

Bancs de filtres

Roland Badeau,
roland.badeau@telecom-paris.fr

Master Sciences et Technologies
Parcours ATIAM - UE TSM

Partie I

Conversion de fréquence

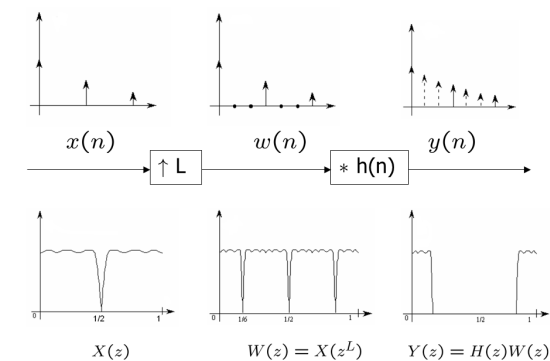
Sur-échantillonnage

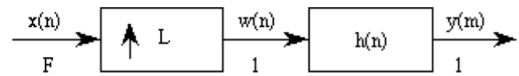
- ▶ Soit $x(n) = x_a(nT)$, où $\text{supp}(X_a(f)) \subset [-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}]$
- ▶ Formule de reconstruction (Nyquist)

$$x_a(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} x(m) \text{sinc} \left(\pi \left(\frac{t}{T} - m \right) \right)$$

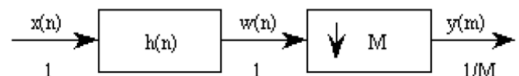
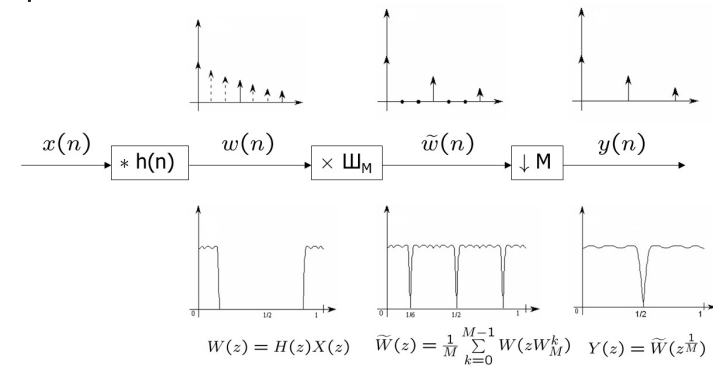
- ▶ Soit $y(n) = x_a(n \frac{T}{L})$ le signal interpolé $\times L$

$$y(n) = h * w(n), \text{ où } \begin{cases} \forall n \in L\mathbb{Z}, w(n) = x(\frac{n}{L}) \\ \forall n \notin L\mathbb{Z}, w(n) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{Z}, h(n) = \text{sinc}(\frac{\pi n}{L}) \end{cases}$$

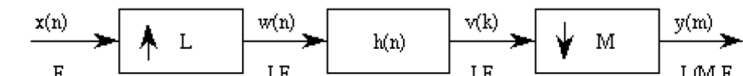




- ▶ $W(e^{j2\pi\nu}) = X(e^{j2\pi L\nu})$
- ▶ $\begin{cases} H(e^{j2\pi\nu}) = L & \forall |\nu| < \frac{1}{2L} \\ H(e^{j2\pi\nu}) = 0 & \forall \frac{1}{2L} < |\nu| < \frac{1}{2} \end{cases}$
- ▶ $\Rightarrow \begin{cases} Y(e^{j2\pi\nu}) = LX(e^{j2\pi L\nu}) & \forall |\nu| < \frac{1}{2L} \\ Y(e^{j2\pi\nu}) = 0 & \forall \frac{1}{2L} < |\nu| < \frac{1}{2} \end{cases}$

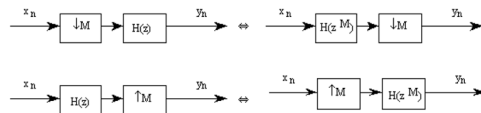


- ▶ $\begin{cases} H(e^{j2\pi\nu}) = 1 & \forall |\nu| < \frac{1}{2M} \\ H(e^{j2\pi\nu}) = 0 & \forall \frac{1}{2M} < |\nu| < \frac{1}{2} \end{cases}$
- ▶ $Y(e^{j2\pi\nu}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} W(e^{j2\pi(\frac{\nu-k}{M})})$
- ▶ $\Rightarrow Y(e^{j2\pi\nu}) = \frac{1}{M} X(e^{j2\pi\frac{\nu}{M}}) \quad \forall |\nu| < \frac{1}{2}$



