

# Synthèse de filtres

Roland Badeau,  
roland.badeau@telecom-paris.fr

Master Sciences et Technologies  
Parcours ATIAM - UE TSM

## Partie I

### Filtrage discret

## Causalité et stabilité

- ▶ Produit de convolution :  $y(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h(m)x(n-m)$
- ▶ Causalité :
  - ▶  $y(n)$  ne dépend que de  $x(k)$ ,  $k \leq n$
  - ▶ CNS :  $h(m) = 0$  si  $m < 0$
  - ▶ Propriété : entrée causale  $\Rightarrow$  sortie causale
  - ▶ Remarque : indispensable pour des traitements temps-réel
- ▶ Stabilité :
  - ▶ Définition : entrée bornée  $\Rightarrow$  sortie bornée
  - ▶ CNS :  $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h(m)| < +\infty$  ( $h$  dans  $l^1(\mathbb{Z})$ )
  - ▶ Propriété : réponse fréquentielle continue
  - ▶ Remarque : indispensable numériquement
    - ▶ Si  $x_q = x + e$ , alors  $y_q = y + h * e$ .
    - ▶ Si  $h \in l^1(\mathbb{Z})$ ,  $\|h * e\|_\infty \leq \|h\|_1 \|e\|_\infty$ , sinon  $h * e$  peut diverger.

## Filtres idéaux

- ▶ Filtre passe-bas (spectre périodique)
  - ▶ Réponse en fréquence :  $H(e^{2i\pi v}) = \begin{cases} 1 & \text{si } |v| < v_c \\ 0 & \text{si } |v| > v_c \end{cases}$
  - ▶ Réponse impulsionnelle :  $h(n) = 2v_c \text{sinc}(2v_c n)$
- ▶ Exercice : filtre passe-bande
  - ▶ Réponse en fréquence :  $H(e^{2i\pi v}) = \begin{cases} 1 & \text{si } ||v| - |v_0|| < v_c \\ 0 & \text{si } ||v| - |v_0|| > v_c \end{cases}$
  - ▶ Réponse impulsionnelle :  $h(n) = 4v_c \text{sinc}(2v_c n) \cos(2\pi v_0 n)$
- ▶ Causalité ? Stabilité ?

## Exemple :

- ▶  $x(n)$  est un échelon :  $x(n) = 1_{[0,+\infty[}(n)$
- ▶  $h(n)$  est un filtre moyennneur :  $h(n) = \frac{1}{N} 1_{[0,N-1]}(n)$
- ▶ De  $n = 0$  à  $N-2$  : régime transitoire (rampe)
- ▶ De  $n = N-1$  à  $+\infty$  : régime stationnaire ou permanent (constante)

- ▶ Réponse en fréquence :  $H(e^{i2\pi\nu}) = H_R(\nu)e^{i\phi(\nu)}$
- ▶ Retards de phase et de groupe

$$\begin{cases} \tau_p(\nu_0) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\phi(\nu_0)}{\nu_0} \\ \tau_g(\nu_0) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi}{d\nu}(\nu_0) \end{cases}$$

- ▶ Réponse en fréquence au voisinage de  $\nu_0$

$$H(e^{i2\pi\nu}) \simeq H_R(\nu_0) e^{-i2\pi(\nu_0\tau_p(\nu_0) + (\nu - \nu_0)\tau_g(\nu_0))}$$

- ▶ Filtrage d'un signal à bande étroite ( $y = h * x$ )

$$x(n) = a(n)e^{i2\pi\nu_0 n} \Rightarrow y(n) \simeq H_R(\nu_0)a(n - \tau_g(\nu_0))e^{i2\pi\nu_0(n - \tau_p(\nu_0))}$$

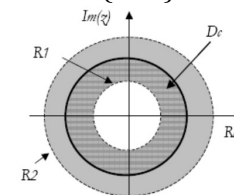
- ▶ Filtres à phase linéaire (retard constant)

## Partie II

## Transformée en Z

## Transformée en Z

- ▶ Définition :  $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)z^{-n}$ , appelée **Fonction de Transfert**
- ▶ Domaine de convergence :  $\mathcal{D} = \{z / \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)||z|^{-n} < +\infty\}$
- ▶ Cas causal :  $R = \inf\{|z|, z \in \mathbb{C} / \sum h(n)z^{-n} < +\infty\}$ ,  
 $\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$



$$z = 1 \text{ en } \nu = 0$$

$$z = i \text{ en } \nu = 1/4$$

- ▶ Filtres RIF :  $D = \mathbb{C} \setminus 0$  ou  $\infty$
- ▶ Anti-causalité :  $\mathcal{D}$  est un disque
- ▶ **Causalité** :  $\mathcal{D}$  est le complémentaire d'un disque
- ▶ Cas général :  $\mathcal{D}$  est une couronne (ou  $\emptyset$ )

