

Fondements en électronique analogique 2

X.S. REN

2022.01

Fondements de l'électronique analogique 1

Alain Sylvestre

- Composants électroniques de base (R, L, C)
- Loi des circuits électriques linéaires
- Filtres du premier ordre (RC), analyse en fréquence
- Montages à amplificateurs opérationnels

Plan du cours

- Rappels et suite ampli OP
- Rappel comportement des systèmes linéaires invariants
(comportement fréquentiel, représentation complexe...)
- Circuits RC
 - Réponse harmonique (module et phase)
 - Réponse indicielle
- Filtres actifs
- Circuits RLC
 - Réponse indicielle
 - Réponse harmonique (module et phase)
- Bilan du cours

1. L'amplificateur opérationnel

Le modèle idéal suppose

- L'amplification différentielle infinie pour toute la gamme de fréquence

$$A_0 = V_s / e$$

$A_0 \rightarrow \infty \quad \forall$ fréquence

- La tension de sortie limitée

$$V_{s\max} = V_{sat} = V_{cc}$$

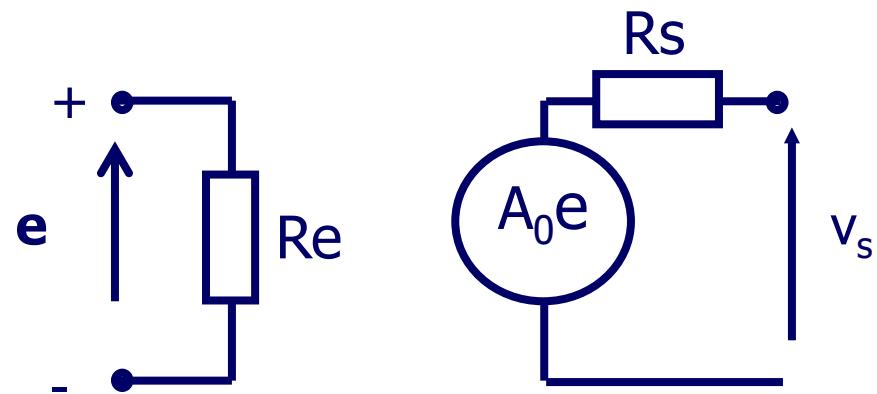
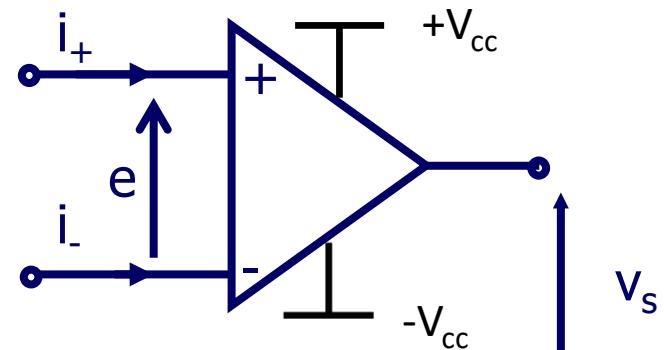
$$V_{smin} = -V_{sat} = -V_{cc}$$

- Les courants d'entrée nuls

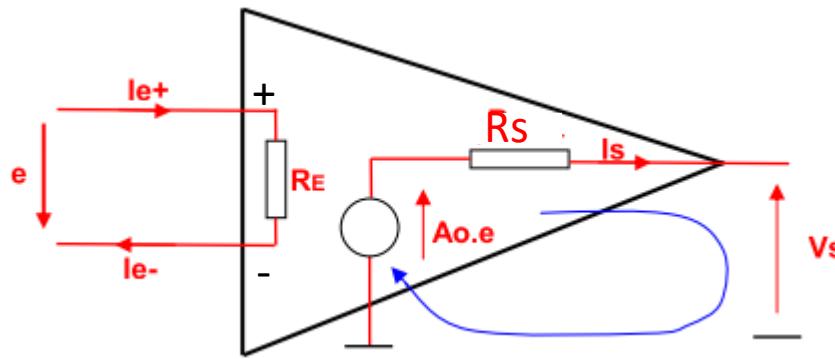
$$i_+ = i_- = 0 \quad R_e = \infty$$

- La résistance de sortie nulle

$$R_s = 0$$



Caractéristiques AOP réel et modèle idéal



Ordre de grandeur AOP réel

$$A_0 \approx 10^5 - 10^6$$

$$R_e \approx 10^6 - 10^{12} \Omega$$

$$R_s \approx 100 \Omega$$

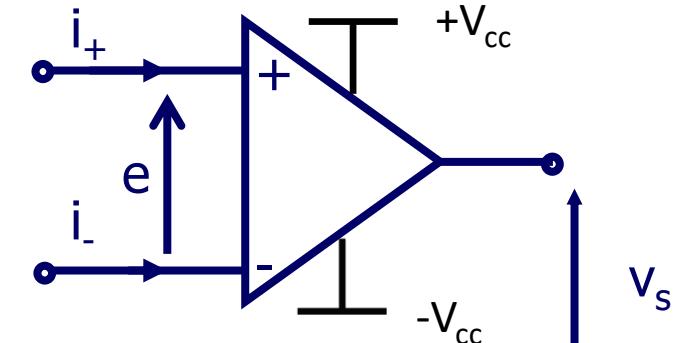
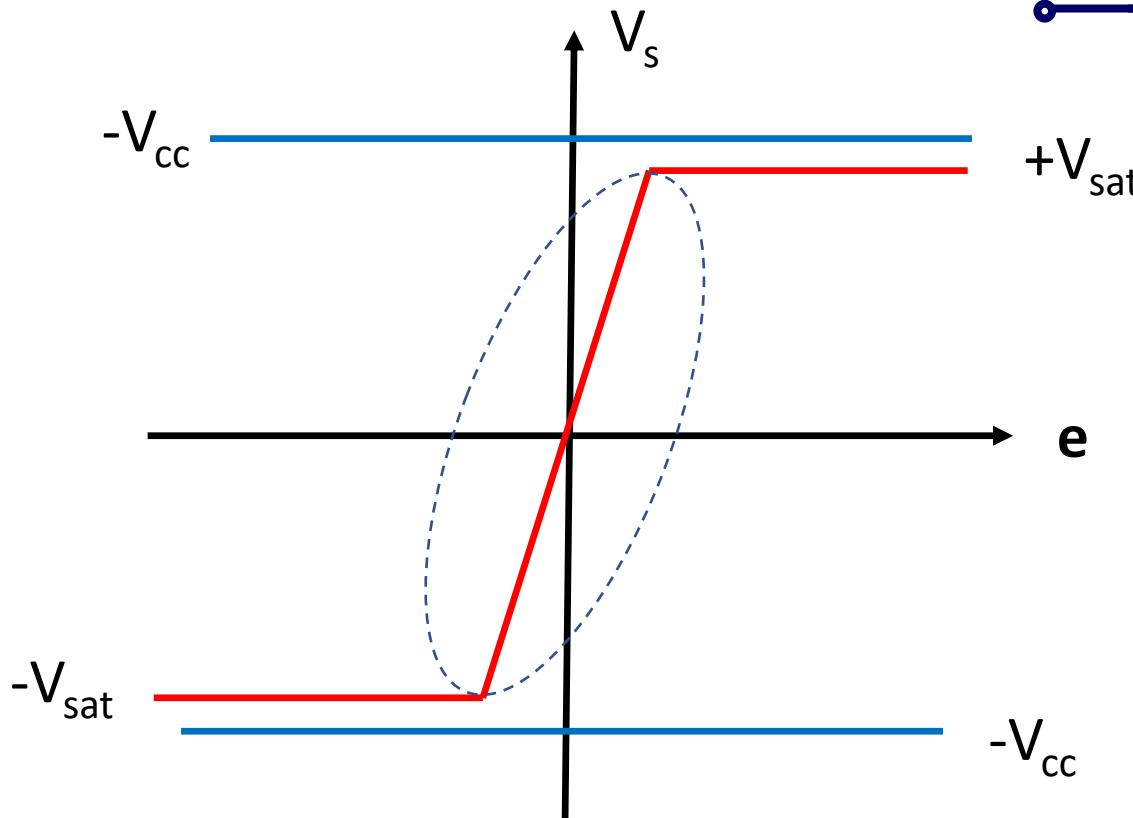
Modèle AOP idéal

$$A_0 = \infty$$

$$R_e = \infty$$

$$R_s = 0 \Omega$$

Limitations



Saturation de V_s à $+/- V_{sat} < V_{cc}$

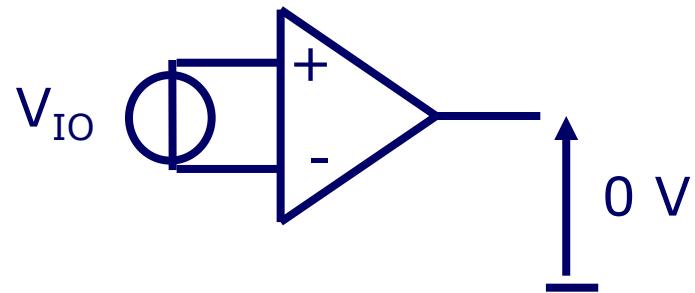
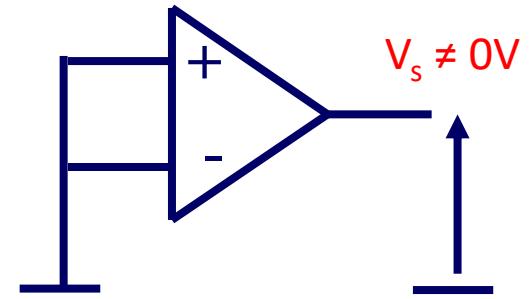
Caractéristiques réelles statiques

Tension de décalage : V_{IO}
(input offset voltage)

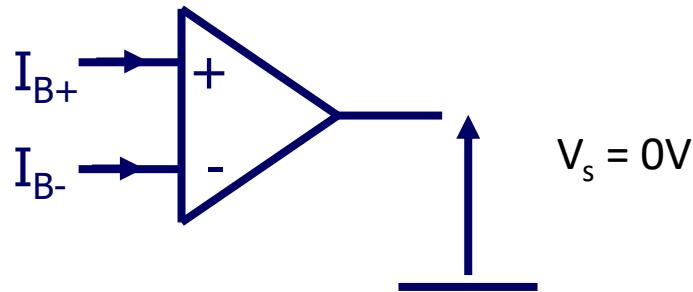
définition

si $e_+ = e_- = 0, e = 0, v_s \neq 0$.

V_{IO} est la tension continue à appliquer en entrée pour annuler la tension de sortie



Courant de polarisation I_B et de décalage I_{IO}



- Le courant de polarisation (input bias current) est la moyenne des courants d'entrée lorsque la tension de sortie est nulle

$$I_B = (I_{B+} + I_{B-})/2$$

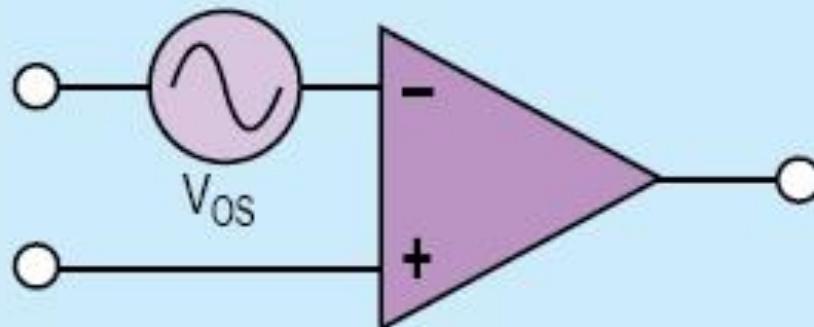
- Le courant de décalage (input offset current) est la différence entre les courants d'entrée :

$$I_{IO} = I_{B+} - I_{B-}$$

6.5 Electrical Characteristics, LM741⁽¹⁾

PARAMETER	TEST CONDITIONS		MIN	TYP	MAX	UNIT
Input offset voltage	$R_S \leq 10 \text{ k}\Omega$	$T_A = 25^\circ\text{C}$		1	5	mV
		$T_{A\text{MIN}} \leq T_A \leq T_{A\text{MAX}}$		6		mV
Input offset voltage adjustment range	$T_A = 25^\circ\text{C}, V_S = \pm 20 \text{ V}$		± 15			mV
Input offset current	$T_A = 25^\circ\text{C}$		20	200		nA
	$T_{A\text{MIN}} \leq T_A \leq T_{A\text{MAX}}$		85	500		
Input bias current	$T_A = 25^\circ\text{C}$		80	500		nA
	$T_{A\text{MIN}} \leq T_A \leq T_{A\text{MAX}}$			1.5		μA
Input resistance	$T_A = 25^\circ\text{C}, V_S = \pm 20 \text{ V}$		0.3	2		$\text{M}\Omega$
Input voltage range	$T_{A\text{MIN}} \leq T_A \leq T_{A\text{MAX}}$		± 12	± 13		V
Large signal voltage gain	$V_S = \pm 15 \text{ V}, V_O = \pm 10 \text{ V}, R_L \geq 2 \text{ k}\Omega$	$T_A = 25^\circ\text{C}$	50	200		V/mV
		$T_{A\text{MIN}} \leq T_A \leq T_{A\text{MAX}}$	25			
Output voltage swing	$V_S = \pm 15 \text{ V}$	$R_L \geq 10 \text{ k}\Omega$	± 12	± 14		V
		$R_L \geq 2 \text{ k}\Omega$	± 10	± 13		
Output short circuit current	$T_A = 25^\circ\text{C}$			25		mA
Common-mode rejection ratio	$R_S \leq 10 \Omega, V_{CM} = \pm 12 \text{ V}, T_{A\text{MIN}} \leq T_A \leq T_{A\text{MAX}}$		80	95		dB
Supply voltage rejection ratio	$V_S = \pm 20 \text{ V} \text{ to } V_S = \pm 5 \text{ V}, R_S \leq 10 \Omega, T_{A\text{MIN}} \leq T_A \leq T_{A\text{MAX}}$		86	96		dB
Transient response	Rise time	$T_A = 25^\circ\text{C}$, unity gain		0.3		μs
	Overshoot			5%		
Slew rate	$T_A = 25^\circ\text{C}$, unity gain		0.5			$\text{V}/\mu\text{s}$
Supply current	$T_A = 25^\circ\text{C}$		1.7	2.8		mA
Power consumption	$V_S = \pm 15 \text{ V}$	$T_A = 25^\circ\text{C}$	50	85		mW
		$T_A = T_{A\text{MIN}}$	60	100		
		$T_A = T_{A\text{MAX}}$	45	75		

输入失调电压

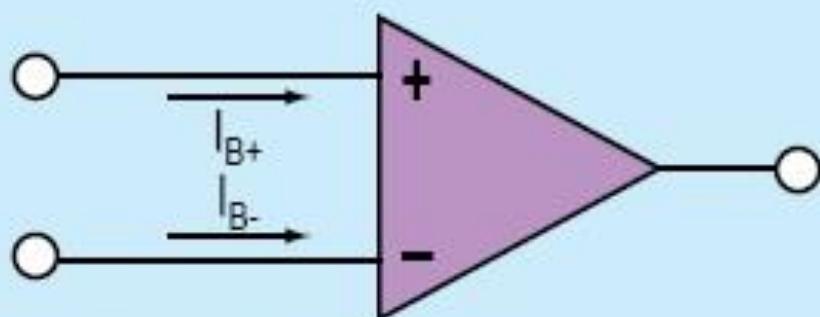


- 失调电压：必须施加在运放输入端的差分电压，以便产生0V输出。
- 不同类型运放的失调电压范围：

- 截波稳定型运放	<1 mV
- 通用高精度运放	50- 500 mV
- 最好的双极型运放	10-25 mV
- 最好的FET运放	100-1000 mV
- 高速运放	100-2000 mV
- Untrimmed CMOS运放	5000-50,000 mV
- DigTrim CMOS运放	<1000 mV

(a)

输入偏置电流

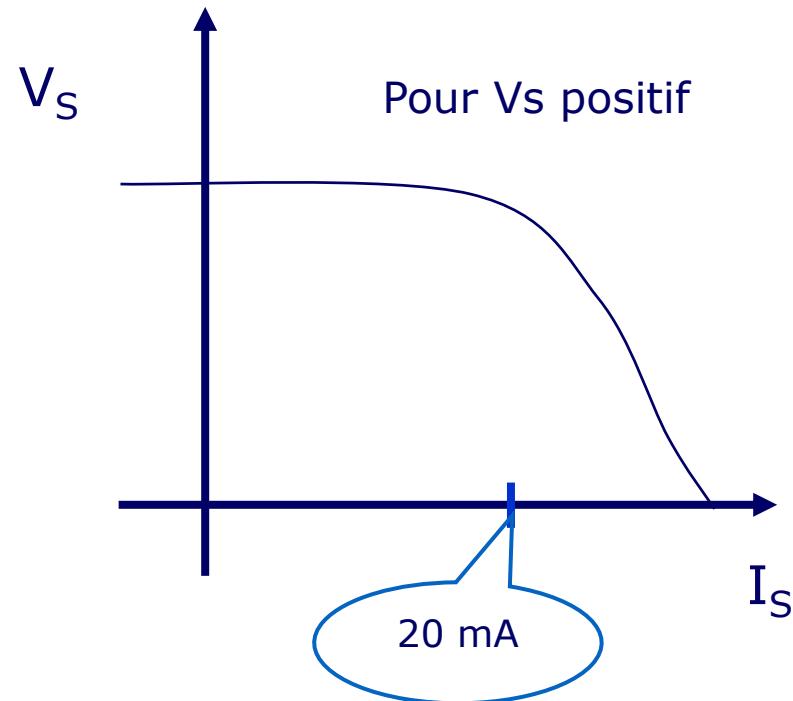
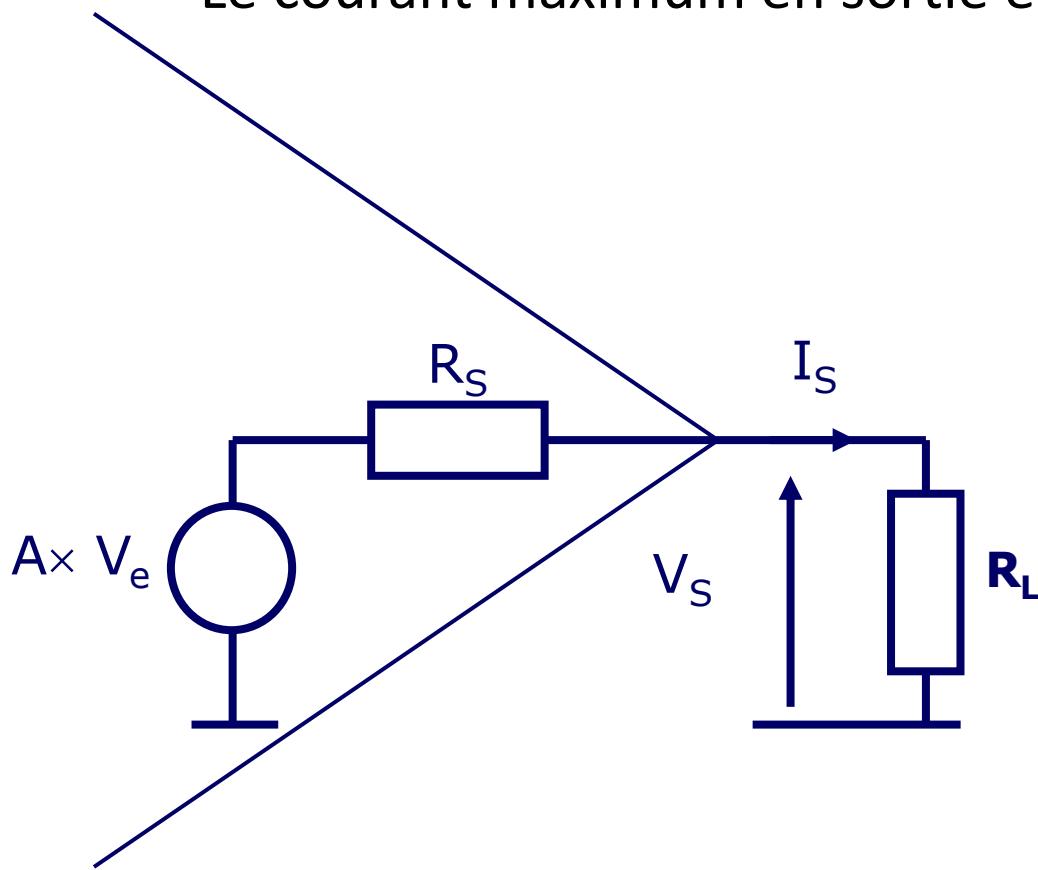


- 可变参数
- 根据不同器件， I_B 从60fA(每秒3个电子)到几十mA
- 一些架构具有匹配非常好的 I_B ，而有些架构则没有
- 在一些架构中， I_B 几乎不随温度变化，而温度每升高10 °C，FET运放的 I_B 就翻倍。
- 有些架构的 I_B 能够流过任意一个方向

(b)

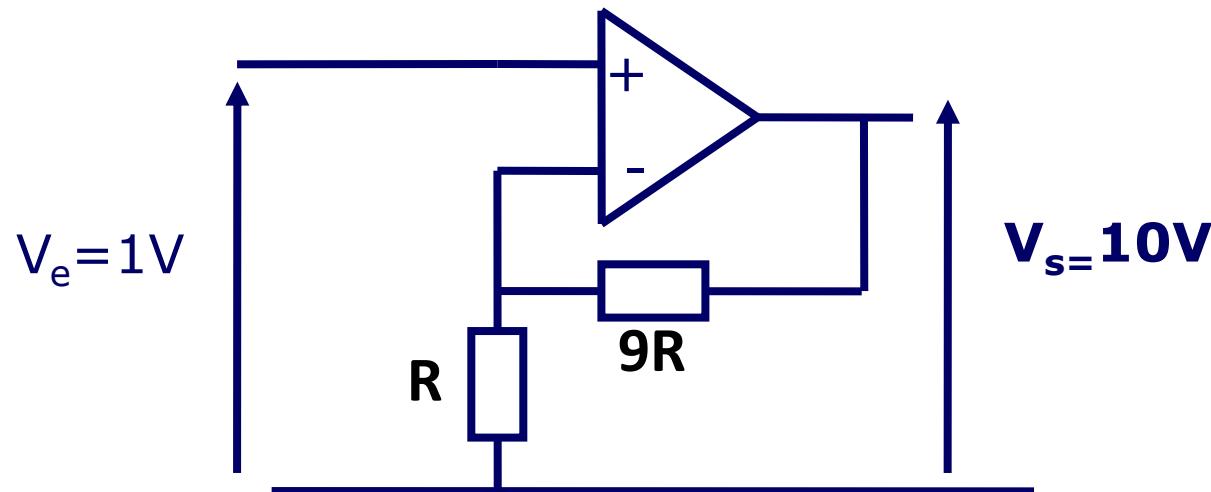
Caractéristique de sortie

- La sortie d'un ampli-op est équivalente à une source de tension imparfaite, de résistance R_s , limitée en courant.
- Le courant maximum en sortie est de l'ordre de 20 mA

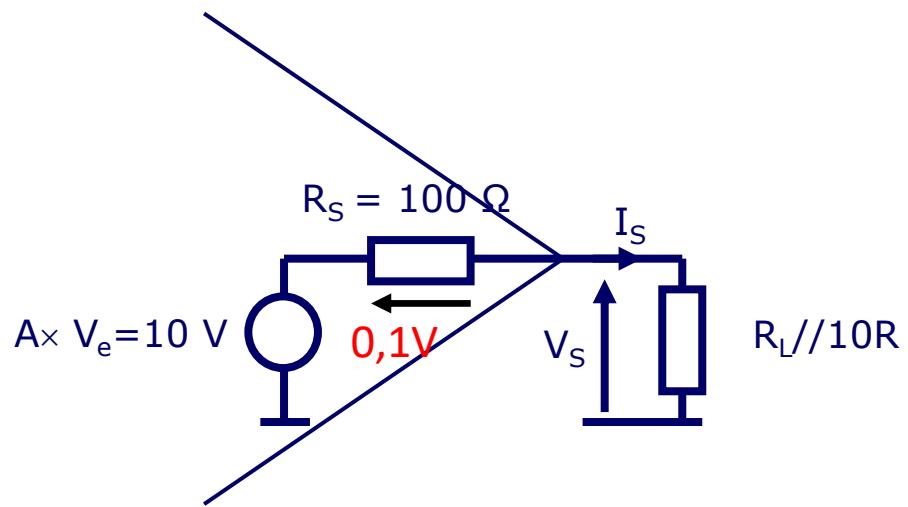
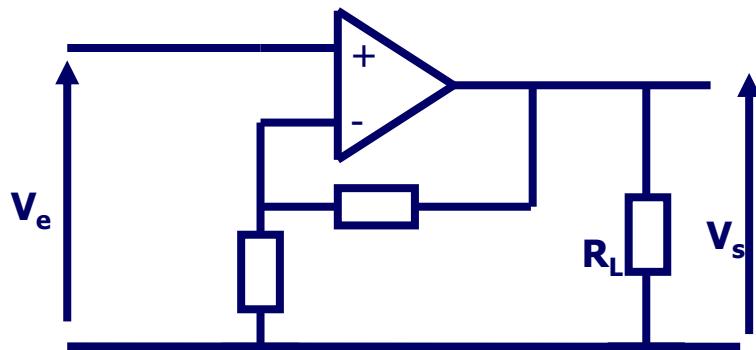


- **Exemple**

- Ampli Op : $R_s = 100 \Omega$, $I_{Smax} = 16 \text{ mA}$.
- Montage amplificateur non-inverseur, $A = 10$.
- $V_e = 1 \text{ V}$
 - À vide (sans charge) : $V_s = 10 \text{ V}$



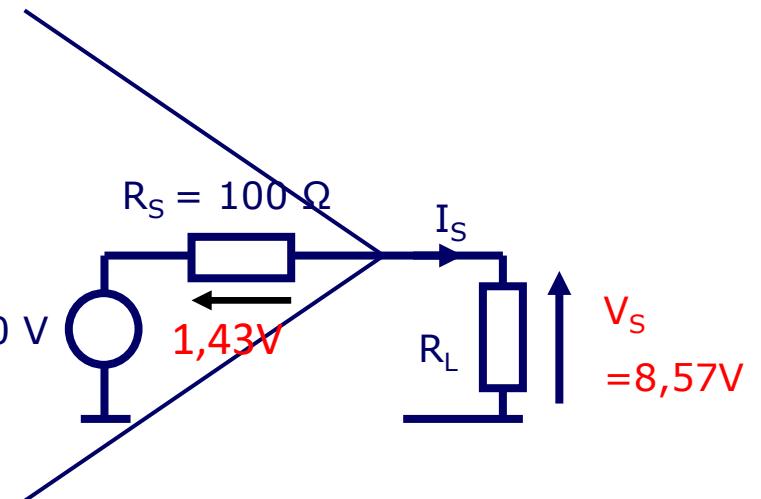
– Pour $R_L = 10 \text{ k}\Omega$,



$$\frac{10V}{10k\Omega} = 1mA \quad \text{Si } R_L \ll 10R$$

- $I_S = 1 \text{ mA} < 16 \text{ mA}$: pas de limitation
- $V_S = 10000 / (100 + 10000) . 10 \approx 10 \text{ V}$:

→ La résistance de sortie ne modifie presque pas la tension à vide.



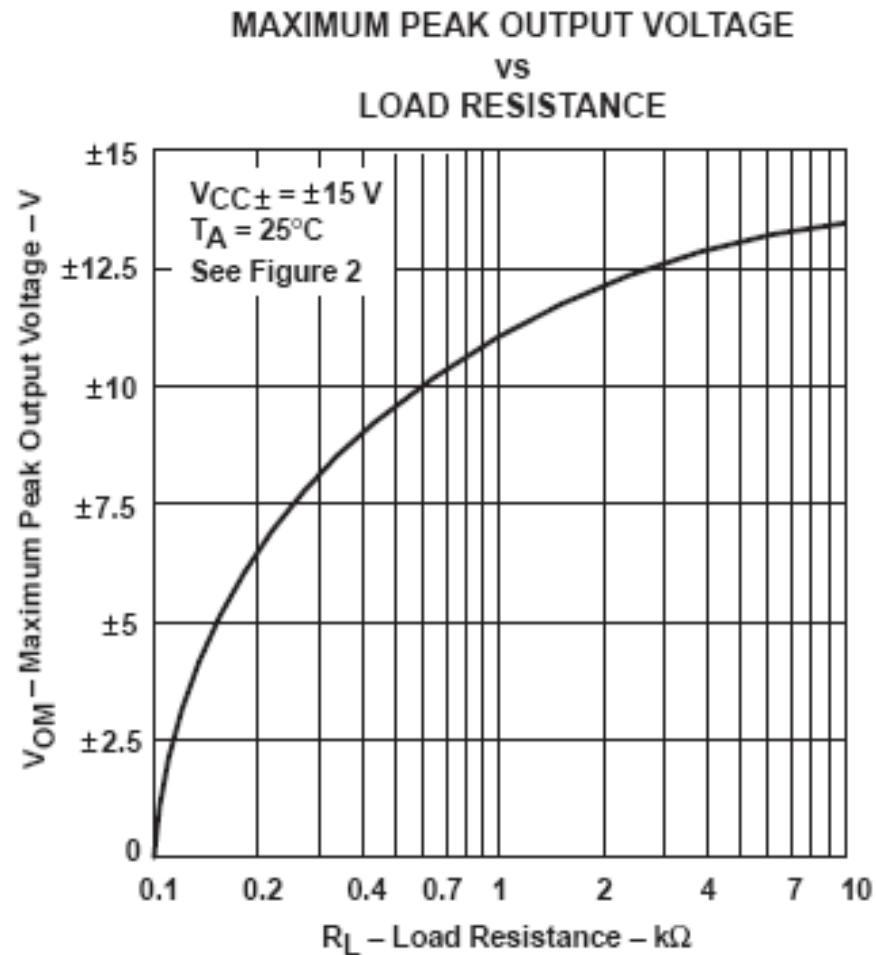
– Pour $R_L = 600 \Omega$

- $I_S = 10 / (100 + 600) = 14,2 \text{ mA} < 16 \text{ mA}$: pas de limitation
- $V_S = 600 / (100 + 600) \cdot 10 = 8,57 \text{ V}$

– Pour $R_L = 400 \Omega$

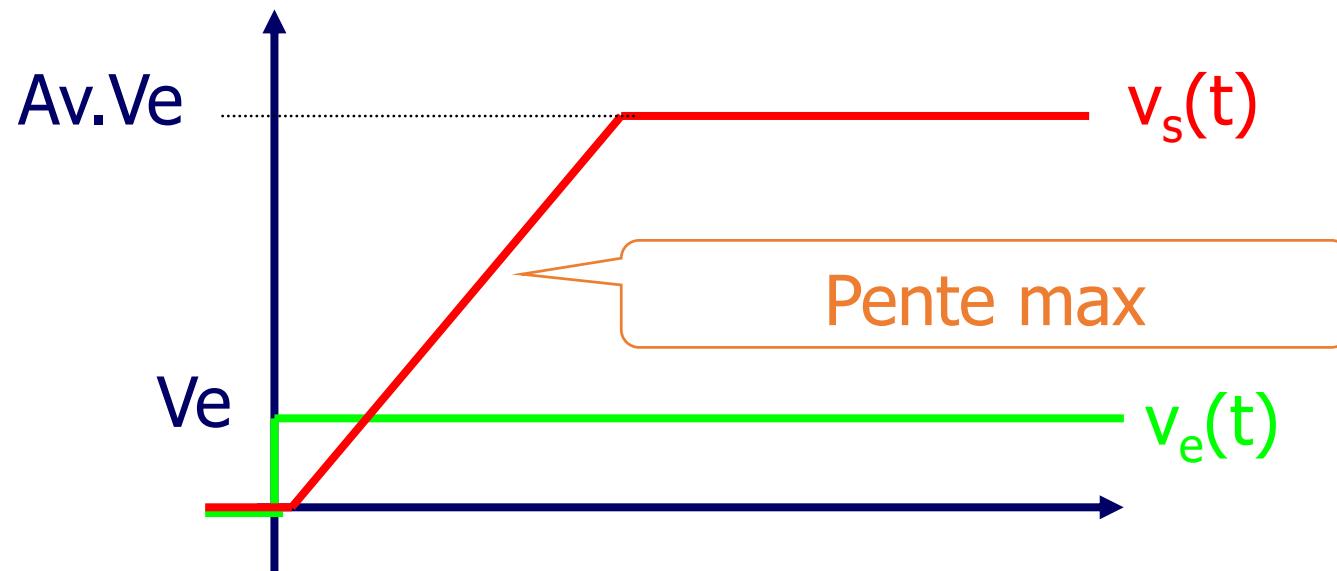
- $I_S = 10 / (100 + 400) = 25 \text{ mA}$ IMPOSSIBLE donc $I_S = I_{S\max} = 16 \text{ mA}$
- $V_S = 16 \text{ mA} \times 400 = 6,4 \text{ V}$

- Conclusion :
- Pour une résistance de charge R_L donnée, la tension de sortie ne peut dépasser (en valeur absolue)
 - V_{SAT}
 - $I_{max} \times R_L$



Vitesse de variation maximale de V_s : slew-rate

- Conséquence directe de la réponse en fréquence de l'ampli – op : l'ampli – op « ne passe pas bien » les hautes fréquences.
- La pente maximale du signal de sortie est appelée slew-rate : SR

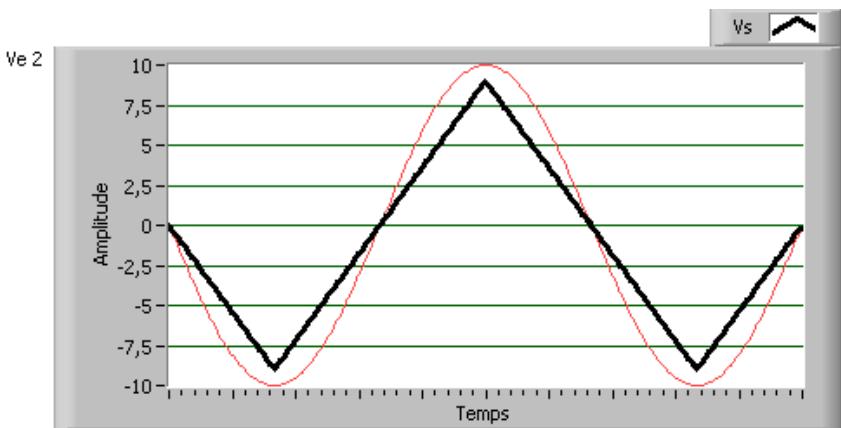
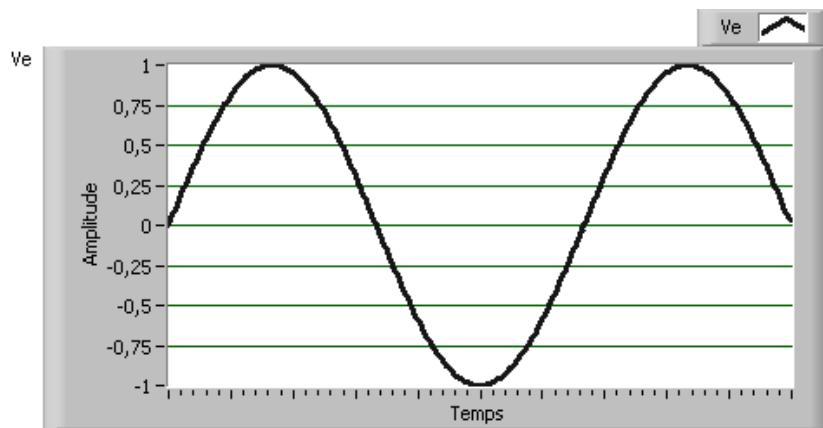


Ordre de grandeur: $\sim 10V/\mu s$

- Cas d'un amplificateur inverseur $A = -10$,
- $v_s(t) = A \cdot V_{EMAX} \sin(2\pi f t)$
- Pour ne pas déformer le signal, il faut vérifier :

Dérivée maximale < slew rate

$$dV_s/dt = |A| \cdot V_{EMAX} \cdot 2\pi f < SR$$

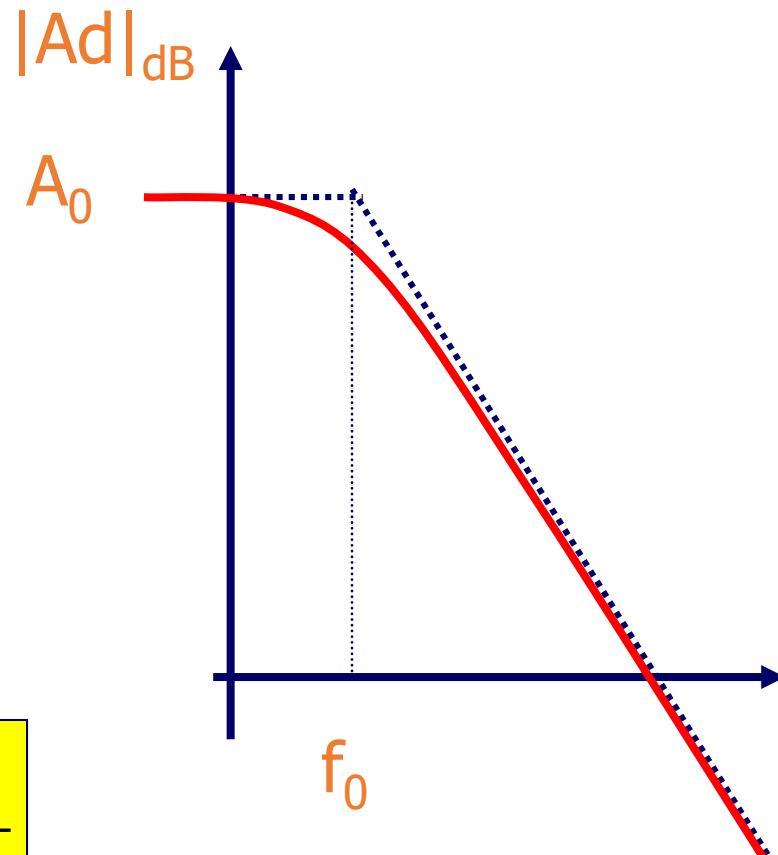


Caractéristiques dynamiques

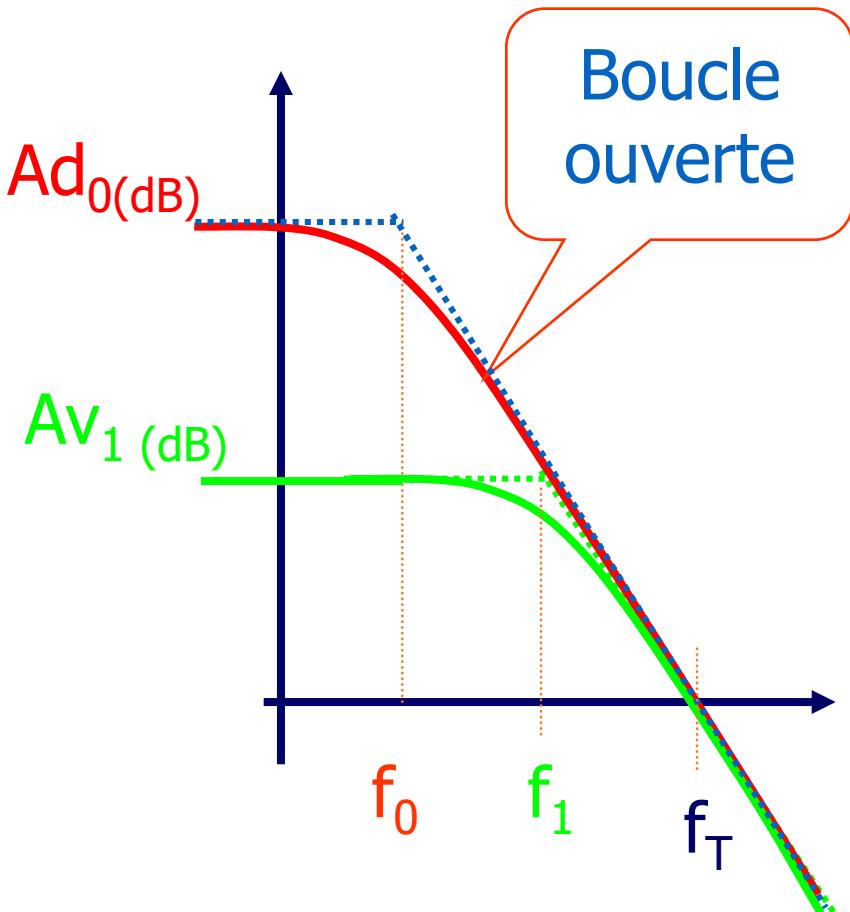
Bande passante

- L'amplification différentielle A_d n'est pas infinie, et varie en fonction de la fréquence du signal d'entrée :
- La largeur de bande passante (band width, BW) en boucle ouverte est extrêmement faible :
- $f_0 \approx 10 \text{ Hz}$.

