

Mécanique de la corde vibrante

Chapitre 3

Claude Valette et Christian Cuesta

Hermès, Paris, 1993

Chapitre 3

Corde munie de raideur en régime vibratoire linéaire sans amortissement

3.1. Introduction

Nous venons de constater que la théorie, à son niveau le plus simple, n'apporte qu'une explication élémentaire du comportement réel de la corde. Nous devons maintenant poursuivre en introduisant la raideur à la flexion, pour rendre compte du mouvement par un calcul aussi exact que possible. Ce calcul n'est possible, en l'état actuel des connaissances, que sur les cordes monofilament : nous supposons donc dans tout ce chapitre que la corde est un monofilament.

De plus, pour que le modèle reste linéaire nous devons supposer l'amplitude suffisamment faible pour ne pas modifier la tension. Nous supposons également que nous n'avons pas de mouvements longitudinaux, mais seulement des mouvements de flexion. Le modèle linéaire sans amortissement va nous permettre d'introduire les notions d'inharmonicité et de dispersion.

La première étape consiste à calculer la forme initiale de la corde monofilament soumise à la poussée du plectre et à la réaction du support. Ce calcul peut être mené complètement avec les méthodes classiques de résistance des matériaux (élasticité linéaire), en supposant que les déformations restent petites et les angles faibles. Après échappement du plectre la corde se trouve mise en vibration et le mouvement peut être décrit comme une superposition d'ondes stationnaires (analyse selon les modes propres). Dans son principe, chacune de ces étapes se trouve exposée dans divers ouvrages ; l'étude des modes propres est classique ; mais le calcul de la déformée d'une poutre précontrainte en traction n'ayant pas été effectué, le calcul du mouvement ne se trouve pas non plus dans la littérature.

Par rapport à la réalité, une telle modélisation néglige des effets non linéaires et elle n'est valable que pour des déplacements faibles. Elle ne s'applique telle quelle qu'à la corde isolée de l'instrument, ce qui est le cas sur notre banc de mesure.

3.2. Calcul de la forme initiale

Nous considérons la corde comme un cylindre homogène élastique, soumis à une traction (la tension statique) et déformé sous l'action de la poussée du plectre d'une part et de la réaction du support d'autre part. A cause de l'effet de raideur qui, à l'endroit du contact, empêche la corde d'épouser la forme anguleuse du plectre, il est licite d'assimiler l'action du plectre à une force ponctuelle (nous justifierons cette hypothèse quand nous présenterons l'interprétation physique des résultats). Nous résolvons ce problème de résistance des matériaux en suivant la démarche exposée par Timoshenko [Timoshenko, 82] pour une poutre précontrainte (en compression dans l'exemple suivi, mais en traction dans notre cas : les fonctions trigonométriques se trouveront remplacées par des fonctions hyperboliques), soumise à une force ponctuelle. Dans une première étape nous avons à résoudre le problème avec, aux deux extrémités, des conditions aux limites d'appui simple; nous déduisons ensuite la solution pour des conditions aux limites d'encastrement (situation expérimentale pour notre banc de mesure).

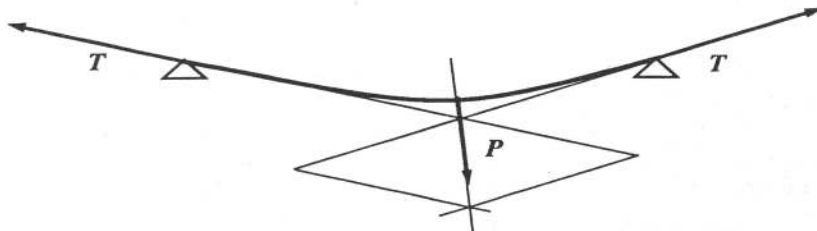


Figure 3.1. Force P exercée par le plectre, et réaction T aux appuis.

3.2.1. Corde sur appuis simples, soumise à une force ponctuelle

La figure 3.1 montre les forces extérieures (la force appliquée P par le plectre et la réaction exercée sur la corde à chaque extrémité). Nous supposons en outre que la tension T (effort normal à la section) possède un module constant le long de la corde (tension également répartie dans l'espace) et indépendante de sa longueur (ce qui impose de faibles amplitudes, voir paragraphe 2.1.2) : c'est la réaction à chaque extrémité qui détermine ce module.

L'immobilité impose que la résultante de ces trois forces soit nulle ainsi que le couple résultant en tout point; ces deux conditions déterminent la réaction à la force P sur chaque appui. Plaçons-nous maintenant dans l'approximation des petits angles (voir figure 3.2) : la force P exercée par le plectre est perpendiculaire à la corde au repos. Elle est appliquée au point d'abscisse x_0 .

Nous supposons le cisaillement introduit par P suffisamment petit pour que,

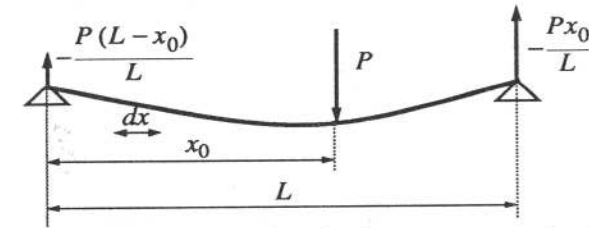


Figure 3.2. Composantes transversales des forces en approximation de petits angles.

dans chaque élément de corde, la déformation autour de la fibre moyenne, les forces, ainsi que les couples en présence puissent rester dans le cadre de l'élasticité linéaire (déformations dépendant linéairement des contraintes). Ils sont représentés sur la figure 3.3.

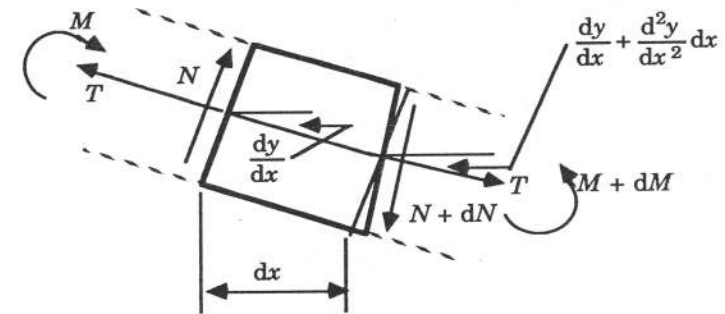


Figure 3.3. Agrandissement de l'élément de corde dx de la figure 3.2 : sur chaque face tension T , effort tranchant N , moment fléchissant M .

Dans tout ce qui suit, nous ne considérons plus des vecteurs mais des mesures algébriques; elles sont toutes positives, sauf P qui est comptée négativement sur la figure. L'effort tranchant $N(x)$ est dû à la réaction de la partie gauche de la corde, et $N+dN$ à l'action de la partie droite. En projetant les forces sur l'axe des ordonnées nous obtenons :

$$N - T \frac{dy}{dx} - (N + dN) + T \left(\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} dx \right) = 0 \quad [3.1]$$

À c'est-à-dire :

$$\frac{dN}{dx} = T \frac{d^2 y}{dx^2} \quad [3.2]$$

Par intégration il vient :

$$N - T \frac{dy}{dx} = \text{constante} \quad [3.3]$$

Cette quantité représente l'effort tranchant transversal (selon Oy), $V(x)$, à ne pas confondre avec l'effort tranchant $N(x)$ orthogonal à la fibre moyenne. L'interprétation physique est simple : V pour la partie droite représente la réaction à P de l'appui droit, et il en est de même à gauche.

À gauche du point x_0 , nous obtenons :

$$V(x) = \text{cte} = -\frac{P(L-x_0)}{L} \quad [3.4]$$

$$N(x) = -\frac{P(L-x_0)}{L} + T \frac{dy}{dx} \quad [3.5]$$

et à droite :

$$V(x) = \text{cte} = -\frac{Px_0}{L} \quad [3.6]$$

$$N(x) = -\frac{Px_0}{L} + T \frac{dy}{dx} \quad [3.7]$$

L'effort tranchant est une force discontinue en x_0 .

