

# Le ukulélé est il une petite guitare ?

L'objectif de ce travail est de différencier la guitare et le Ukulele par la réponse en fréquence de sa caisse de résonance.

Ce qui diffère en premier lieu entre une guitare et un Ukulélé est la taille de l'instrument, et sa forme. On peut décomposer la guitare et le Ukulele dans les mêmes décompositions élémentaires. Elles sont composées en 4 parties :

- La corde (non étudié ici)
- Le résonateur : qui comprend la cavité et le volume d'air
- La face avant du résonateur
- La face arrière du résonateur Ce sont les éléments qui entrent en mouvement lors de l'excitation d'une corde. On considère que la face arrière n'a qu'une influence minime puisque lorsque l'utilisateur joue de son Ukulélé, il pose la face arrière sur son buste ce qui amortit les vibrations. Le luthier souhaite donc qu'il y ait le moins d'énergie transmise possible à l'arrière de l'instrument. On ne va pas l'étudier aujourd'hui.

La guitare utilisée ici est une guitare Yamaha C40 classique. Elle n'a pas de barrages lattice, c'est une guitare très répandue dans l'industrie de diapason 650mm. Le Ukulélé est un Ukulele Tanglewood Soprano tiare, de diapason 345mm

On définit un modèle basse fréquence :

Pour faire ce modèle, on ne va considérer qu'une partie de la décomposition élémentaire. A savoir le résonateur et la face avant du résonateur.

Protocole expérimental :

On immobilise les cordes de la guitare et du ukulele, puis on mesure à l'aide d'un accéléromètre et d'un marteau placé au niveau du chevalet. On place le marteau et le chevalet au même endroit, car c'est ici qu'il y a le ventre de vibration du premier mode de la guitare, qui est important pour l'analyse basse fréquence.

(FletcherRossing\_Ch9) De cette manière on n'est pas non plus importuné par les modes de la face arrière de l'instruments.

Le changement de volume est due au déplacement de la colonne d'air du résonateur et du piston

$$\Delta V = Ax_p + Bx_a$$

On applique un principe fondamental de la dynamique sur le piston puis sur le résonateur.

$$m_p \ddot{x}_p + k_p x_p + R_p \dot{x}_p - A \Delta P = F$$

$$m_a \ddot{x}_a + R_a \dot{x}_a - S \Delta P = 0$$

$\Delta P$  peut être exprimé en fonction de  $x_a$  et  $x_p$ . Ce sont donc deux équations couplées qui sont analytiquement résoluble.

Le modèle possède donc deux oscillateurs. Qui sont caractéristiques de la hauteur de la note obtenue, mais absolument pas du timbre.

On prend aussi en compte les forces résistives de l'air. Il s'agit de l'énergie dissipée par frottement visqueux. Ces frottements permettent de déterminer le temps de la note et sont des pertes par rayonnement de l'onde sonore.

On considère qu'il n'y a pas de transfert de température, d'où  $\Delta p = -\mu \Delta V$ .

On trouve finalement le système d'équation :

$$m_p \ddot{x}_p + (k_p + \mu A^2) x_p + R_p \dot{x}_p = F$$

$$m_a \ddot{x}_a - R_a \dot{x}_a - S \Delta P = 0$$

En forme matricielle :

$$M \ddot{X} + R \dot{X} + K X = F$$

$$M = \begin{bmatrix} m_p & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} R_p & 0 \\ 0 & R_a \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} k_p + \mu A^2 & \mu S A \\ \mu S A & \mu S^2 \end{bmatrix}$$

On applique une transformée de Fourier

$$(-\omega^2 M + j\omega R + K) X = F$$

On appelle  $\mathbb{G} = -\omega^2 M + j\omega R + K$  d'où

$$\mathbb{G} X = F$$

On peut avant noter deux pulsations remarquables :  $\omega_p = \left[ \frac{k_p + \mu A^2}{m_p} \right]^{1/2}$  et

$\omega_h = \left[ \frac{\mu S^2}{m_a} \right]^{1/2}$  et le facteur de couplage  $\alpha = \mu S A$ .