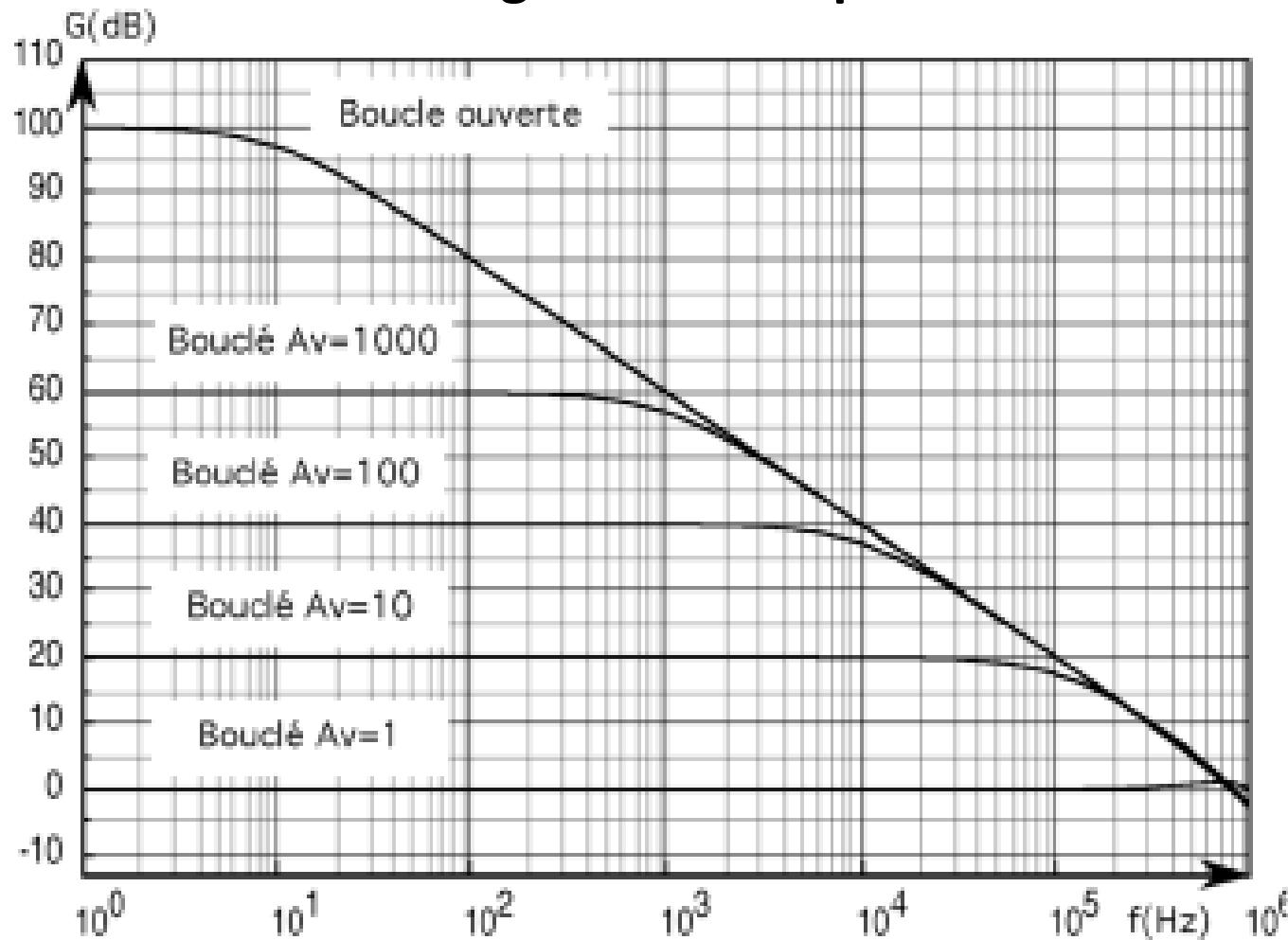
$$\frac{A_d}{1 + j \frac{f}{f_o}}$$



- En utilisant l'amplificateur opérationnel contre-réactionné, on étend la bande passante :
- le **produit gain-bande passante** (gain-bandwidth product) est généralement constant :
 - $Ad_0 \times f_0 = Av_1 \times f_1 = 1 \times f_T$



Produit gain x bande passante

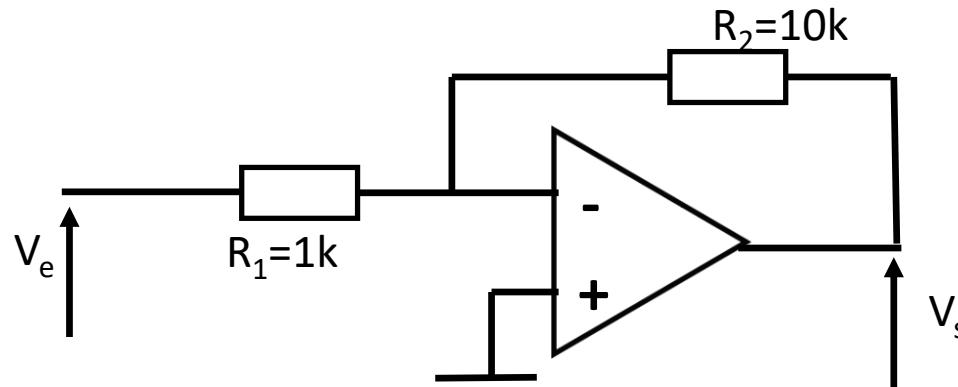


Dans un AOP, le produit : **Gain (lin) x bande passante = constante.**

Conclusion : Plus le gain est important, plus la fréquence de coupure sera basse.

Valable s'il y a seulement des résistances ohmiques !

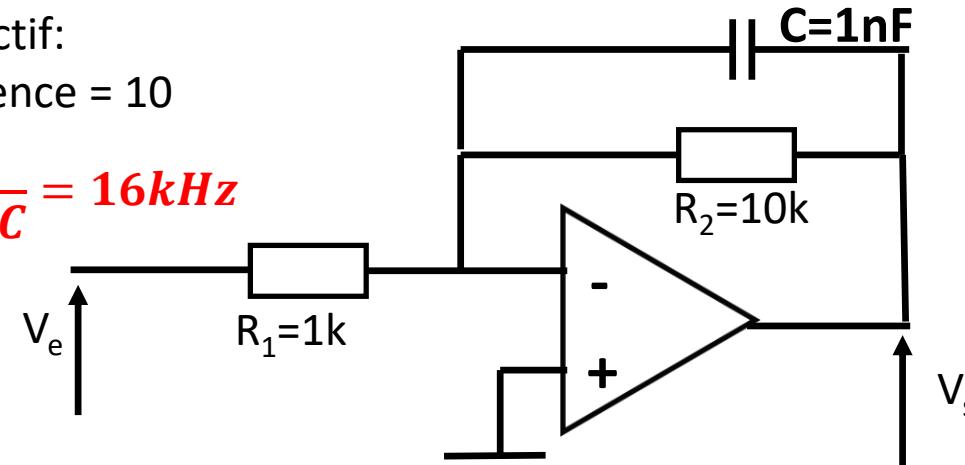
Produit gain x bande passante



$$\text{Produit gain} \times \text{bande passante} = 1 \text{ MHz} \quad \text{Gain} = 10 \quad \rightarrow \text{Bande passante} = 100\text{kHz}$$

Filtre passe bas actif:
Gain basse fréquence = 10

$$f_{coupure} = \frac{1}{2\pi R_2 C} = 16\text{kHz}$$



→ Bande passante limitée par le produit R_2C et non pas par l'ampli

Circuits linéaires à ampli op

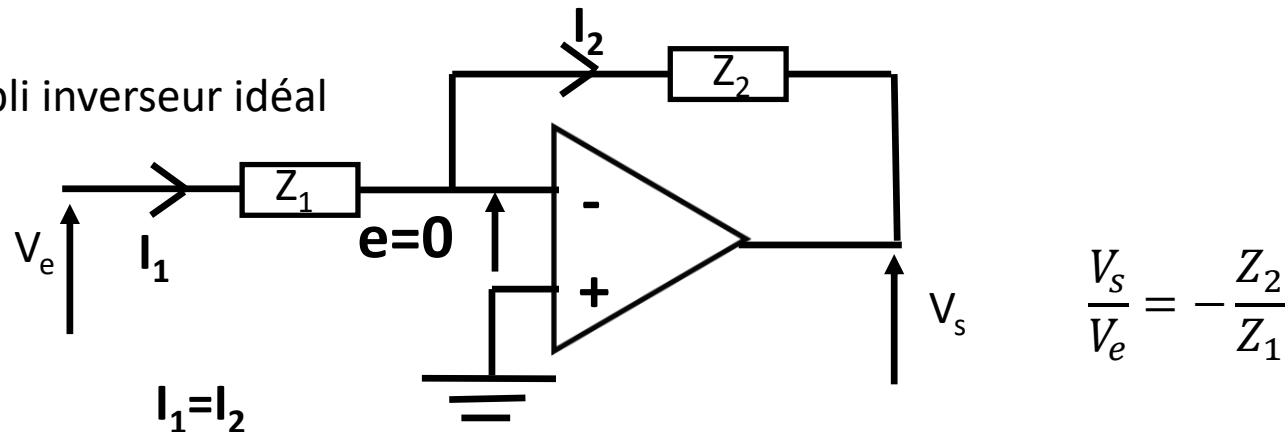
- Si le montage fonctionne en régime linéaire, la sortie est rebouclée sur l'entrée inverseuse (-), alors

- $e_+ = e_- \quad e = 0$

(si $e_- > e_+ \rightarrow V_s < 0 \rightarrow e_- \text{ diminue} \rightarrow \text{équilibre à } e_+ = e_-$)

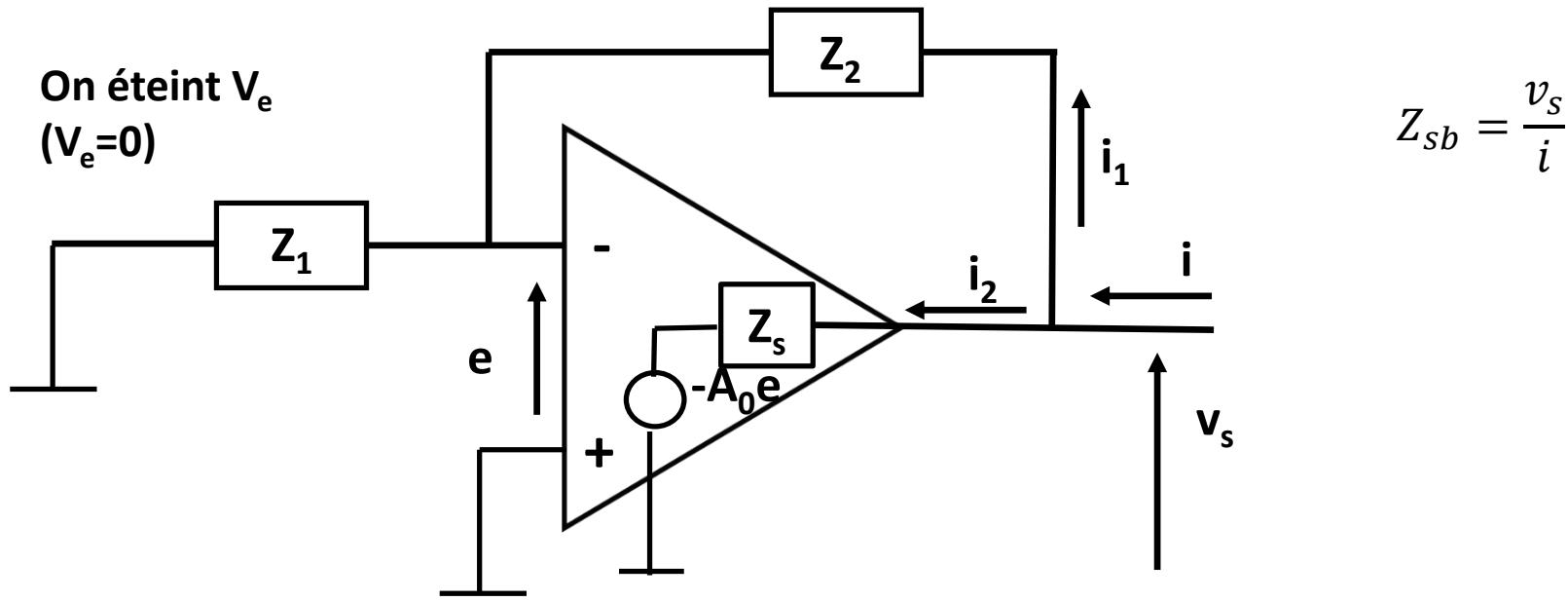
- on réalise ainsi des amplificateurs, des sommateurs, des filtres....

Exemple: ampli inverseur idéal

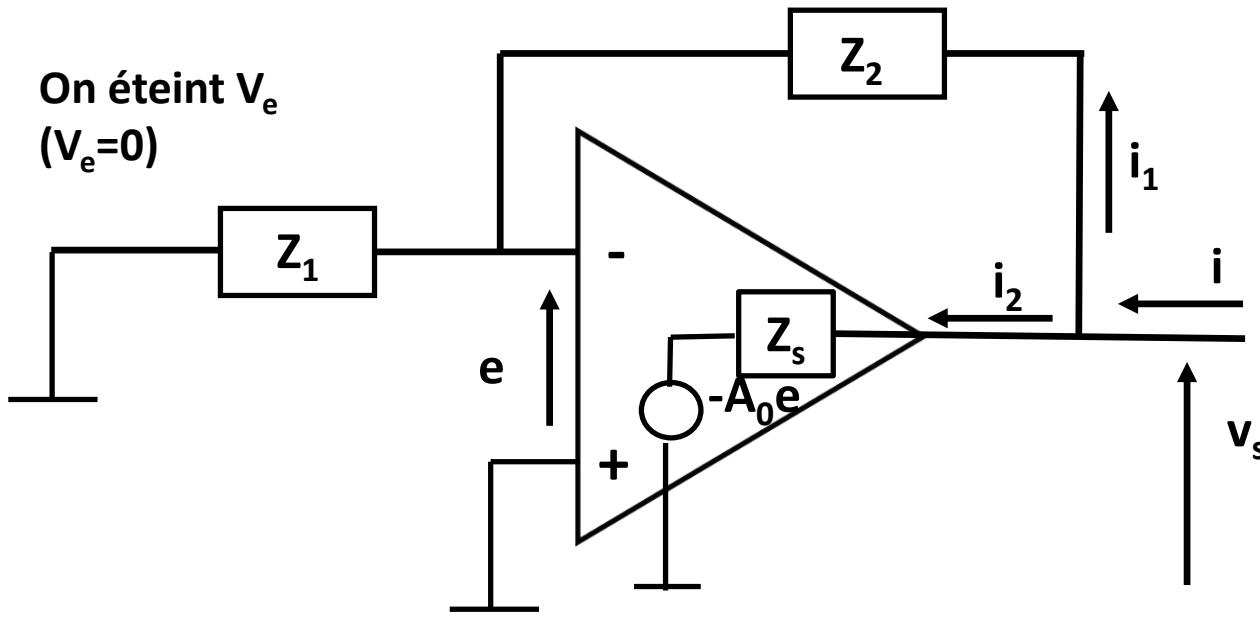


Permet d'amplifier une tension référencée par rapport à la masse

Impédance de sortie de l'inverseur (modèle réel)



Impédance de sortie de l'inverseur (modèle réel)



$$Z_{sb} = \frac{v_s}{i}$$

$$i = i_1 + i_2$$

$$v_s = Z_s i_2 - A_0 e$$

et

$$e = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} v_s$$

d'où $v_s = Z_s i_2 - A_0 \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} v_s$ $i_2 = \frac{v_s}{Z_s} \left(1 + A_0 \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)$

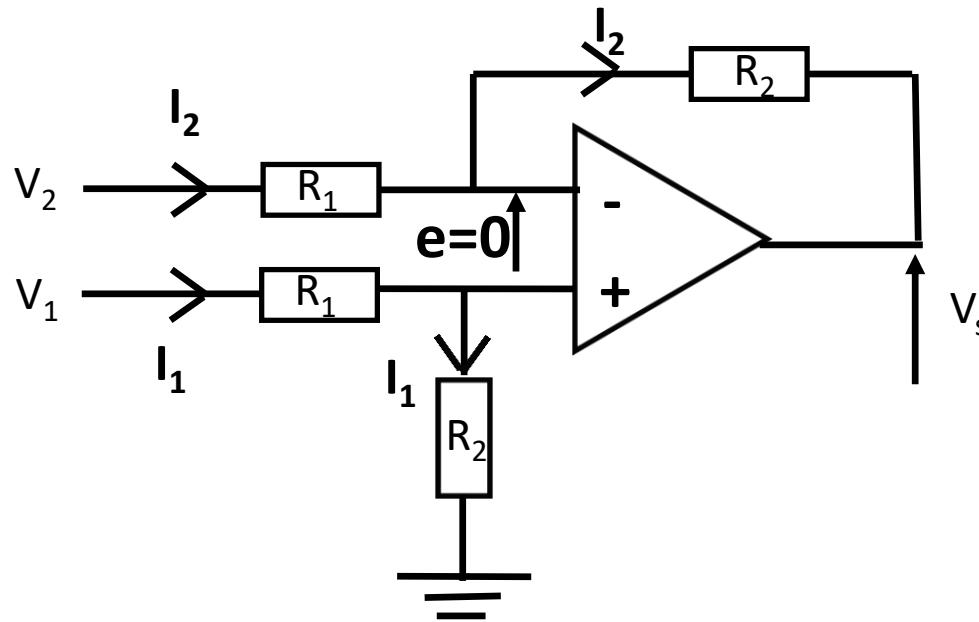
$$i = i_1 + i_2 = \frac{v_s}{Z_1 + Z_2} + \frac{v_s}{Z_s} \left(\cancel{1 + } A_0 \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right) \longrightarrow i \approx \frac{v_s}{Z_s} \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} A_0$$

A_0 grand

$$Z_{sb} = \frac{v_s}{i} = \frac{Z_s}{A_0} \cdot \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1}$$

Impédance de sortie
du montage bouclé

L'amplificateur différentiel idéal (soustracteur)



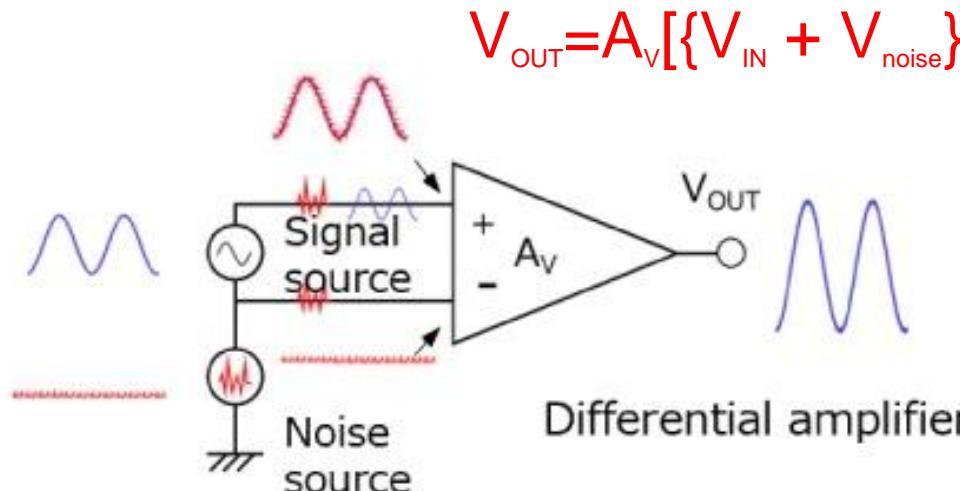
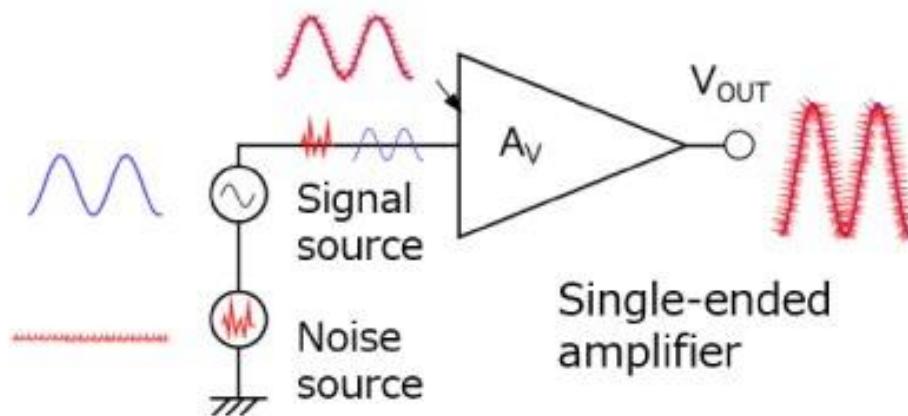
On peut montrer que $V_s = -\frac{R_2}{R_1}(V_2 - V_1)$

Gain différentiel $G_d = \frac{R_2}{R_1}$ réglable

Permet d'amplifier la différence entre deux tensions $\neq 0V$

Dans le cas idéal, si $V_1=V_2 \rightarrow V_s=0V$

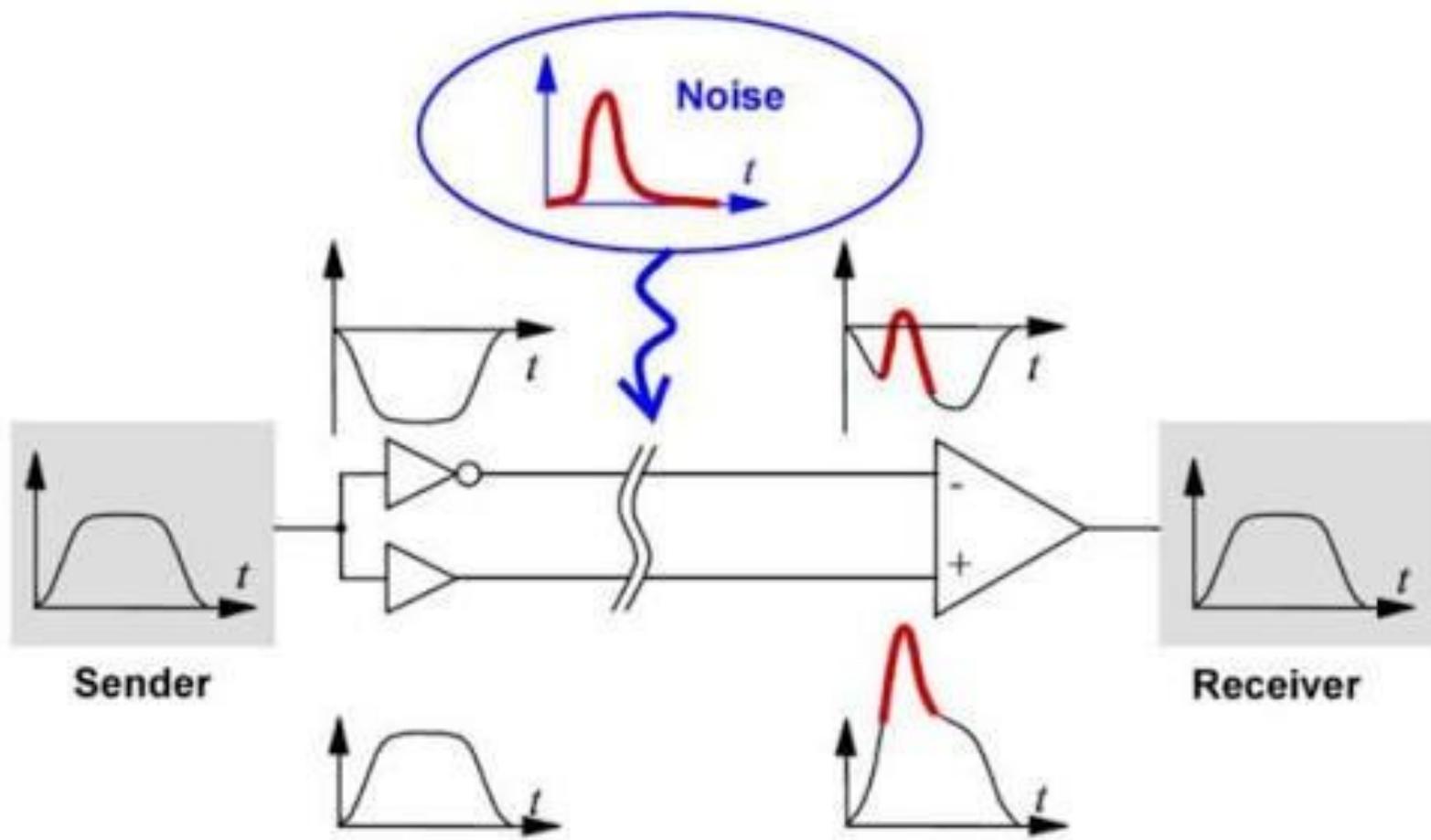
What is the purpose of using a differential amplifier?



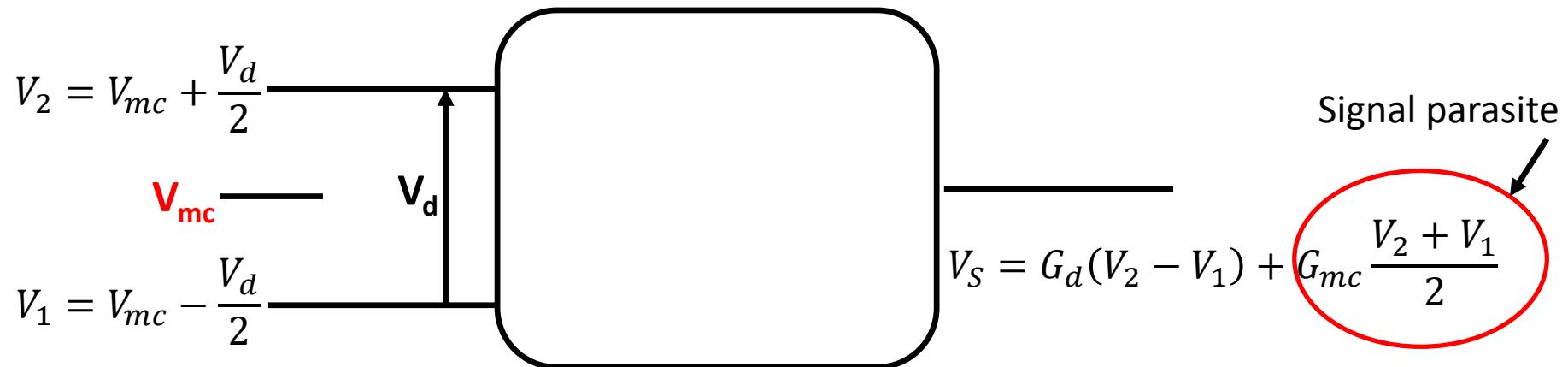
$$V_{OUT} = A_v [V_{IN(+)} + V_{noise}] - [V_{IN(-)} + V_{noise}] = A_v [V_{IN(+)} - V_{IN(-)}]$$

Figure: Noise superimposed on the amplifier's ground

Common-Mode Noise Rejection



Amplificateur différentiel réel (common mode rejection ratio)



$$V_{mc} \gg V_d, V_{mc} \sim V; V_d \sim \text{mV}$$

On appelle:

$V_{mc} = \frac{V_2 + V_1}{2}$ la tension du mode commun (moyenne de V_1, V_2)

G_{mc} le gain du mode commun

On définit le **taux de réjection du mode commun** (common mode rejection ratio):

$$\textcolor{red}{TRMC} = \frac{G_d}{G_{mc}}$$

Idéalement, $\text{TRMC} = \infty$

$$TRMC_{dB} = 20 \cdot \log \frac{G_d}{G_{mc}}$$

TRMC d'un ampli op typiquement $\approx 10^5$ ou 100 dB

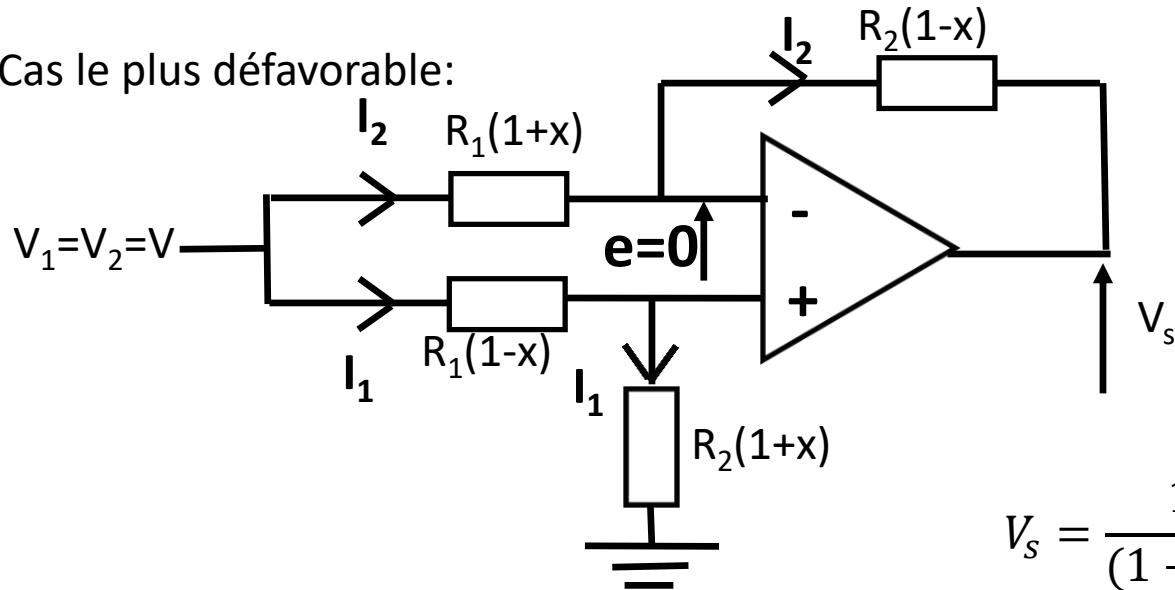
Exemple: Amplificateur différentiel réel

Problème: les résistances ne sont pas strictement identiques, elles ont une tolérance x:

$$R(1-x) \leq R \leq R(1+x)$$

Exemple: tolérance=5% $\rightarrow x=0,05$

Cas le plus défavorable:



On obtient:

$$V_s = \frac{1}{(1+x)} \cdot \frac{4R_2x}{R_1(1-x) + R_2(1+x)} V$$

Si $x \ll 1$:

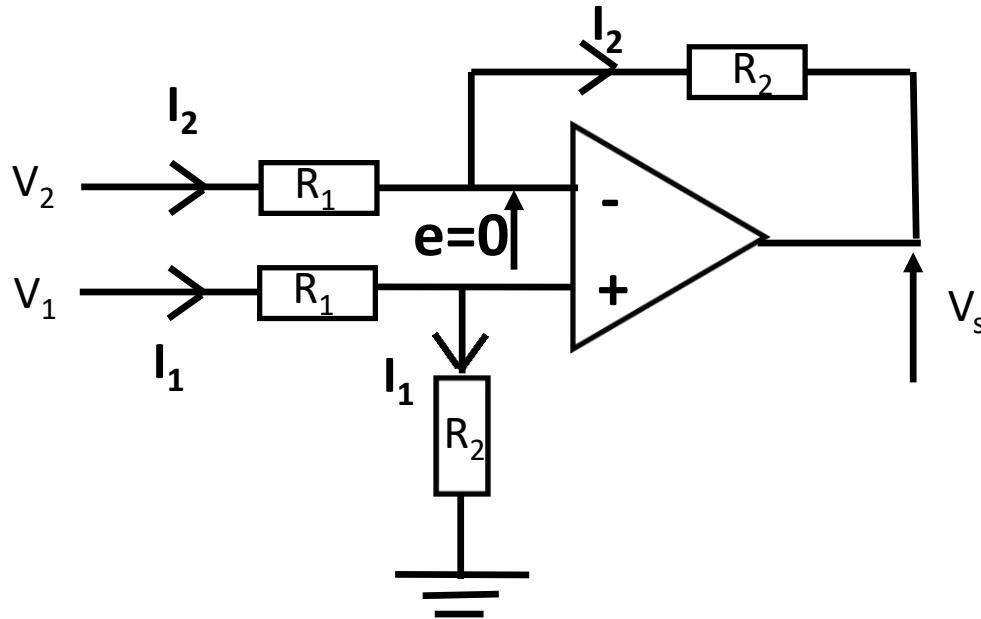
$$V_s = 4x \frac{G_d}{G_d + 1} V$$

On obtient le gain du mode commun:

$$G_{mc} = 4x \frac{G_d}{G_d + 1}$$

Exemple: $G_d = 10$, $x=0,01 \rightarrow G_{mc}=0,036$ et $TRMC \approx 280$ (où $TRMC_{dB} \approx 50dB$)

Impédances d'entrée



Chaque voie d'entrée voit une impédance différente:

$$\text{Entrée non inverseuse: } Z_e^+ = R_1 + R_2$$

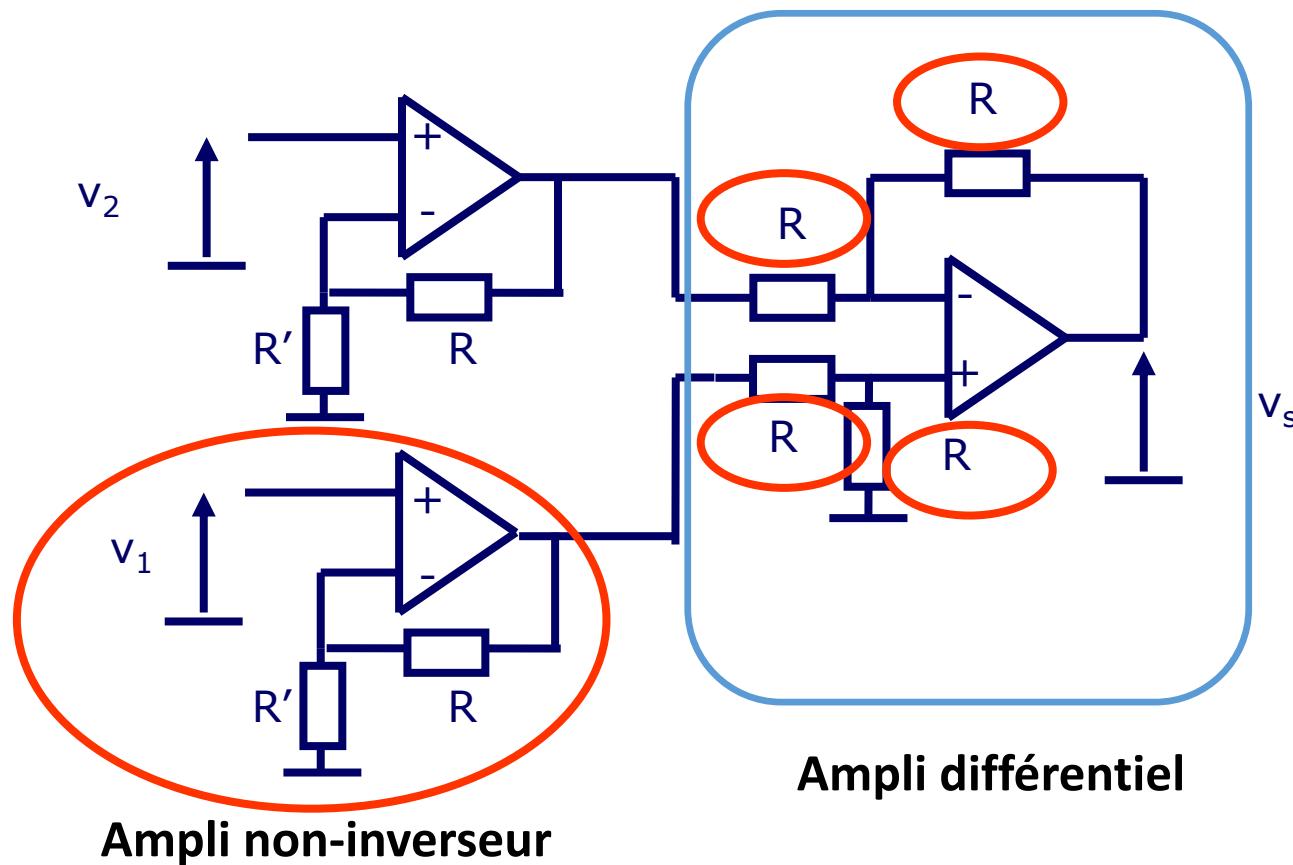
$$\text{Entrée inverseuse: } Z_e^- = R_1 \text{ (pour } V_1=0V\text{)}$$

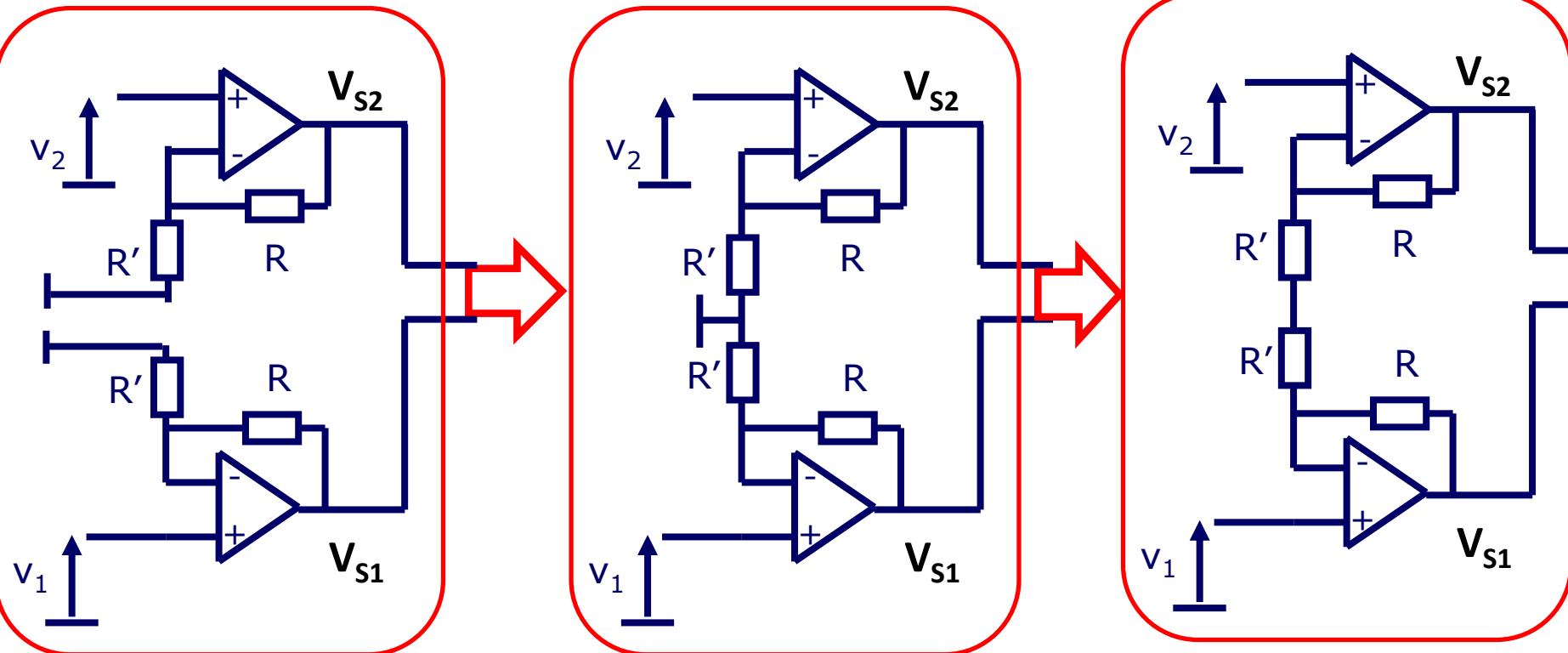
→ L'impédance d'entrée n'est pas symétrique, elle dépend de la valeur des résistances employées

Pour obtenir un gain élevé, il faut R_2 grand et R_1 petit, → impédance d'entrée faible

Solution: amplificateur d'instrumentation

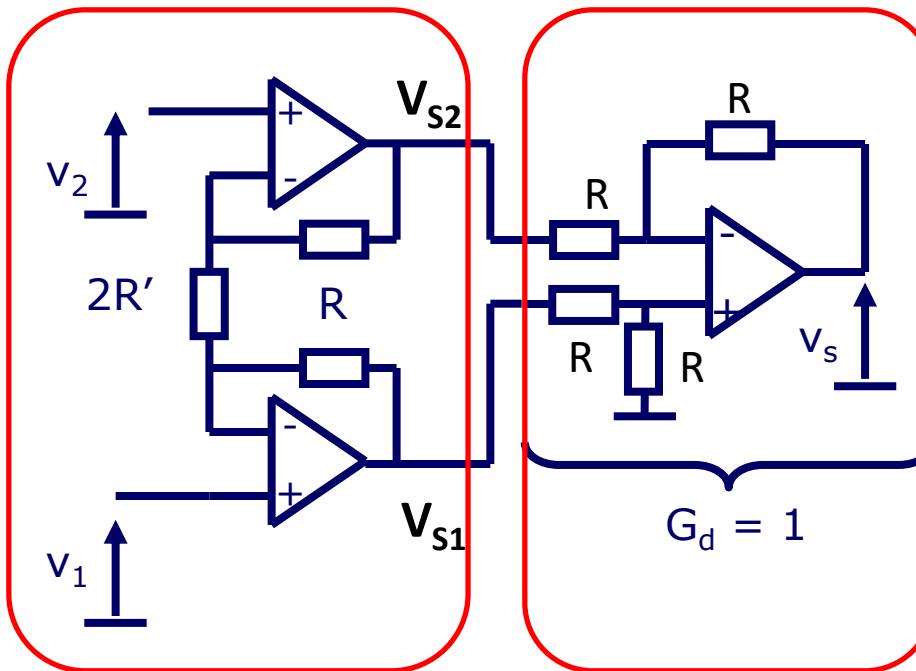
- On utilise l'impédance d'entrée « infinie » du montage non-inverseur: $R_{in} = R_{in \ AOP} \rightarrow \infty$
- Les résistances sont ajustées par le constructeur (très précises).



