Master ATIAM : **Examen de traitement du signal**
UE Fondamentaux pour ATIAM
`Durée : 1h30. Documents papier autorisés, aucun document électronique.`
`Roland Badeau`

Rappels et notations

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations et définitions suivantes :

— Transformée de Fourier à Temps Continu (TFTC) d'un signal analogique $x_a(t)$:

$$X_a(f) = \int_{\mathbb{R}} x_a(t) e^{-2i\pi f t} dt$$

— TFTC inverse : $x_a(t) = \int_{\mathbb{R}} X_a(f) e^{+2i\pi f t} df$

— Transformée de Fourier à Temps Discret (TFTD) d'un signal discret $x(n)$:

$$X(e^{2i\pi\nu}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n) e^{-2i\pi\nu n}$$

— TFTD inverse : $x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} X(e^{2i\pi\nu}) e^{+2i\pi\nu n} d\nu$

— Transformée de Fourier Discrète (TFD) d'ordre M d'un signal discret fini $x_M(n)$:

$$X_M(k) = \sum_{n=0}^{M-1} x_M(n) e^{-2i\pi \frac{k}{M} n}$$

— TFD inverse : $x_M(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X_M[k] e^{+2i\pi \frac{k}{M} n}$

— Transformée en Z d'un signal discret $x(n)$:

$$X(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(n) z^{-n}$$

— Formule d'échantillonnage : si $\forall n \in \mathbb{Z}$, $x_e(n) = x_a(nT)$ où $T \in \mathbb{R}_+^*$, alors

$$X_e(e^{2i\pi\nu}) = \frac{1}{T} \sum_{k\in\mathbb{Z}} X_a\left(\frac{\nu + k}{T}\right) \tag{1}$$

— Fonction d'autocovariance d'un processus $X(n)$ stationnaire au sens large (SSL) réel :

$$R_X(k) = \mathbb{E}((X(n+k) - m_X)(X(n) - m_X)) \text{ indépendamment de } n, \text{ où } m_X = \mathbb{E}(X(n)) \; \forall n \in \mathbb{Z}$$

— Densité spectrale de puissance (DSP) d'un processus $X(n)$ SSL :

$$S_X(e^{2i\pi\nu}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} R_X(k) e^{-2i\pi\nu k}$$

— **Filtrage des processus SSL** : Soit $Y(n)$ le processus obtenu par filtrage stable, de réponse impulsionnelle $h(n)$ et de fonction de transfert $H(z)$, d'un processus SSL $X(n)$. Alors $Y(n)$ est SSL :
  — de moyenne $m_Y = H(1)\, m_X$ (où $H(1)$ est la valeur de la réponse en fréquence en $\nu = 0$),
  — de fonction d'autocovariance $R_Y = h * \tilde{h} * R_X$ (où $\tilde{h}(n) = h(-n)^*$),
  — de DSP $S_Y(e^{2i\pi\nu}) = |H(e^{j2\pi\nu})|^2 S_X(e^{2i\pi\nu})$.

— Formules trigonométriques :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \tag{2}$$

$$\cos(\theta - \phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) + \sin(\theta)\sin(\phi) \tag{3}$$

1 Questions courtes

1.1 Signaux déterministes

a) **Filtre différentiateur.** On considère le filtre qui à une entrée $x(n)$ associe la sortie $y(n) = x(n) - x(n-1)$.
   1) Exprimer sa réponse impulsionnelle $h(n)$ et sa fonction de transfert $H(z)$.
   2) Ce filtre est-il à réponse impulsionnelle finie (RIF) ou infinie (RII) ? Est-il causal, stable ?

b) **Filtre AR1.** On considère le filtre causal défini par sa fonction de transfert $H(z) = \dfrac{1}{1 - az^{-1}}$ avec $|a| < 1$.
   1) Ce filtre est-il stable ? Est-il RIF/RII ? Quelle est la relation entrée/sortie correspondante ?
   2) Donner le domaine de définition de $H(z)$ et calculer la réponse impulsionnelle $h(n)$ correspondante.