L'équilibre des couples au point d'abscisse x nous donne :

$$(N + dN) dx + M - (M + dM) = 0 \quad [3.8]$$

soit au premier ordre :

$$N = \frac{dM}{dx} \quad [3.9]$$

Par intégration à partir des expressions de $N(x)$ ci-dessus, en tenant compte des conditions aux limites $M(0) = M(L) = 0$ (appuis simples aux extrémités), nous obtenons les moments fléchissant à gauche et à droite de x_0 :

$$M(x) = -\frac{P(L-x_0)}{L}x + Ty \quad [3.10]$$

$$M(x) = -\frac{Px_0}{L}(L-x) + Ty \quad [3.11]$$

Le moment fléchissant est donc, contrairement à l'effort tranchant, continu en x_0 .

Il nous reste à écrire que le moment fléchissant M est responsable de la déformation. Considérons, dans l'élément de corde, une fibre de section $d\sigma$ placée à la cote z en dessous de la fibre neutre. Son allongement est :

$$z \frac{d^2 y}{dx^2} dx \quad [3.12]$$

En élasticité linéaire, cet allongement demande une force :

$$\frac{Ez \frac{d^2 y}{dx^2} dx}{dx} d\sigma \quad [3.13]$$

Le moment résultant s'écrit donc finalement :

$$M = EI \frac{d^2 y}{dx^2} \quad [3.14]$$

où I désigne le moment quadratique de la section droite

$$I = \iint z^2 d\sigma \quad [3.15]$$

Pour notre corde cylindrique nous avons :

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \quad [3.16]$$

Finalement, le déplacement est donné, à gauche et à droite de x_0 , par les équations différentielles d'ordre 2 suivantes :

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P(L-x_0)}{L} x + Ty \quad [3.17]$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{Px_0}{L} (L-x) + Ty \quad [3.18]$$

En posant

$$\kappa = \sqrt{\frac{T}{EI}} \quad [3.19]$$

on obtient la solution générale à gauche et à droite de x_0 :

$$0 \leq x \leq x_0 \quad y = Ae^{\kappa x} + Be^{-\kappa x} + \frac{P(L-x_0)}{TL} x \quad [3.20]$$

$$x_0 \leq x \leq L \quad y = Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x} + \frac{Px_0}{TL} (L-x) \quad [3.21]$$

Les conditions aux limites imposent la nullité du déplacement :

$$\begin{aligned} B &= -A \\ D &= -Ce^{2\kappa L} \end{aligned} \quad [3.22]$$

Remarquons que la nullité de la courbure aux extrémités ne fournit pas de relation nouvelle : elle redonne [3.22]. On a en effet déjà tenu compte de cette nullité en [3.10] et [3.11].

Il reste enfin à exprimer la continuité, à gauche et à droite de x_0 , du déplacement et de la pente :

$$\begin{aligned} A &= -\frac{P \sinh \kappa (L-x_0)}{2\kappa T \sinh \kappa L} \\ C &= \frac{P \sinh \kappa x_0}{2\kappa T \sinh \kappa L} e^{-\kappa L} \end{aligned} \quad [3.23]$$

Nous obtenons donc pour le déplacement la solution à gauche et à droite de x_0 :

$$0 \leq x \leq x_0 \quad y = \frac{P(L-x_0)}{TL} x - \frac{P \sinh \kappa (L-x_0)}{\kappa T \sinh \kappa L} \sinh \kappa x \quad [3.24]$$

$$x_0 \leq x \leq L \quad y = \frac{Px_0}{TL} (L-x) - \frac{P \sinh \kappa x_0}{\kappa T \sinh \kappa L} \sinh \kappa (L-x) \quad [3.25]$$

3.2.2. Flexion d'une corde soumise à un couple

Nous suivons la démarche de Timoshenko et nous calculons d'abord l'effet d'un couple M_L appliqué sur l'extrémité droite :

$$y = \frac{M_L}{TL} x - \frac{M_L}{T \sinh \kappa L} \sinh \kappa x \quad [3.26]$$

Le principe de superposition nous donne l'effet de deux couples, un à chaque extrémité :

$$y = \frac{M_L}{TL} x - \frac{M_L}{T \sinh \kappa L} \sinh \kappa x + \frac{M_0}{TL} (L-x) - \frac{M_0}{T \sinh \kappa L} \sinh \kappa (L-x) \quad [3.27]$$

Cette forme analytique est valable aussi bien à gauche qu'à droite de x_0 .

3.2.3. Corde encastree aux deux extrémités et soumise à une force ponctuelle

Nous appliquons le principe de superposition en utilisant les résultats précédents. Nous partons de la corde sur appuis simples soumise à une force ponctuelle et nous superposons à chaque extrémité l'action d'un couple qui ramène celle-ci horizontale.

Les solutions pour le déplacement à gauche ($0 \leq x \leq x_0$) et à droite ($x_0 \leq x \leq L$)

de x_0 s'écrivent :

$$y = \frac{P(L-x_0)}{TL}x - \frac{P \sinh \kappa(L-x_0)}{\kappa T \sinh \kappa L} \sinh \kappa x - \frac{M_L}{TL}x + \frac{M_L}{T \sinh \kappa L} \sinh \kappa x - \frac{M_0}{TL}(L-x) + \frac{M_0}{T \sinh \kappa L} \sinh \kappa(L-x) \quad [3.28]$$

$$y = \frac{Px_0}{TL}(L-x) - \frac{P \sinh \kappa x_0}{\kappa T \sinh \kappa L} \sinh \kappa(L-x) - \frac{M_L}{TL}x + \frac{M_L}{T \sinh \kappa L} \sinh \kappa x - \frac{M_0}{TL}(L-x) + \frac{M_0}{T \sinh \kappa L} \sinh \kappa(L-x) \quad [3.29]$$

où les valeurs des moments sont données par :

$$\frac{M_L}{P} = \frac{\left(\frac{x_0}{L} - \frac{\sinh \kappa x_0}{\sinh \kappa L}\right) \left(\frac{\kappa}{\tanh \kappa L} - \frac{1}{L}\right) - \left(\frac{L-x_0}{L} - \frac{\sinh \kappa(L-x_0)}{\sinh \kappa L}\right) \left(\frac{1}{L} - \frac{\kappa}{\sinh \kappa L}\right)}{\left(\frac{\kappa}{\tanh \kappa L} - \frac{1}{L}\right)^2 - \left(\frac{1}{L} - \frac{\kappa}{\sinh \kappa L}\right)^2} \quad [3.30]$$

$$\frac{M_0}{P} = \frac{\left(\frac{L-x_0}{L} - \frac{\sinh \kappa(L-x_0)}{\sinh \kappa L}\right) \left(\frac{\kappa}{\tanh \kappa L} - \frac{1}{L}\right) - \left(\frac{x_0}{L} - \frac{\sinh \kappa x_0}{\sinh \kappa L}\right) \left(\frac{1}{L} - \frac{\kappa}{\sinh \kappa L}\right)}{\left(\frac{\kappa}{\tanh \kappa L} - \frac{1}{L}\right)^2 - \left(\frac{1}{L} - \frac{\kappa}{\sinh \kappa L}\right)^2}$$

L'interprétation physique de ces moments est simple : ils représentent le couple qui, en situation d'encastrement, produit la réaction du support à chaque extrémité.