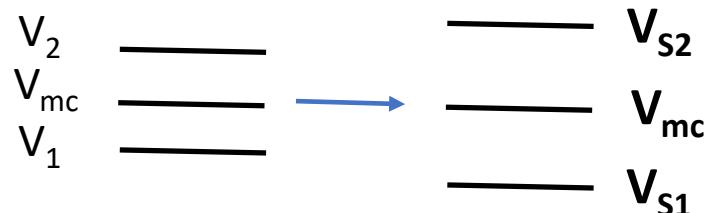


Amplificateur d'instrumentation

Structure



1. étage

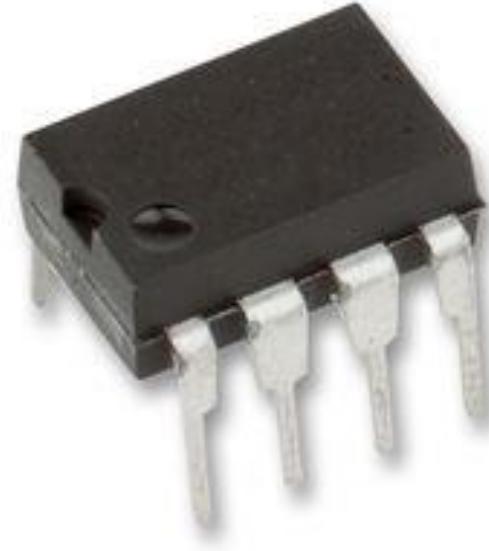


2. étage: Enlever le mode commun et référencer le signal par rapport à la masse

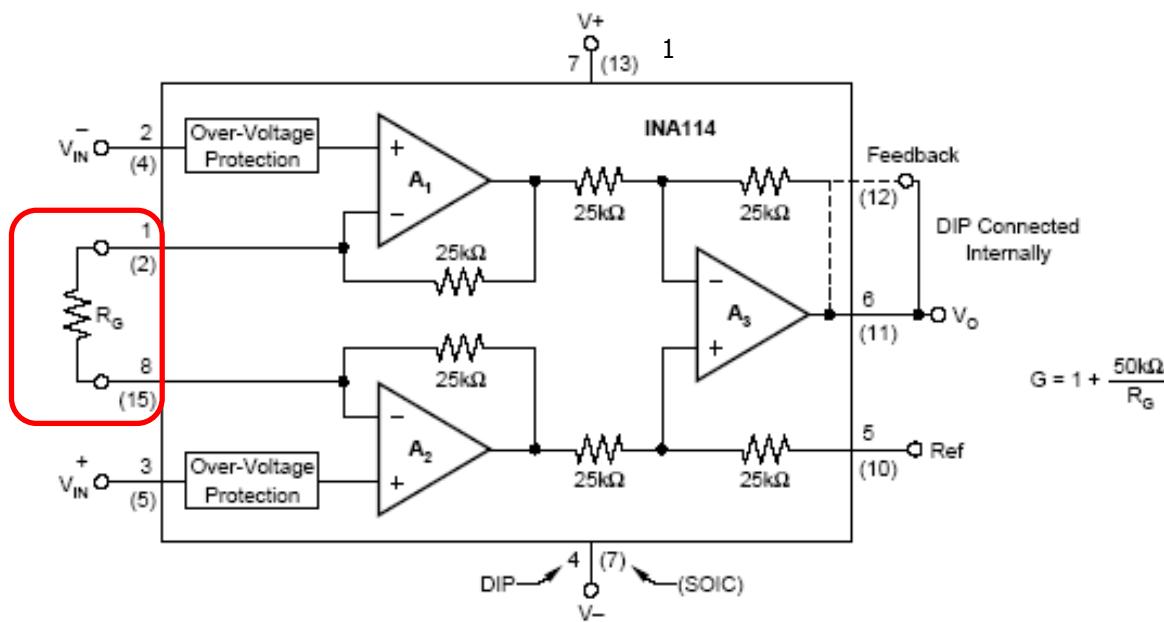
1. étage: différence ($V_2 - V_1$) amplifiée de $\frac{R' + R}{R'}$, V_{mc} inchangée
→ rapport $\frac{\text{tension différentielle}}{\text{mode commun}}$ augmenté

Amplification d'instrumentation

- $G_d = 1 + \frac{50k}{R_G}$
- Exemple INA 114
- TRMC très élevé (115 dB)
- Gain fixé par une seule résistance externe



Résistance externe
pour ajuster le gain



Montages ampli op non-linéaires

Exemple: montage sans rebouclage

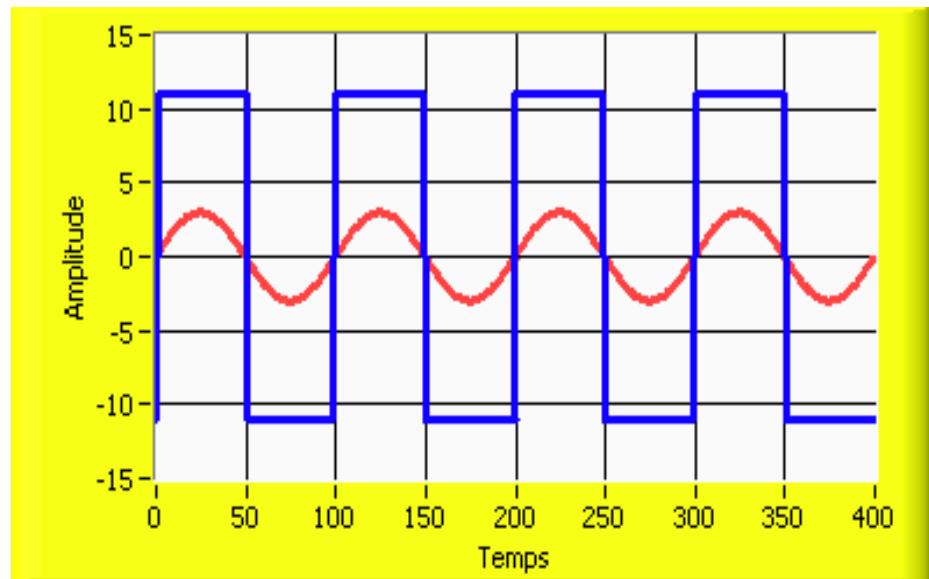
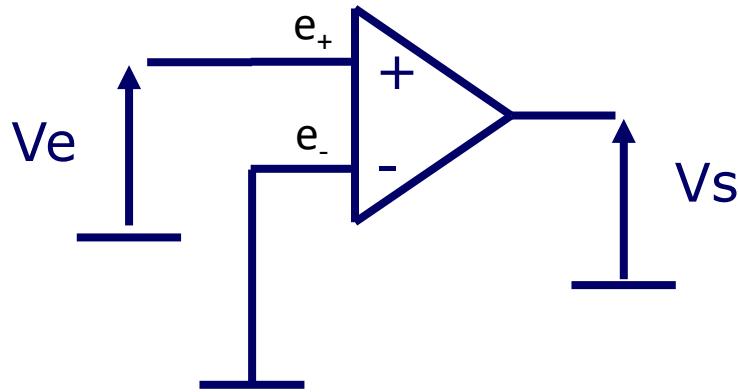
Si le montage fonctionne en boucle ouverte ou si la sortie est rebouclée sur l'entrée non inverseuse (+), il est en régime non-linéaire de saturation (ou commutation) :

la sortie est saturée :

$$\varepsilon = e_+ - e_-$$

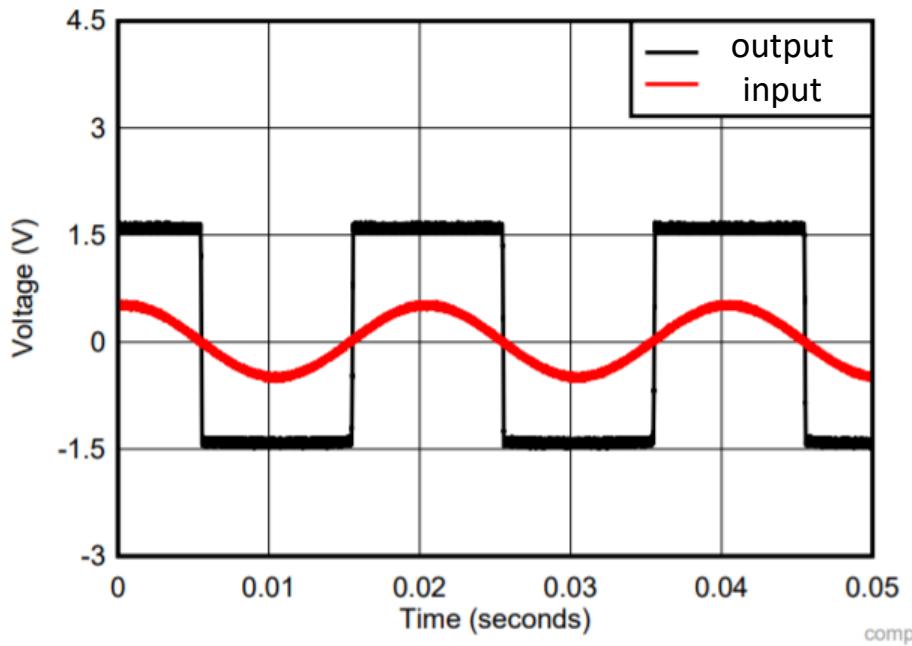
si $\varepsilon > 0 \rightarrow v_s = V_{sat}$,
si $\varepsilon < 0 \rightarrow v_s = -V_{sat}$

Exemple: comparateur de tension



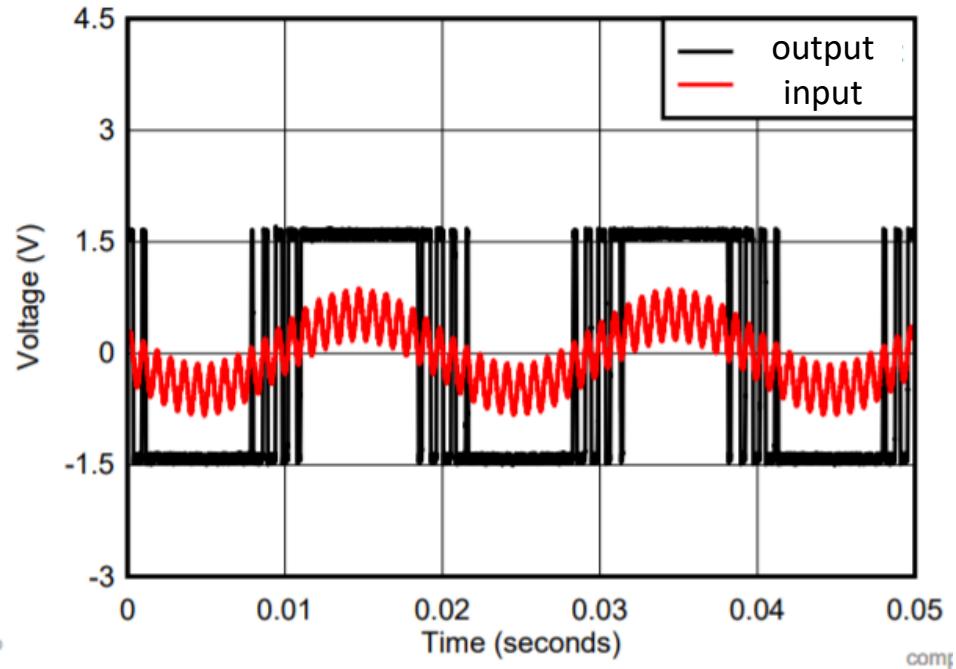
Ve Vs

idéal

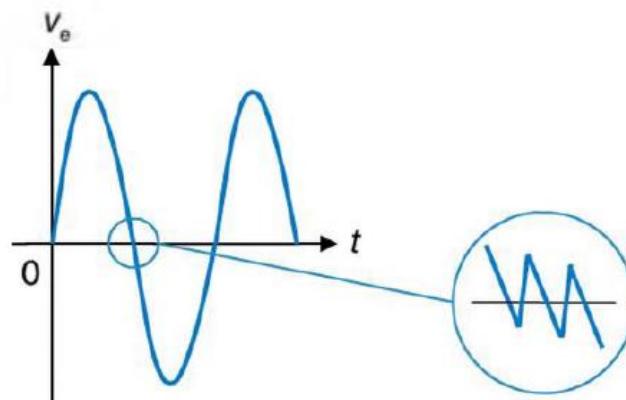


Output Corresponding to Ideal AC Signal

Réel

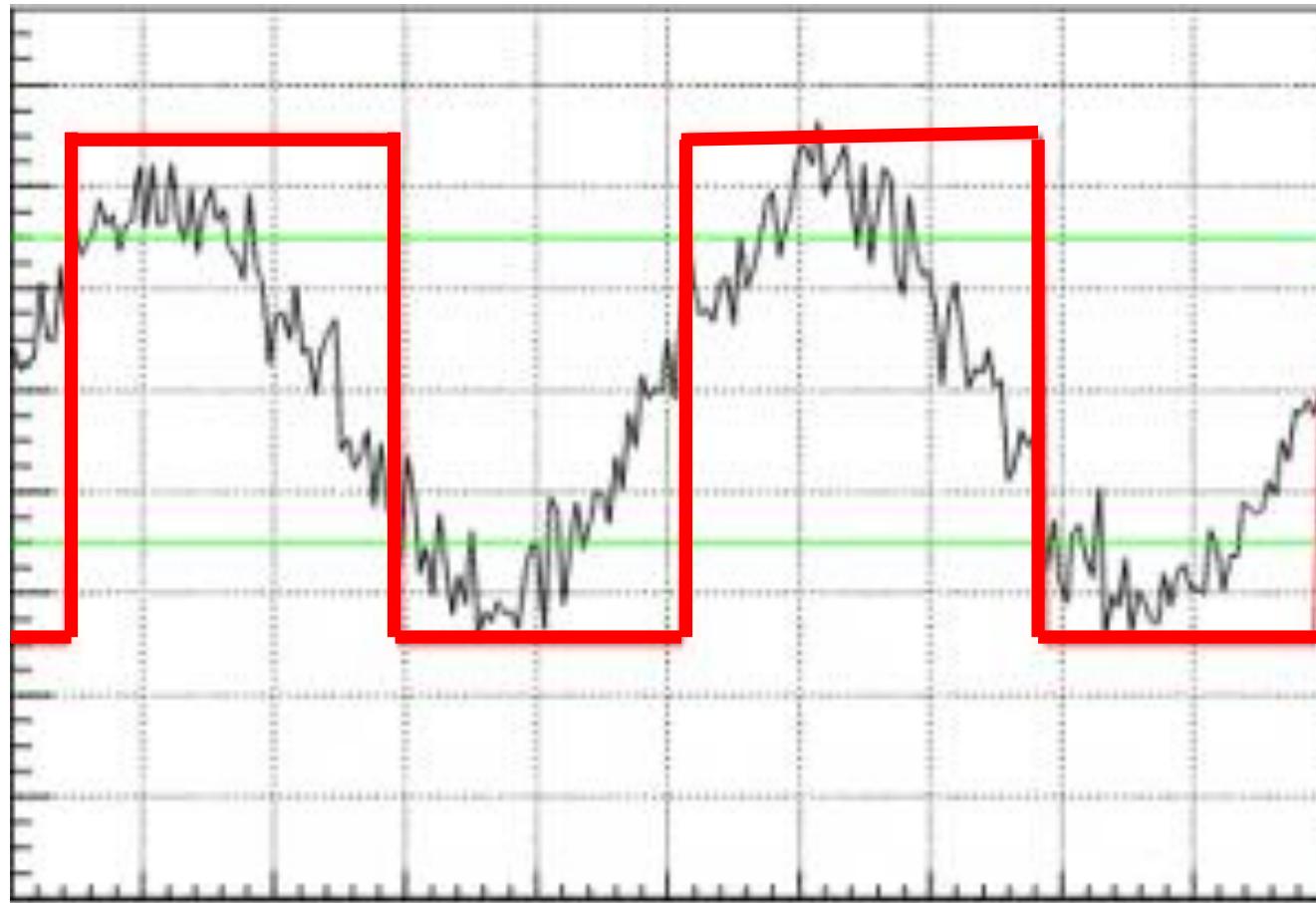


Output Corresponding to Distorted AC Signal



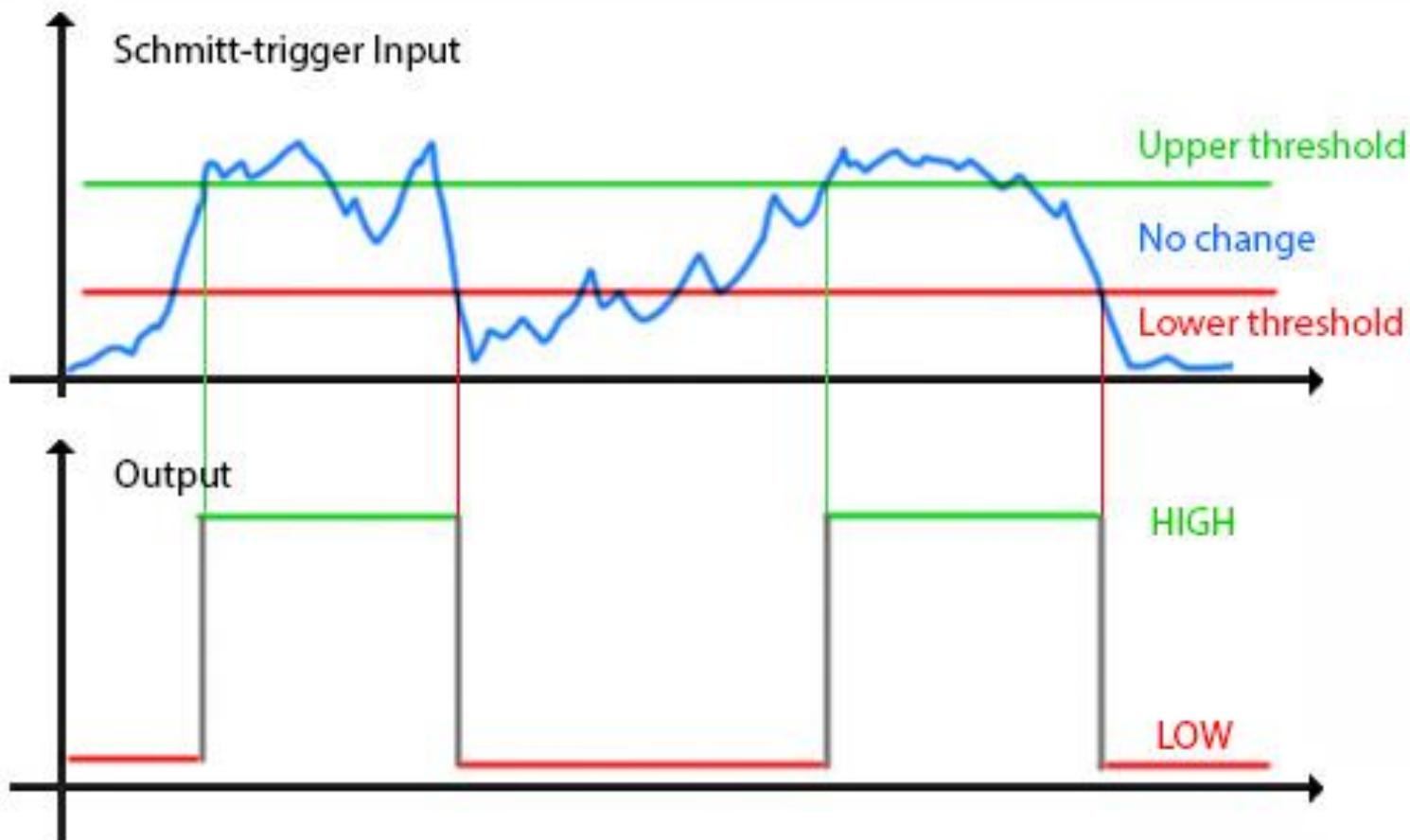
les signaux utilisés en
électronique ne sont jamais
tout à fait « purs »

What we want



Utilisation d'un trigger de schmitt pour mesurer plus facilement la fréquence d'un signal

What we want



Rebouclage sur l'entrée +

Exemple: Trigger de Schmitt inverseur

appelé aussi comparateur à hystérésis, ou bascule à seuil

- Principe

- La sortie peut prendre deux états : $+V_{sat}$ et $-V_{sat}$.
- L'entrée non inverseuse peut donc prendre deux valeurs :

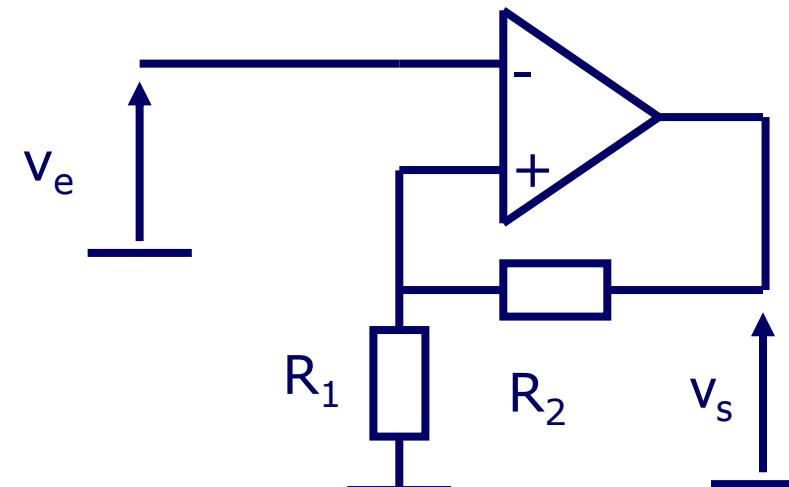
$$V_{sat} \cdot R_1/(R_1 + R_2) \text{ ou } -V_{sat} \cdot R_1/(R_1 + R_2)$$

- Ce sont ces deux valeurs de la tension d'entrée qui peuvent annuler ε , donc provoquer le basculement de la sortie.

- Mise en équation

$$\varepsilon = e_+ - e_- = V_s \cdot R_1/(R_1 + R_2) - V_e$$

- Si $V_s = +V_{sat}$,
 $\varepsilon > 0$ tant que $V_e < V_{sat} \cdot R_1/(R_1 + R_2)$ (Seuil positif)
- Si $V_s = -V_{sat}$,
 $\varepsilon < 0$ tant que $V_e > -V_{sat} \cdot R_1/(R_1 + R_2)$ (Seuil négatif)



Trigger de Schmitt inverseur

Un signal d'entrée: $V_e(t) = V_0 \cos \omega t$.

les deux valeurs de sortie: V_{\min} et V_{\max}

$$V_{\min} = -V_{\max} = -V_{sat}$$

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} < V_0 \quad \alpha = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

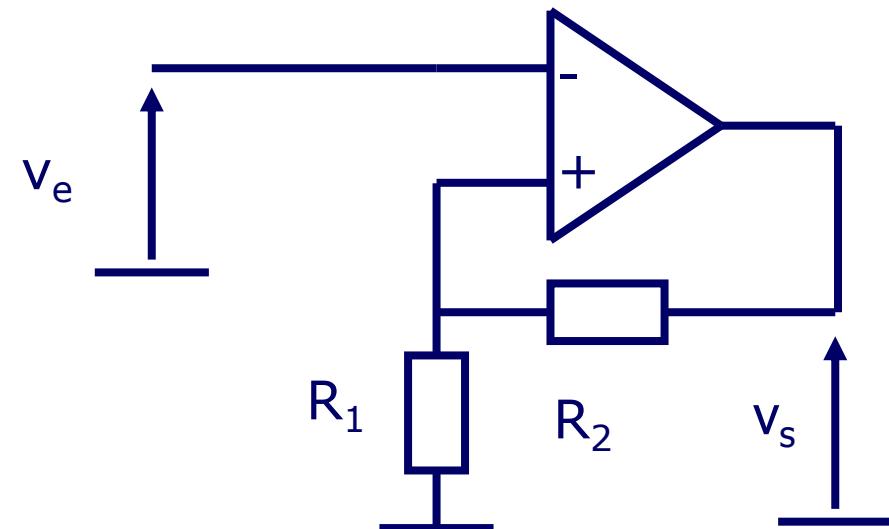
la valeur de la tension de sortie,

$$V+ = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) V_S = \alpha V_S$$

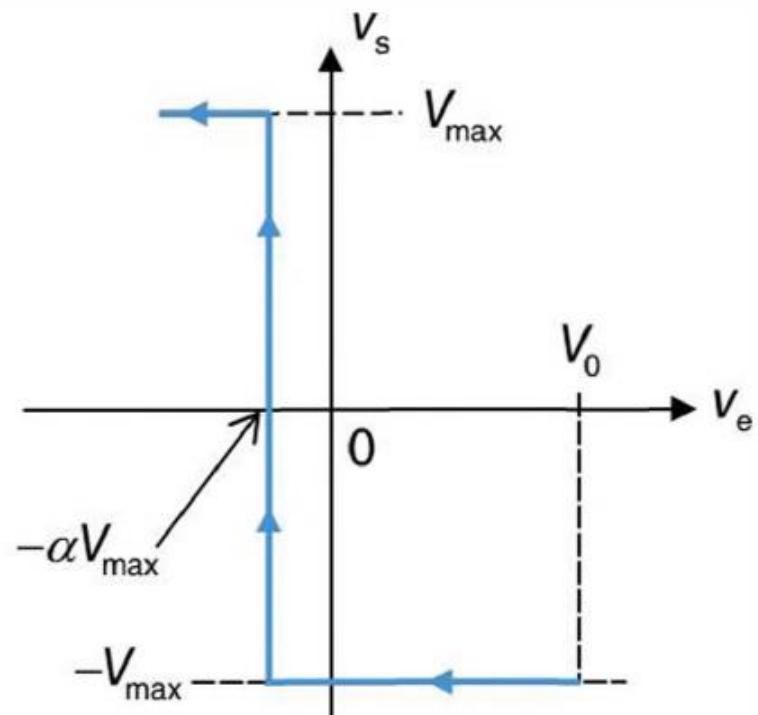
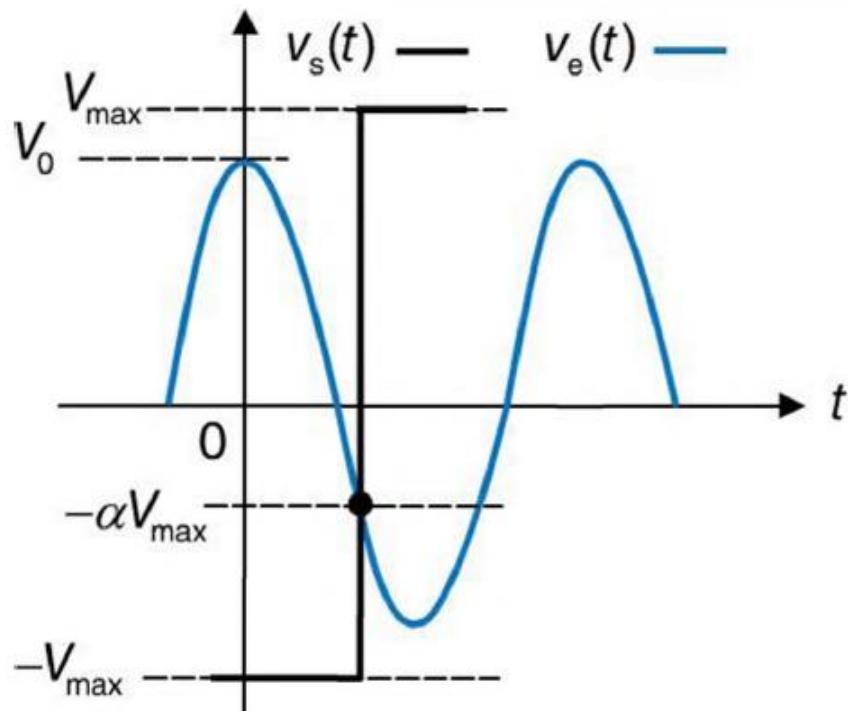
À $t = 0$, on a $V- = V_e = V_0$, puisque $V_e(t) = V_0 \cos \omega t$.

À $t = 0$, $V_S = -V_{sat}$

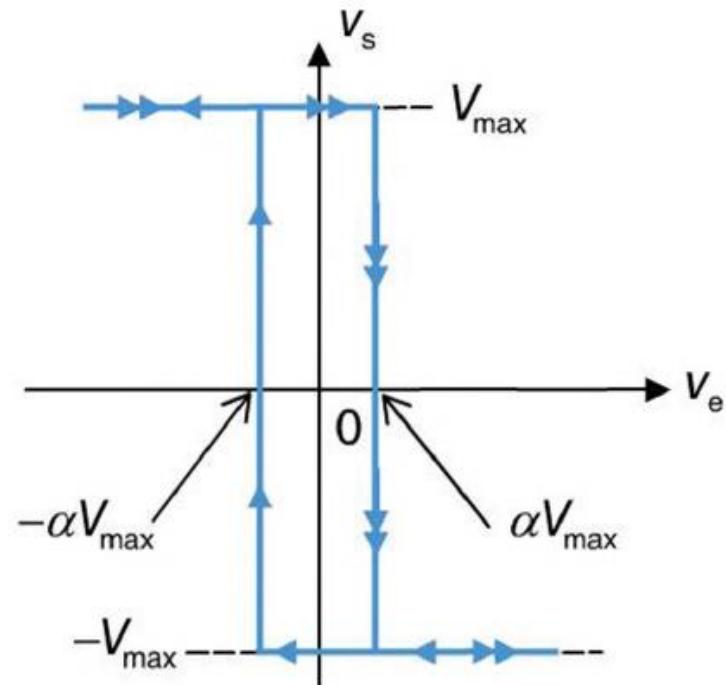
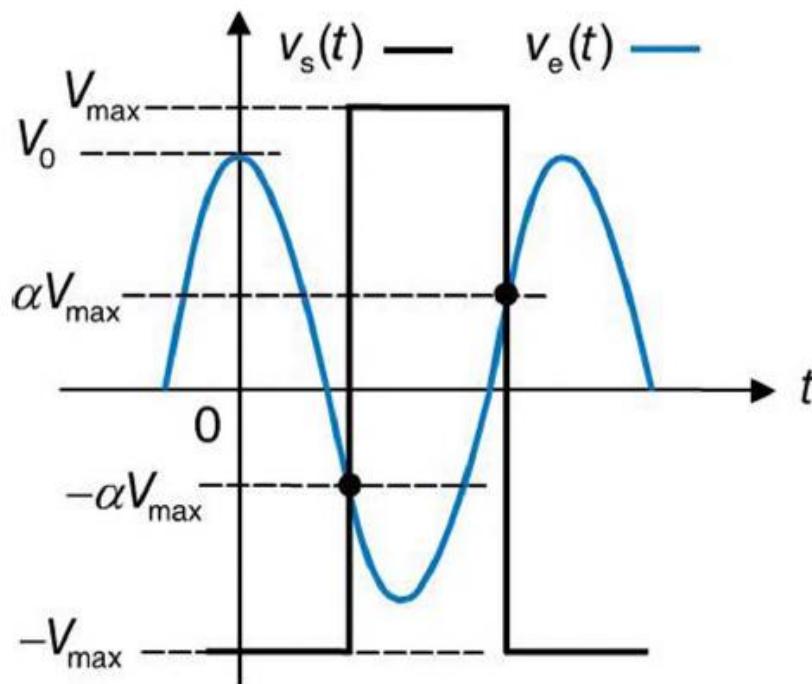
$$V+ = -\alpha V_{sat}$$



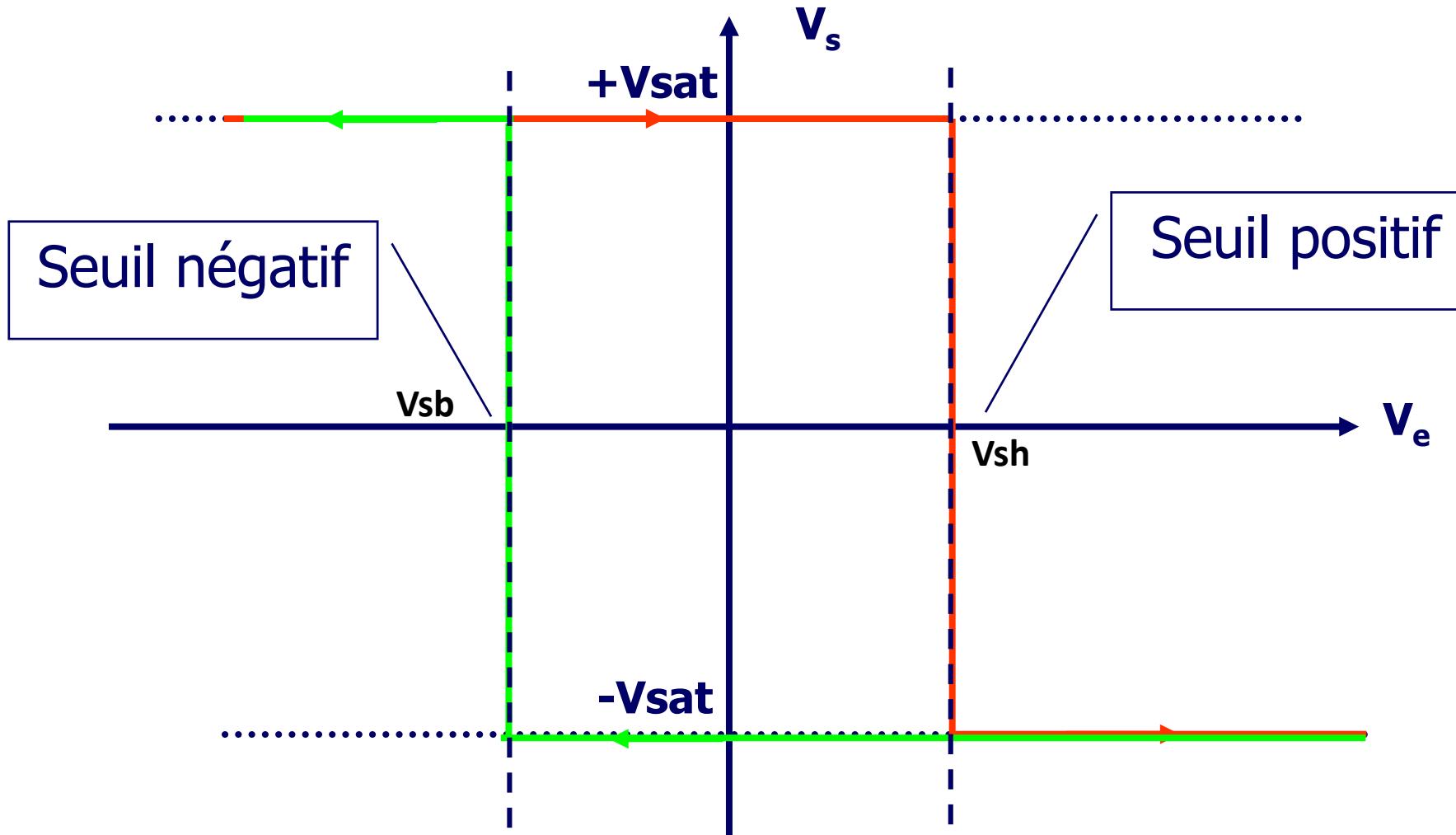
Le basculement pour une tension d'entrée décroissante



Le basculement pour une tension d'entrée croissante



Trigger de Schmitt inverseur



Le trigger de Schmitt non inverseur

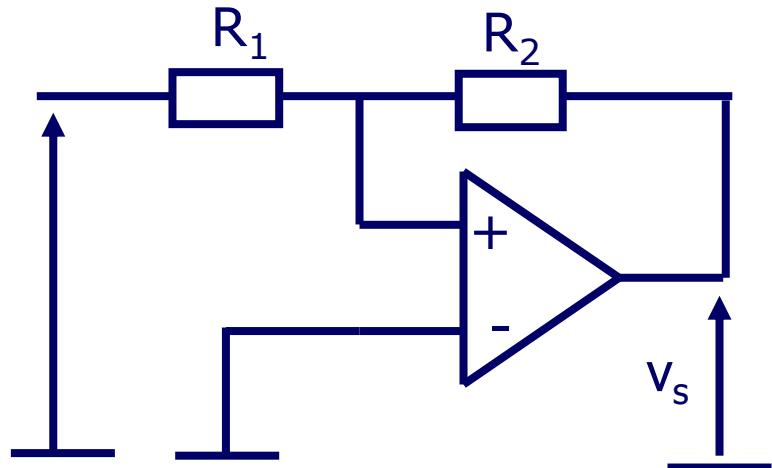
Un signal d'entrée: $V_e(t) = V_0 \cos \omega t$.

les deux valeurs de sortie: V_{\min} et V_{\max}

$$V_{\min} = -V_{\max} = -V_{sat}$$

$$\frac{R_1}{R_2} V_{sat} < V_0 \quad \alpha = \frac{R_1}{R_2}$$

$$V_+ = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) V_e + \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) V_S = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) (V_e + \alpha V_S)$$

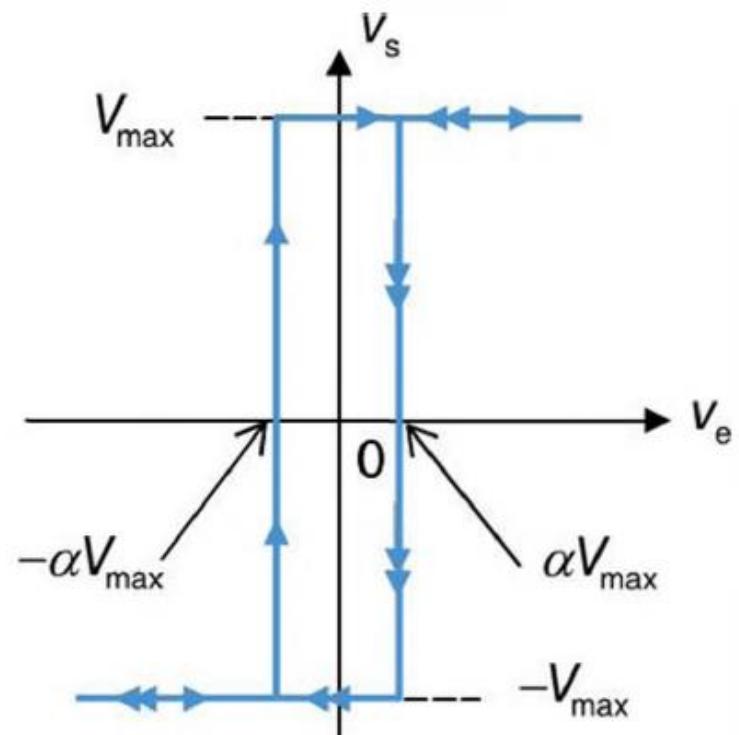
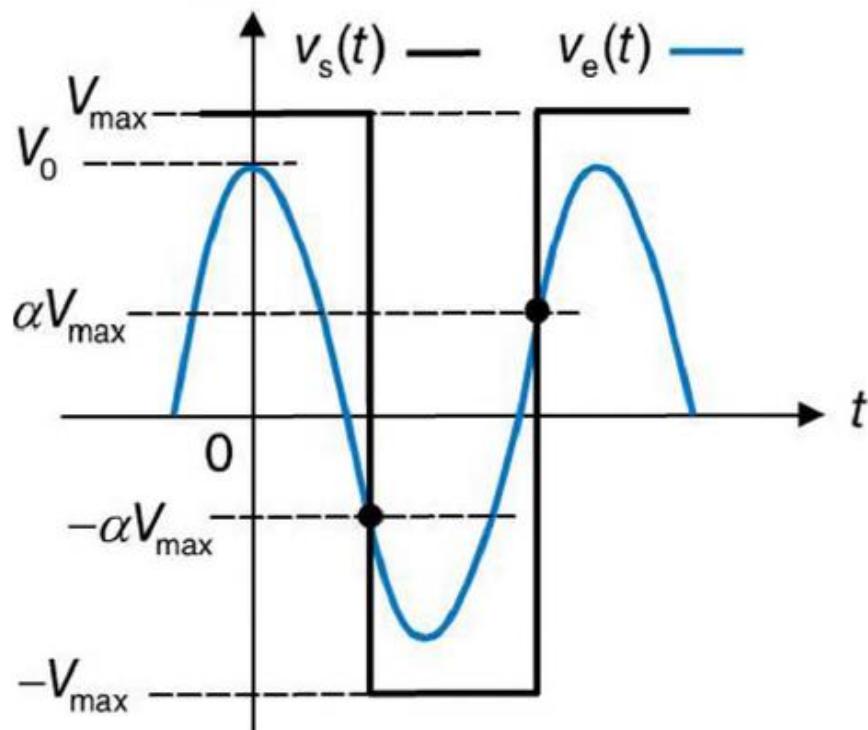


À $t = 0$, on a $V_e = V_0$, puisque $V_e(t) = V_0 \cos \omega t$.

