

note “juste” mais dont l’action a aussi des conséquences directes et essentielles sur l’enveloppe temporelle du son.

2.4.2. Cas limite d’une corde unique

Si l’on reprend le système (6.47) dans le cas d’une corde unique, on obtient l’équation qui gouverne le couplage de cette corde avec le chevalet, soit :

$$\beta - \omega_0 = \zeta = j \frac{Y_B Z_0 \omega_0}{\pi}. \quad (6.54)$$

En posant $Y_B(\omega_0) = G_B + jB_B$, l’équation (6.54) fournit le décalage de fréquence et le facteur d’amortissement de la corde dû au couplage, soit :

$$\begin{aligned} \beta &= \omega_0 + \delta\omega_0 + \alpha, \\ \text{avec } \frac{\delta\omega_0}{\omega_0} &= -\frac{B_B Z_0}{\pi} = -\frac{Z_0 \Im\{Y_B\}}{\pi}, \\ \text{et } \alpha &= \frac{\omega_0 G_B}{\pi} = \frac{\omega_0 \Re\{Y_B\}}{\pi}. \end{aligned} \quad (6.55)$$

On retrouve les formules classiques établies par plusieurs auteurs [308]. Ces formules sont analogues à celles que l’on obtient pour un tuyau sans pertes débouchant sur l’impédance de rayonnement.

3. Couplage corde-table d’harmonie

Aux paragraphes 1 et 2, nous avons étudié deux exemples de couplages en les illustrant par des modèles simples à deux degrés de liberté. Nous élargissons le propos ici en considérant le couplage plus général entre N_s modes de cordes et N_b modes de table. Les coefficients d’amortissement sont considérés comme faibles ce qui autorise certaines approximations (cf. chapitre 5). La démarche présentée ci-dessous s’inspire d’une étude réalisée par Woodhouse à propos de la guitare [452]. Son principe repose en premier lieu sur le choix de la de la cinématique de la corde et de la table. On en déduit alors les matrices de masse et de raideur à partir de considérations énergétiques. On obtient les valeurs propres et les vecteurs propres du système conservatif associé selon la méthode décrite au chapitre 3.

Pour des systèmes réels, on a vu au chapitre 5 que la matrice de dissipation n’est, en général, pas diagonale et qu’une résolution exacte nécessite le calcul de modes complexes. Nous simplifions ici la présentation en supposant que cette matrice est diagonale. Dans tout ce qui suit, nous avons donc affaire à des fréquences propres complexes mais à des déformées modales réelles.

3.1. Détermination des matrices de masse et de raideur

La corde, de longueur L , est supposée fixe en $x = 0$ et mobile en $x = L$ avec $y(L, t) = q_0(t)$ (voir la figure 6.9). On ne considère que le déplacement vertical de la corde. L’amplitude de q_0 est supposée faible devant celle des autres points de la corde si bien que l’on admet que les modes propres $\Phi_n(x)$ de celle-ci (pour $n \geq 1$) sont donnés par $\sin \frac{n\pi x}{L}$ avec $k_n L = n\pi$. Au total, nous écrivons le déplacement de la corde sous la forme :

$$y(x, t) = q_0(t) \frac{x}{L} + \sum_{n=1}^{N_s} q_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (6.56)$$

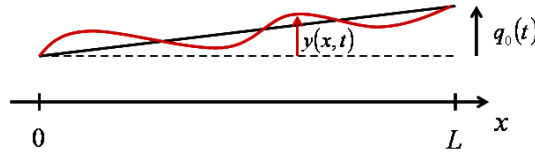


Figure 6.9. Cinématique d'une corde couplée à une table d'harmonie.

où q_0 apparaît comme le déplacement généralisé du mode rigide (cas $n = 0$) correspondant à une rotation d'ensemble de la corde autour de l'extrémité $x = 0$, tandis que les q_n (pour $n \geq 1$) sont ceux d'une corde supposée simplement supportée aux extrémités.