Si  $\det(\Omega) = 0$ , alors, on peut déterminer les fréquences de coupures. d'où en négligeant les frottements :

$$(\omega^2 - \omega_p^2)(\omega^2 - \omega_h^2) - \frac{\alpha^2}{m_p m_a} = 0$$

D'où avec le changement de variable  $\Omega = \omega^2$ , on obtient une équation de degré 2 dont les racines sont :

$$\omega_{\pm}^2 = 1/2(\omega_p^2 + \omega_h^2) \pm 1/2 \left[ (\omega_p^2 - \omega_h^2)^2 + 4 \frac{\alpha^2}{(m_p m_a)^{1/2}} \right]^{1/2}$$

Nous avons maintenant tout ce qu'il faut pour appliquer ce modèle à la guitare et à l'ukuléle.

```
In [ ]: import numpy as np

c = 343.3 #m/s
rho = 1.205 #kg/m3
Poisson_coef = 0.2 # pour du bois

# valeurs pour un ukulele

#V_u = (0.345*520/752.2)*(0.345*330/752.2)*(0.345*90/752.2)
#S_u = np.pi*(0.345*104/(2*752.2))**2
#A_u = np.pi*(0.345*287/(752.2*2))**2
V_u = 0.238*0.151*0.041
S_u = np.pi*(0.024)**2
rho_tilleul = 417 #kg/m3
A_u = np.pi*0.066**2
mu_u = c**2*rho/V_u
e_u = 1.5E-3
m_p_u = A_u*e_u*rho_tilleul
m_a_u = S_u*e_u*rho
E_tilleul = 7000

# valeurs pour une guitare
#V_g = (0.650*2780/3732)*(0.650*1900/3732)*(0.650*432/3732)*4
#S_g = np.pi*(0.650*501/3838/2)**2
#A_g = np.pi*(0.650*1675/3838/2)**2
V_g = 0.484*0.331*0.075
S_g = np.pi*0.042**2
rho_epicea = 450 #kg/m3
# on prend pour la surface vibrante de la guitare un cercle de diametre environ
A_g = np.pi*0.141**2
mu_g = c**2*rho/V_g
e_g = 2.7E-3
m_p_g = A_g*e_g*rho_epicea
m_a_g = S_g*e_g*rho
# stiffness of wood and young module https://amesweb.info/Materials/Youngs-Modul
E_epicea = 9000

# On regroupe pour éviter de se perdre avec les indices, l'indice 0 est la gita
A = np.array([A_g, A_u])
rho_bois = np.array([rho_epicea, rho_tilleul])
V = np.array([V_g, V_u])
S = np.array([S_g, S_u])
e = np.array([e_g, e_u])
m_p = np.array([m_p_g, m_p_u])
m_a = np.array([m_a_g, m_a_u])
mu = np.array([mu_g, mu_u])
E = np.array([E_epicea, E_tilleul])

def model_guitar(e,mu,A,S,m_a,m_p,E,Poisson_coef):
    k_p = 2*E*e**3/(3*(1-Poisson_coef**2))/A

    omega_p = ((k_p + mu*A**2)/m_p)**0.5
    omega_h = ((mu*S**2)/m_a)**0.5
    alpha = S*A*mu
```

```

omega1 = (0.5*(omega_p**2+omega_h**2)-0.5*((omega_p**2-omega_h**2)**2+4*alph
omega2 = (0.5*(omega_p**2+omega_h**2)+0.5*((omega_p**2-omega_h**2)**2+4*alph

return omega1, omega2

omega1,omega2 = model_guitar(e,mu,A,S,m_a,m_p,E,Poisson_coef)
print("guitar first frequencies : ", omega1[0]/(2*np.pi), ' and ', omega2[0]/(2*
print("ukulele first frequencies : ", omega1[1]/(2*np.pi), ' and ', omega2[1]/(2