À $t = 0$, $V_S = V_{sat}$

$$V_+ = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) (V_0 + \alpha V_{sat})$$

L'analyse des conditions de basculement



Plan du cours

- ❑ Rappels et suite ampli OP
- ❑ Rappel comportement des systèmes linéaires invariants
(comportement fréquentiel, représentation complexe...)
- ❑ Circuits RC
 - Réponse harmonique (module et phase)
 - Réponse indicielle
- ❑ Filtres actifs
- ❑ Circuits RLC
 - Réponse indicielle
 - Réponse harmonique (module et phase)
- ❑ Bilan du cours - A savoir

Les systèmes linéaires invariants

Représentent bien le comportement de nombreux systèmes physiques



Propriétés

Linéarité: $k * x(t) \rightarrow k * y(t)$

Principe de superposition: $x_1(t) + x_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t)$

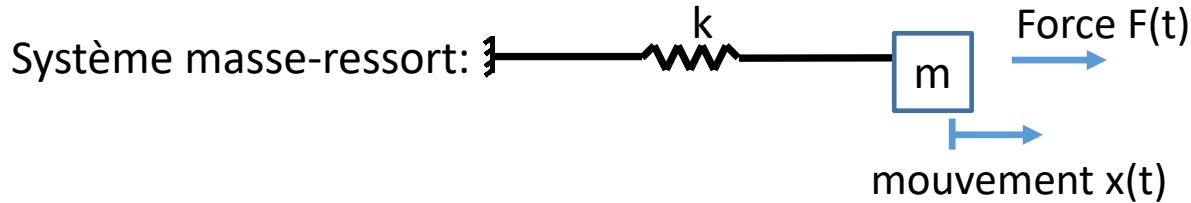
Invariance: $x(t-\tau) \rightarrow y(t-\tau)$

(translation dans le temps de l'entrée → translation dans le temps de la sortie)

Opérations mathématiques permises:

- Multiplication par une constante: $a * x(t)$
- Dérivation: $dx(t)/dt$
- Intégration: $\int x(t) dt$
- Addition de différents signaux de d'entrée
 $x_1(t) + x_2(t) + \dots$
- Division: $1/a * x(t)$ (multiplication par $1/a$)
- Soustraction de signaux d'entrée: $x_1(t) - x_2(t) - \dots$

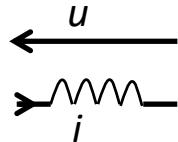
Exemples de SLI



Equation:

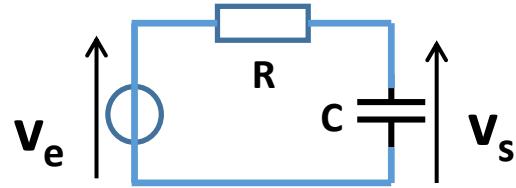
$$F(t) = m \frac{d^2x}{dt^2} + kx(t)$$

Inductance parcourue par un courant:



$$u(t) = L \frac{di}{dt}$$

Circuit RC:



$$v_e(t) = v_s(t) + CR \frac{dv_s}{dt}$$

Propriétés des SLI

Exemple: signal sinusoïdal

Dérivation

Changement d'amplitude

$$\frac{dsin(\omega t)}{dt} = \omega \cos(\omega t) = \omega \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Sinus déphasé et multiplié par ω

déphasage

Intégration

Déphasage de π

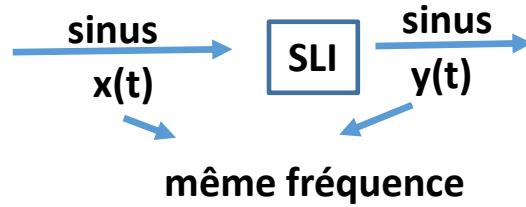
$$\int \sin(\omega t) dt = -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t) = -\frac{1}{\omega} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Sinus déphasé et multiplié par $1/\omega$

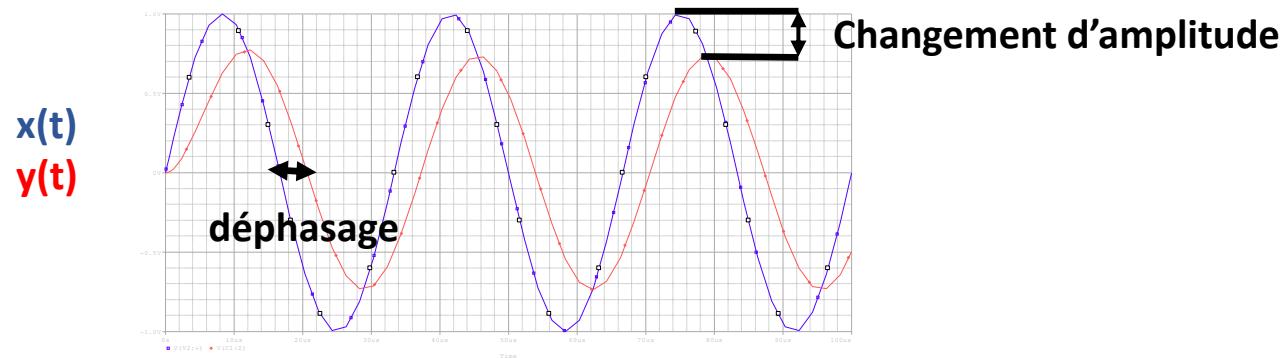
$$= \frac{1}{\omega} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

→ Conservation de la forme d'onde et de la fréquence

Propriétés des SLI



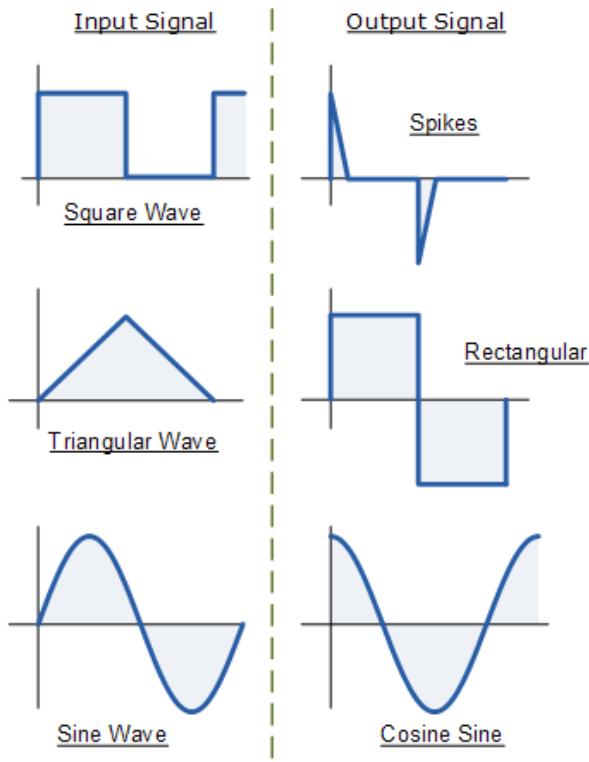
Seules différences entre $x(t)$ et $y(t)$: amplitude et phase



→ Traitement du problème dans le domaine fréquentiel

Réponses des SLI à d'autres formes de signal

Dérivation



Intégration

Entrée

Signal carré



Sortie

Signal triangulaire

Signal triangulaire



Signal quadratique (paraboles)

Signal sinusoïdal

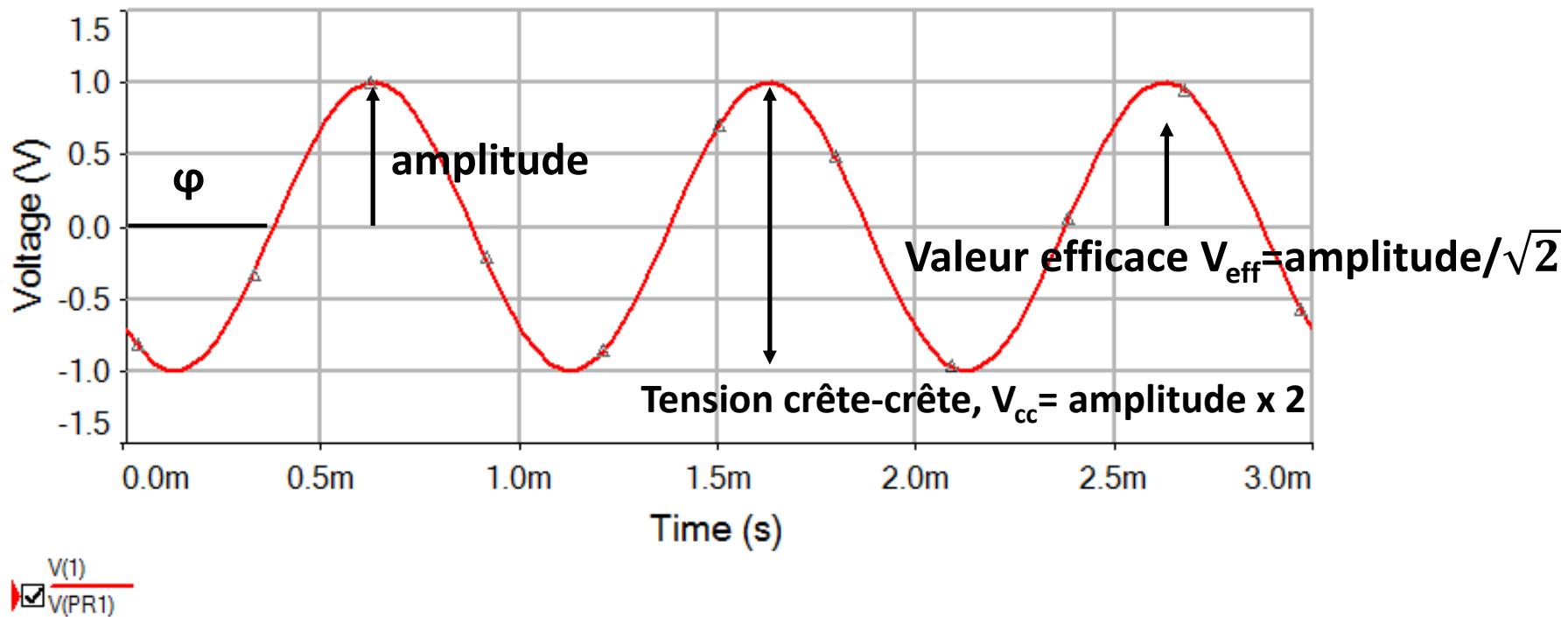


Cosinus (sinus déphasé)

→ Le sinus est la seule forme d'onde périodique qui ne change pas de forme dans un SLI

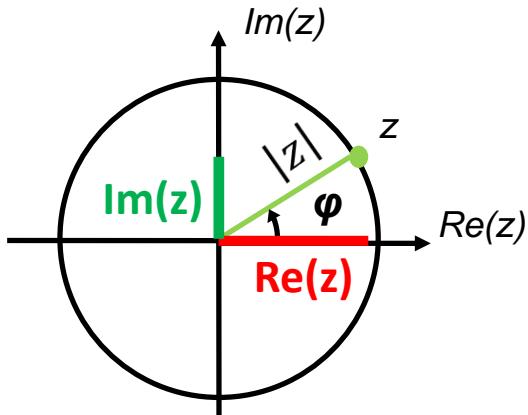
→ Les SLI peuvent être décrits par leur comportement harmonique, c'est-à-dire changement d'amplitude et de phase en fonction de la fréquence !

Signal sinusoïdal



L'approche complexe et rappels

Un nombre complexe z peut s'écrire sous deux formes



Forme algébrique : $z = \text{Re}(z) + j\text{Im}(z)$

- $\text{Re}(z)$ la partie réelle
- $\text{Im}(z)$ la partie imaginaire
- j le nombre complexe pour lequel $j^2=-1$

Forme trigonométrique : $z = |z| \exp(j\varphi)$

$$z = |z|(\cos(\varphi) + j \sin(\varphi))$$

- φ la phase ou l'argument
- $|z|$ le module

Représentation dans le plan complexe d'un nombre z

Ainsi $\text{Re}(z) = |z| \cos(\varphi)$ et $\text{Im}(z) = |z| \sin(\varphi)$

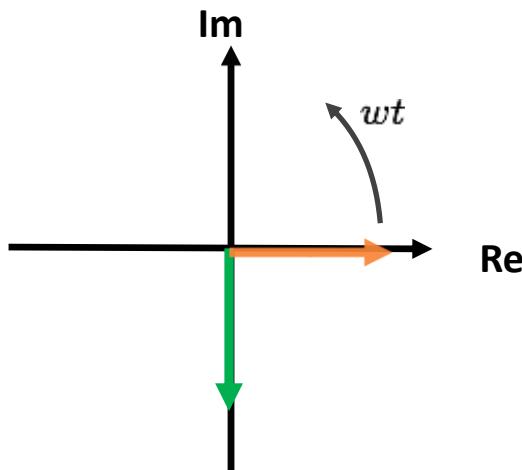
Ou inversement $|z| = \sqrt{\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2}$ et $\varphi = \arctan\left(\frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}\right)$ si $\text{Re}>0$

Attention: $\arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right)$

→ la fonction **atan2(Re,Im)** à deux arguments permet de tenir compte des signes de la partie réelle et imaginaire

Représentation de signaux harmoniques dans le plan complexe

Signaux harmoniques représentés par des aiguilles tournantes:



On peut définir:

$$\cos(\omega t) = \operatorname{Re}(e^{j\omega t})$$

et

$$\sin(\omega t) = \operatorname{Re}(e^{j(\omega t - \pi/2)})$$

→ calculer avec $e^{j(\omega t + \varphi)}$ au lieu de sin et cos

Dérivation: $\frac{de^{j\omega t}}{dt} = j\omega e^{j\omega t}$

→ Multiplication avec ω et déphasage de $\pi/2$

Intégration: $\int e^{j\omega t} = \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t}$

→ Division par ω et déphasage de $-\pi/2$

→ Très pratique pour résoudre des équations différentielles dans le régime harmonique !

Calculs avec les nombres complexes

Addition:

$$Z_1 + Z_2 = Re(Z_1) + Re(Z_2) + j(Im(Z_1) + Im(Z_2))$$

Addition des parties réelles et imaginaires

Multiplication:

$$Z_1 \cdot Z_2 = |Z_1| \cdot |Z_2| \cdot e^{j(\arg(Z_1) + \arg(Z_2))}$$

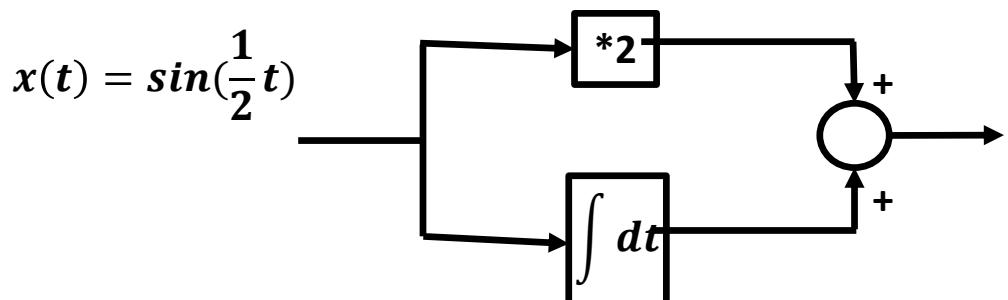
Multiplication des modules et addition des arguments

Division:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} \cdot e^{j(\arg(Z_1) - \arg(Z_2))}$$

Division des modules et soustraction des arguments

Exemple



$$y(t) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right) + 2 \sin\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{2}\right)$$

On peut montrer que:

$$y(t) = \sqrt{8} \sin \left[\left(\frac{1}{2}t \right) - \frac{\pi}{4} \right]$$

Calcul compliqué !
→ Passer aux calculs dans la plan complexe

Exemple: addition de deux sinus déphasés

Formule « réelle »:

$$\begin{aligned}y(t) &= 2 \sin\left(\frac{1}{2}t\right) + 2\sin\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{2}\right) \\&= \operatorname{Re}\{2e^{j\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{2}\right)}\} + \operatorname{Re}\{2e^{j\left(\frac{1}{2}t - \pi\right)}\}\end{aligned}$$



Passage dans le plan complexe pour simplifier les calculs

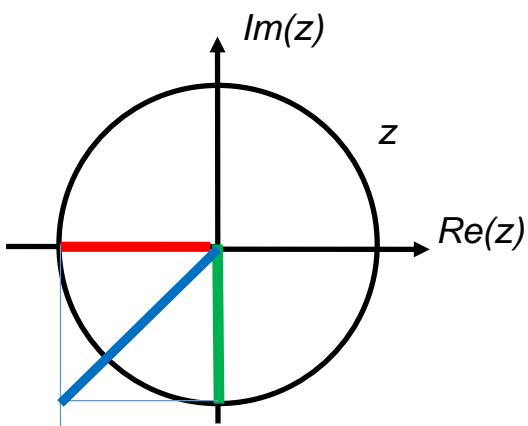
Formule « complexe »:

$$\begin{aligned}\underline{y(t)} &= 2e^{j\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{2}\right)} + 2e^{j\left(\frac{1}{2}t - \pi\right)} = 2e^{j\left(\frac{1}{2}t\right)}\left(e^{-j\frac{\pi}{2}} + e^{-j\pi}\right) \\&= 2e^{j\left(\frac{1}{2}t\right)}(-j - 1) \\&= 2e^{j\left(\frac{1}{2}t\right)}\sqrt{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{8}e^{j\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}\end{aligned}$$



Retour à la représentation réelle:

$$y(t) = \sqrt{8}\sin\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{4}\right)$$



Les impédances complexes

Comportement harmonique des composants passifs

$$u(t) = U \cos(\omega t) = \operatorname{Re}(U e^{j\omega t})$$

$$i(t) = I \cos(\omega t - \varphi) = \operatorname{Re}(I e^{j(\omega t - \varphi)}) = \operatorname{Re}(I e^{-j\varphi} e^{j\omega t})$$

Écriture dans l'espace réel de la tension et du courant



$$U(t) = U e^{j\omega t}$$

$$I(t) = I e^{-j\varphi} e^{j\omega t}$$

$$\begin{matrix} U \\ I e^{-j\varphi} \end{matrix}$$

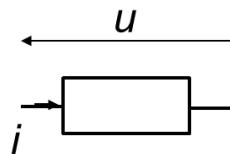
Amplitude complexe

Écriture dans l'espace complexe de la tension et du courant



$$Z = \frac{U}{I} e^{j\varphi} \text{ Impédance}$$

Résistance



$$u(t) = R i(t)$$

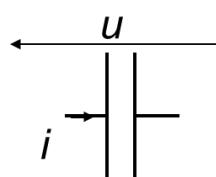


$$U = RI$$



$$R$$

Capacité



$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

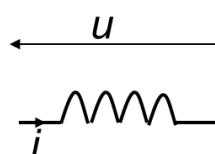


$$I = j\omega C U$$



$$\frac{1}{jC\omega}$$

Inductance



$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$



$$U = j\omega L I$$

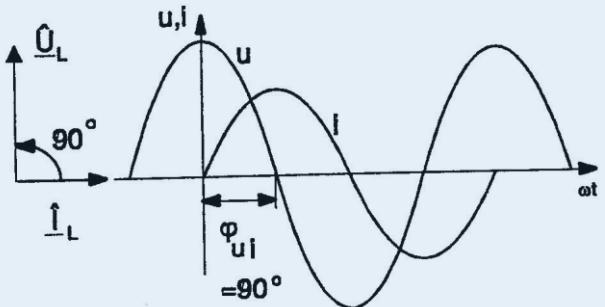


$$jL\omega$$

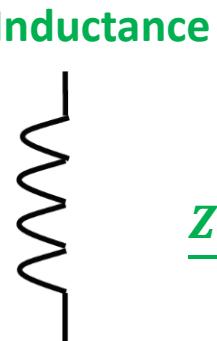
$$\frac{1}{C\omega} \xrightarrow[\omega \rightarrow 0]{} \infty \quad \frac{1}{C\omega} \xrightarrow[\omega \rightarrow \infty]{} 0$$

$$L\omega \xrightarrow[\omega \rightarrow 0]{} 0 \quad L\omega \xrightarrow[\omega \rightarrow \infty]{} \infty$$

U en avance de phase de $\pi/2$ par rapport au courant



Inductance



Im

Plan Z

$$Z_L = j\omega L$$

capacité

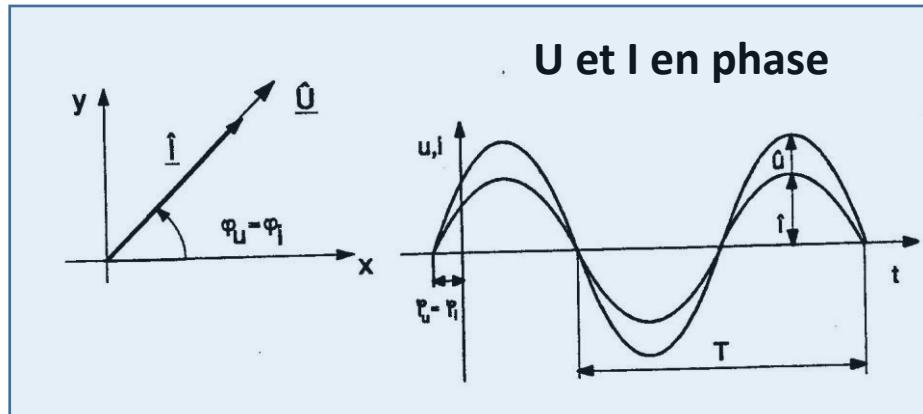


$$Z_C = -\frac{j}{\omega C}$$

wt

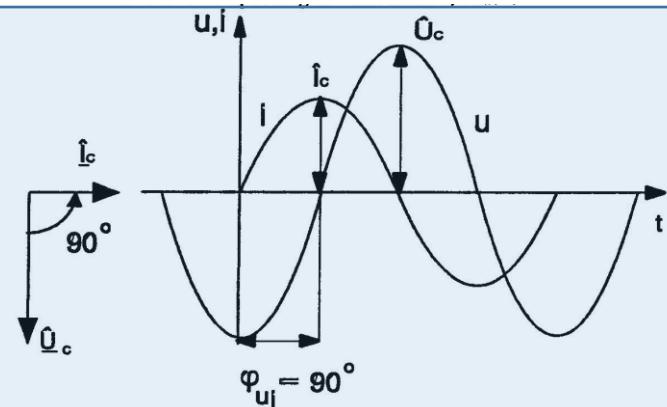
$$Z_R = R$$

Re



U et I en phase

U en retard de phase de $\pi/2$ par rapport au courant

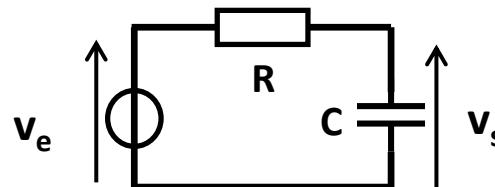


Exemple: circuit RC

Passage dans le domaine fréquentiel: $v_s(t) \rightarrow v_s(j\omega)$

$$\frac{dv_s}{dt} \rightarrow j\omega V_s(j\omega)$$

Circuit RC:



Equation différentielle: $v_e(t) = v_s(t) + CR \frac{dv_s}{dt}$ (toujours valable)

Représentation fréquentielle: $V_e(j\omega) = V_s(j\omega) + j\omega CRV_s(j\omega)$ **Seulement valable si $v_e(t)$ harmonique !**

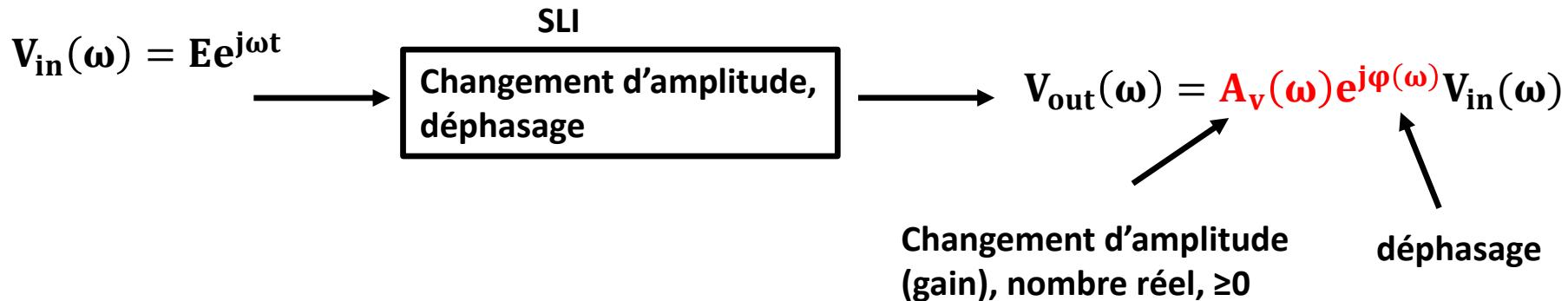
$$V_s(j\omega)(1 + j\omega RC) = V_e(j\omega)$$

$$V_s(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} V_e(j\omega)$$

→ on calcule v_s en multipliant v_e avec une fonction complexe

Avec $\omega_c = \frac{1}{RC}$ la pulsation de coupure et $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$ la fonction de transfert

Fonction de transfert



Gain en tension A_v :

$$A_v = |H(j\omega)| = \left| \frac{V_{out}}{V_{in}} \right| = \frac{|V_{out}|}{|V_{in}|}$$

Déphasage :

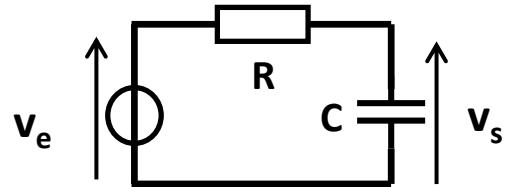
$$\varphi(\omega) = \arg \frac{V_{out}}{V_{in}} = \arg(V_{out}) - \arg(V_{in})$$

Si V_{in} est un signal sinusoïdal alors il y a une fonction de transfert complexe $H(j\omega)$ à travers le quadripôle telle que :

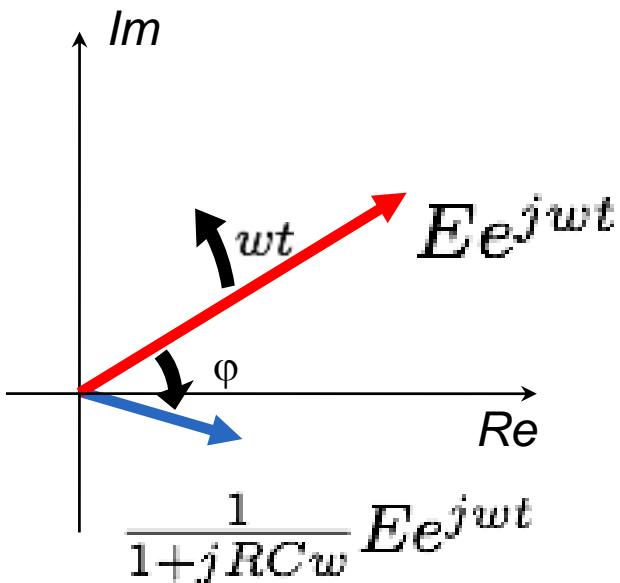
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{V_{out}(j\omega)}{V_{in}(j\omega)} = A_v(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

→ comportement en fonction de la fréquence et non plus en fonction du temps

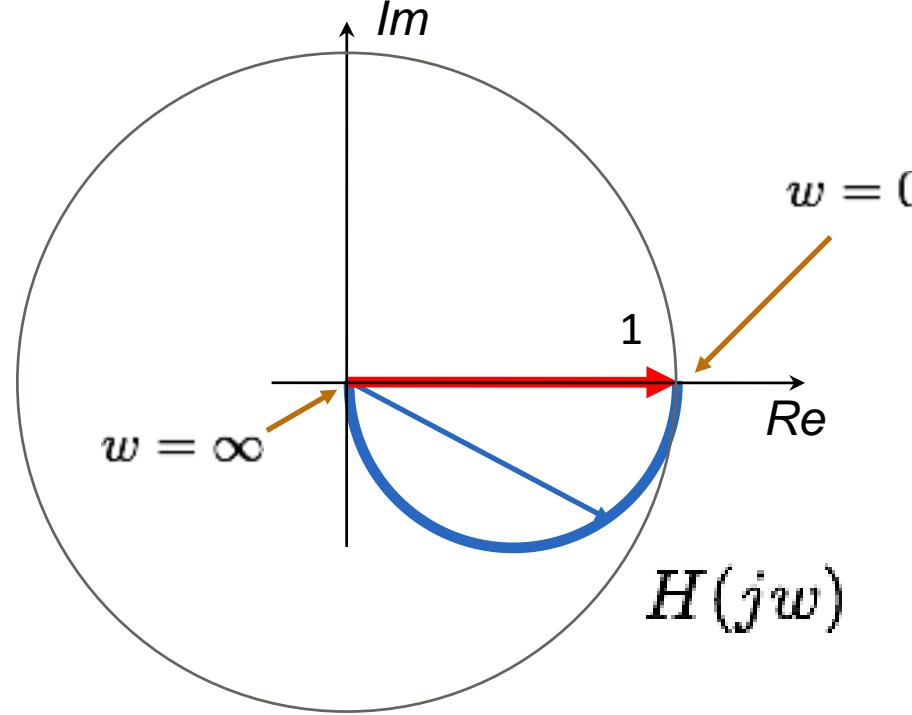
Représentation de la fonction de transfert dans le plan complexe



$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$



Représentation:
Diagramme de Nyquist



Représentation dans le plan complexe
tournant pour une entrée E=1

Diagramme de Bode

But: tracer le gain en décibel ainsi que et le déphasage entre V_{out} et V_{in} en fonction de la fréquence

Passe bas: $H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$ Fonction complexe

Gain: $G_{dB} = 20 \log_{10}|H(j\omega)|$ $|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{Re(H)^2 + Im(H)^2}}$

$$G_{dB} = 20 \log \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} = 20 \log(1) - 20 \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

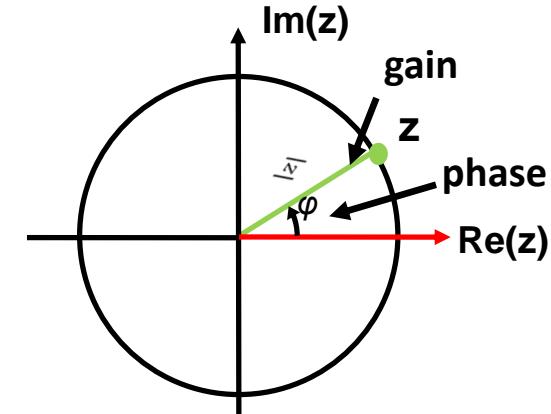
= 0

$$= -10 \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)$$

Si $\omega \ll \omega_c \rightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \ll 1 \rightarrow G_{dB} = 0$

si $\omega = \omega_c \rightarrow G_{dB} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} = -3 dB \rightarrow \text{fréquence de coupure}$

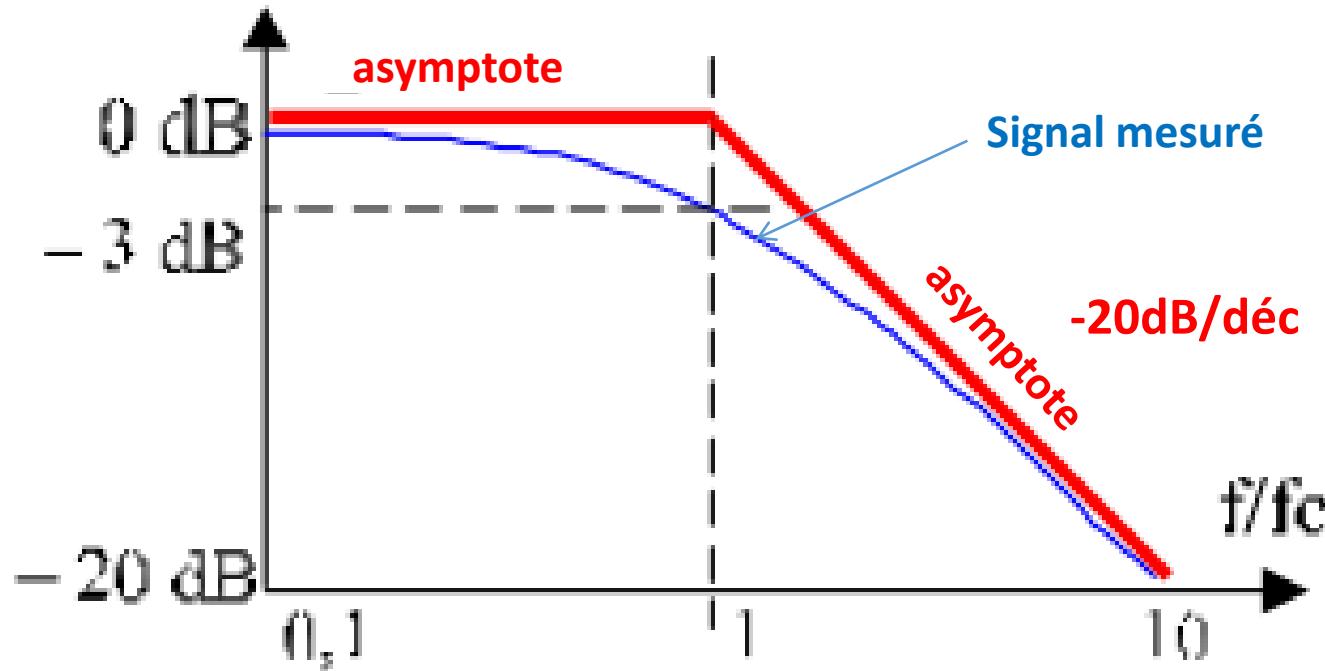
Si $\omega \gg \omega_c \rightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \gg 1 \quad G_{dB} = -20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \longrightarrow -20 \text{ dB/déc}$



ETUDE DE FILTRES PASSIFS DU 1^{er} ORDRE

Utilisation du signal en régime alternatif

Filtres passe-bas RC : Gain en tension



Filtre passe-bas idéal: coupure abrupte

(Impossible à réaliser dans la pratique)

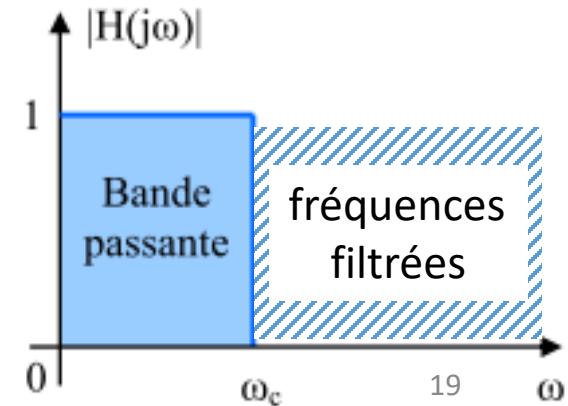


Diagramme de Bode

Phase: $\arg(H(\omega)) = \arg\left(\frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}\right)$

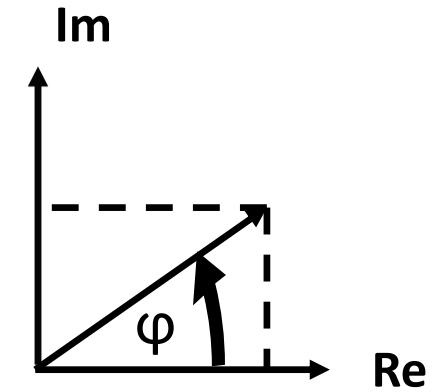
$$= \arg(1) - \arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

$$= 0 - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

$$\omega=0 \rightarrow \varphi=0$$

$$\omega=\omega_0 \rightarrow \varphi=-\arctan(1)=-\pi/4$$

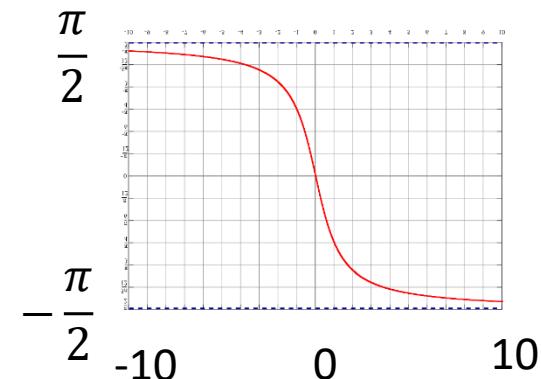
$$\omega=\infty \rightarrow \varphi=-\pi/2$$



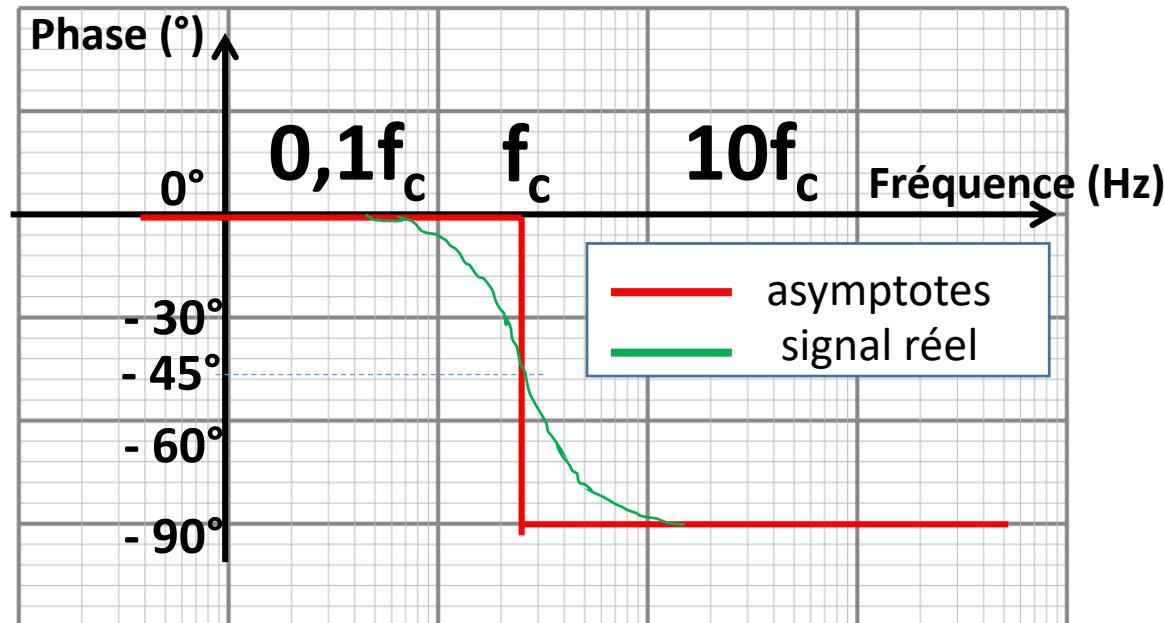
$$\tan(\varphi) = \frac{\text{Im}}{\text{Re}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

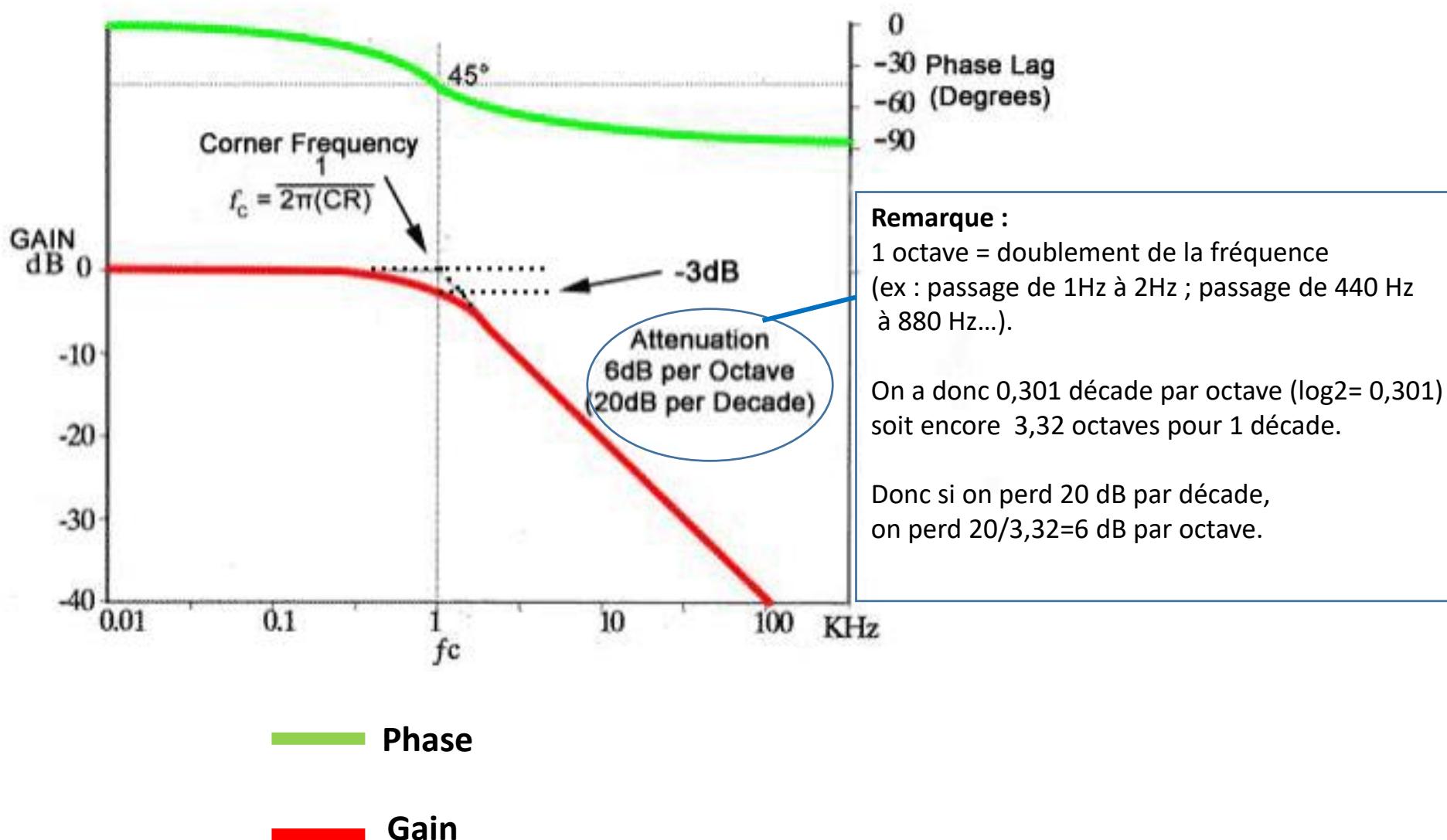
$$y=\arctan(x)$$



Déphasage entre V_s et V_e :