- ▶ $\begin{cases} H(e^{j2\pi\nu}) = L & \forall |\nu| < \min(\frac{1}{2L}, \frac{1}{2M}) \\ H(e^{j2\pi\nu}) = 0 & \forall \min(\frac{1}{2L}, \frac{1}{2M}) < |\nu| < \frac{1}{2} \end{cases}$
- ▶ $Y(e^{j2\pi\nu}) = \frac{L}{M} X(e^{j2\pi\frac{L}{M}\nu}) \quad \forall |\nu| < \min(\frac{1}{2}, \frac{M}{2L})$ (et 0 ailleurs)

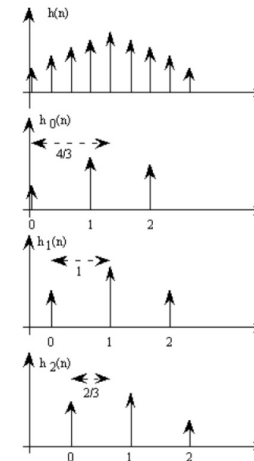
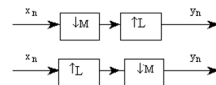
Échange filtre / décimation ou insertion



Simplification insertion / décimation



Permutation insertion / décimation ?

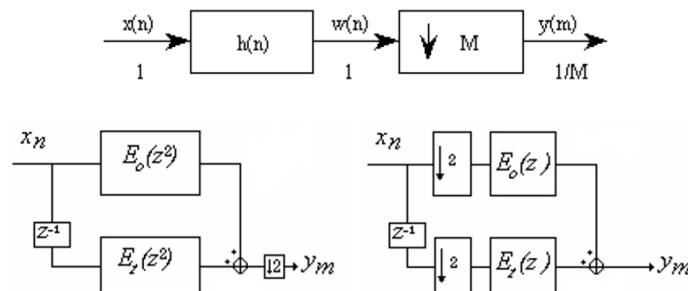


Si h est un passe-bas idéal

- h_0, h_1, h_2 sont passe-tout
- h_0, h_1, h_2 diffèrent par leur phase

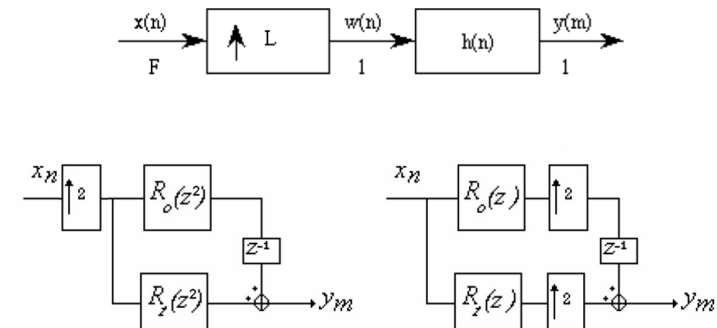
Polyphases de type I

- Définition : $H(z) = \sum_{m=0}^{M-1} E_m(z^M)z^{-m}$
- Structure efficace pour une décimation



Polyphases de type II

- Définition : $H(z) = \sum_{l=0}^{L-1} R_l(z^L)z^{-(L-1-l)}$
- Structure efficace pour une interpolation



Partie II

Transformée de Fourier à Court Terme

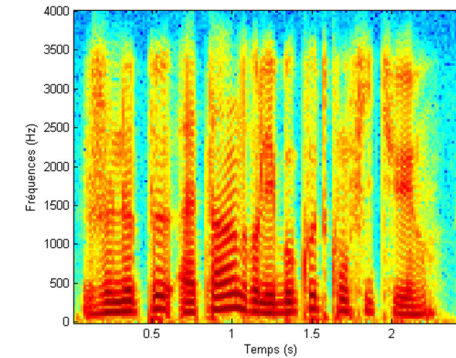
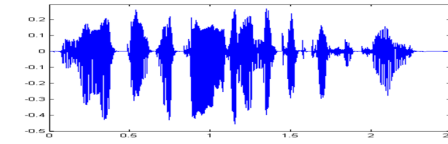
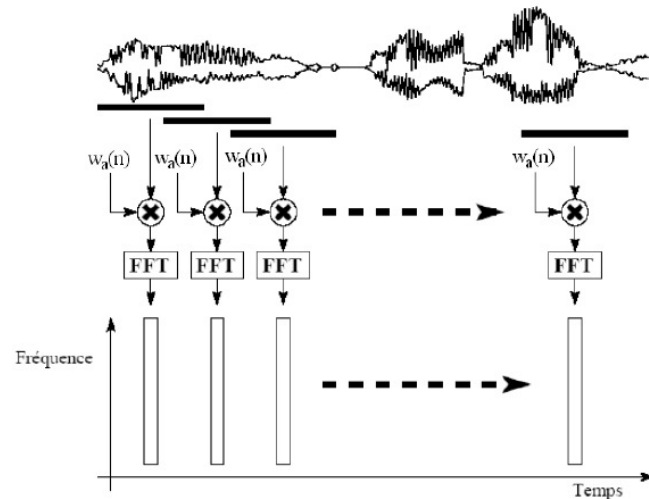


