SCIENCES SORBONNE UNIVERSITÉ

Année Universitaire
2024-2025

TD de vibrations (UE Fondamentaux pour l'acoustique)

Master de Mécanique - Spécialité Acoustique - Parcours ATIAM

Exercice 1 ✎ Assise élastique d'une machine ⋆

1. Une lourde machine est montée sur une assise élastique. Donner le système à 1 degré de liberté équivalent à ce dispositif.

2. Déterminer la fréquence de résonance lorsque la machine pèse 500Kg et que l'assise élastique a une raideur équivalente de $7.10^5 \mathrm{Nm}^{-1}$.

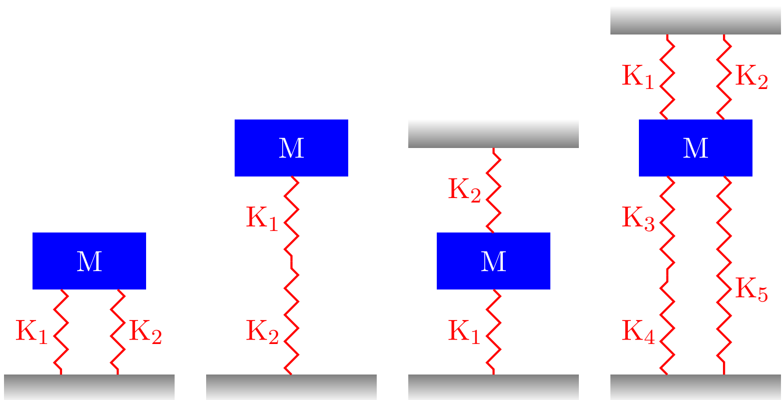
   Réponse : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \approx 6Hz$

3. L'amplitude de l'oscillation vaut 1mm. Sa phase à l'origine vaut 2rad. Déterminer les conditions initiales (déplacement et vitesse) qui engendrent l'oscillation.

   Réponse : *On peut montrer que le déplacement s'exprime par* $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \Phi)$ *avec* $A = 1.10^{-3}$ *et* $\Phi = 2rad$*, d'où* $x(0) = -0,4mm$ *et* $v(0) = \dot{x}(0) = -0,034m.s^{-1}$

Exercice 2 ✎ Associations de ressorts ⋆

Calculer le ressort équivalent et la fréquence propre de chacun des 4 systèmes suivants :



(a) (b) (c) (d)

Réponse :

(a) $K_{eq} = K_1 + K_2$ *et* $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_1+K_2}{M}}$

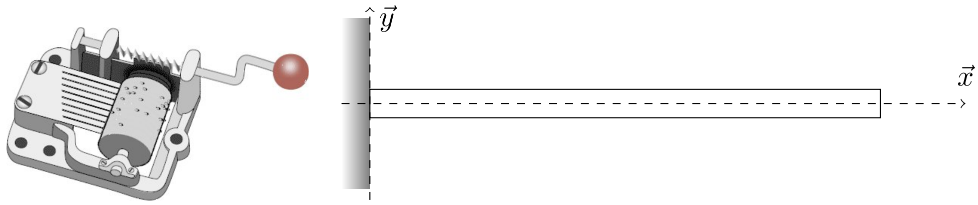
(b) $K_{eq} = \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2}\right)^{-1}$ *et* $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_{eq}}{M}}$

(c) $K_{eq} = K_1 + K_2$ *et* $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_1+K_2}{M}}$

(d) $K_{eq} = K_1 + K_2 + K_5 + \left(\frac{1}{K_3} + \frac{1}{K_4}\right)^{-1}$ *et* $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_{eq}}{M}}$

Exercice 3 ✎ **Boite à musique à cylindre** ⋆ ⋆

Le principe de la boite à musique à cylindre est le suivant : une manivelle vient faire tourner un cylindre sur lequel sont positionnés des picots. Ceux-ci entraînent des lamelles du clavier qui, par leur vibration, produit de la musique, le tout fixé sur une platine. Dans cette exercice, nous nous intéressons aux lamelles qui définissent, à partir de leur longueur vibrante, la note produite.



(a) (b)

FIGURE 1 – (a) une boite à musique à cylindre et (b) la modélisation d'une lamelle.

1. Déterminer le système à 1 degré de liberté équivalent à 1 lamelle en fonction de son module d'Young E, son moment quadratique de section droite ($I_{Gz} = bh^3/12$, avec b la largeur et h l'épaisseur) et sa longueur l.