```

guitar first frequencies : 124.05835106909714 and 714.1163429496789  
ukulele first frequencies : 231.11268958808859 and 1563.3837855257289

Comparons ces valeurs avec l'expérience.

```

In [209... from scipy.signal import find_peaks

def get_local_maximas(data, frequencies, nb_pics, width=100):
    """
    Identifies local maxima in the given data array and returns the maxima with
    Returns:
    tuple: A tuple of two numpy arrays:
        - maxima_values: Values of the local maxima in the data.
        - maxima_frequencies: Frequencies corresponding to the local maxima.
    """
    # Identify indices of local maxima
    maxima_indices = find_peaks(np.abs(data), distance = data.shape[0]/nb_pics,
    # Get the corresponding maxima values and frequencies
    maxima_values = data[maxima_indices]
    maxima_frequencies = frequencies[maxima_indices]

    return maxima_values, maxima_frequencies

    return maxima_values, maxima_frequencies
def to_db(expr):
    return 20 * np.log(np.abs(expr))

```

```

In [210... import scipy.io
import matplotlib.pyplot as plt
mat_g = scipy.io.loadmat('./guitar/A vide 3.fig.mat')
frequencies_g = mat_g["frequency"][0][0:3300]
accelerance_g = mat_g["accelerance"][0][0:3300]

max_values_g, max_freq_g = get_local_maximas(accelerance_g,frequencies_g,6)
print("frequencies from experience guitar : ", max_freq_g[0:2])

mat_u = scipy.io.loadmat('./ukulele/ukulele void 2.fig.mat')
frequencies_u = mat_u["frequency"][0][0:3300]
accelerance_u = mat_u["accelerance"][0][0:3300]

max_values_u, max_freq_u = get_local_maximas(accelerance_u,frequencies_u,8)
print("frequencies from experience ukulele: ", max_freq_u[1:3])

fig, ax = plt.subplots(1, 2, figsize=(10, 5))
ax[0].plot(frequencies_g,accelerance_g)
ax[0].set_title("Guitar accelerance, experiments")
ax[0].plot(max_freq_g, max_values_g, "x")
ax[1].plot(frequencies_u,accelerance_u)

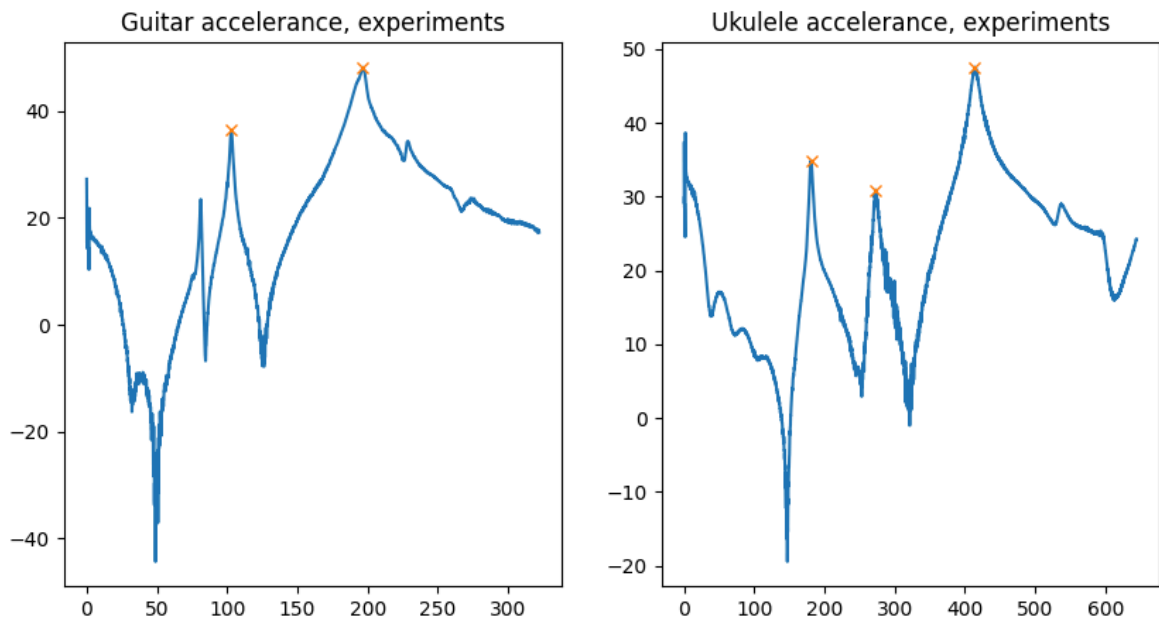
```

```
ax[1].set_title("Ukulele accelerance, experiments")
ax[1].plot(max_freq_u, max_values_u, "x")
```