Schéma de principe



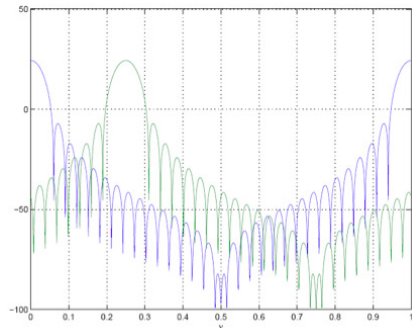
► Définition : $\tilde{X}(t_a, \nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n + t_a) w_a(n) e^{-i2\pi \nu n}$

- $w_a(n)$ est finie, réelle et symétrique
- les instants t_a sont indexés par un entier m

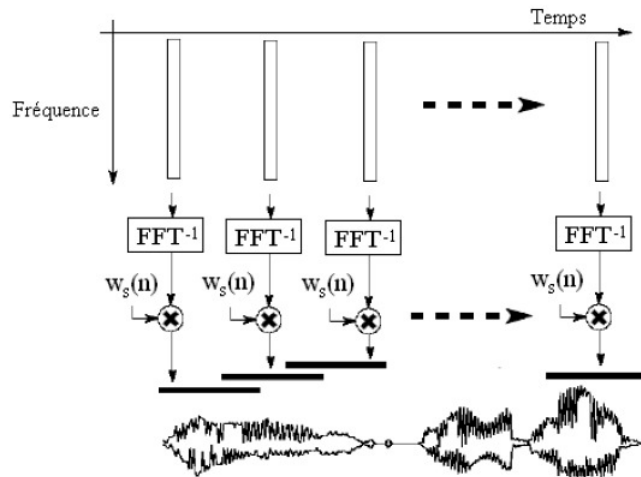
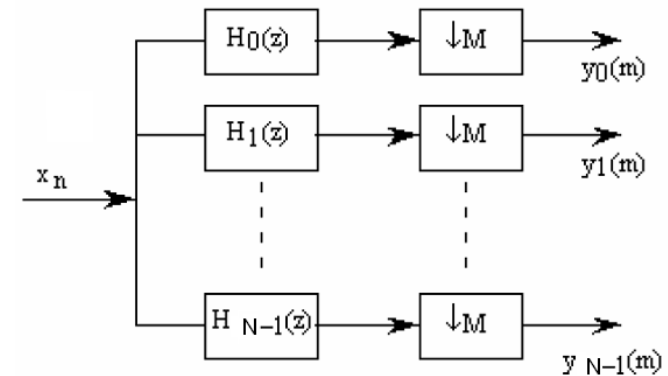
► Version discrète de la TFCT :

- on pose $\nu_k = k/N$
 $\tilde{X}(t_a, \nu_k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n + t_a) w_a(n) e^{-i2\pi \nu_k n}$
- la longueur de $w_a(n)$ doit être $\leq N$ ($\text{supp}(w_a) \subset [0, N-1]$)

- ▶ $\tilde{X}(t_a(m), v_k) = [h_k \star x](t_a(m))$ où $h_k(n) = w_a(-n) e^{i2\pi v_k n}$
- ▶ la TF de $h_k(n)$ est $H_k(e^{i2\pi v}) = W_a(e^{i2\pi(v_k - v)})$
 $H_k(z) = H_0(zW_N^k)$ où $W_N^k = e^{-i2\pi \frac{k}{N}}$

