V = (j\omega\rho_L - R) u_0 \sin kx e^{-j\omega t} \quad [4.6]$$

et après intégration :

$$V = (-j\frac{\omega}{k}\rho_L + \frac{R}{k}) u_0 \cos kx e^{-j\omega t} \quad [4.7]$$

L'admittance mécanique au point x est donc de la forme :

$$Y = (-j\frac{\omega}{k}\rho_L + \frac{R}{k})^{-1} \tan kx \quad [4.8]$$

Au chevalet, l'admittance est supposée petite et connue. Cette dernière condition aux limites détermine les valeurs k_n possibles du nombre d'onde k , qui sont toutes les solutions de l'équation suivante :

$$Y_{ch} = (-j\frac{\omega}{k}\rho_L + \frac{R}{k})^{-1} \tan kL \quad [4.9]$$

Cette équation, compliquée dans le cas général, prend une forme très simple dans les hypothèses où nous nous sommes placés : corde proche d'une corde idéale, faible correction de raideur, faibles mécanismes dissipatifs. En ce cas, qui est le plus courant dans les applications musicales, les diverses perturbations apportent chacune une correction d'ordre $\varepsilon \ll 1$ et on peut négliger tous les termes croisés, qui sont des infinitésimales d'ordre supérieur à ε . En particulier, à l'intérieur d'un terme correctif, il suffit de prendre pour ω/k la valeur au premier ordre, c'est-à-dire c_t . L'équation [4.9] devient alors :

$$Y_{ch} = (-j\rho_L c_t)^{-1} \tan kL \quad [4.10]$$

ce qui donne les solutions suivantes pour le nombre d'onde :

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \left(1 - j\rho_L c_t \frac{Y_{ch}}{n\pi}\right) \quad [4.11]$$

Ce calcul est valable tant que les conditions [4.12] sont vérifiées.

$$\frac{RL}{2\rho_L c_t n\pi} < \varepsilon \quad \rho_L c_t \frac{|Y_{ch}|}{n\pi} < \varepsilon \quad [4.12]$$

On remarque que ces solutions ont une faible partie imaginaire dès que l'admittance au chevalet n'est plus simplement réactive, qu'elle possède une partie réelle, c'est-à-dire dès que de l'énergie vibratoire est transmise à la table d'harmonie.

Pour calculer le facteur de qualité, il faut écrire la pulsation complexe, que l'on obtient à partir de la relation de dispersion en reportant les solutions trouvées pour le nombre d'onde. En dérivant [4.3] par rapport à x et [4.4] par rapport à t il vient :

$$\dot{V} = (Tk^2 + EI k^4) u = (\rho_L \omega^2 + jR\omega) u \quad [4.13]$$

La relation de dispersion prend donc la forme générale suivante :

$$Tk^2 \left(1 + \frac{EI}{T} k^2\right) = \rho_L \omega^2 \left(1 + j \frac{R}{\rho_L \omega}\right) \quad [4.14]$$

où R , E et T dépendent ou peuvent dépendre de ω

En remarquant que les termes correctifs introduits par la raideur et par la résistance mécanique sont, par hypothèse, petits devant l'unité, cette relation entre ω et k s'écrit :

$$\omega = k \sqrt{\frac{T}{\rho_L}} \left[1 + \frac{EI}{2T} k^2 - j \frac{R}{2\rho_L \omega} \right] \quad [4.15]$$

Dans cette dernière forme, nous avons regroupé entre crochets les termes correctifs d'ordre ε . L'idée qui préside à ce simple jeu d'écriture est, bien sûr, que dans ces termes correctifs nous allons pouvoir remplacer les inconnues k et ω par leur valeur approchée à l'ordre 1 (état non perturbé), c'est-à-dire $n\pi/L$ et $n\pi c_t/L$ respectivement. Le fait que R , E et T dépendent ou puissent dépendre de ω entraîne que l'équation [4.14] n'a pas de solution simple. La méthode utilisée se prête, en revanche, à un calcul par itération si on le souhaite.

Les solutions pour la pulsation complexe s'écrivent donc :

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho_L}} \left[1 + \frac{EI n^2 \pi^2}{2T L^2} - j \frac{RL}{2\rho_L c_t n\pi} - j \rho_L c_t \frac{|Y_{ch}|}{n\pi} \right] \quad [4.16]$$

Ce calcul est valable tant que les conditions [4.17] sont vérifiées.

$$\left| \frac{EI}{2T} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right| < \varepsilon \quad \frac{RL}{2\rho_L c_t n\pi} < \varepsilon \quad \rho_L c_t \frac{|Y_{ch}|}{n\pi} < \varepsilon \quad [4.17]$$

Pour obtenir la correction de fréquence et la valeur du facteur de qualité, il reste à séparer la partie réelle et la partie imaginaire. Prenons en compte les quatre mécanismes de perte ci-dessus identifiés (résistance mécanique due, en particulier, au frottement visqueux de la corde dans l'air, viscoélasticité, thermoélasticité, frottements entre spires consécutives du filage). Nous verrons que l'irréversibilité thermodynamique dans ces trois derniers mécanismes provient de phénomènes de retard, que l'on peut prendre en compte par une petit angle de perte. Introduisons les angles de perte viscoélastique δ_{ve} , thermoélastique δ_{te} et des spires du filage δ_{sp} . Posons

$$\begin{aligned} E &\rightarrow E [1 - j(\delta_{ve} + \delta_{te})] \\ T &\rightarrow T (1 - j\delta_{sp}) \end{aligned} \quad [4.18]$$

où nous avons chaque fois assimilé le facteur de perte, la tangente de l'angle de perte et la valeur de cet angle exprimée en radians.

Posons également

$$Y_{ch} = \text{Re} Y_{ch} + j \text{Im} Y_{ch} \quad [4.19]$$

Les fréquences des partiels deviennent finalement

$$f_n = \frac{nc_t}{2L} \left[1 + \frac{EI n^2 \pi^2}{2T L^2} + \rho_L c_t \frac{\text{Im} Y_{ch}}{n\pi} \right] \quad \text{avec} \quad c_t = \sqrt{\frac{T}{\rho_L}} \quad [4.20]$$

et le facteur de qualité est donné par

$$Q^{-1} = \frac{R}{2\pi\rho_L} (nf_0)^{-1} + \frac{4\pi^2 \rho_L EI (\delta_{ve} + \delta_{te})}{T^2} (nf_0)^2 + \rho_L c_t \frac{\text{Re} Y_{ch}}{n\pi} + \delta_{sp} \quad [4.21]$$

On retrouve l'effet d'inharmonicité due à la raideur, qui augmente les fréquences, phénomène que nous avons commenté chapitre 3. L'admittance au chevalet peut, dans une certaine mesure, compenser cette augmentation si la partie imaginaire est négative, c'est-à-dire si le comportement de la table d'harmonie au niveau du chevalet est du type ressort, autrement dit pour un partielle dont la fréquence serait un peu inférieure à une résonance marquée de la table. Dans le cas contraire,

les partiels voient leur fréquence augmentée encore par la présence de la table, à laquelle ils sont reliés par le chevalet.

Le facteur de qualité possède une dépendance en fréquence assez compliquée, introduite par le numéro du partiel d'une part, et d'autre part par la dépendance éventuelle en fréquence de R , de δ_{ve} , de δ_{le} , de δ_{sp} et de ReY_{ch} . Il faut remarquer que la dépendance en fréquence de Q est liée, en partie, à l'hypothèse de l'existence d'une forte précontrainte de tension, caractéristique de l'usage de nos cordes à des fins musicales. Nous allons voir, maintenant, que le comportement mécanique quant aux amortissements est sensiblement différents dans les autres types d'application où cette forte précontrainte n'existe pas.

4.3.2. Vibrations transversales amorties des poutres faiblement précontraintes

Il est instructif, à cet égard, de refaire le même calcul pour une poutre faiblement précontrainte, en ne conservant pour la simplicité que R et δ_{ve} . On obtient sans difficulté l'expression de la fréquence complexe à partir de la relation [4.14], en supposant cette fois le terme de raideur prépondérant devant celui de précontrainte. On en tire l'expression de la fréquence des partiels f_n d'une poutre en appuis simples faiblement précontrainte :

$$f_n = n^2 f_0 \left[1 + \frac{1}{n^2} \frac{TL^2}{2\pi^2 EI} \right] \quad \text{où} \quad f_0 = \frac{\pi}{2L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho_L}} \quad [4.22]$$

Pour une corde, cette expression devient :

$$f_n = n^2 f_0 \left[1 + \frac{1}{n^2} \frac{32TL^2}{\pi^3 Ed^4} \right] \quad \text{où} \quad f_0 = \frac{\pi d c_1}{8L^2} \quad \text{avec} \quad c_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad [4.23]$$

Pour une poutre, comme pour une corde, le facteur de qualité est donné par :

$$Q^{-1} = \frac{R}{2\pi\rho_L} (nf_0)^{-1} + \delta_{ve} \quad [4.24]$$

La fréquence des partiels croît comme le carré du numéro du partiel, résultat bien connu en théorie des poutres. Une précontrainte de traction augmente un peu les fréquences alors qu'une précontrainte de compression les diminue d'autant. Le comportement amorti est également instructif. Si l'amortissement de l'air donne le même genre d'effet que dans les cordes fortement précontraintes, l'effet de la viscoélasticité est totalement modifié : la dépendance avec le numéro du partiel dis-

paraît, le facteur de qualité devient indépendant de la fréquence.

On notera que les remarques ci-dessus concernent également les cordes musicales fortement tendues, mais exclusivement pour les partiels de numéros très élevés. Pour ceux-ci, en effet, la force de rappel de raideur est plus grande que la force de rappel de tension et on constate que la valeur du facteur de qualité chute, pour ces partiels, à la valeur basse qu'il a pour les poutres. L'intérêt d'une mise sous tension pour obtenir oscillation peu amortie est ici clairement montré. L'examen des ordres de grandeur montre qu'en l'absence de précontrainte le coefficient de qualité pour un fil métallique ou une poutre, à cause de la viscoélasticité, ne peut excéder quelques centaines, alors que si le même fil est fortement tendu, malgré la même viscoélasticité, le facteur de qualité peut approcher 10000 ! Les musiciens l'ont d'ailleurs remarqué : ils ont su en tirer partie depuis la nuit des temps ! Ce régime particulier d'amortissement des partiels, caractérisé par une forte décroissance du facteur de qualité à haute fréquence, ne semble pas avoir été toujours bien distingué [Fletcher et Rossing, 37, p. 51]

Nous allons, maintenant, examiner les différents mécanismes de perte actifs sur les ondes transversales dans les cordes et calculer les paramètres qui nous ont servi ci-dessus à décrire leurs effets.

4.3.3. Interaction de la corde avec l'air : les frottements visqueux dans l'air

L'interaction entre la structure vibrante constituée par la corde et le fluide qu'est l'air ambiant comporte, à priori, trois mécanismes dissipatifs différents : la dissipation par génération d'ondes acoustiques par la corde, le prélèvement d'énergie mécanique à la corde par déviation des lignes de flux d'air, le prélèvement d'énergie mécanique par les frottements visqueux dans l'air. Nous allons montrer que, seul, le troisième mécanisme est actif¹, et qu'il est extrêmement important à basse fréquence.