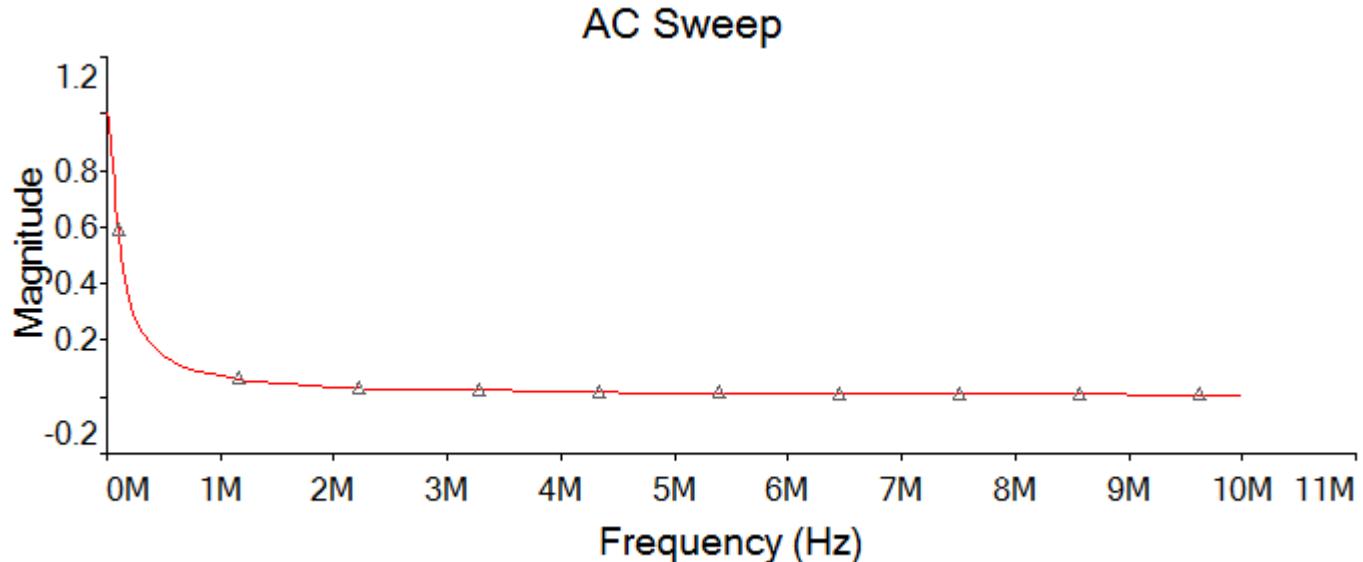


Filtres passe-bas RC : Diagramme de Bode complet

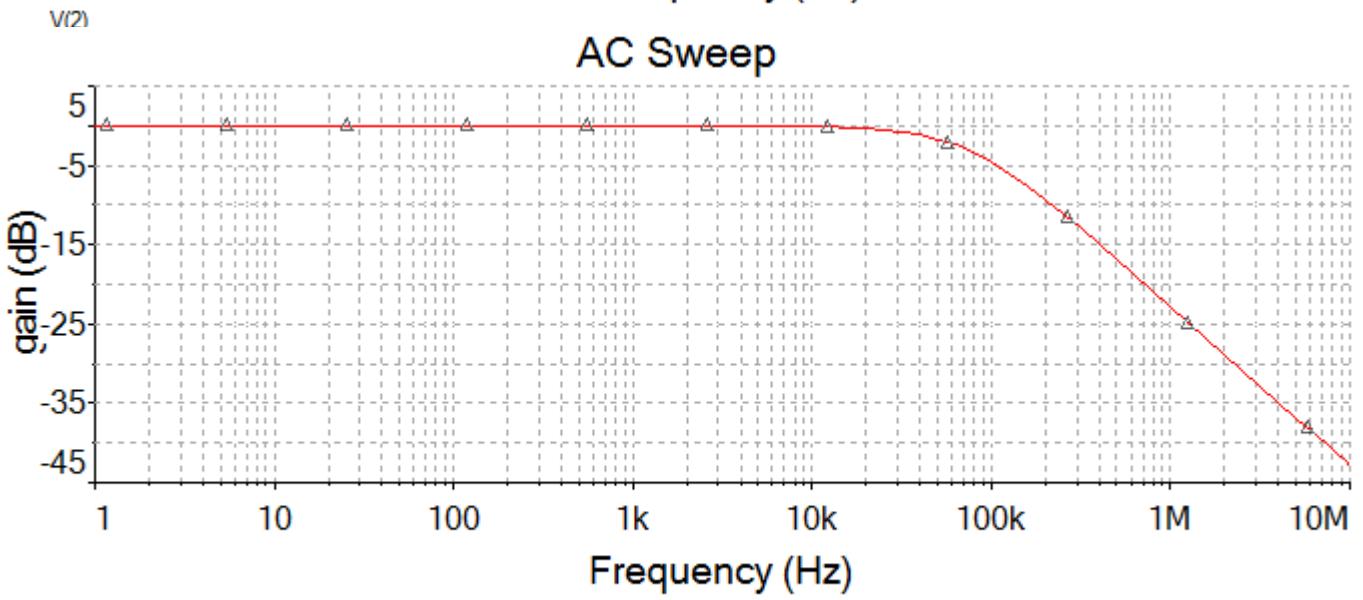


Comparaison échelle linéaire – échelle dB

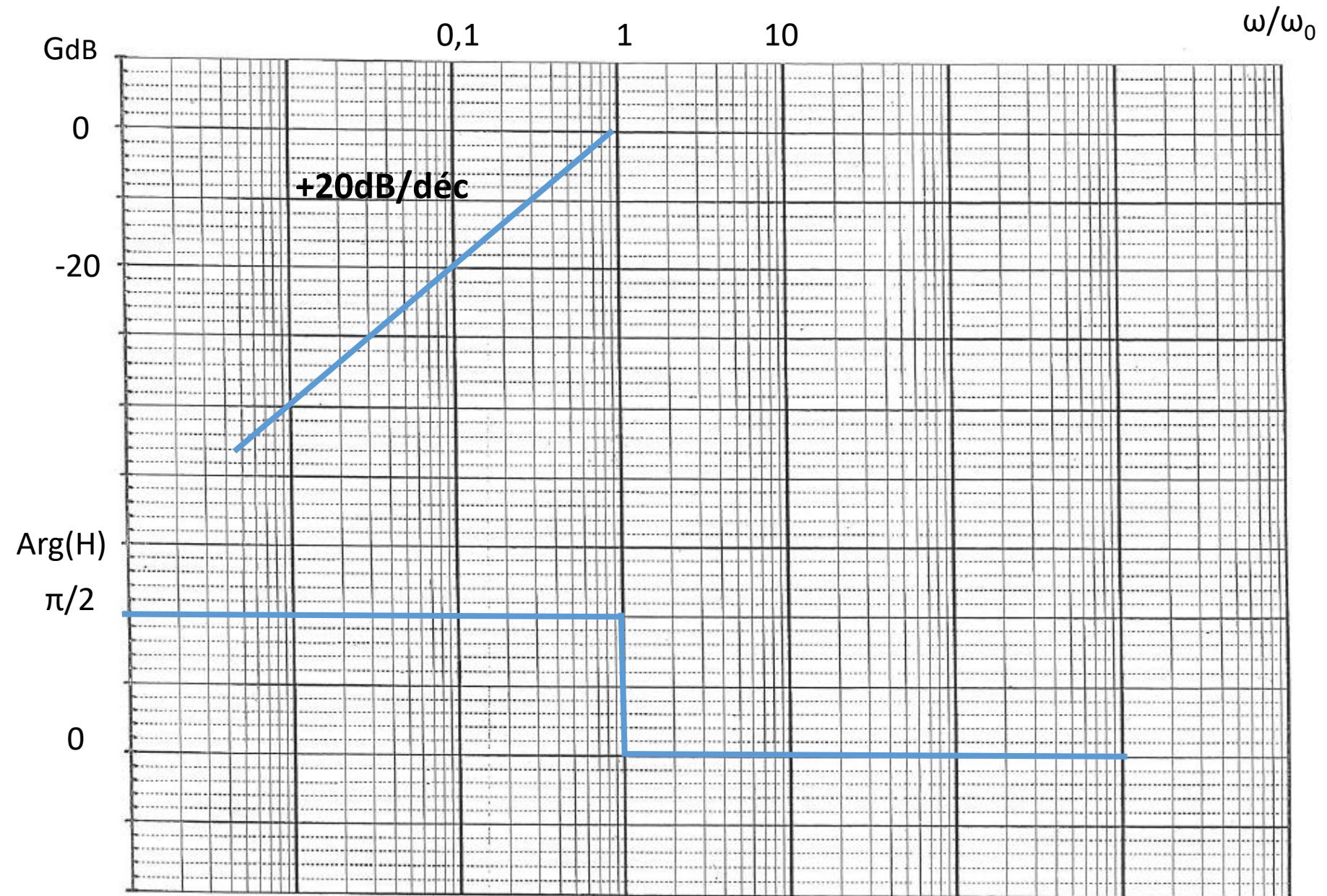
Gain en échelle
Lin-lin



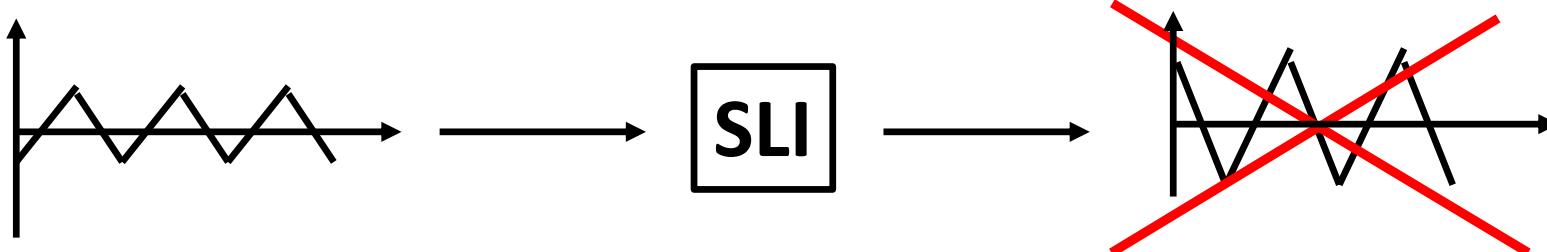
Gain en dB en
Échelle semilog



→ On étire l'échelle pour des valeurs faibles et on la comprime pour des valeurs élevées



Signaux périodiques non sinusoïdaux



Le changement d'amplitude et de phase n'est pas applicable aux signaux non-sinusoïdaux

2 possibilités:

Résolution dans le domaine temporel (équation différentielle):

Exemple circuit RC:

$$v_e(t) = v_s(t) + CR \frac{dv_s}{dt}$$

Ou représentation sous forme de série de Fourier:

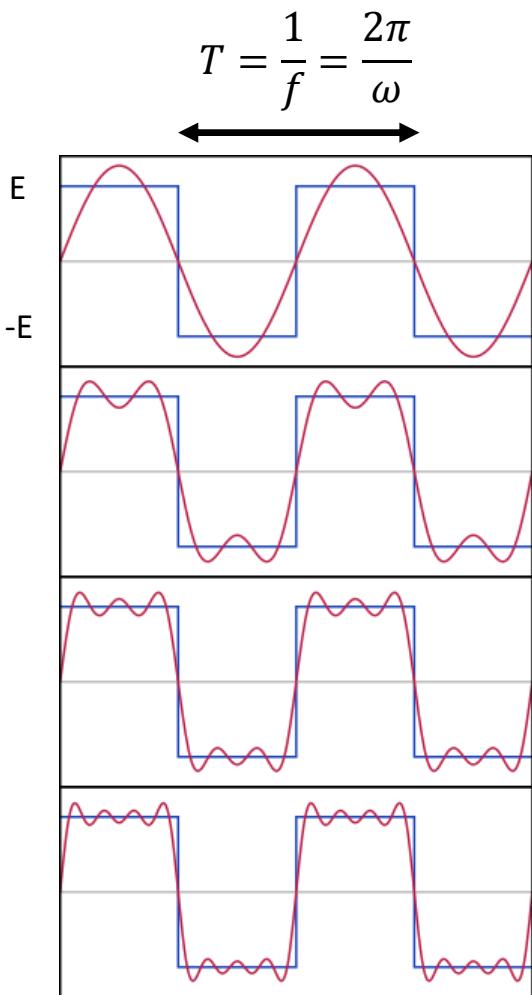
$$v_e(t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin((2k+1)\omega t)}{(2k+1)^2}$$

Multiplication des différentes composantes spectrales avec la fonction de transfert:

$$V_s(f) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{j(2k+1)\omega t}}{(2k+1)^2} \cdot H(j\omega(2k+1))$$

Les différentes composantes spectrales sont amplifiées et déphasées de manière différente
→ déformation du signal

Exemple: Représentation du signal carré par une série de Fourier



$$v(t) = \frac{4E}{\pi} [\sin(\omega t)]$$

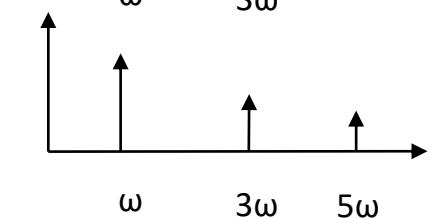
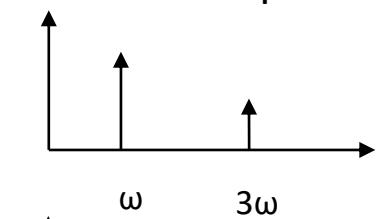
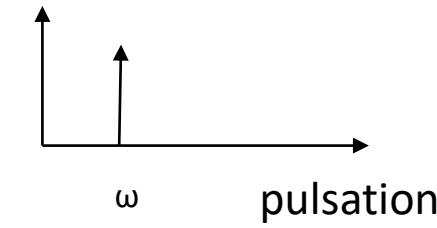
$$v(t) = \frac{4E}{\pi} \left[\sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} \right]$$

$$v(t) = \frac{4E}{\pi} \left[\sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} \right]$$

$$v(t) = \frac{4E}{\pi} \left[\sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \frac{\sin(7\omega t)}{7} \right]$$

Spectre

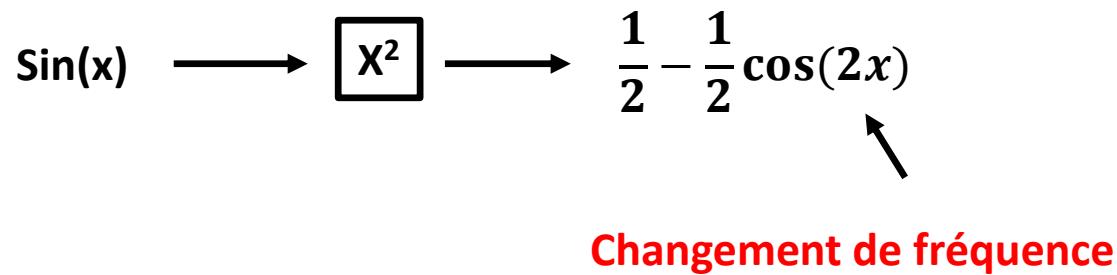
Amplitude



$\omega \quad 3\omega \quad 5\omega \quad 7\omega$

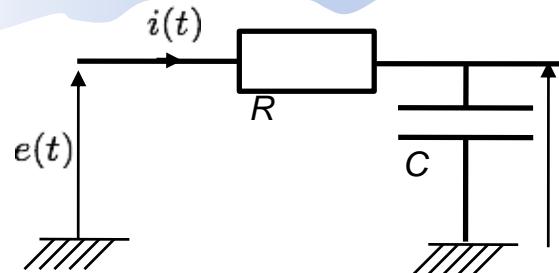
Exemple système non-linéaire

Tous ces raisonnements sont seulement valables pour des systèmes linéaires !



→ Il n'est pas possible de déterminer une fonction de transfert et de tracer un diagramme de Bode

Circuit RC: résolution temporelle



Source de tension: $e(t) = \begin{cases} = 0 & \text{si } t < 0 \\ = E & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

Condition initiale : $v_C(0) = 0$

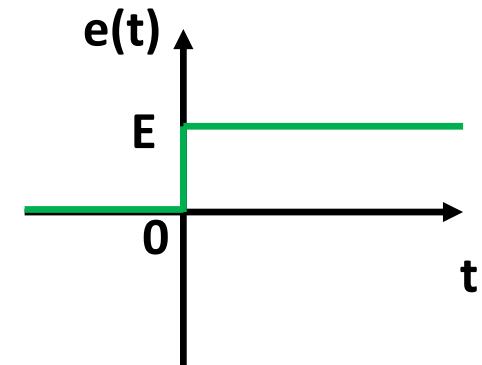
Condensateur déchargé

Mise en équations

$$e(t) = Ri(t) + v_C(t)$$

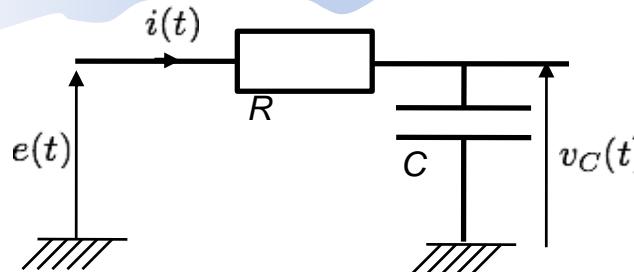
$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$e(t) = RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t)$$



Equation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre.

Circuit RC: résolution temporelle



Source de tension:

$$e(t) = \begin{cases} = 0 & \text{si } t < 0 \\ = E & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Condition initiale : $v_C(0) = 0$ Condensateur déchargé

Résolution temporelle

La solution est la somme d'une solution particulière de l'équation complète et de la solution générale de l'équation sans second membre

Solution particulière de l'équation complète:

$$e(t) = RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t)$$

Pour $t = \infty$ $v_C(t) = e(\infty) = E$

Solution générale de l'équation sans second membre:

$$RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = 0$$

$$\frac{\frac{dv_C(t)}{dt}}{v_C} = -\frac{1}{RC}$$

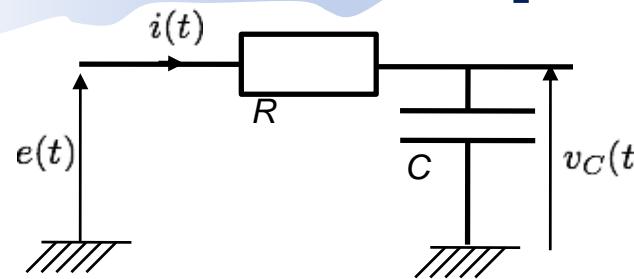
$$v_C(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

avec A une constante

La solution complète est donc de la forme

$$v_C(t) = E + Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

Circuit RC: résolution temporelle



Source de tension:

$$e(t) = \begin{cases} = 0 & \text{si } t < 0 \\ = E & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Condition initiale : $v_C(0) = 0$

Condensateur déchargé

Résolution temporelle

La solution complète est donc de la forme

$$v_C(t) = E + Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

Pour trouver la constante, on applique une condition initiale. Pour $t=0$ $v_C(0) = 0$

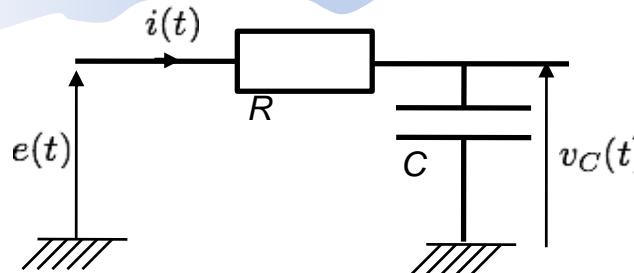
$$\text{Donc } 0 = E + A \quad E = -A$$

La solution est donc: $v_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$

Si on appelle $\tau = RC$ la constante de temps, la solution s'écrit:

$$v_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Circuit RC: résolution temporelle



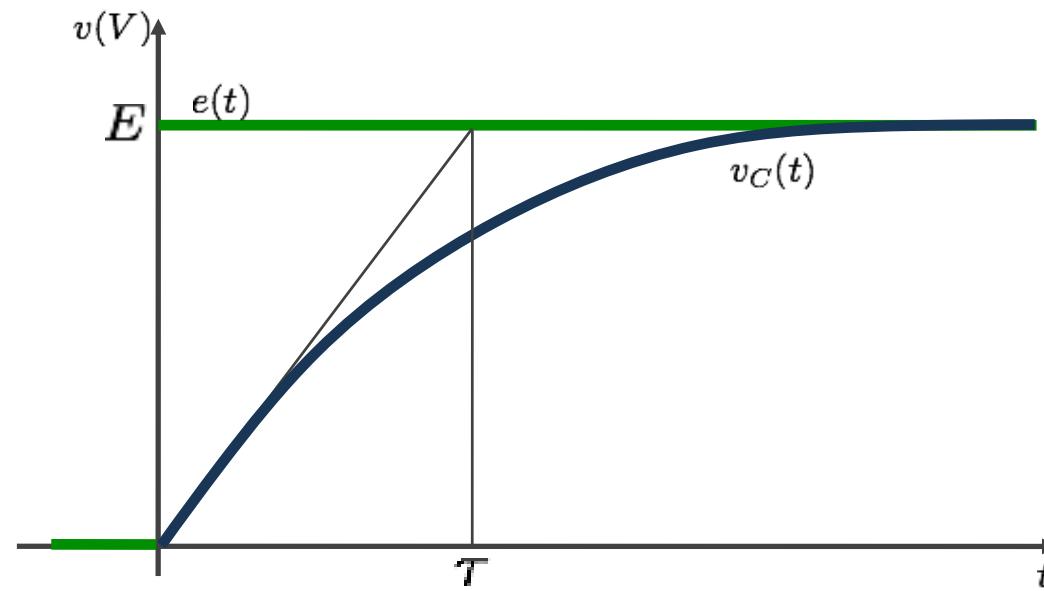
Source de tension: $e(t) = \begin{cases} = 0 & \text{si } t < 0 \\ = E & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

Condition initiale : $v_C(0) = 0$ Condensateur déchargé

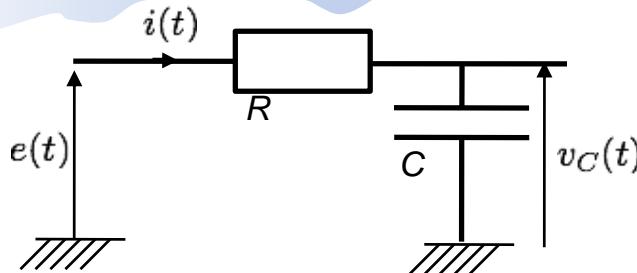
Résolution temporelle

$$v_C(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$\tau = RC$$



Circuit RC: résolution temporelle



Source de tension: $e(t) = \begin{cases} E & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

Condition initiale: $v_c(0)=E$ Condensateur chargé

Pour $t=\infty \rightarrow v_c(\infty)=0V$

Solution générale:

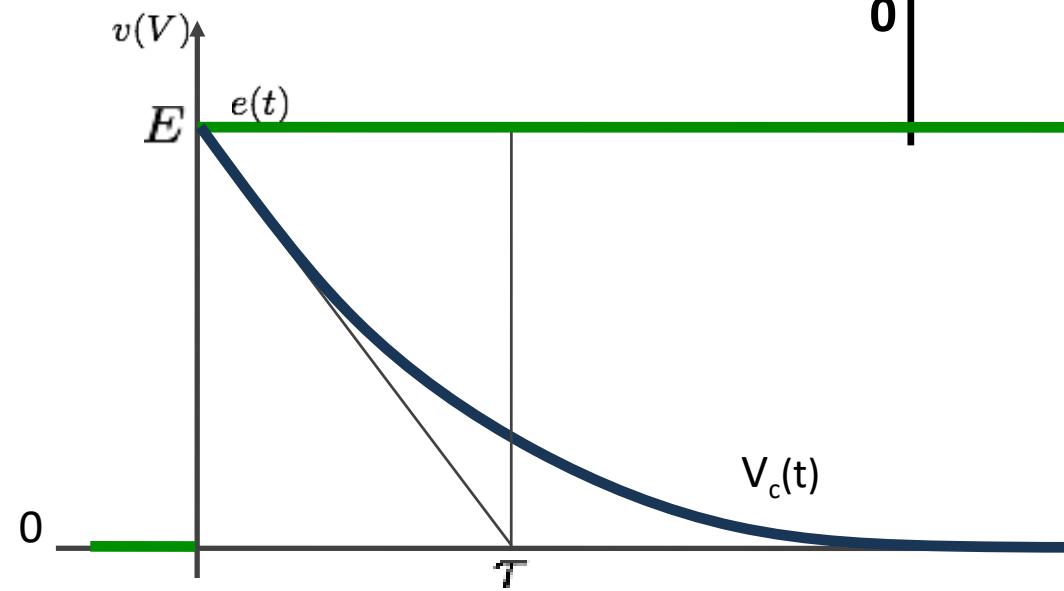
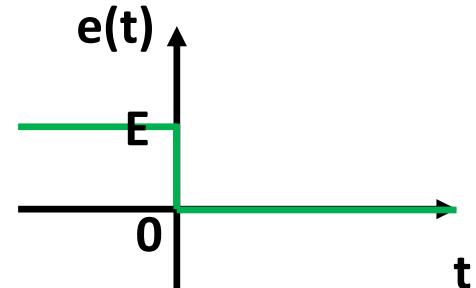
$$v_c(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau = RC$$

Pour $t=0 \rightarrow v_c(0) = A$

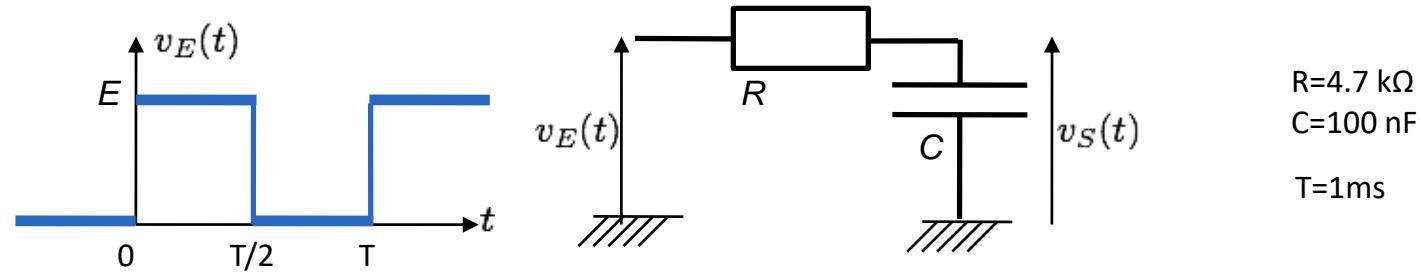
Donc $A=E$

Et $v_c(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}$

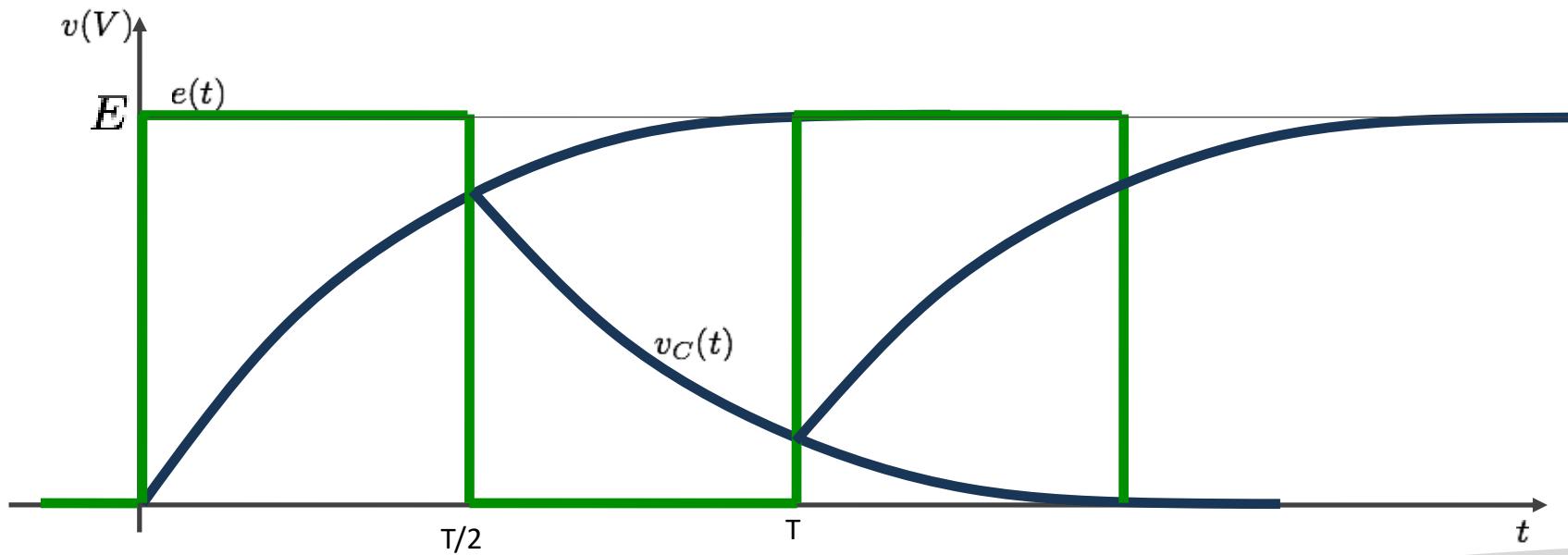


回顾三要素法

Filtrage d'un signal carré



$R=4.7 \text{ k}\Omega$
 $C=100 \text{ nF}$
 $T=1\text{ms}$



Filtrage d'un signal carré

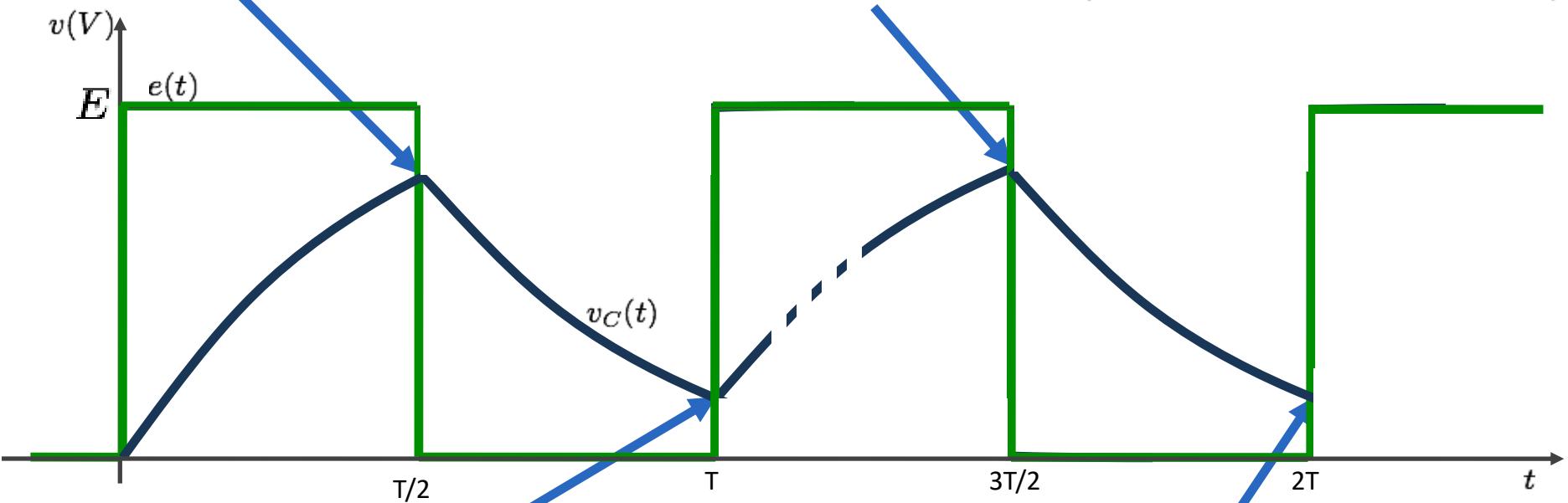
R=4.7 kΩ

C=100 nF

T=1ms

$$v_C \left(\frac{T}{2} \right) = E \left(1 - e^{-\frac{T}{2\tau}} \right)$$

$$v_C \left(\frac{nT}{2} \right)_{n \text{ impair}} = E \left(1 - e^{-\frac{T}{2\tau}} + e^{-\frac{T}{\tau}} \frac{1 - e^{-\frac{(n-1)T}{2\tau}}}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}} \right)$$



$$v_C \left(\frac{2T}{2} \right) = E \left(1 - e^{-\frac{T}{2\tau}} \right) e^{-\frac{T}{2\tau}}$$

$$v_C \left(\frac{nT}{2} \right)_{n \text{ pair}} = E e^{-\frac{T}{2\tau}} \frac{1 - e^{-\frac{nT}{2\tau}}}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}}$$

Filtrage d'un signal carré

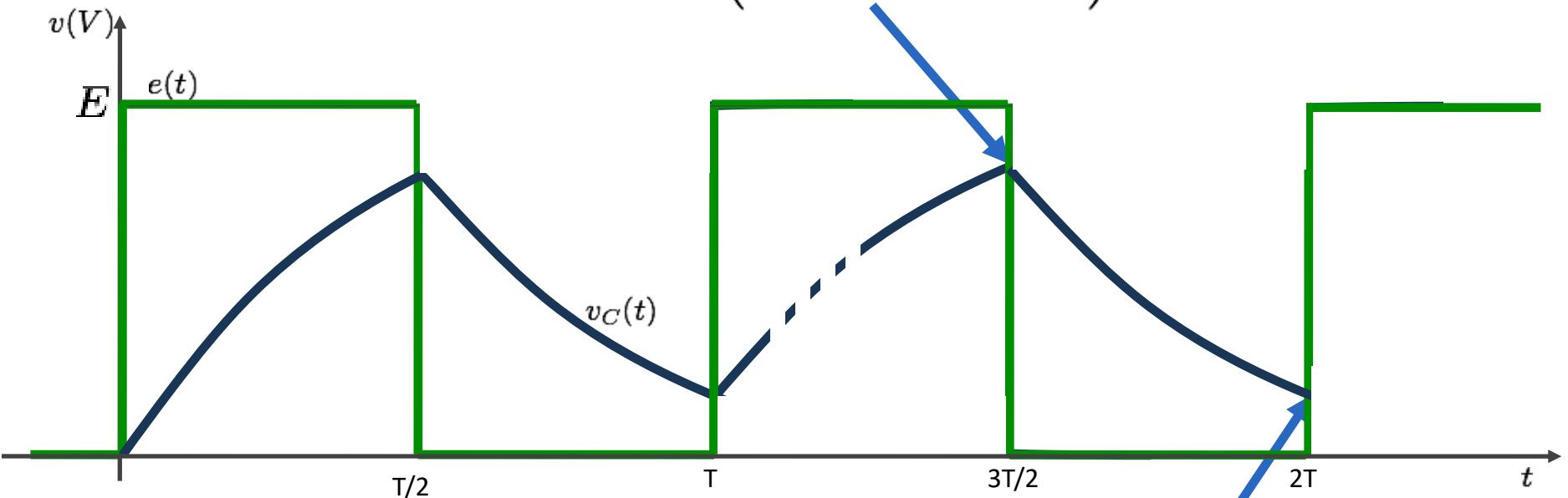
R=4.7 kΩ
C=100 nF

T=1ms
E=1 V

$$\tau = RC = 470\mu s$$

$$T = 1ms$$

$$v_C(\infty)_{n \text{ impair}} = E \left(1 - e^{-\frac{T}{2\tau}} + \frac{e^{-\frac{T}{\tau}}}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}} \right) = 0.74V$$



$$v_C(\infty)_{n \text{ pair}} = E \frac{e^{-\frac{T}{2\tau}}}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}} = 0.25V$$

Filtrage d'un signal carré

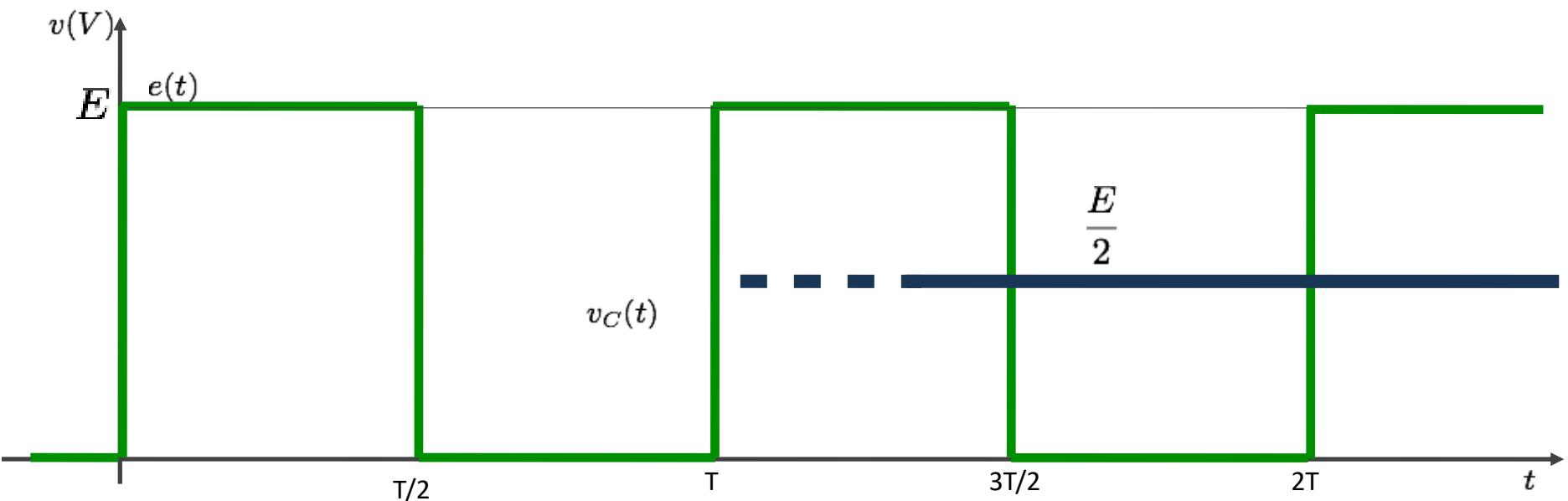
R=4.7 k Ω

C=100 nF

T=1ms

E=1 V

Pour $RC \gg T$

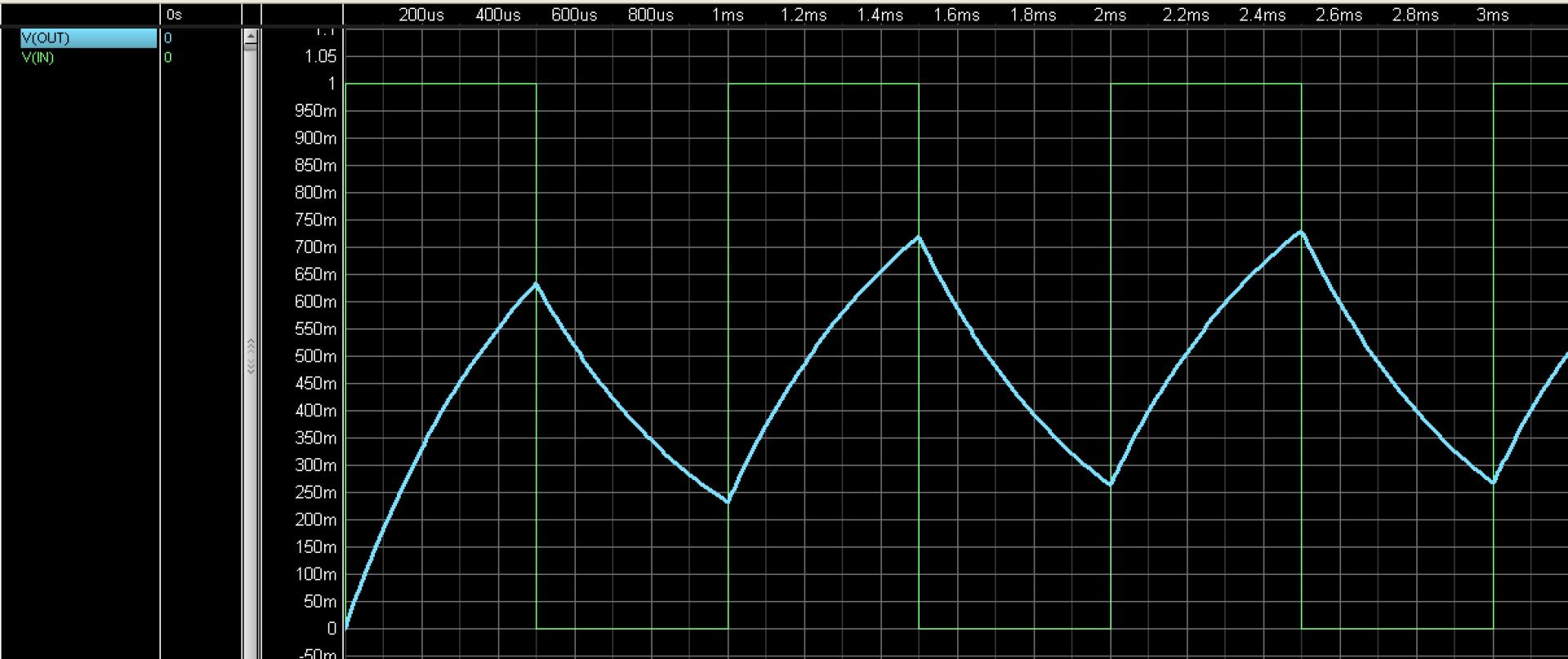


Filtrage d'un signal carré

$$\tau = RC = 470\mu s$$

$$T = 1ms$$

Signal carré f=1kHz

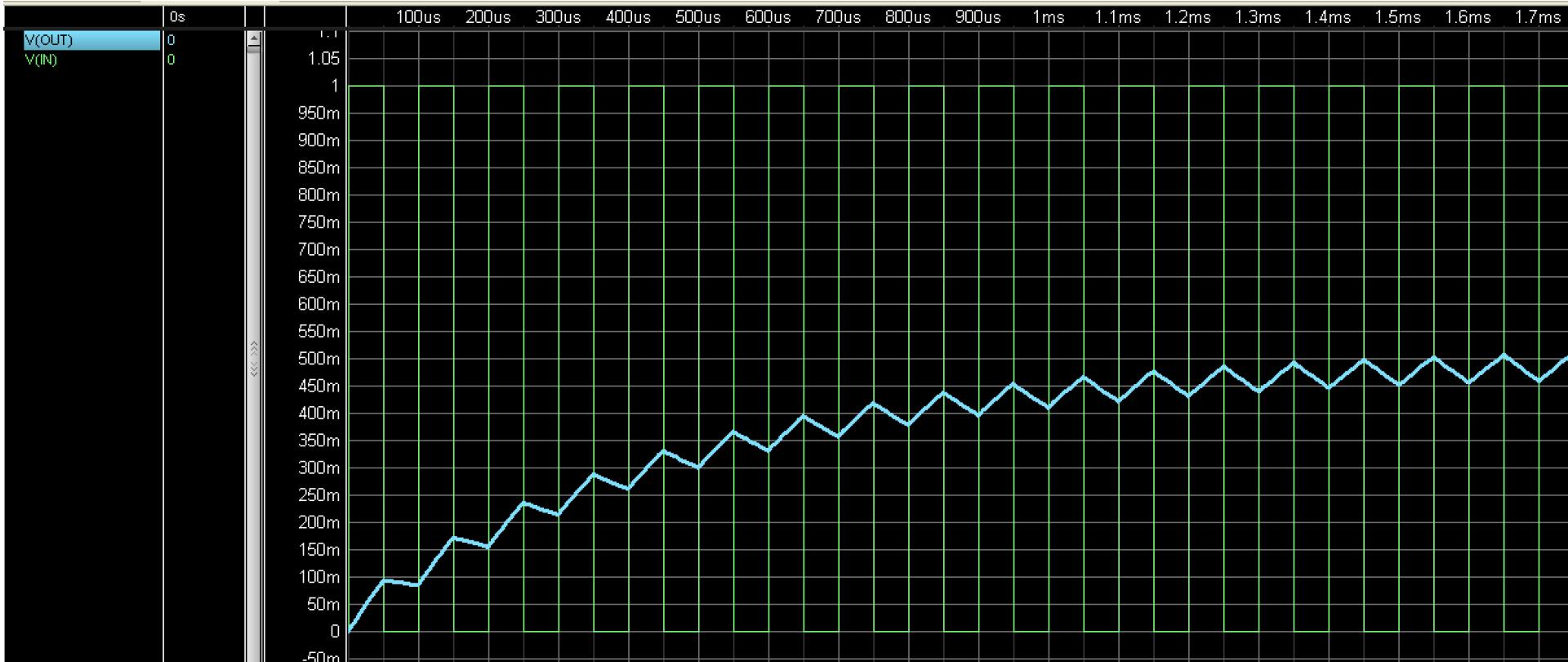


Filtrage d'un signal carré

Signal carré $f=10\text{kHz}$

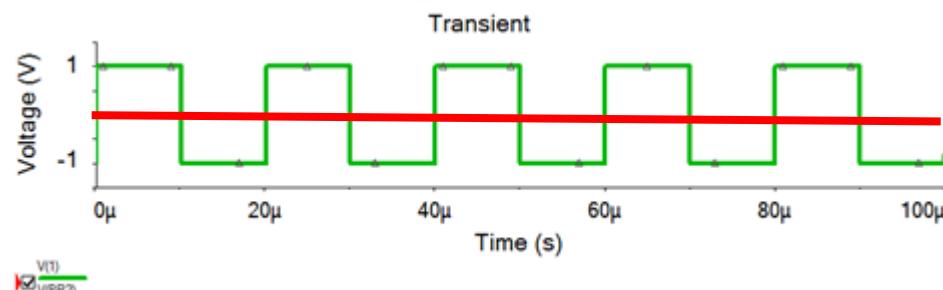
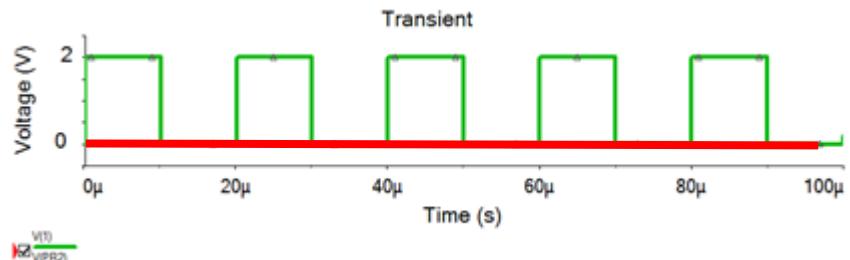
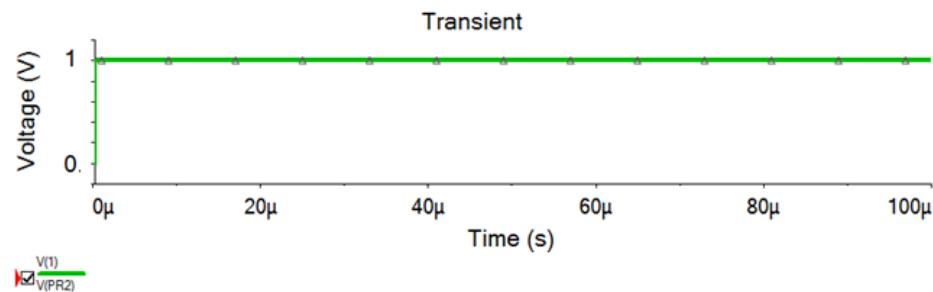
$$\tau = RC = 470\mu\text{s}$$

