

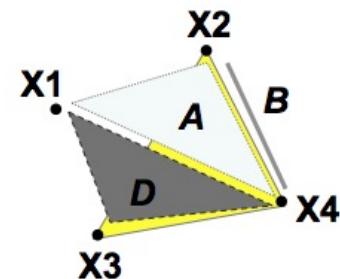
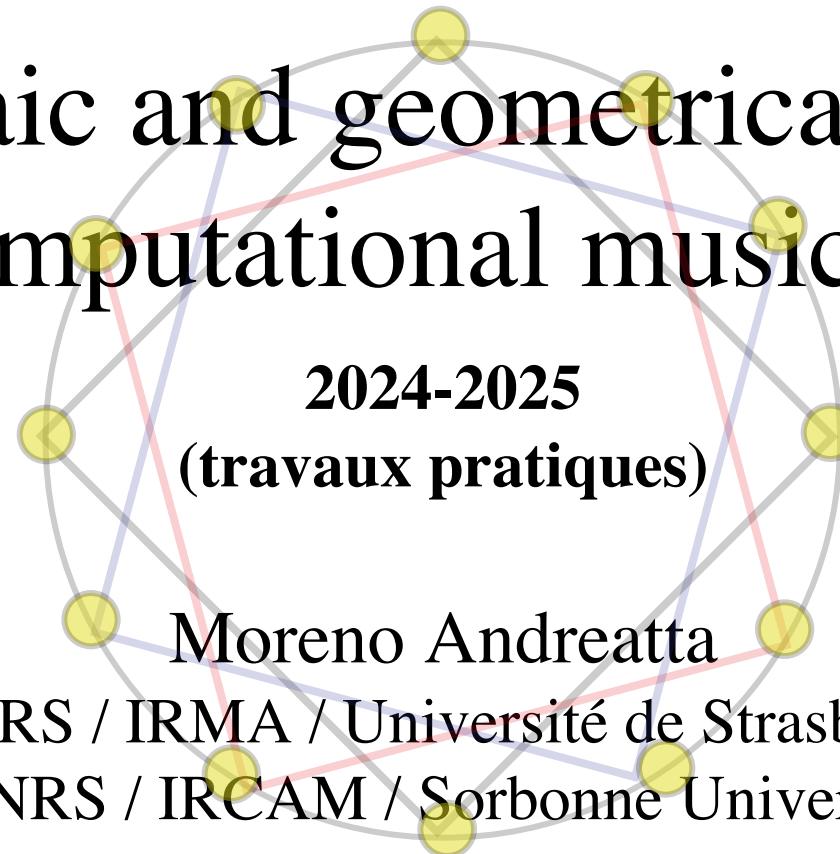
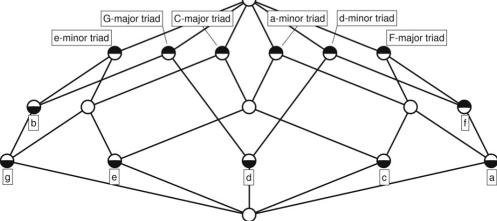


Algebraic and geometrical models in computational musicology

2024-2025
(travaux pratiques)

Moreno Andreatta
CNRS / IRMA / Université de Strasbourg
CNRS / IRCAM / Sorbonne Université

www.morenoandreatta.com



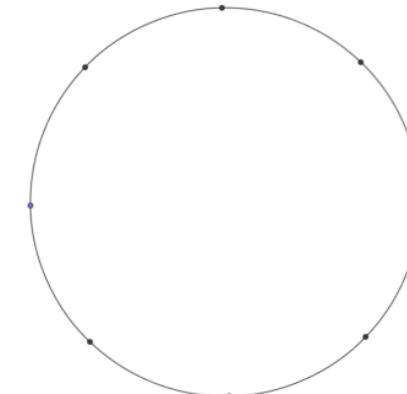


Deuxième partie. On vous propose d'analyser les boucles rythmiques et harmoniques du morceau « All of Me » de John Legend (tiré de l'album *Love in the Future*, 2013).

1. Analyse rythmique

La chanson est basée sur un pattern rythmique R – le *trecillo* – qui a une périodicité égale à 8 et une structure intervallique égale à $(3, 3, 2)$. Représentez le pattern rythmique comme un triangle inscrit dans le cercle à droite et étudiez les propriétés formelles suivantes à partir d'une généralisation de la notion de transposition et d'inversion (on travaille modulo 8 au lieu que modulo 12) :

$$T_k(x) = k+x \bmod 8 \quad \text{et} \quad I_h(x) = h-x \bmod 8.$$



a) Invariance par rapport à une inversion ? Démontrez que le rythme R est (ou n'est pas) symétrique par rapport à un axe I_k autrement dit que l'équation $I_k(R) = R$ est (ou n'est pas) vérifiée

b) Invariance par rapport à une rotation ? Le rythme possède-t-il une symétrie rotationnelle ? Autrement dit, y a-t-il un facteur de transposition T_k tel que $T_k(R) = R$?

c) Discuter les deux propriétés précédentes pour le rythme complémentaire du *trecillo*, à savoir le *cinquillo* et calculer sa structure intervallique.

2. Analyse de deux boucles harmoniques à l'aide de la représentation circulaire

Cette chanson est basée principalement sur deux boucles harmoniques que je vous propose d'analyser tout d'abord à l'aide de la représentation circulaire. La première boucle est dans la tonalité de Fm tandis que la deuxième boucle est dans la tonalité majeure relative, c'est-à-dire Ab

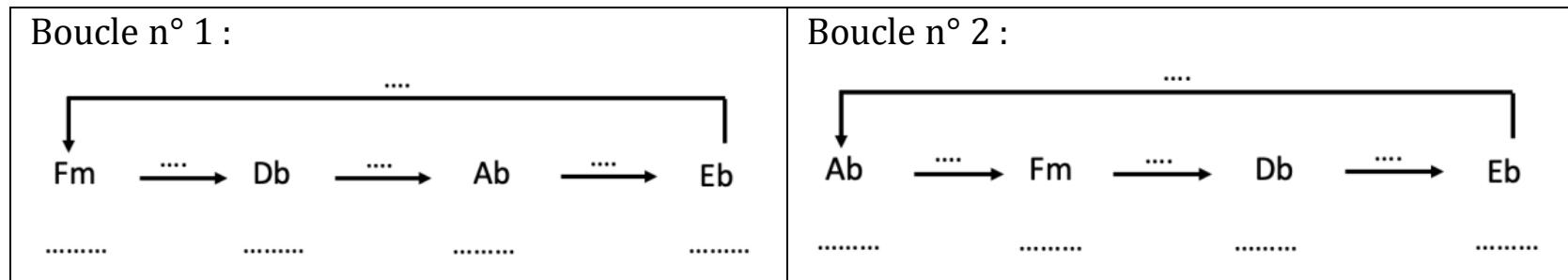


Fig. 1 : les deux boucles harmoniques à la base de la chanson

A l'aide des représentations circulaires (Fig. 2 et Fig. 3), identifiez les ensembles des classes de hauteurs correspondants aux accords des deux boucles et indiquez-les dans les parties en pointillé de la Fig. 1 avec les transpositions T_k ou les inversions I_k en correspondance de chaque flèche.

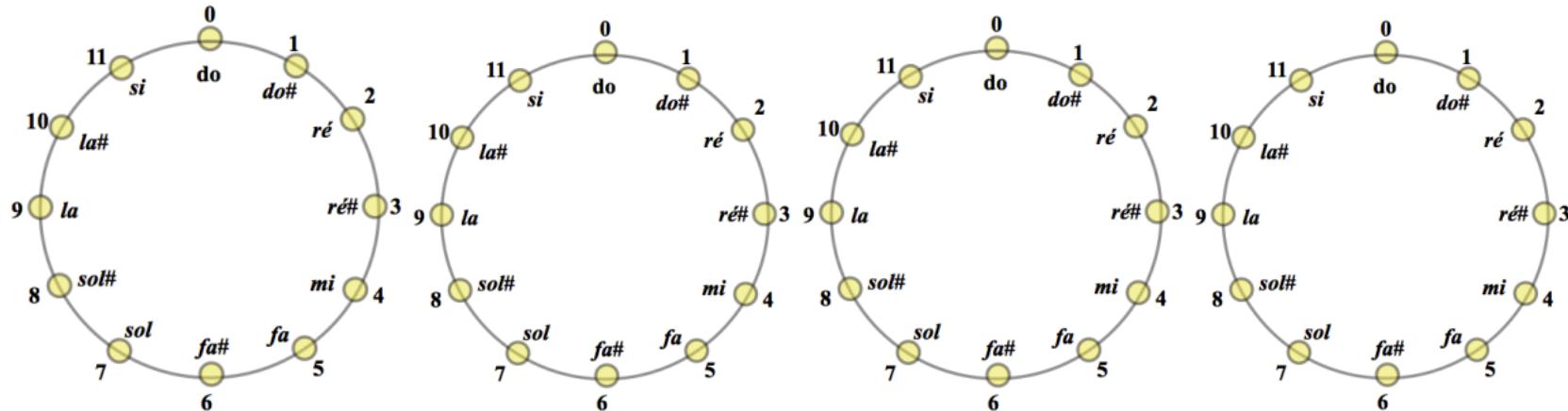


Fig. 2 : représentations circulaires à l'aide desquelles représenter les accords de la première boucle

4. Analyse des boucles précédentes à l'aide du Tonnetz

Représenter maintenant les deux progressions harmoniques de la Fig. 1 comme des trajectoires spatiales dans les deux Tonnetze des accords majeurs (indiqués en majuscule) et mineurs (indiqués en minuscule) en Fig. 4 ci-dessous. Indiquer explicitement pour chaque boucle les transformations néo-riemannniennes P, L et R permettant de passer d'un accord à l'autre

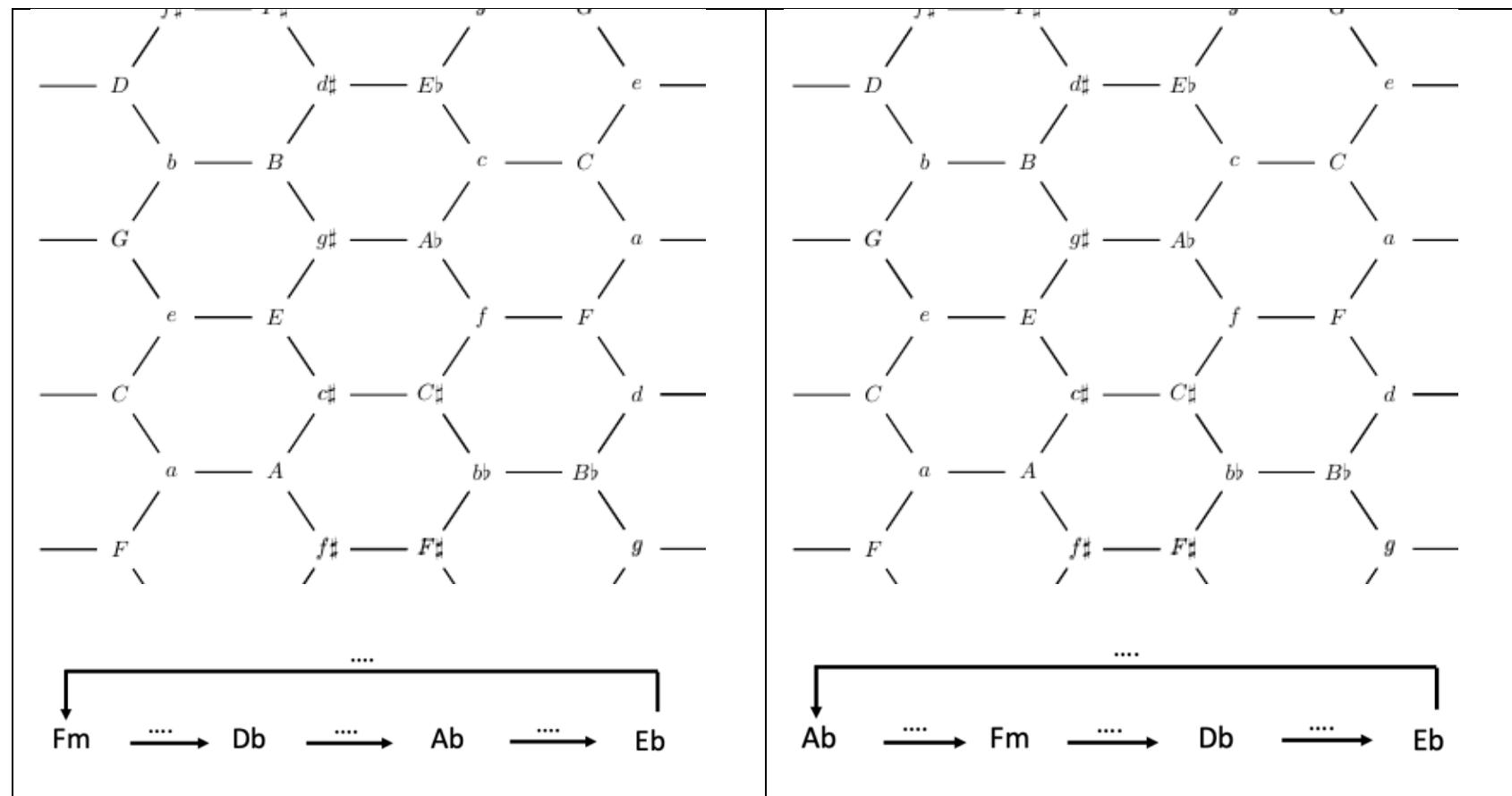
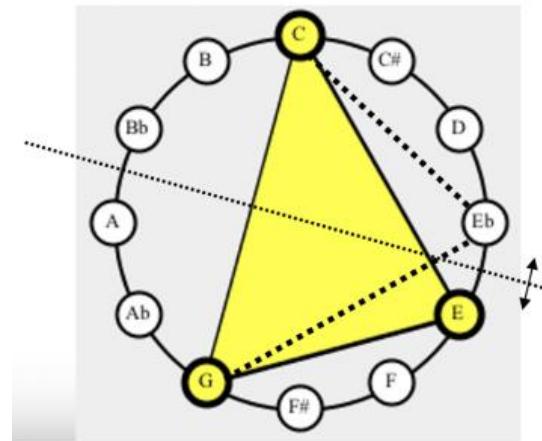


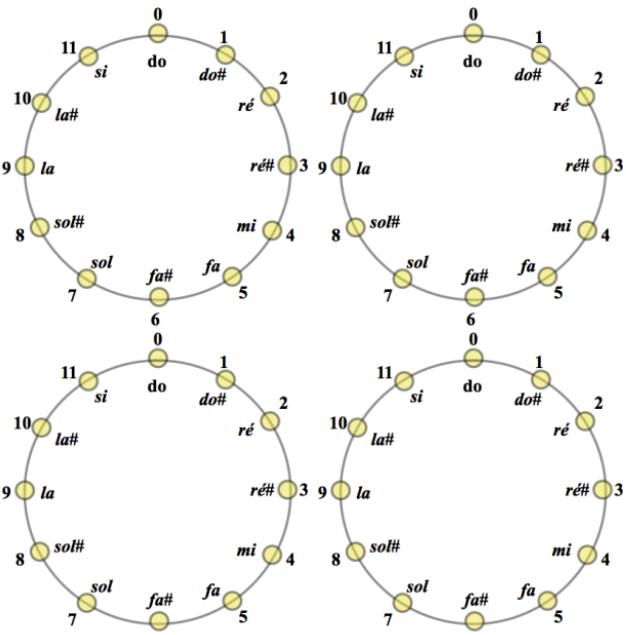
Fig. 4 : les deux Tonnetze des accords majeurs et mineurs à l'aide desquels représenter les quatre accords de chaque boucle harmonique et la trajectoire spatiale associée en indiquant cette fois les transformations néo-riemannniennes correspondantes à chaque transition entre un accord et l'accord suivant.