Un simple raisonnement d'ordre de grandeur montre que l'énergie acoustique directement générée par la corde est négligeable pour toutes les fréquences audibles. En effet, un piston en vibration dont le diamètre d serait celui de la corde émettrait en régime de diffraction acoustique tant que le nombre d'onde k resterait en deçà du seuil de diffraction donné par $kd = 1$. Pour un diamètre de 0,4mm, cette limite correspond à 250kHz. Toutes les fréquences audibles sont donc très en dessous du seuil de diffraction. La partie réelle de l'impédance de rayonnement, qui comporte une dépendance en $k^2 d^2$ par unité de surface, reste donc complètement

1. Remarquons que cette situation est propre à la corde. Pour une lame d'harmonica en vibration, l'interaction avec l'air n'est pas de même nature : l'effet de viscosité est négligeable devant les pertes dues à la déviation des lignes de flux, contrôlées par la densité de l'air ρ_{air} et non pas sa viscosité η . Sous pression atmosphérique réduite, ces comportements évoluent très différemment.

négligeable. C'est ce que l'on peut vérifier en se référant à un calcul de [Morse, 55].

La déviation des lignes de flux d'air est responsable, par exemple, de la portance d'une voile. Lorsqu'on néglige la viscosité de l'air, l'écoulement d'un flux d'air autour d'un cylindre, à une vitesse uniforme U perpendiculaire à l'axe du cylindre, est un problème classique [Brun et Martinot-Lagarde, 10]. Considérons un repère lié à la corde (voir figure 4.8), Ox étant dans l'axe de la corde, Oy perpendiculaire à l'axe mais parallèle à la vitesse U , Oz dans une section de la corde comme Oy mais perpendiculaire à U .

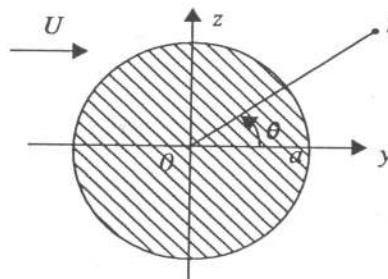


Figure 4.8. Section de la corde, coordonnées cylindriques.

Le champ des vitesses s'obtient en cherchant le potentiel Φ dont il dérive, sachant que Φ est à Laplacien nul et doit vérifier les conditions aux limites. Loin de la corde, la solution s'écrit

$$\Phi = Uy \quad [4.25]$$

puisque cette solution vérifie les conditions : $\Delta\Phi = 0$ $\Phi_y = U$ $\Phi_z = 0$.

Il convient d'ajouter une fonction dont le Laplacien soit nul également, qui soit négligeable loin de la corde et dont la dérivée radiale soit nulle à la surface du cylindre. En coordonnées cylindriques r, θ, z , le potentiel

$$\Phi = U \cos \theta \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \quad [4.26]$$

a une dérivée radiale

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = U \cos \theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad [4.27]$$

qui s'annule pour $r = a$. On vérifie aisément que son Laplacien est nul. La solution pour le potentiel s'écrit donc :

$$\Phi = U \cos \theta \left(r + \frac{a^2}{2r} \right) \quad [4.28]$$

Avec une telle solution, les lignes de flux sont déviées au voisinage du cylindre. Mais on peut vérifier que la force totale exercée par l'air sur la corde est nulle : il y a compensation exacte entre la surpression exercée à l'avant et celle exercée à l'aval de la corde, c'est le paradoxe de d'Alembert, auquel on aboutit dans toutes les situations où l'on néglige la déviation des lignes de flux à l'infini.

Pour évaluer l'effet de l'air sur la corde en mouvement, il est donc nécessaire de tenir compte de la viscosité de l'air. Celle-ci impose l'annulation, en plus de la dérivée radiale, de la dérivée tangentielle du potentiel à la surface du cylindre : cette annulation de la vitesse tangentielle, en régime alternatif, se produit dans l'épaisseur d'une fine couche limite autour du cylindre, créant un gradient de vitesse tangentielle à la surface, donc une force de viscosité. La vitesse tangentielle à annuler a pour expression, près de la surface :

$$u_\theta \Big|_{r=d/2} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \Big|_{r=d/2} = -U \sin \theta \left(1 + \frac{d^2}{2r^2} \right) \Big|_{r=d/2} = -2U \sin \theta \quad [4.29]$$

L'épaisseur de la couche limite est une fonction de la fréquence, voir [Pierce, 64], elle est donnée par l'expression [4.30], où η est le coefficient de viscosité de l'air.

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\eta}{\pi f \rho_{\text{air}}}} \quad [4.30]$$

Aux fréquences assez élevées pour que cette couche limite soit d'épaisseur faible par rapport au diamètre de la corde, le gradient de vitesse tangentielle au voisinage de la surface est de l'ordre de $U \sin \theta / \alpha$ et la force totale de frottement selon Oy donnée par :

$$F = \int_0^{2\pi} \left(\eta \cdot \frac{2U \sin^2 \theta}{\alpha} \cdot \frac{d}{2} \cdot d\theta \right) = \pi \eta \frac{d}{\alpha} U_0 \quad [4.31]$$

A ces fréquences, le frottement visqueux est donc responsable de la résistance

mécanique par unité de longueur suivante :

$$R = \pi \eta \frac{d}{\alpha} = 2\pi d \sqrt{\pi \eta \rho_{\text{air}} f} \quad [4.32]$$

Aux basses fréquences, l'expression ci-dessus prévoit une résistance mécanique tendant vers zéro, à cause de l'expression donnée pour la couche limite qui tend vers l'infini. Mais ce dernier résultat n'est valable que pour un écoulement alternatif au voisinage d'un plan infini. Dans le cas d'un cylindre, dont le rayon est fini, la couche limite ne peut clairement pas excéder une épaisseur de l'ordre du rayon du cylindre, au delà de laquelle l'écoulement devrait rester peu sensible à la présence de l'obstacle. En admettant pour valeur limite du gradient de vitesse une annulation de $U \sin \theta$ sur une distance égale au rayon du cylindre, on est conduit à la valeur limite suivante de la force résultante selon Oy :

$$F = \int_0^{2\pi} \left(\eta \cdot \frac{2U_0 \sin^2 \theta}{d/2} \cdot \frac{d}{2} \cdot d\theta \right) = 2\pi \eta U_0 \quad [4.33]$$

donc à la limite suivante pour la résistance mécanique.

$$R = 2\pi \eta \quad [4.34]$$

Ce raisonnement, qualitatif aux basses fréquences, suggère pour R la forme générale suivante :

$$R = 2\pi \eta + 2\pi d \sqrt{\pi \eta \rho_{\text{air}} f} \quad [4.35]$$

Cette forme n'est autre, en fait, que la solution (voir [4.36]) obtenue par Stokes [Stokes, 81] dans le cas de l'écoulement laminaire alternatif d'un fluide visqueux autour d'un cylindre.

$$R = \pi^2 \rho_{\text{air}} f \frac{d^2}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{M} + \frac{1}{2M^2} \right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} M = \frac{d}{4} \sqrt{\frac{2\pi f}{\mu_a}} \\ \mu_a = \frac{\eta}{\rho_{\text{air}}} \end{cases} \quad [4.36]$$

En toute rigueur, les choses sont beaucoup plus compliquées car un régime laminaire n'est pas possible : dans le cas d'un écoulement stationnaire, par exemple, on assiste à un décollement périodique de vortex appelés les vortex de Karman [Brun et Martinot-Lagarde, 11]. Expérimentalement, cependant, nous avons montré que

pour les diamètres usuels des cordes musicales, pour leur fréquence usuelle et aux amplitudes habituelles, le modèle laminaire de Stokes rend très bien compte de l'aspect énergétique du mécanisme de perte : la formule [4.35] permet de décrire, avec une très bonne approximation et sans aucun paramètre ajustable, le comportement oscillatoire amorti de telles cordes. Nous en resterons donc à cette formule approximative, d'autant qu'aucune théorie complète de l'écoulement ne semble avoir été élaborée, jusqu'à présent, dans le cas d'un cylindre en vibration (Hirschberg M., communication privée).

4.3.4. Viscoélasticité

Dans les matériaux élastiques dont sont fait les cordes, polymères ou métaux, les déformations ne sont pas des transformations parfaitement réversibles au sens de la thermodynamique car il existe un petit retard de la déformation sur la contrainte. Autrement dit, en explicitant la dépendance temporelle dans [4.2], il vient pour ce type de matériaux :

$$Ve^{-j\omega t} = -Ty'e^{-j\omega t} + EIy'''e^{-j\omega(t+\delta t)} \quad [4.37]$$

On prend en compte ce retard δt en introduisant une petite partie imaginaire dans le module d'Young, sous forme d'un angle de perte viscoélastique δ_{ve} :

$$E(1-j\delta_{ve}) \quad \text{où} \quad \delta_{ve} = \omega \delta t \quad [4.38]$$

Les polymères ont une viscoélasticité importante, on peut mesurer assez facilement sur un viscoélastomètre la composante de la déformation en quadrature et ainsi déterminer l'angle de perte. Les mesures faites par A. Chaigne [Chaigne, 18] ont montré que la valeur ainsi déterminée pour l'angle de perte explique bien les temps de décroissance qu'il a observés sur les mêmes cordes.

Dans les métaux, qui sont des matériaux cristallins alors que les polymères sont à l'état amorphe, la déformation sous l'action d'une contrainte nécessite, pour les applications qui nous intéressent, un processus compliqué de glissements de ces êtres très importants que sont les dislocations.

Par opposition aux défauts ponctuels dans les métaux (lacunes, interstitiels, impuretés) et aux défauts à deux dimensions (fautes d'empilement, surfaces de macle, sous joints, joints de grains), les dislocations sont des défauts de type linéaire (à une dimension).

Les dislocations ont fait l'objet d'importantes études en physique du solide. Les résultats principaux sont présentés dans deux livres de base : celui de Friedel et celui de Nabarro [Friedel, 39], [Nabarro, 59]. On trouvera, dans l'ouvrage de

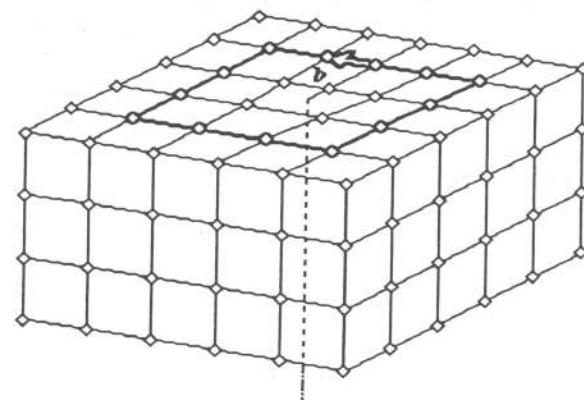


Figure 4.9. Dislocation coin : b , vecteur de Burgers. Dessin A. Watzky.

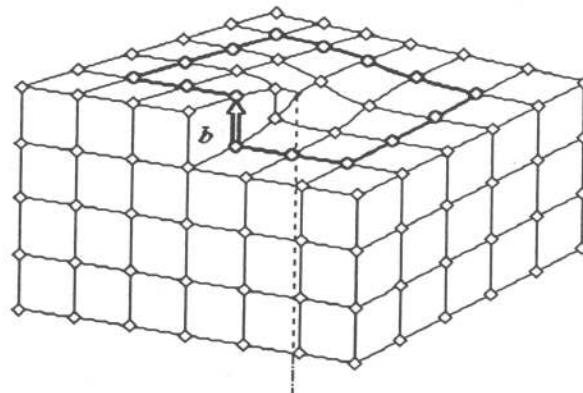


Figure 4.10. Dislocation vis : b , vecteur de Burgers. Dessin A. Watzky.

