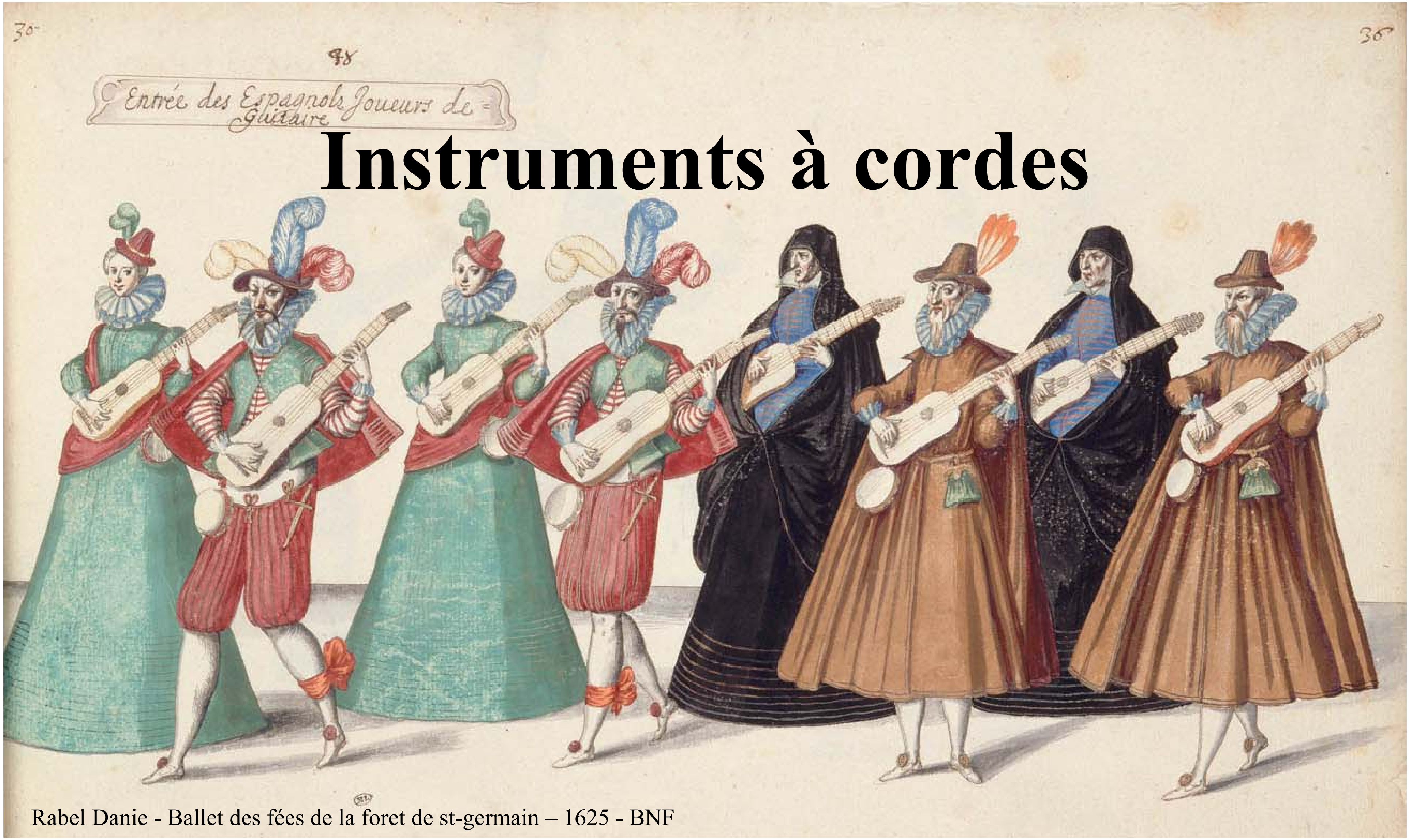
Instruments à cordes



Rabel Danie - Ballet des fées de la foret de st-germain – 1625 - BNF

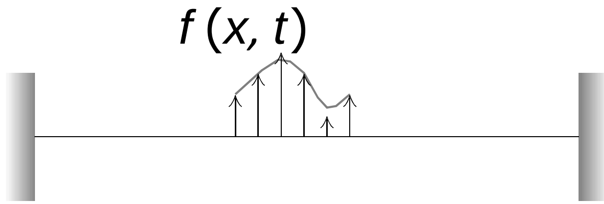
Benoît FABRE, Jean-Loïc Le CARROU

Sorbonne Université

LAM-d'Alembert SU-CNRS-MCC

Instruments à cordes

Corde souple : modes



Corde souple inhomogène : éq. des ondes transversales

$$\rho(x)S(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right] = f(x,t) \ ,$$

Les conditions aux limites en ***x=0*** et ***x=L*** permettent de décomposer le déplacement latéral y sur les modes :

$$y(x,t) = \sum_n \Phi_n(x) q_n(t)$$

Une force d'excitation quelconque ***f(x,t)*** peut alors être décomposée en forces modales :