4. Une expérience d'harmonie négative

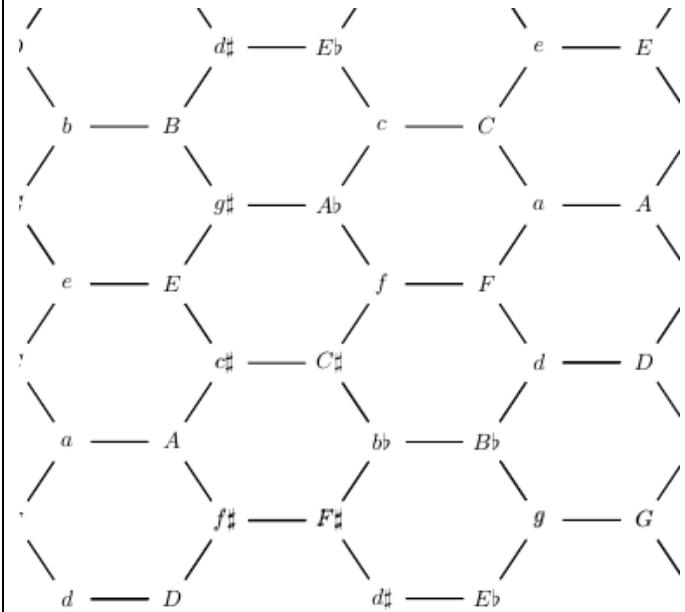
Imaginons de transformer chaque accord majeur dans un accord mineur et chaque accord mineur dans un accord majeur selon le principe de l'**harmonie négative** en choisissant donc comme **axe de symétrie** celui qui sépare de façon symétrique la **tonique et la dominante**. Dans la tonalité de *do* majeur, l'axe de symétrie est donc celui qui sépare de façon symétrique le C et le G (et donc transforme l'accord de *do* majeur dans l'accord de *do* mineur). Tout accord majeur du morceau sera donc transformé en mineur via cet axe de symétrie I₇. Le résultat c'est le négatif d'un morceau !



Cercles pour inverser les accords boucle n° 1 :



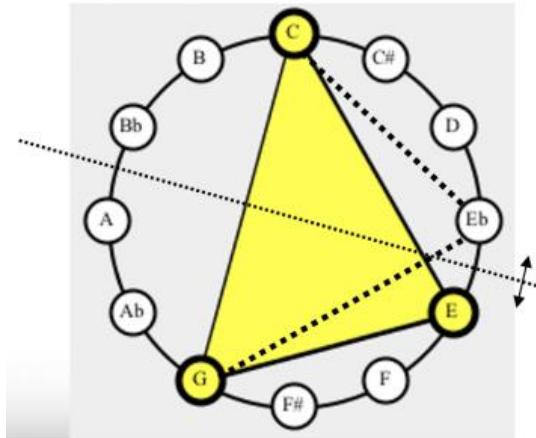
Boucle n° 1 en harmonie négative :



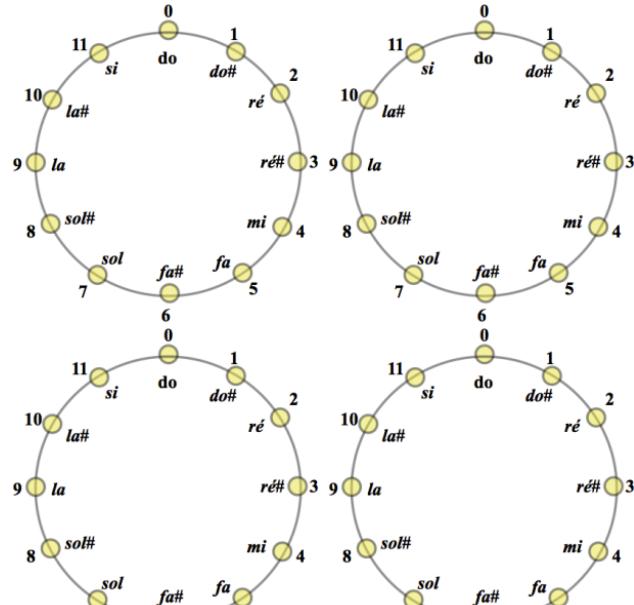
Fm → ... → Db → ... → Ab → ... → Eb

4. Une expérience d'harmonie négative

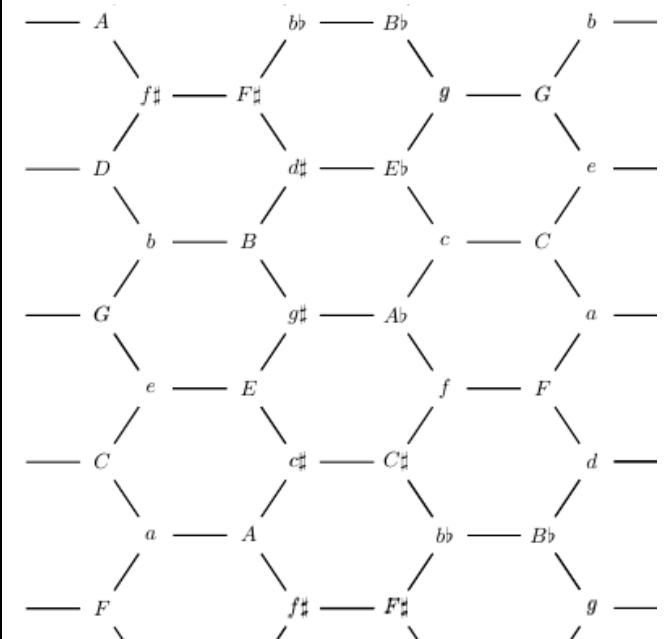
Imaginons de transformer chaque accord majeur dans un accord mineur et chaque accord mineur dans un accord majeur selon le principe de l'**harmonie négative** en choisissant donc comme **axe de symétrie celui qui sépare de façon symétrique la tonique et la dominante**. Dans la tonalité de *do* majeur, l'axe de symétrie est donc celui qui sépare de façon symétrique le C et le G (et donc transforme l'accord de *do* majeur dans l'accord de *do* mineur). Tout accord majeur du morceau sera donc transformé en mineur via cet axe de symétrie I₇. Le résultat c'est le négatif d'un morceau !



Cercles pour inverser les accords boucle n° 2 :



Boucle 2 en harmonie négative :



METAMORPHOSIS

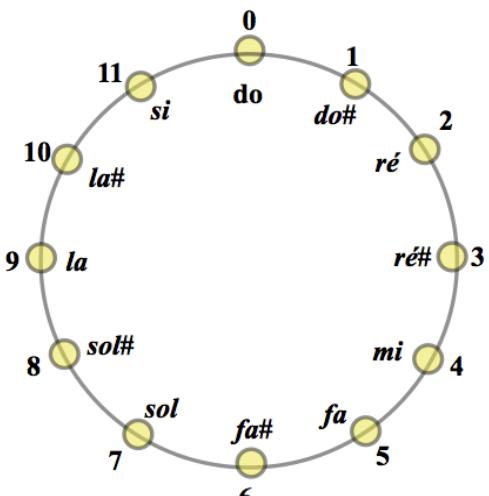
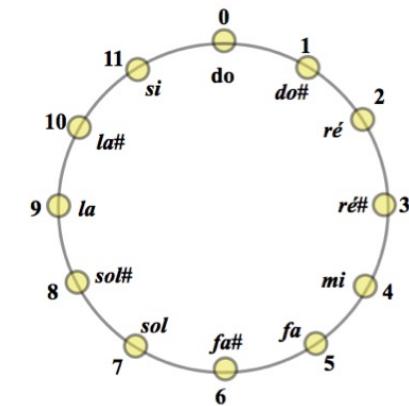
Metamorphosis One

Philip Glass

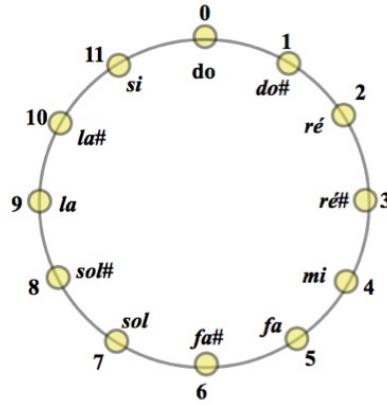
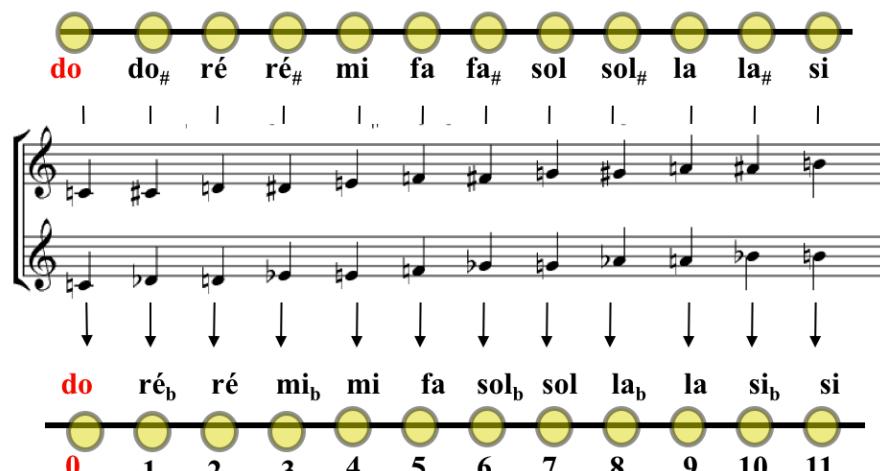
Moderato ($\text{♩} = 108\text{-}112$)

Pno.

mf



Représentation circulaire



Exercice 1. Après avoir identifié chaque accord, le représenter à l'aide de la représentation circulaire et mettre en évidence les symétries entre les différents accords (lorsqu'il y en a).

Exercice 1. Après avoir identifié chaque accord, le représenter à l'aide de la représentation circulaire et mettre en évidence les symétries entre les différents accords (lorsqu'il y en a).

METAMORPHOSIS

Metamorphosis One

Philip Glass

Moderato ($\text{♩} = 108-112$)

Pno.

Moderato ($\text{♩} = 108-112$)

44

Pno.

Accord Circles:

The diagram shows four sets of circular chord representations corresponding to the measures in the score. Each circle has 12 nodes labeled 0 through 11, representing the twelve notes of the chromatic scale. The nodes are arranged in a circle with 0 at the top. The chords from the score are mapped to specific nodes:

- Measure 1 (G major):** Nodes 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.
- Measure 2 (C major):** Nodes 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.
- Measure 3 (E major):** Nodes 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.
- Measure 4 (A major):** Nodes 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.
- Measure 5 (D major):** Nodes 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

Measure 6 (F# major): Nodes 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

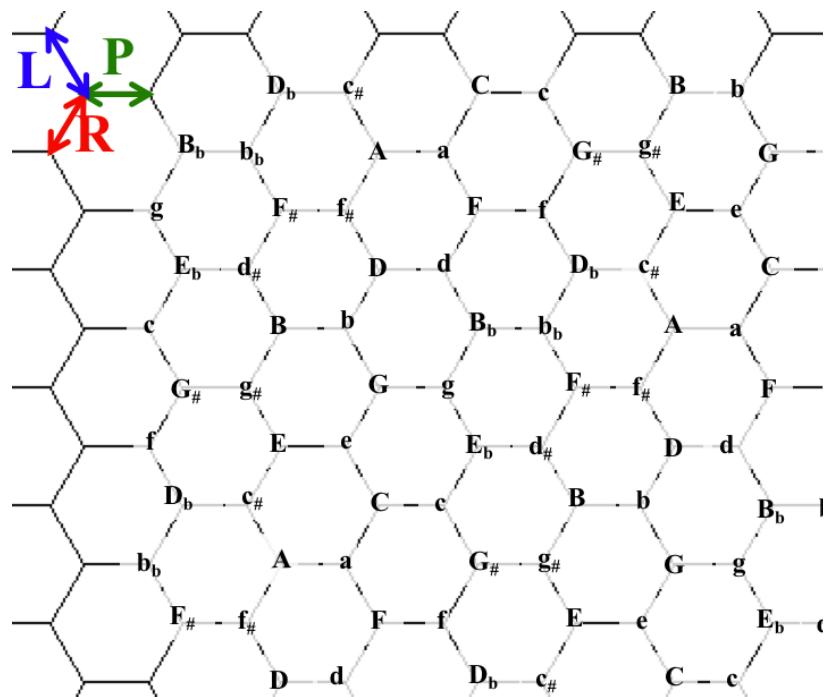
Measure 10 (B major): Nodes 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11.

Arrows: Arrows point from the musical score to the corresponding chord circles. A large arrow at the bottom indicates the progression from measure 6 to measure 10.

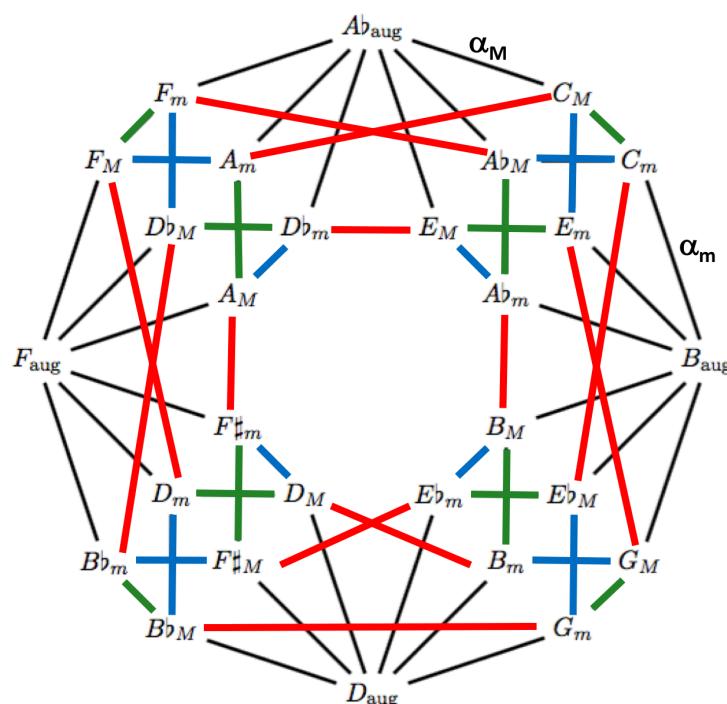
Deuxième partie

Toujours à partir du même extrait de la pièce, on vous proposer de montrer le potentiel harmonique des **deux premières mesures** à l'aide du *Tonnetz* et du *Tonnetz* enrichi avec les accords augmentés.

