Master ATIAM : **Examen de traitement du signal**
UE Fondamentaux pour ATIAM
`Durée : 1h30. Documents papier autorisés, aucun document électronique.`
`Roland Badeau`

Rappels et notations

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations et définitions suivantes :

— Transformée de Fourier à Temps Continu (TFTC) d'un signal analogique $x_a(t)$:

$$X_a(f) = \int_{\mathbb{R}} x_a(t) e^{-2i\pi f t} dt$$

— TFTC inverse : $x_a(t) = \int_{\mathbb{R}} X_a(f) e^{+2i\pi f t} df$

— Transformée de Fourier à Temps Discret (TFTD) d'un signal discret $x(n)$:

$$X(e^{2i\pi\nu}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n) e^{-2i\pi\nu n}$$

— TFTD inverse : $x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(e^{2i\pi\nu}) e^{+2i\pi\nu n} d\nu$

— Transformée de Fourier Discrète (TFD) d'ordre M d'un signal discret fini $x_M(n)$:

$$X_M(k) = \sum_{n=0}^{M-1} x_M(n) e^{-2i\pi \frac{k}{M} n}$$

— TFD inverse : $x_M(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X_M[k] e^{+2i\pi \frac{k}{M} n}$

— Transformée en Z d'un signal discret $x(n)$:

$$X(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n) z^{-n}$$

— Formule d'échantillonnage : si $\forall n \in \mathbb{Z}$, $x_e(n) = x_a(nT)$ où $T \in \mathbb{R}_+^*$, alors

$$X_e(e^{2i\pi\nu}) = \frac{1}{T} \sum_{k\in\mathbb{Z}} X_a\left(\frac{\nu+k}{T}\right) \tag{1}$$

— Fonction d'autocovariance d'un processus $X(n)$ stationnaire au sens large (SSL) réel :

$$R_X(k) = \mathbb{E}((X(n+k) - m_X)(X(n) - m_X)) \text{ indépendamment de } n, \text{ où } m_X = \mathbb{E}(X(n))\ \forall n \in \mathbb{Z}$$

— Densité spectrale de puissance (DSP) d'un processus $X(n)$ SSL :

$$S_X(e^{2i\pi\nu}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} R_X(k) e^{-2i\pi\nu k}$$

— **Filtrage des processus SSL** : Soit $Y(n)$ le processus obtenu par filtrage stable, de réponse impulsionnelle $h(n)$ et de fonction de transfert $H(z)$, d'un processus SSL $X(n)$. Alors $Y(n)$ est SSL :
  — de moyenne $m_Y = H(1)\, m_X$ (où $H(1)$ est la valeur de la réponse en fréquence en $\nu = 0$),
  — de fonction d'autocovariance $R_Y = h * \tilde{h} * R_X$ (où $\tilde{h}(n) = h(-n)^*$),
  — de DSP $S_Y(e^{2i\pi\nu}) = |H(e^{j2\pi\nu})|^2 S_X(e^{2i\pi\nu})$.

— Formules trigonométriques :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \tag{2}$$

$$\cos(\theta - \phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) + \sin(\theta)\sin(\phi) \tag{3}$$

1 Questions courtes

a) **TFTD d'une suite hermitienne.** Soit un signal $x(n)$ tel que $x(n) = x^*(-n)$ (propriété de symétrie hermitienne). On veut utiliser cette propriété pour simplifier le calcul de sa TFTD $X(e^{2i\pi\nu})$.

   1) Soit $y(n) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n < 0 \\ x(0)/2 & \text{si} \quad n = 0 \\ x(n) & \text{si} \quad n > 0 \end{cases}.$
      En remarquant que $x(n) = y(n) + y(-n)^*$, exprimer $X(e^{2i\pi\nu})$ en fonction de la TFTD $Y(e^{2i\pi\nu})$.

   2) En déduire une façon de calculer la transformée $X_M(k) = \sum\limits_{n=-N+1}^{N-1} x(n)e^{-2i\pi\frac{kn}{M}}$ (avec $M \geq 2N-1$) d'un signal $x(n)$ de support $[-N+1, N-1]$, à partir de la TFD d'ordre M d'un signal $y(n)$ de support $[0, N-1]$.

b) **Filtrage.** Soit le filtre défini par sa relation entré-sortie $y(n) = x(n+1) + 0.5x(n) + 0.5x(n-1) + x(n-2)$.