- ▶ **Stabilité** : la couronne  $\mathcal{D}$  contient le cercle unité
  - ▶ La TZ coïncide avec la TFTD sur le cercle unité
- ▶ **Linéarité** :  $a_1 h_1 + a_2 h_2 \rightarrow a_1 H_1 + a_2 H_2$  ( $\mathcal{D} \supset \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ )
- ▶ **Retard** :  $y(n) = x(n-k) \Leftrightarrow Y(z) = z^{-k} X(z)$
- ▶ **Produit de convolution**
  - ▶ Si  $y = h * x$ ,  $Y(z) = H(z)X(z)$ ,  $\mathcal{D}_y \supset \mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_x$
- ▶ **Insertion de zéros** :  $Y(z) = X(z^L) \Leftrightarrow y(nL) = x(n)$ ,  $y = 0$  ailleurs
- ▶ **Filtre inverse**
  - ▶ Si  $h * h_i = \delta$ ,  $H(z)H_i(z) = 1$  pour  $z \in \mathcal{D}_h \cap \mathcal{D}_{h_i}$

- ▶  $h(n) = \delta(n) \Rightarrow H(z) = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- ▶  $h(n) = \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(n) \Rightarrow H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad \forall |z| > 1$
- ▶  $h(n) = \mathbf{1}_{[0 \dots N-1]}(n) \Rightarrow H(z) = \frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \quad \forall z \neq 0$
- ▶ **Filtre AR1** :
  - ▶  $h(n) = \begin{cases} a^n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases} \Rightarrow H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}},$   
 $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} / |z| > |a|\}$
  - ▶  $h(n) = \begin{cases} -a^n & \text{si } n < 0 \\ 0 & \text{si } n \geq 0 \end{cases} \Rightarrow H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}},$   
 $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} / |z| < |a|\}$

## Filtre autorégressif d'ordre 1

Relation E/S	$y(n) - ay(n-1) = x(n)$
Fonction de transfert	$H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$

Implémentation	$y(n) = ay(n-1) + x(n)$	$y(n) = \frac{y(n+1) - x(n+1)}{a}$
RI ( $x(n) = \delta_0(n)$ )	$h(n) = a^n \mathbf{1}_{\{n \geq 0\}}$	$h(n) = -a^n \mathbf{1}_{\{n < 0\}}$
Domaine $\mathcal{D}$	$\{z \in \mathbb{C} /  z  >  a \}$	$\{z \in \mathbb{C} /  z  <  a \}$
Propriétés	causale, stable si $ a  < 1$	anti-causale, stable si $ a  > 1$

## Partie III

## Filtres récursifs

- ▶ Relation entrée-sortie :  $\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k)$

- ▶ Calcul de la sortie (implémentation causale)

$$y(n) = \frac{1}{a_0} \left[ \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) \right]$$

- ▶ Fonction de transfert :  $H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1-c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1-d_k z^{-1})}$

- ▶ Filtres Auto-Régressifs (si  $M = 0$ , AR d'ordre  $N$ )

$$y(n) = \frac{b_0}{a_0} x(n) - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} y(n-k)$$

- ▶ Filtres à Réponse Impulsionnelle Finie

- ▶ Si  $N = 0$ , filtre RIF de taille  $M$

$$h(n) = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0} & \text{si } n = 0 \dots M \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- ▶ Filtres causaux, inconditionnellement stables
- ▶ Si la RI est symétrique ou antisymétrique, la phase est linéaire

## Filtres récursifs

- ▶ Fonction de transfert d'un filtre récursif

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} = \frac{b_0 \prod_{k=1}^M (1-c_k z^{-1})}{a_0 \prod_{k=1}^N (1-d_k z^{-1})}$$

- ▶ Définition des pôles et des zéros
- ▶ Domaine de convergence :  $\mathcal{D}$  est une couronne limitée par 2 pôles, et n'en contenant aucun
- ▶ Filtres **stables** :  $\mathcal{D}$  est la plus grande couronne contenant le cercle unité et aucun pôle
- ▶ Filtres **stables et causaux** : dont tous les pôles sont strictement à l'intérieur du cercle unité
- ▶ Si les  $a_k$  et  $b_k$  sont réels, les pôles et zéros sont soit réels, soit vont par paires conjuguées

## Calcul de la RI à partir de la TZ

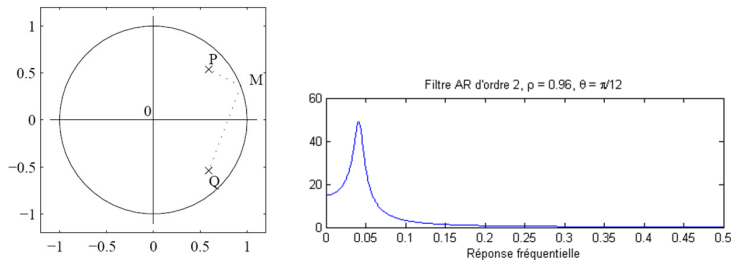
1. Extraire si nécessaire de  $H(z)$  un terme en  $z^n$ , de sorte que les numérateur et dénominateur de  $H(z)$  ne contiennent plus que des puissances négatives de  $z$  plus une constante
2. Factoriser le numérateur et dénominateur en monômes en  $z^{-1}$
3. Décomposer  $H(z)$  en éléments simples en  $z^{-1}$
4. Développer les éléments simples en séries entières :
  - ▶ en  $z^{-1}$  si on calcule la RI causale, ou si on calcule la RI stable et que le pôle est à l'intérieur du cercle unité ;
  - ▶ en  $z$  si on calcule la RI anti-causale, ou si on calcule la RI stable et que le pôle est à l'extérieur du cercle unité.
5. Identifier l'expression obtenue avec  $H(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(n) z^{-n}$