Pour rappel dans le *Tonnetz* des accords majeurs et mineurs, les noeuds des hexagones correspondent à des accords majeurs (C, D, F_#, A_b etc.) et mineurs (c, d, f_#, a_b etc.) et les arrêts correspondent aux trois opérateurs : P comme "parallèle" (qui transforme l'accord de do majeur en do mineur, i.e. C en c) ; R comme "relatif" (qui transforme l'accord de do majeur en la mineur, i.e. C en a) ; L comme "leading-tone" (qui transforme l'accord de do majeur en mi mineur, i.e. C en e). Dans le *Tonnetz* enrichi (ou "Cube Dance Tonnetz") on indiquera avec α_M ou α_m l'application qui transforme respectivement un accord majeur (C_M, D_M, F_{#M}, A_{bM} etc.) ou un accord mineur (C_m, D_m, F_{#m}, A_{bm} etc.) dans l'accord augmenté ayant deux notes en commun avec celui-ci.

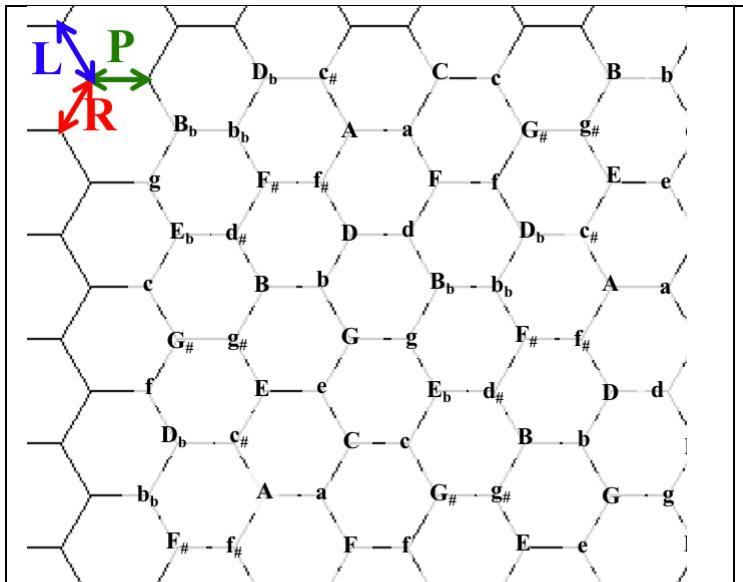


Le *Tonnetz* et les trois opérateurs P, L et R



Le "Cube Dance Tonnetz"

Exercice 2. A partir des **deux premiers accords** (différents i.e. des deux premières mesures) de l'extrait précédent, trouver les deux cycles de **longueur 6** dans le *Tonnetz*, i.e. les deux cycles du type : $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5 \rightarrow A_6 \rightarrow A_1$ où les flèches sont des transformations élémentaires P, L, R du *Tonnetz* (et les accords A_i sont tous différents).



Suite d'accords et d'opérateurs P, L, R décrivant les deux cycles de longueur 6 obtenus à partir des deux premiers accords A_1 et A_2 de l'extrait de Philip Glass (avec $A_1 \neq A_2$).

Cycle 1 :

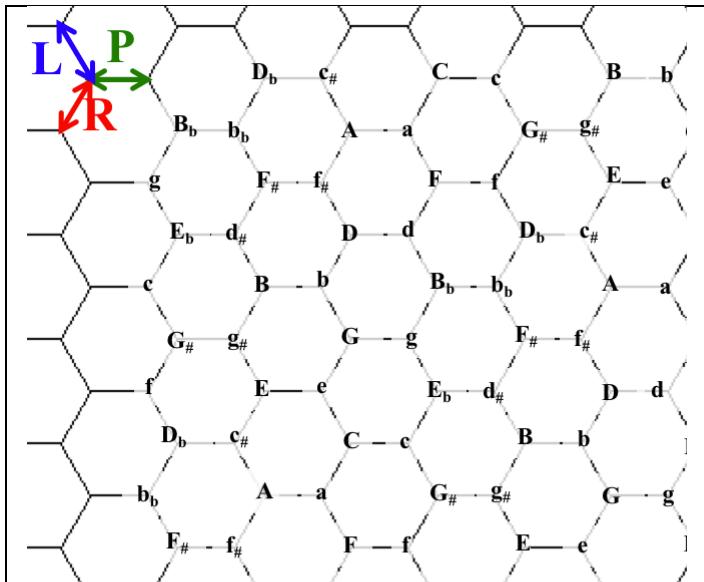
Cycle 2 :

Moderato ($\text{♩} = 108-112$)

Pno.

Two hexagonal graphs representing the Tonnetz. Each graph has 12 nodes labeled 0 through 11. Nodes 0, 3, 6, 9, and 12 are at the corners of the hexagon. Nodes 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, and 11 are at the midpoints of the edges. The nodes are colored yellow. The first graph shows a path starting at node 0, moving to 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 0. The second graph shows a path starting at node 0, moving to 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 0. Arrows indicate the direction of the path. Below the graphs is a large black arrow labeled I_6 .

Exercice 2. A partir des **deux premiers accords** (différents i.e. des deux premières mesures) de l'extrait précédent, trouver les deux cycles de **longueur 6** dans le *Tonnetz*, i.e. les deux cycles du type : $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5 \rightarrow A_6 \rightarrow A_1$ où les flèches sont des transformations élémentaires P, L, R du *Tonnetz* (et les accords A_i sont tous différents).



Suite d'accords et d'opérateurs P, L, R décrivant les deux cycles de longueur 6 obtenus à partir des deux premiers accords A_1 et A_2 de l'extrait de Philip Glass (avec $A_1 \neq A_2$).

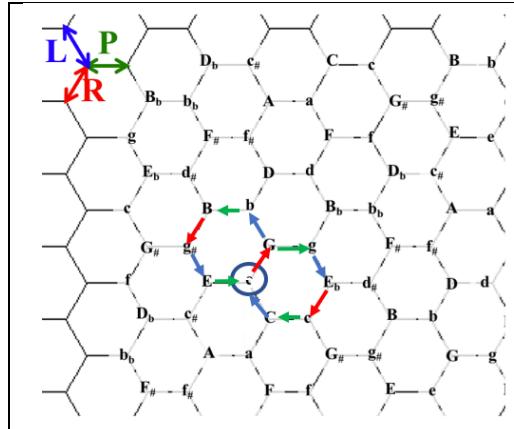
Cycle 1 :

Cycle 2 :

Moderato ($\text{♩} = 108-112$)

Pno.

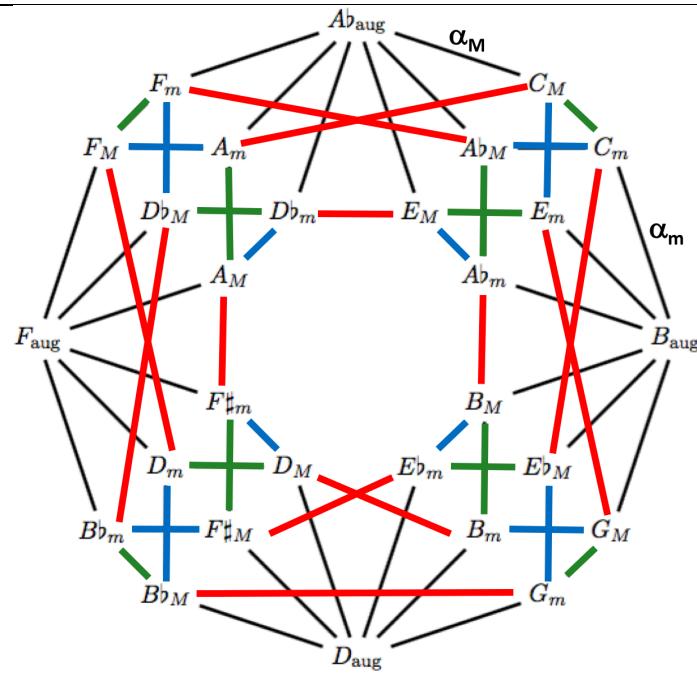
44



Cycle 1 :
 $e \xrightarrow{R} G \xrightarrow{P} g \xrightarrow{L} E_b \xrightarrow{R} c \xrightarrow{P} C \xrightarrow{L} e$

Cycle 2 :
 $e \xrightarrow{R} G \xrightarrow{L} b \xrightarrow{P} B \xrightarrow{R} g\# \xrightarrow{L} E \xrightarrow{P} e$

Exercice 3. Toujours à partir des deux premiers accords de l'extrait de Philip Glass, trouver les quatre cycles de **longueur 5** dans le *Tonnetz* enrichi, i.e. les autres cycles du type : $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5 \rightarrow A_1$ où cette fois les flèches sont des transformations élémentaires P, L, R, α_M et α_m du *Tonnetz* enrichi (et les accords A_i sont tous différents).



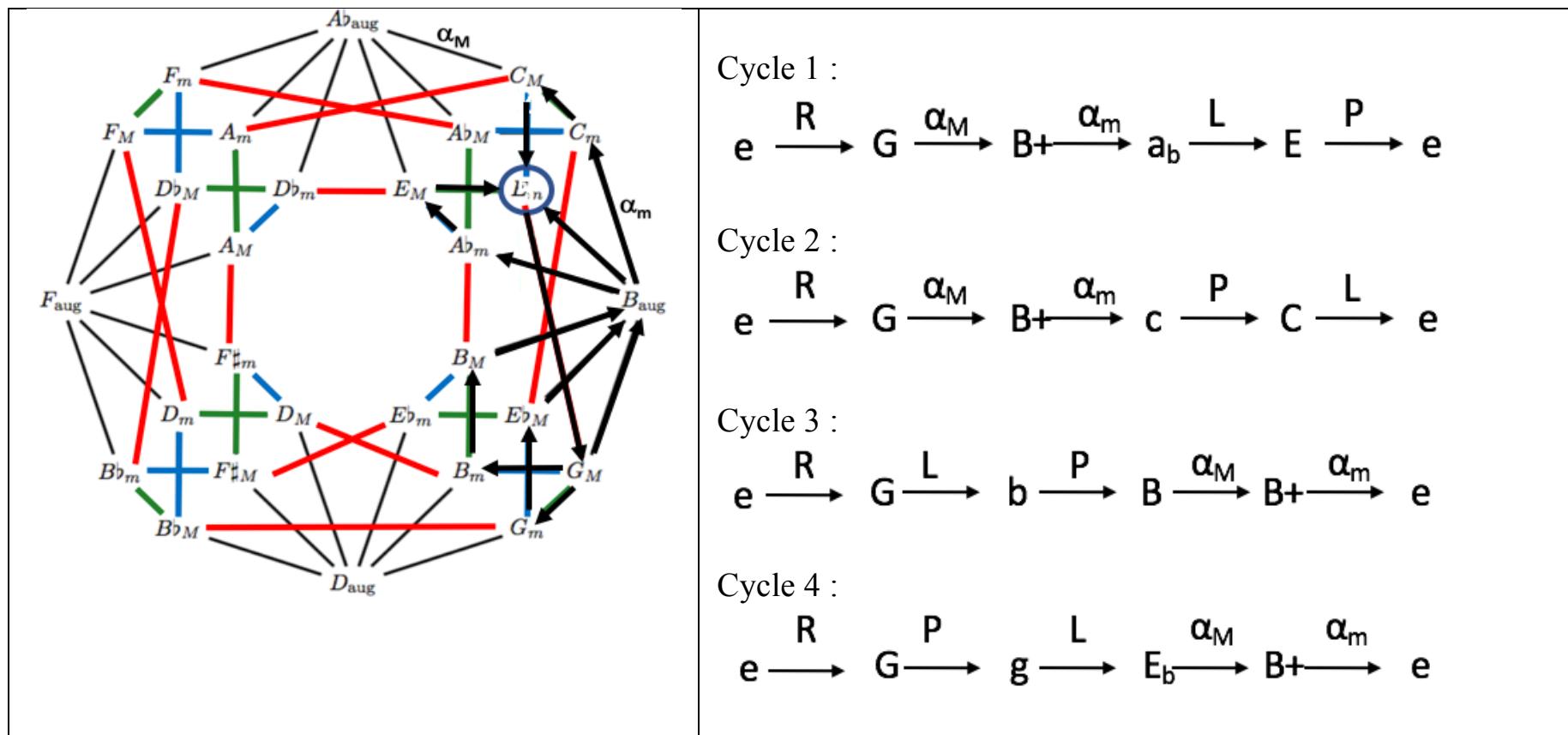
Cycle 1 :

Cycle 2 :

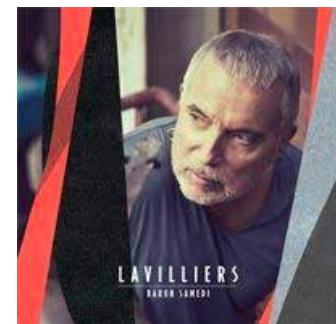
Cycle 3 :

Cycle 4 :

Exercice 3. Toujours à partir des deux premiers accords de l'extrait de Philip Glass, trouver les quatre cycles de **longueur 5** dans le *Tonnetz* enrichi, i.e. les autres cycles du type : $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5 \rightarrow A_1$ où cette fois les flèches sont des transformations élémentaires P, L, R, α_M et α_m du *Tonnetz* enrichi (et les accords A_i sont tous différents).



Deuxième partie. On vous propose d'analyser deux boucles harmoniques qui sont à la base du morceau « Scorpion » de Bernard Lavilliers, adaptation d'un poème de Nâzim Hikmet (1901-1936). Les deux boucles sont données dans l'extrait de partition respectivement en Fig. 2a et 2b.



1. Après avoir identifié chaque note, représenter chaque accord des deux boucles à l'aide des représentations circulaires en Fig. 1a et Fig. 1b. Pour déchiffrer les extraits de la partition, vous pouvez vous appuyer éventuellement sur l'aide-mémoire en Fig. 3.

