Traitement des signaux aléatoires

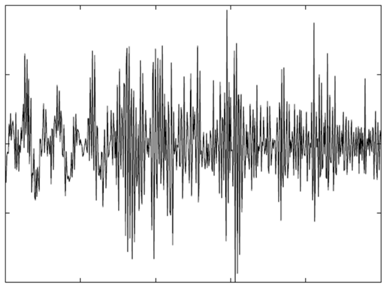
Roland Badeau,
roland.badeau@telecom-paris.fr

Master Sciences et Technologies
Fondamentaux pour ATIAM

Introduction

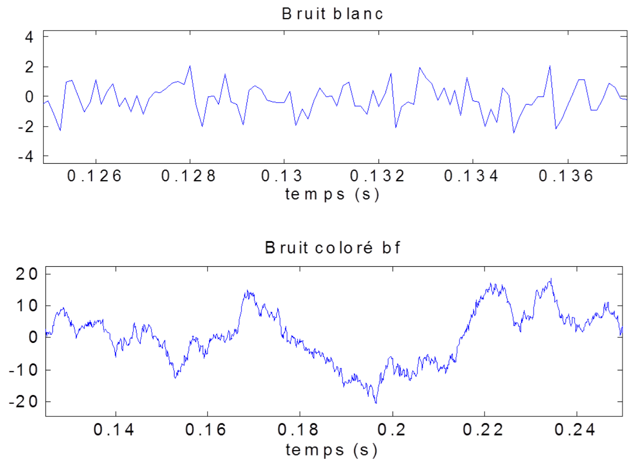
- Signaux discrets déterministes réels x_n
  - x_n est prédictible de manière exacte connaissant x_m pour $m < n$
  - Exemple : sinusoïde réelle $x_n = \cos(2\pi\nu_0 n)$
  - Formule de prédiction : $x_n = 2\cos(2\pi\nu_0)x_{n-1} - x_{n-2}$
- Processus aléatoires réels X_n
  - On ne peut généralement pas prédire X_n de manière exacte connaissant X_m pour $m < n$
  - On peut seulement définir une probabilité que X_n appartienne à un intervalle donné

Exemple : signal de parole

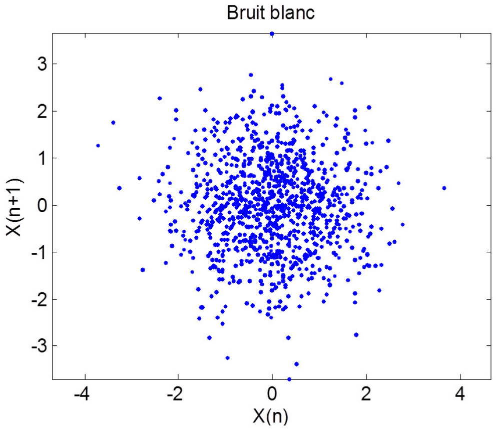


- Trajectoire de 500 échantillons d'un signal de parole

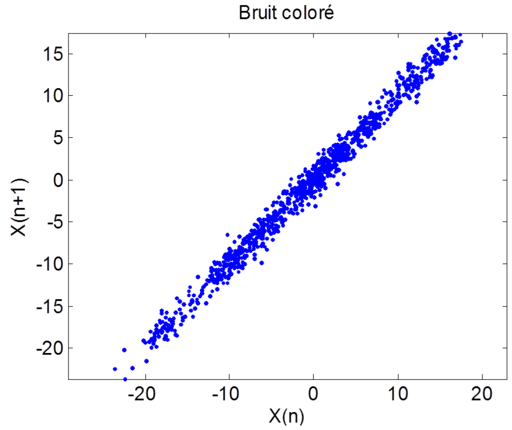
Exemples : "bruits"



Exemple : estimer la dépendance au passé



Exemple : estimer la dépendance au passé



Vocabulaire

- Déterministe ou aléatoire ?
  - déterministe : on dispose d'une règle de calcul
  - aléatoire : présente une variabilité qu'un modèle déterministe est inefficace à représenter car
    - non parcimonieux
    - pas ou peu prédictif
- Problèmes posés
  - Comment caractériser (modéliser) ?
  - Comment estimer les paramètres du modèle ?