Les pentes à gauche et à droite de x_0 s'écrivent :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(L-x_0)}{TL} - \frac{P \sinh \kappa(L-x_0)}{T \sinh \kappa L} \cosh \kappa x - \frac{M_L}{TL} + \frac{\kappa M_L}{T \sinh \kappa L} \cosh \kappa x + \frac{M_0}{TL} - \frac{\kappa M_0}{T \sinh \kappa L} \cosh \kappa(L-x) \quad [3.31]$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Px_0}{TL} + \frac{P \sinh \kappa x_0}{T \sinh \kappa L} \cosh \kappa(L-x) - \frac{M_L}{TL} + \frac{\kappa M_L}{T \sinh \kappa L} \cosh \kappa x + \frac{M_0}{TL} - \frac{\kappa M_0}{T \sinh \kappa L} \cosh \kappa(L-x) \quad [3.32]$$

Les courbures à gauche et à droite de x_0 ont pour expression :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P \kappa \sinh \kappa(L-x_0)}{T \sinh \kappa L} \sinh \kappa x + \frac{\kappa^2 M_L}{T \sinh \kappa L} \sinh \kappa x + \frac{\kappa^2 M_0}{T \sinh \kappa L} \sinh \kappa(L-x) \quad [3.33]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P \kappa \sinh \kappa x_0}{T \sinh \kappa L} \sinh \kappa(L-x) + \frac{\kappa^2 M_L}{T \sinh \kappa L} \sinh \kappa x + \frac{\kappa^2 M_0}{T \sinh \kappa L} \sinh \kappa(L-x) \quad [3.34]$$

Les dérivées troisièmes à gauche et à droite de x_0 valent :

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{P \kappa^2 \sinh \kappa(L-x_0)}{T \sinh \kappa L} \cosh \kappa x + \frac{\kappa^3 M_L}{T \sinh \kappa L} \cosh \kappa x - \frac{\kappa^3 M_0}{T \sinh \kappa L} \cosh \kappa(L-x) \quad [3.35]$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{P \kappa^2 \sinh \kappa x_0}{T \sinh \kappa L} \cosh \kappa(L-x) + \frac{\kappa^3 M_L}{T \sinh \kappa L} \cosh \kappa x - \frac{\kappa^3 M_0}{T \sinh \kappa L} \cosh \kappa(L-x) \quad [3.36]$$

Elles possèdent donc en x_0 la discontinuité suivante :

$$\left. \frac{d^3y}{dx^3} \right|_{x=x_0^+} - \left. \frac{d^3y}{dx^3} \right|_{x=x_0^-} = -\frac{P \kappa^2}{T} = -\frac{P}{EI} \quad [3.37]$$

On retrouve l'effort tranchant en multipliant par EI .

Dans la pratique les cordes ont une faible raideur et il convient de posséder des expressions approchées pour κ grand devant $1/L$. On a :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0} &\approx \kappa \frac{P(L-x_0)}{TL} \\ \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=L} &\approx \kappa \frac{Px_0}{TL} \\ \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=x_0} &\approx -\frac{\kappa P}{2T} \end{aligned} \quad [3.38]$$

On observe que la relation suivante est vérifiée :

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0} + \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=L} + 2 \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=x_0} = 0 \quad [3.39]$$

3.2.4. Interprétation physique de ces résultats

Le traitement du problème dans le cadre de l'élasticité linéaire est justifié [Pari-zet, 62] : l'usage prolongé du plectre sur un clavecin n'apporte pas à la corde une fatigue particulière et n'accélère pas le fluage. L'approximation linéaire interdit l'étude des couplages de modes; elle rend naturelle l'hypothèse selon laquelle la valeur de la tension est constante le long de la corde et indépendante de l'amplitude.

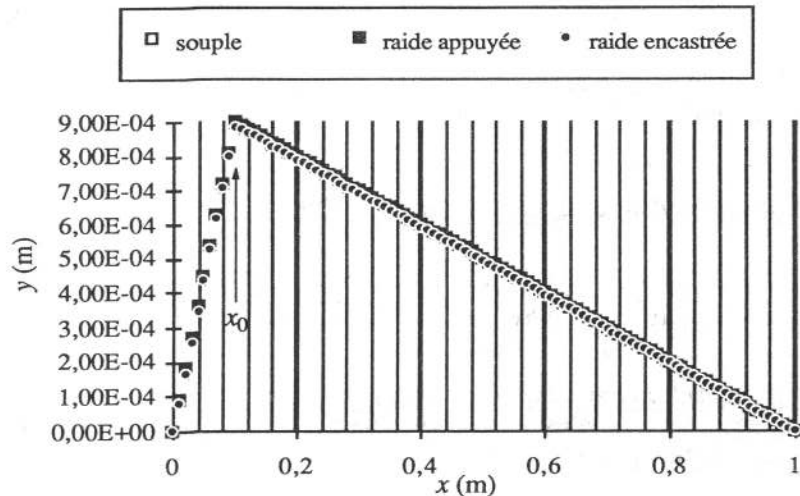


Figure 3.4.a. Comparaison du déplacement dans 3 cas : corde complète. Il s'agit d'une corde de clavecin en fer avec les caractéristiques (mesurées) suivantes : longueur $L = 1$ m ; diamètre $d = 0,3$ mm ; point de pincement $x_0 = 0,1$ m ; tension $T = 40$ N ; force du plectre $P = 0,4$ N ; module d'Young $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Pa ; longueur caractéristique $\kappa^{-1} = 1,44$ mm ; fréquence du fondamental $f_1 = 70$ Hz.

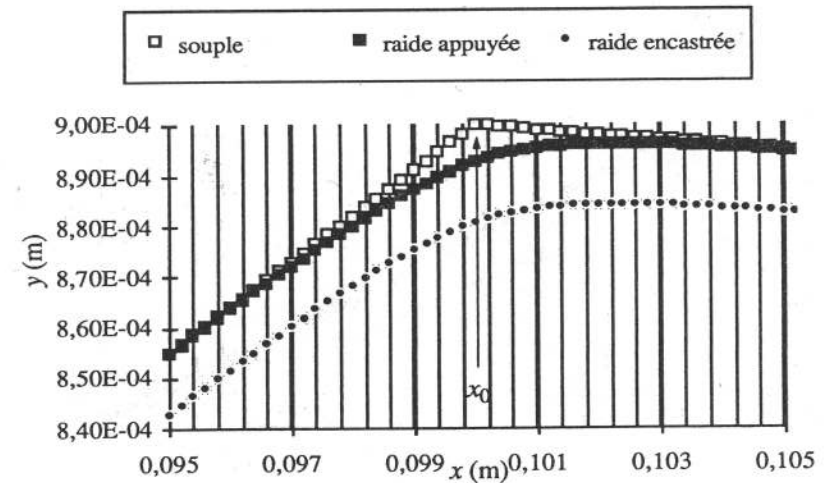


Figure 3.4.b. Grossissement 50 fois près du point de pincement.

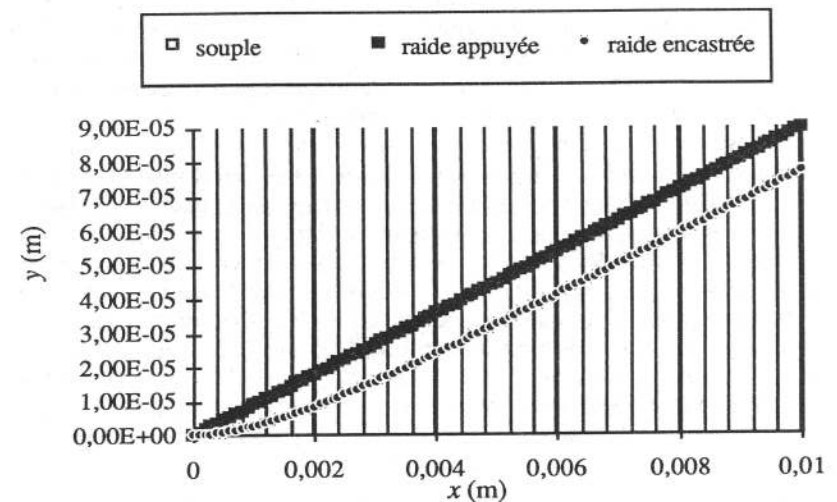


Figure 3.4.c. Grossissement 50 fois près du point de l'extrémité gauche.