D. François, [François, 38] un cours très complet et tous les développements récents sur les matériaux métalliques. Nous allons faire ici un bref rappel historique.

Près de cinquante ans se sont écoulés depuis que Read [Read, 69] a suggéré que les dislocations contribuaient de manière importante au frottement interne dans les métaux. Depuis, plusieurs explications du mécanisme de cette contribution ont été proposées et développées. Un modèle a permis de réaliser des progrès considérables dans les années 1950, celui de Koehler [Koehler, 47], complété par Granato et Lücke [Granato et Lücke, 42].

4.3.4.1. Modèle de Granato et Lücke

Dans ce modèle, une analogie est établie entre le mouvement des dislocations dû à une vibration et celui d'une corde dans un milieu visqueux. Le frottement interne est déterminé par la longueur de la corde et la viscoélasticité du métal. Les dislocations, défauts linéaires du réseau cristallin, sont fixées par des points d'ancre (très forts à l'intersection du réseau et des dislocations, plus faibles sur des impuretés ou des interstices). Elles peuvent se déplacer si le cristal est soumis à des contraintes suffisantes.

$$A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + B \frac{\partial y}{\partial t} - C \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = b \sigma_0 e^{-j\omega t} \quad [4.39]$$

où A est la masse effective par unité de longueur de dislocation ; B la constante de frottement visqueux ; C la tension effective (supposée constante) de la ligne de dislocation ; b le module du vecteur de Burgers de la dislocation ; σ_0 l'amplitude de la contrainte sinusoïdale de pulsation ω appliquée à la dislocation ; y le déplacement d'un élément de la dislocation à une distance x de son extrémité.

A haute fréquence (MHz), le modèle KGL permet d'expliquer les résultats expérimentaux. Le décrément logarithmique Λ vérifie alors une dépendance en fréquence de la forme :

$$\Lambda = \alpha f \quad [4.40]$$

On peut relier le décrément au facteur de qualité Q par la relation :

$$\Lambda = \frac{\pi}{Q} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad [4.41]$$

A condition que Q soit suffisamment important, on peut simplifier cette relation qui devient alors :

$$\Lambda \approx \frac{\pi}{Q} \quad [4.42]$$

Des travaux récents [Simpson, 76, 77 et 78], [Rosenstock, 70], [Feltham, 33], [Beissner, 3 et 4], [Savage, 73], [Heiple, 44], [Routbort, 72] ont montré que la proportionnalité de Λ par rapport à la fréquence n'est pas vérifiée. La majorité des expériences actuelles s'accordent pour trouver une indépendance du décrément logarithmique en fonction de la fréquence en dessous de 30 kHz, c'est-à-dire un

frottement indépendant de la fréquence. Ce résultat est en contradiction avec la théorie de Granato et Lücke, selon laquelle le frottement devrait diminuer à haute fréquence. Les expériences d'irradiation montrent que les points d'ancre participation au mouvement des dislocations, et que le mouvement des défauts ponctuels créés par irradiation et entraînés par les dislocations s'accompagne de frottements visqueux.

4.3.4.2. La modification apportée à ce modèle par Simpson et Sosin

Ces auteurs étudient la vibration des dislocations dans un domaine quasi-statique (fréquences inférieures à la dizaine de kilohertz). On peut, dans ce cas, négliger l'effet inertiel qui est le terme dépendant de la masse dans l'équation [4.39]. De plus, on considère que les dislocations, en vibrant, entraînent des défauts ponctuels. Pour tenir compte de ces deux remarques, il faut modifier l'équation [4.39] de la manière suivante :

$$B(x)\rho(x)\frac{\partial y}{\partial t} - C\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = b\sigma_0 e^{-j\omega t} \quad [4.43]$$

où $\rho(x)$ est la densité des points d'ancre ; $B(x)$ est la constante d'amortissement visqueux pour les défauts se trouvant au point x .

Si l'on rapproche cette expression de celle donnée dans la théorie de Granato et Lücke, alors $\rho(x) = 1$ et $B(x)$ est la constante d'amortissement visqueux de la ligne de dislocation B_1 .

La théorie élaborée par Simpson et Sosin prend en compte n points d'ancre pouvant freiner le mouvement de la dislocation. Ceci a pour effet de modifier la dépendance en fréquence du décrément logarithmique.

L'action d'une irradiation produit des défauts ponctuels. Selon l'interprétation de Granato et Lücke, l'ancre de la dislocation raccourcit la longueur vibrante des lignes de dislocations, dans la gamme du mégahertz. Partant d'un métal très bien recuit et possédant peu de dislocations, on peut introduire progressivement des défauts ponctuels par irradiation. On constate alors que, dans une première phase, les pertes augmentent, puis qu'au-dessus d'un seuil (sur le nombre de défauts), qui est d'ailleurs très bas, les pertes paradoxalement diminuent.

L'hypothèse de Simpson et Sosin, qui autorise la mise en mouvement des défauts ponctuels par la vibration des dislocations, permet d'expliquer la diminution paradoxe des pertes quand le nombre des défauts continue à croître au-delà d'une certaine limite. D'un point de vue qualitatif, la fixation d'un défaut sur la ligne de dislocation amène des pertes. Un deuxième défaut provoque lui aussi des dissipations, mais diminue la contribution globale du premier, car l'amplitude du

mouvement de la dislocation diminue à chaque nouvel ancrage. On comprend qu'en introduisant de plus en plus de défauts, on parvienne à un maximum des pertes, dû à la superposition des deux mécanismes (mouvement des dislocations et interaction avec les défauts ponctuels). Ensuite les pertes diminuent du fait du blocage de la dislocation par les défauts ponctuels. Un phénomène analogue se produit si, au lieu d'introduire des défauts ponctuels, on introduit des dislocations : au-delà d'un certain seuil, les dislocations freinent mutuellement leur mouvement ; leur vibration est entravée, donc les pertes diminuent ; corrélativement, leur glissement est également entravé, donc le matériau devient plus dur.

Les expériences de Beissner et Biller [Beissner, 4], par déformation plastique et recuit à température croissante, ont porté sur des mesures des effets du frottement interne sur le module d'Young et sur le décrément logarithmique pour des échantillons de cuivre de différent degré de pureté. Elles conduisent à plusieurs conclusions.

- Un décrément logarithmique indépendant de la fréquence.
- Un décrément logarithmique qui dépend de la pureté du matériau. En effet le décrément est plus grand pour un cuivre qui n'a pas subi une déformation plastique (écrouissage).
- La courbe du décrément en fonction de la température illustre le fait que l'écrouissage et le recuit sont deux mécanismes compensatoires. L'effet de l'écrouissage sur les dislocations est anéanti par un recuit.
- La valeur numérique du décrément (voir aussi [Routbort, 72]), varie selon le métal (cuivre, aluminium), selon sa pureté et selon son recuit de 10^{-4} à $3 \cdot 10^{-4}$.

Toutes ces mesures sont faites, naturellement, en l'absence de précontrainte. Elles montrent, d'après [4.24] que ce décrément n'est autre que l'angle de perte viscoélastique δ_{ve} . Pour les métaux, δ_{ve} est donc contrôlé par les dislocations, sensible à la métallurgie (écrouissage par martelage, ou au contraire recuit). Dans la gamme des fréquences audio, il est indépendant de la fréquence, ce qui se traduit, pour une corde précontrainte à usage musical, par une valeur beaucoup plus élevée de Q (formule [4.21]) et, à haute fréquence dans le spectre, une décroissance de Q avec le carré du numéro du partielle, responsable de l'évolution spectrale très particulière de la corde dans le temps. La limite de cette décroissance est, naturellement, la valeur $Q = \delta_{ve}$ que l'on aurait obtenue en l'absence de précontrainte.

4.3.5. Thermoélasticité

Pour une corde en vibration transversale dans le domaine des fréquences audio, comme le précisera la discussion du paragraphe 4.3.7, les pertes dues à la viscosité de l'air sont prépondérantes en basse fréquence, les pertes viscoélastiques prépondérantes en hautes fréquences. La thermoélasticité vient apporter une correction

supplémentaire, qui ne peut devenir notable que dans le domaine de fréquence intermédiaire. Dans la flexion élastique d'une corde ou d'une poutre, certaines zones du matériau se trouvent comprimées donc échauffées, d'autres étirées donc refroidies. L'existence d'une conductivité thermique dans le matériau introduit alors une nouvelle irréversibilité thermodynamique par transport de chaleur entre ces deux zones : c'est le phénomène de thermoélasticité. Il a été étudié par Zener [Zener, 93 et 94], dont nous ne faisons que reprendre la démarche générale. Nous ne souscrirons cependant pas à sa conclusion : Zener pensait, en effet, que la thermoélasticité était le mécanisme principal de frottements internes dans les matériaux alors qu'il s'avère, dans le cas des cordes musicales du moins, que d'autres mécanismes sont prépondérants.

Nous nous intéressons donc au cas où la thermoélasticité introduit, par rapport au cas non perturbé, une petite correction d'ordre $\epsilon \ll 1$ et nous nous limitons à une description linéaire des variations de température, des dilatations et contractions qui y sont associées comme du transport de chaleur. Toutes les équations étant linéaires, nous calculons l'effet sur un mode propre de flexion, les effets sur des combinaisons de modes propres se déduisant par le principe de superposition. Pour simplifier le calcul de transport de chaleur dans une section de la corde, nous supposerons, pour une fois, la section rectangulaire, l'épaisseur étant $2r$, la coordonnée correspondante étant z dans le matériau du ruban ($-r < z < +r$), le déplacement de la corde dû au mode propre, toujours selon cet axe, étant représenté par $y(x, t)$ à l'abscisse x le long de la corde et à l'instant t . Pour un tel déplacement

$$y(x, t) = y(x) e^{-j\omega t} \quad [4.44]$$

et dans cette section de corde d'abscisse x , la variation de température Θ dépend également de z , on la note $\Theta(z, x, t)$.