Notions et notations

- Processus aléatoires à temps discret
  - chaque échantillon est une variable aléatoire (V.A.), indexée par le temps discret $X_n, n \in \mathbb{Z}$
  - définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, P)$
    - Exemple $\Omega = \mathbb{R}$ $\mathscr{F} = \mathscr{B}$ (tribu borélienne) $P(\Omega) = 1$
  - un des possibles = une *épreuve* (notée $\omega \in \Omega$) = une *réalisation* ou *trajectoire* du processus

Variables aléatoires réelles

- Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leq x)$
- Densité de probabilité : $p = F'$ si F est dérivable et $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(u)du$
- Espérance : $\mathbb{E}[X] = m$
- Variance : $\text{Var}[X] = \sigma^2 = \mathbb{E}[(X-m)^2] = \mathbb{E}[X^2] - m^2 \geq 0$
- Estimation : $\hat{m} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} X_n$
  - Loi des grands nombres : convergence presque sûre vers m

  $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{N} (X_n - \hat{m})^2$

Variables aléatoires réelles

- Fonction caractéristique : $\phi_X(u) = \mathbb{E}(e^{-2i\pi uX})$
- Indépendance : $\mathbb{E}[f(X)g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(Y)]$ pour toutes fonctions f et g
  - Si $Z = X+Y$, $\phi_Z(u) = \phi_X(u)\phi_Y(u)$
- Exemple : loi uniforme : $X \sim \mathscr{U}([0,1])$
  - $m = 1/2$, $\sigma^2 = 1/12$
- Exemple : loi gaussienne : $X \sim \mathscr{N}(m, \sigma^2)$

  $p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \qquad \phi_X(u) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}u^2 + jmu}$
  - Entièrement caractérisée par m et σ^2
  - Somme de gaussiennes = gaussienne

Vecteurs aléatoires réels

- Fonction de répartition : $F(\underline{X}) = P(X_1 \leq x_1 \dots X_d \leq x_d)$
- Densité de probabilité : $p(x_1, \dots, x_d) = \frac{\partial^d F(x_1, \dots, x_d)}{\partial x_1 \dots \partial x_d}$ si F est différentiable et $F(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_d} p(u_1, \dots, u_d) du_1 \dots du_d$
- Vecteur moyenne : $\mathbb{E}[X_k] = m_k$
- Matrice de covariance : $\text{covar}[X_n, X_k] = \mathbb{E}[(X_n - m_n)(X_k - m_k) = R_{nk}$
  - Structure hermitienne et positive
- Exemples : vecteurs gaussiens
  - Toute combinaison linéaire de coefficients est une V.A. gaussienne $\phi_X(u_1, \dots, u_d) = e^{-\frac{1}{2}u^T \mathbf{R} u + j\mathbf{m}^T u}$

    $p_X(x_1, \dots, x_d) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det(\mathbf{R})}} e^{-\frac{1}{2}(X-\mathbf{m})^T \mathbf{R}^{-1}(X-\mathbf{m})}$

Loi temporelle d'un processus

- Processus à support temporel fini : vecteur aléatoire de dimension k finie, constitué de valeurs du processus prises à k instants différents.
- Décrit par sa loi de répartition conjointe (dans le cas réel) : $F(x_1 \dots x_k; n_1 \dots n_k) = P[X_{n_1} \leq x_1, X_{n_2} \leq x_2 \dots X_{n_k} \leq x_k]$
- Souci en dimension infinie : $P(|X_n| \leq M \ \forall n \in \mathbb{Z})$?
  $\rightarrow$ il faut décrire le processus $\forall n \in \mathbb{Z}$
- Heureusement les lois conjointes pour tout k fini suffisent (théorème d'existence et d'unicité de Kolmogorov)