frequencies from experience guitar : [103.02734375 196.77734375]

frequencies from experience ukulele: [272.8515625 413.8671875]

Out[210... [`<matplotlib.lines.Line2D at 0x12f2244d0>`]



On obtient des fréquences qui ne sont pas concordante avec la réalité. La première fréquence est dans l'ordre de grandeur, mais la seconde non. Cela peut être dû à la mesure approximative des mesures de l'instrument, au modèle trop simpliste, la géométrie de la guitare. C'est pour cela que dans le papier, les valeurs  $f_1$ ,  $f_2$  sont définies comme connues avant l'expérience, et les valeurs des pulsations  $\omega_p$  et  $\omega_h$  sont déterminées à partir de ces fréquences et non de la géométrie de la guitare. (ChristensenVistisen 1980) L'objectif maintenant est de suivre le comportement des fréquences et voir si le même comportement est vu pour les cordes ou les percussions. Le premier pic que l'on peut observer n'a pas de rapport avec le premier mode, il est dû à la géométrie de l'instrument.

## Avec un collier

On augmente expérimentalement la masse  $m_a$  en rajoutant un col à la bouche guitare et du Yukulele de 3cm.

```
In [172... import numpy as np

c = 343.3 #m/s
rho = 1.205 #kg/m3
Poisson_coef = 0.2 # pour du bois

# valeurs pour un ukulele

#V_u = (0.345*520/752.2)*(0.345*330/752.2)*(0.345*90/752.2)
V_u = 0.238*0.151*0.041
S_u = np.pi*(0.024)**2
rho_tilleul = 417 #kg/m3
```

```

A_u = np.pi*0.066**2
mu_u = c**2*rho/V_u
e_u = 1.5E-3
e_a_u = 1.5E-3+3.0E-2
m_p_u = A_u*e_u*rho_tilleul
m_a_u = S_u*e_a_u*rho
E_tilleul = 7000

# valeurs pour une guitare
V_g = 0.484*0.331*0.075
S_g = np.pi*0.042**2
rho_epicea = 450 #kg/m3
A_g = np.pi* 0.141**2
mu_g = c**2*rho/V_g
e_g = 2.7E-3
e_a_g = 2.7E-3+3.0E-2

m_p_g = A_g*e_g*rho_epicea
m_a_g = S_g*e_a_g*rho
E_epicea = 9000

omega1_u,omega2_u = model_guitar(e_u,mu_u,A_u,S_u,m_a_u,m_p_u,E_tilleul,Poisson_
omega1_g,omega2_g = model_guitar(e_g,mu_g,A_g,S_g,m_a_g,m_p_g,E_epicea,Poisson_
print("guitar first frequencies : ", omega1_g/(2*np.pi), ' and ', omega2_g/(2*np
print("ukulele first frequencies : ", omega1_u/(2*np.pi), ' and ', omega2_u/(2*n

```

```

guitar first frequencies : 124.0582720799778 and 205.19987909280127
ukulele first frequencies : 231.11262925953577 and 341.1583575186864

```

L'augmentation d'un facteur 10 de l'épaisseur du col à fait chuter le pic 2 de notre modèle. Expérimentalement :