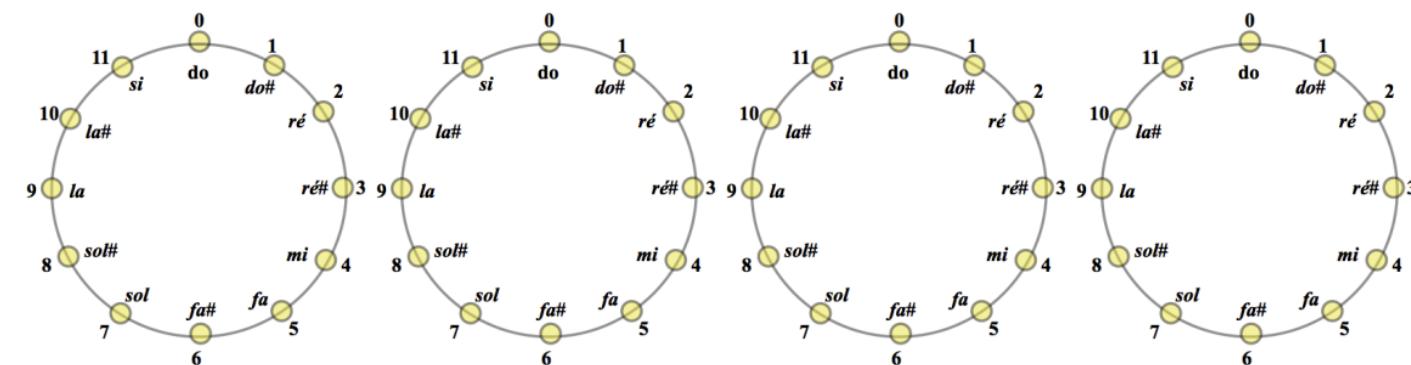


Fig. 1a : Représentations circulaires vous permettant de dessiner les quatre accords de la première boucle

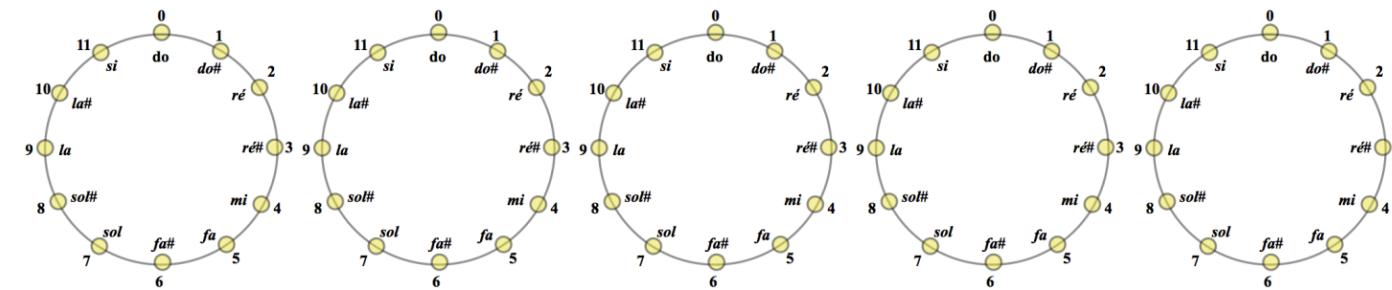


Fig. 1b : Représentations circulaires vous permettant de dessiner les cinq accords de la deuxième boucle harmonique

A musical score extract consisting of two staves. The top staff is in treble clef and 2/4 time, with a key signature of one flat. The bottom staff is in bass clef and 2/4 time, with a key signature of one sharp. The score shows two harmonic loops: 2a (four measures) and 2b (five measures). The harmonic analysis from Fig. 1a and 1b is applied here to identify the chords.

2. Représenter les deux progressions harmoniques précédentes comme des trajectoires spatiales dans le *Tonnetz* des accords majeurs et mineurs en Fig. 2a et Fig. 2b (à droite) et indiquer quelles sont les symétries (les transpositions T_k et les inversions I_h) ainsi que les transformations musicales néo-riemannniennes (R, P, L et leur composition) qui permettent de passer d'un accord à l'autre de la boucle harmonique. Utilisez pour cela les flèches supérieures pour indiquer les transformations T_k et I_h et les flèches inférieures pour indiquer les transformations néo-riemannniennes. Pour rappel dans le *Tonnetz* des accords majeurs et mineurs, les nœuds des hexagones correspondent à des accords majeurs (C, D, F $\#$, A b etc.) et mineurs (indiqués parfois avec des minuscules c, d, f $\#$, a b etc. et parfois avec C $_m$, D $_m$, F $\#_m$, Ab $_m$, etc.) et les arrêts correspondent aux trois opérateurs : P comme "parallèle" (qui transforme l'accord de do majeur en do mineur, i.e. C en c) ; R comme "relatif" (qui transforme l'accord de do majeur en la mineur, i.e. C en a) ; L comme "leading-tone" (qui transforme l'accord de do majeur en mi mineur, i.e. C en e). Essayez de simplifier l'écriture en utilisant les opérations composées du type SLIDE (S=LPR), NEBENVERWANDT (N=LRP) et X=RLP.

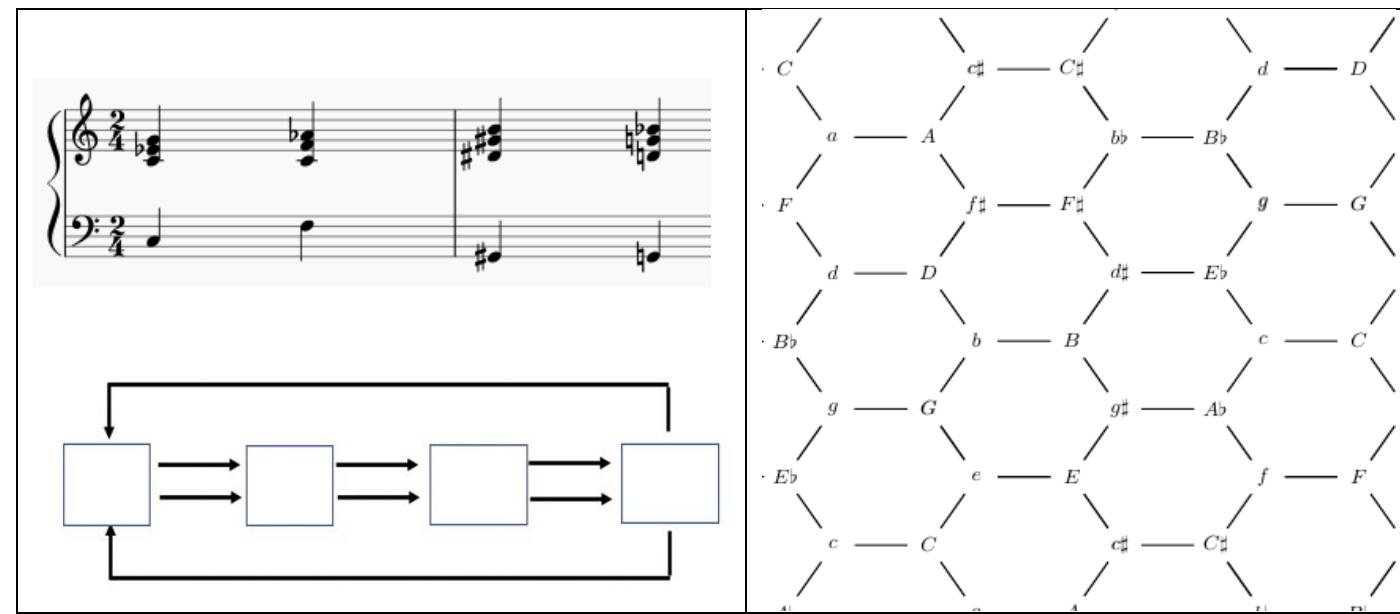
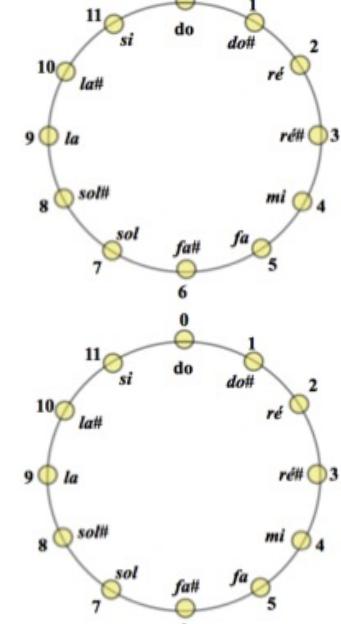
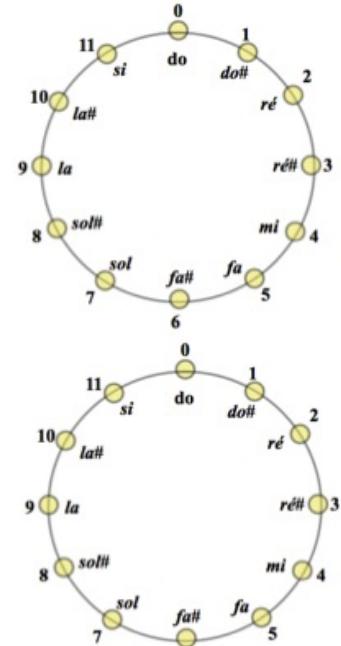


Fig. 2a : La progression harmonique (à gauche) et le Tonnetz des accords majeurs et mineurs (à droite)

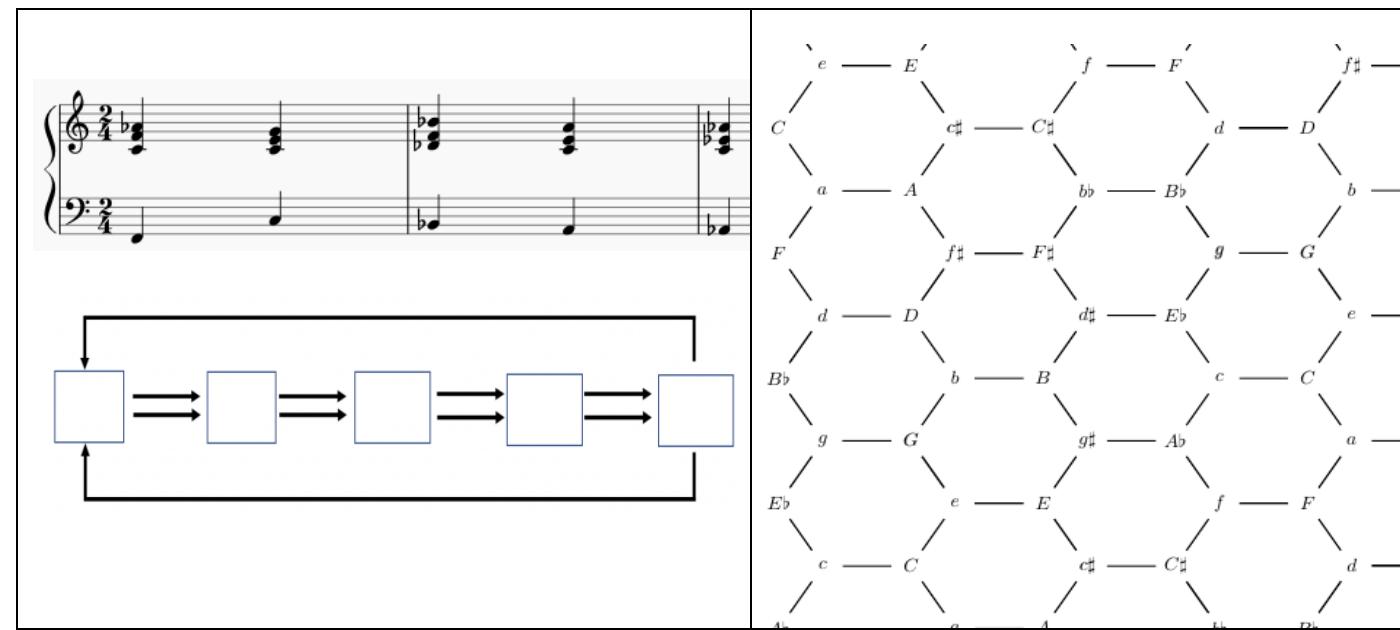


Fig. 2b : La progression harmonique (à gauche) et le Tonnetz des accords majeurs et mineurs (à droite)

LPR = RPL = S = Slide

LRP = PRL = N = Nebenverwandt

RLP = PLR = X

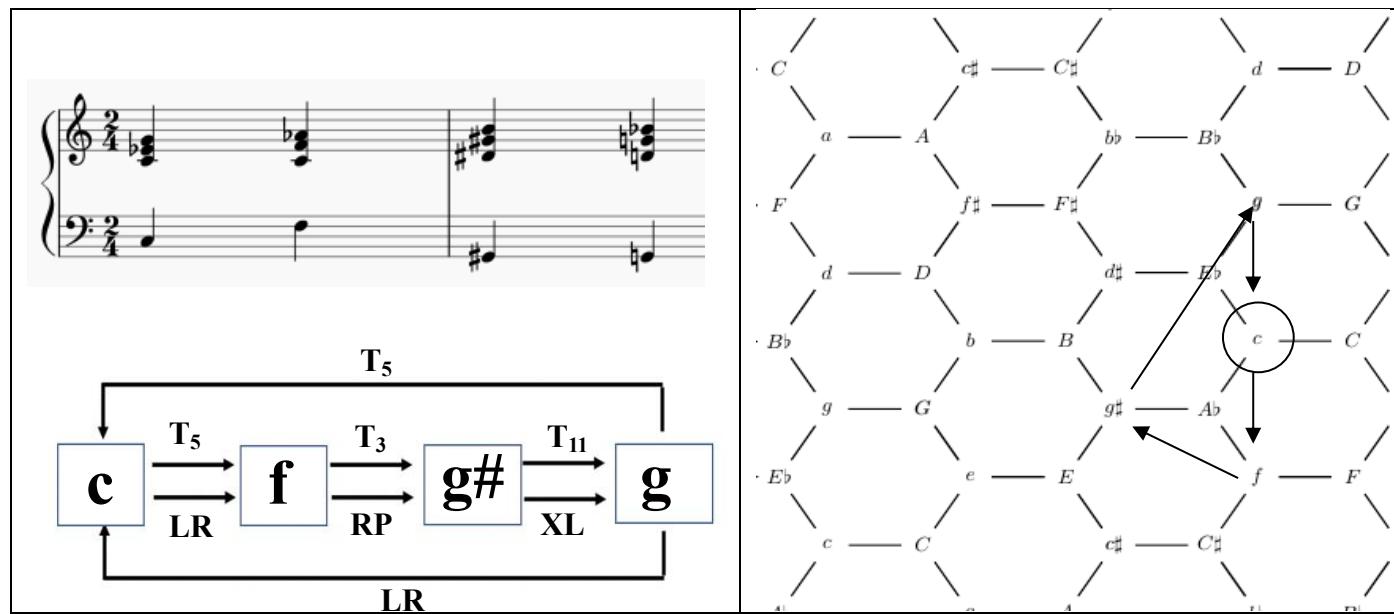
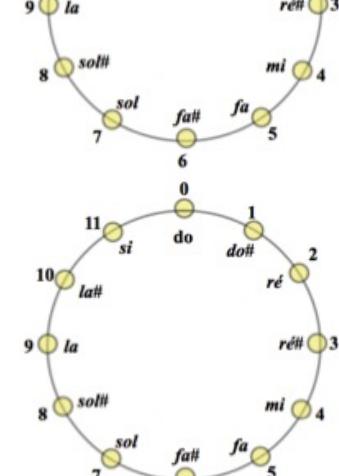
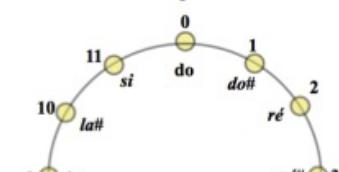
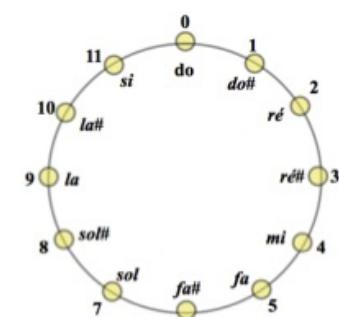