Moments d'ordre 1

- Moyenne d'un processus : $m_X(n) = \mathbb{E}(X_n)$
  - dépend a priori du temps
- Définition du processus centré $X_n^c = X_n - m_X(n)$
- Exemples : calculer m_X et X^c pour
  - rampe bruitée $X_n = \alpha n + B_n$ avec $B_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$
  - processus harmoniques
    $X_n = A\cos(\omega_0 n)$ avec $A \sim \mathcal{U}([0,1])$
    $X_n = a\cos(\omega_0 n + \phi)$ avec $\phi \sim \mathcal{U}([0, 2\pi])$
    $X_n = A\cos(\omega_0 n + \phi)$ avec A et ϕ indépendants

Propriétés du second ordre

- Fonction d'autocovariance : $R_X(n_1, n_2) = \mathbb{E}[X_{n_1}^c \overline{X_{n_2}^c}]$
  - $R_X(n_1, n_2) = \mathrm{Var}(X_n)$ si $n_1 = n_2 = n$
  - $R_X(n, n) \geq 0$, avec égalité ssi X_n est presque sûrement (p.s.) constante
  - Symétrie hermitienne : $R_X(n_1, n_2) = \overline{R_X(n_2, n_1)}$
  - Inégalité de Schwarz : $|R_X(n_1, n_2)|^2 \leq R_X(n_1, n_1) R_X(n_2, n_2)$
  - Positivité : $\forall k$, $\forall n_1 \dots n_k$, $\forall \lambda_1 \dots \lambda_k \in \mathbb{C}$,
    $\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \lambda_i \overline{\lambda_j} R_X(n_i, n_j) \geq 0$
    - Preuve : $\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^k \lambda_i X_{n_i}^c\right|^2 \geq 0$
  - Exemple : calculer R_X pour B_n IID $\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \forall n$ et $X_n = \alpha n + B_n$

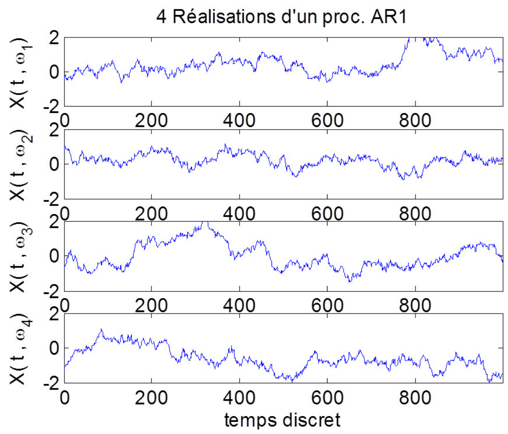
Propriétés du second ordre

- Fonction d'intercovariance : $R_{XY}(n_1, n_2) = \mathbb{E}[X_{n_1}^c \overline{Y_{n_2}^c}]$
  - Symétrie hermitienne :
    $R_{XY}(n_1, n_2) = \overline{R_{YX}(n_2, n_1)}$
  - Inégalité de Schwarz :
    $|R_{XY}(n_1, n_2)|^2 \leq R_X(n_1, n_1) R_Y(n_2, n_2)$
  - Positivité ?

Stationnarité

- Caractérise la permanence des propriétés statistiques du processus au cours du temps
- *Stationnarité stricte* : la loi temporelle est invariante par décalage $F(x_1 \dots x_k; n_1 \dots n_k) = F(x_1 \dots x_k; n_1 + \tau \dots n_k + \tau)$
  - Exemple : suite de variables aléatoires IID

Exemple d'un processus autorégressif



- Génération
  - Z_n centré, IID
    $X_n = aX_{n-1} + Z_n$
- Ergodicité
  - moyenne temporelle
  - moyenne statistique
  - important si 1 seule réalisation

Ergodicité

- Processus ergodique
  - Possibilité d'évaluer les propriétés statistiques à partir d'une seule réalisation
- Exemple : suite de variables IID
  - Loi forte des grands nombres :

$$S(N) = \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} X_n \underset{p.s.}{\rightarrow} \mathbb{E}[X_n]$$

$$\Rightarrow m_X = \lim_{N\to+\infty} S(N) = \mathbb{E}[X_n]$$

Ergodicité

- Processus stationnaire ergodique :
  - $\forall k \in \mathbb{N}^+, \forall n_1 \dots n_k, \forall f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}\left|f(X_{n_1}, \dots, X_{n_k})\right| < +\infty$,
    l'expression $\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} f(X_{n_1+n}, \dots, X_{n_k+n})$
    converge p.s. vers $\mathbb{E}\left[f(X_{n_1}, \dots, X_{n_k})\right]$
- Exemples
  - Toute suite de variables IID est ergodique
  - $X_n = A$ centrée n'est pas ergodique, car $\mathbb{E}[X_n] = 0$ et $\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} X_n = A$