On désigne par $r_m(t)$ les déplacements modaux des N_b modes de la table au point d'attache de la corde. La continuité des déplacements en ce point impose la condition :

$$q_0(t) = \sum_{m=1}^{N_b} r_m(t) . \quad (6.57)$$

Soit $B = EI$ la raideur de flexion de la corde, T sa tension et $k_m = m_m \omega_m^2$ la raideur modale du mode m de la table. L'énergie potentielle élastique du système couplé s'écrit (cf. le chapitre 1) :

$$E_p = \frac{1}{2} \left[\sum_{m=1}^{N_b} k_m r_m^2 + T \int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx + B \int_0^L \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx \right] . \quad (6.58)$$

Compte tenu de (6.57) et (6.56), l'expression (6.59) se réécrit :

$$E_p = \frac{1}{2} \left[\sum_{m=1}^{N_b} k_m r_m^2 + \frac{T}{L} \left(\sum_{m=1}^{N_b} r_m \right)^2 + \frac{T\pi^2}{2L} \sum_{n=1}^{N_s} n^2 q_n^2 + \frac{B\pi^4}{2L^3} \sum_{n=1}^{N_s} n^4 q_n^2 \right] . \quad (6.59)$$

On définit à présent le vecteur \mathbf{X} des coordonnées généralisées tel que :

$$\mathbf{X} = {}^t [q_1, \dots, q_{N_s}, r_1, r_2, \dots, r_{N_b}] \quad (6.60)$$

de sorte que la matrice de raideur \mathbb{K} recherchée est donnée par :

$$E_p = \frac{1}{2} {}^t \mathbf{X} \mathbb{K} \mathbf{X} . \quad (6.61)$$

On obtient finalement \mathbb{K} sous la forme :

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} \mathbb{K}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbb{K}_{22} \end{bmatrix} , \quad (6.62)$$

avec

$$\mathbb{K}_{11} = \frac{\pi^2}{2L} \text{diag} \left\{ T + \frac{B\pi^2}{L^2}, 4T + 16\frac{B\pi^2}{L^2}, \dots, N_s^2 T + \frac{N_s^4 B\pi^2}{L^2} \right\} , \quad (6.63)$$

et

$$\mathbb{K}_{22} = \begin{bmatrix} k_1 + T/L & T/L & \dots & T/L \\ T/L & k_2 + T/L & \dots & T/L \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T/L & T/L & \dots & k_{N_b} + T/L \end{bmatrix} . \quad (6.64)$$

La matrice de masse \mathbb{M} s'obtient de façon similaire à partir de l'énergie cinétique du système :

$$E_c = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{N_s} m_n \dot{r}_m^2 + \mu \int_0^L \dot{y}^2 dx \right] , \quad (6.65)$$

où $\mu = \rho S$. On exprime E_c sous la forme quadratique :

$$E_c = \frac{1}{2} {}^t \dot{\mathbf{X}} \mathbb{M} \dot{\mathbf{X}}, \quad (6.66)$$

d'où l'on obtient \mathbb{M} sous la forme

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} \mathbb{M}_{11} & \mathbb{M}_{12} \\ {}^t\mathbb{M}_{12} & \mathbb{M}_{22} \end{bmatrix}. \quad (6.67)$$

Le lecteur vérifiera que les différentes sous-matrices définies dans (6.67) s'écrivent :

$$\mathbb{M}_{11} = \frac{\mu L}{2} \text{diag} \{1, 1, \dots, 1\}, \quad (6.68)$$

$$\mathbb{M}_{22} = \begin{bmatrix} m_1 + \frac{\mu L}{3} & \frac{\mu L}{3} & \dots & \frac{\mu L}{3} \\ \frac{\mu L}{3} & m_2 + \frac{\mu L}{3} & \dots & \frac{\mu L}{3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\mu L}{3} & \dots & \frac{\mu L}{3} & m_{N_b} + \frac{\mu L}{3} \end{bmatrix}, \quad (6.69)$$

$$\mathbb{M}_{12} = \frac{\mu L}{\pi} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1/2 & -1/2 & \dots & -1/2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{N_s+1}/N_s & \dots & (-1)^{N_s+1}/N_s & (-1)^{N_s+1}/N_s \end{bmatrix}. \quad (6.70)$$

Le couplage n'affecte ici que la matrice de masse, par l'intermédiaire des sous-matrice \mathbb{M}_{12} et $\mathbb{M}_{21} = {}^t\mathbb{M}_{12}$ (couplage inertiel). La matrice de raideur reste diagonale.

3.2. Croisement des modes

Pour résoudre analytiquement le problème et montrer des résultats ayant une portée suffisamment générale, nous étudions ci-dessous le couplage entre un mode de corde et un mode de table. Nous portons une attention particulière aux coefficients d'amortissement de ces deux modes, qui gouvernent l'évolution temporelle du système en régime libre. A partir des résultats obtenus au paragraphe 3.1, on vérifie que la réduction du système à deux modes conduit à la matrice de masse suivante :

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mu L}{2} & \frac{\mu L}{\pi} \\ \frac{\mu L}{\pi} & m_1 + \frac{\mu L}{3} \end{bmatrix}. \quad (6.71)$$

La matrice de raideur réduite s'écrit :