La raideur de la corde est décrite par κ qui s'interprète comme un nombre d'onde. La longueur κ^{-1} représente la longueur caractéristique d'une flexion sur la corde. Pour une corde de clavecin, elle est de l'ordre du mm (3 mm dans le registre grave),

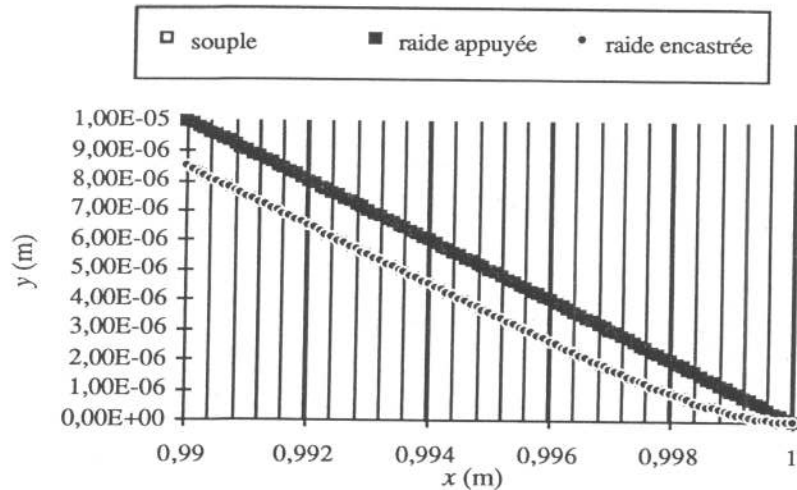


Figure 3.4.d. Grossissement 50 fois près de l'extrémité droite.

ce qui est très petit par rapport à la longueur de la corde (1 m). Les plectres utilisés n'ont jamais une largeur sensiblement supérieure à κ^{-1} ; la forme de la corde visible sur l'agrandissement (figure 3.4.b) et le fait que la partie horizontale se trouve excentrée par rapport au point de pincement montrent que le plectre ne peut toucher la corde qu'en un seul point (sauf si la corde était pincée en son milieu, ce qui n'est pas le cas sur les clavecins). Cette remarque justifie notre choix de décrire la force appliquée comme ponctuelle. L'hypothèse contraire a été exploitée par Sloane [Sloane, 79], mais en négligeant la raideur de la corde, ce qui conduit à des conclusions peu convaincantes. La figure 3.4.a compare le déplacement d'une corde parfaitement souple, d'une corde de clavecin appuyée et de la même corde encastrée; à l'échelle du dessin les différences sont invisibles; c'est seulement dans les trois agrandissements que les différences se voient nettement. On constate donc que dans la réalité les cordes de clavecin sont extrêmement proches, en ce qui concerne leur forme, de cordes parfaitement souples. On remarque également que pour une même force de pincement le déplacement de la corde encastrée est plus faible que celui de la corde sur appuis simples, mais pratiquement parallèle : ceci montre l'effet des parties incurvées de la corde aux extrémités.

Le calcul développé ci-dessus nous montre qu'au point de pincement, c'est la dérivée seconde du déplacement qui est maximale, et non pas le déplacement lui-même; au point d'application de la force, la courbure est maximale car le moment fléchissant est maximal. La formule [3.29] exprime l'équilibre des moments : on peut couper par la pensée la corde au point de pincement et considérer les deux

moments à gauche de ce point ainsi que les deux moments à droite; la courbure en x_0 compte donc deux fois. En ce point, la dérivée troisième du déplacement est discontinue, c'est-à-dire que l'effort tranchant est discontinu : ceci traduit le fait que la force du plectre est exercée en un point.

On pourrait, démarche à priori possible et correcte, calculer la forme initiale en partant de l'équation différentielle du quatrième ordre d'une corde raide statique (voir [3.51]),

$$0 = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad [3.40]$$

Mais il ne faudrait pas commettre l'erreur de chercher la solution qui donne un déplacement maximal en x_0 (condition mécaniquement incorrecte). Une telle erreur de principe sur la condition aux limites conduirait à la solution suivante pour le déplacement à gauche et à droite de x_0 :

$$y = \frac{h}{\kappa x_0 - 2 \tanh \frac{\kappa x_0}{2}} \left[\kappa x - \sinh \kappa x + \tanh \frac{\kappa x_0}{2} (\cosh \kappa x - 1) \right] \quad [3.41]$$

$$y = \frac{h}{\kappa (L - x_0) - 2 \tanh \frac{\kappa (L - x_0)}{2}} \left[\kappa (L - x) - \sinh \kappa (L - x) + \tanh \frac{\kappa (L - x_0)}{2} (\cosh \kappa (L - x) - 1) \right] \quad [3.42]$$

et pour la courbure à gauche et à droite de x_0 :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{h \kappa^2}{\kappa x_0 - 2 \tanh \frac{\kappa x_0}{2}} \left[-\sinh \kappa x + \tanh \frac{\kappa x_0}{2} \cosh \kappa x \right] \quad [3.43]$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{h}{\kappa (L - x_0) - 2 \tanh \frac{\kappa (L - x_0)}{2}} \left[-\sinh \kappa (L - x) + \tanh \frac{\kappa (L - x_0)}{2} \cosh \kappa (L - x) \right] \quad [3.44]$$

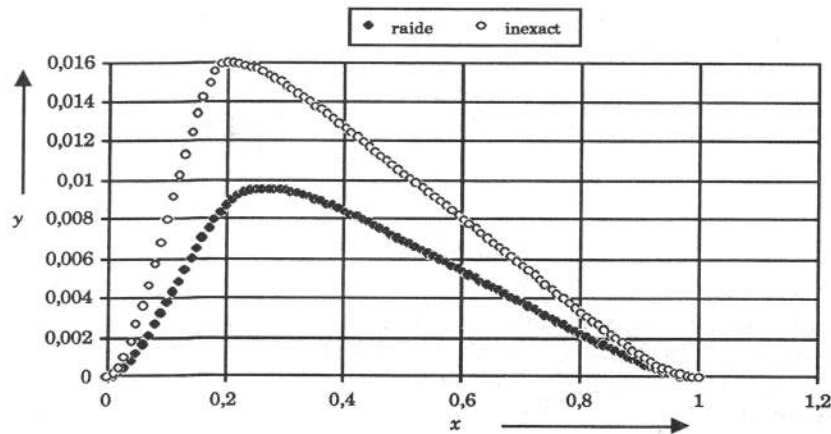


Figure 3.5. Comparaison des déformées pour une corde avec raideur dans le modèle exact ([3.28] et [3.29]) et inexact ([3.41] et [3.42]).

La comparaison de la figure 3.5 montre l'erreur commise sur la déformée quand le point de pincement est situé à 0,2m pour une corde de 1m : le maximum du déplacement devrait se trouver à droite de ce point. L'erreur est encore plus importante pour la dérivée seconde. La dérivée troisième conduirait, quant à elle, à un effort tranchant infini ! Revenons maintenant à une démarche correcte.

A l'instant initial le plectre lâche la corde et la déformation anguleuse (légèrement arrondie) en x_0 donne naissance à deux propagations de déformations anguleuses dans des sens opposés. Une demi-période plus tard, la corde se trouve de nouveau immobile avec une forme symétrique de la forme initiale par rapport au point $x = L/2$. La composante transversale de la force exercée sur le support en $x = 0$ à cet instant est l'opposée de celle qui s'exerçait en $x = L$ à l'instant initial. Au cours de la première période les effets d'amortissement sont négligeables dans la pratique, et ce raisonnement nous permet de calculer l'amplitude du signal de force. Au point d'abscisse x de la corde, la composante transversale de la force exercée comprend l'effort tranchant et la contribution de la tension :

$$F_y = -EI \frac{d^3 y}{dx^3} + T \frac{dy}{dx} \quad [3.45]$$

A l'instant initial en $x = 0$, on a :

$$F_y|_{x=0} = P \frac{L - x_0}{L} + \frac{M_0}{L} - \frac{M_L}{L} \quad [3.46]$$

et une demi-période plus tard en ce point :

$$F_y|_{x=0} = -P \frac{x_0}{L} + \frac{M_0}{L} - \frac{M_L}{L} \quad [3.47]$$

L'amplitude du signal de force au cours de la première période est donc :

$$\Delta F_y = P \quad [3.48]$$

égale à la force initialement exercée par le plectre. Ce résultat très simple, que nous avons précédemment souligné pour la corde souple (paragraphe 2.1.7), se trouve donc maintenant étendu à la corde encastree dotée de raideur. Il en est de même pour la corde raide appuyée, les termes de moments étant nuls dans l'équation ci-dessus.