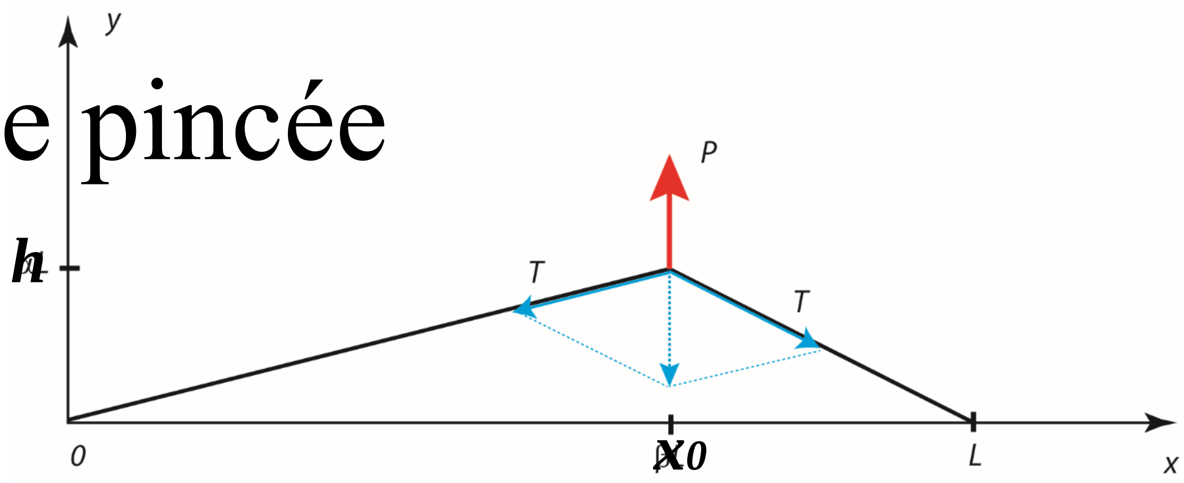
$$f_n(t) = \int_0^L f(x,t)\Phi_n(x)dx$$

Chaque mode répond comme un oscillateur simple (ordre 1) :

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{f_n(t)}{m_n}$$

$$m_n = \int_0^L \Phi_n^2(x)\rho(x)S(x)dx,$$

Corde souple pincée



La déformée initiale est donnée par :

$$y(0,t) = \begin{cases} \frac{hx}{x_o} & \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_o, \\ \frac{h(L-x)}{L-x_o} & \text{pour} \quad x_o \leqslant x \leqslant L \end{cases}$$

Permet de calculer les amplitudes initiales des modes :

$$q_n(0) = \frac{1}{m_n} \int_0^L \rho S y(0,t) \Phi_n(x)\ dx = \frac{1}{m_n} \int_0^L \rho S y(0,t) \sin k_n x\ dx$$