Fig. 2a : La progression harmonique (à gauche) et le Tonnetz des accords majeurs et mineurs (à droite)

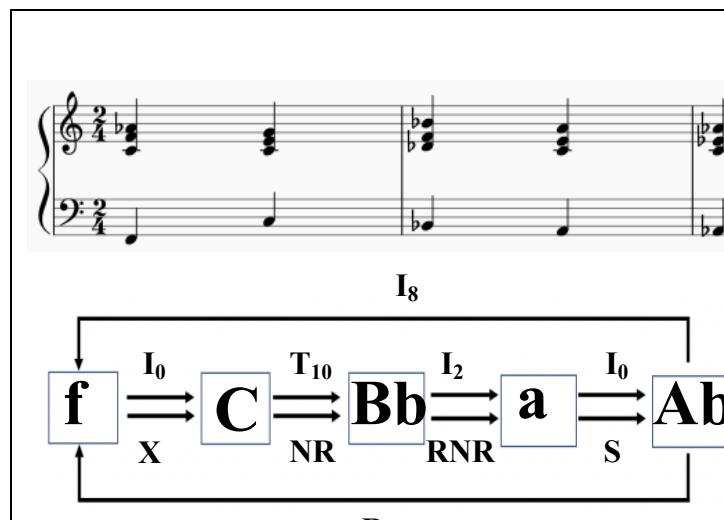
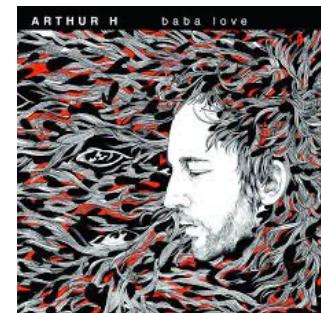


Fig. 2b : La progression harmonique (à gauche) et le Tonnetz des accords majeurs et mineurs (à droite)



Deuxième partie. On vous propose d'analyser une boucle harmonique qui est à la base de la chanson "Prendre corps" d'Arthur H (album *Baba love*, 2011). La boucle - donnée dans l'extrait de partition en Fig. 2 (à gauche) - constitue une progression harmonique comportant quatre accord (le cinquième étant égal à l'accord de départ).

1. Après avoir identifié chaque note, représenter chaque accord à l'aide de la représentation circulaire (Fig. 1). Pour déchiffrer les extraits de la partition, s'appuyer éventuellement sur l'aide-mémoire en Fig. 2: **4**

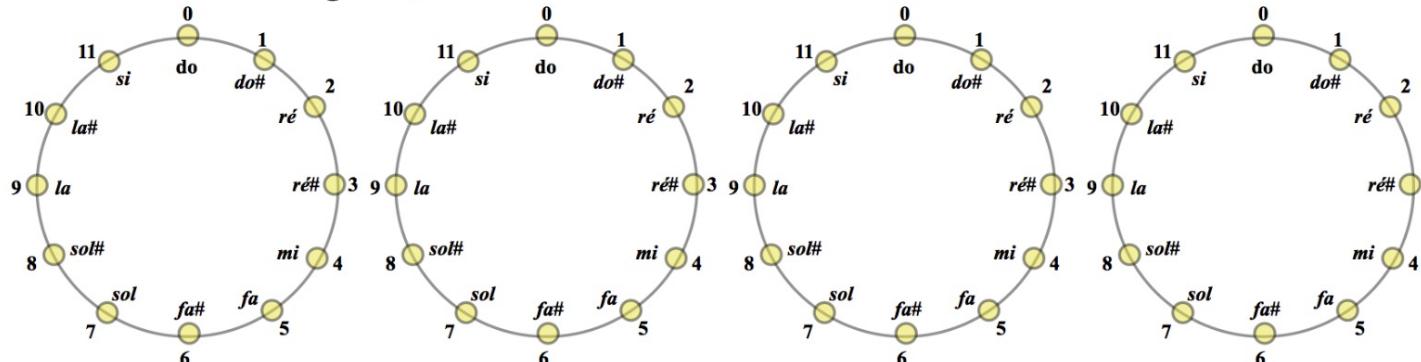


Fig. 1 : Représentations circulaires vous permettant de dessiner les quatre accords de la boucle harmonique

2. Représenter la progression harmonique comme une trajectoire spatiale dans le *Tonnetz* des accords majeurs et mineurs en Fig **2** (à droite) et indiquer quelles sont les symétries (les transpositions T_k et les inversions I_h) ainsi que les transformations musicales néo-riemannniennes (R , P , L et leur composition) qui permettent de passer d'un accord à l'autre de la boucle harmonique. Pour rappel dans le *Tonnetz* des accords majeurs et mineurs, les nœuds des hexagones correspondent à des accords majeurs (C, D, F $\#$, A b etc.) et mineurs (indiqués parfois avec des minuscules c, d, f $\#$, a b etc. et parfois avec C $_m$, D $_m$, F $\#_m$, Ab $_m$, etc.) et les arrêts correspondent aux trois opérateurs : P comme "parallèle" (qui transforme l'accord de do majeur en do mineur, i.e. C en c) ; R comme "relatif" (qui transforme l'accord de do majeur en la mineur, i.e. C en a) ; L comme "leading-tone" (qui transforme l'accord de do majeur en mi mineur, i.e. C en e). Pour vous faciliter la tâche, le premier accord et la première transformation sont donnés. A vous de compléter les parties restantes !

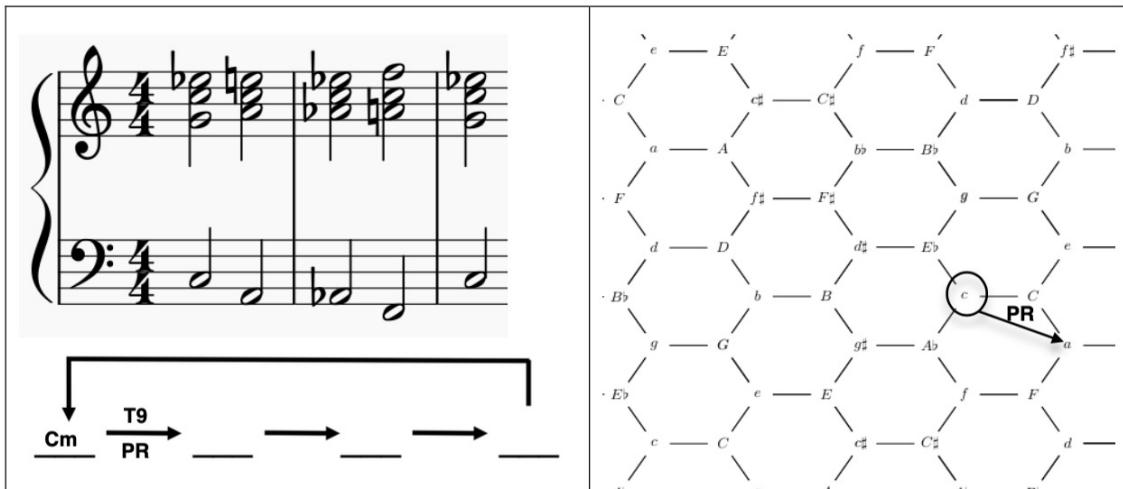
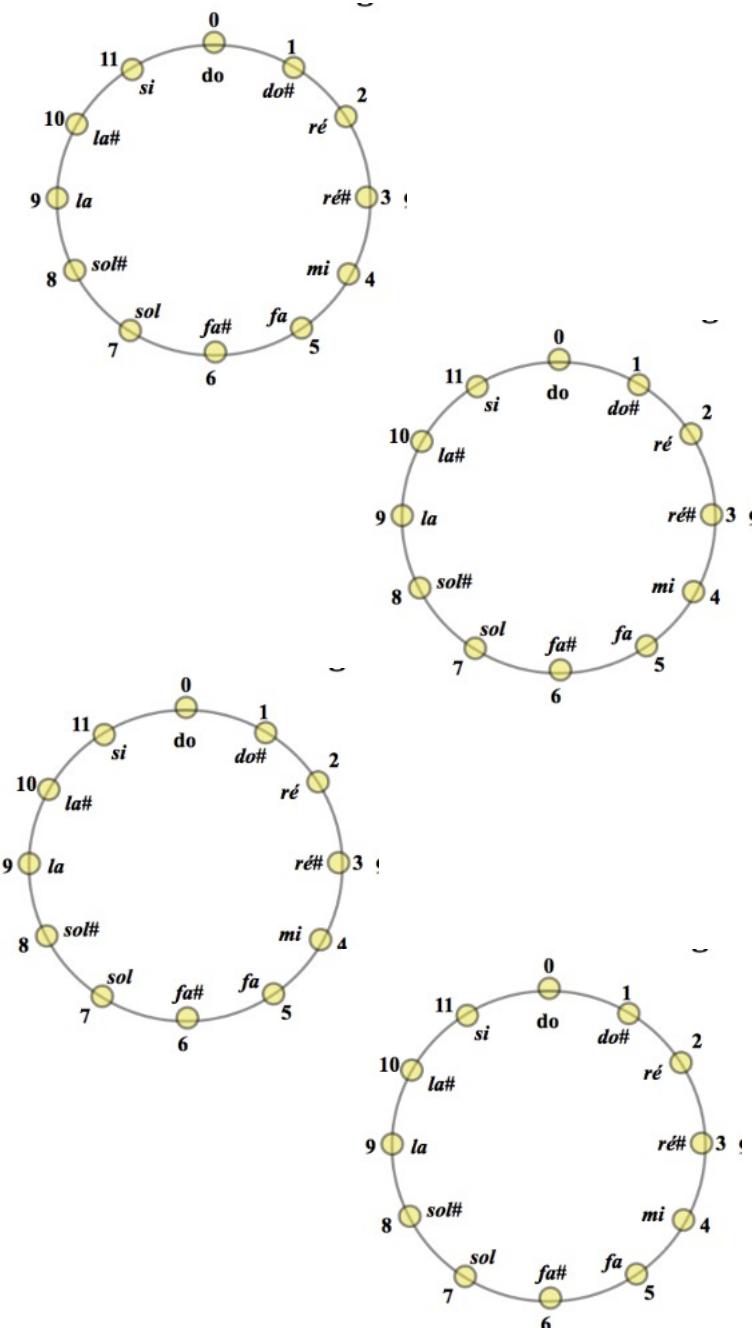
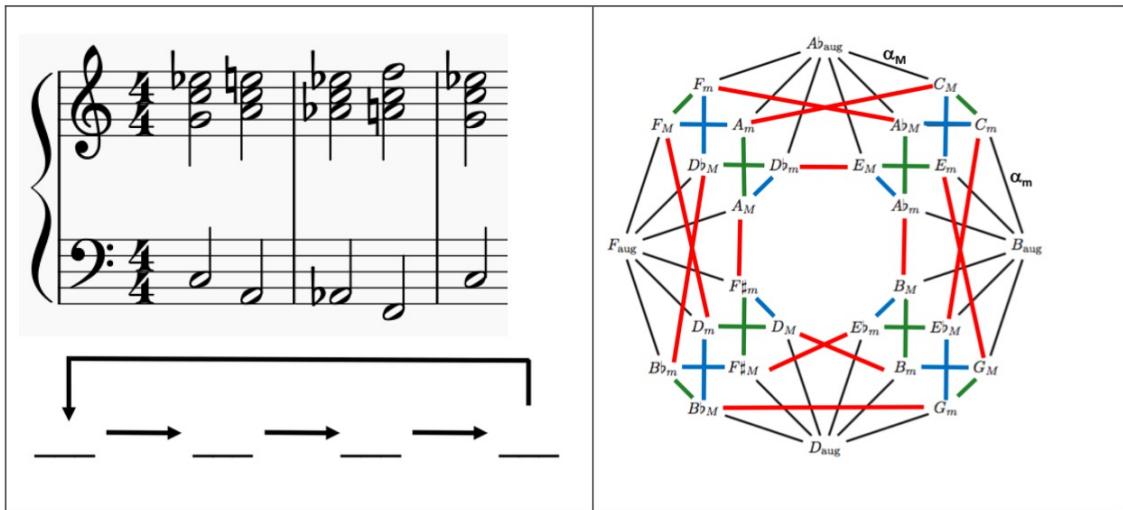


Fig. 2 : La progression harmonique (à gauche) et le Tonnetz des accords majeurs et mineurs (à droite)

2. Faire la même chose en dessinant la trajectoire sur le Tonnetz enrichi (Fig. 3) et en privilégiant le passage par les accords augmentés lors que la distance entre deux accords est plus courte (en termes de nombre de transformations) par rapport à celle utilisant uniquement les accords majeurs et mineurs. Pour rappel, dans le Tonnetz enrichi (ou "Cube Dance Tonnetz") on indiquera avec α_M ou α_m l'application qui transforme respectivement un accord majeur (C_M , D_M , $F_{\#M}$, A_{Bm} etc.) ou un accord mineur (C_m , D_m , $F_{\#m}$, A_{bm} etc.) dans l'accord augmenté ayant deux notes en commun avec celui-ci. Indiquer en bas de la partition en Fig. 3 les nouvelles transformations (R , P , L , α_M , α_m et leur compositions) permettant de représenter la boucle harmonique constituée des mêmes accords précédents (pas besoin cette fois de réécrire les transpositions T_k et les inversions I_h correspondantes).