c) **Filtre moyenneur**. On considère le filtre de réponse impulsionnelle $g(n) = \frac{1}{2P+1}\,\mathbf{1}_{[-P,P]}(n)$, où $P \in \mathbb{N}^\star$.
   1) Ce filtre est-il RIF/RII ? Est-il causal ? stable ?
   2) Calculer sa fonction de transfert et tracer approximativement sa réponse en fréquence $G(e^{2i\pi\nu})$ pour $\nu \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $P = 2$. Ce filtre est-il passe-haut / passe-bas ? Quelle est sa fréquence de coupure ν_c, définie comme la plus petite fréquence $\nu > 0$ telle que $G(e^{2i\pi\nu}) = 0$?

1.2 Processus aléatoires

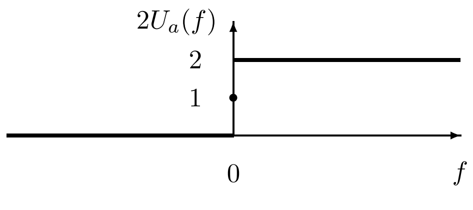
a) **Processus SSL**. Prouver que les processus suivants sont SSL, et déterminer leurs moyennes, leurs fonctions d'autocovariance et leurs densités spectrales de puissance :
   1) bruit blanc (centré) $W(n)$ de variance σ^2,
   2) processus AR1 causal (filtrage d'un bruit blanc par $H(z) = \dfrac{1}{1 - az^{-1}}$ de coefficient $a \in]-1\ 1[$).

b) **Somme de deux processus SSL.** Soient deux processus $X_1(n)$ et $X_2(n)$ indépendants, SSL, centrés, de fonctions d'autocovariance R_{X_1} et R_{X_2}, et de DSP S_{X_1} et S_{X_2}. Prouver que le processus $X(n) = X_1(n) + X_2(n)$ est aussi SSL, centré, de fonction d'autocovariance $R_X(k) = R_{X_1}(k) + R_{X_2}(k)$ et de DSP $S_X(e^{2i\pi\nu}) = S_{X_1}(e^{2i\pi\nu}) + S_{X_2}(e^{2i\pi\nu})$.

c) **Puissance d'un processus SSL.** Soit $\epsilon(n)$ un processus SSL réel centré, de DSP $S_\epsilon(e^{2i\pi\nu})$. On définit $\sigma_\epsilon^2 = \mathbb{E}(\epsilon(n)^2)$. Prouver que $\sigma_\epsilon^2 = \int_{-1/2}^{1/2} S_\epsilon(e^{2i\pi\nu})d\nu$.

2 Filtre de Hilbert

Soit $x_a(t)$ un signal réel à temps continu (analogique). Le signal *analytique* associé à $x_a(t)$ est le signal $z_a(t)$ dont la TFTC a pour expression $Z_a(f) = 2\,U_a(f)X_a(f)$, où $U_a(f)$ est la fonction échelon-unité, qui vaut 1 si $f > 0$, et 0 si $f < 0$. Pour des raisons de continuité, on prend $U_a(0) = \frac{1}{2}$. On donne le nom de filtre analytique au filtre dont le gain en fréquence est $2U_a(f)$.



(a) Quelle propriété vérifie la fonction $X_a(f)$? En déduire l'expression de $\frac{1}{2}(Z_a(f) + Z_a^*(-f))$ en fonction de $X_a(f)$, et prouver que la partie réelle de $z_a(t)$ est égale à $x_a(t)$. On pourra alors écrire $z_a(t) = x_a(t) + iy_a(t)$, où le signal réel $y_a(t)$ est défini comme la partie imaginaire de $z_a(t)$.

(b) Démontrer que $y_a(t)$ se déduit de $x_a(t)$ par un filtrage linéaire de réponse en fréquence $H_a(f) = -i\,\text{signe}(f)$, où $\text{signe}(f) = 1$ si $f > 0$, $\text{signe}(f) = -1$ si $f < 0$, et $\text{signe}(0) = 0$. Le filtre $H_a(f)$ porte le nom de *filtre de Hilbert*, et $y_a(t)$ est appelé *transformée de Hilbert* de $x_a(t)$.

