

## Exercices sur les méthodes à haute résolution

**Roland Badeau**

**`roland.badeau@telecom-paristech.fr`**



On considère le modèle de signal complexe *Exponential Sinusoidal Model* (ESM)

$$s[t] = \sum_{k=0}^{K-1} a_k e^{\delta_k t} e^{i(2\pi f_k t + \phi_k)},$$

où à chaque fréquence  $f_k \in ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  est associée une amplitude réelle  $a_k > 0$ , une phase  $\phi_k \in ]-\pi, \pi]$ , et un facteur d'amortissement  $\delta_k \in \mathbb{R}$ . En définissant les amplitudes complexes  $\alpha_k = a_k e^{i\phi_k}$  et les pôles complexes  $z_k = e^{\delta_k + i2\pi f_k}$ , ce modèle se réécrit sous la forme

$$s[t] = \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k z_k^t.$$

En pratique, le signal observé  $x[t]$  ne satisfait jamais rigoureusement ce modèle. On le modélise comme la somme du signal  $s[t]$  et d'un bruit blanc gaussien complexe  $b[t]$  de variance  $\sigma^2$  :

$$x[t] = s[t] + b[t].$$

**Remarque :** Un bruit blanc gaussien complexe de variance  $\sigma^2$  est un processus complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire sont deux bruits blancs gaussiens de même variance  $\frac{\sigma^2}{2}$ , indépendants l'un de l'autre.

On suppose que le signal  $x[t]$  est observé sur l'intervalle temporel  $\{0 \dots N-1\}$  de longueur  $N > 2K$ . On considère deux entiers  $n$  et  $l$  tels que  $n > K$ ,  $l > K$ , et  $N = n + l - 1$ .

On définit alors la matrice de Hankel de dimension  $n \times l$  contenant les  $N$  échantillons du signal observé :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x[0] & x[1] & \dots & x[l-1] \\ x[1] & x[2] & \dots & x[l] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[n-1] & x[n] & \dots & x[N-1] \end{bmatrix}.$$

On définit de même les matrices de Hankel  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{B}$  de mêmes dimensions  $n \times l$ , à partir des échantillons des signaux  $s[t]$  et  $b[t]$  respectivement.

**Notations :**

- $\mathbf{X}^T$  : transposé de la matrice  $\mathbf{X}$ ,
- $\mathbf{X}^*$  : conjugué de la matrice  $\mathbf{X}$ ,
- $\mathbf{X}^H$  : conjugué hermitien de la matrice  $\mathbf{X}$  (c'est-à-dire transposé et conjugué).

## 1 Multiple Signal Classification (MUSIC)

**Question 1** Pour tout  $k \in \{0 \dots K-1\}$ , on considère la composante  $s_k[t] = \alpha_k z_k^t$ . On définit alors la matrice de Hankel de dimensions  $n \times l$

$$\mathbf{S}_k = \begin{bmatrix} s_k[0] & s_k[1] & \dots & s_k[l-1] \\ s_k[1] & s_k[2] & \dots & s_k[l] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_k[n-1] & s_k[n] & \dots & s_k[N-1] \end{bmatrix}$$



Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on définit le vecteur  $\mathbf{v}^n(z) = [1, z, z^2, \dots, z^{n-1}]^T$ , de dimension  $n$ , et le vecteur  $\mathbf{v}^l(z) = [1, z, z^2, \dots, z^{l-1}]^T$ , de dimension  $l$ . Vérifier alors que  $\mathbf{S}_k = \alpha_k \mathbf{v}^n(z_k) \mathbf{v}^l(z_k)^T$ .

**Question 2** Utiliser le résultat de la question 1 pour démontrer que  $\mathbf{S} = \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k \mathbf{v}^n(z_k) \mathbf{v}^l(z_k)^T$ . Vérifier que cette dernière égalité peut se réécrire sous la forme  $\mathbf{S} = \mathbf{V}^n \mathbf{A} \mathbf{V}^{lT}$ , où

- $\mathbf{V}^n$  est la matrice de Vandermonde de dimensions  $n \times K$  :

$$\mathbf{V}^n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_0 & z_1 & \dots & z_{K-1} \\ z_0^2 & z_1^2 & \dots & z_{K-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_0^{n-1} & z_1^{n-1} & \dots & z_{K-1}^{n-1} \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{V}^l$  est la matrice de Vandermonde de dimensions  $l \times K$ ,
- $\mathbf{A} = \text{diag}(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{K-1})$  est une matrice diagonale de dimension  $K \times K$ .