3.3. Étude des modes propres

Pour étudier le mouvement de notre corde nous établissons tout d'abord l'équation différentielle qui le régit. Le déplacement y est maintenant fonction de x et de t . Effort tranchant et moment fléchissant (figure 3.3) sont fonction de x et t , mais vérifient à chaque instant la relation :

$$N = \frac{\partial M}{\partial x} \quad [3.49]$$

en négligeant l'effet inertiel de rotation (inertie de rotation petite devant l'inertie de translation, approximation d'Euler-Bernouilli, admissible pour le cas des cordes vibrantes [Lacroix, 49]). La force transversale s'obtient par une projection comme au paragraphe 3.2.1, mais elle n'est plus nulle :

$$dF = -dN + T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \quad [3.50]$$

Le système est donc régi par l'équation des cordes vibrantes affectées de raideur :

$$\frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa^2} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad [3.51]$$

avec
$$c_t = \sqrt{\frac{T}{\rho_L}} \quad [3.52]$$

L'équation étant du quatrième ordre, la solution générale est une combinaison linéaire de quatre solutions particulières indépendantes. Les ondes planes suivantes :

$$y(x, t) = A e^{j(\omega t \pm kx)} \quad [3.53]$$

sont deux solutions particulières de cette équation si la relation de dispersion suivante est vérifiée :

$$\omega = c_t k \sqrt{1 + \left(\frac{k}{\kappa}\right)^2} \quad [3.54]$$

Les notions de dispersion et de vitesse de groupe sont développées ci-après au paragraphe 3.5.

D'une façon plus générale, examinons les solutions particulières de l'équation [3.51] qui se présentent sous la forme

$$y(x, t) = Y(x) e^{j\omega t} \quad [3.55]$$

avec
$$Y(x) = A e^{j\gamma x} \quad [3.56]$$

Ceci revient à faire une transformation de Laplace et nous conduit à la relation de dispersion :

$$0 = -\frac{\gamma^4}{\kappa^2} + \gamma^2 + \frac{\omega^2}{c_t^2} \quad [3.57]$$

L'équation [3.55] possède deux racines réelles $\gamma = \pm q$ (ondes évanescentes) et

deux racines imaginaires pures $\gamma = \pm jk$ (ondes planes) avec :

$$q = \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{4\omega^2}{\kappa^2 c_t^2}}} \quad [3.58]$$

$$k = \frac{\kappa}{\sqrt{2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \frac{4\omega^2}{\kappa^2 c_t^2}}} \quad [3.59]$$

On notera aussi les deux relations :

$$q = \sqrt{k^2 + \kappa^2} \quad [3.60]$$

$$\omega = c_t k \sqrt{1 + \left(\frac{k}{\kappa}\right)^2} \quad [3.61]$$

On construit la solution complète par combinaison linéaire des solutions partielles précédentes, en ne retenant que la partie réelle, représentative de l'expérience :

$$y(x, t) = Y(x) \cos(\omega t + \phi) \\ = \cos(\omega t + \phi) (A \cosh qx + B \sinh qx + C \cos kx + D \sin kx) \quad [3.62]$$

où ω et q sont des fonctions de k par [3.60] et [3.61].

Les conditions aux limites fournissent quatre équations qui déterminent la dépendance spatiale à un facteur multiplicatif près et une condition sur k . Les valeurs possibles pour k forment une suite infinie dénombrable k_n . Il en est donc de même pour les valeurs de q et de ω . Pour chaque valeur de n on obtient une fonction propre :

$$y_n(x, t) = \cos(\omega_n t + \phi_n) (A_n \cosh q_n x + B_n \sinh q_n x + C_n \cos k_n x + D_n \sin k_n x) \quad [3.63]$$

Le facteur multiplicatif et la phase sont déterminés par les conditions initiales.

3.3.1. Corde sur appuis simples aux deux extrémités

Dans ce cas, la nullité du déplacement et de la courbure aux deux extrémités impose des fonctions propres de la forme :

$$Y_n(x) = D_n \sin k_n x \quad [3.64]$$

avec la condition :

$$\sin k_n L = 0 \quad [3.65]$$

Nous en tirons les valeurs des nombres d'onde propres et des fréquences propres :

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad [3.66]$$

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} c_{t\sqrt{1 + \left(\frac{n\pi}{\kappa L}\right)^2}} \quad [3.67]$$

$$f_n = \frac{n}{2L} c_{t\sqrt{1 + \left(\frac{n\pi}{\kappa L}\right)^2}} \quad [3.68]$$

On reconnaît l'expression usuelle de l'inharmonicité [Fletcher, 34] :

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho_L}} \sqrt{1 + B n^2} \quad [3.69]$$

avec :

$$B = \frac{\pi^2}{\kappa^2 L^2} = \frac{\pi^3 E d^4}{64 T L^2} \quad [3.70]$$

3.3.2. Corde encastrée aux deux extrémités

Cette fois, il faut annuler le déplacement et la pente aux deux extrémités :

$$\begin{aligned} 0 &= A_n + C_n \\ 0 &= A_n \cosh q_n L + B_n \sinh q_n L + C_n \cos k_n L + D_n \sin k_n L \end{aligned} \quad [3.71]$$

$$\begin{aligned} 0 &= B_n q_n + D_n k_n \\ 0 &= A_n q_n \sinh q_n L + B_n q_n \cosh q_n L - C_n k_n \sin k_n L + D_n k_n \cos k_n L \end{aligned} \quad [3.72]$$

Il vient :

$$Y_n(x) = A_n (\cosh q_n x - \cos k_n x) + B_n \left(\sinh q_n x - \frac{q_n}{k_n} \sin k_n x \right) \quad [3.73]$$

avec

$$B_n = -A_n \frac{\cosh q_n L - \cos k_n L}{\sinh q_n L - \frac{q_n}{k_n} \sin k_n L} = -A_n \frac{\sinh q_n L + \frac{k_n}{q_n} \sin k_n L}{\cosh q_n L - \cos k_n L} \quad [3.74]$$

Dans la pratique, la raideur est faible et il importe de chercher des formes approchées pour κ grand devant $1/L$, ce qui implique :

$$q_n \approx \kappa \quad k_n \approx \frac{n\pi}{L} \quad A_n \approx -B_n \quad [3.75]$$

$$Y_n(x) \approx A_n (\cosh \kappa x - \cos k_n x - \sinh \kappa x + \frac{\kappa}{k_n} \sin k_n x) \quad [3.76]$$

tout au moins tant que n n'est pas trop grand, c'est-à-dire tant que :

$$n \ll \frac{\kappa L}{\pi} \quad [3.77]$$

Pour étudier l'évolution temporelle de la corde, nous ne conserverons que le

terme principal et les fonctions propres auront la forme simple suivante :

$$Y_n(x) \approx \alpha_n \sin k_n x \quad [3.78]$$

Nous devons maintenant calculer les fréquences propres. Plutôt que de résoudre le système des équations précédentes, il est commode de tirer parti de la symétrie des conditions aux limites en plaçant l'origine des abscisses au milieu de la corde. Comme dans [Morse, 57], il faut distinguer entre fonctions paires et impaires.

3.3.2.1. Cas des fonctions paires

On part avec :

$$Y_n(x) = A_n \cosh q_n x + C_n \cos k_n x \quad [3.79]$$

Les conditions aux limites en $x = L/2$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} A_n \cosh q_n \frac{L}{2} &= -C_n \cos k_n \frac{L}{2} \\ A_n q_n \sinh q_n \frac{L}{2} &= -C_n k_n \sin k_n \frac{L}{2} \end{aligned} \quad [3.80]$$

Nous obtenons donc la condition suivante,

$$\tanh q_n \frac{L}{2} = -\frac{k}{q} \tan k_n \frac{L}{2} \quad [3.81]$$

où q_n est fonction de k_n par la relation [3.60] ; c'est-à-dire :

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{k_n}\right)^2} \tanh \frac{L}{2} \sqrt{k_n^2 + \kappa^2} = -\tan k_n \frac{L}{2} \quad [3.82]$$

Les valeurs k_n , solutions de cette équation, peuvent être obtenues par une résolution numérique. Il suffit de les reporter ensuite dans [3.61] pour obtenir les fréquences propres (c'est-à-dire les fréquences des partiels).

En pratique, la raideur de la corde étant faible, κ est grand devant k_n et l'argument de la tangente est voisin de $n\pi/2$ (n impair). On peut résoudre l'équation [3.82] par développement limité et itération.