Processus Stationnaires au Sens Large

- Suite de variables X_n telles que
  - $\mathbb{E}[|X_n|^2] < +\infty$
  - $\mathbb{E}[X_n] = m_X$ ne dépend pas de n,
  - $R_X(k) = \mathbb{E}[X^c_{n+k}\overline{X^c_n}]$ ne dépend que de k ($X^c_n = X_n - m_X$)
- Propriétés
  - Si $\mathbb{E}[|X_n|^2] < +\infty$, stationnarité stricte $\Rightarrow$ stationnarité large
  - Si X_n est gaussien, stationnarité stricte $\Leftrightarrow$ stationnarité large

Processus SSL

- Fonction d'autocovariance : $R_X(k) = \mathbb{E}[X^c_{n+k}\overline{X^c_n}]$
  - $\mathrm{Var}(X) = R_X(0) \geq 0$
  - Symétrie hermitienne : $R_X(-k) = \overline{R_X(k)}$
  - Positivité : $\forall k$, $\forall n_1 \dots n_k$, $\forall \lambda_1 \dots \lambda_k \in \mathbb{C}$, $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \lambda_i \overline{\lambda_j} R_X(n_i - n_j) \geq 0$
  - Valeur à l'origine : $|R_X(k)| \leq R_X(0)$ (inégalité de Schwarz)
    - Preuve : $|\mathbb{E}[X^c_{n+k}\overline{X^c_n}]|^2 \leq \mathbb{E}[|X^c_{n+k}|^2]\mathbb{E}[|X^c_n|^2]$
  - Remarque : puissance d'un processus SSL = moment d'ordre 2 à l'origine $P_X = \mathbb{E}(|X_n|^2) = R_X(0) + |m_X|^2$
- Fonction d'intercovariance : $R_{YX}(k) = \mathbb{E}[Y^c_{n+k}\overline{X^c_n}]$

Processus SSL

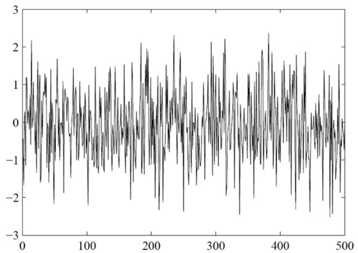
- Vecteur aléatoire $\underline{X} = [X_{n_0}, X_{n_0+1} \dots X_{n_0+n-1}]^T$
- Vecteur moyenne (coefficients égaux) : $\mathbb{E}[\underline{X}] = m_X[1, 1 \dots 1]^T$
- Matrice de covariance :
  $\mathbf{R}_{XX} = \mathbb{E}[\underline{X}^c \underline{X}^{cH}] =$
  $$\begin{bmatrix} R_X(0) & R_X(-1) & \dots & R_X(-n+1) \\ R_X(1) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & R_X(-1) \\ R_X(n-1) & \dots & R_X(1) & R_X(0) \end{bmatrix}$$
  - Structure hermitienne, positive, et *Toeplitz*

Processus SSL

- Densité spectrale de puissance (DSP)
  - Si $R_X(k)$ est sommable, on pose $S_X(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_X(k) e^{-2i\pi\nu k}$
  - Inversion : $R_X(k) = \int_{-1/2}^{+1/2} S_X(\nu) e^{+2i\pi\nu k} d\nu$
  - Positivité : $S_X(\nu) \geq 0$
  - Puissance : $P_X = R_X(0) + |m_X|^2 = \int_{-1/2}^{+1/2} S_X(\nu) d\nu + |m_X|^2$
- Densité spectrale croisée
  $$S_{YX}(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_{YX}(k) e^{-2i\pi\nu k}$$

Bruit blanc

- Processus SSL centré de DSP constante
- Exemple : suite IID de variables centrées



