

FONDAMENTAUX POUR ATIAM :
Exercices sur les transformées de Fourier et l'échantillonnage
Roland Badeau

(a) **Filtrage.** Dire si les systèmes suivants, associant à une entrée $x(n)$ une sortie $y(n)$, sont linéaires/non linéaires, invariants dans le temps/non invariants (justifiez vos réponses) :

1. $x(n) \longrightarrow y(n) = x(2n - 2)$
2. $x(n) \longrightarrow y(n) = |x(n - 3)|$
3. $y(n) = 2x(n) + x(n - 1)$

(b) **Echantillonnage.** Soit $x_a(t)$ un signal analogique sommable et de spectre à bande limitée dans l'intervalle $[-B, +B]$. On considère le signal à temps discret $x(n)$, échantillonné à la fréquence $F_e = 1/T_e$.

1. Exprimer $x(n)$ à l'aide de x_a et T_e .
2. Quelle condition doit vérifier B pour pouvoir reconstituer $x_a(t)$ à partir des échantillons $x(n)$?
3. Si B ne vérifie pas cette condition, à quel phénomène assiste-t-on ?
4. Comment se prémunir contre ce phénomène ?

(c) **Observation spectrale.** On considère un signal discret $x(n)$, à valeurs nulles en dehors de l'intervalle $\{0 \dots N - 1\}$.

1. Donner l'expression de sa TFTD $X(e^{j2\pi\nu})$ et de sa TFD d'ordre $M \geq N$ notée $X_M[k]$. Donner l'expression de X_M en fonction de X .
2. Rappelez ce que sont les notions de "résolution spectrale" et de "précision spectrale", ainsi que leur dépendance par rapport aux deux paramètres N et M .

(d) **TFD d'une suite décalée en temps.** On note $X(k)$ la TFD d'une suite $x(n)$ périodique de période N . On pose $y(n) = x(n - n_0)$. Déterminer l'expression de la TFD $Y(k)$ de $y(n)$ en fonction de $X(k)$.

(e) **TFD inverse.** On considère une suite $x(n)$ réelle, avec n allant de 0 à $N - 1$. On note $X(k)$ sa TFD sur N points. On considère la suite $y(k) = X^*(k)$. Déterminer l'expression de sa transformée de Fourier discrète *directe*. En déduire une façon de réaliser la transformée de Fourier discrète inverse.

(f) **Echantillonnage d'une TFTD.** On considère un signal discret $x(n)$ et sa TFTD $X(e^{j2\pi\nu})$. On définit la suite $Y(k) = X(e^{j2\pi\frac{k}{N}})$ pour tout $k \in \{0 \dots N - 1\}$, et le signal discret $y(n)$ qui admet $Y(k)$ pour TFD.

1. Exprimer $y(n)$ en fonction de $x(n)$. Quel phénomène observe-t-on ?
2. Comment doit-on choisir N si $x(n)$ est un signal à support fini, afin d'obtenir l'égalité entre y et x sur ce même support ?