Exemple :  $H(z) = \frac{1}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}}$

## Partie IV

### Filtres RIF à phase linéaire

Exemple (filtre AR 2) :  $H(z) = \frac{1}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}} = \frac{1}{(1-pz^{-1})(1-p^*z^{-1})}$



$$|H(z)| = \frac{1}{PM \times QM}$$

$$\arg H(z) = 2\arg(OM) - \arg(PM) - \arg(QM)$$

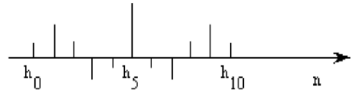
### Filtres RIF à phase linéaire

- ▶ Réponse impulsionnelle :  $h(n) \in \mathbb{R}$ ,  $n = 0 \dots N-1$
- ▶ Réponse en fréquence :  $H(e^{i2\pi v}) = e^{i2\pi(\beta - \alpha v)} H_R(v)$
- ▶ Retards de groupe et de phase constants et égaux (si  $\beta = 0$ )
- ▶ Avantages : toujours **causaux et stables**, conservent la forme d'onde d'un signal à bande étroite (si  $\beta = 0$ )
- ▶ Inconvénient : complexité de calcul élevée

### Caractérisation

- ▶ **1 - périodicité** de  $H(e^{i2\pi v}) \Rightarrow \alpha = p/2$ ,  $p \in \mathbb{Z}$  et  $H_R$  2-periodique
- ▶ **Symétrie hermitienne**  $\Rightarrow d = e^{2i\pi\beta} = 1$  ou  $i$  et  $H_R$  paire ou impaire
- ▶ Comme  $H_R(v)$  est 2-périodique, on peut définir  $G(e^{i2\pi v}) = d H_R(2v)$  où  $g(n)$  est réelle, paire ou impaire
- ▶ On peut donc écrire  $H(z^2) = z^{-p} G(z)$  (filtre de longueur  $2N-1$ )
- ▶ On choisit  $p = N-1$  pour un filtre causal
- ▶ **4 possibilités** selon  $d$  et la parité de  $N$  :
  - ▶  $d = 1$ ,  $N$  pair ou impair :  $h(n) = h(N-1-n)$
  - ▶  $d = i$ ,  $N$  pair ou impair :  $h(n) = -h(N-1-n)$

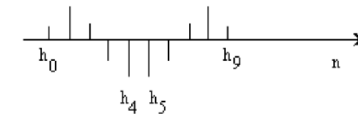
- Type 1 :  $N$  impair, symétrique ( $d = 1$ )



$$H(e^{i2\pi v}) = e^{-i2\pi v \frac{N-1}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a_n \cos(2\pi v n)$$

- Utilisation : passe-bas, passe-haut, passe-bande

- Type 2 :  $N$  pair, symétrique ( $d = 1$ )



$$H(e^{i2\pi v}) = e^{-i2\pi v \frac{N-1}{2}} \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} b_n \cos(2\pi v (n - \frac{1}{2}))$$

- Propriété :  $H(-1) = 0$  ( $v = \frac{1}{2}$ )
- Utilisation : passe-bas, passe-bande

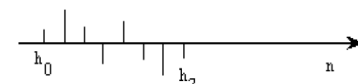
- Type 3 :  $N$  impair, antisymétrique ( $d = i$ )



$$H(e^{i2\pi v}) = i e^{-i2\pi v \frac{N-1}{2}} \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c_n \sin(2\pi v n)$$

