

Devoir Maison UE FpA - Acoustique

Partie Vibrations

Master 2 Sciences, Technologies, Santé - Parcours ATIAM

M. Bestmaker souhaite cette année comprendre dans le détail le couplage entre une corde et la table d'harmonie d'une guitare. Il souhaite savoir dans quelle mesure un mode de table affecte la vibration de la corde. Pour simplifier, on considérera uniquement une corde parfaitement souple fixée à l'une de ses extrémités et couplée à l'autre avec un système {masse-ressort-amortisseur}, voir figure 1. Seule sera considérée la vibration transversale de la corde $y(x, t)$ selon l'axe $(O\vec{y})$. Cette vibration exerce un effort $f(t)$ qui est transmis à la table d'harmonie.

Nous étudierons, tout d'abord, le système {masse-ressort-amortisseur}, puis la corde seule et, enfin, le système couplé.

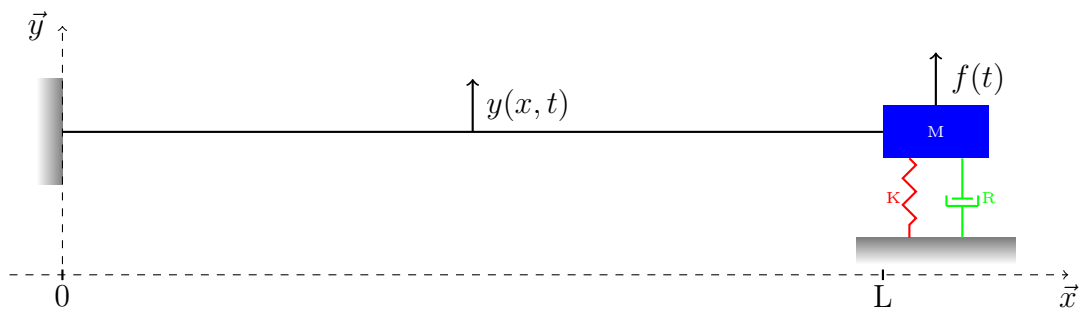


FIGURE 1 – Système corde-{masse-ressort-amortisseur} étudié

Étude du système {masse-ressort-amortisseur}

1. En ne considérant que le système {masse-ressort-amortisseur} soumis à une force $f(t)$ supposée harmonique, montrez, à partir du principe fondamental de la dynamique, que la mobilité s'écrit :

$$H(\omega) = \frac{V(\omega)}{F(\omega)} = \frac{j\omega/K}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2},$$

où V et F sont respectivement les transformées de Fourier de $y(x, t)$ et de $f(t)$. On explicitera la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q .

2. Exprimez la mobilité sous la forme $H(\omega) = G(\omega) + jB(\omega)$. Identifiez les fonctions G et B . Que valent les fonctions G et B pour $\omega = \omega_0$?
3. Que représentent physiquement ω_0 et Q ? Comment peut-on estimer expérimentalement Q ? Donnez au moins 2 méthodes que vous détaillerez.

Étude de la corde

Dans cette partie, nous supposons que la corde considérée est parfaitement souple, oscillant dans le vide, sans phénomène dissipatif interne, de masse linéique ρ_L et de tension constante sur toute sa longueur T .

4. Du fait des hypothèses considérées, montrez, en considérant un élément de corde de longueur dx , que l'équation de mouvement des vibrations transversales dans la corde peut s'exprimer comme suit :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0,$$

où c est la vitesse de propagation des ondes transversales que vous explicitez.

5. Quelle condition aux limites en $x = 0$ doivent vérifier les déformées modales $\Phi_i(x)$?
 6. Montrez que la force transversale (selon $O\vec{y}$) exercée par la corde en $x = L$ est

$$f(t) = -T \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=L}$$

Étude du système couplé corde-{masse-ressort-amortisseur}

Du fait de la linéarité du système, le déplacement transversal de la corde s'écrit sur la base de ses modes propres :

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) q_i(t),$$

où Φ_i est la déformée modale et q_i le déplacement généralisé du mode i . Dans la suite, q_i est supposé de la forme $e^{j\beta t}$ (β pouvant être complexe).

7. En considérant uniquement le mode n , exprimez l'équation différentielle vérifiée par la déformée modale de ce mode. Déduisez-en, grâce à la condition aux limites en $x = 0$, cette déformée modale.
 8. Montrez à partir des deux expressions de l'effort en $x = L$ précédemment obtenues, que

$$-T \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial x} \right)_{x=L} H(\omega) = j\beta \Phi_n(L)$$

9. En utilisant le développement en série de la fonction cotangente¹, démontrez l'équation suivante vérifiée par β :

$$-j\frac{1}{H} = \frac{T}{\beta L} + 2\frac{\beta T}{L} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\beta^2 - \omega_i^2},$$

où ω_i est la pulsation propre du mode i dans le cas où la corde est fixe à chacune de ses extrémités.

10. Pour une pulsation β proche d'une pulsation propre ω_n du mode n de la corde fixée à ses extrémités, que devient cette expression ?

1. $\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2}$

- 11.** Montrez, grâce à la question précédente, que la pulsation propre β de la corde couplée à un système {masse-ressort-amortisseur} peut s'exprimer comme suit :

$$\beta = \omega_n + \delta_n + j\alpha_n,$$

où δ_n et α_n sont à expliciter en fonction des données du problème.

- 12.** Que représente physiquement les quantités δ_n et α_n ? Que se passe-t-il lorsque la pulsation propre de la corde ω_n est égale à la pulsation propre ω_0 du système {masse-ressort-amortisseur} ? Comment δ_n et α_n évoluent-elles lorsque la pulsation ω_n est plus petite ou plus grande que ω_0 ?
- 13.** Maintenant vous pouvez répondre à M Bestmaker : dans quelle mesure les modes de table affectent la vibration d'une corde de guitare ?