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi^2}{2L} \left(T + \frac{B\pi^2}{L^2} \right) & 0 \\ 0 & k_1 + \frac{T}{L} \end{bmatrix}. \quad (6.72)$$

Dans les instruments à cordes, les coefficients de qualité des modes de corde sont généralement supérieurs (voire très supérieurs) à ceux des modes de tables (cf chapitre 2). Dans toute la suite, on suppose qu'ils sont tous deux très supérieurs à l'unité, soit $Q_i = 1/2\zeta_i \gg 1$ où les ζ_i sont les coefficients d'amortissement. La matrice d'amortissement, supposée diagonale, s'écrit :

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\zeta_1\omega_1 m_{11} & 0 \\ 0 & 2\zeta_2\omega_2 m_{22} \end{bmatrix}, \quad (6.73)$$

où $\omega_1 = \sqrt{m_{11}/k_{11}}$ et $\omega_2 = \sqrt{m_{22}/k_{22}}$ sont respectivement les pulsations propres découplées de la corde et de la table. Au total, ce système couplé réduit s'écrit classiquement :

$$M\ddot{q} + \mathbb{C}\dot{q} + \mathbb{K}q = 0 . \quad (6.74)$$

Les pulsations propres (complexes) du système couplé sont données par les racines de l'équation caractéristique qui, compte tenu des notations choisies, s'écrit :

$$(\omega_1^2 + 2j\omega\zeta_1\omega_1 - \omega^2)(\omega_2^2 + 2j\omega\zeta_2\omega_2 - \omega^2) = \omega^4\lambda^2 . \quad (6.75)$$

où $\lambda^2 = \frac{m_{12}m_{21}}{m_{11}m_{22}}$ est le coefficient de couplage massique. Celui-ci s'écrit explicitement ici :

$$\lambda^2 = \frac{2\mu L}{\pi^2(m_1 + \mu L/3)} . \quad (6.76)$$

On montre facilement que sa généralisation au couplage entre le p -ième mode de corde et le n -ième mode de table est donnée par :

$$\lambda^2 = \frac{2\mu L}{p^2\pi^2(m_n + \mu L/3)} . \quad (6.77)$$

On limite l'étude au domaine où ω est proche de ω_1 , elle-même proche de ω_2 , c'est-à-dire lorsque les résonances de la corde et de la table sont voisines. On peut alors simplifier les calculs en posant $\omega\zeta_1\omega_1 \simeq \omega_1^2\zeta_1$ et $\omega\zeta_2\omega_2 \simeq \omega_2^2\zeta_2$ dans (6.75). En posant $\gamma = (\omega_2/\omega_1)^2$, les racines de l'équation (6.75) sont données par :

$$\frac{\omega_{\pm}}{\omega_1} = \Omega^{1/2} \quad \text{avec} \quad \Omega = \frac{1 + \gamma + 2j(\zeta_1 + \gamma\zeta_2) \pm \sqrt{\Delta}}{2(1 - \lambda^2)} \quad (6.78)$$

$$\text{et} \quad \Delta = [1 + \gamma + 2j(\zeta_1 + \gamma\zeta_2)]^2 - 4(1 - \lambda^2)\gamma[1 - 4\zeta_1\zeta_2 + 2j(\zeta_1 + \zeta_2)] .$$

La figure 6.10 montre que, pour des ζ_i fixés, soit les parties réelles, soit les parties imaginaires des fréquences propres se croisent en fonction des valeurs du paramètre de couplage λ . Nous constatons sur ces figures que les croisements, s'ils ont lieu, se produisent au voisinage de $\omega_2 = \omega_1$. Nous posons donc à présent $\gamma = 1$ dans (6.78) afin d'interpréter ces phénomènes. Les fréquences propres s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \omega_{\pm} &= \Omega^{1/2} \quad \text{avec} \quad \Omega = \frac{1 + j(\zeta_1 + \zeta_2) \pm \sqrt{\Delta'}}{1 - \lambda^2} \\ \text{et} \quad \Delta' &= \lambda^2[(1 + 2j\zeta_1)(1 + 2j\zeta_2)] - (\zeta_1 - \zeta_2)^2 . \end{aligned} \quad (6.79)$$