Posons pour cela :

$$k_n \frac{L}{2} = \frac{n\pi}{2} + \varepsilon \quad [3.83]$$

Il vient :

$$\varepsilon \sqrt{1 + \frac{\left[\frac{n\pi}{L} \left(1 + \frac{2\varepsilon}{n\pi}\right)\right]^2}{\kappa^2}} = \frac{\frac{n\pi}{L} \left(1 + \frac{2\varepsilon}{n\pi}\right)}{\kappa} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{3} - \frac{\varepsilon^4}{45} - \dots\right) \quad [3.84]$$

Au premier ordre nous trouvons :

$$\varepsilon = \frac{n\pi}{\kappa L} \quad [3.85]$$

ce qui montre que ε est un infiniment petit d'ordre $1/\kappa$, tout au moins tant que n satisfait [3.77].

Sous cette hypothèse, il est alors possible de développer la relation [3.84] aux différents ordres de cet infiniment petit. Un tel développement s'écrit, au quatrième ordre :

$$0 = \left[\frac{n\pi}{\kappa L} - \varepsilon\right]_1 + \left[\frac{2\varepsilon}{\kappa L}\right]_2 + \left[-\frac{n^2 \pi^2 \varepsilon}{2\kappa^2 L^2} - \frac{n\pi \varepsilon^2}{3\kappa L}\right]_3 + \left[-\frac{2n\pi \varepsilon^2}{\kappa^2 L^2} - \frac{2\varepsilon^3}{3\kappa L}\right]_4 \quad [3.86]$$

Au premier ordre, la valeur ε_1 de ε vérifie :

$$0 = \left[\frac{n\pi}{\kappa L} - \varepsilon_1\right]_1 \quad [3.87]$$

A l'ordre 2, on a pour ε_2 :

$$0 = \left[\frac{n\pi}{\kappa L} - \varepsilon_2\right]_1 + \left[\frac{2\varepsilon_1}{\kappa L}\right]_2 \quad [3.88]$$

A l'ordre 3 :

$$0 = \left[\frac{n\pi}{\kappa L} - \varepsilon_3\right]_1 + \left[\frac{2\varepsilon_2}{\kappa L}\right]_2 + \left[-\frac{n^2 \pi^2 \varepsilon_1}{2\kappa^2 L^2} - \frac{n\pi \varepsilon_1^2}{3\kappa L}\right]_3 \quad [3.89]$$

Et à l'ordre 4, la valeur ε_4 de ε est donnée par :

$$0 = \left[\frac{n\pi}{\kappa L} - \varepsilon_4 \right]_1 + \left[\frac{2\varepsilon_3}{\kappa L} \right]_2 + \left[-\frac{n^2\pi^2\varepsilon_2}{2\kappa^2 L^2} - \frac{n\pi\varepsilon_2^2}{3\kappa L} \right]_3 + \left[-\frac{2n\pi\varepsilon_1^2}{\kappa^2 L^2} - \frac{2\varepsilon_1^3}{3\kappa L} \right]_4 \quad [3.90]$$

On trouve finalement :

$$k_n \approx \frac{n\pi}{L} \left[1 + \frac{2}{\kappa L} + \frac{4}{\kappa^2 L^2} + \left(8 - \frac{5}{3}n^2\pi^2 \right) \frac{1}{\kappa^3 L^3} + \dots \right] \quad [3.91]$$

En exprimant ω en fonction de k , on obtient les fréquences propres (valeurs impaires de n) :

$$f_n \approx \frac{n}{2L} c_t \left[1 + \frac{2}{\kappa L} + \left(4 + \frac{n^2\pi^2}{2} \right) \frac{1}{\kappa^2 L^2} + \left(8 + \frac{4}{3}n^2\pi^2 \right) \frac{1}{\kappa^3 L^3} + \dots \right] \quad [3.92]$$

3.3.2.2. Cas des fonctions impaires.

On partira de :

$$Y_n(x, t) = B_n \sinh q_n x + D_n \sin k_n x \quad [3.93]$$

Les conditions aux limites en $x = L/2$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} B_n \sinh q_n \frac{L}{2} &= -D_n \sin k_n \frac{L}{2} \\ B_n q_n \cosh q_n \frac{L}{2} &= -D_n k_n \cos k_n \frac{L}{2} \end{aligned} \quad [3.94]$$

Nous obtenons donc la condition suivante,

$$\tanh \frac{L}{2} \sqrt{k_n^2 + \kappa^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{k_n} \right)^2} \tan k_n \frac{L}{2} \quad [3.95]$$

L'argument de la tangente est cette fois voisin de $n\pi/2$ avec n pair. Comme

précédemment, on opère par développement limité et itération.

Le résultat final est donné dans les formules [3.91] et [3.92], pour toutes valeurs de n , les fonctions propres étant tantôt paires [3.79] et tantôt impaires [3.93], suivant que n est impair ou pair.

3.3.3. Interprétation physique de ces résultats

Les modes propres sont les partiels de la corde et les valeurs des fréquences propres traduisent l'inharmonicité due à la raideur. La figure 3.6 compare l'inharmonicité des partiels de la corde sur appuis simples avec celle de la corde encastree. La raideur constitue pour chaque partial une force de rappel, et, comme toute force de rappel, elle augmente la fréquence d'oscillation. Un partial de rang n possède n arches, chacune soumise au rappel dû à la raideur. L'augmentation de fréquence est donc d'autant plus grande que l'ordre du partial est plus élevé. Par rapport aux appuis simples, l'encastrement rajoute deux flexions supplémentaires quel que soit l'ordre du partial, ce qui a pour effet sur la figure 3.6 d'augmenter encore la fréquence en déplaçant par translation l'ensemble des résultats.

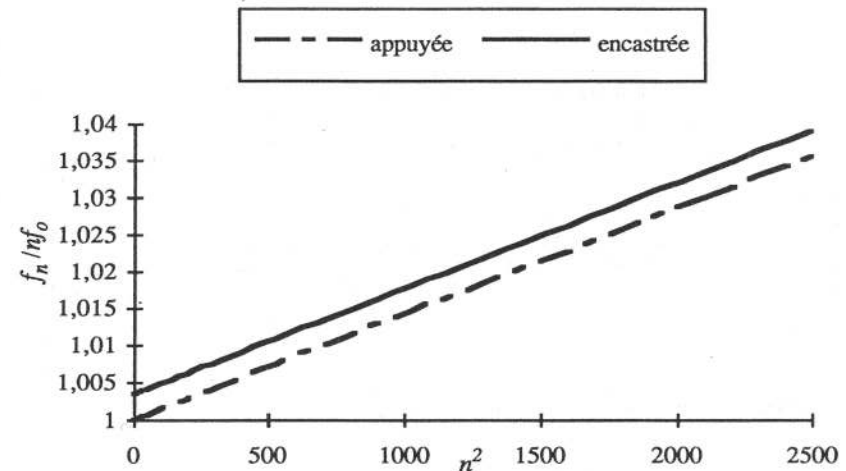


Figure 3.6. Comparaison de l'inharmonicité dans 2 cas. On a porté f_n / f_{n0} en fonction de n^2 (même corde que la figure 3.4).

3.3.4. Inharmonicité : comparaison avec les expériences

Nous venons de voir que les partiels ne sont pas dans un rapport entier, c'est-à-dire que la relation ci-dessous n'est pas vérifiée

$$\omega_n = n\omega_1 \quad \text{avec } n \text{ entier} \quad [3.96]$$

Aussi avons-nous entrepris de mesurer systématiquement la fréquence des partiels pour les différentes cordes qui sont à notre disposition.

Pour ce faire, nous pinçons la corde en son milieu, ce qui a pour effet de supprimer les partiels pairs.

Par l'intermédiaire du système d'acquisition, nous allons pouvoir analyser le signal ainsi numérisé. Nous utilisons pour cela l'analyse spectrale différentielle qui nous donne sur un nombre de points réduit une très bonne connaissance de la fréquence.

De plus il nous semble intéressant de mesurer sur une même corde, pour des longueurs différentes, la valeur des partiels.

Le tableau ci-dessous donne une idée des mesures que l'on obtient pour une corde en "laiton ressort".

Paramètres de la corde :	diamètre : 0,35 mm	$L : 1,166 \text{ m}$	$T_0 : 32,4 \text{ N}$	
Valeurs déduites de la courbe d'inharmonicité :	$1/\kappa : 0,0015 \text{ m}$	$1/\kappa L : 0,00128$	$B : 1,6\text{E-}05$	$E \text{ en Pa : } 9,7 \times 10^{10}$
Valeurs déduites de la mesure des fréquences :	$1/\kappa : 0,0014 \text{ m}$	$f_1 : 1390 \text{ Hz}$	$f_1 : 84,08 \text{ Hz}$	$E \text{ en Pa : } 9,2 \times 10^{10}$

La courbe correspondante est donnée à la figure 3.7.