In [173...

```

import scipy.io
import matplotlib.pyplot as plt
mat_g = scipy.io.loadmat('./guitar/3cm2.fig.mat')
frequencies_g = mat_g["frequency"][0][0:3300]
accelerance_g = mat_g["accelerance"][0][0:3300]

max_values_g, max_freq_g = get_local_maximas(accelerance_g,frequencies_g,10,20)
print("frequencies from experience guitar : ", max_freq_g[0:2])

mat_u = scipy.io.loadmat('./ukulele/3cm collier uku 3.fig.mat')
frequencies_u = mat_u["frequency"][0][0:3300]
accelerance_u = mat_u["accelerance"][0][0:3300]

max_values_u, max_freq_u = get_local_maximas(accelerance_u,frequencies_u,10)
print("frequencies from experience ukulele: ", max_freq_u[1:3])

fig, ax = plt.subplots(1, 2, figsize=(10, 5))
ax[0].plot(frequencies_g,accelerance_g)
ax[0].set_title("Guitar accelerance, experiments")
ax[0].plot(max_freq_g, max_values_g, "x")
ax[1].plot(frequencies_u,accelerance_u)
ax[1].set_title("Ukulele accelerance, experiments")
ax[1].plot(max_freq_u, max_values_u, "x")

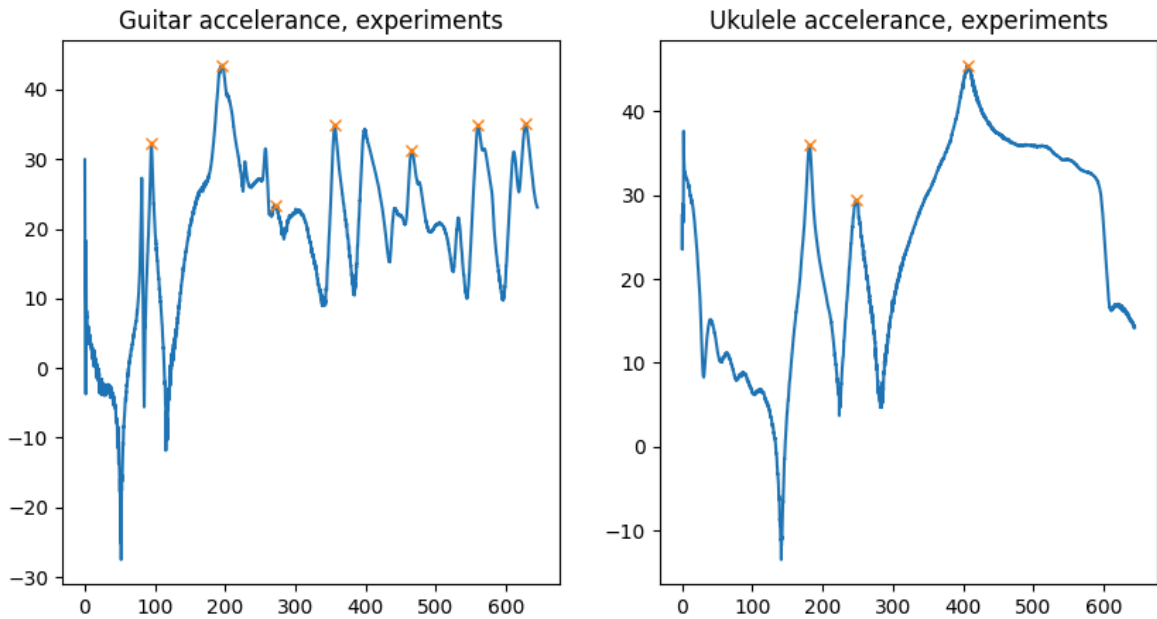
```

```

frequencies from experience guitar : [ 94.921875 195.8984375]
frequencies from experience ukulele: [247.8515625 406.640625 ]

```

Out[173... [



Le modèle prévoit une chute du deuxième pic, alors que c'est le premier pic qui baisse le plus de valeur. Dans les deux cas.