- Trajectoire d'un bruit blanc gaussien, $\sigma = 1$
  B_n, IID, avec $B_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Exemples

- Étudier la stationnarité des processus suivants, et calculer le cas échéant leur covariance et leur DSP.
  - la rampe bruitée
    $X_n = \alpha n + B_n$ avec $B_n \sim \mathscr{N}(0, \sigma^2)$
  - les processus harmoniques suivants :
    $X_n = a\cos(\omega_0 n + \Phi)$ avec $\Phi \sim \mathscr{U}([0\ 2\pi])$
    $X_n = A\cos(\omega_0 n + \Phi)$, Φ et A indépendants
    $A \sim \mathscr{N}(0, \sigma_A^2)$

Exemple de processus SSL

- Processus harmonique
  $X_n = \sum_{p=1}^{N} a_p \cos(2\pi\nu_p n + \varphi_p)$
  - ν_p fréquences distinctes
  - a_p amplitudes > 0
  - ϕ_p décorrélées, de densité uniforme $[0, 2\pi]$
- X_n est un processus SSL centré
  $R_X(k) = \sum_{p=1}^{N} \frac{a_p^2}{2} \cos(2\pi\nu_p k)$

Théorème de filtrage des processus SSL

- Soit h un filtre stable, X SSL, et $Y = h * X$.
- Alors Y est un processus SSL vérifiant
  - Moyenne : $m_Y = m_X H(0) = m_X \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n$
  - Covariance : $R_{YX} = h * R_X$ et $R_Y = h * \widetilde{h} * R_X$ où $\widetilde{h}_n = \overline{h_{-n}}$
  - Si de plus $R_X \in l^1(\mathbb{Z})$, densité spectrale de puissance :
    $S_{YX}(\nu) = H(\nu) S_X(\nu)$
    $S_Y(\nu) = |H(\nu)|^2 S_X(\nu)$

Théorème de filtrage des processus SSL

- Soit h_1 un filtre stable, X_1 SSL, et $Y_1 = h_1 * X_1$
- Soit h_2 un filtre stable, X_2 SSL, et $Y_2 = h_2 * X_2$
- Alors les processus SSL Y_1 et Y_2 vérifient
  - Covariance : $R_{Y_1Y_2} = h_1 * \widetilde{h}_2 * R_{X_1X_2}$
  - Si de plus $R_{X_1X_2} \in l^1(\mathbb{Z})$, densité spectrale croisée :
    $S_{Y_1Y_2}(\nu) = H_1(\nu)\overline{H_2(\nu)} S_{X_1X_2}(\nu)$

Processus à moyenne ajustée

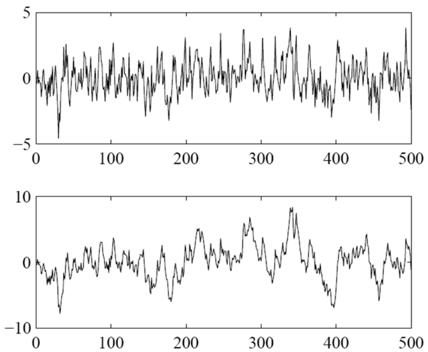
- Processus MA d'ordre q $X_n = Z_n + b_1 Z_{n-1} + \ldots + b_q Z_{n-q}$ où Z est un bruit blanc de puissance σ_Z^2
- Propriétés ($X = b * Z$)
  - Moyenne : $m_X = 0$
  - Autocovariance : $R_X = \sigma_Z^2 \, b * \widetilde{b}$
  - Densité spectrale : $S_X(\nu) = \sigma_Z^2 |B(\nu)|^2$
  - Problème pour l'estimation : relation non linéaire entre les coefficients b_k et l'autocovariance

Processus autorégressif

- Processus AR d'ordre 1 : $X_n = aX_{n-1} + Z_n$ où Z est un bruit blanc de puissance σ_Z^2
- Si $|a| < 1$, solution SSL, causale, centrée $X_n = \sum_{k=0}^{\infty} a^k Z_{n-k}$
  - Moyenne : $m_X = 0$
  - Autocovariance : $\forall k \geq 0,\ R_X(k) = \sigma_Z^2 \frac{a^k}{1-|a|^2}$
  - Densité spectrale : $S_X(\nu) = \frac{\sigma_Z^2}{|1-a\,e^{-2i\pi\nu}|^2}$