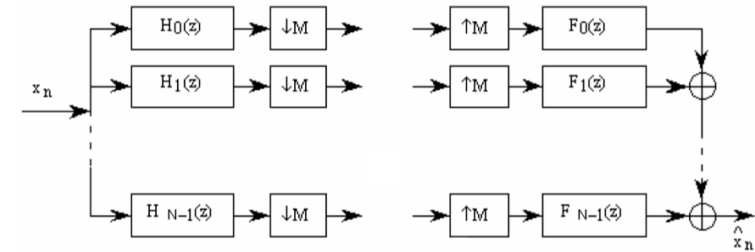
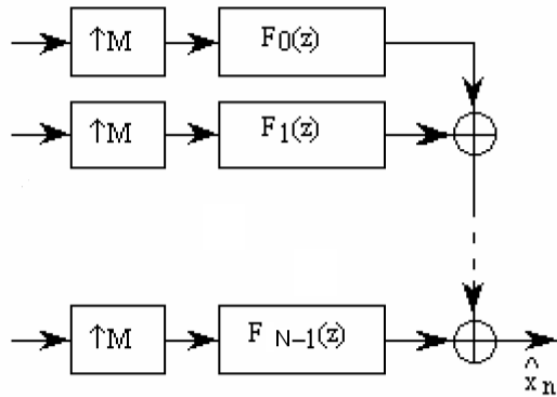


- ▶ On pose $t_a(m) = Mm$ et $y_k(m) = \tilde{X}(Mm, v_k)$
- ▶ Schéma équivalent :



- ▶ Synthèse par addition-recouvrement
 - ▶ $\hat{x}(n) = \sum_m w_s(n - t_a(m)) y_w(n - t_a(m), t_a(m))$ où
 $\text{supp}(w_s) \subset [0, N-1]$ et
 $y_w(n, t_a(m)) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(t_a(m), v_k) e^{i2\pi v_k n}$
 - ▶ condition de reconstruction parfaite :
 $\sum_m w_a(n - t_a(m)) w_s(n - t_a(m)) \equiv 1$
- ▶ Filtrage passe-bande équivalent
 Soit $\tilde{y}_k(mM) = y_k(m)$, et $\tilde{y}_k(n) = 0$ partout ailleurs
 Alors $\hat{x}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} [f_k \star \tilde{y}_k](n)$ où $f_k(n) = \frac{1}{N} w_s(n) e^{i2\pi v_k n}$
 $F_k(z) = \frac{1}{N} W_s(zW_N^k) = F_0(zW_N^k)$

► Schéma équivalent :



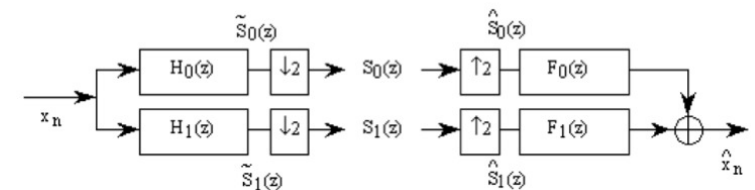
► Cas particulier de banc de filtres à reconstruction parfaite, avec $H_k(z) = H_0(zW_N^k)$

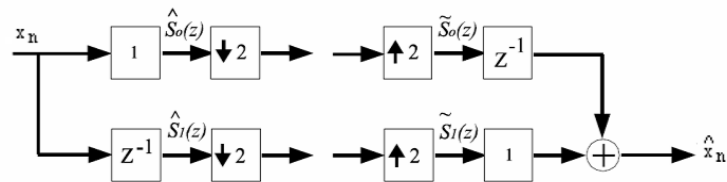
Banc de filtres idéal

Partie III

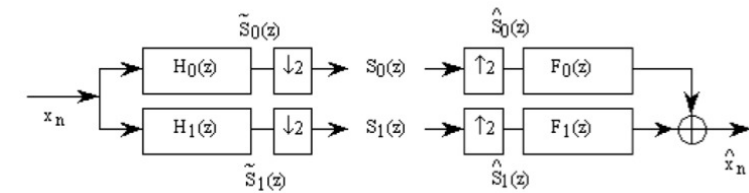
Bancs de filtres à 2 voies

- H_0 et F_0 sont des passe-bas 1/2-bande idéaux
- H_1 et F_1 sont des passe-haut 1/2-bande idéaux





- ▶ H_0 , F_0 , H_1 et F_1 sont passe-tout
- ▶ Mais reconstruction parfaite en sortie



- ▶ Relation entrée-sortie :
 $\hat{X}(z) = T(z)X(z) + A(z)X(-z)$
 où $\begin{cases} T(z) = \frac{1}{2}(H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)) \\ A(z) = \frac{1}{2}(H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z)) \end{cases}$
- ▶ Annulation de repliement : $A(z) = 0$
- ▶ Reconstruction parfaite : $T(z) = cz^{-n_0}$