LRP = N = Nebenverwandt

LPR = S = Slide

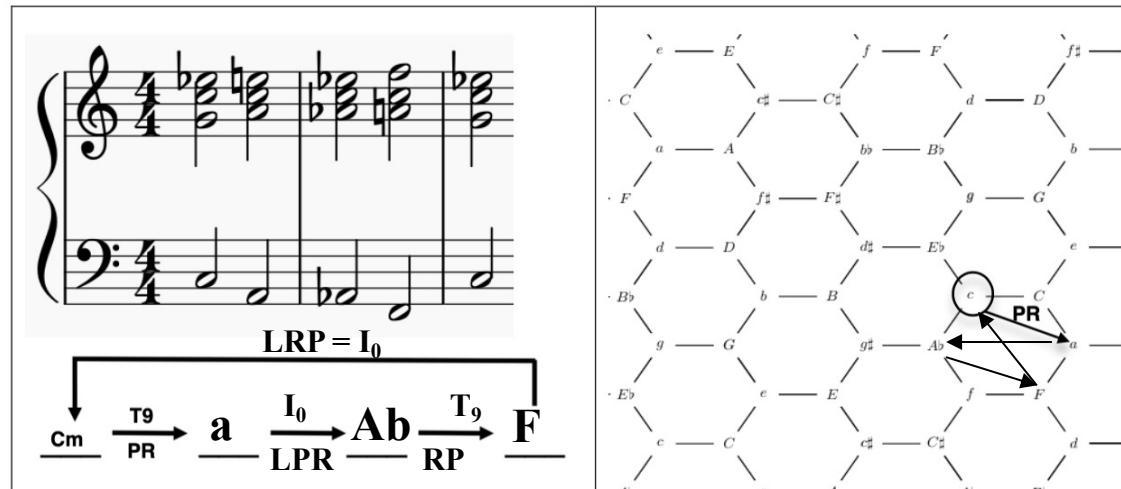
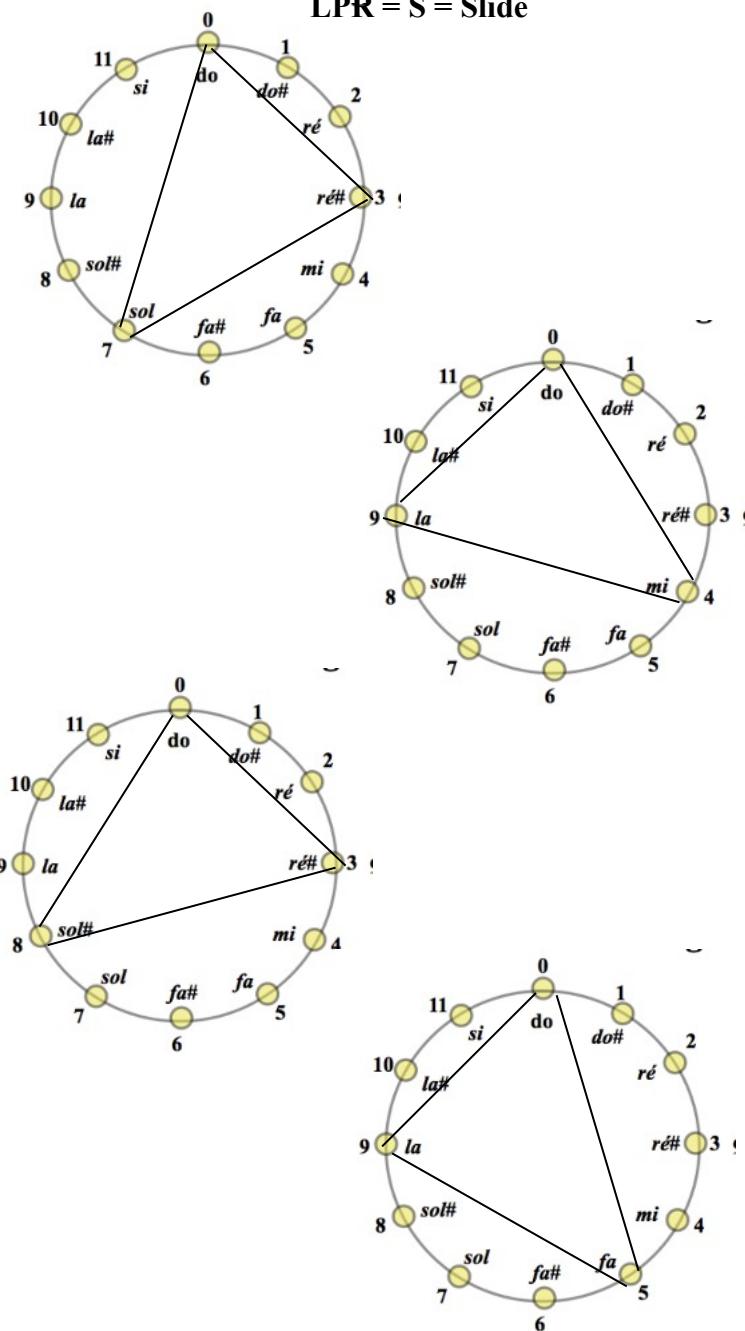
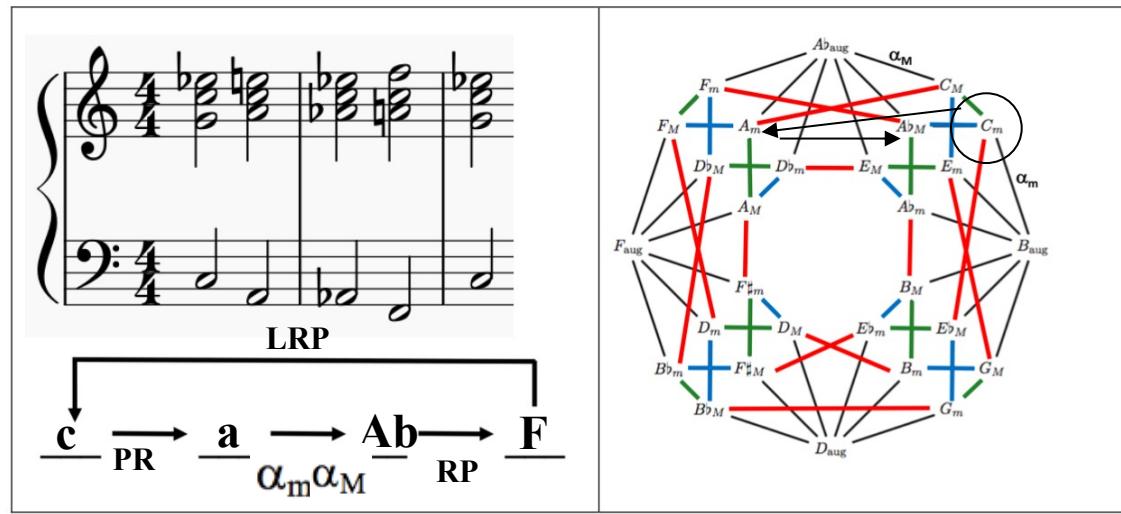


Fig. 2 : La progression harmonique (à gauche) et le Tonnetz des accords majeurs et mineurs (à droite)

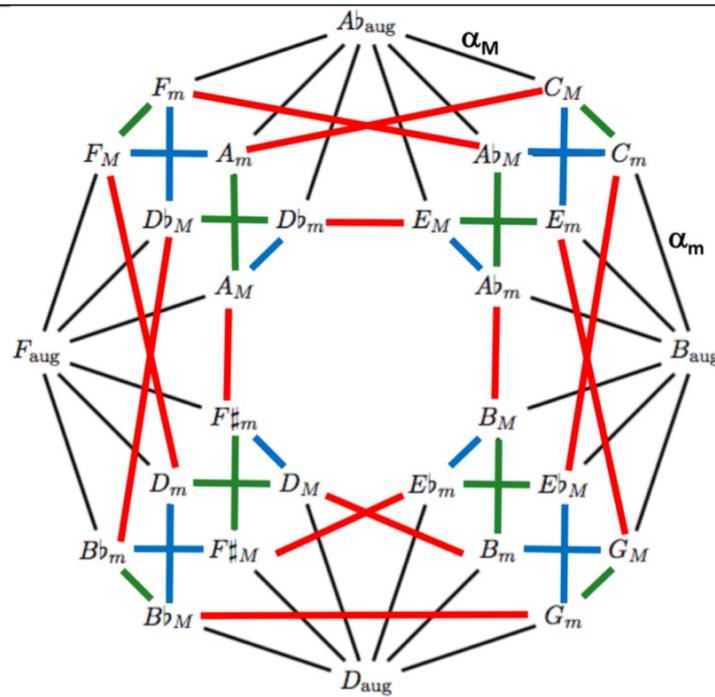
2. Faire la même chose en dessinant la trajectoire sur le Tonnetz enrichi (Fig. 3) et en privilégiant le passage par les accords augmentés lors que la distance entre deux accords est plus courte (en termes de nombre de transformations) par rapport à celle utilisant uniquement les accords majeurs et mineurs. Pour rappel, dans le Tonnetz enrichi (ou "Cube Dance Tonnetz") on indiquera avec α_M ou α_m l'application qui transforme respectivement un accord majeur (C_M , D_M , $F_{\#M}$, A_{bM} etc.) ou un accord mineur (C_m , D_m , $F_{\#m}$, A_{bm} etc.) dans l'accord augmenté ayant deux notes en commun avec celui-ci. Indiquer en bas de la partition en Fig. 3 les nouvelles transformations (R , P , L , α_M , α_m et leur compositions) permettant de représenter la boucle harmonique constituée des mêmes accords précédents (pas besoin cette fois de réécrire les transpositions T_k et les inversions I_h correspondantes).



Analyze the progression in the enriched Cube Dance space (by showing the path and the underlying transformations)



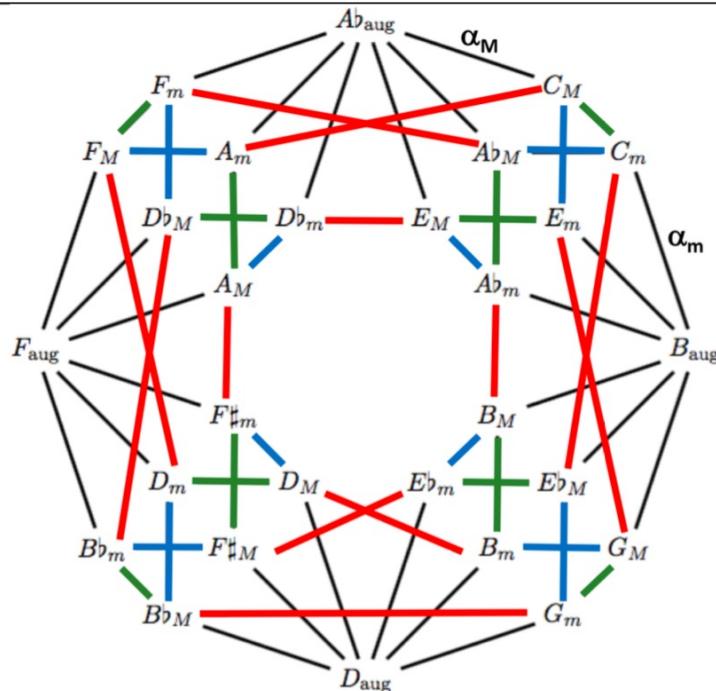
=



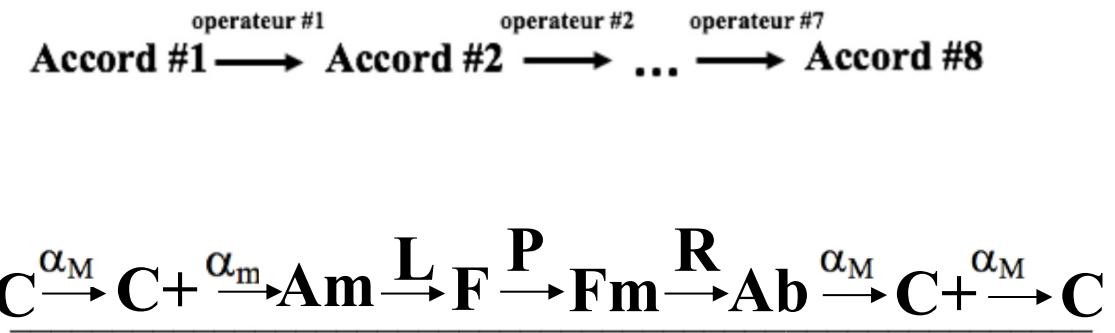
Suite d'accords et d'opérateurs P, L, R, α_M ou α_m , sur le modèle :

opérateur #1 opérateur #2 opérateur #7
Accord #1 → **Accord #2** → ... → **Accord #8**

Analyze the progression in the enriched Cube Dance space (by showing the path and the underlying transformations)

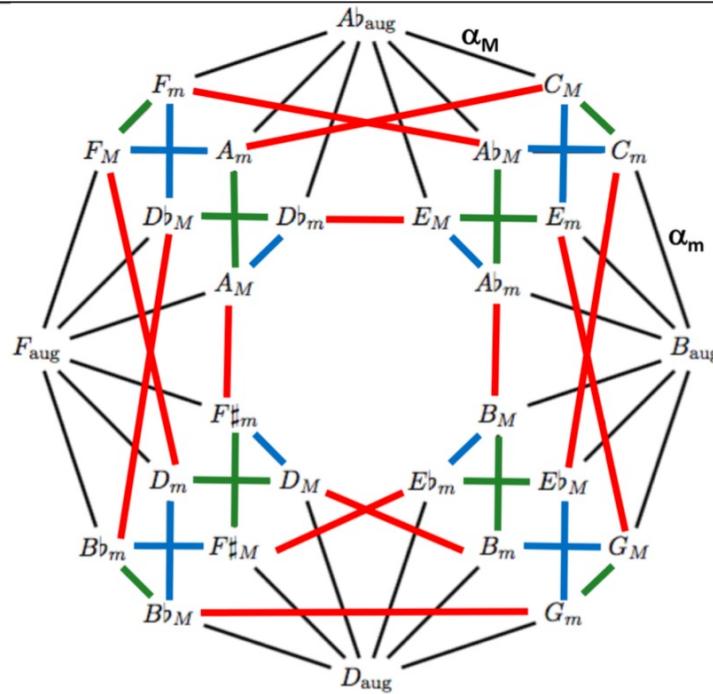


Suite d'accords et d'opérateurs P, L, R, α_M ou α_m , sur le modèle :

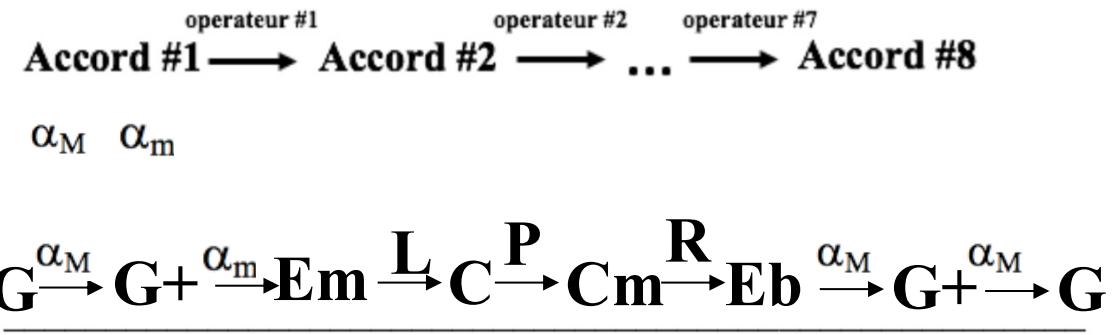


Remarque : $C+ = C_{aug} = Ab_{aug} = E_{aug}$

Analyze the progression in the enriched Cube Dance space (by showing the path and the underlying transformations)



Suite d'accords et d'opérateurs P, L, R, α_M ou α_m , sur le modèle :