## Sans le résonateur

```
In [195... import numpy as np

# valeurs pour un ukulele
V_u = 0.238*0.151*0.041
S_u = 0
A_u = np.pi*0.066**2
mu_u = c**2*rho/V_u
e_u = 1.5E-3
e_a_u = 1.5E-3
m_a_u = 0.00001

# valeurs pour une guitare
V_g = 0.484*0.331*0.075
S_g = 0
A_g = np.pi* 0.141**2
mu_g = c**2*rho/V_g
e_g = 2.7E-3
e_a_g = 2.7E-3
m_p_g = A_g*e_g*rho_epicea
m_a_g = 0.00001

omega1_u,omega2_u = model_guitar(e_u,mu_u,A_u,S_u,m_a_u,m_p_u,E_tilleul,Poisson_c
omega1_g,omega2_g = model_guitar(e_g,mu_g,A_g,S_g,m_a_g,m_p_g,E_epicea,Poisson_c
print("guitar first frequencies : ", omega1_g/(2*np.pi), ' and ', omega2_g/(2*np
print("ukulele first frequencies : ", omega1_u/(2*np.pi), ' and ', omega2_u/(2*n
```

```
guitar first frequencies : 0.0 and 124.05836935641527
ukulele first frequencies : 0.0 and 231.11269787019225
```

```
In [207... import scipy.io
import matplotlib.pyplot as plt
mat_g = scipy.io.loadmat('./guitar/without helmholz better.fig.mat')
```

```

frequencies_g = mat_g["frequency"][0][0:3300]
accelerance_g = mat_g["accelerance"][0][0:3300]

max_values_g, max_freq_g = get_local_maximas(accelerance_g, frequencies_g, 10, 10)
print("frequencies from experience guitar : ", max_freq_g[1:2])

mat_u = scipy.io.loadmat('./ukulele/uku without helmholz 4.fig.mat')
frequencies_u = mat_u["frequency"][0][0:3300]
accelerance_u = mat_u["accelerance"][0][0:3300]

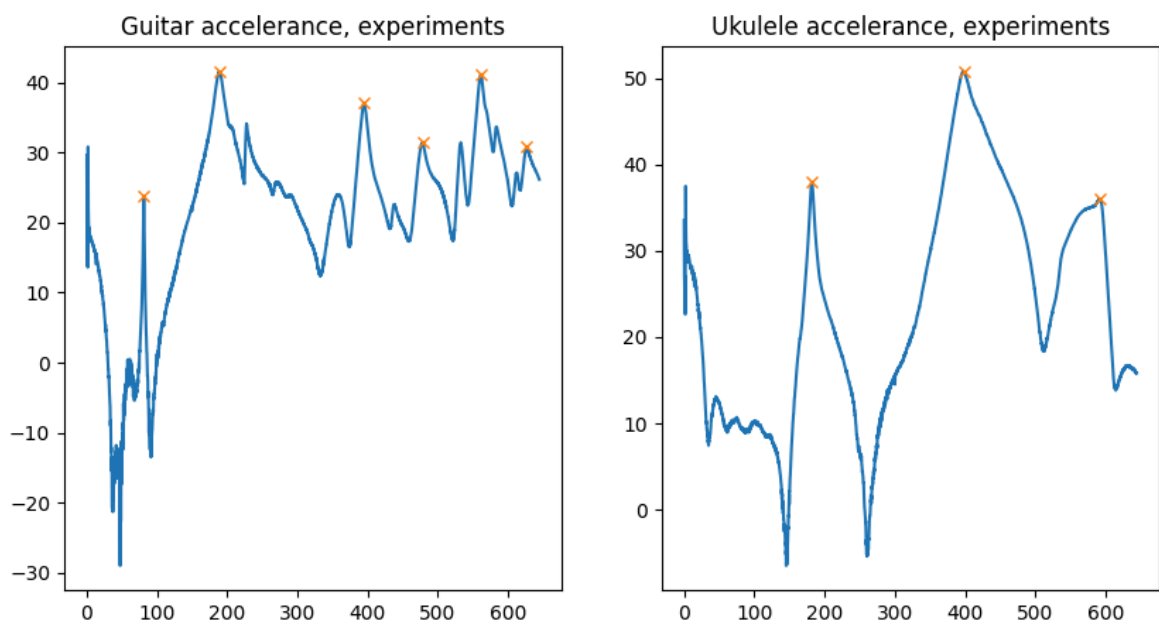
max_values_u, max_freq_u = get_local_maximas(accelerance_u, frequencies_u, 10)
print("frequencies from experience ukulele: ", max_freq_u[1:2])
fig, ax = plt.subplots(1, 2, figsize=(10, 5))
ax[0].plot(frequencies_g, accelerance_g)
ax[0].set_title("Guitar accelerance, experiments")
ax[0].plot(max_freq_g, max_values_g, "x")
ax[1].plot(frequencies_u, accelerance_u)
ax[1].set_title("Ukulele accelerance, experiments")
ax[1].plot(max_freq_u, max_values_u, "x")