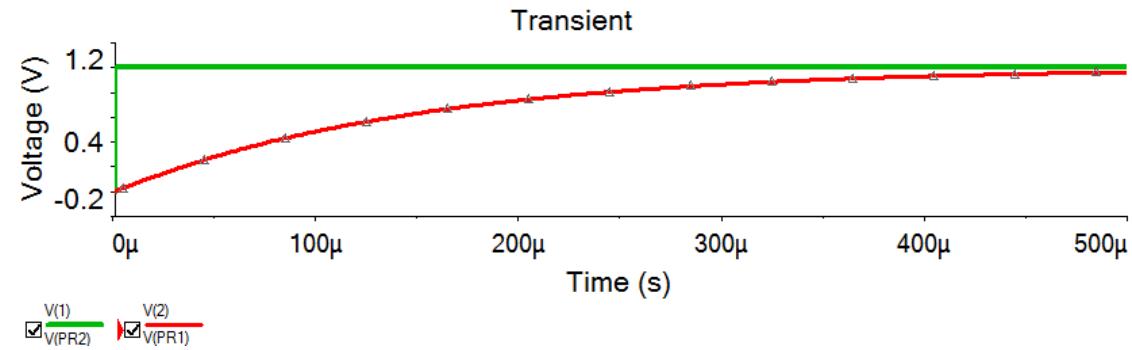
$$T = 100\mu\text{s}$$



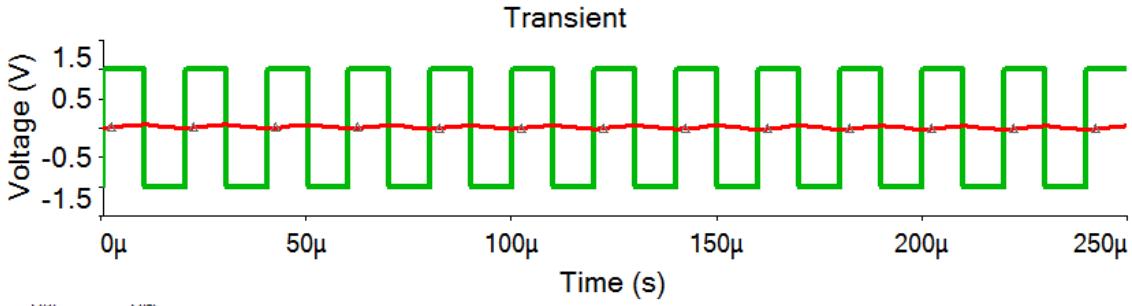
Analysis using superposition theorem

用叠加定理分析方波RC电路的阶跃响应

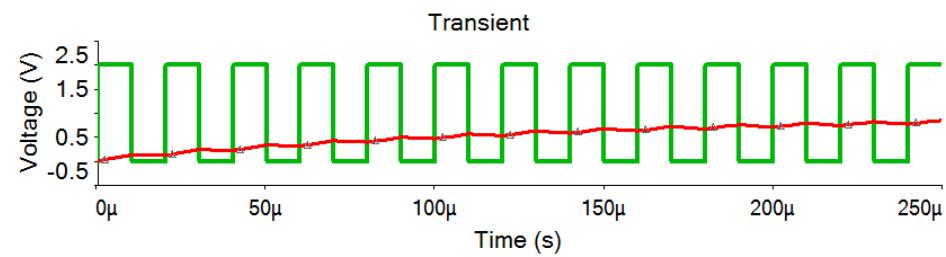




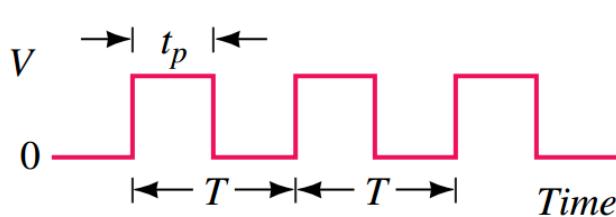
+



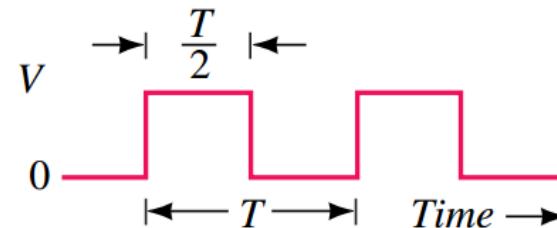
积分器, 方波 \rightarrow 三角波
 $\tau > 10 * tp$



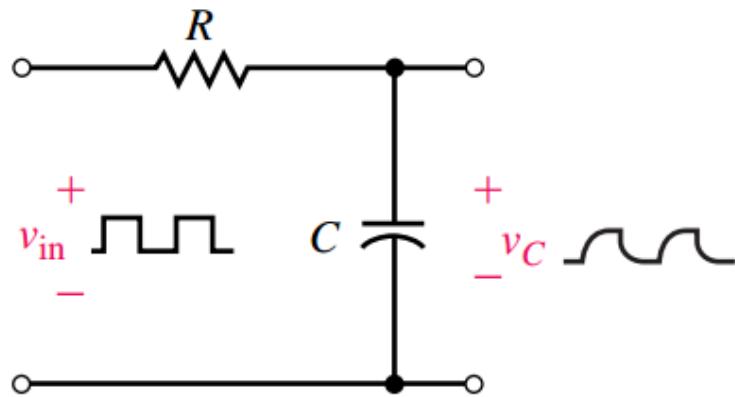
Square wave



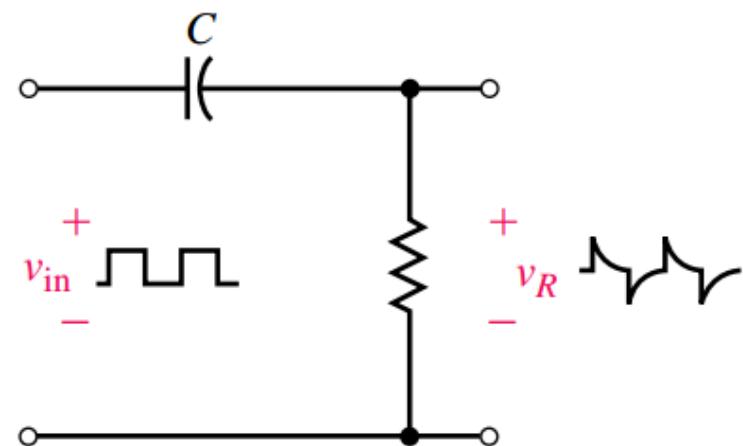
(c) Pulse train. T is referred to as the period of the pulse train



(d) Square wave

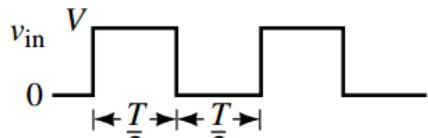


(a) Output across C

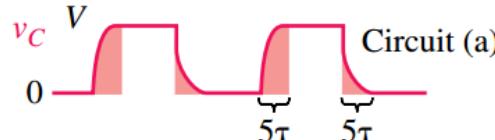


(b) Output across R

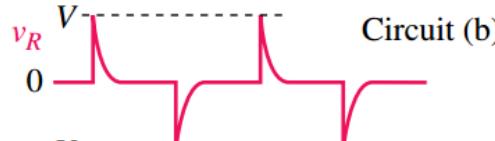
Pulse Width $t_p \gg 5 \tau$



(a)

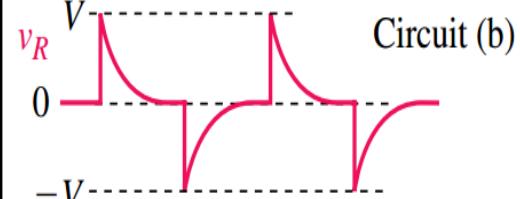
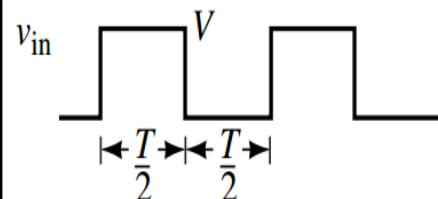


(b)

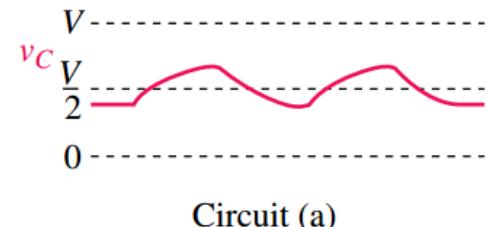
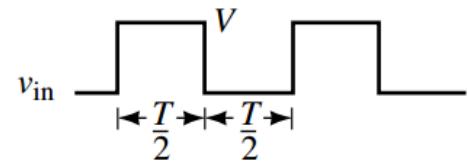


(c)

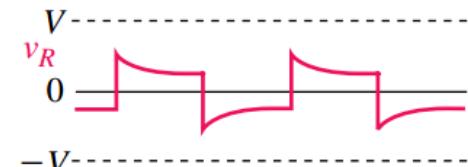
Pulse Width $t_p = 5 \tau$



Pulse Width $t_p \ll 5 \tau$

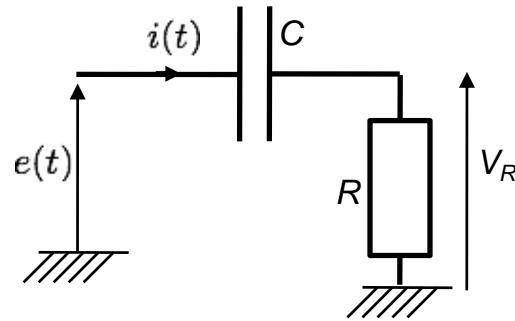


Circuit (a)



Circuit (b)

Circuit RC: résolution temporelle

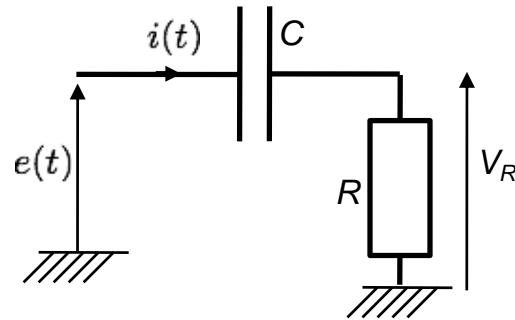


Mise en équations

Source de tension: $e(t) = \begin{cases} = 0 & \text{si } t < 0 \\ = E & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

Condition initiale : $v_C(0) = 0$ Condensateur déchargé

Circuit RC: résolution temporelle



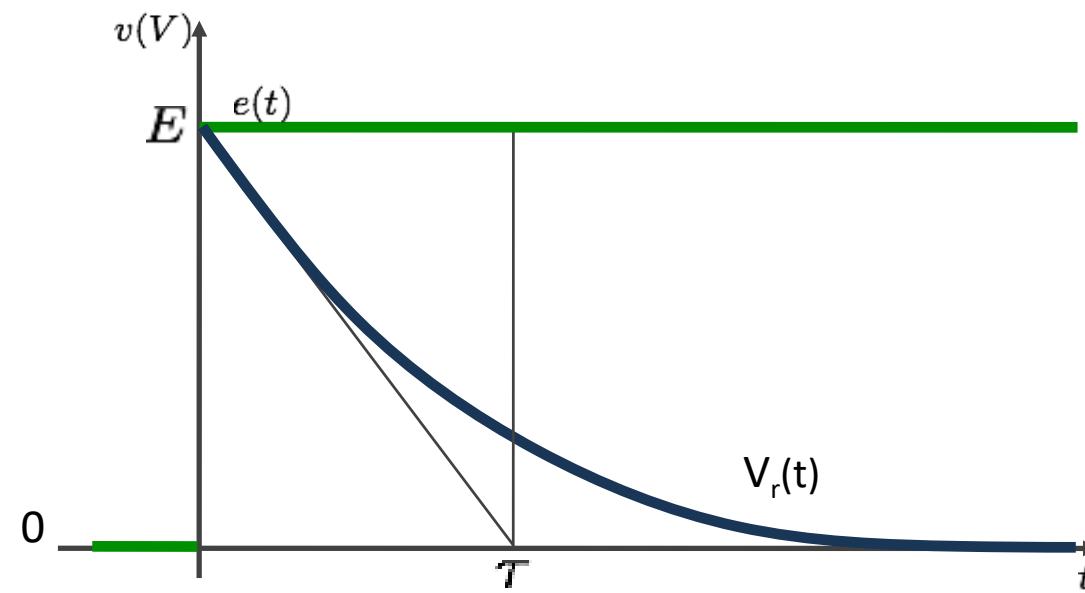
Résolution temporelle

$$v_r(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\tau = RC$$

Source de tension: $e(t) = \begin{cases} = 0 & \text{si } t < 0 \\ = E & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

Condition initiale : $v_C(0) = 0$ Condensateur déchargé



Circuits RLC

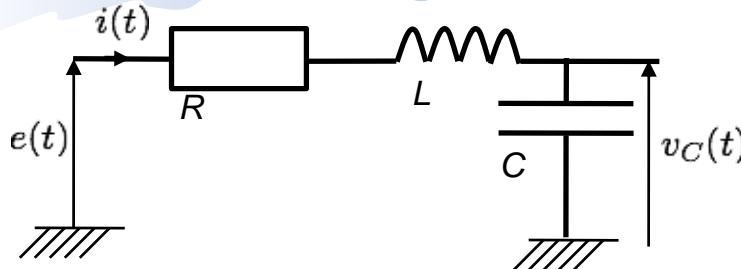
- Réponse harmonique (module et phase)
- Réponse indicielle
- Exemple : Cas du filtre LC
- Application aux filtres



Plan du cours

- ❑ Rappels et suite ampli OP
- ❑ Rappel comportement des systèmes linéaires invariants
(comportement fréquentiel, représentation complexe...)
- ❑ Circuits RC
 - Réponse harmonique (module et phase)
 - Réponse indicielle
- ❑ Filtres actifs
- ❑ Circuits RLC
 - Réponse indicielle
 - Réponse harmonique (module et phase)
- ❑ Bilan du cours - A savoir

Circuit RLC: réponse indicielle



Source de tension: $e(t) = \begin{cases} = 0 & \text{si } t < 0 \\ = E & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

Condition initiale : $v_C(t) = 0$ Condensateur déchargé
 $i(t) = 0$ Inductance déchargée

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + v_C(t)$$

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$e(t) = LC \frac{d^2v_C(t)}{dt^2} + RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t)$$

La solution est la somme d'une solution particulière de l'équation complète et de la solution générale de l'équation sans second membre

Equation sans second membre:

$$LC \frac{d^2v_C(t)}{dt^2} + RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = 0$$

$$\frac{d^2v_c(t)}{dt^2} + 2z_0\omega_0 \frac{dv_c(t)}{dt} + \omega_0^2 v_c(t) = 0$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{pulsation propre})$$

$$z_0 = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (\text{amortissement})$$

$$\lambda = z_0 \omega_0 \quad (\text{atténuation})$$

Résolution de l'équation différentielle

$$\frac{d^2v_c(t)}{dt^2} + 2z_0\omega_0 \frac{dv_c(t)}{dt} + \omega_0^2 v_c(t) = 0$$

On pose:

$$v_c(t) = Ae^{\delta t} \quad \frac{dv_c(t)}{dt} = \delta Ae^{\delta t} \quad \frac{d^2v_c}{dt^2} = \delta^2 Ae^{\delta t}$$

$$\delta^2 Ae^{\delta t} + 2z_0\omega_0 \delta Ae^{\delta t} + \omega_0^2 Ae^{\delta t} = 0 \quad | : Ae^{\delta t}$$

Equation caractéristique:

$$\delta^2 + 2z_0\omega_0 \delta + \omega_0^2 = 0$$

$$\delta_{1,2} = -\frac{2z_0\omega_0}{2} \pm \sqrt{\frac{4z_0^2\omega_0^2}{4} - \omega_0^2}$$

$$\delta_{1,2} = -\frac{2z_0\omega_0}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2(z_0^2 - 1)}$$

Discriminant: $\Delta = \omega_0^2(z_0^2 - 1)$

$$\Delta < 0 \text{ si } z_0 < 1$$

$$\Delta > 0$$

$$z_0 > 1$$

trois cas:

deux racines réelles δ_1 et δ_2

$$\Delta < 0$$

$$z_0 < 1$$

$$z_0 = 1$$

(cas non traité)

deux racines complexes δ_1 et δ_2 conjuguées

Circuit RLC: réponse indicelle

La solution est donc: $v_c(t) = E + A_1 e^{\delta_1 t} + A_2 e^{\delta_2 t}$

On ajuste les constantes A_1 et A_2 avec les conditions initiales:

$v_C(t) = 0$ Condensateur déchargé

Pour $t = 0$ $v_C(t) = 0$

$$0 = E + A_1 + A_2$$

$i(t) = 0$ Inductance déchargée

Comme $i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$ $\left(\frac{dv_C(t)}{dt} \right)_{t=0} = 0$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \delta_1 A_1 e^{\delta_1 t} + \delta_2 A_2 e^{\delta_2 t}$$

$$\delta_1 A_1 + \delta_2 A_2 = 0$$

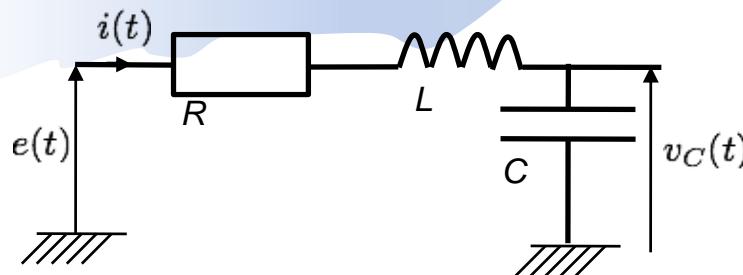
$$A_2 = -\frac{\delta_1}{\delta_2} A_1$$

$$0 = E + A_1 - \frac{\delta_1}{\delta_2} A_1$$

$$A_1 = E \frac{\delta_2}{\delta_1 - \delta_2}$$

$$A_2 = -E \frac{\delta_1}{\delta_1 - \delta_2}$$

Circuit RLC: réponse indicelle



$$v_c(t) = E + A_1 e^{\delta_1 t} + A_2 e^{\delta_2 t}$$

$$A_1 = E \frac{\delta_2}{\delta_1 - \delta_2} \quad A_2 = -E \frac{\delta_1}{\delta_1 - \delta_2}$$

trois cas:

$z_0 > 1$
deux racines
réelles δ_1 et δ_2

$$\delta_1 = -\lambda(1 - Z_0)$$

$$\delta_2 = -\lambda(1 + Z_0)$$

$z_0 = 1$
(cas non traité)

$$Z_0 = \sqrt{1 - \frac{1}{z_0^2}}$$

$z_0 < 1$
deux racines
complexes conjuguées:
 δ_1 et δ_2

$$\delta_1 = -\lambda + j\omega_0 \sqrt{1 - z_0^2}$$

$$\delta_2 = -\lambda - j\omega_0 \sqrt{1 - z_0^2}$$

A_1 et A_2 complexes conjugués:

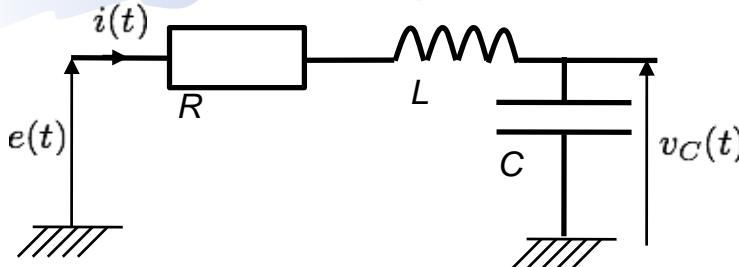
$$A_1 = -\frac{E}{2} \left(1 + \frac{1}{Z_0} \right)$$

$$A_2 = -\frac{E}{2} \left(1 - \frac{1}{Z_0} \right)$$

$$A_1 = \frac{E}{2j\omega_0 \sqrt{1 - z_0^2}} \left(-\lambda - j\omega_0 \sqrt{1 - z_0^2} \right)$$

$$A_2 = \frac{E}{2j\omega_0 \sqrt{1 - z_0^2}} \left(\lambda - j\omega_0 \sqrt{1 - z_0^2} \right)$$

Circuit RLC: réponse indicielle



La solution est $v_c(t) = E \left(1 + \frac{\delta_2}{\delta_1 - \delta_2} e^{\delta_1 t} - \frac{\delta_1}{\delta_1 - \delta_2} e^{\delta_2 t} \right)$

donc:
La forme dépend des propriétés des δ_1 et δ_2 complexes

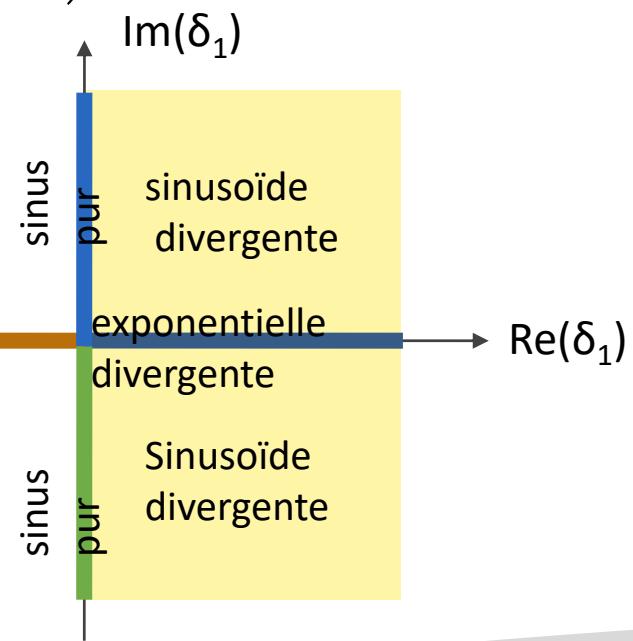
$$e^{\delta_1} = e^{Re(\delta_1)} e^{jIm(\delta_1)}$$

Terme exponentiel:
convergente si $Re < 0$
divergente si $Re > 0$

Terme sinusoïdal

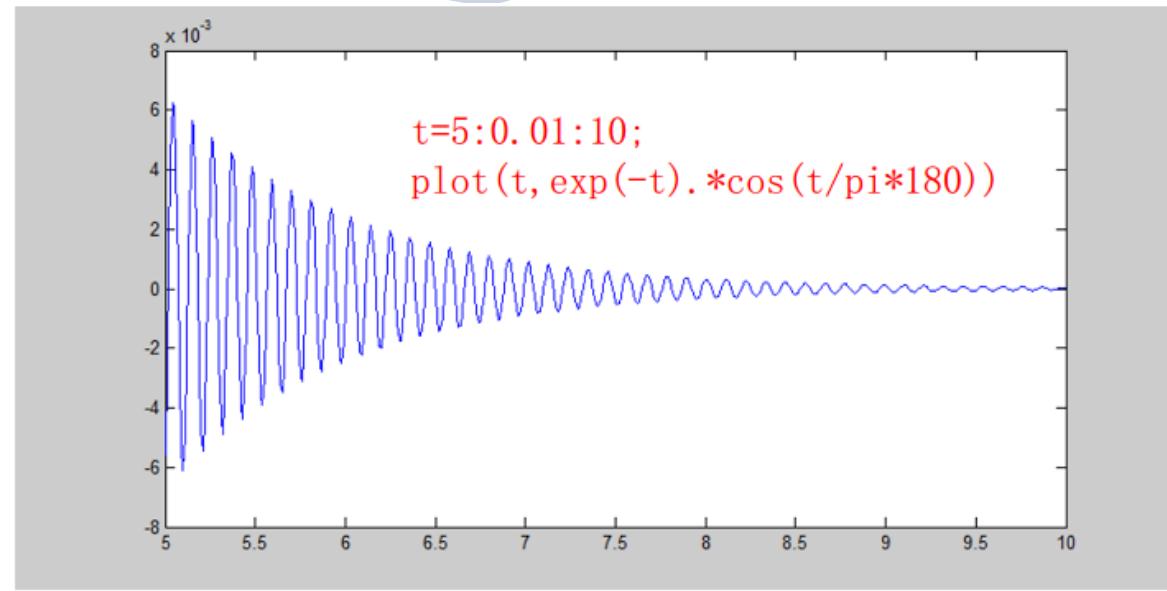
Source de tension:
 $e(t) = \begin{cases} = 0 & \text{si } t < 0 \\ = E & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$

Condition initiale :
 $v_C(t) = 0$ Condensateur déchargé
 $i(t) = 0$ Inductance déchargée

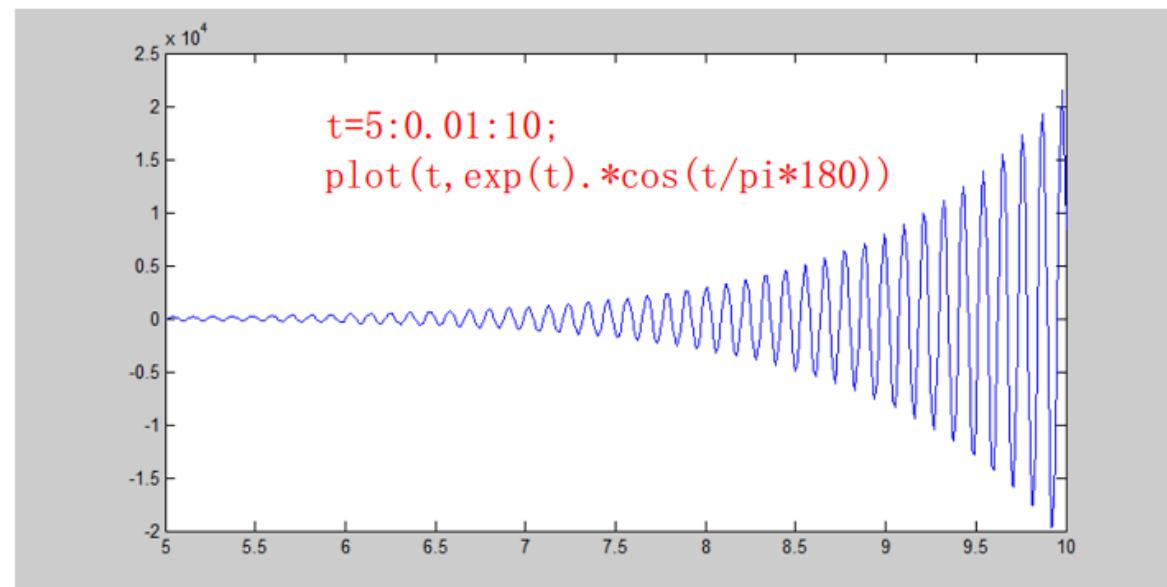


Circuit RLC: réponse indicielle

Convergent
指数收敛正弦波



Divergent
指数发散正弦波



Circuit RLC: réponse indicielle

Pour

$$z_0 > 1$$

$$\begin{aligned}\delta_1 &= -\lambda(1 - Z_0) & Z_0 &= \sqrt{1 - \frac{1}{z_0^2}} & A_1 &= -\frac{E}{2} \left(1 + \frac{1}{Z_0} \right) \\ \delta_2 &= -\lambda(1 + Z_0) & 0 < Z_0 < 1 & & A_2 &= -\frac{E}{2} \left(1 - \frac{1}{Z_0} \right)\end{aligned}$$

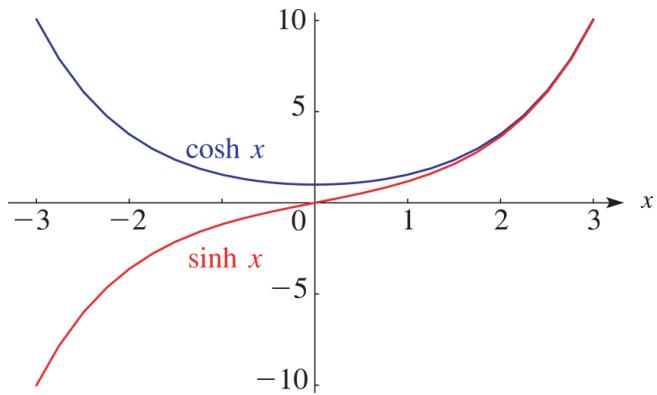
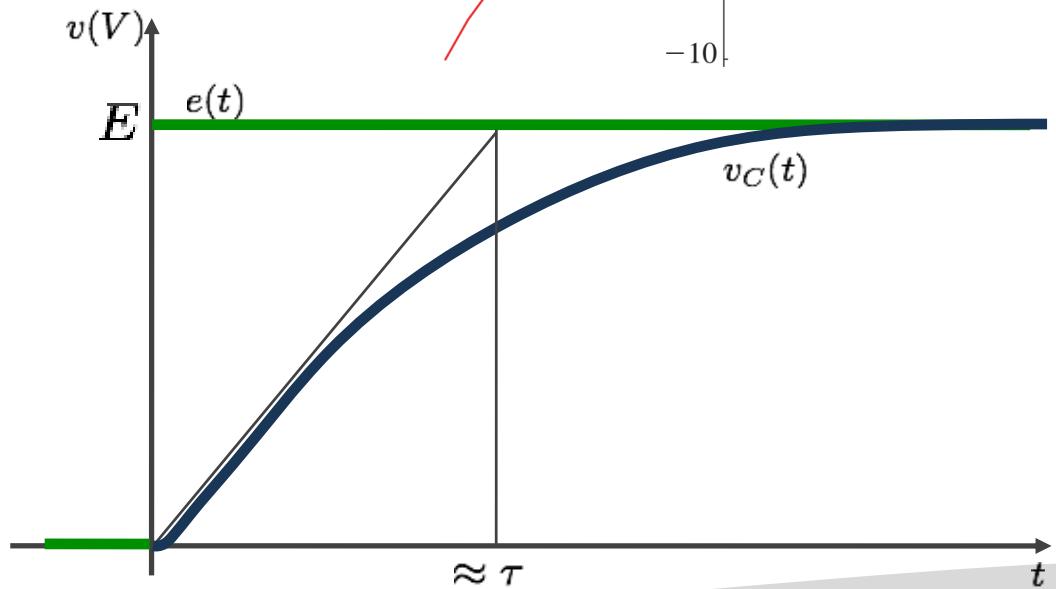
$$v_c(t) = E + A_1 e^{\delta_1 t} + A_2 e^{\delta_2 t}$$

$$v_C(t) = E \left(1 - e^{-\lambda t} \left(\frac{e^{\lambda Z_0 t} + e^{-\lambda Z_0 t}}{2} + \frac{1}{Z_0} \frac{e^{\lambda Z_0 t} - e^{-\lambda Z_0 t}}{2} \right) \right)$$

$$v_C(t) = E \left(1 - e^{-\lambda t} \left(\cosh(\lambda Z_0 t) + \frac{1}{Z_0} \sinh(\lambda Z_0 t) \right) \right)$$

$$\begin{aligned}Re(\delta_1) &< 0 \text{ et } Re(\delta_2) < 0 \\ Im(\delta_1) &= 0 \text{ et } Im(\delta_2) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\delta_1| &< |\delta_2| \\ \tau &\approx \max \left(\frac{1}{|\delta_1|}, \frac{1}{|\delta_2|} \right) \\ \tau &\approx \frac{1}{|\delta_1|}\end{aligned}$$



Circuit RLC: réponse indicielle

Pour

$$z_0 > 1$$

Approximation pour

$$z_0 \gg 1$$

$$\begin{aligned} Z_0 &= \sqrt{1 - \frac{1}{z_0^2}} \\ &\approx 1 - \frac{1}{2z_0^2} \end{aligned}$$

$$\delta_1 = -\lambda(1 - Z_0)$$

$$\approx -z_0 w_0 \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2z_0^2} \right) \right)$$

$$\approx -\frac{w_0}{2z_0} \quad \delta_1 \text{ petit} \rightarrow \text{réponse lente}$$

$$v_c(t) = E + A_1 e^{\delta_1 t} + A_2 e^{\delta_2 t}$$

< 0 lent > 0 rapide

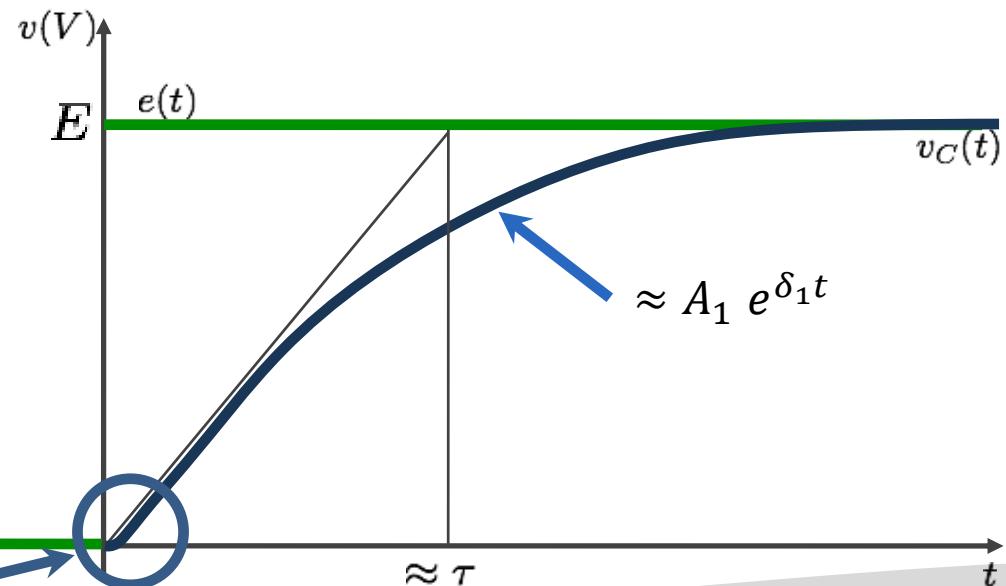
$$\delta_2 = -\lambda(1 + Z_0)$$

$$\approx -z_0 w_0 \left(1 + \left(1 - \frac{1}{2z_0^2} \right) \right)$$

$$\approx -2z_0 w_0 + \frac{w_0}{2z_0}$$

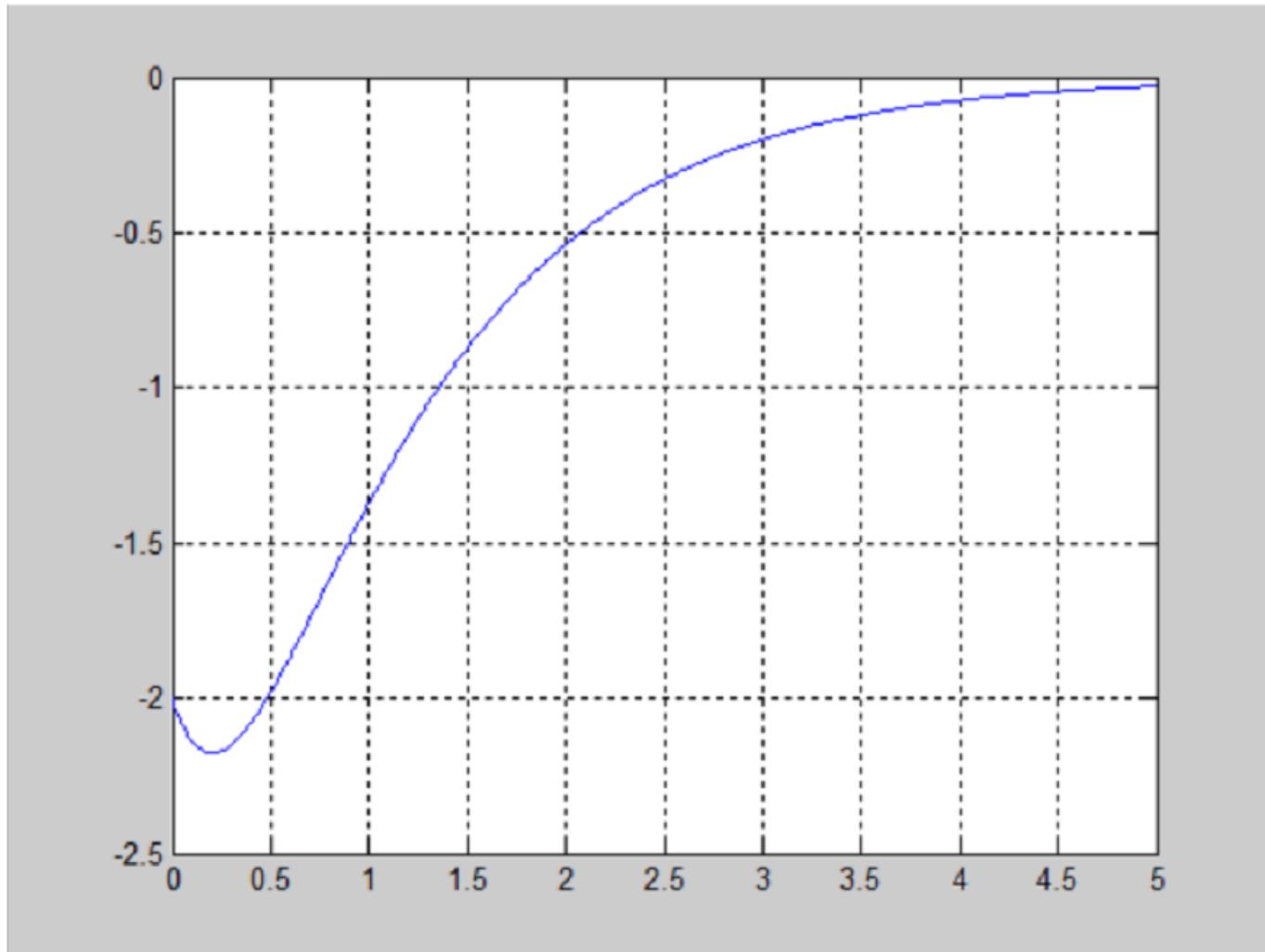
δ_2 grand \rightarrow réponse rapide

Contribution de $A_2 e^{\delta_2 t}$



Circuit RLC: réponse indicelle

```
x=0:0.01:5;  
plot(x,-4*exp(-1*x)+2*exp(-3*x)),grid on
```



Circuit RLC: réponse indicielle

Pour $z_0 > 1$

Simulation pour:

$$w_0 = 1 \text{ krad/s}$$

$$z_0 = 5$$

$$\delta_1 = -\frac{w_0}{2z_0} = -100 \text{ rad/s}$$

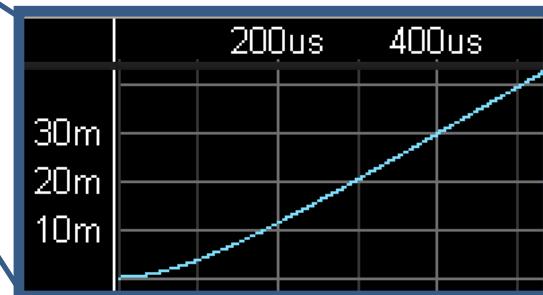
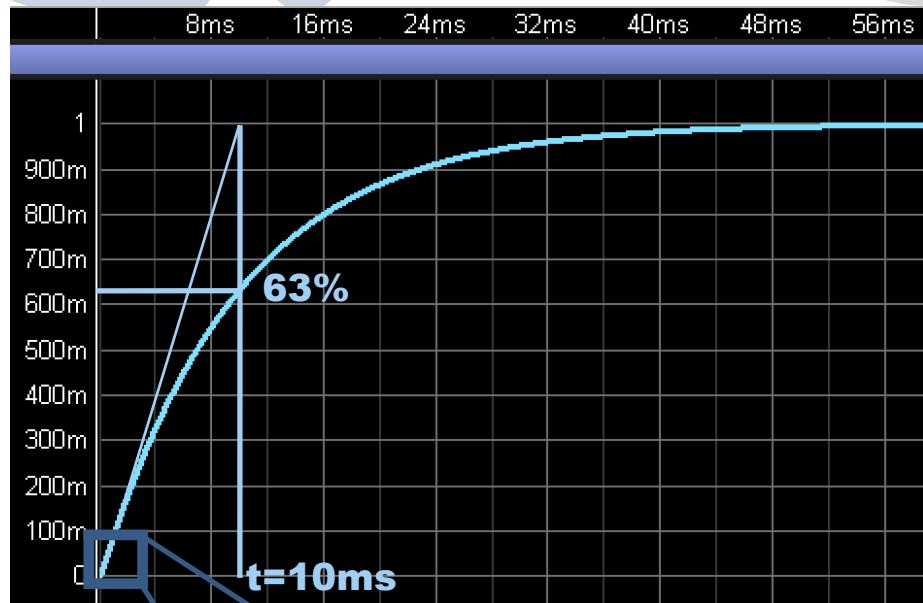
$$\delta_2 = -2z_0 w_0 + \frac{w_0}{2z_0} = -9.9 \text{ krad/s}$$

Fichier Spice:

```
* Systeme du second ordre
* Fonction de transfert definie par bloc Laplace
S1 RLC 0 IN 0
+A0=1
+B0=1 B1='2*Z0/WC' B2='1/(WC*WC)'
```