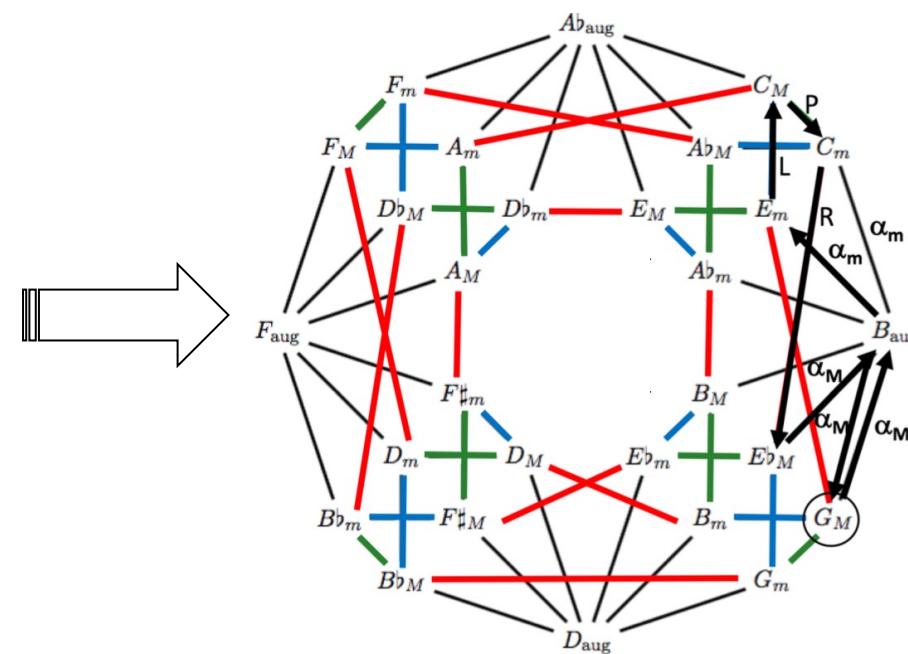
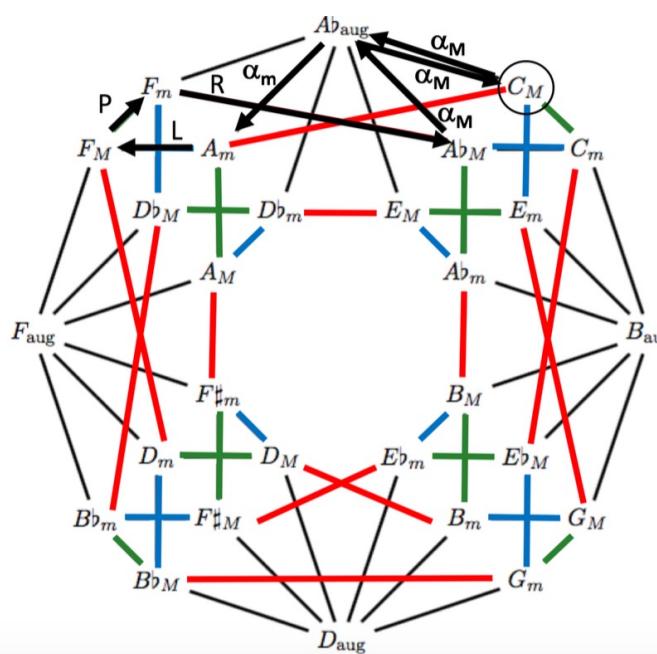


Remarque : $G+ = G_{aug} = B_{aug} = Eb_{aug}$

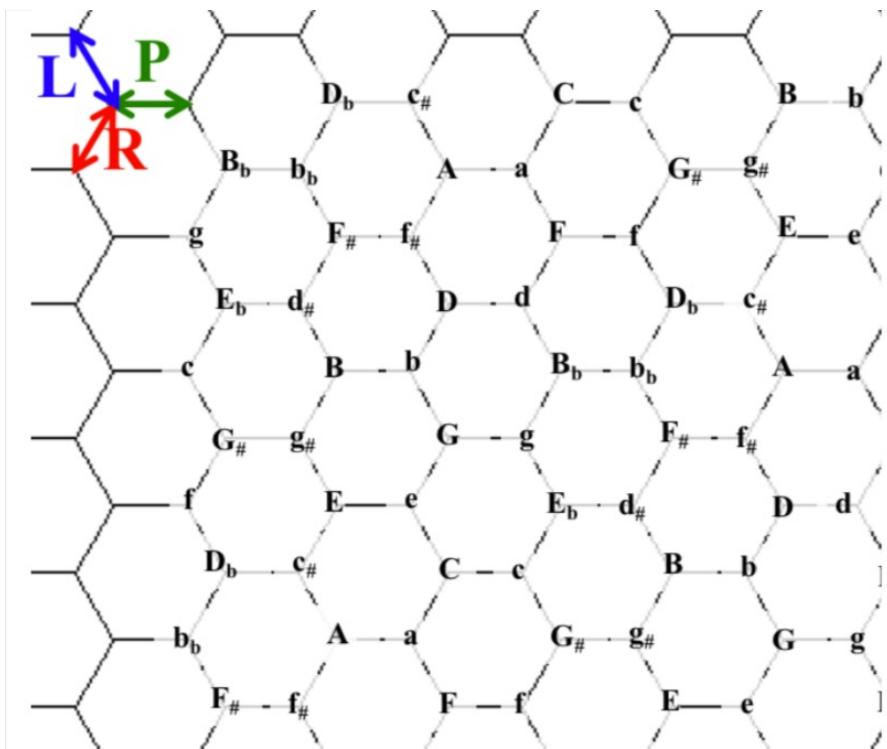
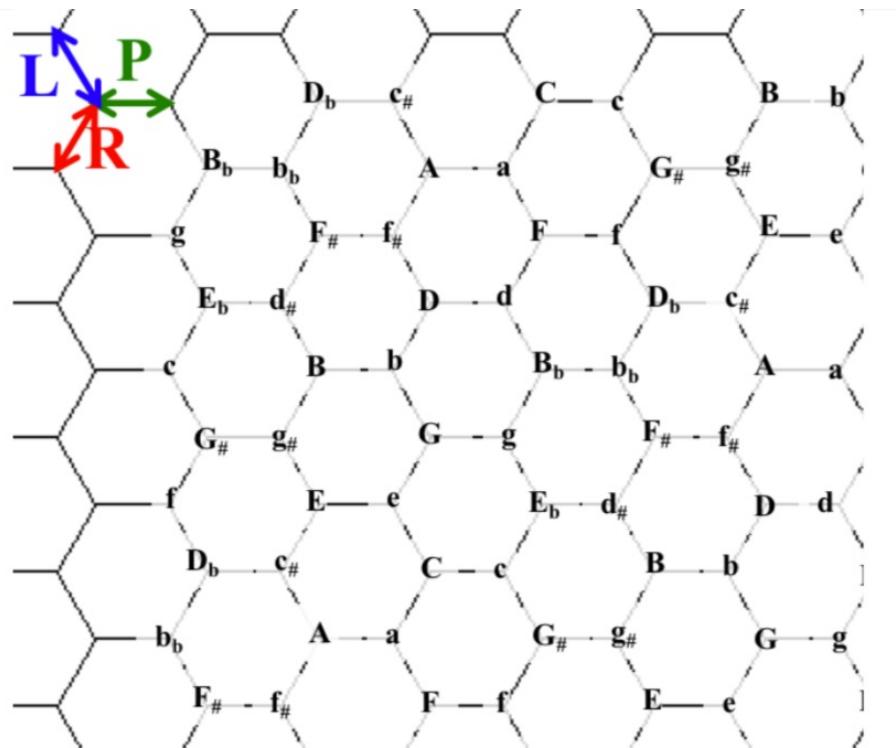
Analyze the progression in the enriched Cube Dance space (by showing the path and the underlying transformations)



T_7



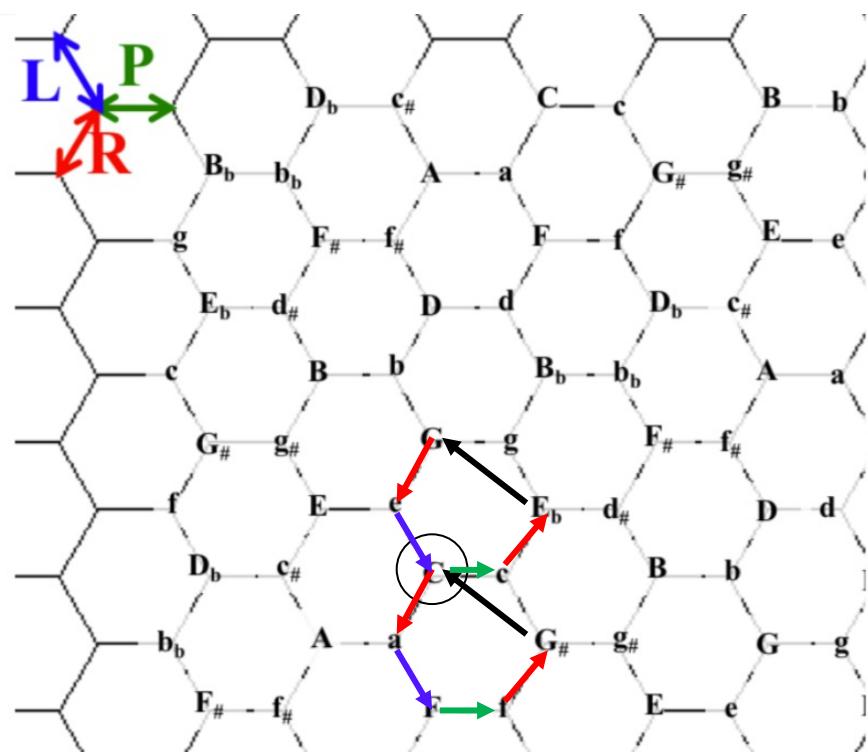
Analyze the two harmonic loops via the Tonnetz



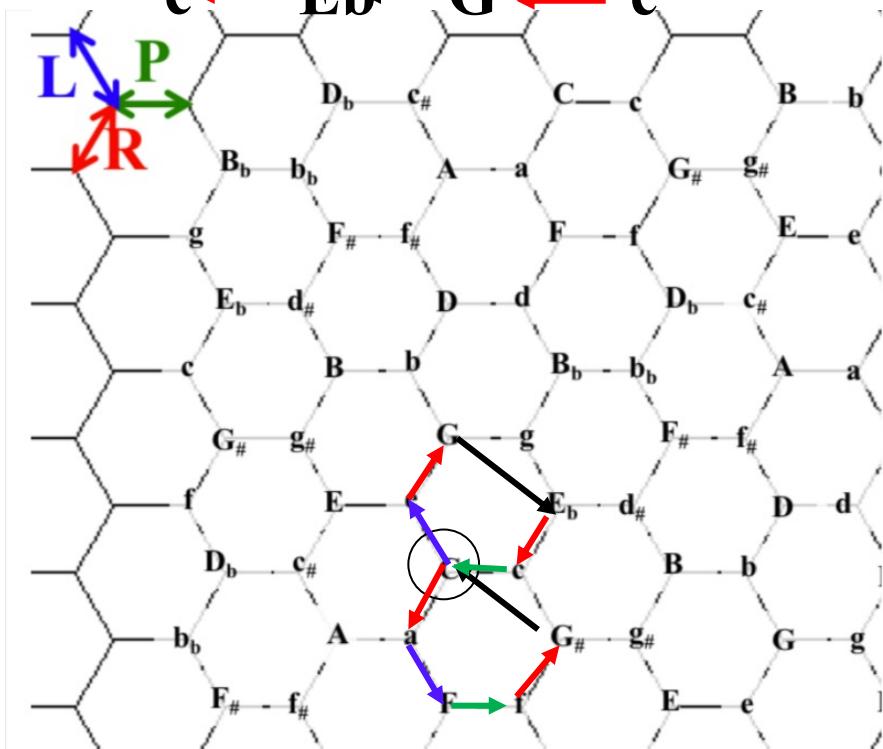
Analyze the two harmonic loops via the Tonnetz



C \xrightarrow{R} a \xrightarrow{L} F \xrightarrow{P} f \xrightarrow{R} Ab \xrightarrow{LP} C
 e \xleftarrow{L} \xleftarrow{R} G \xleftarrow{LP} Eb \xleftarrow{R} c \xrightarrow{P}

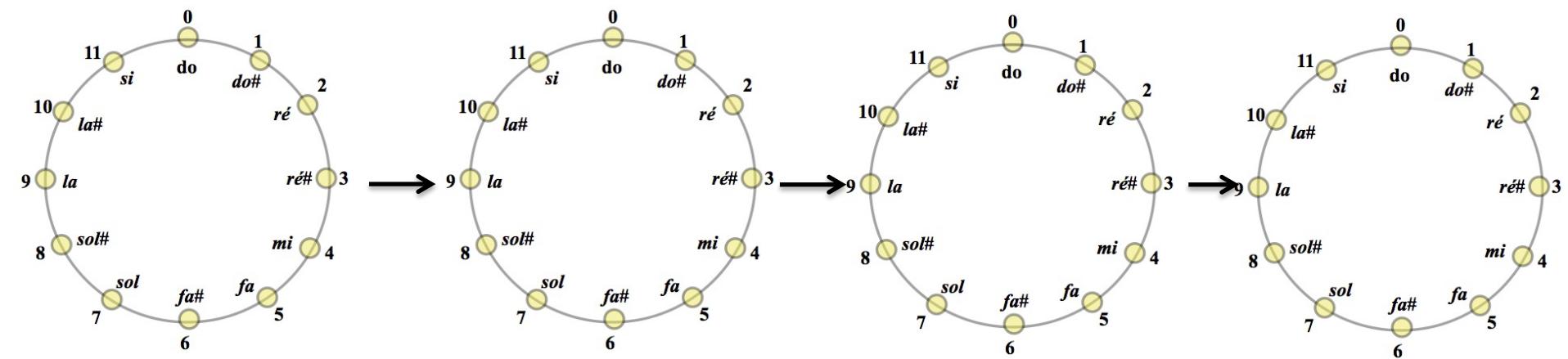


C \xrightarrow{R} a \xrightarrow{L} F \xrightarrow{P} f \xrightarrow{R} Ab \xrightarrow{LP} C
 c \xleftarrow{P} \xleftarrow{R} Eb \xleftarrow{LP} G \xleftarrow{R} e \xrightarrow{L}