En l'absence de conduction thermique, la contraction relative zy'' produite par courbure à la cote z , $z = 0$ repérant la fibre moyenne, est responsable d'un échauffement

$$\Theta = \beta zy'' \quad \text{où} \quad \beta = -\frac{d\Theta}{d\varepsilon} \Big|_{\text{adiabatique}} \quad [4.45]$$

On a défini ci-dessus un paramètre thermodynamique β représentant l'échauffement Θ pour une dilatation relative ε d'une fibre, en l'absence d'échange de chaleur. Par ailleurs, en l'absence de source de chaleur, l'équation de diffusion de la chaleur s'écrit :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\lambda \partial^2 \Theta}{c_p \partial z^2} \quad [4.46]$$

où λ désigne la conductivité thermique et c_p la chaleur spécifique à pression constante. Finalement, le bilan thermique au point de cote z est régi par l'équation suivante :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\lambda \partial^2 \Theta}{c_p \partial z^2} - j\omega\beta zy'' \quad [4.47]$$

La solution est une fonction impaire de z , telle que le gradient de température s'annule à la surface $z = r$ de la corde puisque le transport thermique n'est important que dans le matériau de la corde lui-même. La combinaison d'exponentielles complexes qui satisfait ces conditions s'écrit :

$$\Theta(z, x, t) = -\left(\frac{\sinh \kappa z}{\kappa \cosh \kappa z} - z\right) \beta y'' \quad [4.48]$$

où κ est un paramètre complexe donné par

$$\kappa^2 = -j\frac{\omega c_p}{\lambda} \quad [4.49]$$

Le moment fléchissant au point d'abscisse x est alors la somme de la contribution élastique, calculée au chapitre 3, et d'une correction thermoélastique

$$M = M_e + M_{te} \quad M_e = EIy'' \quad I = \frac{2lr^3}{3} \quad [4.50]$$

Cette dernière s'obtient en sommant sur la section le moment créé en chaque point de cote z par l'effort normal supplémentaire résultant de la variation de température en z . Pour écrire cette contribution, nous devons introduire un nouveau paramètre thermodynamique

$$\alpha = \frac{dX}{d\Theta} \Big|_{\text{contraintes}} \quad [4.51]$$

qui donne la variation de contrainte normale X par degré d'échauffement lorsque les deux autres contraintes normales sont maintenues constantes. Le moment

supplémentaire créé par les effets thermoélastiques s'écrit alors :

$$\begin{aligned} M_{te} &= \alpha\beta y'' \int_0^r \theta(z) z l dz \\ &= 2\alpha\beta y'' l \left[\int_0^r z^2 dz - \int_0^r \frac{\sinh \kappa z}{\kappa \cosh \kappa z} z dz \right] \\ &= 2\alpha\beta y'' l \left\{ \frac{r^3}{3} - \frac{1}{\kappa^2 \cosh \kappa r} [\cosh \kappa z \cdot z]_0^r + \frac{1}{\kappa^3 \cosh \kappa r} [\sinh \kappa z]_0^r \right\} \end{aligned} \quad [4.52]$$

Finalement, tout se passe comme si nous avions une déformation élastique classique, mais avec un module d'Young modifié par une petite correction réelle, et surtout par une petite correction imaginaire représentant l'amortissement thermoélastique :

$$\begin{aligned} E &= E + \alpha\beta - \frac{3\alpha\beta}{\kappa^2 r^2} \left(1 - \frac{1}{\kappa r} \tanh \kappa r \right) \\ E &= E \left(1 + \frac{\alpha\beta}{E} \right) \left[1 - \frac{3\alpha\beta}{E\kappa^2 r^2} \left(1 - \frac{1}{\kappa r} \tanh \kappa r \right) \right] \end{aligned} \quad [4.53]$$

Ce calcul de perturbations au premier ordre est valable si les conditions [4.54] sont vérifiées.

$$\frac{\alpha\beta}{E} < \varepsilon \quad |\kappa| r < \varepsilon \quad [4.54]$$

On peut démontrer [Zener, 93 et 94] que $\alpha\beta/E$ s'exprime en fonction des caractéristiques à pression constante et à volume constant et du coefficient de Poisson par la relation.

$$\frac{\alpha\beta}{E} = \frac{1}{3} (1 - 2\mu) \frac{c_p - c_v}{c_v} \quad [4.55]$$

La correction sur la partie réelle du module d'Young, $\alpha\beta/E$, est de l'ordre de 1% et peut donc être négligée dans la pratique. L'amortissement est décrit par un angle de perte thermoélastique sur ce module :

$$E \approx E (1 - j\delta_{te}) \quad \delta_{te} = \frac{3\alpha\beta\lambda}{E\omega c_p r^2} \operatorname{Re} \left(1 - \frac{1}{\kappa r} \tanh \kappa r \right) \quad [4.56]$$

Cet angle de perte n'est notable qu'au voisinage d'une fréquence limite séparant un domaine basses fréquences au comportement isotherme, dans lequel l'angle de perte thermoélastique est négligeable, d'un domaine hautes fréquences au comportement adiabatique, dans lequel l'angle de perte thermoélastique diminue d'une façon inversement proportionnelle à la fréquence.

La limite entre ces deux régimes est donnée par :

$$f = \frac{\pi\lambda}{16r^2 c_p} \quad \kappa r = \pi (1 - j) \quad \delta_{te} \approx \frac{0,4 \alpha\beta}{E} \quad [4.57]$$

La fréquence limite est inversement proportionnelle au carré du rayon et à la chaleur spécifique, mais proportionnelle à la conductivité thermique. Le régime isotherme est caractérisé par des pertes négligeables :

$$f < \frac{\pi\lambda}{16r^2 c_p} \quad \delta_{te} \approx 0 \quad [4.58]$$

Dans le régime adiabatique on a

$$f > \frac{\pi\lambda}{16r^2 c_p} \quad \delta_{te} \approx \frac{3\alpha\beta\lambda}{E\omega c_p r^2} \quad [4.59]$$

de sorte que les pertes thermoélastiques deviennent toujours négligeables, à haute fréquence, devant les pertes viscoélastiques dont l'angle de perte ne diminue pas quand la fréquence augmente.

Finalement, dans les cas pratiques que nous avons rencontré, les pertes thermoélastiques ne sont sensibles qu'au voisinage de la fréquence limite séparant le domaine isotherme du domaine adiabatique. L'effet thermoélastique n'agit que comme une petite correction aux pertes dues à la viscosité de l'air, prépondérante à basses fréquences, et à la viscoélasticité du matériau composant la corde, prépondérante à haute fréquence.

4.3.6. Effets structurels d'amortissement dans les cordes non monofilament : cas des cordes filées

Les cordes non monofilament les plus utilisées en musique sont les cordes filées.

Les fréquences des partiels d'une corde filée sont données par la même formule que pour les cordes monofilament (voir [4.20]), en prenant pour ρ_L la masse totale par unité de longueur (y compris le filage) et pour EI principalement la contribution

du fil de l'âme (ce qui revient à négliger la raideur introduite par le filage devant celle de l'âme). Cette dernière approximation est en général justifiée, au moins quand l'âme est en acier.

Une étude fine a permis de préciser les choses. Tout d'abord nous avons pu montrer que l'amortissement dû à l'air suit encore très bien le modèle habituel, à condition de définir pour l'écoulement de l'air un diamètre effectif tenant compte de la surface réelle de la corde filée et de prendre la masse par unité de longueur en tenant compte, également, du filage.

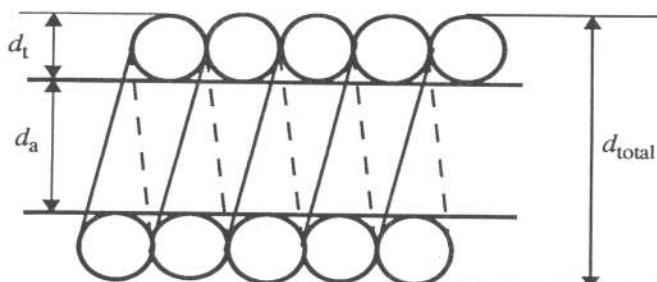


Figure 4.11. Coupe d'une corde filée.

On calcule la surface extérieure de la corde filée en utilisant le théorème de Guldin qui dit que la surface d'un corps de révolution est égale à la longueur de l'arc multiplié par le chemin du centre de gravité (A. Watzky, communication privée).

On assimile donc la corde à un tore dont la surface extérieure est engendrée par le demi-cercle de diamètre d_t du trait. Cette surface est donnée par :

$$S = \pi \frac{d_t}{2} 2\pi \left[\left(1 + \frac{2}{\pi}\right) \frac{d_t}{2} + \frac{d_a}{2} \right] \quad [4.60]$$

La surface du cylindre équivalent a pour expression :

$$S = \pi d_t d_s \quad [4.61]$$

La résistance mécanique corrigée est donnée par :

$$R = 2\pi\eta + 2\pi d_s \sqrt{\pi\eta\rho_{\text{air}}f} \quad \text{avec} \quad d_s = \frac{\pi}{2} \left[\left(1 + \frac{2}{\pi}\right) d_t + d_a \right] \quad [4.62]$$

On fait une correction analogue pour les cordes demi-filées (spires non jointives). Nous avons constaté, voir par exemple la figure 4.7, que le modèle de Stockes marche alors très bien, sans paramètre ajustable, pour ces cordes de diamètre plus important et de forme plus tourmentée que les cordes monofilament. Pour la partie

haute fréquence, dans un certain nombre de cordes au moins pour lesquelles la tenue de son des partiels élevés est bonne, on constate que le comportement viscoélastique explique les résultats en supposant toutes les pertes viscoélastiques concentrées dans l'âme seule.

Pour les cordes filées, nous avons parlé d'un quatrième mécanisme de pertes, voir la figure 4.6, dû au frottement des spires consécutives entre elles. Sa contribution peut être isolée par soustraction à partir de l'expression [4.21]. On peut le modéliser dans la description des équations [4.3] et [4.4], en considérant une faible partie imaginaire sur la tension T , introduite au moyen d'un angle de perte

$$T \rightarrow T(1 - j\delta_{\text{sp}}) \quad [4.63]$$

La considération de l'équation [4.2] donne l'interprétation physique de cet angle de perte : il décrit le faible retard de l'effort tranchant sur la pente de la corde, correspondant au temps court mais non nul qu'il faut aux spires consécutives du filage pour glisser l'une contre l'autre et assurer, dans la nouvelle pente de la corde, la nouvelle valeur de l'effort tranchant. Expérimentalement, la valeur de cet angle de perte, obtenue par déduction des contributions des trois autres mécanismes, semble dépendre fortement de la fréquence, avec une résonance marquée vers 2 à 3 kHz (voir figure 4.12), responsable d'un fort amortissement de la corde filée dans cette gamme de fréquences. On peut espérer que des mesures plus nombreuses, portant sur des cordes fabriquées avec différentes techniques de filage pourront à l'avenir apporter une meilleure compréhension du phénomène, préciser les paramètres significatifs et, finalement, améliorer la facture des cordes filées. Celle-ci ne semble pas, en effet, apporter totale satisfaction aux musiciens puisque l'on assiste à de nombreuses tentatives de modification des techniques de filage (filage à trait carré par exemple, etc.)

4.3.7. Le facteur de qualité des ondes transversales : discussion

La forme des courbes $Q(f)$ reflète le fait que différents mécanismes de perte coexistent.

L'interaction de la corde avec l'air se traduit par l'existence de frottements visqueux. La perte d'énergie par rayonnement acoustique reste négligeable. La perte par déviation du moment cinétique des lignes d'écoulement (portance) est négligeable également.