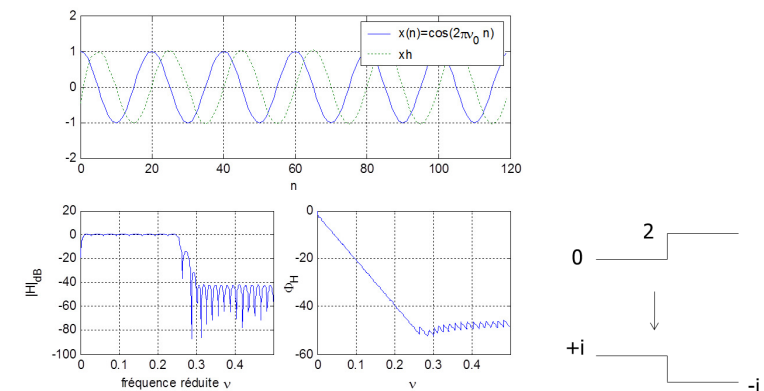
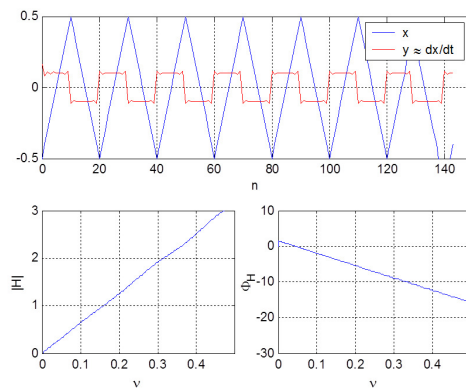
- Propriété :  $H(1) = H(-1) = 0$  ( $v = 0$  ou  $\frac{1}{2}$ )
- Utilisation : différenciateur ( $H(f) = i2\pi f$ ), transformateur de Hilbert ( $H(f) = -i \text{sign}(f)$ ) sous forme de passe-bande

- Type 4 :  $N$  pair, antisymétrique ( $d = i$ )



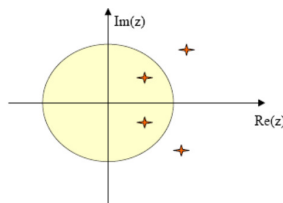
$$H(e^{i2\pi v}) = i e^{-i2\pi v \frac{N-1}{2}} \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} d_n \sin(2\pi v (n - \frac{1}{2}))$$

- Propriété :  $H(1) = 0$  ( $v = 0$ )
- Utilisation : différenciateur ( $H(f) = i2\pi f$ ), transformateur de Hilbert ( $H(f) = -i \text{sign}(f)$ ) sous forme de passe-haut



- ▶ Zéros complexes hors du cercle unité :

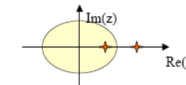
$$(1 - \rho e^{i\theta} z^{-1})(1 - \rho e^{-i\theta} z^{-1})(1 - \frac{1}{\rho} e^{i\theta} z^{-1})(1 - \frac{1}{\rho} e^{-i\theta} z^{-1})$$



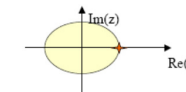
- ▶ Zéros sur le cercle unité



- ▶ Zéros réels



- ▶ Zéro réel sur le cercle unité



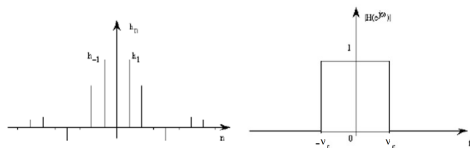
Type I $N$ impair symétrique		-	Passe-bas Passe-Haut Passe-Bande
Type II $N$ pair symétrique		$H(-1) = 0$	Passe-bas, Passe-bande
Type III $N$ impair antisym.		$H(1) = 0$ $H(-1) = 0$	Différenciateur, Transformateur de Hilbert, Passe-bande
Type IV $N$ pair antisym.		$H(1) = 0$	Différenciateur, Transformateur de Hilbert, Passe Haut

## Partie V

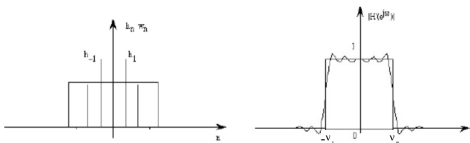
### Filtres RIF : méthode de la fenêtre

## Méthode de la fenêtre

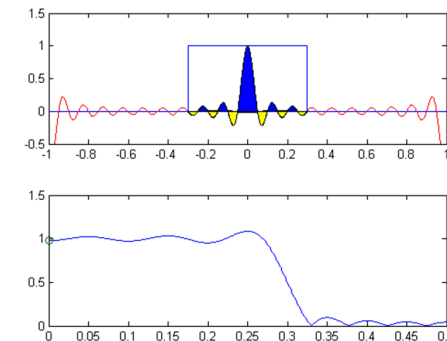
- Exemple : le filtre passe-bas
- Filtre passe-bas idéal :  $h(n) = 2v_c \text{sinc}(2v_c n)$ 
  - La réponse est RII non causale, non stable



