

1 Questions courtes

- (a) **Propriétés des filtres.** Soit le filtre de fonction de transfert $H(z) = \frac{z^{-1}}{1 - 1.2z^{-1}}$.
1. Son implémentation stable est-elle causale ($h(n) = 0 \ \forall n < 0$), anti-causale ($h(n) = 0 \ \forall n \geq 0$), bilatère (i.e. ni causale, ni anticausale) ?
 2. Calculer sa réponse impulsionnelle (indication : on remarquera que $H(z) = \frac{-1}{1.2} \frac{1}{1-z/1.2}$, puis on développera la fraction rationnelle en série entière, et on identifiera le résultat avec l'expression $H(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n)z^{-n}$).
 3. Est-il RIF (de réponse impulsionnelle finie) ou RII (de réponse impulsionnelle infinie) ?
 4. Est-il plutôt passe-bas (i.e. il accentue les basses fréquences), passe-haut (il accentue les hautes fréquences), passe-bande (il accentue les fréquences intermédiaires) ?
 5. Exprimer la relation entrée-sortie correspondant à $H(z)$.
- (b) **Filtre différentiateur.** On considère un filtre de fonction de transfert $H(z) = 2 \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$.
1. Ce filtre est-il stable ? Est-il RIF/RII ? Quelle est la relation entrée/sortie correspondante ?
 2. On considère l'implémentation causale de ce filtre. Donner le domaine de définition de $H(z)$ et la réponse impulsionnelle $h(n)$ correspondante.
- (c) **Filtre passe-tout.** Soit $c \in \mathbb{C}$. Soit le filtre causal de fonction de transfert $G(z) = \frac{c^* - z^{-1}}{1 - cz^{-1}}$.
1. Dans quel cas ce filtre est-il stable ? Calculer alors sa réponse impulsionnelle.
 2. Montrer que sa réponse en fréquence vaut 1 en module $\forall \nu \in \mathbb{R}$.
- (d) **Filtres à phase minimale.** On dit qu'un filtre est à *phase minimale* s'il est causal stable et d'inverse causal stable. On considère le filtre de fonction de transfert $H(z) = \frac{1 - 1.8z^{-1} + 0.81z^{-2}}{1 + 0.7z^{-1}}$, dont la réponse impulsionnelle est dans $l_1(\mathbb{Z})$ (sommable).
1. Quels sont les pôles et les zéros du filtre ?
 2. Ce filtre est-il à réponse impulsionnelle infinie (RII) ou à réponse impulsionnelle finie (RIF) ? causal ou non causal ? à minimum de phase ? (vous justifierez vos réponses).

2 Interprétation géométrique d'une réponse en fréquence

On s'intéresse au filtrage causal de réponse impulsionnelle $h(n)$ définie par la relation entrée-sortie $y(n) = ay(n-1) + x(n)$, avec $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$.

1. Donner l'expression de la fonction de transfert $H(z)$.
2. On pose $z = e^{2i\pi\nu_0}$. Tracer le lieu de $M(z)$ des points d'affixe z dans le plan complexe quand ν_0 varie de 0 à 1. Préciser les points $\nu_0 = 0, \nu_0 = 0.25, \nu_0 = 0.5$ et $\nu_0 = 1$.
3. Montrer que $|H(e^{2i\pi\nu_0})| = OM/AM$, O désignant l'origine du repère et A étant un point du plan que l'on précisera. En déduire l'allure de $|H(e^{2i\pi\nu_0})|$ lorsque $a = 0.1, a = 0.9, a = -0.9$. Quels sont les types des filtres correspondants ? (passe-bas, passe-bande, passe-haut ?)