**Question 3** On définit la matrice  $\mathbf{R}_{ss} = \frac{1}{l} \mathbf{S} \mathbf{S}^H$ . Démontrer que  $\mathbf{R}_{ss}$  est une matrice symétrique hermitienne et positive. Vérifier que  $\mathbf{R}_{ss}$  peut être factorisée sous la forme  $\mathbf{R}_{ss} = \mathbf{V}^n \mathbf{P} \mathbf{V}^{nH}$ , où  $\mathbf{P}$  est une matrice symétrique hermitienne et définie positive, de dimension  $K \times K$ . En déduire que le rang de la matrice  $\mathbf{R}_{ss}$  est égal à  $K$  (on rappelle que les pôles  $z_k$  sont distincts deux à deux).

**Question 4** Démontrer que la matrice  $\mathbf{R}_{ss}$  est diagonalisable dans une base orthonormée, et que ses valeurs propres  $\{\lambda_i\}_{i=0 \dots n-1}$  sont positives. En les supposant rangées par ordre décroissant et en utilisant le résultat de la question 3, en déduire que

- $\forall i \in \{0 \dots K-1\}, \lambda_i > 0$ ;
- $\forall i \in \{K \dots n-1\}, \lambda_i = 0$ .

**Question 5** On pose  $\widehat{\mathbf{R}}_{xx} = \frac{1}{l} \mathbf{X} \mathbf{X}^H$  et  $\mathbf{R}_{xx} = \mathbb{E}[\widehat{\mathbf{R}}_{xx}]$ . De même, on pose  $\widehat{\mathbf{R}}_{bb} = \frac{1}{l} \mathbf{B} \mathbf{B}^H$  et  $\mathbf{R}_{bb} = \mathbb{E}[\widehat{\mathbf{R}}_{bb}]$ . En utilisant l'égalité  $\mathbf{X} = \mathbf{S} + \mathbf{B}$  et le fait que le bruit est centré, démontrer que  $\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{R}_{ss} + \mathbf{R}_{bb}$ . Prouver que pour un bruit blanc gaussien complexe,  $\mathbf{R}_{bb} = \sigma^2 \mathbf{I}_n$ .

**Question 6** Pour tout  $i \in \{0 \dots n-1\}$ , on note  $\mathbf{w}_i$  le vecteur propre de la matrice  $\mathbf{R}_{ss}$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$ . En utilisant le résultat de la question 5, vérifier que  $\mathbf{w}_i$  est aussi vecteur propre de  $\mathbf{R}_{xx}$  associé à la valeur propre  $\lambda'_i = \lambda_i + \sigma^2$ . On en déduit que

- $\forall i \in \{0 \dots K-1\}, \lambda'_i > \sigma^2$ ;
- $\forall i \in \{K \dots n-1\}, \lambda'_i = \sigma^2$ .

**Question 7** On note  $\mathbf{W}$  la matrice  $[\mathbf{w}_0 \dots \mathbf{w}_{K-1}]$ , et  $\mathbf{W}_\perp$  la matrice  $[\mathbf{w}_K \dots \mathbf{w}_{n-1}]$ . Démontrer que  $\text{Im}(\mathbf{W}) = \text{Im}(\mathbf{V}^n)$  (on commencera par prouver que  $\text{Im}(\mathbf{W}) \subset \text{Im}(\mathbf{V}^n)$ ).



**Remarque :** L'espace engendré par  $\mathbf{W}_\perp$  est un sous-espace propre de la matrice  $\mathbf{R}_{xx}$  associé à la valeur propre  $\sigma^2$ . C'est pour cela qu'il est appelé *espace bruit*. L'espace engendré par  $\mathbf{W}$  est aussi celui engendré par la matrice de Vandermonde  $\mathbf{V}^n$ . Il caractérise donc entièrement les  $K$  pôles du signal, c'est pourquoi on l'appelle *espace signal*. En revanche, les valeurs propres de  $\mathbf{R}_{xx}$  correspondant à l'espace signal sont toutes surélevées de  $\sigma^2$ , ce qui signifie que cet espace contient aussi du bruit.

**Question 8** Prouver que les pôles  $\{z_k\}_{k \in \{0 \dots K-1\}}$  sont les solutions de l'équation  $\|\mathbf{W}_\perp^H \mathbf{v}^n(z)\|^2 = 0$ .