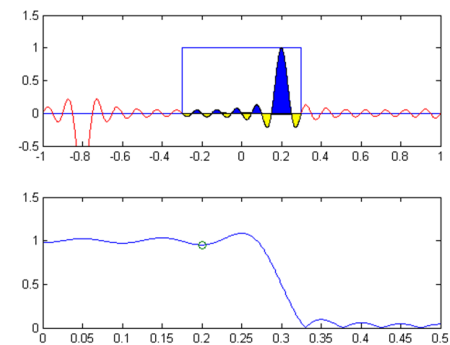
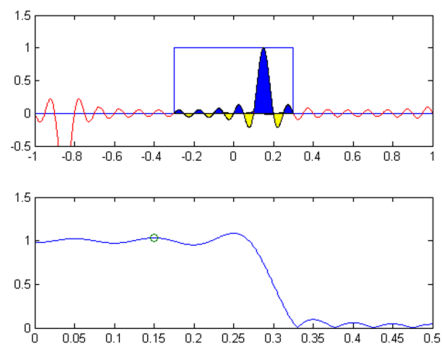
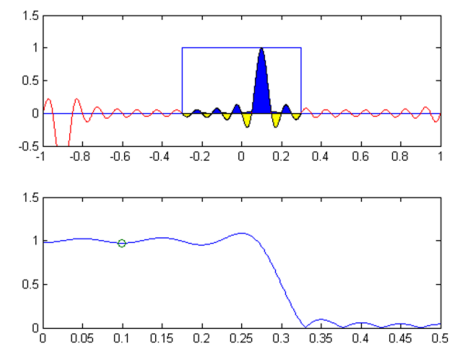
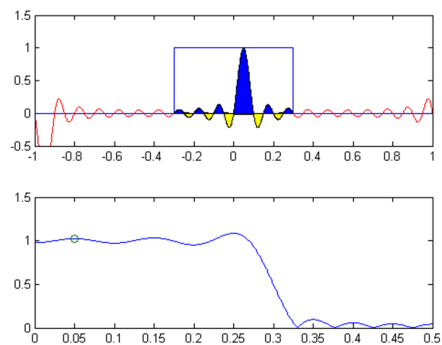
- Synthèse d'un filtre RIF causal de type I
  - Troncature et décalage temporel

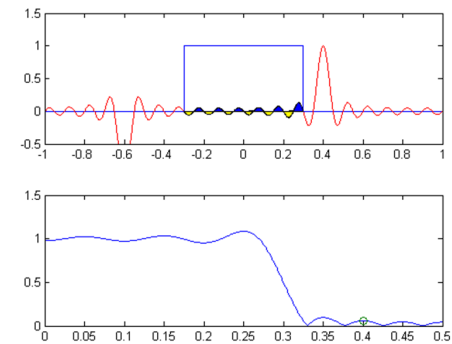
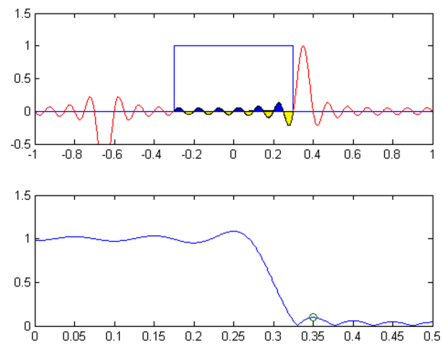
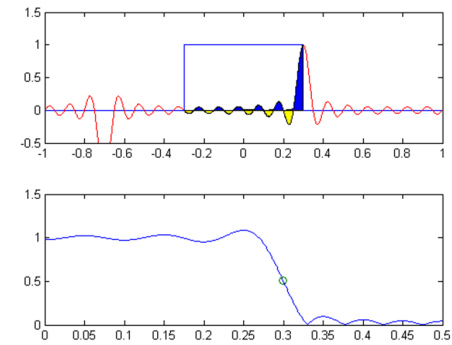
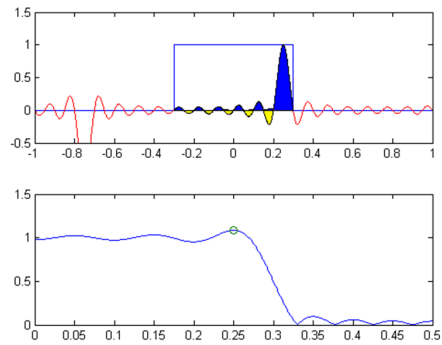


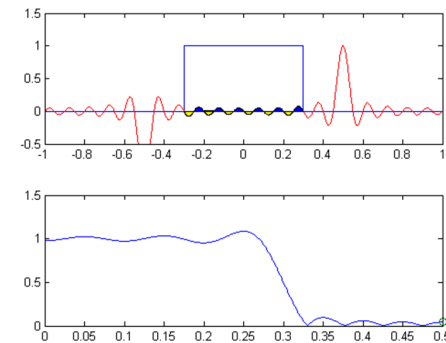
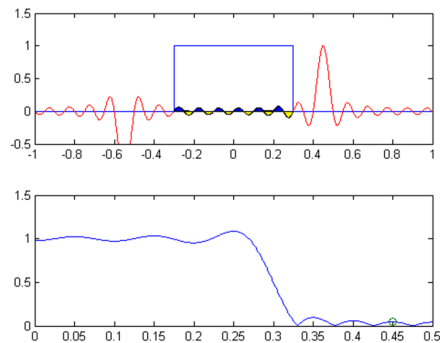
## Phénomène de Gibbs