Supposons que le signal $x_a(t)$ satisfait les hypothèses du théorème d'échantillonnage : il existe une fréquence F_e telle que le support de $X_a(f)$ soit inclus dans $]-\frac{F_e}{2}, \frac{F_e}{2}[$. On considère alors les signaux échantillonnés $x(n) = x_a(nT_e)$ et $y(n) = y_a(nT_e)$, où $T_e = 1/F_e$. On rappelle la relation entre la TFTD $X(e^{2i\pi\nu})$ et la TFTC $X_a(f)$:

$$X(e^{2i\pi\nu}) = \frac{1}{T_e} \sum_{k\in\mathbb{Z}} X_a\left(\frac{\nu+k}{T_e}\right) \tag{4}$$

(c) Simplifier l'expression (4) lorsque $\nu \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Vérifier que $Y(e^{2i\pi\nu})$ satisfait une expression similaire. En déduire que le signal $y(n)$ peut aussi s'exprimer comme le résultat du filtrage discret de $x(n)$ par le filtre de réponse en fréquence $H(e^{2i\pi\nu}) = -i\,\mathrm{signe}(\nu)$, pour $\nu \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ (et $H(e^{2i\pi\nu}) = 0$ pour $\nu = \pm\frac{1}{2}$).

Remarque : le filtre discret $H(e^{2i\pi\nu})$ permet de calculer directement les échantillons $y(n)$ de la transformée de Hilbert à partir des échantillons $x(n)$, sans avoir à effectuer de conversion numérique / analogique.

(d) En appliquant la TFTD inverse, prouver que la réponse impulsionnelle $h(n)$ vérifie $h(n) = \frac{2}{\pi n}$ si n est impair, et 0 si n est pair.

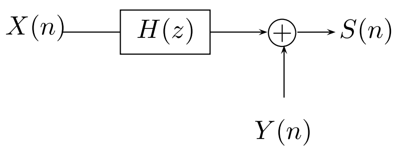
(e) Ce filtre est-il causal ? stable ? RIF ou RII ?

(f) Pour un filtre discret de réponse impulsionnelle $g(n)$ et de fonction de transfert $G(z)$, quelle est la réponse impulsionnelle du filtre de fonction de transfert $G(z^2)$?

(g) En utilisant la nullité des coefficients pairs de $h(n)$, en déduire qu'il existe une fonction de transfert $G(z)$, telle que $H(z) = z^{-1}G(z^2)$. Que vaut la réponse impulsionnelle $g(n)$?

3 Filtrage optimal

On considère le modèle de mélange additif de processus donné par la figure suivante :

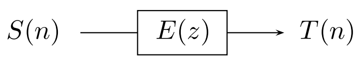


où $X(n)$ et $Y(n)$ sont deux processus indépendants et identiquement distribués (IID), centrés, indépendants entre eux, de variances σ_X^2 et σ_Y^2. Le filtre est causal, de fonction de transfert $H(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}}$ avec $|a| < 1$.

a) Démontrer que $S(n)$ est centré et exprimer sa fonction d'autocovariance $R_S(k)$ en fonction de σ_X, σ_Y et h (on pourra utiliser la réponse à la question 1.2.b) et le théorème de filtrage des processus SSL).

b) En déduire l'expression de la variance de $S(n)$, notée σ_S^2 en fonction de σ_X, σ_Y et a (on pourra utiliser le résultat de la question 1.1.b2)).

c) On filtre maintenant $S(n)$ par un filtre d'égalisation $E(z)$, pour obtenir le processus $T(n)$:



1) Démontrer qu'il existe un filtre $E(z)$ causal stable tel que $E(z)H(z) = 1$ et déterminer sa réponse impulsionnelle $e(n)$.

2) Prouver alors que le processus transmis s'écrit $T(n) = X(n) + W(n)$ où l'on exprimera le processus W en fonction de Y et e.

d) On cherche ce que vaut le rapport signal à bruit (RSB) en sortie, défini par $\eta = \dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_W^2}$.

1) Exprimer σ_W^2 en fonction de σ_Y^2.

2) Exprimer η en fonction du RSB en entrée $\eta_e = \dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$ et de a.