**Remarque :** Dans la pratique, les signaux réels ne correspondent pas rigoureusement au modèle, et cette équation n'est jamais vérifiée. C'est pourquoi la méthode d'estimation des pôles baptisée spectral-MUSIC consiste à rechercher les  $K$  pics les plus élevés de la fonction  $z \mapsto \frac{1}{\|\mathbf{W}_\perp^H \mathbf{v}^n(z)\|^2}$ . Elle est ainsi plus facile à implémenter que la méthode du maximum de vraisemblance, qui requiert l'optimisation d'une fonction de  $K$  variables complexes.

## 2 Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques (ESPRIT)

Soit  $\mathbf{V}_\downarrow^n$  la matrice de dimension  $(n-1) \times K$  qui contient les  $n-1$  premières lignes de  $\mathbf{V}^n$ , et  $\mathbf{V}_\uparrow^n$  la matrice de dimension  $(n-1) \times K$  qui contient les  $n-1$  dernières lignes de  $\mathbf{V}^n$ . De même, soit  $\mathbf{W}_\downarrow$  la matrice de dimension  $(n-1) \times K$  qui contient les  $n-1$  premières lignes de  $\mathbf{W}$ , et  $\mathbf{W}_\uparrow$  la matrice de dimension  $(n-1) \times K$  qui contient les  $n-1$  dernières lignes de  $\mathbf{W}$ .

**Question 1** Vérifier que les matrices  $\mathbf{V}_\downarrow^n$  et  $\mathbf{V}_\uparrow^n$  satisfont l'égalité  $\mathbf{V}_\uparrow^n = \mathbf{V}_\downarrow^n \mathbf{D}$ , où  $\mathbf{D}$  est une matrice diagonale de dimension  $K \times K$  dont on donnera les coefficients diagonaux.

**Question 2** Prouver qu'il existe une matrice  $\mathbf{G}$  inversible de dimension  $K \times K$  telle que  $\mathbf{V}^n = \mathbf{W} \mathbf{G}$  (on ne demande pas d'exprimer  $\mathbf{G}$ , mais seulement de démontrer son existence). Vérifier alors que  $\mathbf{V}_\downarrow^n = \mathbf{W}_\downarrow \mathbf{G}$  et  $\mathbf{V}_\uparrow^n = \mathbf{W}_\uparrow \mathbf{G}$ .

**Question 3** En déduire qu'il existe une matrice inversible  $\mathbf{\Phi}$  telle que  $\mathbf{W}_\uparrow = \mathbf{W}_\downarrow \mathbf{\Phi}$ . Quelles sont les valeurs propres de  $\mathbf{\Phi}$  ?

**Question 4** En supposant que la matrice  $\mathbf{W}_\downarrow^H \mathbf{W}_\downarrow$  est inversible, exprimer  $\mathbf{\Phi}$  en fonction de  $\mathbf{W}_\downarrow$  et  $\mathbf{W}_\uparrow$ .

**Question 5** En déduire une méthode d'estimation des pôles  $\{z_k\}_{k \in \{0 \dots K-1\}}$ .

**Remarque :** Le principal avantage de cette méthode par rapport à spectral-MUSIC est qu'il n'est plus nécessaire d'optimiser une fonction pour déterminer les pôles, ceux-ci étant obtenus par un calcul direct.





Contexte académique } **sans modifications**

***Par le téléchargement ou la consultation de ce document, l'utilisateur accepte la licence d'utilisation qui y est attachée, telle que détaillée dans les dispositions suivantes, et s'engage à la respecter intégralement.***

La licence confère à l'utilisateur un droit d'usage sur le document consulté ou téléchargé, totalement ou en partie, dans les conditions définies ci-après, et à l'exclusion de toute utilisation commerciale.

Le droit d'usage défini par la licence autorise un usage dans un cadre académique, par un utilisateur donnant des cours dans un établissement d'enseignement secondaire ou supérieur et à l'exclusion expresse des formations commerciales et notamment de formation continue. Ce droit comprend :

- le droit de reproduire tout ou partie du document sur support informatique ou papier,
- le droit de diffuser tout ou partie du document à destination des élèves ou étudiants.

Aucune modification du document dans son contenu, sa forme ou sa présentation n'est autorisée.

Les mentions relatives à la source du document et/ou à son auteur doivent être conservées dans leur intégralité.

Le droit d'usage défini par la licence est personnel et non exclusif. Tout autre usage que ceux prévus par la licence est soumis à autorisation préalable et expresse de l'auteur : [sitepedago@telecom-paristech.fr](mailto:sitepedago@telecom-paristech.fr)