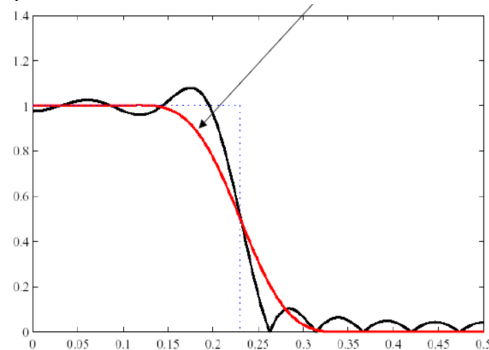




## Choix d'une fenêtre adéquate

$$h(n) = 2v_c \text{sinc}(2v_c n) w(n)$$

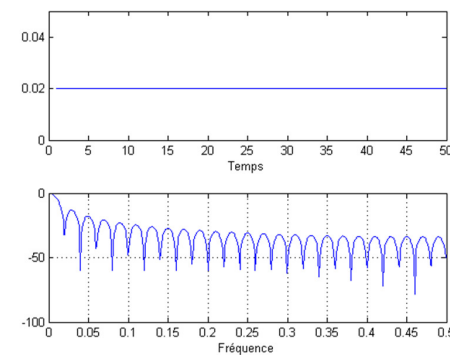
où  $w(n)$  est une fenêtre symétrique de support fini



## Fenêtre rectangulaire

$$w(n) = \mathbf{1}_{[0 \dots P-1]}(n)$$

- Largeur :  $2/P$ , 2ème lobe : -13 dB, décroissance : -6 dB / octave

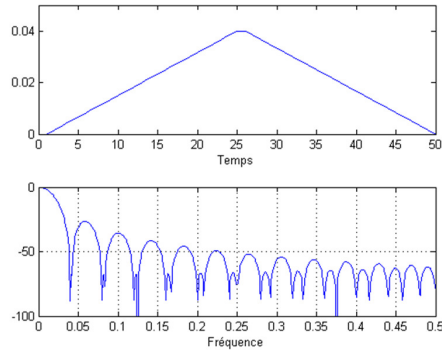




## Fenêtre de Bartlett

$$w(n) = 1 - \left| \frac{2n}{P-1} - 1 \right|$$

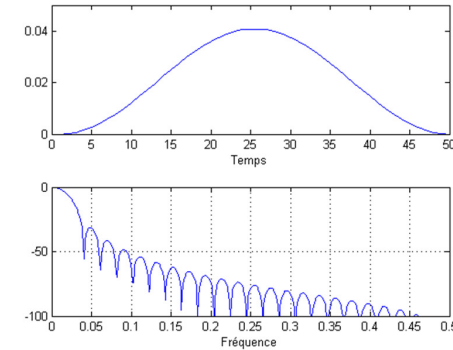
- Largeur :  $4/P$ , 2ème lobe : -26 dB, décroissance : -12 dB / octave



## Fenêtre de Hann

$$w(n) = 0.5 - 0.5 \cos(2\pi n / (P-1))$$

- Largeur :  $4/P$ , 2ème lobe : -31 dB, décroissance : -18 dB / octave



45/68

Une école de l'IMT

Synthèse de filtres



46/68

Une école de l'IMT

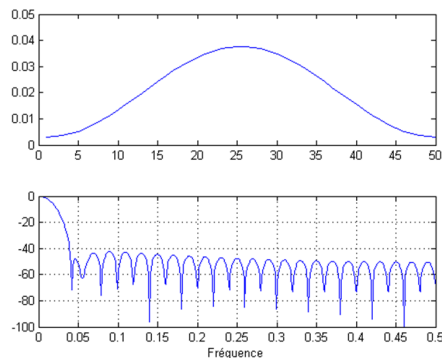
Synthèse de filtres



## Fenêtre de Hamming

$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos(2\pi n / (P-1))$$

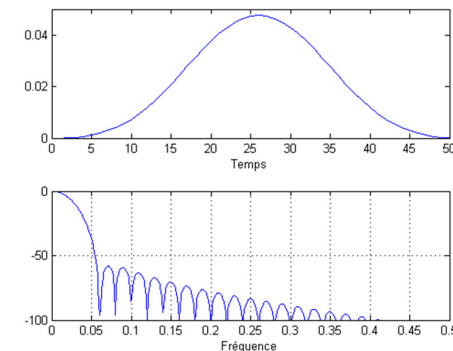
- Largeur :  $4/P$ , 2ème lobe : -41 dB, décroissance : -6 dB / octave



## Fenêtre de Blackman

$$w(n) = 0.4266 - 0.4965 \cos(2\pi n / (P-1)) + 0.076 \cos(4\pi n / (P-1))$$

- Largeur :  $6/P$ , 2ème lobe : -57 dB, décroissance : -18 dB / octave



47/68

Une école de l'IMT

Synthèse de filtres



48/68

Une école de l'IMT

Synthèse de filtres



- ▶ Avantages :
  - ▶ Stabilité, causalité
  - ▶ Filtre à phase linéaire si fenêtre symétrique
- ▶ Inconvénients :
  - ▶ les bandes de transition sont élargies
  - ▶ les ondulations parasites
    - ▶ sont dues aux lobes secondaires
    - ▶ n'ont pas une amplitude constante
    - ▶ sont les mêmes en bandes passante et atténuée