Pour une corde en appui en ***x=0*** et ***x=L,*** lâchée sans vitesse initiale $\dot{q}_n(0) = 0$

$$q_n(0) = \frac{2hL^2}{n^2 \pi^2 x_o (L - x_o)} \sin k_n x_o$$

Le mouvement de la corde est obtenu par la superposition des modes

$$\boxed{y(x,t) = \sum_n \frac{2hL^2}{n^2 \pi^2 x_o (L - x_o)} \sin k_n x_o \sin k_n x \cos \omega_n t} \, .$$

Pincement non ponctuel : Influence de la largeur de pincement

$$\rho S \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - T \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t)$$

où $y(x,t)$ est son déplacement transversal, ρ sa masse volumique, S sa section et T sa tension.

$$f(x,t) = B\delta(t)g(x) \quad \text{avec} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x_0 - a \leq x \leq x_0 + a \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} .$$

$$\boxed{y(x,t) = 2aB \sum_n \frac{\sin k_n x \sin k_n x_0}{m_n} \frac{\sin k_n a}{k_n a} \frac{\sin \omega_n t}{\omega_n}}$$

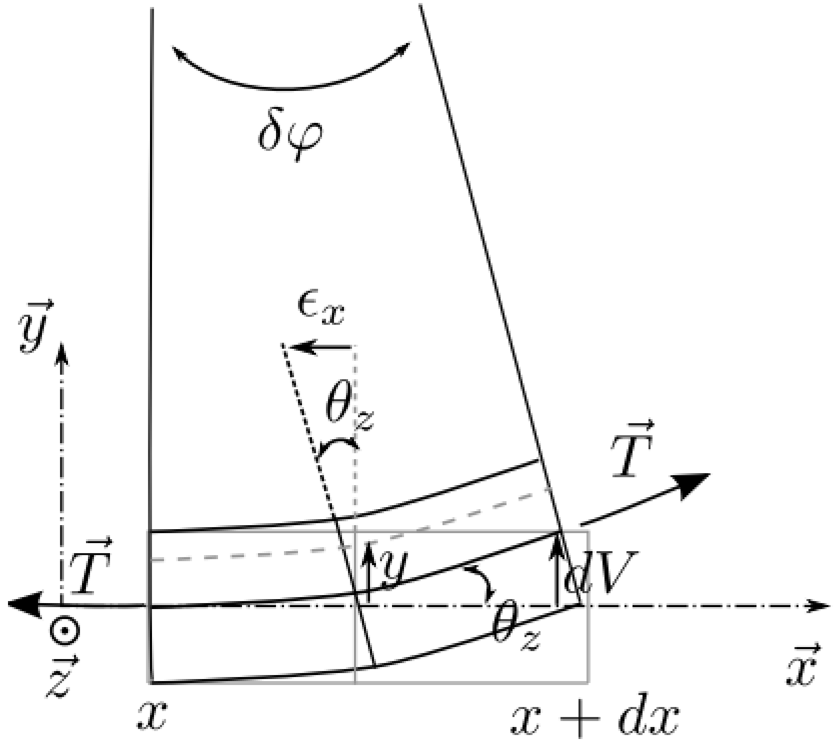
On voit apparaître un filtrage passe-bas $\frac{\sin k_n a}{k_n a}$, fréquence de coupure $f_c = \frac{c}{2a}$

À comparer au cas ponctuel : $y(x,t) = \sum_n \frac{2hL^2}{n^2\pi^2 x_o(L - x_o)} \sin k_n x_o \sin k_n x \cos \omega_n t$.

Corde raide

Hypothèse d'Euler-Bernouilli :

- Les déformations de la section droite dues au cisaillement sont négligées
- L'effet d'inertie de rotation est négligé



Voir le détail de l'établissement de l'équation du mouvement dans « Valette Chap3 »

Déplacement latéral ***v*** de la corde (noté ***y*** plus haut)