Reconstruction Parfaite (RP)

- ▶ Solution exacte :

$$\begin{bmatrix} H_0(z) & H_1(z) \\ H_0(-z) & H_1(-z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0(z) \\ F_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2cz^{-n_0} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_0(z) = \frac{2cz^{-n_0}}{D(z)} H_1(-z) \\ F_1(z) = -\frac{2cz^{-n_0}}{D(z)} H_0(-z) \end{cases}$$
 où $D(z) = H_0(z)H_1(-z) - H_0(-z)H_1(z)$
- ▶ Solution avec H_k et F_k à RIF :
 - ▶ Condition d'AR : $\begin{cases} F_0(z) = H_1(-z) \\ F_1(z) = -H_0(-z) \end{cases}$
 - ▶ Condition de RP : $T(z) = \frac{1}{2}D(z) = cz^{-n_0}$

Partie IV

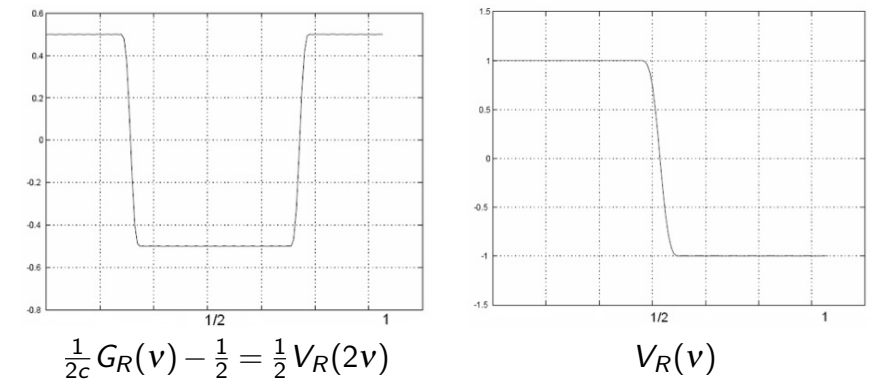
Filtres demi-bande

- ▶ Filtre demi-bande passe-bas idéal :

$$G_R(v) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq |v| < 0.25 \\ 0 & \text{pour } 0.25 \leq |v| < 0.5 \end{cases}$$
- ▶ Définition générale : $G_R(v) + G_R(v + \frac{1}{2}) = 2c$ avec $c > 0$
- ▶ Synthèse d'un filtre demi-bande $g(n)$ de type I
 - ▶ La longueur de $g(n)$ est $2N - 1$, où N est nécessairement pair
 - ▶ $g(n)$ étant causal, $G(e^{2i\pi v}) = G_R(v)e^{-2i\pi v(N-1)}$ avec $G_R(v) \in \mathbb{R}$
 - ▶ La condition demi-bande implique que $\exists V(z)$ tel que

$$G(z) = c(V(z^2) + z^{-(N-1)})$$
 - ▶ $v(n)$ est un filtre de type II de longueur N
 - ▶ $V(e^{2i\pi v})$ est presque passe-tout, mais coupe la fréquence $1/2$

- ▶ Synthèse de $V(z)$ par la méthode de Remez



Partie V

Conjugate Quadrature Filters

- ▶ Rappel : relation entrée-sortie

$$\hat{X}(z) = T(z)X(z) + A(z)X(-z)$$
 où $\begin{cases} T(z) = \frac{1}{2}(H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)) \\ A(z) = \frac{1}{2}(H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z)) \end{cases}$
- ▶ Annulation de repliement : $\begin{cases} F_0(z) = H_1(-z) \\ F_1(z) = -H_0(-z) \end{cases}$
- ▶ Contrainte CQF : N pair, $H_1(z) = -z^{-(N-1)}\tilde{H}_0(-z)$ (les filtres d'analyse sont *conjugués en quadrature*), où $\tilde{H}_0(z) = H_0^*(\frac{1}{z})$
 - ▶ Les filtres d'analyse et de synthèse sont *paraconjugués* :
 $\forall k \in \{0, 1\}, F_k(z) = z^{-(N-1)}\tilde{H}_k(z)$

- ▶ Fonction de transfert :