Processus autorégressif

- Trajectoires d'un processus AR(1) gaussien pour $a = 0.5$ et $a = 0.9$



Processus autorégressif

- Si $|a| > 1$, solution SSL, anticausale $X_n = -\sum_{k=1}^{\infty} a^{-k} Z_{n+k}$
  - Autocovariance : $\forall k \geq 0,\ R_X(k) = \sigma_Z^2 \frac{a^{-k}}{|a|^2-1}$
  - Densité spectrale : $S_X(\nu) = \frac{\sigma_Z^2}{|1-a\,e^{-2i\pi\nu}|^2}$
- Si $|a| = 1$, pas de solution SSL
- Processus AR d'ordre p : $X_n = a_1 X_{n-1} + \ldots + a_p X_{n-p} + Z_n$ où Z est un bruit blanc de puissance σ_Z^2

Propriétés des processus AR d'ordre p

- Une solution SSL ssi $A(z) \neq 0$ pour $|z| = 1$
  $\frac{1}{A(z)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) z^{-k}$ où $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |h(k)| < +\infty$
  $\Rightarrow X_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k) Z_{n-k}$
- Si $A(z) = 0 \Rightarrow |z| < 1$, solution causale
- Si $A(z) = 0 \Rightarrow |z| > 1$, solution anticausale
- Sinon, X est un processus AR "mixte"

Estimation d'un processus autorégressif

- Prédiction linéaire un processus AR causal :
  $\widehat{X}_n = \sum_{m=1}^{p} a_m X_{n-m}$ est une estimation de X_n à partir des échantillons passés
- L'erreur d'estimation $Z_n = X_n - \widehat{X}_n$ est décorrélée de tous les X_{n-k} (i.e. $\mathrm{cov}(Z_n, X_{n-k}) = 0$) pour $k > 0$
- On en déduit $R_X(k) = \sum_{j=1}^{p} a_j R_X(k-j)$ et
  $R_X(0) = \sigma_Z^2 + \sum_{k=1}^{p} a_k R_X(k)$

Equations de Yule-Walker

- Pour estimer a et σ^2, on estime d'abord $\mathbf{R}_{XX}$:

$$\mathbf{R}_{XX} = \begin{bmatrix} R_X(0) & R_X(-1) & \dots & R_X(-(p-1)) \\ R_X(1) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & R_X(-1) \\ R_X(p-1) & \dots & R_X(1) & R_X(0) \end{bmatrix}$$

- On résout ensuite le système d'équations

$$\mathbf{R}_{XX} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_X(1) \\ R_X(2) \\ \vdots \\ R_X(p) \end{bmatrix}$$

- On en déduit $\sigma_Z^2 = R_X(0) - \sum_{k=1}^{p} a_k R_X(k)$

Filtrage de Wiener

- Soient X et B deux processus SSL centrés, réels et indépendants, de DSP connues (X est le signal d'intérêt et B est un bruit)
- Soit $Y = h * X + B$ le processus observé, où h est un filtre stable
- On cherche une réponse impulsionnelle g tel que $Z = g * Y - X$ soit de variance minimale
- La solution de ce problème est le filtre de Wiener :

$$G(\nu) = \frac{\overline{H(\nu)}}{|H(\nu)|^2 + \frac{S_B(\nu)}{S_X(\nu)}}$$

Partie I

Éléments d'estimation

Éléments d'estimation

- Soit X une v.a. de loi paramétrée par θ.
- Un estimateur $\widehat{\theta}$ de θ est une fonction de X
- Biais : $b(\theta, \widehat{\theta}) = \mathbb{E}_\theta(\widehat{\theta}(X) - \theta)$
- Risque : $R(\theta, \widehat{\theta}) = \mathbb{E}_\theta|\widehat{\theta}(X) - \theta|^2 = \mathrm{Var}(\widehat{\theta}(X)) + |b(\theta, \widehat{\theta})|^2$
  - Existence d'une borne inférieure pour R dite de Cramer-Rao pour les estimateurs sans biais.
- Approche asymptotique de l'estimation
  - Vecteur d'observation : $X = [X_1, \ldots, X_N]^T$
  - Non biais asymptotique : $\lim_{N\to+\infty} b(\theta, \widehat{\theta}_N) = 0$
  - Consistance en moyenne quadratique :