   1) Ce filtre est-il à réponse impulsionnelle finie (RIF) ou à réponse impulsionnelle infinie (RII), causal ou non causal ?
   2) Exprimer sa réponse impulsionnelle (RI) $h(n)$.
   3) Calculer sa réponse en fréquence sous la forme $H(e^{j2\pi\nu}) = H_1(\nu)H_R(\nu)$ où $H_R \in \mathbb{R}$ et $|H_1(\nu)| = 1 \forall \nu$. On précisera les expressions de H_1 et H_R.

c) **Processus MA.** On considère un processus aléatoire $Z(n)$ obtenu par filtrage d'un bruit blanc réel $B(n)$ de variance σ^2 par un filtre RIF réel dont la réponse impulsionnelle $h(n)$ a pour support $[0 \dots M-1]$.

   1) Rappeler l'expression de la fonction d'autocovariance $R_B(k)$ et de la DSP $S_B(e^{2i\pi\nu})$ du bruit blanc.
   2) Démontrer ensuite que $Z(n)$ est un processus SSL centré, que sa fonction d'autocovariance est $R_Z(k) = \sigma^2 h \star \tilde{h}$ (où $\tilde{h}(n) = h(-n)$) et que sa densité spectrale de puissance est $S_Z(e^{2i\pi\nu}) = \sigma^2|H(e^{2i\pi\nu})|^2$ (on pourra appliquer le théorème de filtrage des processus SSL).

d) **Somme de deux processus SSL.** Soient deux processus $X_1(n)$ et $X_2(n)$ indépendants, SSL, centrés, de fonctions d'autocovariance R_{X_1} et R_{X_2}, et de DSP S_{X_1} et S_{X_2}. Prouver que le processus $X(n) = X_1(n) + X_2(n)$ est aussi SSL, centré, de fonction d'autocovariance $R_X(k) = R_{X_1}(k) + R_{X_2}(k)$ et de DSP $S_X(e^{2i\pi\nu}) = S_{X_1}(e^{2i\pi\nu}) + S_{X_2}(e^{2i\pi\nu})$.

2 Modèles sinusoïdaux à amplitude aléatoire

Soit le signal

$$X(n) = A(n)\cos(2\pi\nu_0 n) + B(n)\sin(2\pi\nu_0 n)$$

où ν_0 est une pulsation réduite donnée et $A(n)$ et $B(n)$ sont deux processus stationnaires au sens large (SSL) indépendants, d'espérance nulle et de même fonction d'autocovariance notée $R(k)$.

(a) Démontrer que $X(n)$ est un processus SSL centré de fonction d'autocovariance $R_X(k) = R(k)\cos(2\pi\nu_0 k)$.

(b) Exprimer la densité spectrale de puissance de $X(n)$, $S_X(e^{j2\pi\nu})$, en fonction de la densité spectrale de puissance commune de $A(n)$ et $B(n)$ (que l'on notera $S(e^{j2\pi\nu})$).

3 Estimation de hauteur

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $\nu_1 = 1/N$. On considère le processus aléatoire $P(n) = \sum\limits_{h=1}^{H} a_h \cos(2\pi\nu_h n + \phi_h)$, où $\forall h \in [1 \dots H]$, l'amplitude $a_h \in \mathbb{R}_+^*$ et la fréquence $\nu_h = h\nu_1$ sont des constantes fixées, la phase ϕ_h est une variable aléatoire de densité de probabilité uniforme dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ ($\phi_h \sim \mathcal{U}([0, 2\pi[)$), et toutes les phases sont supposées indépendantes. L'objectif est d'estimer la période N à partir des échantillons $P(n)$.

a) Prouver que $P(n)$ est un processus stationnaire au sens large de moyenne nulle, et de fonction d'autocovariance $R_P(k) = \sum_{h=1}^{H} \frac{a_h^2}{2} \cos(2\pi\nu_h k)$.

b) Quelle est la période de la fonction R_P ? Pour quelles valeurs de k cette fonction atteint-elle son maximum ? En déduire une méthode pour estimer la période N.

c) On suppose à présent que le signal observé n'est plus $P(n)$, mais un signal bruité $X(n) = P(n) + Z(n)$, où le bruit $Z(n)$ est modélisé comme le résultat du filtrage d'un bruit blanc $B(n)$ de variance σ^2 par un filtre RIF dont la réponse impulsionnelle $h(n)$ a pour support $[0 \dots M-1]$. En supposant que $B(n)$ est indépendant des phases ϕ_h, prouver que $X(n)$ est un processus SSL centré, et déterminer l'expression de $R_X(k)$ (on pourra utiliser le résultat de la question 1.d) : la fonction d'autocovariance de la somme de deux processus SSL indépendants est égale à la somme de leurs fonctions d'autocovariance).

d) Quel est le support de la fonction $R_Z(k)$? (on pourra utiliser le résultat de la question 1.c)2)) En déduire une condition sur M et N pour que la méthode d'estimation de la période N évoquée dans la question 3.b) reste applicable (en supposant M connu).