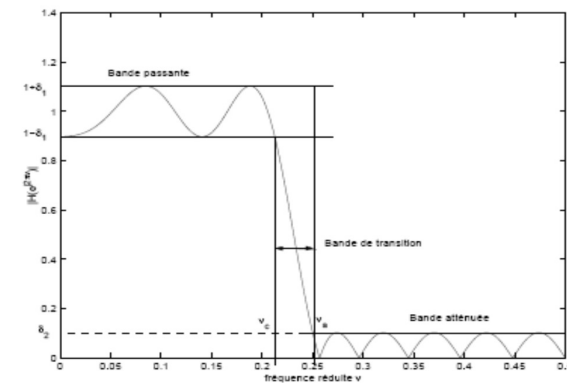
## Partie VI

## Filtres RIF : méthodes itératives

# Méthodes itératives

- ▶ Avantages
  - ▶ Design optimal
  - ▶ Méthode flexible
  - ▶ Ondulations d'amplitude constante
  - ▶ Ordre minimum pour un gabarit donné
- ▶ Inconvénients
  - ▶ Synthèse coûteuse en temps de calcul
  - ▶ Pas approprié pour du temps-réel
  - ▶ Pas exploitable pour des filtres longs (problèmes numériques)

# Gabarit d'un filtre



- Factorisation :  $H_R(v) = P(v)Q(v)$

$H_R(v)$	$P(v)$	$Q(v)$
$\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a_n \cos(2\pi v n)$	$\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a_n \cos(2\pi v n)$	1
$\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} b_n \cos\left(2\pi v \left(n - \frac{1}{2}\right)\right)$	$\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} b'_n \cos(2\pi v n)$	$\cos(\pi v)$
$\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c_n \sin(2\pi v n)$	$\sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} c'_n \cos(2\pi v n)$	$\sin(2\pi v)$
$\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d_n \sin\left(2\pi v \left(n - \frac{1}{2}\right)\right)$	$\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} d'_n \cos(2\pi v n)$	$\sin(\pi v)$

- Formulation du problème : minimisation de l'erreur

$$E(v) = W(v)|H_D(v) - H_R(v)|$$

à  $N$ ,  $v_c$  et  $v_a$  fixés

- On pose  $W(v) = 1/\delta_1$  en bande passante,  $W(v) = 1/\delta_2$  en bande atténuée, et  $W(v) = 0$  en bande de transition
- Avec  $P(v) = \sum_{n=0}^M a_n \cos(2\pi v n)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} E(v) &= W(v)(H_D(v) - P(v)Q(v)) \\ &= W'(v)(H'_D(v) - P(v)) \end{aligned}$$

## Théorème d'alternance

- Minimisation au sens de Chebyshev :

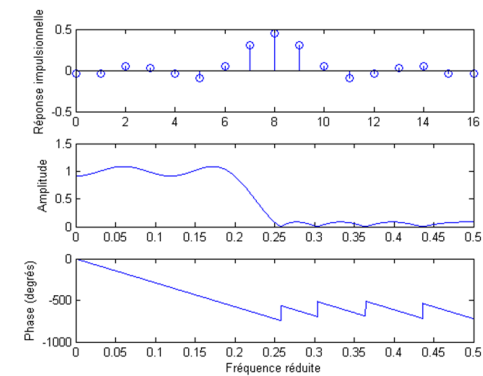
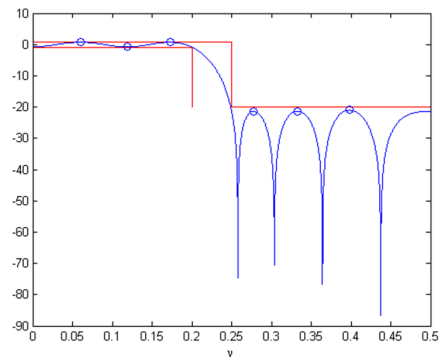
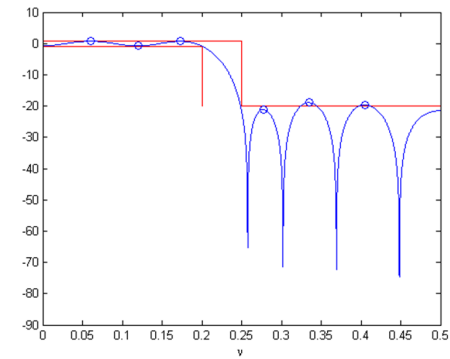
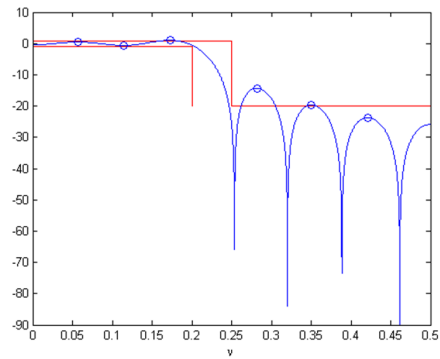
$$H(e^{i2\pi v}) = \min_H \|E(v)\|_\infty$$

sur un ensemble fermé de fréquences  $B$

- Théorème d'alternance** : l'unique et meilleure approximation est obtenue lorsque il existe  $M+2$  fréquences  $v_0 \dots v_{M+1}$  dans  $B$  telles que  $E(v_k) = \pm(-1)^k \delta$  où  $\delta = \|E(v)\|_\infty$