   Réponse :
   - *Raideur équivalente :*
     - *Energie de déformation d'une poutre de longueur l :* $W = \int_0^l \frac{M_f^2}{2EI_{Gz}} dx$
     - *La flèche à l'extrémité de la poutre soumise à un effort F (du à un picot du cylindre par exemple) peut être obtenue par le théorème de Castigliano :* $\delta = \frac{\partial W}{\partial F}$
     - *Considérons un effort appliqué à l'extrémité de la poutre, le moment fléchissant s'écrit :* $\vec{M}_f = M_f \vec{z} = -F(l-x)\vec{z}$, *d'où* $W = \frac{F^2}{2EI_{gz}} \frac{l^3}{3}$
     - *En appliquant le théorème de Castigliano, il vient* $F = \frac{3EI_{Gz}}{l^3}\delta$ *d'où on peut identifier* $K_{eq} = \frac{3EI_{Gz}}{l^3}$
   - *Masse équivalente :* $M_{eq} = \rho \times l \times h \times b$

2. En déduire une estimation de la fréquence d'oscillation de la lamelle, en fonction des propriétés mécaniques et géométrique de la lamelle. Comment peut-on améliorer cette estimation ?

   Réponse :
   - *fréquence d'oscillation :* $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Eh^2}{4l^4\rho}}$
   - *On peut améliorer cette estimation en utilisant la masse modale et la raideur modale du 1^{er} mode de flexion.*

Exercice 4 ✎ **Dimensionnement d'un absorbeur de choc pour moto** ⋆ ⋆

On cherche à dimensionner un absorbeur de chocs équipant une moto de masse $M = 200Kg$. Cet absorbeur est constitué d'un système à 1 degré de liberté sous-amorti. Lorsque l'absorbeur est soumis à une vitesse initiale verticale due aux irrégularités de la route, le déplacement $x(t)$ de l'essieu par rapport au châssis oscille tout en décroissant exponentiellement.

1. Déterminer les constantes de raideur k et d'amortissement c qui permettent d'obtenir une pseudo période de 2s et de faire en sorte que l'amplitude des oscillations soient réduites de un quart à chaque demi-cycle.

   Réponse :
   - $\omega_0 = \frac{\delta}{T\xi} = \sqrt{\frac{k}{M}}$ *d'où* $k \approx 2353 N.m^{-1}$
   - $c = 2\xi\sqrt{kM} \approx 277 Ns.m^{-1}$

2. Trouver la valeur de la vitesse initiale engendrée par un choc sur la route qui conduit à un déplacement maximum de 250mm

   Réponse :
   - *le déplacement de l'essieu :* $x(t) = Ae^{\xi\omega_d t}\sin(\omega_d + \Phi)$
   - *On trouve* $A = \frac{V_0}{\omega_d}$ *et* $\Phi = 0$
   - *On cherche* t_{max} *tel que* $\dot{x}(t_{max}) = 0$ *d'où* $t_{max} = 0,36s$
   - *d'où* $V_0 = 1,3 m.s^{-1}$

Exercice 5 ✎ **Réservoir d'eau soumis à une secousse sismique** ⋆ ⋆ ⋆

Un réservoir d'eau, de masse m, est placé au sommet d'une colonne élastique, de raideur transversale k. Le sol supportant la colonne est soumis à une accélération $\ddot{y}(t)$, provoquée par un tremblement de terre. La variation de $\ddot{y}$ avec le temps est donnée sur la figure 2.

1. En tenant compte de l'amortissement du système, déterminer sa réponse impulsionnelle.

   Réponse : *Transformée de Laplace (voir p80-81) :* $m\ddot{z} + c\dot{z} + k\dot{z} = \delta(t) \Rightarrow m(s^2Z(s) - sz(0) - \dot{z}(0)) + c(sZ(s) - z(0) + kZ(s) = 1$ *Considérons* $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = 0$, *d'où* $(ms^2 + cs + k)Z(s) = 1$ *et donc* $Z(s) = \frac{1}{m(s-s_1)(s-s_2)}$ *avec* $s_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$
   Par transformée de Laplace inverse on obtient : $z(t) = \frac{1}{m\omega_d}\sin(\omega_d t)\, e^{-\xi\omega_0 t}$

2. En ignorant l'amortissement du système, déterminer le déplacement relatif du réservoir par rapport au sol sous l'effet de l'accélération imposée à sa base.

   Réponse : $z(t) = g(t) * F(t) = \int_0^t F(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t \frac{F(\tau)}{m\omega_d}\sin(\omega_d(t-\tau))d\tau$ *or* $F(t) = -m\left(1 - \frac{t}{t_0}\right)\ddot{y}_{max}$ *et donc* $z(t) = -\frac{y_{max}}{\omega_0^2}\left(1 - (1 - \frac{t}{t_0})\cos\omega_0 t - \frac{t}{t_0} - \frac{\sin\omega_0 t}{t_0\omega_0}\right)$ *Sauf erreur de calcul !*

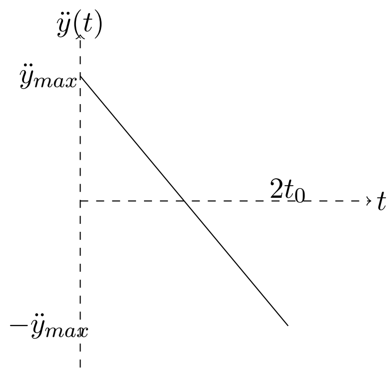


FIGURE 2 – Accélération imposée à la base du réservoir