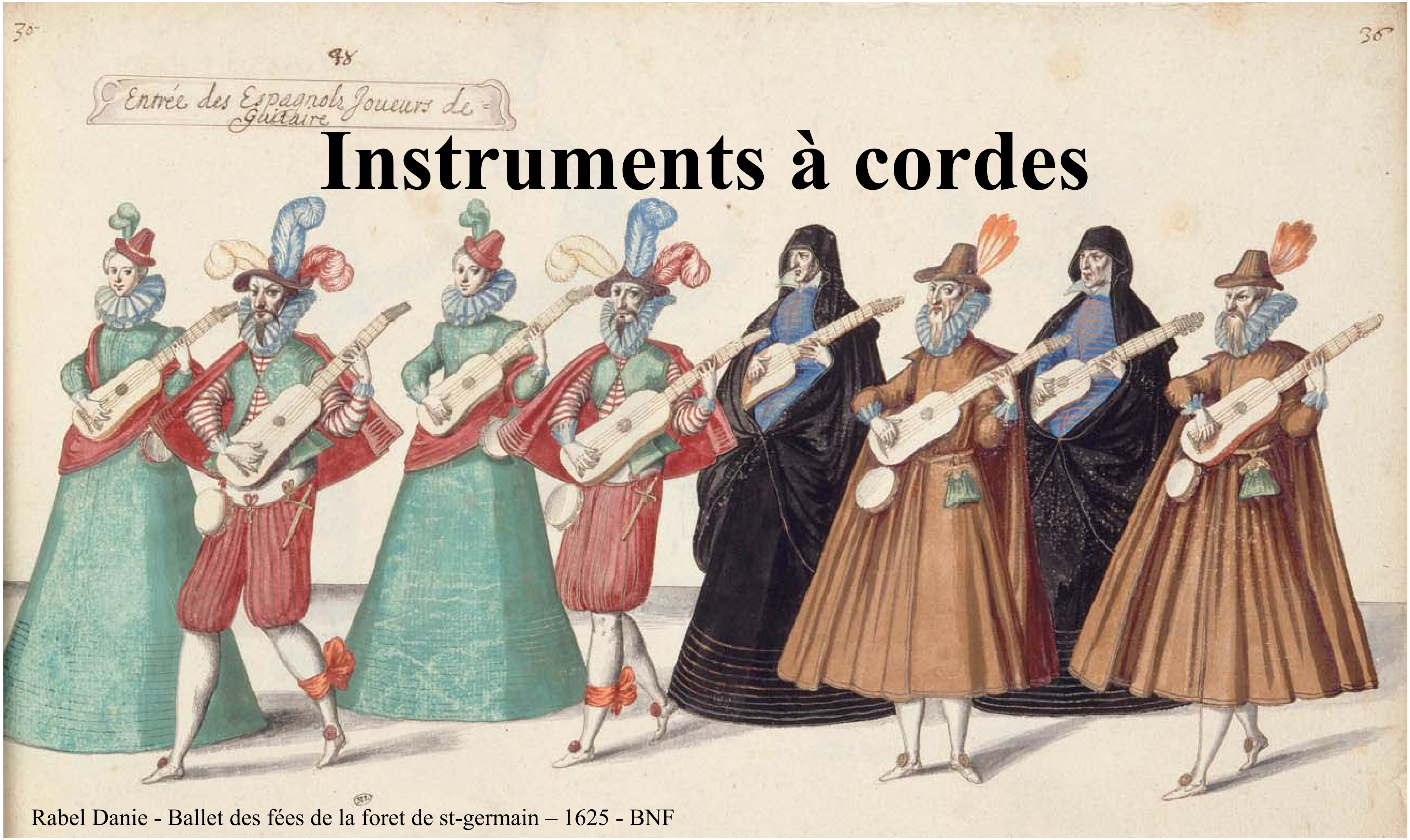
Equation du mouvement :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left[T\frac{\partial v}{\partial x}\right] - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI_z\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] = \rho_L\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}}$$

Equation de dispersion :

$$\boxed{Tk^2 + EIk^4 = \rho_L\omega^2}$$

Instruments à cordes



Rabel Danie - Ballet des fées de la foret de st-germain – 1625 - BNF

Benoît FABRE, Jean-Loïc Le CARROU

Sorbonne Université

LAM-d'Alembert SU-CNRS-MCC