## Algorithme de Remez

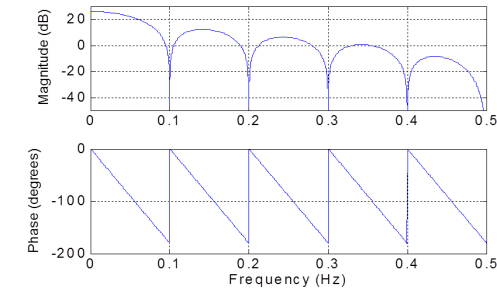
- Initialisation : on fixe les  $M+2$  alternances uniformément dans  $B$
- Itération
  - Résolution directe du système linéaire
 
$$\sum_{n=0}^M a_n \cos(2\pi v_k n) + \frac{(-1)^k \delta}{W(v_k)} = H_D(v_k)$$
 (ou solution par interpolation Lagrangienne)
  - Recherche des extrema de ce polynôme
  - Choix des nouvelles valeurs des  $v_k$
- Convergence en quelques itérations



## Partie VII

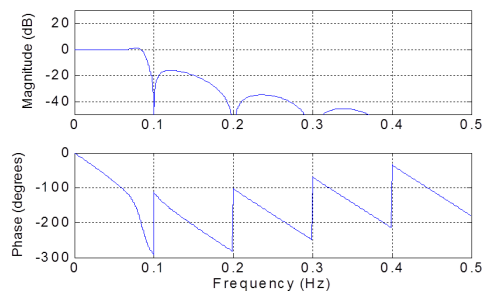
## Synthèse de filtres récurrents

- Exemple :  $N(z) = \prod_k (1 - z_k z^{-1})$  avec des zéros aux fréquences 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5

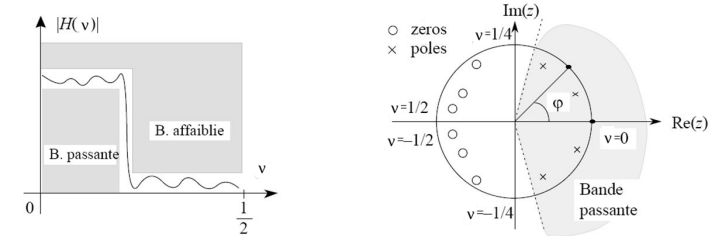


## Généralités

- Exemple :  $H(z) = N(z)/D(z)$  où  $D(z) = (1 - pz^{-1})(1 - p^* z^{-1})$ , avec  $p = 0.95e^{i2\pi 0.085}$



- Position des pôles et des zéros

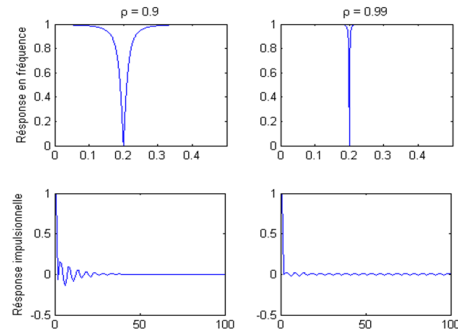




$$H(z) = \frac{1 - e^{+i2\pi\nu_c} z^{-1}}{1 - \rho e^{+i2\pi\nu_c} z^{-1}} \frac{1 - e^{-i2\pi\nu_c} z^{-1}}{1 - \rho e^{-i2\pi\nu_c} z^{-1}}$$

$$= \frac{1 - 2\cos(2\pi\nu_c)z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2\rho\cos(2\pi\nu_c)z^{-1} + \rho^2 z^{-2}}$$

- Remarque : la RI est longue si  $\rho \rightarrow 1$



- Filtres analogiques :  $H_a(s) = \int_{\mathbb{R}} h_a(t) e^{-st} dt$  où  $s = 2i\pi f$
- Filtres numériques :  $H(z) = \sum_{\mathbb{Z}} h(n) z^{-n}$  où  $z = e^{2i\pi\nu}$
- Méthode des trapèzes pour approcher  $x(nT) = x((n-1)T) + \int_{(n-1)T}^{nT} x'(t) dt$
- Exemple du système  $y(t) = x'(t)$  (filtre dérivateur :  $H_a(s) = s$ )
- Transformée bilinéaire :  $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$
- Lien fréquentiel :  $f = \frac{1}{\pi T} \tan(\pi\nu)$