Les pertes internes de la corde sont liées au fait qu'elle se déforme : les parties droites ne dissipent pas d'énergie. Lors d'une déformation, toute cause d'irréversibilité thermodynamique est cause de perte. Chacune de ces pertes thermodynamiques se traduit mécaniquement comme du frottement et aboutit à une dégradation

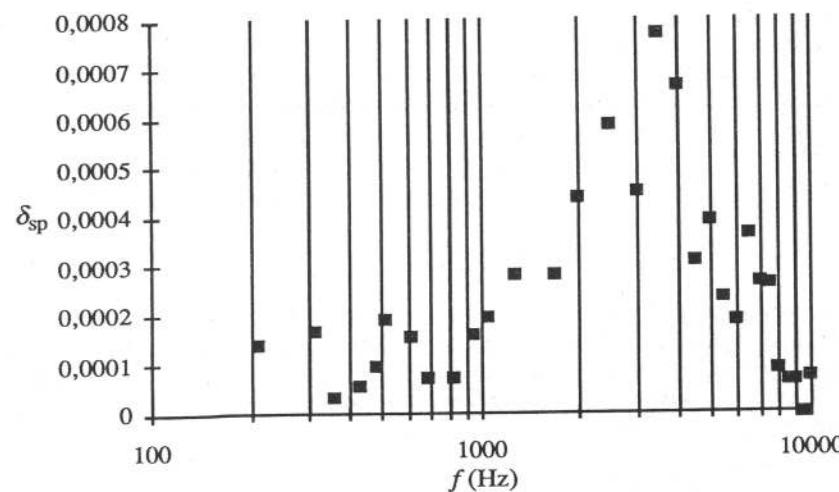


Figure 4.12. Détermination de l'angle de perte sur la tension dû au frottement des spires consécutives entre elles (corde filée de la figure 4.6).

d'énergie vibratoire en chaleur. Récapitulons ces irréversibilités.

- La propagation d'un point anguleux s'accompagne de forts gradients de vitesse transversale ; la viscoélasticité du métal est responsable d'une diffusion du moment cinétique, irréversibilité qui dégradera de l'énergie vibratoire en chaleur. Au niveau microscopique, ce processus s'effectue par le mouvement des dislocations, responsable de la déformation élastique. Elles entraînent dans ce mouvement des défauts ponctuels. Ce mécanisme comprend des frottements visqueux (irréversibilité) liés au mouvement de ces défauts ponctuels. Il y a donc transfert d'énergie vibratoire de la corde vers de l'énergie vibratoire des dislocations, puis dégradation en chaleur.

- L'arrivée d'un point anguleux entraîne l'échauffement de la partie comprimée et le refroidissement de la partie étirée, conduction de chaleur à travers l'épaisseur du fil, perte thermoélastique.

- Aux extrémités de la corde, des phénomènes analogues se produisent près de l'encastrement. Le transport de chaleur a lieu à chaque cycle pendant un temps long, de l'ordre d'une fraction de la période. Au contraire, la diffusion du moment cinétique ne se produit que pendant le temps court où la corde change de position. C'est l'effet thermique qui domine probablement dans les pertes aux extrémités.

- L'absorption d'énergie mécanique par le banc de mesure est négligeable, mais il n'en n'est pas de même si la corde est montée sur un instrument de musique. Il

faut alors tenir compte du terme comprenant l'admittance au chevalet.

Si on ne retenait, dans la formule [4.21], que l'effet de résistance mécanique de l'air, la facteur de qualité serait donné par

$$Q^{-1} = Q_{\text{air}}^{-1} = \frac{R}{2\pi\rho_L} (nf_0)^{-1} \quad [4.64]$$

La comparaison de Q_{air} avec les mesures effectuées sur une corde en laiton ressort, figure 4.5 montre un très bon accord en basse fréquence, mais une divergence rapide à plus haute fréquence avec les points expérimentaux.

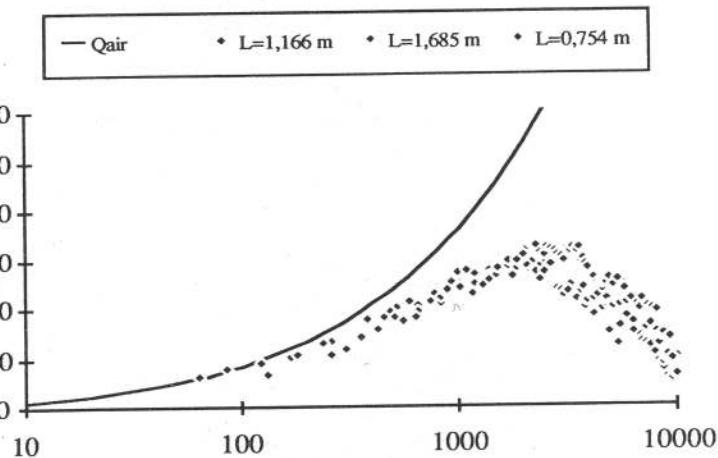


Figure 4.13. Comparaison entre la courbe théorique Q_{air} et les mesures sur une corde en laiton ressort.

A haute fréquence, au-delà de 5 kHz, les pertes par frottement visqueux dans l'air sont négligeables, celles par frottements internes deviennent prépondérantes. La preuve expérimentale est donnée par la comparaison de Q à 10 kHz entre l'“acier dur” et l’“acier recuit” : ces deux fils diffèrent par leur métallurgie, on constate que le fil le plus dur a une tenue de son plus importante en haute fréquence que le fil recuit plus mou. En ne conservant dans [4.21] que le freinage de l'air et la viscoélasticité de la corde on obtiendrait :

$$Q^{-1} = Q_{\text{air}}^{-1} + Q_{\text{visc}}^{-1} = \frac{R}{2\pi\rho_L} (nf_0)^{-1} + \frac{4\pi^2 \rho_L EI \delta_{ve}}{T^2} (nf_0)^2 \quad [4.65]$$

Ce modèle donne à toutes fréquences un bon accord pour les deux cordes de nylon que nous avons mesurées, ce qui montre le rôle important joué par la viscoélasticité. L'accord est obtenu avec un seul paramètre ajustable, δ_{ve} , dont la valeur choisie est du bon ordre de grandeur de ce qu'on peut savoir par ailleurs [Chaigne, 18].

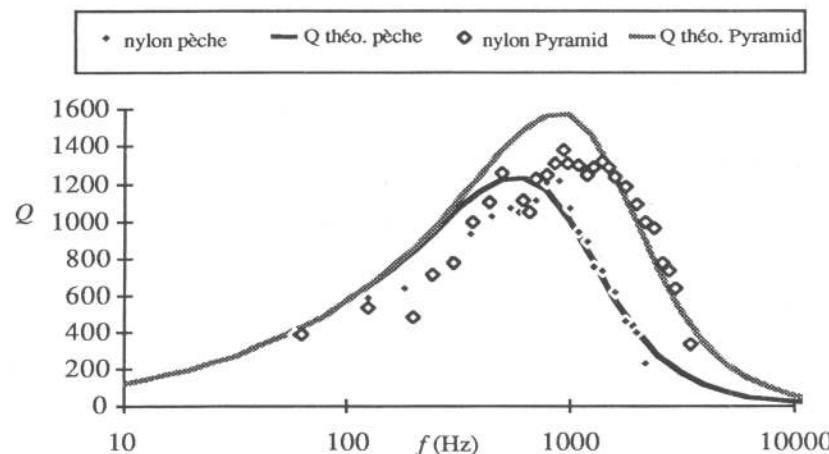


Figure 4.14. Comparaison entre les mesures et les courbes théoriques pour des cordes en "nylon pêche" et "nylon Pyramid".

Pour les cordes de métal l'accord est très bon en haute et basse fréquences, mais dans la gamme de fréquence intermédiaire (gamme où Q possède son maximum) les valeurs expérimentales sont systématiquement plus basses que les valeurs théoriques. La correction, due à l'effet thermoélastique, est trop faible pour pouvoir déterminer les deux paramètres supplémentaires qu'il faudrait, à savoir λ/c_p et $\alpha\beta$. Nous ramènerons ces deux paramètres à un seul en simplifiant délibérément la correction thermoélastique. Nous poserons

$$Q^{-1} = Q_{air}^{-1} + Q_{visc}^{-1} + Q_{th}^{-1} = \frac{R}{2\pi\rho_L} (nf_0)^{-1} + \frac{4\pi^2 \rho_L EI \delta_{ve}}{T^2} (nf_0)^2 + Q_{th}^{-1} \quad [4.66]$$

où Q_{th} est simplement constant. La correction restera, de ce fait, négligeable de part et d'autre du maximum de Q . La comparaison avec l'expérience donne un très bon accord pour toutes les cordes monofilament, avec deux paramètres ajustables.

On ajuste δ_{ve} et Q_{th} , tous les autres paramètres étant mesurés indépendamment,

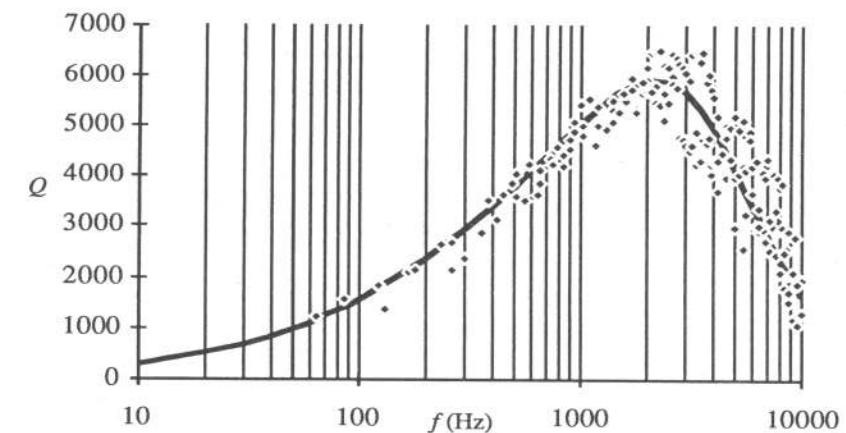


Figure 4.15. Comparaison entre la courbe théorique et les points expérimentaux pour une corde en "laiton ressort".

de façon à rapprocher la courbe théorique des résultats expérimentaux. On constate que ce modèle marche bien pour toutes les cordes monofilament. Un exemple est donné sur la figure 4.15.

Il est à noter que l'accord est excellent dans toute la partie où le modèle de Stokes est prépondérant, alors que tout les paramètres utilisés font l'objet d'une ou plusieurs déterminations dans notre étude. L'approximation marche également pour les cordes filées, dont le diamètre est sensiblement plus grand, en tenant compte de la surface réelle du filage. On comprend pourquoi sur la figure 4.2 l'"acier dur" et l'"acier recuit" ont le même comportement à basse fréquence (le diamètre et la densité sont identiques). Au contraire, le "cuivre de Gug" de plus fort diamètre et de densité plus importante fournit une meilleure tenue de son dans la même gamme de fréquence. L'implication pour la facture instrumentale, qui ne surprendra pas les facteurs, est la suivante : pour avoir des cordes graves dont les fondamentaux tiennent longtemps il faut une grande masse par unité de longueur.

L'angle de perte viscoélastique δ_{ve} est déterminé, nous l'avons vu, par ajustement de la courbe théorique avec les points expérimentaux. Cette détermination est relativement précise quand le maximum de Q possède une valeur élevée, car la pente qui caractérise le régime de décroissance régi par la viscoélasticité est alors assez bien marquée. Rappelons que cet angle est très difficile à mesurer par les méthodes usuelles d'élasticimétrie. Rossi [Rossi, 71] donne quelques valeurs numériques (cuivre $\approx 2 \cdot 10^{-3}$, laiton $\approx 10^{-3}$, acier $\approx 10^{-4}$). Les valeurs obtenues par la mesure du décrément logarithmique (voir paragraphe 4.3.4.2) nécessitent un

appareillage délicat et donnent des résultats du même ordre. Notre méthode pourrait s'avérer commode, relativement précise et, surtout, utilisable à des fréquences élevées (gamme du kilohertz). Le martelage des cordes, tel que les fabricants de cordes de clavecin au XVIII^e siècle le pratiquaient, introduit des défauts en grand nombre et bloque la vibration des dislocations, ce qui diminue l'angle de perte viscoélastique et améliore la tenue de son.