* Tension d'entrée:
VIN IN 0 PWL 0 0 1p 1

* Definition des paramètres:
.PARAM WC=1k
.PARAM Z0=5



Circuit RLC: réponse indicelle

$w_0 = 1 \text{ krad/s}$

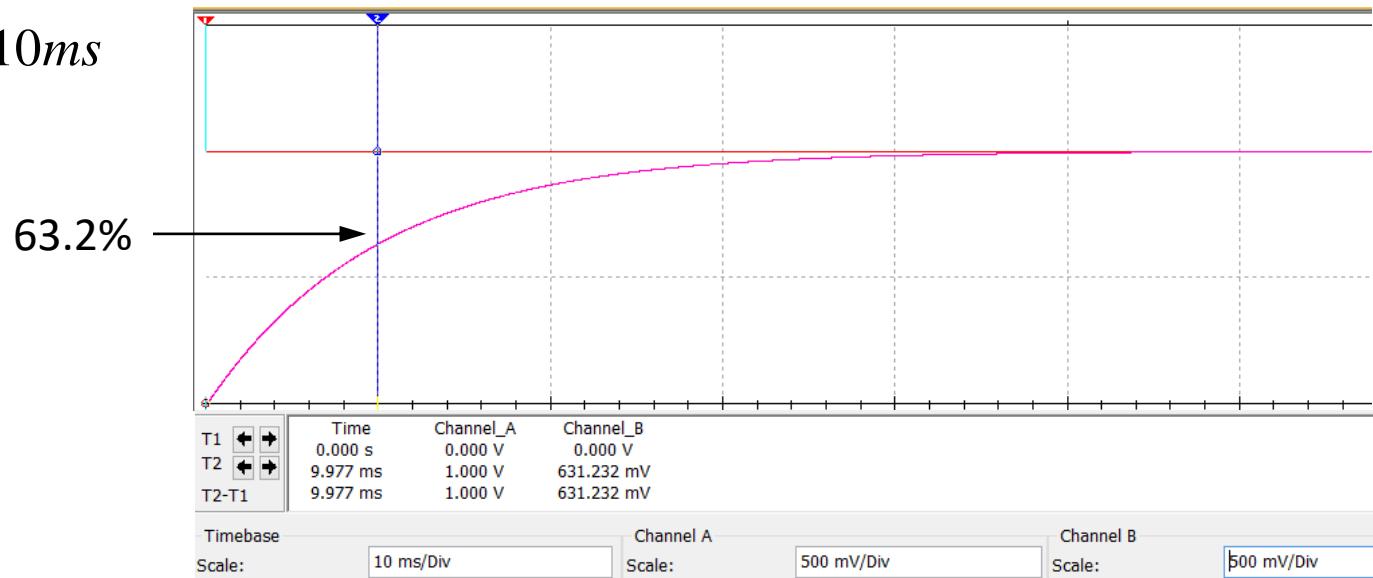
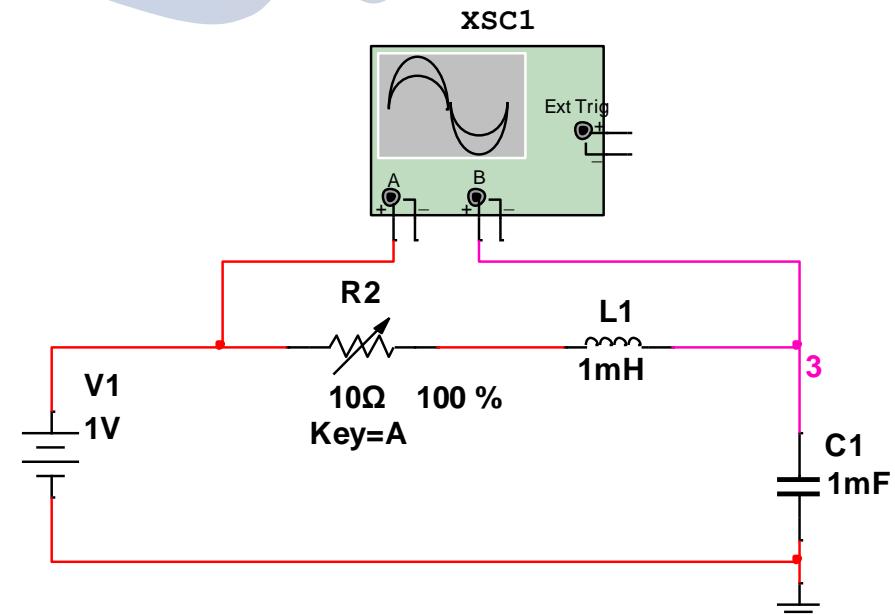
$z_0 = 5$

$w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \rightarrow LC = \frac{1}{w_0^2} = 10^{-6}$

取 $L = 10^{-3} \text{ H}$, $C = 10^{-3} \text{ F}$

$z_0 = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \rightarrow R = 2z_0 \sqrt{\frac{L}{C}} = 10\Omega$

$\Gamma = \left| \frac{1}{\delta_1} \right| = 0.01s = 10ms$



Circuit RLC: réponse indicielle

Pour $z_0 < 1$

$$v_C(t) = E + Ae^{\delta_1 t} + Be^{\delta_2 t}$$

En posant:

$$\delta_1 = -\lambda + jw_0\sqrt{1 - z_0^2}$$

$$\delta_2 = -\lambda - jw_0\sqrt{1 - z_0^2}$$

$$A_1 = \frac{E}{2j\omega_0\sqrt{1 - z_0^2}} \left(-\lambda - j\omega_0\sqrt{1 - z_0^2} \right)$$

$$A_2 = \frac{E}{2j\omega_0\sqrt{1 - z_0^2}} \left(\lambda - j\omega_0\sqrt{1 - z_0^2} \right)$$

On peut montrer:

$$v_c(t) = E \left(1 - e^{-\lambda t} \cos(\omega_n t + \Phi) \right)$$

Pulsion naturelle: $w_n = w_0\sqrt{1 - z_0^2}$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\lambda = z_0\omega_0$$

Circuit RLC: réponse indicelle

Pour $z_0 < 1$

Pour $\operatorname{Re}(\delta_1) < 0$ et $\operatorname{Re}(\delta_2) < 0$
 $\operatorname{Im}(\delta_1) \neq 0$ et $\operatorname{Im}(\delta_2) \neq 0$

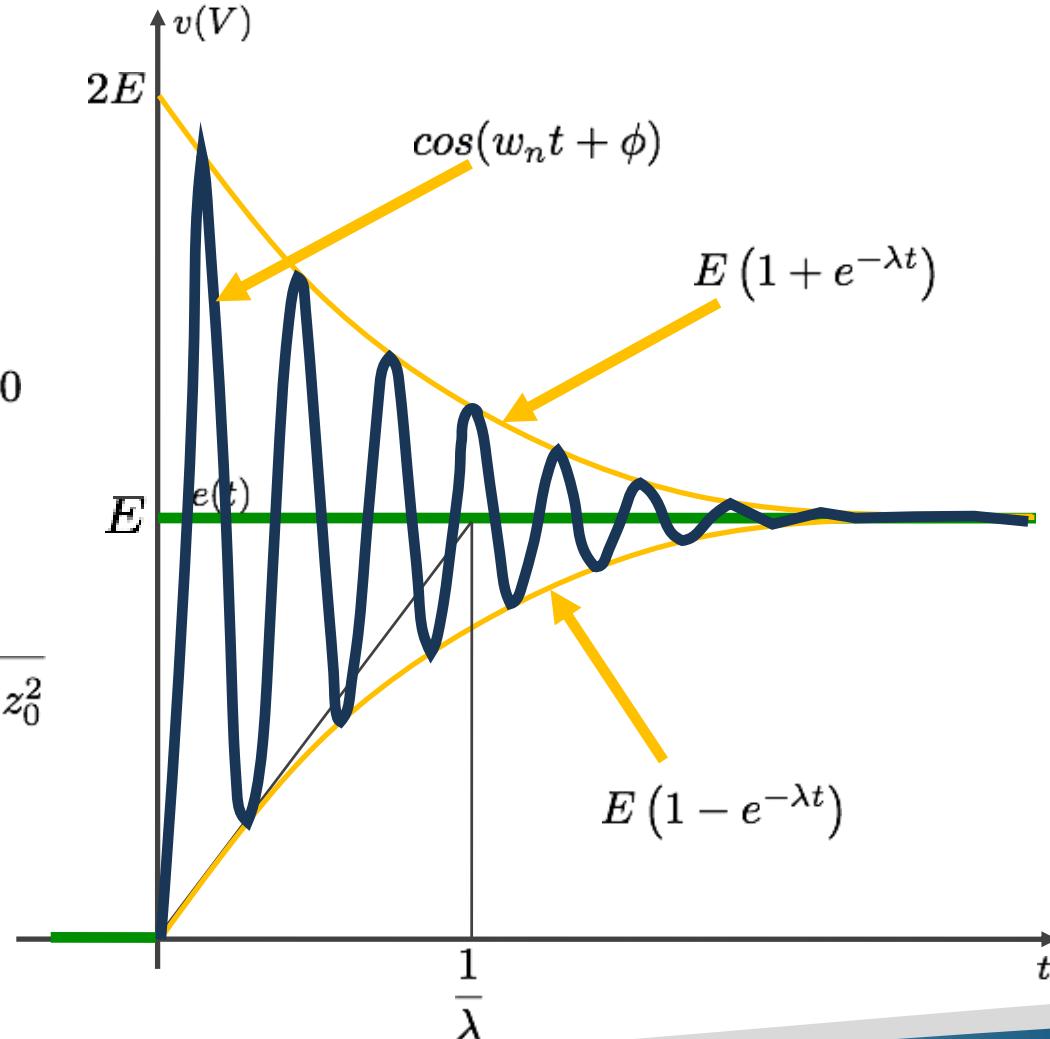
Atténuation:

$$\lambda = \frac{R}{2L}$$

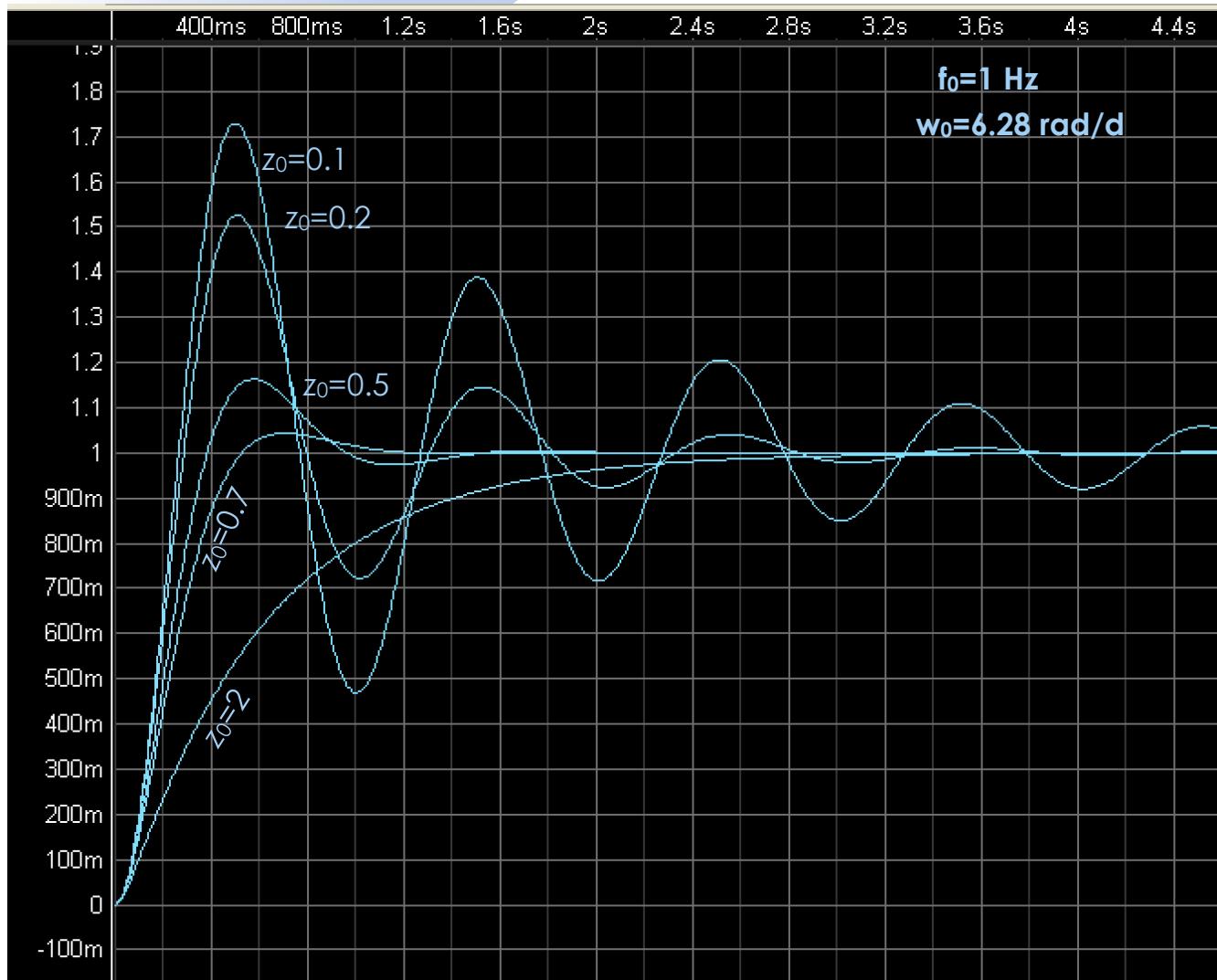
Pulsation naturelle: $w_n = w_0 \sqrt{1 - z_0^2}$

Pulsation propre: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$v_C(t) = E (1 - e^{-\lambda t} \cos(w_n t + \phi))$$



Circuit RLC: réponse indicelle



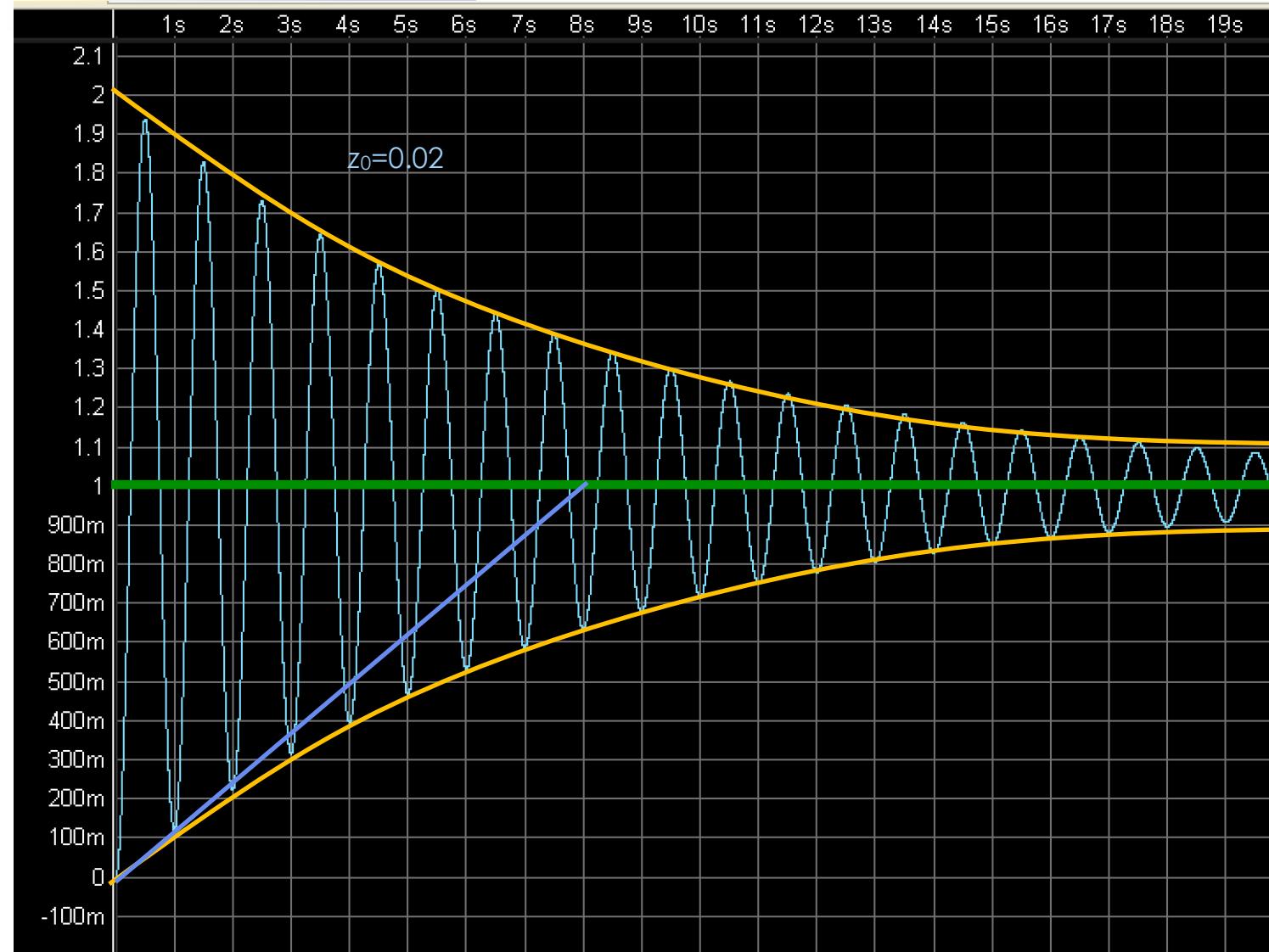
Fichier Spice:

- * Fonction du second ordre
- * Pulsation ω_C
- * Amortissement Z_0
- * Bloc LAPLACE S
- S1 RLC 0 IN 0
- + A0=1
- + B0=1 B1='2*Z0/WC' B2='1/(WC*WC)'
- * Tension d'entrée:
VIN IN 0 PWL 0 0 1p 1
- * Definition de paramètres ($f=1\text{Hz}$):
.PARAM PI=3.141592654
.PARAM WC='2*PI*1'
.PARAM Z0=0.5

Analyse transient:

End time= 5
Print step= 1m
Time Step Control: Max=1m

Circuit RLC: réponse indicelle



$$\lambda = z_0 w_0$$

$$f_0 = 1$$

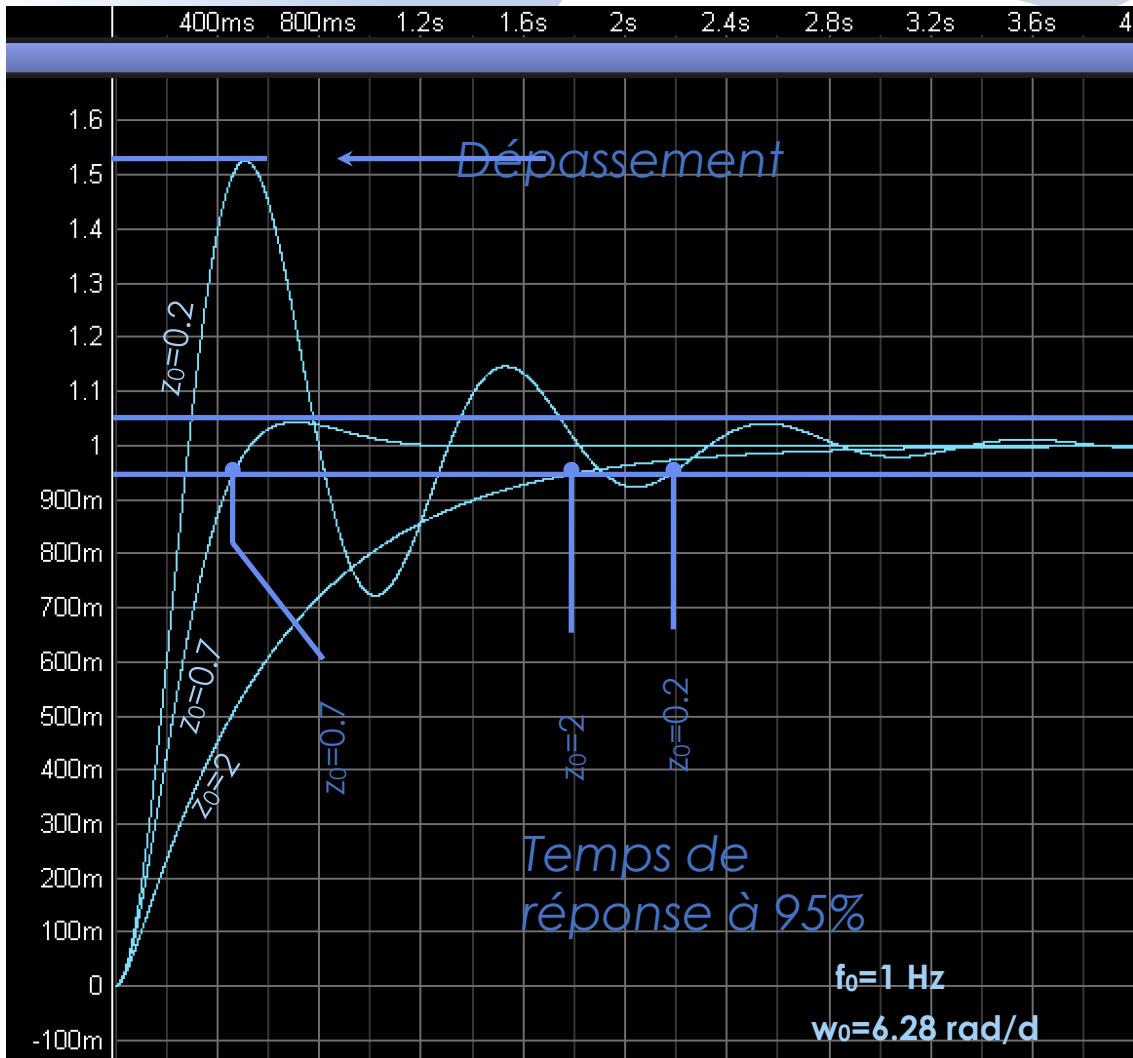
$$w_0 = 2\pi$$

$$z_0 = 0.02$$

$$\lambda = 0.125 \text{ rad/s}$$

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = 7.96 \text{ s}$$

Circuit RLC: réponse indicielle



$$v_C(t) = E \left(1 - e^{-\lambda t} \cos(\omega_n t + \phi) \right)$$

Dépassement :

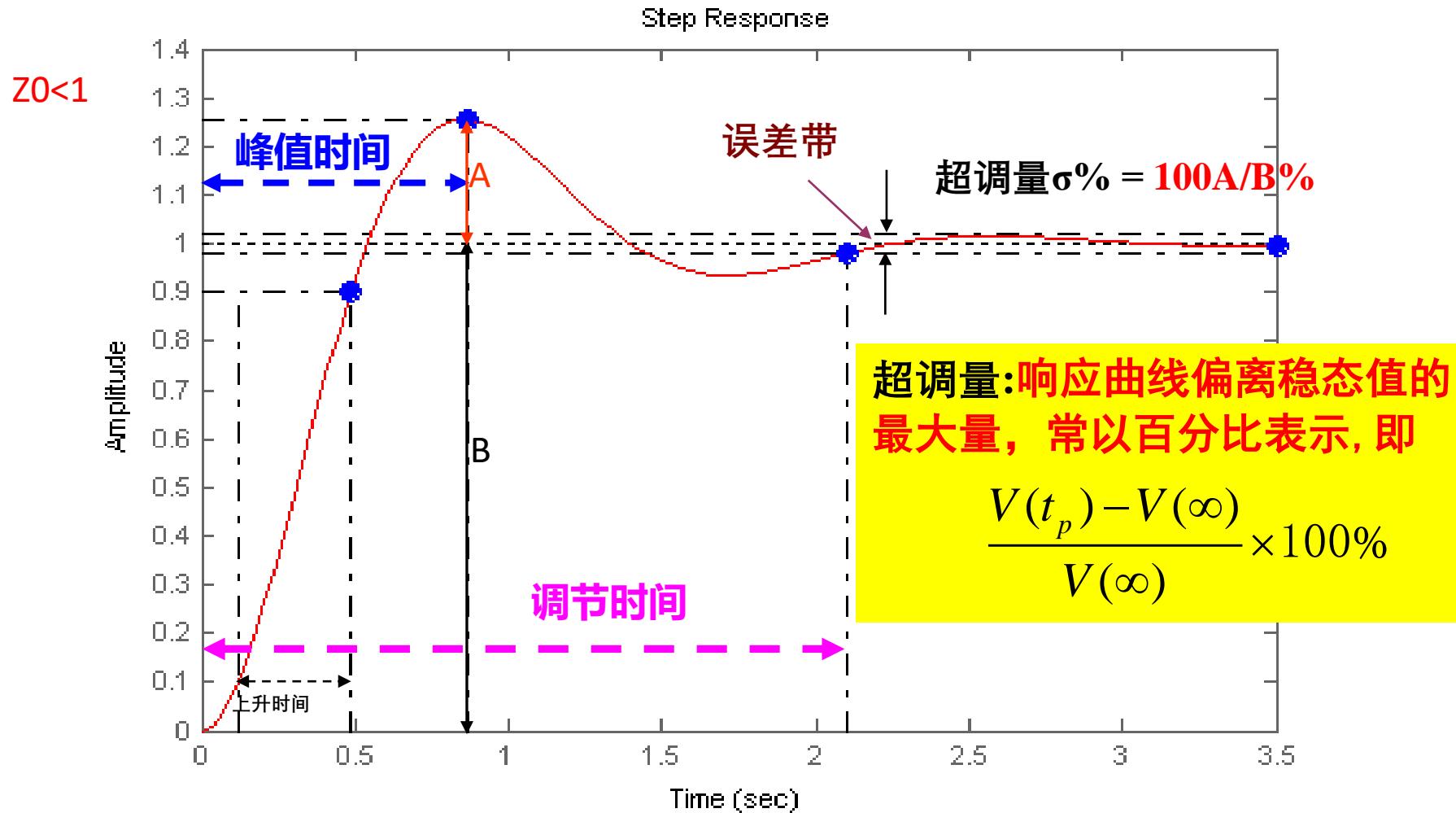
$$D\% = \frac{v_{max} - v_\infty}{v_\infty} \times 100$$

$$\begin{aligned} v_{max} - v_\infty &\approx E e^{-\lambda \frac{\pi}{\omega_n}} \\ &\approx E e^{-z_0 \omega_0 \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z_0^2}}} \\ &\approx E e^{-\pi \frac{z_0}{\sqrt{1-z_0^2}}} \end{aligned}$$

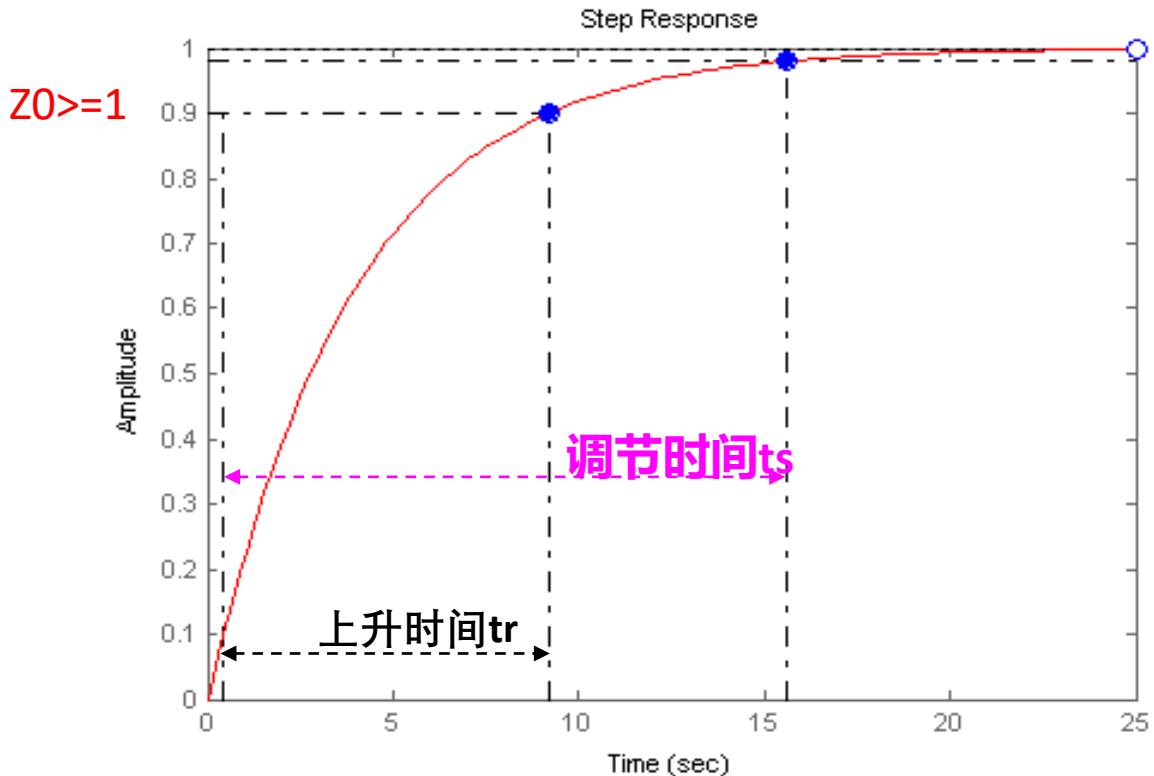
$$D\% \approx 100 e^{-\pi \frac{z_0}{\sqrt{1-z_0^2}}}$$

动态响应指标

- 描述稳定的系统在单位阶跃函数作用下，动态过程随时间的变化状况



上升时间和峰值时间
反映了系统的响应速度；
超调量反映了系统的阻尼程度；
调节时间同时反映系统响应速度和阻尼程度的综合性指标

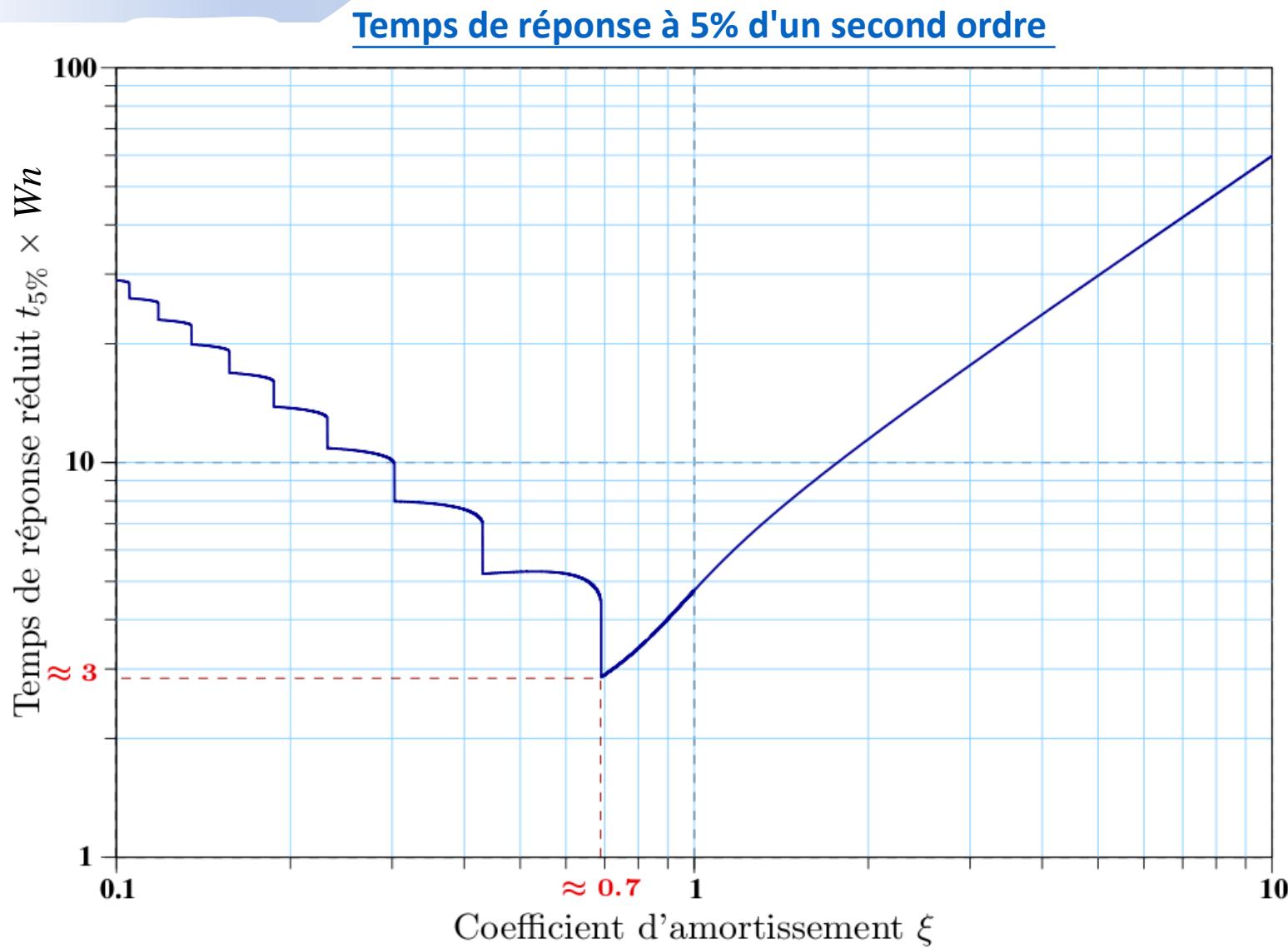


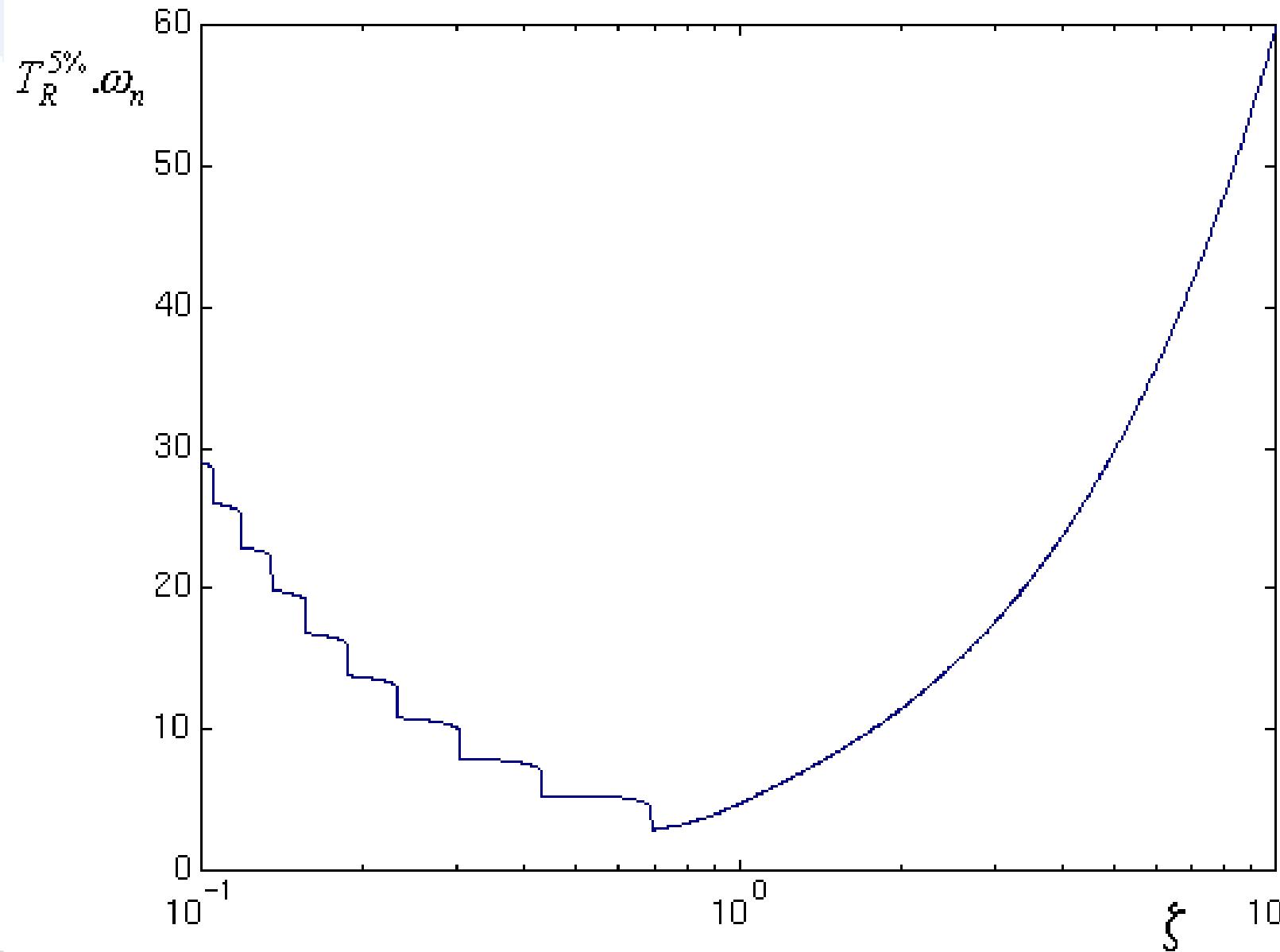
上升时间 t_r – rise time：响应曲线从零开始至第一次到达稳态值所需的时间。

峰值时间 t_p – peak time：响应曲线到达第一个峰值所需的时间

调节时间 t_s – settling time：**在响应曲线的稳态值附近，取 $\pm 5\%$ (或 $\pm 2\%$) 作为误差带，响应曲线达到并不再超出该误差带的最长时间，定义为调整时间。**从整体上反映了系统的快速性。

Circuit RLC: réponse indicielle





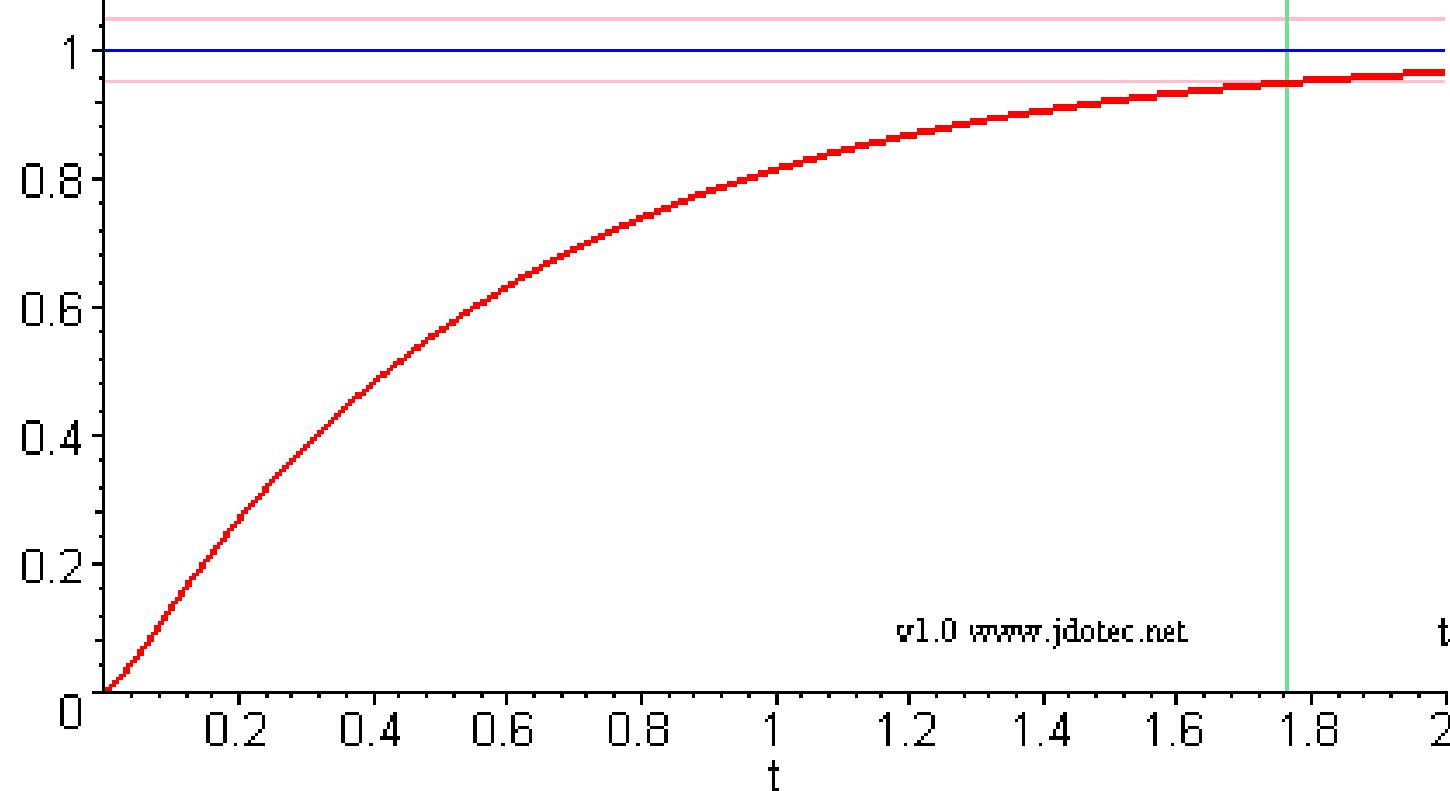
y(t)

Influence de ξ

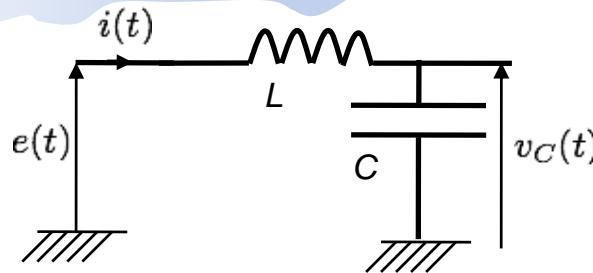
$$\xi = 3.0$$

$$K=1$$

$$\omega_0=10$$



Circuit RLC: exemple



Source de tension: $e(t) = E \cos(\omega t)$

Grandeurs complexes e, i, v_C

Impédances complexes:

Condensateur:

Résistance:

Inductance:

$$Z_C = \frac{1}{jC\omega}$$

R

$$Z_L = jL\omega$$

$$e = Z_L i + Z_C i$$

$$= jL\omega i + \frac{1}{jC\omega} i$$

$$i = e \frac{1}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$v_C = Z_C i$$

$$= \frac{1}{jC\omega} \frac{1}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} e$$

$$= \frac{1}{1 - LC\omega^2} e$$

Fonction de transfert:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 - LC\omega^2}$$

$$w_n = w_0 \sqrt{1 - z_0^2}$$

$$= w_0$$

$$w_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (\text{pulsion naturelle})$$