Compte tenu du fait que les $\zeta_i \ll 1$ (environ 10^{-2} pour les modes de table et 10^{-3} pour les modes de corde), on peut légitimement poser :

$$\Delta' \simeq \lambda^2 - (\zeta_1 - \zeta_2)^2 . \quad (6.80)$$

■ Discussion

- Si $\lambda^2 > (\zeta_1 - \zeta_2)^2$, le déterminant Δ' est positif et sa racine est réelle. Dans ce cas, les deux valeurs de Ω ont même partie imaginaire, et ne diffèrent que par la partie réelle. Il en est de même, au premier ordre, pour les fréquences propres ω_{\pm} compte tenu du fait que leurs parties imaginaires sont faibles devant leurs parties réelles. Pour des coefficients de qualité tels que $Q_1 = 3500$ et $Q_2 = 100$, et $\lambda = 0.01$, on retrouve le résultat représenté sur les figures 6.10-(a) et -(b) où il y a croisement de la seule partie imaginaire au voisinage de $\gamma = 1$.
- Si $\lambda^2 < (\zeta_1 - \zeta_2)^2$, le déterminant est négatif et sa racine est purement imaginaire. Les deux valeurs de Ω ont cette fois la même partie réelle et des parties imaginaires différentes. Il en est de même, au premier ordre, pour les fréquences propres ω_{\pm} . Avec les mêmes facteurs de qualité et $\lambda = 0.0035$, on se trouve dans

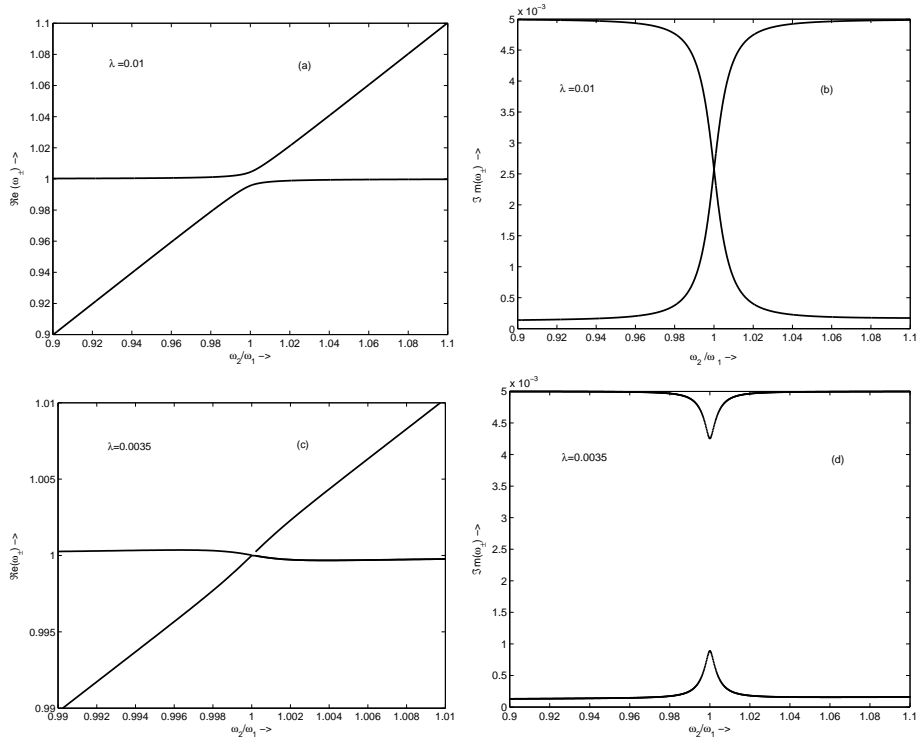


Figure 6.10. Partie réelle et partie imaginaire des fréquences propres du système couplé en fonction de ω_2/ω_1 pour deux valeurs différentes du paramètre de couplage massique λ entre corde et table, montrant respectivement des situations de croisement ou de non croisement des modes. $Q_1=3500$; $Q_2=100$.

la situation représentée sur les deux figures 6.10-(c) et -(d) où il y a croisement de la seule partie réelle au voisinage de $\gamma = 1$.

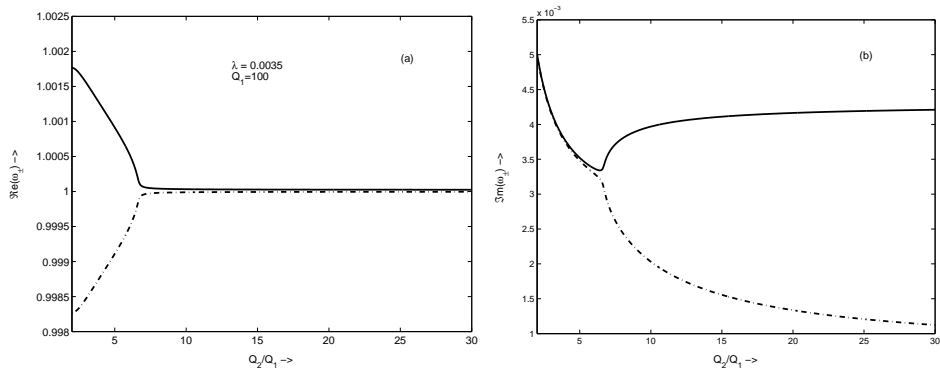


Figure 6.11. Variation des fréquences propres du système couplé corde-table en fonction du rapport entre les coefficient de qualité des constituants. (a) Partie réelle ; (b) Partie imaginaire.