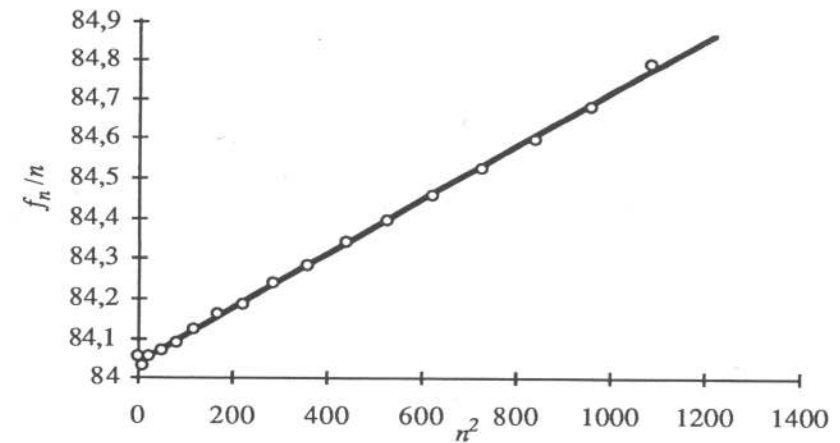


Figure 3.7. Relevé d'inharmonicité et droite moyenne. On a porté f_n/n en fonction de n^2

3.4. Étude du mouvement en l'absence d'amortissement

3.4.1. Théorie

Nous écrivons la solution de la déformée à chaque instant comme une combinaison linéaire de toutes les fonctions propres, chacune étant affectée d'une dépendance temporelle à sa fréquence propre. Les conditions initiales étant spécifiées en termes de position initiale et de vitesse initiale, nous prenons en compte chaque angle de phase de la relation [3.63] en distinguant un terme en cosinus (position initiale) et un terme en sinus (vitesse initiale).

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) (b_n \cos \omega_n t + c_n \sin \omega_n t) \quad [3.97]$$

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) b_n \quad [3.98]$$

$$\left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) \omega_n c_n = v_0(x) \quad [3.99]$$

La corde étant lâchée sans vitesse initiale (ce que nous admettons en l'absence actuelle de mesures fines prouvant le contraire), nous avons, pour tout n , $c_n = 0$. Les valeurs de b_n s'obtiennent par :

$$b_n = \frac{1}{L} \frac{\int_0^L y_0(x) Y_n dx}{\int_0^L |Y_n|^2 dx} \quad [3.100]$$

Dans la plupart des cas, la forme approchée suivante

$$Y_n(x) \approx \sin k_n x \quad [3.101]$$

est suffisante pour calculer b_n : c'est elle que nous utilisons ci-dessous (cependant le calcul complet sera donné dans le paragraphe 4.5).

$$\begin{aligned} b_n = & \frac{2}{L} \int_0^{x_0} \left(\frac{P(L-x_0)}{TL} x - \frac{P \sinh \kappa(L-x_0)}{\kappa T \sinh \kappa L} \sinh \kappa x \right) \sin k_n x dx \\ & + \frac{2}{L} \int_{x_0}^L \left(\frac{Px_0}{TL} (L-x) - \frac{P \sinh \kappa x_0}{\kappa T \sinh \kappa L} \sinh \kappa(L-x) \right) \sin k_n x dx \\ & + \frac{2}{L} \int_0^L \left(-\frac{M_L}{TL} x - \frac{M_L}{T \sinh \kappa L} \sinh \kappa x \right) \sin k_n x dx \\ & + \frac{2}{L} \int_0^L \left(-\frac{M_0}{TL} (L-x) + \frac{M_0}{T \sinh \kappa L} \sinh \kappa(L-x) \right) \sin k_n x dx \end{aligned} \quad [3.102]$$

Tout calcul fait, il vient :

$$\begin{aligned} b_n = & \frac{2P}{TL} \left\{ \frac{\sin k_n x_0}{k_n^2} \frac{1}{1+k_n^2/\kappa^2} - \sin k_n L \left[\frac{x_0}{k_n^2 L} - \frac{\sinh \kappa x_0}{(1+k_n^2/\kappa^2) \sinh \kappa L} \right] \right\} \\ & + \frac{2}{TL} \sin k_n L \left[-\frac{M_L + M_0}{k_n^2 L} + \frac{1}{(1+k_n^2/\kappa^2)} \left(\frac{M_L}{\tanh \kappa L} - \frac{M_0}{\sinh \kappa L} \right) \right] \\ & + \frac{2}{TL} \left[\cos k_n x \frac{M_L}{k_n (1+k_n^2/\kappa^2)} - \frac{M_0}{k_n (1+k_n^2/\kappa^2)} \right] \end{aligned} \quad [3.103]$$

Les valeurs correspondantes des nombres d'onde et des fréquences, comme on l'a vu précédemment, sont données par :

$$k_n \approx \frac{n\pi}{L} \left[1 + \frac{2}{\kappa L} + \frac{4}{\kappa^2 L^2} + \left(8 - \frac{5}{3} n^2 \pi^2 \right) \frac{1}{\kappa^3 L^3} + \dots \right] \quad [3.104]$$

$$f_n \approx \frac{n}{2L} c_1 \left[1 + \frac{2}{\kappa L} + \left(4 + \frac{n^2 \pi^2}{2} \right) \frac{1}{\kappa^2 L^2} + \left(8 + \frac{4}{3} n^2 \pi^2 \right) \frac{1}{\kappa^3 L^3} + \dots \right] \quad [3.105]$$

A la limite, lorsque κ tend vers l'infini, on retrouve le résultat classique de la corde souple :

$$b_n = \frac{2P}{TL} \frac{\sin k_n x_0}{k_n^2} \quad [3.106]$$

avec

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad f_n = \frac{n}{2L} c_1 \quad [3.107]$$

On obtient comme limite, lorsque les moments aux extrémités sont nuls, pour une corde raide appuyée :

$$b_n = \frac{2P}{TL} \frac{\sin k_n x_0}{k_n^2} \frac{1}{1+k_n^2/\kappa^2} \quad [3.108]$$

avec

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad f_n = \frac{n}{2L} c_t \sqrt{1 + \left(\frac{n\pi}{\kappa L}\right)^2} \quad [3.109]$$

Dans chaque cas, l'équation générale du mouvement de la corde est la suivante :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin k_n x \cos \omega_n t \quad [3.110]$$

3.4.2. Interprétation physique de ces résultats

Les figure 3.8.a et figure 3.8.b comparent les amplitudes des partiels de la corde sur appuis simples et encastree avec celles de la corde souple. L'accroissement de fréquence de ces partiels par rapport à ceux de la corde souple, très visible pour les partiels de rang élevé, montre l'effet d'inharmonicité.

Rappelons qu'on appelle réjection due au point de pincement, le fait que l'amplitude de certains partiels devienne très petite (nulle pour la corde raide sur appuis simples). C'est cette réjection qui est responsable des arches si caractéristiques des figure 3.8.a et figure 3.8.b.

On peut se demander quelle précision on aurait obtenu si, en se dispensant de tout calcul, on avait estimé simplement le spectre d'une corde raide encastree en prenant pour valeurs de b_n celles de la corde parfaitement souple et pour fréquences les valeurs inharmoniques habituelles de [3.75]. Le résultat, figure 3.9, montre que l'erreur commise serait très faible. L'interprétation physique de cette constatation est la suivante : l'effet de raideur sur les cordes de clavecin a très peu d'influence sur la forme de la corde ; le spectre en est très peu affecté, il est seulement modifié par l'effet d'inharmonicité que la raideur induit sur les fréquences des partiels.