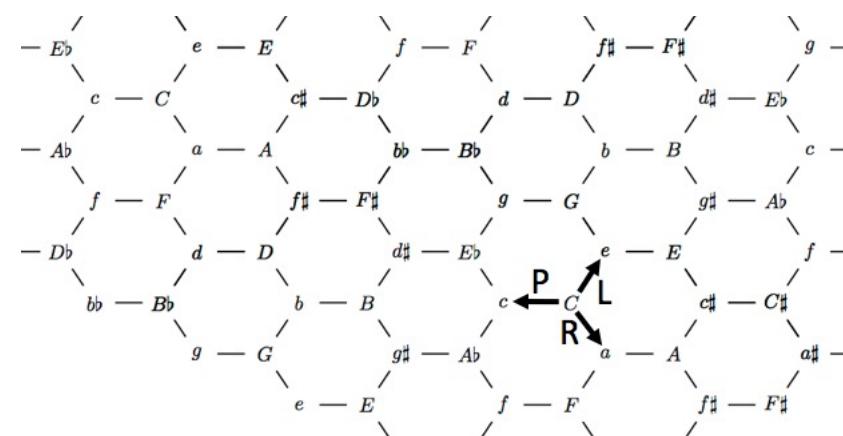
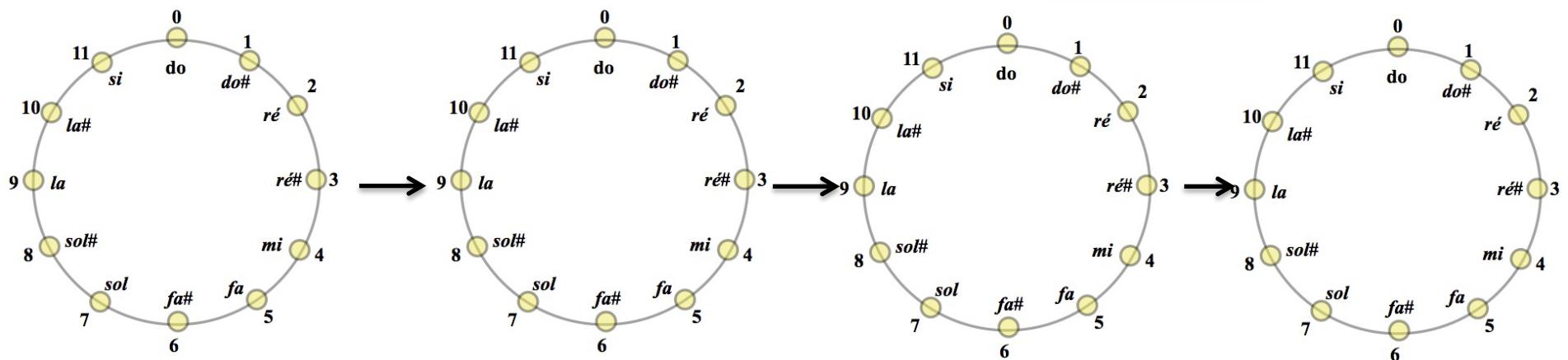


Analyze the progression (circular, Tonnetz and K-,nets representation) and the underlying transformations (transpositions and inversions)

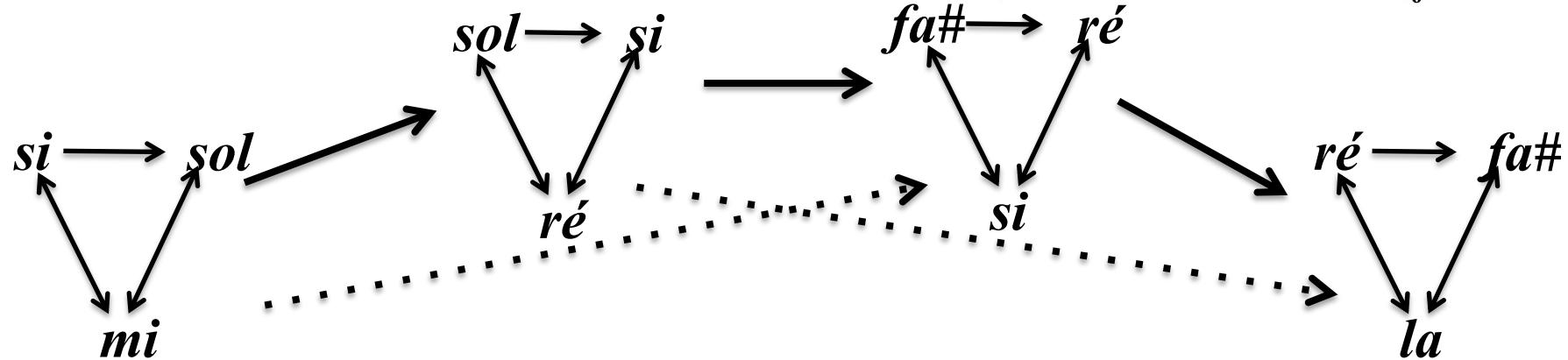
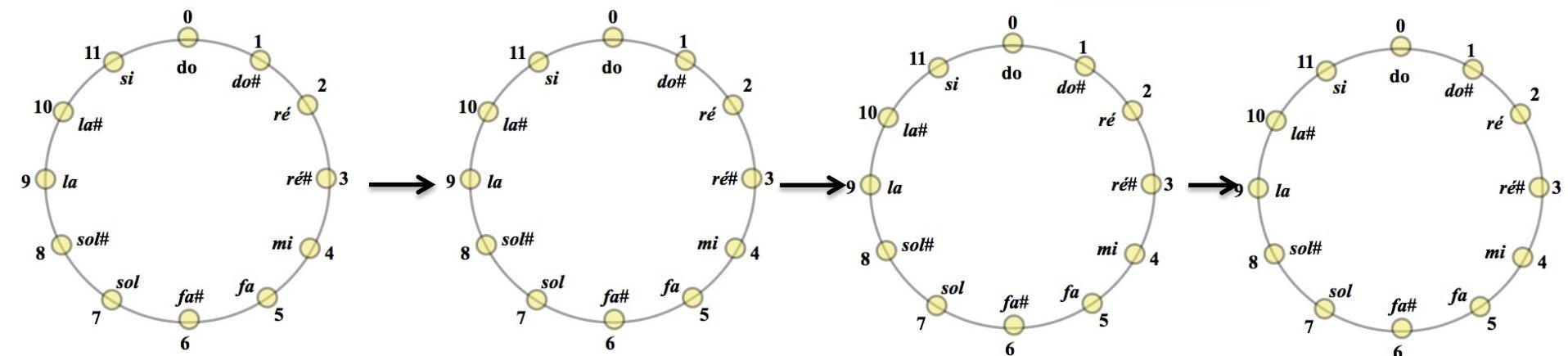
The musical score consists of four staves, each with four measures. Measures 1-3 are identical, showing a steady eighth-note pattern. Measure 4 is a transposition, featuring a single eighth note.



Analyze the progression (circular, Tonnetz and K-nets representation) and the underlying transformations (transpositions and inversions)



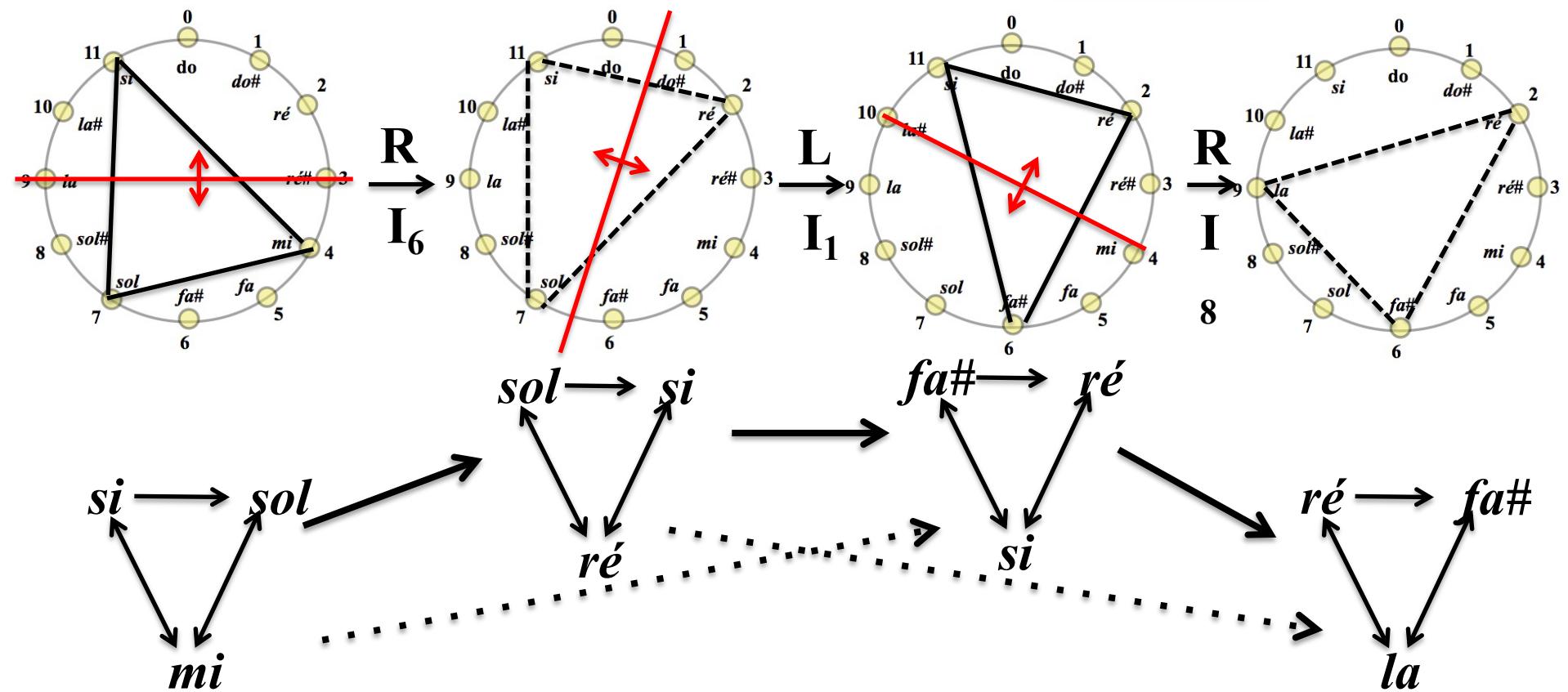
Analyze the progression (circular, Tonnetz and K-nets representation) and the underlying transformations (transpositions and inversions)



Em**G****Bm****D**

Below the musical score, arrows point from each staff to its corresponding transformation:

- Em**: $R = I_6 = T_6 I$
- G**: $L = I_1 = T_1 I$
- Bm**: $R = I_8 = T_8 I$

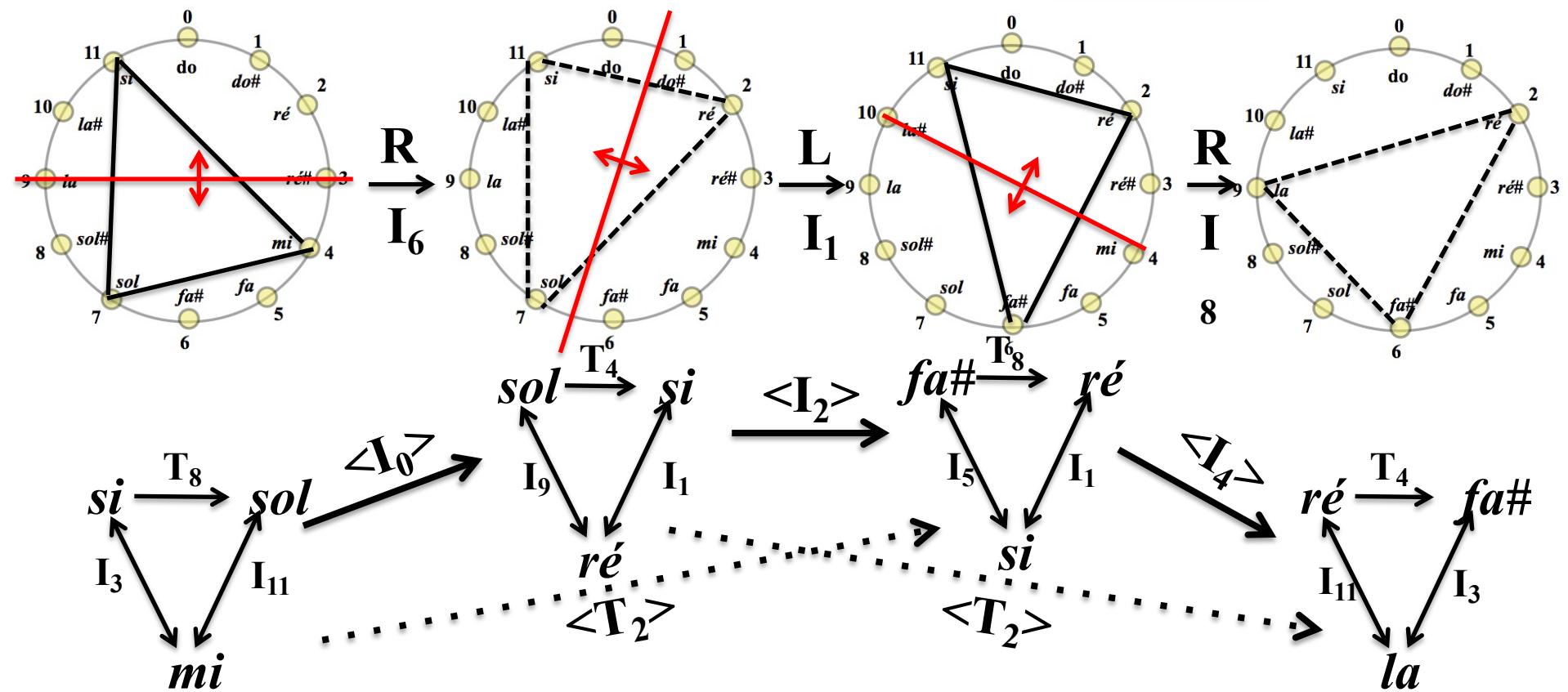


Em**G****Bm****D**

$R = I_6 = T_6 I$

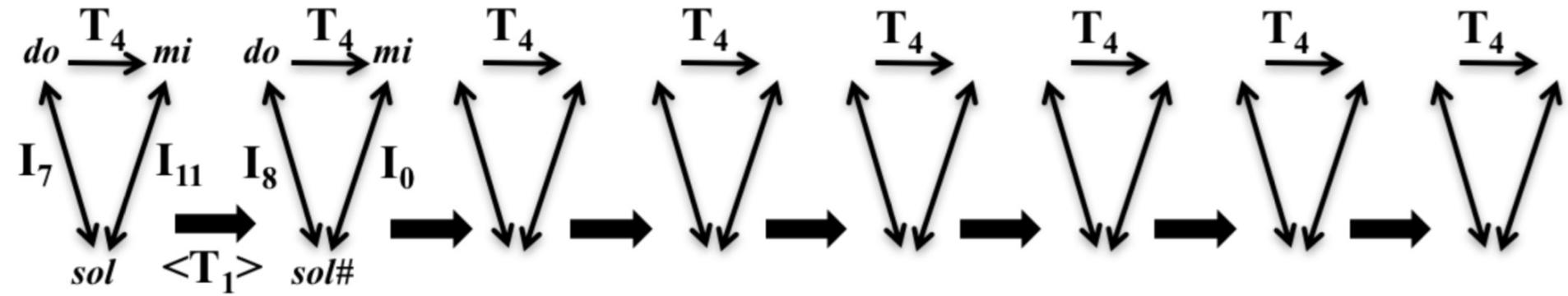
$L = I_1 = T_1 I$

$R = I_8 = T_8 I$



Analyze the two harmonic loop via the K-nets (i.e. find the underlying isographies)

=



Analyze the two harmonic loop via the K-nets (i.e. find the underlying isographies)

Musical score for the first harmonic loop. It consists of two staves: Treble clef and Bass clef. The key signature is one sharp. The melody is a continuous eighth-note pattern. The harmonic progression is indicated by vertical bar lines and includes chords such as G major, A major, B minor, and C major.

Musical score for the second harmonic loop. It consists of two staves: Treble clef and Bass clef. The key signature is one sharp. The melody is identical to the first loop. The harmonic progression is indicated by vertical bar lines and includes chords such as G major, A major, B minor, and C major.

