Fondamentaux pour ATIAM : **Exercices sur les processus aléatoires**

Roland Badeau

1 Questions courtes

(a) Soit $B(n)$ un processus aléatoire réel centré, i.i.d. (indépendant et identiquement distribué), de variance σ_B^2. Montrer qu'il est SSL et donner l'expression de $R_{BB}(k)$.

(b) Soit le processus $X(n) = 2n + B(n)$, $B(n)$ étant le processus défini à la question (a). Est-il stationnaire à l'ordre 1 ? à l'ordre 2 ? Est-il SSL ?

2 Petits exercices

(a) On considère le processus réel à temps discret $X(n) = A\cos(2\pi\nu_0 n + \Phi)$ où A et Φ sont deux variables aléatoires indépendantes avec $A : \mathcal{N}(\mu_A, \sigma_A^2)$ et $\Phi : \mathcal{U}([0, 2\pi])$. *Montrer que ce processus est SSL et calculer sa moyenne et sa fonction d'autocovariance.*

(b) On considère le processus réel $X(n) = aX(n-1) + B(n)$ où $B(n)$ est un processus réel i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et a est un réel tel que $|a| < 1$.

1. *Montrer que $X(n)$ s'obtient à partir d'un filtrage causal stable de $B(n)$ dont on donnera la fonction de transfert $H(z)$.*
2. *Justifier l'affirmation $X(n)$ est SSL.*
3. *Donner la formule du filtrage des moyennes et l'appliquer pour trouver $\mathbb{E}[X] = \mu_X$.*
4. *Calculer la densité spectrale de puissance (DSP) de $B(n)$, notée $S_{BB}(e^{2i\pi\nu})$ et en déduire la densité spectrale de puissance de X, notée $S_{XX}(e^{2i\pi\nu})$, en fonction des données.*
5. *Donner l'expression de $X(n)$ en fonction des $B(n)$ et de a.*