4 Filtre dérivateur

On considère un signal $x(t)$ à temps continu à l'entrée d'un filtre de fonction de transfert $H(f)$ (où f est la fréquence exprimée en Hz). On note $y(t)$ le signal en sortie. Connaissant $H(f)$, on se propose de déterminer un filtre à temps discret de fonction de transfert $H_e(e^{i2\pi\nu})$ (où ν est la fréquence réduite) qui, ayant en entrée les échantillons $x_e(n) = x(nT)$, aurait pour sortie les échantillons $y_e(n) = y(nT)$ (voir la figure 1).

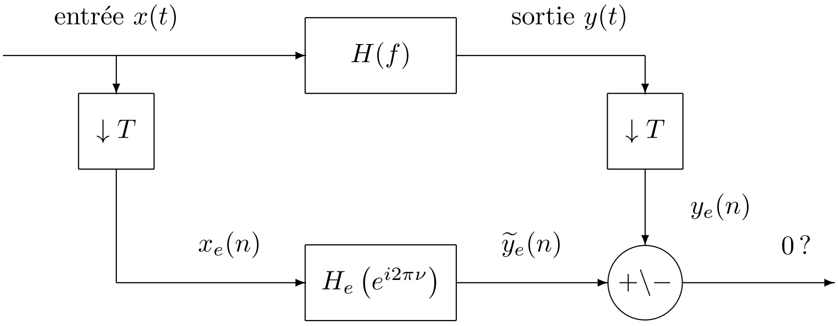

FIGURE 1 – Comparaison des sorties aux instants d'échantillonnage

a) En utilisant la formule (1) page 1, exprimer les TFTD $Y_e(e^{i2\pi\nu})$ et $\widetilde{Y}_e(e^{i2\pi\nu})$ des signaux à temps discret $y_e(n)$ et $\widetilde{y}_e(n)$, en fonction de T, $H(f)$, $H_e(e^{i2\pi\nu})$ et $X(f)$.

b) Démontrer que le filtre discret, défini par la relation $H_e(e^{i2\pi\nu}) = H\left(\frac{\nu}{T}\right)$ pour tout $\nu \in \left[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right]$, est tel que pour tout signal $x(t)$ à bande limitée $\left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right]$, $\widetilde{y}_e(n) = y_e(n)\ \forall n \in \mathbb{Z}$.

c) On souhaite à présent synthétiser un filtre dérivateur. On suppose que $x(t)$ est une fonction sommable ($x \in L^1(\mathbb{R})$) de classe $\mathcal{C}^1$, dont la dérivée $x'(t)$ est également sommable. Prouver que $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t) = 0$, et calculer la transformée de Fourier de $x'(t)$ (si vous ne parvenez pas à démontrer que $\lim\limits_{t\to\pm\infty} x(t) = 0$, vous pouvez admettre ce résultat et simplement calculer $x'(t)$).

d) En déduire que la dérivation peut être vue comme un filtre de réponse en fréquence $H(f) = i2\pi f$, et exprimer le gain complexe $H_e(e^{i2\pi\nu})$ du filtre linéaire à temps discret correspondant (on utilisera le résultat de la question b)).

e) En déduire la réponse impulsionnelle $h_e(n)$ de ce filtre. Ce filtre est-il stable ?

f) On considère maintenant le filtre discret de réponse en fréquence $H'_e(e^{i2\pi\nu}) = H_e(e^{i2\pi\nu})\, e^{-i\pi\nu}$ (le terme $e^{-i\pi\nu}$ peut être vu comme un retard d'1/2 échantillon, ce qui ne change pas fondamentalement le caractère dérivateur de ce filtre). Calculer sa réponse impulsionnelle $h'_e(n)$. Ce filtre est-il stable ?

g) Comparer les vitesses de décroissance des réponses impulsionnelles $h_e(n)$ et $h'_e(n)$ calculées aux questions e) et f).

h) Vérifier que la réponse en fréquence $H_e(e^{i2\pi\nu})$ définie en d) est discontinue, alors que $H'_e(e^{i2\pi\nu})$ définie en f) est continue. Quelle propriété de la transformée de Fourier aurait permis d'anticiper la réponse à la question g) sans même calculer les réponses impulsionnelles ?