Dans certains modèles de la corde vibrante amortie, on utilise une résistance mécanique indépendante de la fréquence. Nous avons vu que c'est effectivement le cas (voir paragraphe 4.3.3) quand l'épaisseur de la couche limite est de l'ordre de grandeur du rayon de la corde. Q_{air} prend alors la forme particulièrement simple suivante :

$$Q_{\text{air}}^{-1} = \frac{\eta}{\rho_L} (nf_0)^{-1} \quad [4.67]$$

Cependant, le cas ne se rencontre qu'à basse fréquence (≈ 100 Hz) et sur des cordes de faible diamètre ($\approx 0,3$ mm). En pratique, cette situation est rare. On la trouve, par exemple, sur les fondamentaux des cordes graves de clavecin.

4.3.7.1. Influence de l'écrouissage par traction sur la corde

Le passage d'une dislocation à travers un cristal balaye dans celui-ci une aire ; celle-ci sépare le cristal en deux moitiés qui, lors du mouvement de la dislocation, glissent l'une par rapport à l'autre. Ce glissement est égal au vecteur de Burgers de la dislocation. Si on exerce une déformation plastique importante sur un métal contenant au départ peu de dislocations, on constate néanmoins un glissement global dans le cristal beaucoup plus grand que celui qui correspondrait au mouvement des quelques dislocations que contenait le cristal. Il y a donc eu création de dislocations

Les trois relevés de la figure 4.16 [Caracciolo, 16] montrent l'effet d'écrouissage sur du "laiton ressort" de Weber Métaux : on constate qu'en 48 heures, Q_{th} passe de 25000 à 80000 tandis que δ_{ve} reste à la valeur de 2.10^{-3} . Aucune évolution ultérieure n'a été décelée sur une période de 6 mois.

Sur le "laiton de Zuckermann" montré figure 4.4, on constate qu'en 48 heures, Q_{th} passe de 16500 à 23000 tandis que δ_{ve} reste à la valeur de $1.5.10^{-3}$. L'évolution ultérieure montre un très léger recul qui se stabilise.

Un fil de cuivre électrique, impropre à l'usage musical (très fragile), a été étudié également ; la courbe de $Q(f)$ était anormalement basse au départ ($Q_{\text{th}} = 7000$, $\delta_{\text{ve}} = 3.5.10^{-3}$, mauvaise tenue de son, métal trop mou). Tendu en dessous de la tension de rupture, le fil s'est allongé un peu mais la tenue de son n'a pas changée. Une augmentation alors très légère de la tension a suffit en 48 heures à faire ce que le

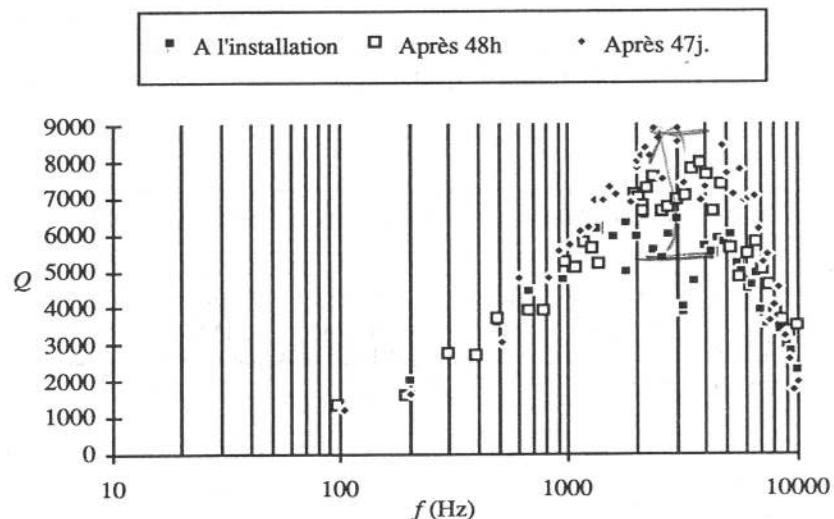


Figure 4.16. Effet de l'écrouissage par traction sur du "laiton ressort" de Weber Métaux.

traitement précédent n'avait obtenu en 15 jours : Q_{th} est passé de 7000 à 16000 tandis que δ_{ve} est descendu légèrement de $3.5.10^{-3}$ à $2.5.10^{-3}$.

L'étude a montré également qu'un écrouissage violent entraînant la rupture d'un fil (laiton ou cuivre) est suivi d'un "état de grâce" passager, durant quelques heures, pendant lequel Q_{th} est plus élevé ; le léger recuit naturel à température ambiante explique certainement la disparition de cet état.

Ces expériences montrent que les cordes de laiton ou de cuivre "se font" effectivement, comme le disent les facteurs. Nous n'avons pas observé clairement l'évolution lente à long terme, dont ils parlent quelquefois, (nous avons même constaté dans certains cas des régressions par recuit à température ambiante) ; cette évolution lente sur l'instrument pourrait avoir une autre cause que la seule modification de la corde. Ces effets d'écrouissage par traction sur la corde n'ont pas le caractère général ni l'importance des transformations métalliques que l'on obtient par martelage. On les observe dans le cas du laiton ou du cuivre, qui sont de bon conducteurs de la chaleur. Il semble que, dans de tels cas, la variation de la conductivité thermique avec l'état cristallographique soit responsable de l'effet observé. Dans ces cas où la conductivité thermique est très élevée avant écrouissage, il semble que la fréquence pour laquelle l'effet thermoélastique est maximum tombe au voisinage du maximum de la courbe de Q , sur laquelle elle a donc un effet sensible en abaissant ce maximum. En diminuant la conductivité thermique, l'écrouissage fait glisser cette fréquence en dessous du maximum et les pertes thermoélastiques

deviennent masquées par le freinage de l'air. Pour des métaux moins conducteurs de la chaleur tels que le fer, cette fréquence thermoélastique est toujours située plus bas, l'effet est masqué par le freinage de l'air, si bien qu'on ne remarque pas de changement sur Q par simple traction sur la corde. Il n'en est pas de même, naturellement, par martelage.

4.3.7.2. Variation de Q en fonction de la tension

Dans l'expression de Q , les termes Q_{air} et Q_{th} sont indépendants de la tension. En revanche, Q_{visc} en dépend. Nous allons exprimer Q en le développant sous la forme d'une fonction de T_s qui n'est autre que la tension par unité de surface.

On a pour Q_{visc} et Q_1 :

$$Q_{\text{visc}} = \frac{4T_s^2}{E\rho d^2\pi^2 f^2 \delta_{\text{ve}}} \quad \text{et} \quad Q_1^{-1} = Q_{\text{air}}^{-1} + Q_{\text{th}}^{-1} \quad [4.68]$$

d'où

$$Q = \frac{4Q_1 T_s^2}{Q_1 E \rho d^2 \pi^2 f^2 \delta_{\text{ve}} + 4T_s^2} \quad [4.69]$$

La courbe de $Q = f(T_s)$ est donnée à la figure 4.17. Elle présente un point d'inflexion pour T_s égal à :

$$T_s = \sqrt{\frac{Q_1 E \rho d^2 \pi^2 f^2 \delta_{\text{ve}}}{12}} \quad [4.70]$$

La valeur de Q correspondant est :

$$Q = Q_1 / 4 \quad [4.71]$$

L'abscisse du point de concours de l'asymptote Q_1 et de la tangente au point d'inflexion est T_{us} (tension utile par unité de surface). Cette tension est donnée par l'expression [4.72].

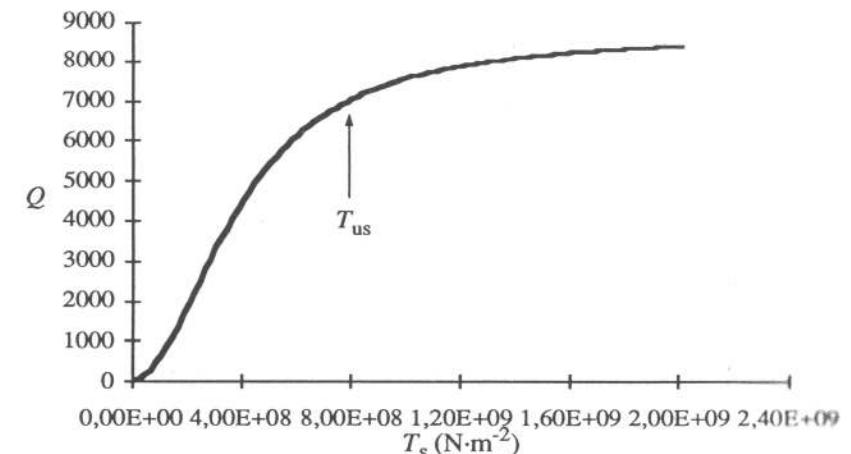


Figure 4.17. Variation de Q en fonction de T_s .

$$T_{\text{us}} = 3 \sqrt{\frac{Q_1 E \rho d^2 \pi^2 f^2 \delta_{\text{ve}}}{12}} \quad [4.72]$$

On peut remarquer que pour une fréquence donnée toutes les courbes présentent un phénomène de saturation que l'on observe dans la pratique. Le fait que la fréquence intervienne dans l'expression de la tension utile de façon proportionnelle signifie que la valeur de T_{us} sera peu dépendante de la fréquence pour le fondamental et les premiers partiels, mais fortement dépendante pour les fréquences élevées.

Pour une comparaison plus aisée avec les mesures, nous utilisons la représentation en fonction de T , en rappelant que T et T_s sont reliées par la relation :

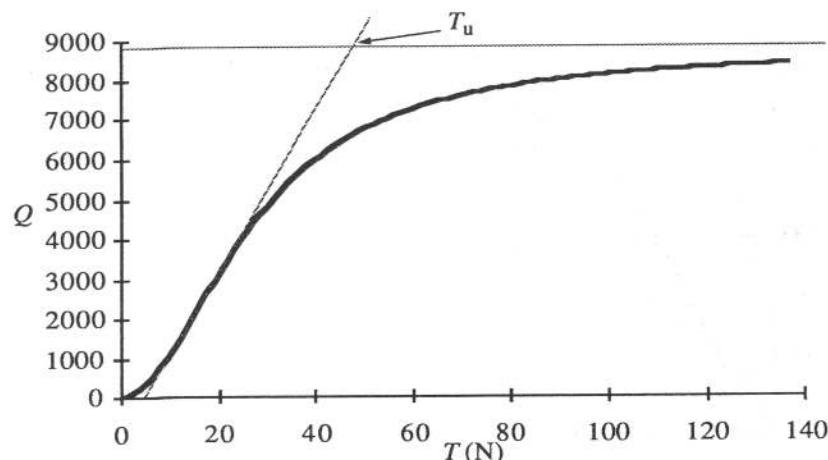
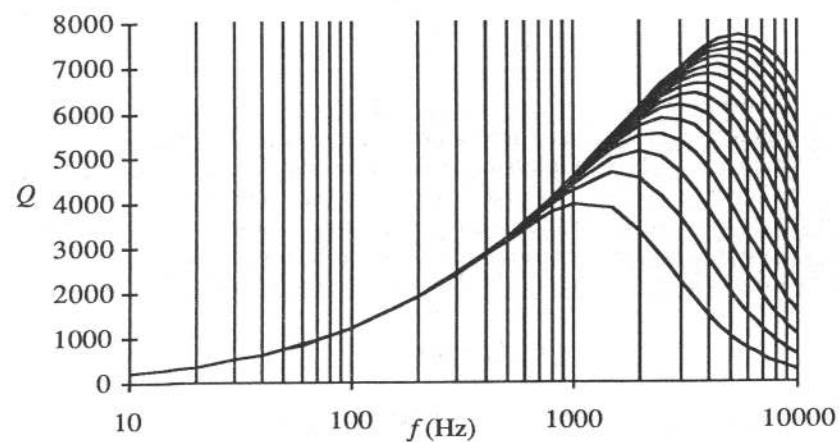
$$T = S T_s = \pi r^2 T_s \quad [4.73]$$

Les expressions que nous avons obtenues pour T_s sont facilement transposables à T .

