Année Universitaire
2024-2025

TD de vibrations (UE Fondamentaux en acoustique)

Master de Mécanique - Spécialité Acoustique - Parcours ATIAM

Nous allons nous intéresser ici au système à 2 degrés de liberté présenté dans la figure 1.

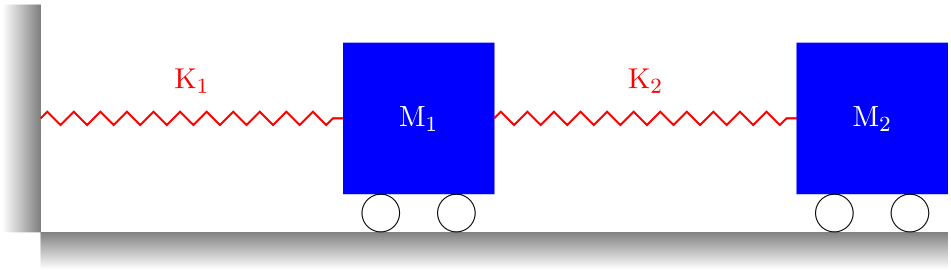

FIGURE 1 – Système à 2 degrés de liberté étudiés

Exercice 1 ✎ **Étude du régime forcé d'un oscillateur à 2DDL** ⋆

1. Les paramètres du système sont notés M_1, M_2, K_1 et K_2 (système non amorti). Les déplacements de M_1 et M_2 par rapport à leur position d'équilibre sont notés x_1 et x_2. Le système est excité par une force harmonique $F(t) = F_0 \sin \omega t$ sur la masse M_1. Donner l'équation différentielle vérifiée par $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T$. Définir la matrice masse $\mathbf{M}$ et la matrice raideur $\mathbf{K}$.

   Réponse :

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. En régime permanent, la réponse $\mathbf{x}(t)$ du système est harmonique et peut s'écrire sous la forme $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_{10} & x_{20} \end{bmatrix}^T e^{\jmath \omega t}$. Donner l'équation matricielle vérifiée par le vecteur amplitude $\begin{bmatrix} x_{10} & x_{20} \end{bmatrix}^T$.

   Réponse :

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 M_1 + K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & -\omega^2 M_2 + K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Déterminer x_{10} et x_{20}.

Réponse :

$$x_{10} = \frac{\left(-\omega^2 M_2 + K_2\right) F_0}{\left(-\omega^2 M_1 + K_1 + K_2\right)\left(-\omega^2 M_2 + K_2\right) - K_2^2} \quad (1)$$

$$x_{20} = \frac{K_2 F_0}{\left(-\omega^2 M_1 + K_1 + K_2\right)\left(-\omega^2 M_2 + K_2\right) - K_2^2} \quad (2)$$

4. A quelle condition l'amplitude du mouvement de M_1 est-elle nulle ? Montrer que cette condition permet le dimensionnement d'un absorbeur dynamique.

   Réponse :

   $$x_{10} = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{K_2}{M_2}$$

   Pulsation propre du système constitué de la masse M_2 et du ressort K_2.

5. Tracer l'évolution du rapport x_{10}/F en fonction de ω. Interpréter. A quoi correspondent les deux fréquences singulières que vous pouvez mettre en évidence ? Expliquez qualitativement comment est modifiée la courbe précédente en présence d'amortissement.

   Réponse :

   — *x_{10}/F_0 s'annule pour $\omega = \sqrt{\frac{K_2}{M_2}}$.*
   — *2 fréquences singulières : 2 fréquences propres du système à 2 degrés de liberté*
   — *en présence d'amortissement, les maxima les fréquences de résonance vont diminuer*

<u>Exercice 2</u> ✎ Étude du régime libre d'un oscillateur à 2DDL ⋆

Les matrices masse et raideur du système précédent sont données par

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 27 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Ces valeurs sont quelconques et ne vérifient à priori pas la relation obtenue à la question 4 de l'exercice précédent. On s'intéresse ici au régime libre de l'oscillateur, et on cherche pour cela à déterminer ses modes propres. Les conditions initiales imposées à l'oscillateur sont données par $\mathbf{x(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ et par $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

1. Déterminer la matrice $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} = diag(M_i^{-\frac{1}{2}})$

   Réponse :

   $$\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Effectuer le changement de variable $\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{q}$. Normaliser l'équation du mouvement par rapport à la masse. Calculer la nouvelle matrice de raideur $\bar{\mathbf{K}}$.

Réponse :

$$\bar{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

3. On cherche une solution de la forme $\mathbf{q}(\mathbf{t}) = \mathbf{v}e^{\jmath\omega t}$. Donner l'équation vérifiée par ω (équation dite caractéristique ou équation aux valeurs propres). Résoudre et donner les pulsations propres ω_i.

   Réponse :

   $$(2-\omega^2)(4-\omega^2) = 0$$

   d'où $\omega_1 = \pm\sqrt{2}$ *et* $\omega_2 = \pm 2$

4. Déterminer les vecteurs propres $\mathbf{v_i}$ associés à chaque pulsation propre. Déterminer les vecteurs normés $\mathbf{u_i} = \frac{\mathbf{v_i}}{\|\mathbf{v_i}\|}$.

   Réponse : $\mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *et* $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ *d'où* $\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ *et* $\mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

5. Vérifier que $\mathbf{u_1}$ et $\mathbf{u_2}$ sont orthogonaux.

   Réponse :

   $$\mathbf{u_1}.\mathbf{u_2} = 0$$

6. On définit la matrice de passage $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{u_1} & \mathbf{u_2} \end{bmatrix}$. Vérifier les relations : $\mathbf{P}^T\mathbf{P} = \mathbf{I}$ et $\mathbf{P}^T\bar{\mathbf{K}}\mathbf{P} = diag(\omega_i^2)$.

7. Effectuer le changement de variable $\mathbf{q}(\mathbf{t}) = \mathbf{P}\mathbf{r}(\mathbf{t})$. Donner l'équation vérifiée par le vecteur des coordonnées modales $\mathbf{r}(\mathbf{t})$. Quel est l'intérêt d'exprimer l'équation du mouvement dans la base modale ?

   Réponse :

   $$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{r}}(\mathbf{t}) + diag(\omega_i^2)\mathbf{r}(\mathbf{t}) = 0$$

   Intérêt : équations découplées

8. Exprimer les conditions initiales dans la base modale. Déterminer $\mathbf{r_0}$ et $\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{0}$.

   Réponse : $\mathbf{r_0} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *et* $\dot{\mathbf{r}}_\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

9. Donner la solution $\mathbf{r}(\mathbf{t})$ vérifiant les conditions initiales.

   Réponse : $\mathbf{r}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos(\omega_1 t) \\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos(\omega_2 t) \end{bmatrix}$

10. En déduire le vecteur des déplacements $\mathbf{x}(\mathbf{t})$.

    Réponse : $\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cos(\omega_1 t) + \frac{1}{2}\cos(\omega_2 t) \\ \frac{3}{2}\cos(\omega_1 t) - \frac{3}{2}\cos(\omega_2 t) \end{bmatrix}$

11. Décrire la méthode permettant le calcul de la réponse $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ à une excitation non périodique.

    Réponse : *Fourier (périodique), Transformée de Laplace (transitoire) ou réponse impulsionnelle*