```

frequencies from experience guitar : [188.4765625]

frequencies from experience ukulele: [398.2421875]

Out[207... [ <matplotlib.lines.Line2D at 0x12f031e20>]



On remarque expérimentalement que c'est le premier pic qui disparaît, alors que dans le modèle c'est le second.

La première résonance que l'on observe est toujours due à la structure de l'instrument.

## Avec ajout de masse

On ajoute des masse de respectivement 19g pour le ukulele et 40g pour la guitare

In [202... `import numpy as np`

```

c = 343.3 #m/s
rho = 1.205 #kg/m3

```



```

Poisson_coef = 0.2 # pour du bois

# valeurs pour un ukulele

#V_u = (0.345*520/752.2)*(0.345*330/752.2)*(0.345*90/752.2)
V_u = 0.238*0.151*0.041
S_u = np.pi*(0.024)**2
rho_tilleul = 417 #kg/m3
A_u = np.pi*0.066**2
mu_u = c**2*rho/V_u
e_u = 1.5E-3
e_a_u = 1.5E-3
m_p_u = A_u*e_u*rho_tilleul #+ 0.019
m_a_u = S_u*e_a_u*rho
E_tilleul = 7000

# valeurs pour une guitare
V_g = 0.484*0.331*0.075
S_g = np.pi*0.042**2
rho_epicea = 450 #kg/m3
A_g = np.pi* 0.141**2
mu_g = c**2*rho/V_g
e_g = 2.7E-3
e_a_g = 2.7E-3

m_p_g = A_g*e_g*rho_epicea + 0.040
m_a_g = S_g*e_a_g*rho
E_epicea = 9000

omega1_u,omega2_u = model_guitar(e_u,mu_u,A_u,S_u,m_a_u,m_p_u,E_tilleul,Poisson_c
omega1_g,omega2_g = model_guitar(e_g,mu_g,A_g,S_g,m_a_g,m_p_g,E_epicea,Poisson_c
print("guitar first frequencies : ", omega1_g/(2*np.pi), ' and ', omega2_g/(2*np
print("ukulele first frequencies : ", omega1_u/(2*np.pi), ' and ', omega2_u/(2*n

```

```

guitar first frequencies : 100.39031177916658 and 714.1163423162602
ukulele first frequencies : 231.11268958808859 and 1563.3837855257289