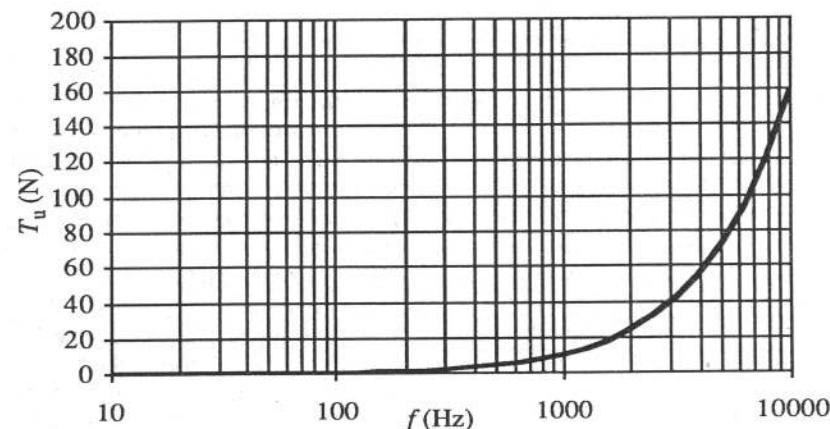
Si l'on trace la courbe théorique de Q avec la tension en paramètre, on obtient le réseau de caractéristiques de la figure 4.19.

La courbe de la figure 4.20 montre la dépendance de T_u vis-à-vis de la valeur de fréquence de Q_{max} .

La comparaison avec les expériences montre qu'il n'existe pas, strictement parlant, de saturation théorique, mais un ralentissement notable de la croissance de

Figure 4.18. Variation de Q en fonction de T .Figure 4.19. Courbes de $Q(f)$ avec la tension T en paramètre. Chaque courbe correspond à une augmentation de 5 N pour la tension, variation de 10 à 75 N.

$Q(f)$ quand la tension augmente. Dans la pratique, l'augmentation de la tension est limitée par la rupture de la corde, et la notion de tension utile garde un sens : sur le plan auditif, on gagne beaucoup au début de l'augmentation, mais peu à la fin.

Figure 4.20. Variation de T_u en fonction de la fréquence.

Comme la tension n'intervient dans le modèle des pertes qu'à travers la viscosité du métal, le rôle de celle-ci dans l'amortissement se trouve confirmé, indépendamment du fait qu'une décroissance en $1/f^2$ donne un accord numérique correct.

4.3.7.3. Effets structurels dans les cordes non monofilament

Dans les cordes filées, le frottement des spires consécutives entre elles, lorsqu'il se produit, ajoute son effet d'amortissement à tous ceux que nous venons de commenter. La caractérisation est faite par le modèle suivant :

$$Q^{-1} = Q_{\text{air}}^{-1} + Q_{\text{visc}}^{-1} + Q_{\text{th}}^{-1} + \delta_{\text{sp}} \quad [4.74]$$

A partir de la mesure de Q , par soustraction des trois effets classiques, on détermine δ_{sp} en fonction de la fréquence. Cet angle de perte représente le retard de l'effort tranchant sur la pente de la corde dû au frottement des spires entre elles.

Pour certaines cordes de structure fibreuse, voir paragraphe 4.2.2.9, les pertes supplémentaires observées à basse fréquence se modélisent en ajoutant, à la résistance mécanique de l'air, une résistance mécanique structurelle tenant compte du frottement des fibres, R_{fb} . Dans le cas particulier où ce frottement serait très important, une dépendance en fréquence de ce paramètre pourrait raffiner la description.

4.3.8. Conclusion sur les vibrations transversales amorties dans les cordes

L'étude expérimentale d'un grand nombre de cordes, de types très variés, nous a permis une modélisation sous une forme très générale du comportement de chacune. Les seules hypothèses de base sont la linéarité du système mécanique, qui suppose les modes transversaux indépendants entre eux et indépendants des autres modes, et une action légère des amortissements qui permette l'usage d'une théorie de perturbations. Par commodité, on a supposé les cordes en appui simple aux deux extrémités, mais l'admittance au chevalet est prise en compte. La présentation est modale, mais n'importe quelle condition initiale peut être prise en compte par une superposition de ces modes amortis. Dans ce cadre général, l'individualité de chaque corde est envisagée grâce à l'introduction d'une série de paramètres qui influent sur la fréquence des modes ou sur leur amortissement. Parmi ces derniers, retenons l'angle de perte viscoélastique δ_{ve} , l'angle de perte thermoélastique δ_{tc} , l'angle de perte des spires du filage δ_{sp} , la résistance mécanique produite par une texture fibreuse R_{fb} , sans oublier le rôle de la masse par unité de longueur ρ_L dans l'effet de viscosité de l'air et celui de l'admittance au chevalet si la corde est montée sur un instrument.

Résumons quelques conclusions utilisables en facture instrumentale. L'étude faite en fonction de la tension prouve qu'en réalisant un barrage de table pas trop rigide il doit être possible d'utiliser des cordes sensiblement moins tendues que la tension de rupture tout en conservant un son riche dans l'aigu du spectre. La tenue de son des fondamentaux dans le registre grave est essentiellement contrôlée par les frottements visqueux dans l'air, elle est peu sensible au traitement métallurgique des cordes, elle augmente quand on augmente la masse par unité de longueur en choisissant un métal plus dense (cuivre) et/ou un diamètre plus important. Pour toutes les cordes la tenue de son dans le haut du spectre (la richesse en partiels aigus dans l'évolution temporelle du son) est contrôlée principalement par le traitement métallurgique : le choix de cordes du type "acier dur" (ou "fer de Zuckermann") renforce sensiblement l'énergie émise vers 10 kHz. Au contraire des cordes plus souples en fer ou en laiton, dites "à l'ancienne", rayonneront le maximum d'énergie à une fréquence plus basse. Les plans de cordage de clavecins utilisant du cuivre ou du laiton pour le grave et du fer pour l'aigu se comprennent par les caractéristiques respectives de $Q(f)$. Les cordes monofilament de guitare se distinguent entre elles principalement, en plus évidemment de leur diamètre, par leur densité et leur angle de perte viscoélastique, sensible aux traitements que subissent les polymères qui les composent. Certaines cordes filées pourraient être améliorées par une diminution de δ_{sp} . Une diminution de R_{fb} pour certaines cordes en boyau commis améliorerait la tenue de son dans le grave.

4.4. Modélisation des ondes longitudinales avec leurs amortissements

Il est possible de suivre un schéma complètement similaire à celui que nous avons exposé, en détail, pour les ondes longitudinales. Partant du déplacement longitudinal, on écrit l'équation de conservation, qui fait intervenir le module total d'élasticité E , et l'équation fondamentale de la dynamique, qui fait intervenir la masse par unité de longueur ρ_L . On peut se référer aux formules [2.19] et [2.21] du chapitre 2. Dans le cas d'une corde monofilament, les paramètres ci-dessus deviennent le module d'Young E et la masse volumique ρ . Cette écriture permet d'introduire commodément tous les phénomènes dissipatifs souhaitables. Cependant, dans la plupart des applications musicales, les ondes longitudinales ne constituent pas le centre d'intérêt principal. On le constate immédiatement sur notre banc de mesures : le signal délivré par le capteur de force transversale véhicule perceptement la partie la plus significative du son d'un clavecin, alors que le signal délivré par le capteur de force longitudinale ne fournit que des corrections concernant la vibration d'octave et l'onde de compression. Ces corrections étant importantes, certes, mais pas centrales, nous allégerons la rédaction du livre en laissant le soin au lecteur d'effectuer lui-même les étapes du calcul qui lui manquerait, pour nous contenter de souligner la nature des mécanismes prépondérants, les résultats et leurs conséquences. Dans cette présentation, linéaire, les ondes longitudinales sont donc découpées des autres classes d'ondes et les modes longitudinaux indépendants.

Les fréquences propres, pour des conditions aux limites d'immobilité aux deux extrémités, sont données par :

$$f_n = n \frac{c_1}{2L} \quad \text{avec} \quad c_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho_L}} \quad [4.75]$$

Dans le cas des cordes monofilament, on a simplement :

$$f_n = n \frac{c_1}{2L} \quad \text{avec} \quad c_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad [4.76]$$

Les fréquences sont harmoniques et, du fait de la valeur élevée du module d'élasticité, beaucoup plus hautes que pour les modes transversaux (20 à 30 fois plus hautes, mais cela dépend de la tension qui est appliquée pour les modes transversaux). Pour les cordes filées, le module d'élasticité se réduit à celui de l'âme alors que la masse par unité de longueur inclut le filage. Les fréquences propres

longitudinales peuvent chuter de façon importante :

$$f_n = n \frac{c_1}{2L} \quad \text{avec} \quad c_1 = \sqrt{\frac{E_a S_a}{\rho_L}} \quad [4.77]$$

où E_a est le module d'Young de l'âme, S_a sa section et ρ_L la masse par unité de longueur de la corde, filage compris.

Les mécanismes dissipatifs sont plus simples que pour les modes transversaux. L'interaction avec l'air est négligeable. L'effet thermoélastique s'obtient par le même schéma que pour les modes transversaux. Cependant, on peut vérifier que la contribution reste complètement négligeable. En effet, la chaleur doit être transportée sur la distance qui sépare une zone comprimée d'une zone étirée. Pour les ondes transversales, cette distance est le diamètre de la corde. Pour les ondes longitudinales, elle devient une fraction de la longueur égale à 1 pour le fondamental, 1/2 pour l'harmonique 2, etc. Le gradient thermique est donc négligeable, l'effet thermoélastique aussi. Il ne reste plus que l'effet viscoélastique.

Pour les cordes monofilament, la partie imaginaire de la pulsation s'évalue au simple examen de l'expression [4.76], en tenant compte de l'angle de perte viscoélastique δ_{ve} sur E . Le facteur de qualité est donc donné par :

$$Q^{-1} = \delta_{ve} \quad [4.78]$$

L'amortissement est très important, beaucoup plus important que sur les modes transversaux. Il est principalement de nature viscoélastique avec un facteur de qualité indépendant de la fréquence. Ces considérations expliquent bien les observations expérimentales quant à l'amortissement de l'onde de compression (chapitre 6, paragraphes 6.2.1.1 et 6.2.1.2).

Pour les cordes filées, la conclusion est la même si on ne tient compte que du module d'élasticité de l'âme, et Q^{-1} se réduit à l'angle de perte viscoélastique de l'âme seule. L'amortissement est encore plus fort si on tient compte de frottements supplémentaires entre les spires du filage.