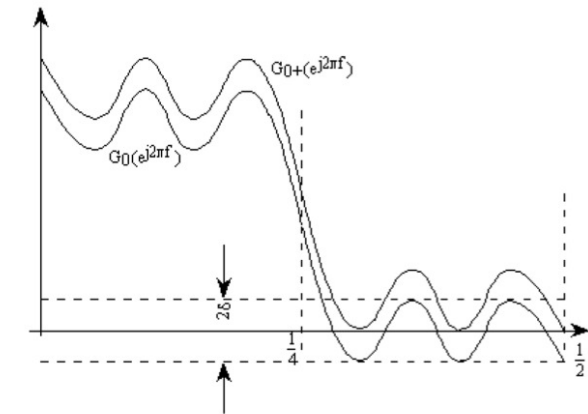
$$T(z) = \frac{z^{-(N-1)}}{2} (\tilde{H}_0(z)H_0(z) + \tilde{H}_0(-z)H_0(-z))$$
- ▶ Contrainte de *puissance symétrique* :

$$\tilde{H}_0(z)H_0(z) + \tilde{H}_0(-z)H_0(-z) = 2c$$
- ⇒ Reconstruction parfaite : $T(z) = cz^{-(N-1)}$
- ▶ Méthode : factorisation d'un demi-bande
 - ▶ Soit $G(z)$ demi-bande de longueur $2N-1$
 - ▶ La fonction $G_R(v) = G(e^{2i\pi v})e^{2i\pi v(N-1)}$ vérifie

$$G_R(v) + G_R(v + \frac{1}{2}) = 2c$$

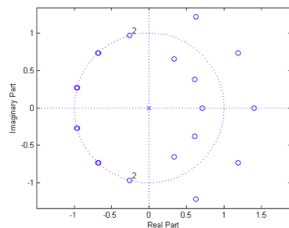
- ▶ Soit $G_R^+(v) = G_R(v) + \varepsilon$

$$\Rightarrow g^+(n) = g(n) + \varepsilon \delta_0(n - (N-1))$$
 est encore demi-bande



Factorisation du demi-bande

- ▶ Les $2N-2$ racines de $G^+(z)$ vont par paires :



- ▶ L'équation $G_R^+(v) = \tilde{H}_0(e^{2i\pi v})H_0(e^{2i\pi v})$ admet plusieurs solutions H_0
- ▶ On choisit celle à phase minimale : $H_0(z)$ est le filtre de longueur N dont les racines sont les $N-1$ racines de $G^+(z)$ situées à l'intérieur du cercle unité

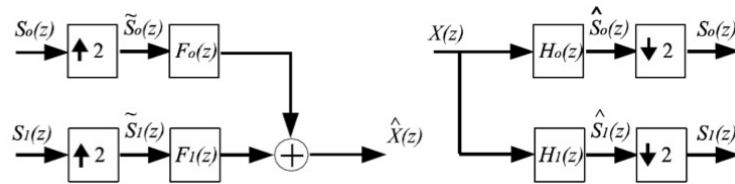
⇒ Reconstruction parfaite

Filtres bi-orthogonaux

- ▶ Rappel : relation entrée-sortie

$$\hat{X}(z) = T(z)X(z) + A(z)X(-z)$$
 où
$$\begin{cases} T(z) = \frac{1}{2}(H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z)) \\ A(z) = \frac{1}{2}(H_0(-z)F_0(z) + H_1(-z)F_1(z)) \end{cases}$$
- ▶ Annulation de repliement :
$$\begin{cases} F_0(z) = H_1(-z) \\ F_1(z) = -H_0(-z) \end{cases}$$
- ▶ Soit $G(z) = H_0(z)F_0(z)$; RP $\Rightarrow G(z) - G(-z) = 2cz^{-n_0}$
 - ▶ Solution générale : $G(z) = c(V(z^2 + z^{-n_0}))$
- ▶ Synthèse en 2 étapes :
 - ▶ Synthèse de $G(z)$, factorisation en $H_0(z)F_0(z)$

- Transmettre plusieurs signaux sur un canal

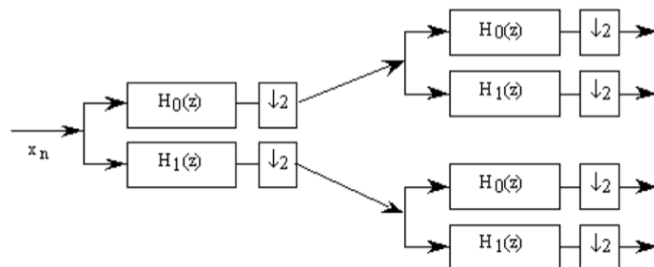


- Problème posé : égalisation du canal

Partie VI

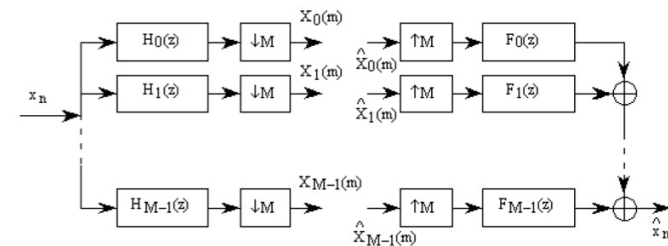
Bancs de filtres : du 2 voies au M voies