Nous avons vérifié qu'il est possible d'obtenir numériquement une très bonne précision dans le calcul des partiels en utilisant les formules simplifiées suivantes :

$$b_n \approx \frac{2P \sin k_n x_0}{TL} \frac{1}{k_n^2} \frac{1}{1 + k_n^2/\kappa^2} \left\{ 1 + [(-1)^n M_L - M_0] \frac{k_n}{P \sin k_n x_0} \right\} \quad [3.111]$$

$$k_n \approx \frac{n\pi}{L} \quad \omega_n \approx k_n c_t \sqrt{1 + \left(\frac{n\pi}{\kappa L}\right)^2} \quad [3.112]$$

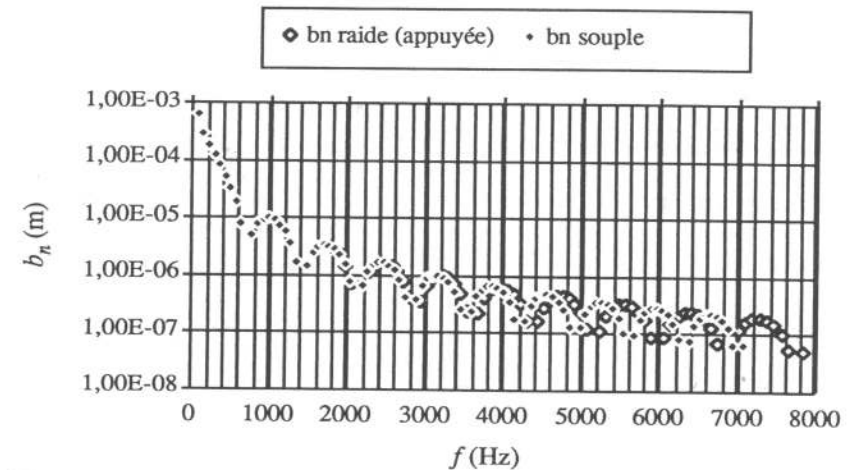


Figure 3.8.a. Comparaison de l'amplitude b_n des partiels, corde dotée de raideur (mêmes paramètres que la Fig.[3.4]). Corde sur appuis simples [3.108] et [3.109], corde parfaitement souple.

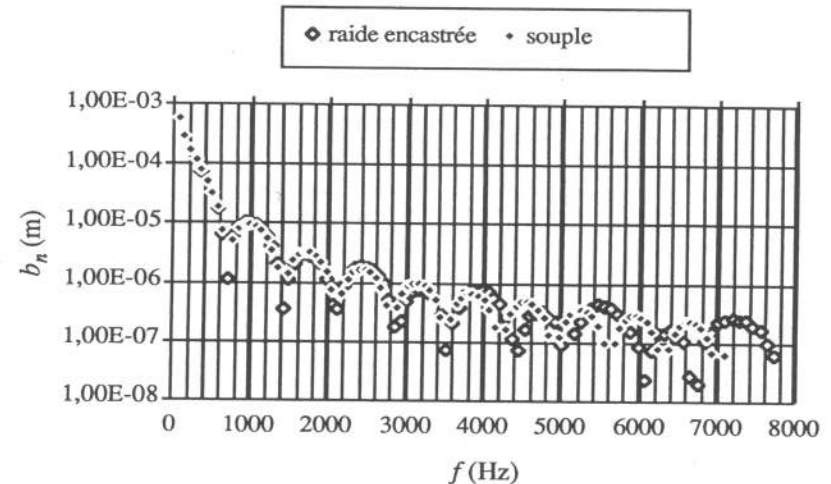


Figure 3.8.b. Corde encastree [3.103] à [3.105], corde parfaitement souple.

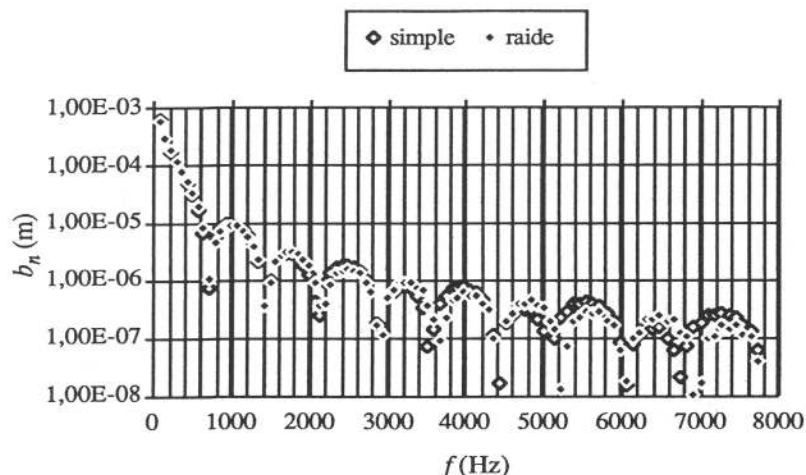


Figure 3.9. Comparaison de l'amplitude des partiels de cette même corde encastree dans 2 modèles (mêmes paramètres que la figure 3.4) : présent modèle [3.103] à [3.105]; prévision sans calcul en utilisant la forme géométrique souple, mais avec dispersion [3.106] et [3.107].

Sur les figure 3.8.b et figure 3.9, pour les fréquences voisines de la réjection, les valeurs d'amplitude données par [3.103] sont à prendre avec prudence et il conviendrait d'améliorer la précision en utilisant l'expression [4.96]. Celle-ci est obtenue en prenant pour fonctions propres la forme complète au lieu de l'approximation sinusoïdale.

3.5. Vitesse de groupe; la dispersion et son effet sur la force : le précurseur

Nous avons obtenu, la relation de dispersion suivante :

$$\omega = kc_1 \sqrt{1 + k^2/\kappa^2} \quad [3.113]$$

La vitesse de phase, ω/k , n'est plus constante comme dans le cas de la corde souple (voir paragraphe 2.1.3) : on dit que la propagation a lieu avec dispersion. Dispersion et inharmonicité sont les deux facettes du même phénomène. Un paquet

d'ondes centré autour d'une fréquence ω_0 se propage, avec dispersion, à la vitesse

$$\left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{\omega=\omega_0} \quad [3.114]$$

appelée vitesse de groupe. Celle-ci est aussi la vitesse de transmission de son énergie. Pour des paquets d'ondes ne contenant de grandes amplitudes qu'aux basses fréquences, ce qui est le cas de nos points anguleux, il y a propagation avec dispersion à la vitesse de groupe suivante :

$$\left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{\omega=0} = c_1 \quad [3.115]$$

Nous utiliserons simplement le terme de "vitesse de propagation", c_1 , à propos de la propagation des points anguleux.

Nous montrons que la prise en compte de la dispersion dans le calcul du signal de force fait apparaître un précurseur (voir paragraphe 6.3.2.1). L'étude physique du précurseur tel qu'il se présente dans la réalité expérimentale nécessite la prise en compte de la non-linéarité de la corde. La question étant complexe, nous avons préféré garder groupées les explications : l'effet de la dispersion en approximation linéaire se trouve donc traité à l'intérieur de paragraphe 6.3.2.

3.6. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une modélisation de la corde vibrante monofilament (flexion plane), tenant compte de la raideur, en décrivant la forme initiale, en étudiant les modes propres et le mouvement en l'absence d'amortissement. L'étude est faite en régime linéaire, pour de faibles amplitudes, avec une impédance infinie aux extrémités. La tension dans la corde est supposée constante, indépendante de l'amplitude. Nous n'avons considéré que les modes de flexion, les modes longitudinaux étant découplés dans ce modèle. Le pincement est traité comme l'action d'une force ponctuelle, ce qui est réaliste dans le cas du clavecin ; la généralisation à une force étendue n'offre pas de difficulté de principe. La raideur des cordes utilisées en musique est faible, même extrêmement faible la plupart du temps : la forme de la corde reste donc très proche en pratique d'une corde parfaitement souple ; l'effet de raideur apparaît non pas sur la forme, mais sur l'inharmonicité et sur la dispersion, responsable d'un précurseur. Les relevés d'inharmonicité sont très bien expliqués par la théorie et n'offrent pas de surprise.

En conclusion, à ce niveau de description de la corde, nous avons précisé des notions connues dans leur principe, mais un tel mouvement perpétuel reste très loin de la réalité : il nous faut maintenant étudier comment et pourquoi la corde s'arrête de vibrer. En abordant la mécanique *des cordes* réelles, nous allons devoir nous éloigner de la mécanique usuelle *de la corde* vibrante.

Régime vibratoire linéaire avec amortissement