$$\lim_{N\mapsto+\infty} R(\theta, \widehat{\theta}_N) = 0$$

Estimation de la moyenne

- X_n SSL, de moyenne m_X et covariance $R_X(k)$
- Moyenne empirique : $\hat{m}_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N X_n$
- Estimateur sans biais : $\mathbb{E}(\hat{m}_N) = m_x$
- Variance : $\mathrm{Var}(\hat{m}_N) = \frac{1}{N}\sum_{k=-(N-1)}^{N-1}\left(1 - \frac{|k|}{N}\right) R_X(k)$
- Hypothèse : $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |R_X(k)| < +\infty$
  - Consistance en moyenne quadratique :

$$\mathrm{Var}(\hat{m}_N) \sim \frac{1}{N} S(0)$$

Estimation des covariances

- Autocovariance empirique (pour $0 \leq k < N$) :
  $\widehat{R}_N(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N-k} X_{n+k}\overline{X_n}$ (pour un signal centré)
- Estimateur asymptotiquement sans biais :

$$\mathbb{E}\left(\widehat{R}_N(k)\right) = \frac{N-|k|}{N} R_X(k)$$

- Hypothèses : stationnarité stricte, moments d'ordre 4 définis et de module sommable
  - Consistance en moyenne quadratique :

$$\mathrm{Var}\left(\widehat{R}_N(k)\right) = O\left(\frac{1}{N}\right)$$

Estimation de la DSP

- Périodogramme du signal (centré) :

$$\widehat{S}_N(\nu) = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=1}^{N} X_n\, e^{-2i\pi\nu n}\right|^2 = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \widehat{R}_N(k)\, e^{-2i\pi\nu k}$$

- Espérance : $\mathbb{E}\left(\widehat{S}_N(\nu)\right) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1}\left(1-\frac{|k|}{N}\right) R_X(k) e^{-2i\pi\nu k}$
  Hypothèse : $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |R_X(k)| < +\infty$
- Non biais asymptotique : $\mathbb{E}\left(\widehat{S}_N(\nu)\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} S_X(\nu)$
- Estimateur inconsistant : $\mathrm{Var}\left(\widehat{S}_N(\nu)\right) \underset{N\to+\infty}{\not\to} 0$
  - Valeurs asymptotiquement décorrélées

Estimation de la DSP

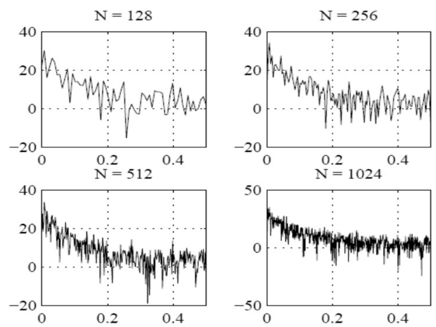


FIG. 4.4 – *Périodogrammes d'un processus SSL pour* $N = 128, 256, 512, 1024$

Périodogrammes tronqué et fenêtré

- Périodogramme tronqué $(M < N-1)$:
  $\widehat{S}_{N,M}(\nu) = \sum_{k=-M}^{M} \widehat{R}_N(k)\, e^{-2i\pi\nu k}$
- Propriétés :
  - Si $M \to +\infty$, $\hat{S}_{N,M}$ est asymptotiquement sans biais
  - Si $M/N \to 0$, $\mathrm{Var}\left(\widehat{S}_{N,M}(\nu)\right) = O\left(\frac{M}{N}\right) \to 0$
  - Si $M = N^{\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$, $\hat{S}_{N,M}$ est consistant
- Périodogramme fenêtré :
  $\widehat{S}_{N,w}(\nu) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} w(k)\, \widehat{R}_N(k)\, e^{-2i\pi\nu k}$