Structure pyramidale



Bancs de filtres à M voies

Réalisation générale d'un banc à M voies



Relation entrée-sortie :

$$\hat{X}(z) = T(z)X(z) + \sum_{l=1}^{M-1} A_l(z)X(zW_M^l)$$

$$\text{où } W_M^l = e^{-2i\pi \frac{l}{M}} \text{ et } \begin{cases} T(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_k(z)F_k(z) \\ A_l(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_k(zW_M^l)F_k(z) \end{cases}$$

- Annulation de repliement : $\forall l, A_l(z) = 0$
- Reconstruction parfaite : $T(z) = cz^{-n_0}$

► Solution exacte : $\mathbf{f}(z) = (\mathbf{H}_M^\top(z))^{-1} \mathbf{t}(z)$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} H_0(z) & \dots & H_{M-1}(z) \\ H_0(zW_M^1) & \dots & H_{M-1}(zW_M^1) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ H_0(zW_M^{M-1}) & \dots & H_{M-1}(zW_M^{M-1}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}_M^\top(z)} \underbrace{\begin{bmatrix} F_0(z) \\ F_1(z) \\ \vdots \\ F_{M-1}(z) \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(z)} = \underbrace{\begin{bmatrix} Mcz^{-n_0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{t}(z)}$$

► Une solution avec H_k et F_k RIF :

- Condition d'AR : $\mathbf{f}(z) = \text{Adj}(\mathbf{H}_M(z))\mathbf{e}_1$
- Condition de RP : $T(z) = \frac{1}{M} \det(\mathbf{H}_M(z)) = cz^{-n_0}$

Résolution polyphase

Composantes polyphases de type I

$$H_k(z) = \sum_{l=0}^{M-1} E_{kl}(z^M)z^{-l}$$

$$\Downarrow \begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \\ \vdots \\ H_{M-1}(z) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} E_{0,0}(z^M) & E_{0,1}(z^M) & \dots & E_{0,M-1}(z^M) \\ E_{1,0}(z^M) & E_{1,1}(z^M) & \dots & E_{1,M-1}(z^M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{M-1,0}(z^M) & E_{M-1,1}(z^M) & \dots & E_{M-1,M-1}(z^M) \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}(z^M)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ \vdots \\ z^{-(M-1)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}(z)}$$

Résolution polyphase

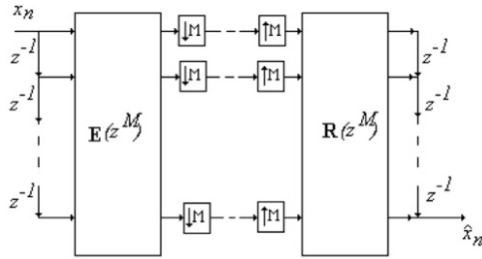
Composantes polyphases de type II

$$F_k(z) = \sum_{l=0}^{M-1} R_{lk}(z^M)z^{-(M-1-l)}$$

$$\Downarrow \begin{bmatrix} F_0(z) \\ F_1(z) \\ \vdots \\ F_{M-1}(z) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{0,0}(z^M) & R_{1,0}(z^M) & \dots & R_{M-1,0}(z^M) \\ R_{0,1}(z^M) & R_{1,1}(z^M) & \dots & R_{M-1,1}(z^M) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{0,M-1}(z^M) & R_{1,M-1}(z^M) & \dots & R_{M-1,M-1}(z^M) \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}^\top(z^M)} \underbrace{\begin{bmatrix} z^{-(M-1)} \\ z^{-(M-2)} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{e}}(z)}$$