```

In [196...

```

import scipy.io
import matplotlib.pyplot as plt
mat_g = scipy.io.loadmat('./guitar/40g2.fig.mat')
frequencies_g = mat_g["frequency"][0][0:3300]
accelerance_g = mat_g["accelerance"][0][0:3300]

max_values_g, max_freq_g = get_local_maximas(accelerance_g,frequencies_g,10,30)
print("frequencies from experience guitar : ", max_freq_g[0:2])

mat_u = scipy.io.loadmat('./ukulele/uku m19.fig.mat')
frequencies_u = mat_u["frequency"][0][0:3300]
accelerance_u = mat_u["accelerance"][0][0:3300]

max_values_u, max_freq_u = get_local_maximas(accelerance_u,frequencies_u,8)
print("frequencies from experience ukulele: ", max_freq_u[2:4])

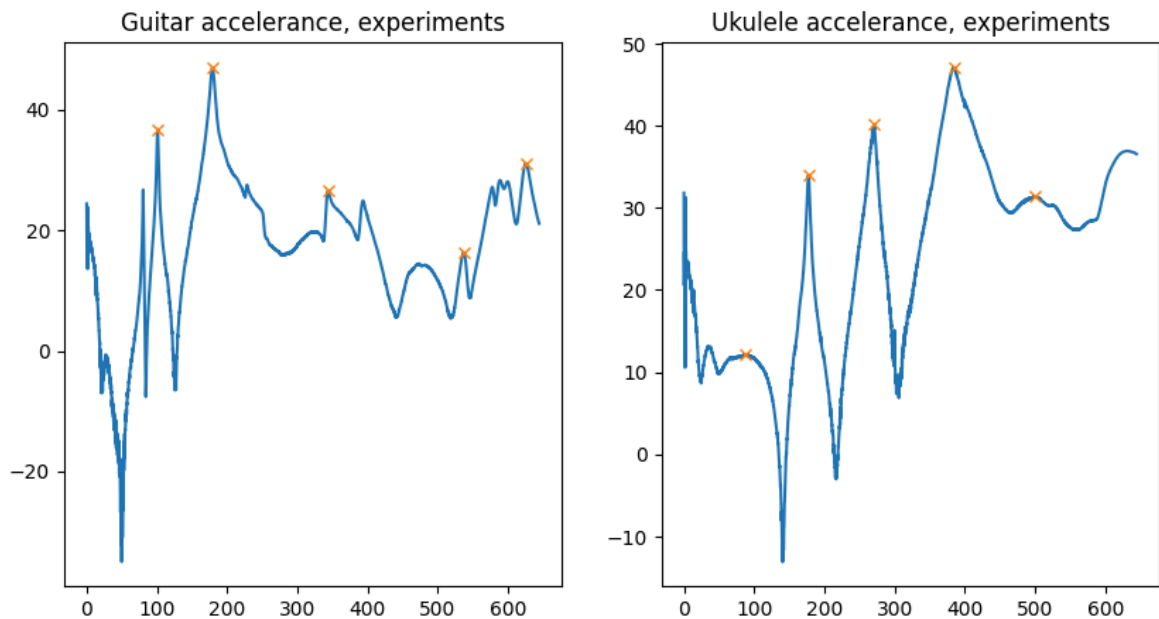
fig, ax = plt.subplots(1, 2, figsize=(10, 5))
ax[0].plot(frequencies_g,accelerance_g)
ax[0].set_title("Guitar accelerance, experiments")
ax[0].plot(max_freq_g, max_values_g, "x")
ax[1].plot(frequencies_u,accelerance_u)

```

```
ax[1].set_title("Ukulele accelerance, experiments")
ax[1].plot(max_freq_u, max_values_u, "x")
```

frequencies from experience guitar : [100.9765625 179.1015625]  
frequencies from experience ukulele: [270.5078125 384.1796875]

Out[196... [<matplotlib.lines.Line2D at 0x12e3db3e0>]



Il est difficile d'avoir une analyse fine avec un modèle qui ne permet pas d'exprimer avec fidélité l'expérience.

Pour résumer

	Sans ajout		Col de 3cm		Sans Résonateur		Ajout masse	
	guitare	Ukulele	guitare	Ukulele	guitare	Ukulele	guitare	Ukulele
f1	103	273	95	248	NaN	NaN	101	270
f2	197	414	195	407	188	398	179	384

Expérimentalement on remarque que les modes sont couplés, cependant la première résonance est plus impactées par le résonateur de Helmholtz que notre modèle prévoie le contraire.

L'analyse ne permet pas de déterminer si le ukulele est une petite guitare, mais elle s'en rapproche dans les comportement à basse fréquence. Le couplage semble être important pour le ukulele.