4.4.1. Modélisation des ondes de torsion avec leurs amortissements

Notre démarche sera la même que pour les ondes longitudinales. L'équation d'état fera intervenir le module de torsion et l'équation fondamentale de la dynamique le moment d'inertie.

Pour des cordes monofilament et des conditions aux limites d'immobilité aux

deux extrémités, les fréquences propres sont, là aussi, harmoniques

$$f_n = n \frac{c_{tors}}{2L} \quad \text{avec} \quad c_{tors} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad [4.79]$$

où G est le module de Coulomb. Les fréquences sont un peu plus basses que celles des modes de compression car le module de Coulomb est plus bas que le module d'Young. Ils sont reliés par la relation [4.80].

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \nu : \text{coefficent de Poisson} \quad [4.80]$$

Pour les cordes filées, le module de torsion est celui de l'âme, il reste faible car le diamètre est faible, alors que le moment d'inertie, principalement contrôlé par le fil de trait, peut devenir important, d'autant que son matériau est dense. Les fréquences propres sont données par :

$$f_n = n \frac{c_{tors}}{2L} \quad \text{avec} \quad c_{tors} = \sqrt{\frac{G_a}{\rho_t \left[\left(\frac{d_{total}}{d_a} \right)^4 - 1 \right] + \rho_a}} \quad [4.81]$$

où G_a est le module de Coulomb de l'âme, d_a son diamètre, ρ_a sa masse volumique, ρ_t la masse volumique du trait et d_{total} le diamètre total de la corde filée.

Dans la pratique, le fil de trait est plus dense que celui de l'âme et, dès que son diamètre est du même ordre de grandeur, on peut utiliser la formule approchée suivante :

$$f_n = n \frac{c_{tors}}{2L} \quad \text{avec} \quad c_{tors} = \left(\frac{d_a}{d_{total}} \right)^2 \sqrt{\frac{G_a}{\rho_t}} \quad [4.82]$$

Les fréquences propres de torsion sur les cordes filées peuvent devenir très basses, éventuellement de l'ordre de celles des modes transversaux. Ce point mérite d'être conservé à l'esprit dans le cas du violon, particulièrement, où ces modes se trouvent excités par le frottement transversal de l'archet à la surface de la corde.

La torsion ne modifiant pas le volume, il n'y a pas de pertes thermoélastiques. Seule les pertes viscoélastiques sont actives. En admettant qu'elles se produisent sur G de la même façon que sur E , on est conduit à l'expression suivante pour le facteur de qualité :

$$Q^{-1} = \delta_{ve} \quad [4.83]$$

4.5. Modélisation de la force transversale en présence des amortissements

Revenons, pour clore ce chapitre, au problème de la vibration transversale des cordes. Il nous reste à calculer, en complément de l'étude du chapitre 3, l'expression de la force exercée par la corde à son extrémité, aussi bien en conditions d'appui simples que d'encastrement, en tenant compte des amortissements étudiés dans ce chapitre. Nous restons dans une présentation modale et décrivons le système constitué par la corde vibrante comme une superposition de modes propres amortis, chacun étant indépendant des autres. Nous nous restreignons au cas de la corde monofilament à faible effet thermoélastique et utilisons l'expression suivante du facteur de qualité en fonction de la fréquence :

$$\mathcal{Q}^{-1} = \frac{\rho_a}{\rho} \left(\frac{\sqrt{2}}{M} + \frac{1}{2M^2} \right) + \frac{E\rho d^6 \pi^4 f^2 \delta_{ve}}{64T^2} + \mathcal{Q}_{th}^{-1}$$

[4.84]

avec $M = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{2\pi f}{\mu_a}}$

Revenons à la description (voir paragraphe 3.4.1) du mouvement en l'absence d'amortissement, selon la relation :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n Y_n(x) \cos 2\pi f_n t$$

[4.85]

Pour écrire l'expression générale du mouvement de notre corde dotée de raideur en présence d'amortissement, il suffit de prendre en compte l'amortissement de chaque partiel en introduisant le facteur de qualité :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n Y_n(x) \exp\left(-\frac{\pi f_n}{\mathcal{Q}(f_n)} t\right) \cos 2\pi f_n t$$

[4.86]

4.5.1. Conditions aux limites d'appui simple

Les fonctions propres sont sinusoïdales, et on reporte dans [4.86] les expressions établies au paragraphe 3.4.1 :

$$Y_n(x) = \sin k_n x$$

[4.87]

$$b_n = \frac{2P}{TL} \frac{\sin k_n x_0}{k_n^2} \frac{1}{1 + k_n^2/\kappa^2}$$

[4.88]

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho_L}} \sqrt{1 + B n^2}$$

[4.89]

avec :

$$B = \frac{\pi^2 EI}{TL^2} \quad I = \frac{\pi d^4}{64}$$

[4.90]

La force exercée à l'extrémité $x = 0$ est donnée par :

$$F_y(t) = T \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}$$

[4.91]

soit :

$$F_y(t) = \frac{2P}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin k_n x_0}{k_n} \frac{1}{1 + k_n^2/\kappa^2} \exp\left(-\frac{\pi f_n}{\mathcal{Q}(f_n)} t\right) \cos 2\pi f_n t$$

[4.92]

4.5.2. Conditions aux limites d'encastrement

La force exercée à l'extrémité $x = 0$ est donnée par :

$$F_y(t) = -EI \frac{d^3 y}{dx^3} \Big|_{x=0}$$

[4.93]

On ne peut plus utiliser la forme approchée sinusoïdale pour les fonctions propres, le terme prépondérant n'étant pas le sinus dans ce cas. Il faut prendre pour fonctions propres la forme complète :

$$Y_n(x) \approx \sin k_n x + \frac{k_n}{\kappa} (\cosh \kappa x - \cos k_n x - \sinh \kappa x)$$

[4.94]

Les valeurs de k_n et f_n étant données par les expressions approchées suivantes :

$$k_n \approx \frac{n\pi}{L} \quad f_n \approx \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho_L}} \sqrt{1 + Bn^2} \quad [4.95]$$

Il convient de calculer b_n par [3.100]. Tout calcul fait, en ne conservant que les termes prépondérants, il vient :

$$b_n = \frac{2}{TL(1 + (k_n^2/\kappa^2)(1 + \frac{1}{\kappa L}))} \left\{ \frac{P[\sin k_n x_0 - (k_n/\kappa) \cos k_n x_0]}{k_n^2(1 + k_n^2/\kappa^2)} \right. \\ \left. + \frac{(-1)^n M_L - M_0}{k_n(1 + k_n^2/\kappa^2)} + \frac{L - x_0}{L} \frac{P}{\kappa k_n} + (-1)^n \frac{x_0}{L} \frac{P}{\kappa k_n} \right\} \quad [4.96]$$

Les formules [4.86], [4.94], [4.95] et [4.96] déterminent alors le mouvement de la corde. On peut calculer ensuite par [4.93] la force exercée à l'extrémité $x = 0$ dans des conditions d'encastrement. On obtient :

$$F_y(t) = \sum b_n T [k_n(1 + k_n^2/\kappa^2)] \cos \omega_n t \quad [4.97]$$

On trouve finalement :

$$F_y(t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{P[\sin k_n x_0 - (k_n/\kappa) \cos k_n x_0]}{k_n(1 + k_n^2/\kappa^2)} \right. \\ \left. + \frac{(-1)^n M_L - M_0}{(1 + k_n^2/\kappa^2)} + \frac{L - x_0}{L} \frac{P}{\kappa} + (-1)^n \frac{x_0}{L} \frac{P}{\kappa} \right\} \exp\left(-\frac{\pi f_n}{Q(f_n)} t\right) \cos \omega_n t \quad [4.98]$$

4.5.3. Effet de la dispersion sur la force en présence des amortissements, modification du précurseur

Dans les formules ci-dessus, et dans le cas de faible raideur qui est celui des cordes de clavecin, la raideur géométrique modifie peu les choses et c'est la dispersion qui joue le rôle prépondérant : elle fait apparaître le précurseur.

Les amortissements modifient l'évolution fréquentielle du précurseur. Nous avons regroupé les éléments de cette discussion au paragraphe 6.3.2.

4.6. Conclusion

Les amortissements sont faibles, dus au recouvrement de plusieurs mécanismes fonctions de la fréquence. Un grand nombre d'oscillations se produisent avant que la forme initiale (anguleuse) laisse place à l'enveloppe en fuseau concernant le dernier partielet en vibration (qui est toujours le fondamental dans le cas d'une impédance infinie aux extrémités). L'image du fuseau, que l'on trouve si souvent dans les manuels scolaires pour illustrer le mouvement d'une corde vibrante, n'a malheureusement que très peu de rapport avec la réalité.

L'amortissement dû à l'air, prépondérant en dessous du kilohertz, dépend fortement de la fréquence (il diminue quand la fréquence augmente). On peut le représenter par une résistance mécanique, faiblement croissante avec la fréquence. La viscoélasticité du matériau de la corde, assez peu étudiée à haute fréquence, est responsable de l'amortissement au-dessus de 2 kHz et l'effet augmente fortement avec la fréquence. Pour les cordes métalliques, il est contrôlé principalement par le mouvement des dislocations. Dans la plage de fréquence intermédiaire, où l'oreille est la plus sensible, la thermoélasticité intervient, contrôlée par la conductivité thermique qui, dans le cas des métaux, peut être très sensible aux traitements métallurgiques. Au dix huitième siècle, les techniques de fabrication des cordes de clavecin tenaient compte, empiriquement, de ces données ainsi que le montrent les pratiques d'écrouissage et de martelage.

Sur les instruments de musique, le mouvement du chevalet est bien sûr une cause supplémentaire d'amortissement. Il faut tenir compte de la très grande variété des instruments possédant chacun leurs particularités propres : l'impédance d'entrée au chevalet d'une tamponna (table d'harmonie très raide, sensible aux fréquences aiguës) ne ressemble en rien à celle d'une guitare (table d'harmonie souple, sensible aux fréquences graves). Pour le clavecin, les mesures que nous avons faites nous ont montré que l'impédance d'entrée au chevalet est assez élevée sur toute l'étendue du spectre (y compris dans le grave) et dépend peu de la fréquence, hormis des accidents localisés dus aux résonances : l'énergie transmise au chevalet est du même ordre que celle perdue en chaleur par la corde. Les conclusions que nous donnons concernant les cordes de clavecin seules peuvent être grosso modo étendues aux cordes montées sur l'instrument tout entier. Sur les instruments à son non entretenu, l'admittance au chevalet reflète un compromis entre la durée du son et le volume. Quand la tenue de son est souhaitable, l'énergie mécanique prélevée à la corde ne doit pas l'affecter, l'admittance doit rester modérée et les conclusions sur la corde seule restent valables pour l'instrument grosso modo ; c'est semble-t-il le cas du piano. L'esthétique actuelle de la guitare classique priviliegié dans le grave le volume à la tenue de son et l'extinction se fait sur le partielet deux : le fondamental est fortement sollicité par l'instrument.

trument. Pour le violon, l'entretien à l'archet permet une admittance élevée au chevalet et nos conclusions sur la corde seule ne peuvent pas s'extrapoler simplement : chacun a pu remarquer qu'un pizzicato de violon dure moins longtemps qu'une note de guitare et encore moins qu'une note de clavecin ou de piano!

Régime vibratoire avec non-linéarité due à la corde