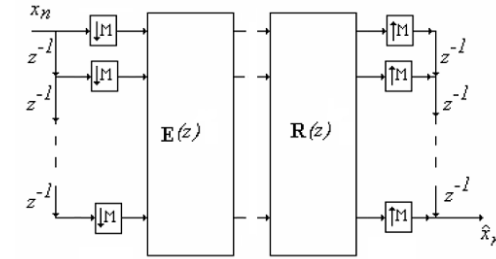
Fonction de transfert :

$$T(z) = \frac{1}{M} \mathbf{f}(z)^\top \mathbf{h}(z) = \frac{1}{M} \tilde{\mathbf{e}}(z)^\top \underbrace{\mathbf{R}(z^M) \mathbf{E}(z^M)}_{\mathbf{P}(z^M)} \mathbf{e}(z)$$



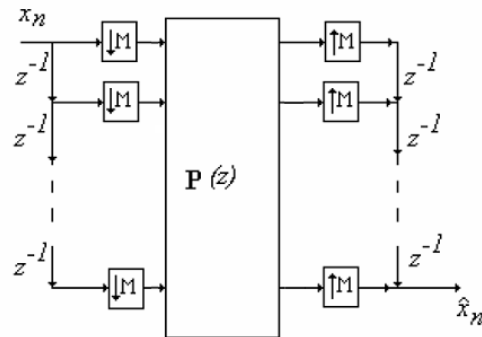
Fonction de transfert :

$$T(z) = \frac{1}{M} \mathbf{f}(z)^\top \mathbf{h}(z) = \frac{1}{M} \tilde{\mathbf{e}}(z)^\top \underbrace{\mathbf{R}(z^M) \mathbf{E}(z^M)}_{\mathbf{P}(z^M)} \mathbf{e}(z)$$



Fonction de transfert :

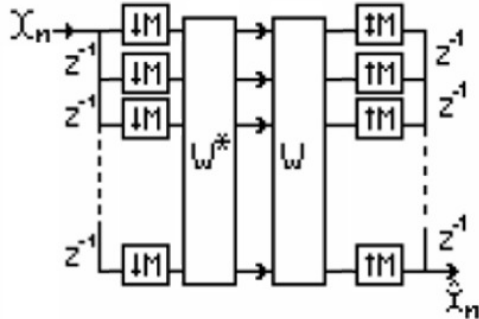
$$T(z) = \frac{1}{M} \mathbf{f}(z)^\top \mathbf{h}(z) = \frac{1}{M} \tilde{\mathbf{e}}(z)^\top \mathbf{P}(z^M) \mathbf{e}(z)$$



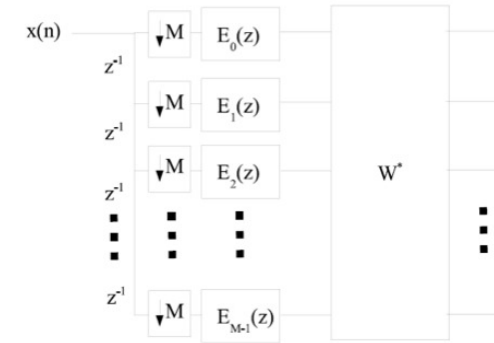
\Rightarrow si $\mathbf{P}(z) = cz^{-n'_0} \mathbf{I}_M$, $T(z) = cz^{-n_0}$ avec $n_0 = Mn'_0 + M - 1$

- ▶ Para-conjugaison : $\tilde{\mathbf{E}}(z) = \mathbf{E}^H(z^{-1})$
- ▶ Matrice paraunitaire : $\mathbf{E}(z)\tilde{\mathbf{E}}(z) = c\mathbf{I}_M$
 - ▶ On pose $\mathbf{R}(z) = z^{-\frac{N}{M-1}}\tilde{\mathbf{E}}(z) \Rightarrow T(z) = cz^{-(N-1)}$
 - ▶ Conséquence (CQF) : $F_k(z) = z^{-(N-1)}\tilde{H}_k(z)$
- ▶ Synthèse des filtres d'analyse
 - ▶ Synthèse d'un filtre M -ème de bande passe-bas $G(z)$
 - ▶ Factorisation en $G_R^+(z)W_M^k = H_k(z)\tilde{H}_k(z)$

- ▶ On pose $\mathbf{E}(z) = \mathbf{W}^H$ (où \mathbf{W} est la matrice de TFD) et $\mathbf{R}(z) = \tilde{\mathbf{E}}(z) = \mathbf{W} \Rightarrow \mathbf{P}(z) = M\mathbf{I}_M$
- ▶ TFCT à fenêtre rectangulaire



- ▶ Cas général : $H_k(z) = H_0(zW_N^k)$



- ▶ Si les $E_k(z)$ ne sont pas des constantes, il ne peut y avoir reconstruction parfaite