La figure 6.11 illustre ces deux régimes, lorsqu'on fait varier le coefficient de qualité d'un des deux modes en maintenant égales les valeurs des parties réelles des fréquences propres découplées, soit $\omega_1 = \omega_2$. On voit sur cette figure que tant que le rapport Q_1/Q_2 reste faible (inférieur à 7 environ sur la figure, compte tenu des valeurs numériques choisies), les parties imaginaires des deux modes couplés sont

semblables. Cela signifie que les deux modes s'atténuent avec la même constante de temps. Par contre le couplage écarte les parties réelles, c'est-à-dire les fréquences d'oscillations, en régime libre.

En revanche, pour Q_1/Q_2 supérieur au seuil défini par $\Delta' = 0$, les parties réelles (et donc les fréquences d'oscillation) des deux modes se confondent. Par contre, les parties imaginaires s'écartent notablement. L'amortissement de la corde reste alors beaucoup plus faible que celui de la table. Il s'agit d'un résultat remarquable et pas forcément intuitif : en effet, on pourrait penser (à tort !) qu'un mode de corde "accordé" sur un mode de table conduit invariablement à favoriser un transfert d'énergie de la corde vers la table, et donc à augmenter les coefficients d'amortissements. On voit sur cet exemple qu'il n'en est rien, et qu'il a fallu prendre en compte les amortissements des deux systèmes en présence pour interpréter ces phénomènes avec rigueur.

3.3. Conséquences musicales

Pour la guitare, Woodhouse a montré expérimentalement que seuls certains modes en-dessous de 300 Hz environ remplissent la condition $\lambda^2 > (\zeta_1 - \zeta_2)^2$ [452], ce que Gough dans une étude antérieure qualifie de condition de couplage "fort" [196]⁵. Dans le registre aigu de la guitare, on est dans le cas inverse (couplage "faible"). Les modes de cordes sont très peu couplés à la table ce qui permet de garantir une longueur de son suffisante.

La comparaison avec le cas du violon est instructive : un couplage fort en basses fréquences pour le violon comparable à celui de la guitare provoquerait des problèmes importants à cause de l'émergence de la "note de loup"⁶. Inversement, si la guitare avait pour les modes élevés un couplage aussi fort entre corde et table que pour le violon, les notes seraient trop courtes : la guitare sonnerait alors comme un violon "pizzicato". Pourquoi est-ce ainsi alors pour le violon ? tout simplement parce que le violoniste, au contraire du guitariste, peut avec l'archet introduire en permanence de la puissance mécanique à l'instrument. En conséquence, le problème pour celui-ci est de permettre une bonne émission de puissance acoustique ; dans ce cas, il est préférable de garantir une bonne adaptation d'impédance entre les deux éléments, et donc un transfert d'énergie important de la corde vers la table.

En revanche, pour des raisons de longueur de son, la corde de guitare ne doit pas être couplée trop fortement au corps de l'instrument. L'énergie doit rester confinée assez longtemps sur la corde et, en conséquence, la puissance acoustique rayonnée est faible. Pour garantir un couplage faible, le rapport d'impédance entre la corde et la table (au point d'attache) doit être élevé. On voit sur l'expression (6.77) qu'augmenter la masse du chevalet contribue à diminuer le couplage puisque cela conduit à augmenter m_n tout en laissant les autres paramètres inchangés. Au contraire, la masse du chevalet d'un violon doit rester faible. On peut faire une exception pour les guitares de jazz ou les mandolines, instruments où le volume sonore de l'attaque compte plus que la longueur de son.

⁵ D'une façon générale, un couplage fort s'exprime par un coefficient C/D grand, où C est un coefficient de couplage et D un coefficient caractérisant la différence entre deux systèmes.

⁶ Les instrumentistes du quatuor connaissent (et redoutent !) ce phénomène où une note saute brusquement d'une octave, ou encore donne naissance à un son incontrôlable agité et trépidant. Plusieurs auteurs, dont Raman [351] et Schelleng [375] ont montré que ce phénomène survient quand le fondamental de la corde est proche d'une résonance à fort coefficient de qualité du corps de l'instrument. Voir, par exemple, à ce sujet la description qui en est faite par Benade [39].