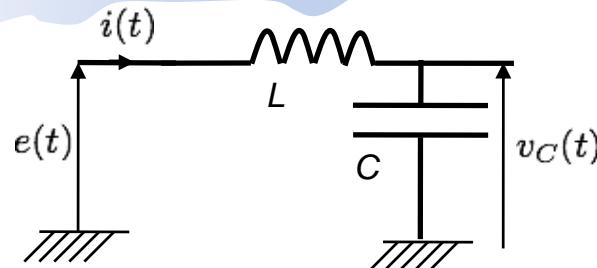
$$\lambda = \frac{R}{2L} = 0 \quad (\text{atténuation})$$

$$z_0 = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = 0 \quad (\text{amortissement})$$

$$v_C(t) = E \left(1 - e^{-\lambda t} \left(\cos(jw_n t) + \frac{z_0}{\sqrt{1 - z_0^2}} \sin(jw_n t) \right) \right)$$

$$v_C(t) = E (1 - \cos(w_0 t))$$

Circuit RLC: exemple



$$C = 100\text{nF}$$

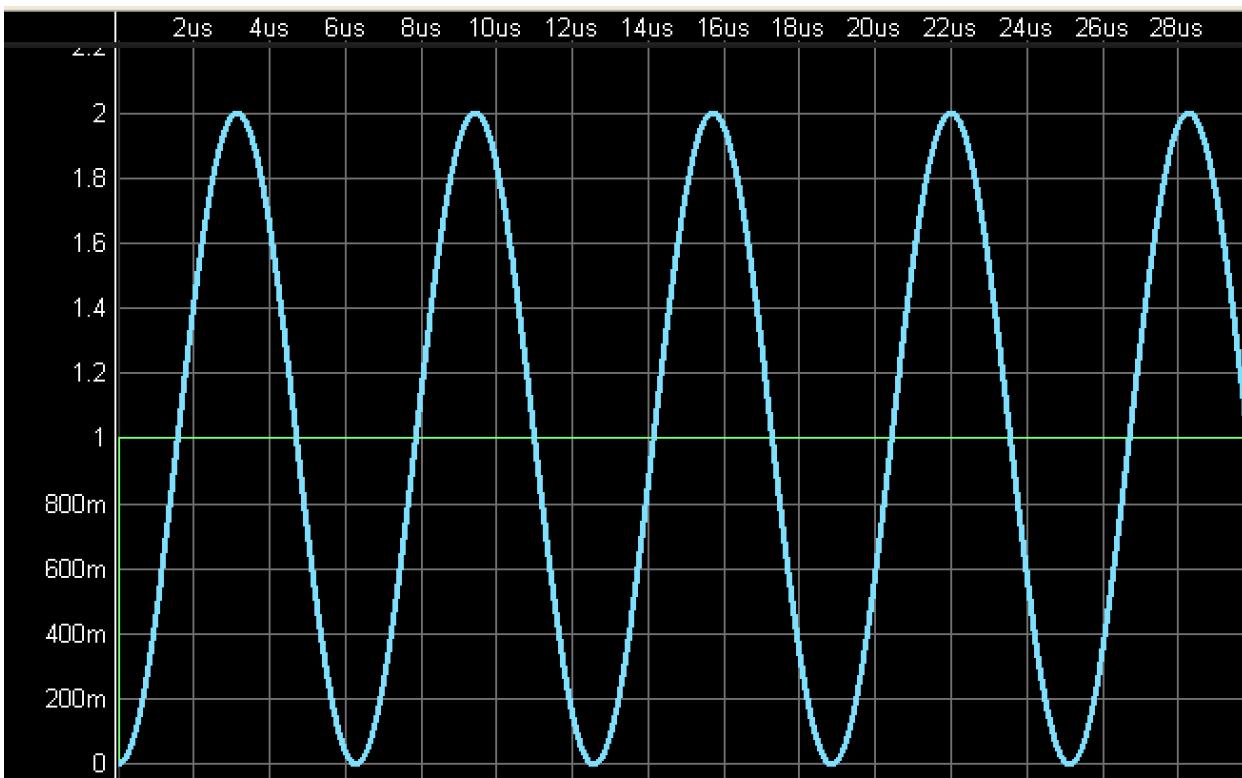
$$L = 10\mu\text{H}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$= 1 \text{ Mrad/s} \quad = 6.28\mu\text{s}$$

$$= 159 \text{ kHz}$$

$$v_C(t) = E(1 - \cos(\omega_0 t))$$



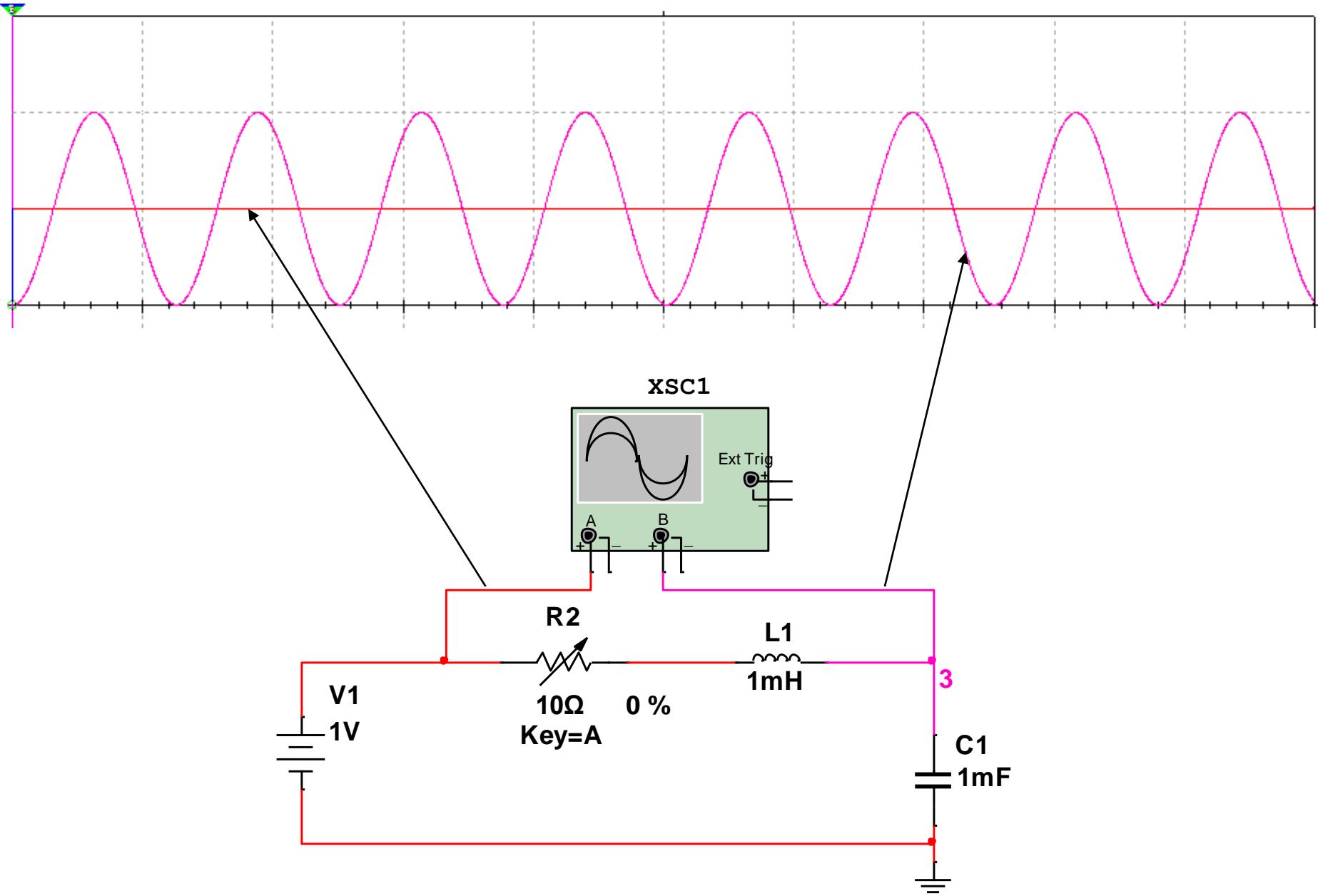
Fichier Spice:

- * Circuit LC
- L1 IN OUT 10u
- C1 OUT 0 100n

- * Source de tension type echelon
- VIN IN 0 PWL 0 0 1n 1

Analyse transient:

End time= 30u
 Print step= 10n
 Time Step Control: Max=10n

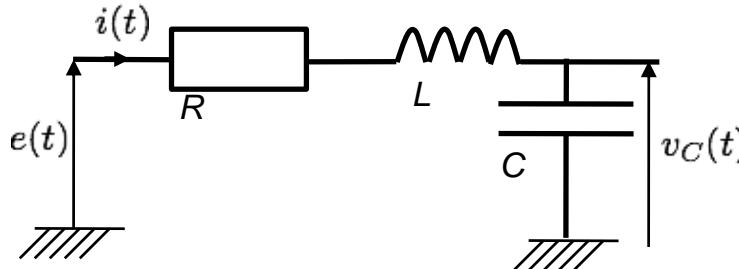




Plan du cours

- ❑ Rappels et suite ampli OP
- ❑ Rappel comportement des systèmes linéaires invariants
(comportement fréquentiel, représentation complexe...)
- ❑ Circuits RC
 - Réponse harmonique (module et phase)
 - Réponse indicielle
- ❑ Filtres actifs
- ❑ Circuits RLC
 - Réponse indicielle
 - Réponse harmonique (module et phase)
- ❑ Bilan du cours - A savoir

Circuit RLC: réponse harmonique



Source de tension: $e(t) = E \cos(\omega t)$

Grandeurs temporelles réelles

Grandeurs complexes e, i, v_C

Impédances complexes:

Condensateur:

Résistance:

Inductance:

$$Z_C = \frac{1}{jC\omega}$$

$$R$$

$$Z_L = jL\omega$$

$$e = Ri + Z_L i + Z_C i$$

$$e = Ri + jL\omega i + \frac{1}{jC\omega} i$$

$$i = e \frac{1}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$v_C = Z_C i$$

$$v_C = \frac{1}{jC\omega} \frac{1}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} e$$

$$v_C = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} e$$

Fonction de transfert:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

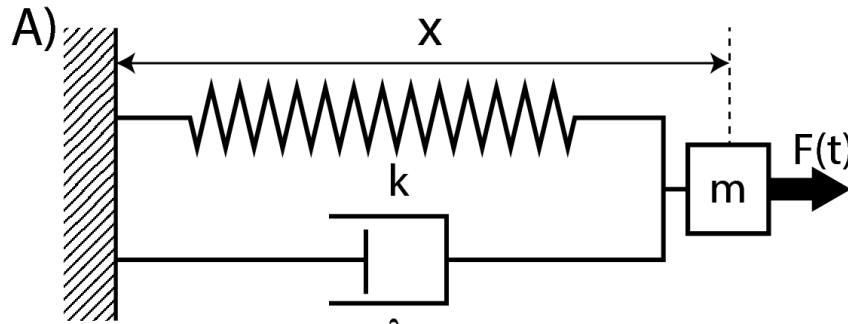
$$w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad z_0 = \frac{1}{2} R \sqrt{\frac{C}{L}}$$

pulsation naturelle

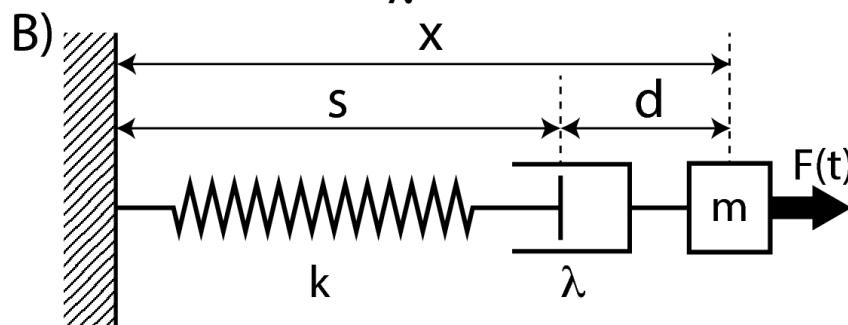
amortissement

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j2z_0 \frac{\omega}{w_0} - \frac{\omega^2}{w_0^2}}$$

Système mécanique correspondant



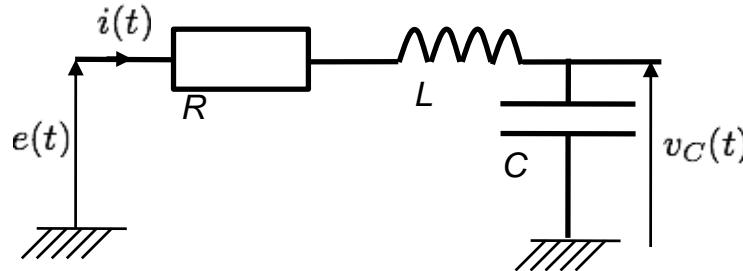
Force $F(t)$
 Masse m
 Raideur du ressort k
 Frottement λ



$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Equation très similaire !

Circuit RLC: réponse harmonique



Source de tension: $e(t) = E \cos(\omega t)$

Grandeurs temporelles réelles

Fonction de transfert:

$$H(jw) = \frac{1}{1 + j2z_0 \frac{w}{\omega_0} - \frac{w^2}{\omega_0^2}}$$

$$H(jw) = \frac{\delta_1 \delta_2}{(jw - \delta_1)(jw - \delta_2)}$$

δ_1 et δ_2 sont les pôles de la fonction de transfert:

La fonction de transfert est du second ordre (polynôme de degré 2 au dénominateur)

Le dénominateur est nulle pour deux valeurs complexes de w : ce sont les **pôles**

$$LC(jw)^2 + RC(jw) + 1 = 0$$

$$(jw)^2 + \frac{R}{L}(jw) + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\Delta = \omega_0^2(z_0^2 - 1)$$

La position des pôles détermine la fonction de transfert

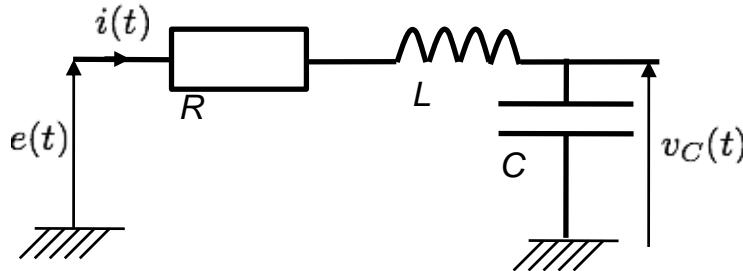
trois cas:

$z_0 > 1$
deux racines réelles δ_1 et δ_2

$z_0 = 1$
une racine réelle double δ_1

$z_0 < 1$
deux racines complexes δ_1 et δ_2

Circuit RLC: réponse harmonique



Source de tension: $e(t) = E \cos(\omega t)$

Grandeurs temporelles réelles

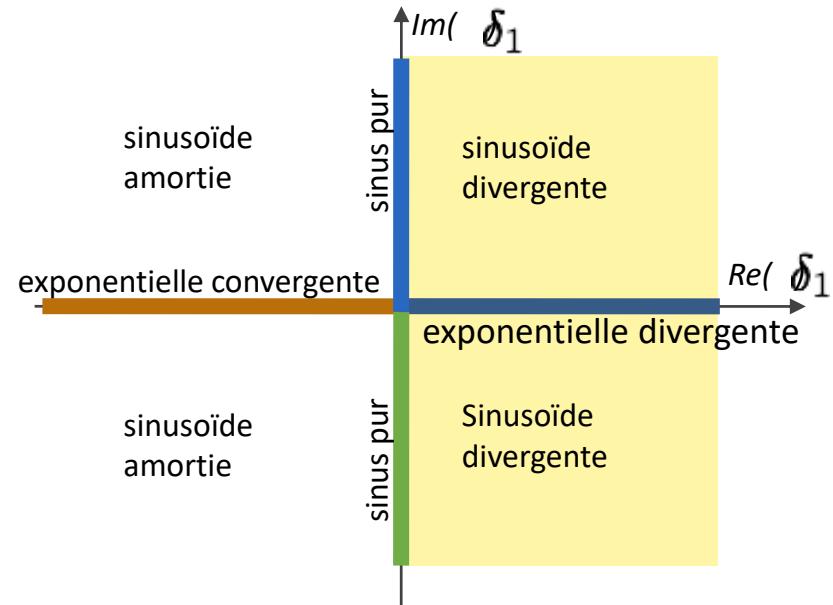
Fonction de transfert:

$$H(jw) = \frac{1}{1 + j2z_0 \frac{w}{w_0} - \frac{w^2}{w_0^2}}$$

$$H(jw) = \frac{\delta_1 \delta_2}{(jw - \delta_1)(jw - \delta_2)}$$

δ_1 et δ_2 sont les pôles de la fonction de transfert:

La position des pôles détermine la fonction de transfert



Circuit RLC: réponse harmonique

Pour

$$z_0 > 1$$

$$\begin{aligned} H(jw) &= \frac{1}{1 + j2z_0 \frac{w}{w_0} - \frac{w^2}{w_0^2}} \\ &= \frac{1}{(1 - j\frac{w}{\delta_1})(1 - j\frac{w}{\delta_2})} \end{aligned}$$

$$H(jw) = \frac{1}{(1 + j\frac{w}{w_1})(1 + j\frac{w}{w_2})} \quad w_1 = -\delta_1 \quad w_2 = -\delta_2$$

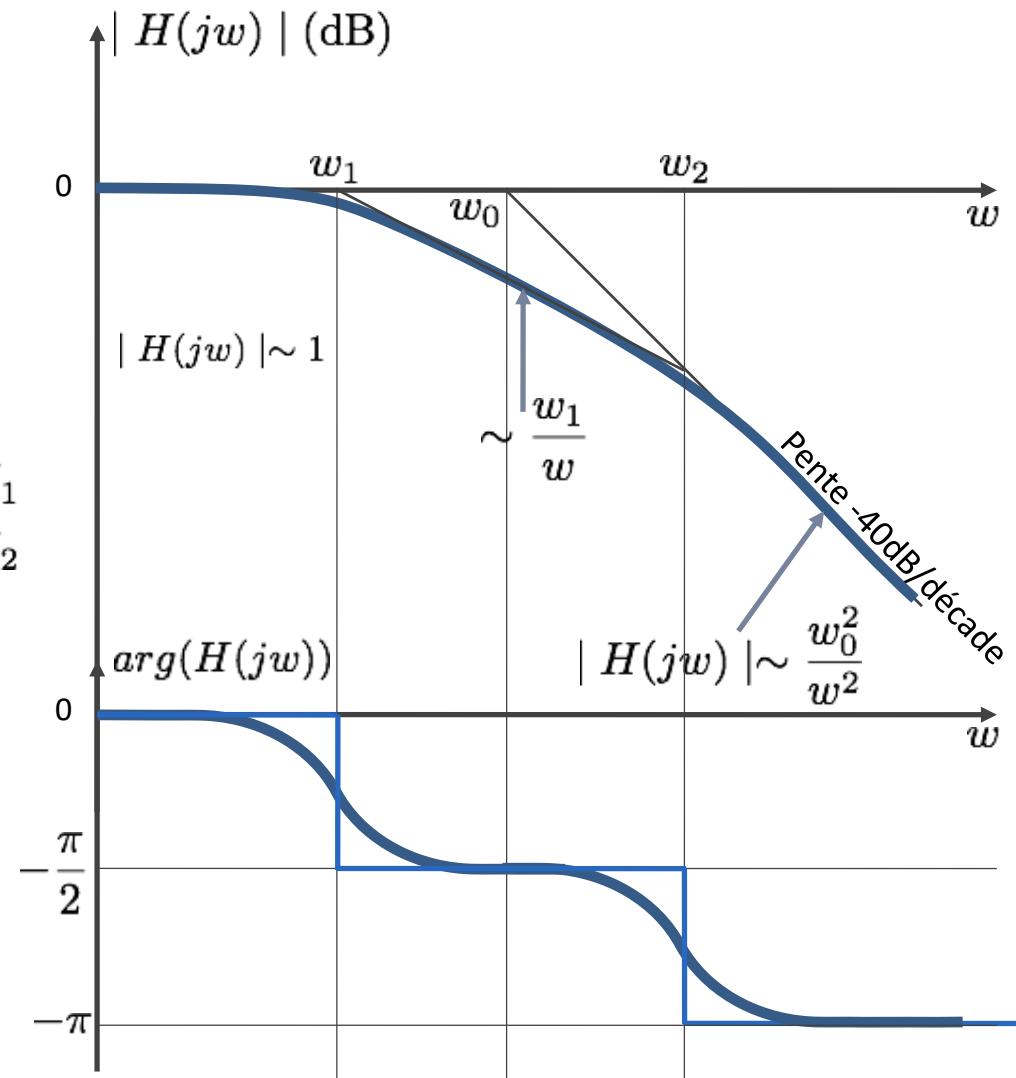
Diagramme asymptotique

$$w \ll w_1 \ll w_2 \rightarrow H(jw) \sim 1$$

$$w_1 \ll w \ll w_2 \rightarrow H(jw) \sim -j \frac{w_1}{w}$$

$$w_1 \ll w_2 \ll w \rightarrow H(jw) \sim -\frac{w_1 w_2}{w^2}$$

et $w_1 w_2 = w_0^2$



Circuit RLC: réponse harmonique

Pour

$$z_0 = 1$$

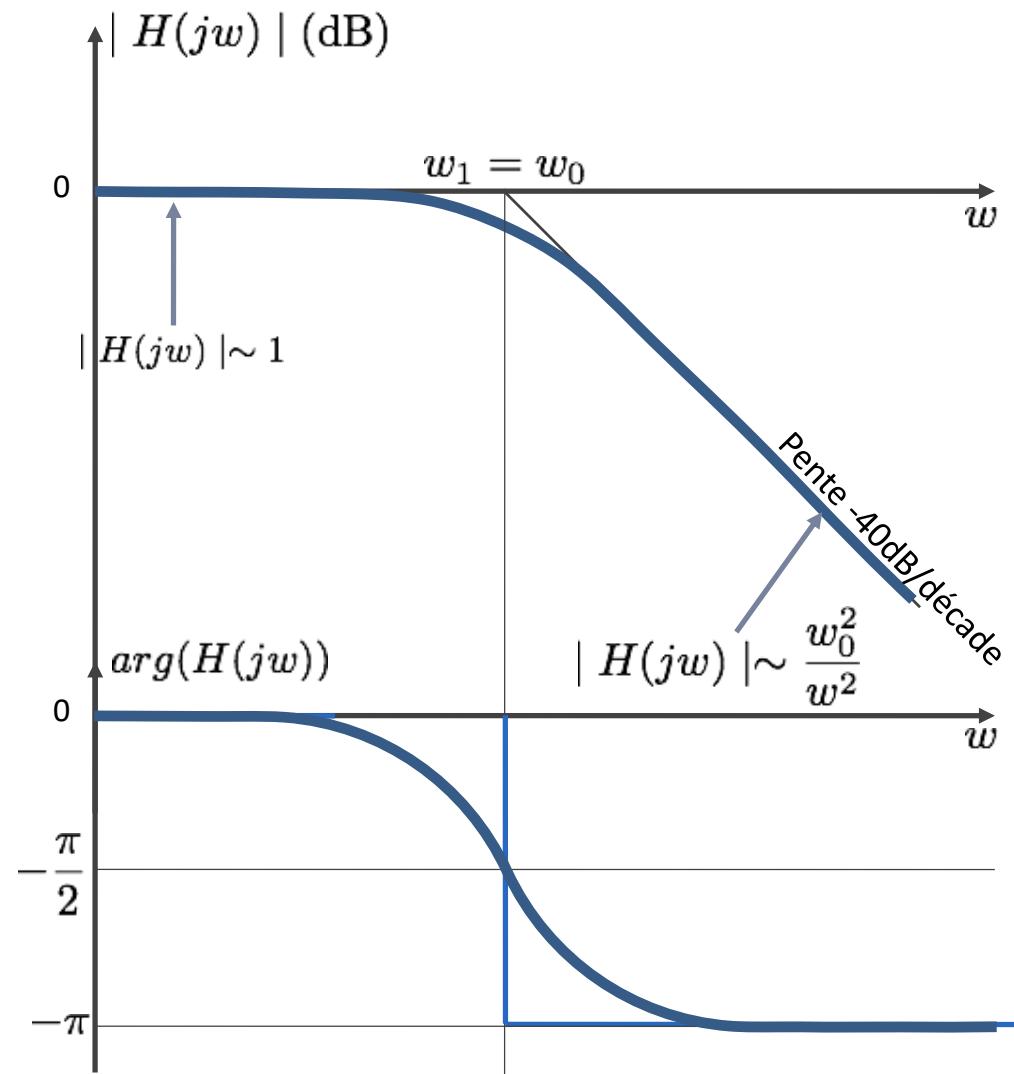
$$\begin{aligned}
 H(jw) &= \frac{1}{1 + j2z_0 \frac{w}{w_0} - \frac{w^2}{w_0^2}} \\
 &= \frac{1}{(1 - j\frac{w}{\delta_1})(1 - j\frac{w}{\delta_1})} \\
 &= \frac{1}{(1 + j\frac{w}{w_1})^2} \quad w_1 = -\delta_1
 \end{aligned}$$

Diagramme asymptotique

$$w \ll w_1 \rightarrow H(jw) \sim 1$$

$$w_1 \ll w \rightarrow H(jw) \sim -\frac{w_1^2}{w^2}$$

$$\text{et } w_1 = w_0$$



Circuit RLC: réponse harmonique

Pour $z_0 < 1$

Fonction de transfert:

$$H(jw) = \frac{1}{1 + j2z_0 \frac{w}{w_0} - \frac{w^2}{w_0^2}}$$

Diagramme asymptotique

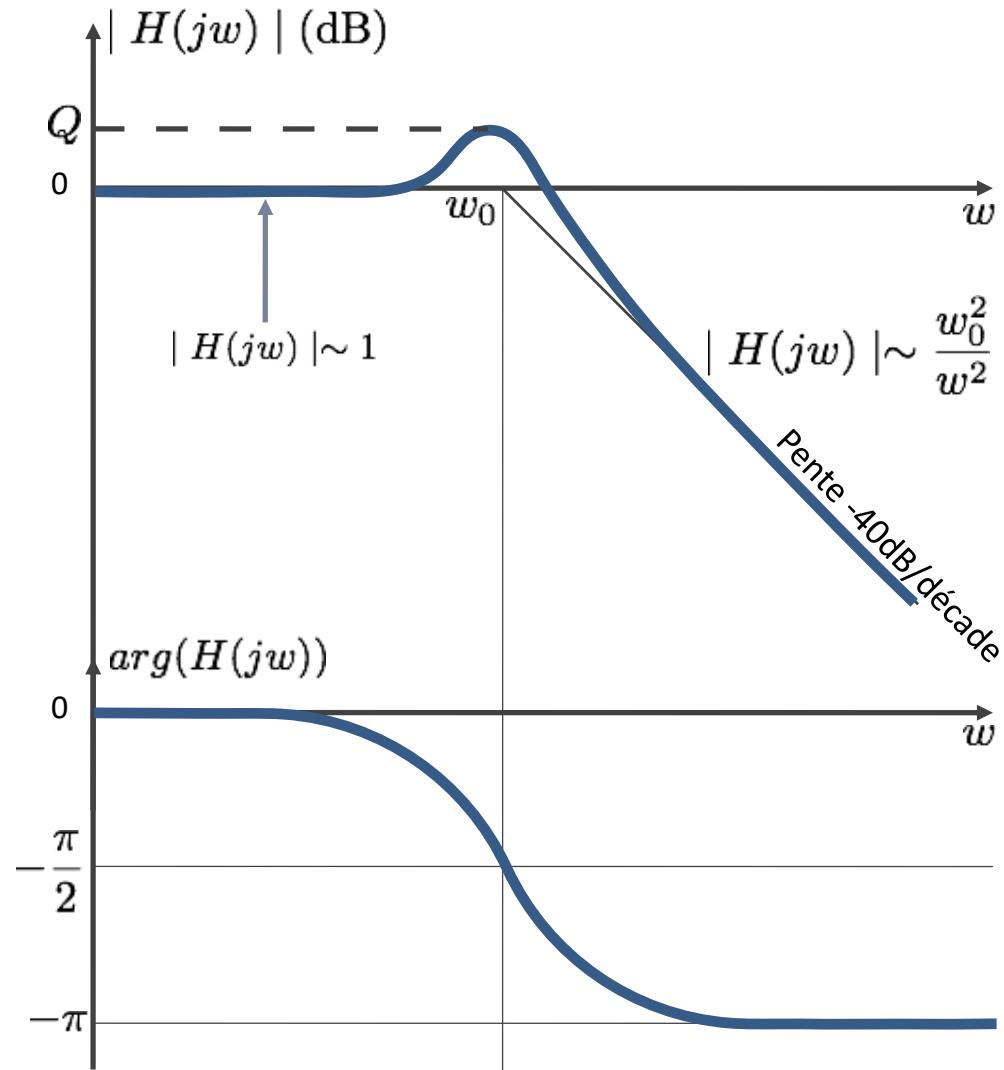
$$w \ll w_0 \rightarrow H(jw) \sim 1$$

$$w = w_0 \rightarrow H(jw) = \frac{1}{j2z_0}$$

$$w \gg w_0 \rightarrow H(jw) \sim -\frac{w_0^2}{w^2}$$

Facteur de qualité:

$$Q = \frac{1}{2z_0} \quad (\text{pour } z_0 \ll 1)$$



Pour $z_0 < 1$

Fonction de transfert:

$$H(jw) = \frac{1}{1 + j2z_0 \frac{w}{w_0} - \frac{w^2}{w_0^2}}$$

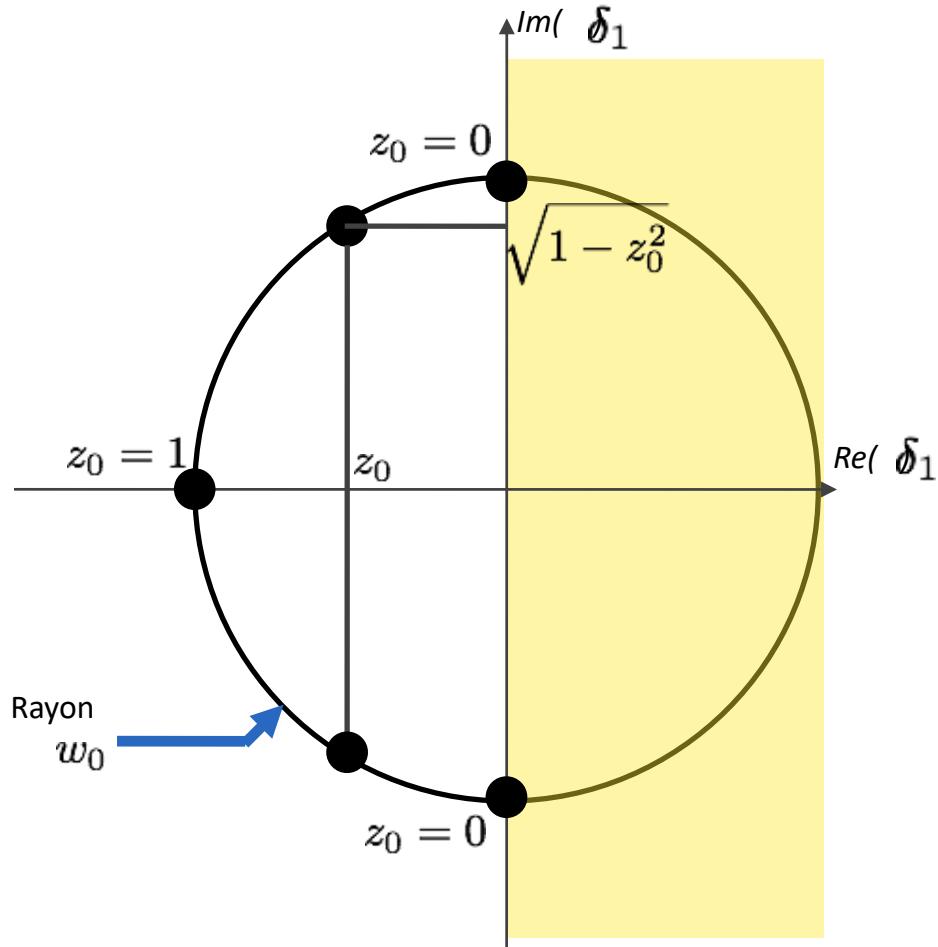
Pôles

$$\delta_1 = -\lambda + jw_0 \sqrt{1 - z_0^2}$$

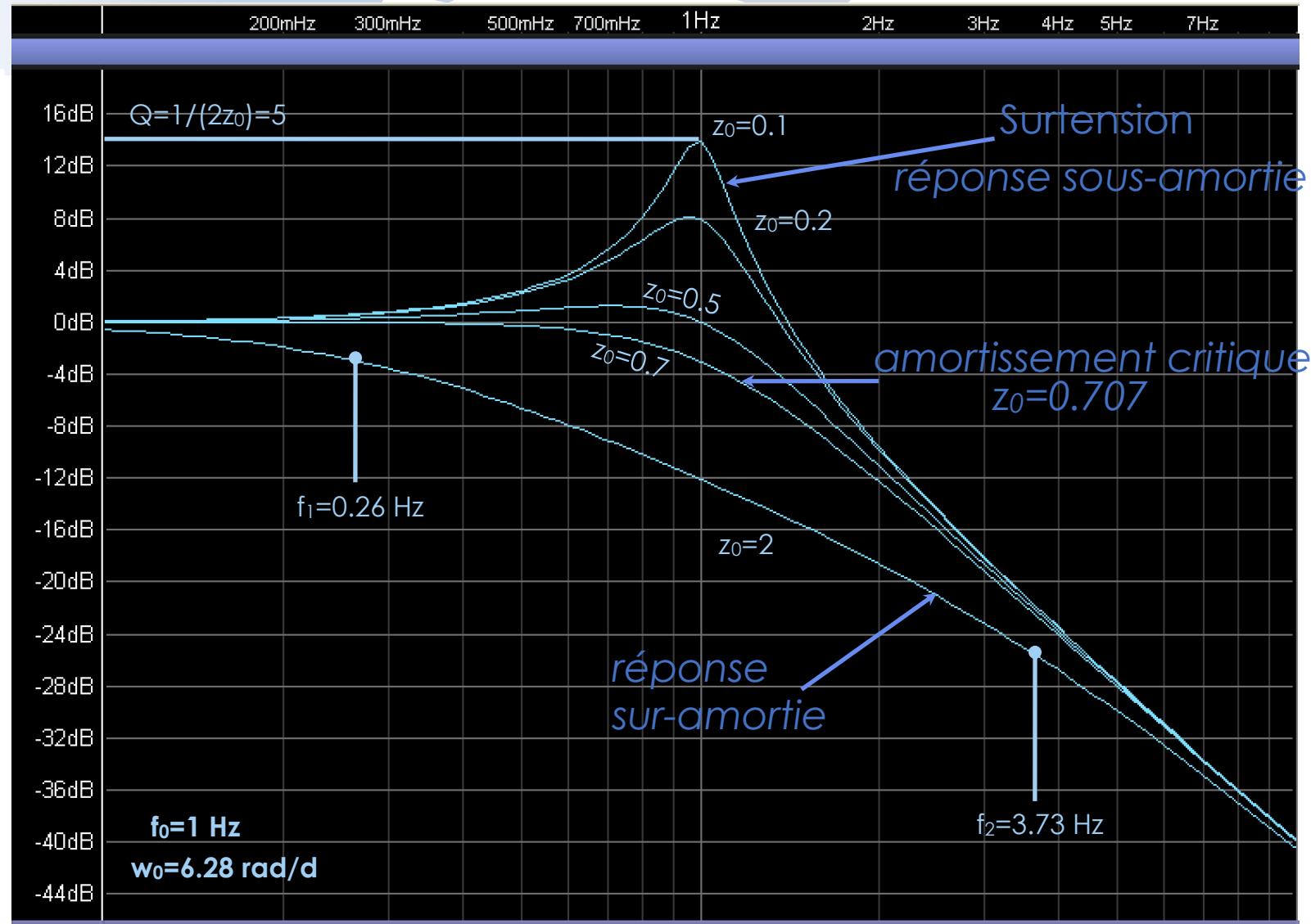
$$= -z_0 w_0 + jw_0 \sqrt{1 - z_0^2}$$

$$= w_0 \left(-z_0 + j\sqrt{1 - z_0^2} \right)$$

$$\delta_2 = w_0 \left(-z_0 - j\sqrt{1 - z_0^2} \right)$$



Circuit RLC: réponse harmonique



Circuit RLC: réponse harmonique

Pour $z_0 > 1$

Simulation pour:

$$w_0 = 1 \text{ krad/s}$$

$$z_0 = 5$$

$$\delta_1 = -\frac{w_0}{2z_0} = -100 \text{ rad/s}$$

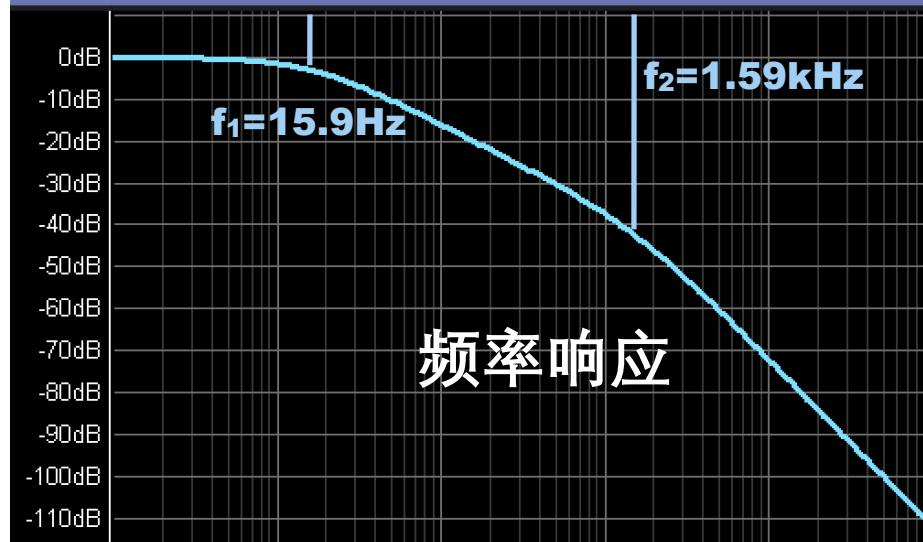
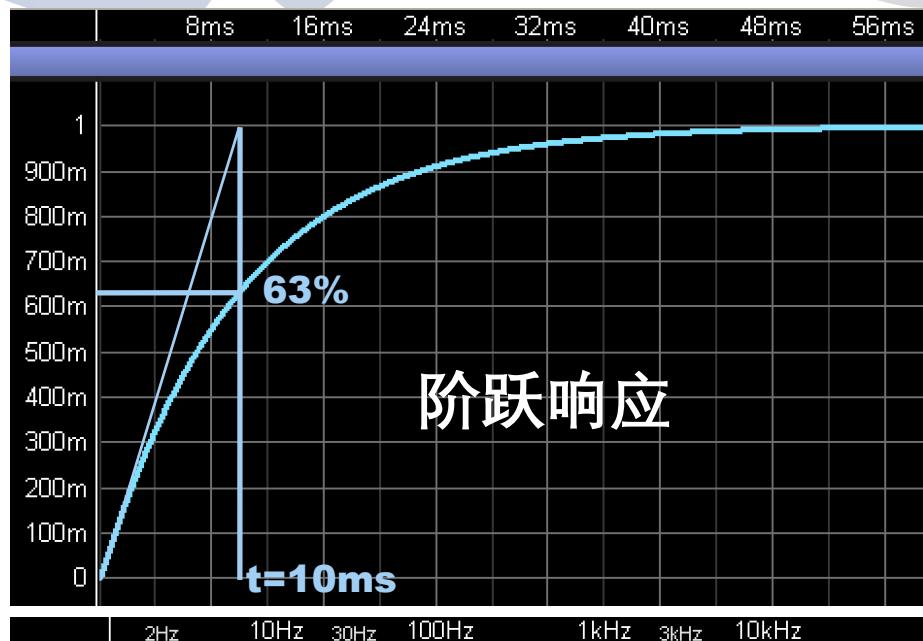
$$\delta_2 = -2z_0 w_0 - \frac{w_0}{2z_0} = -9.9 \text{ krad/s}$$

Fichier Spice:

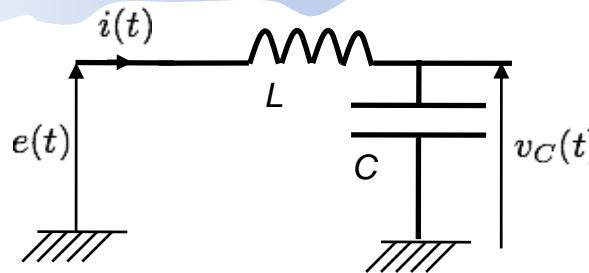
- * Système du second ordre
- * Fonction de transfert définie par bloc Laplace
- S1 RLC 0 IN 0
- + A0=1
- + B0=1 B1='2*Z0/WC' B2='1/(WC*WC)'

- * Tension d'entrée:
- VIN IN 0 PWL 0 0 1p 1 AC 1

- * Définition des paramètres:
- .PARAM WC=1k
- .PARAM Z0=5



Circuit RLC: exemple



Source de tension:

$$e(t) = E \cos(\omega t)$$

Grandeurs complexes e, i, v_C

Impédances complexes:

Condensateur:

Résistance:

Inductance:

$$Z_C = \frac{1}{jC\omega}$$

R

$$Z_L = jL\omega$$

Fonction de transfert:

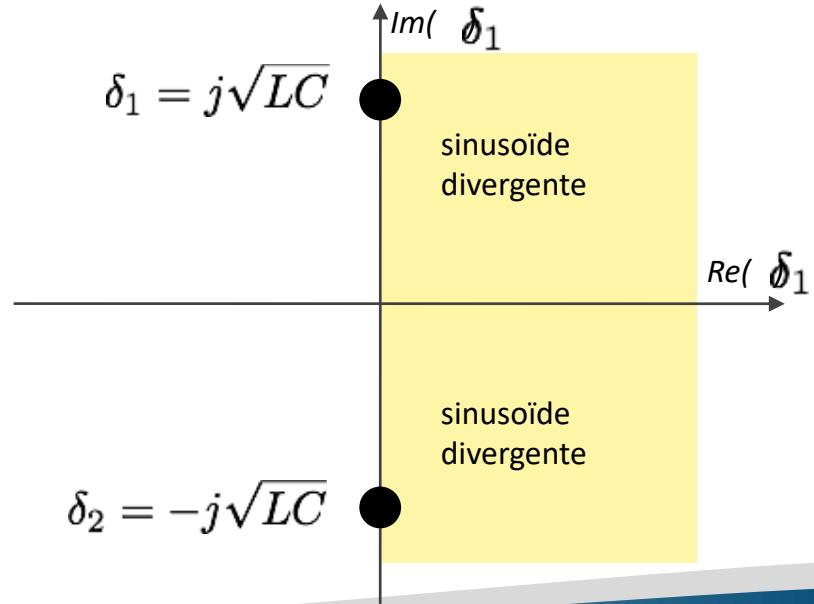
$$H(j\omega) = \frac{1}{1 - LC\omega^2}$$

Détermination des pôles:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{-LC}{(w + \sqrt{LC})(w - \sqrt{LC})} \\ &= \frac{LC}{(jw + j\sqrt{LC})(jw - j\sqrt{LC})} \end{aligned}$$

$$\delta_1 = j\sqrt{LC}$$

$$\delta_2 = -j\sqrt{LC}$$



Circuit RLC: réponse harmonique

Fonction de transfert:

$$H(jw) = \frac{1}{1 - LCw^2}$$

Diagramme asymptotique

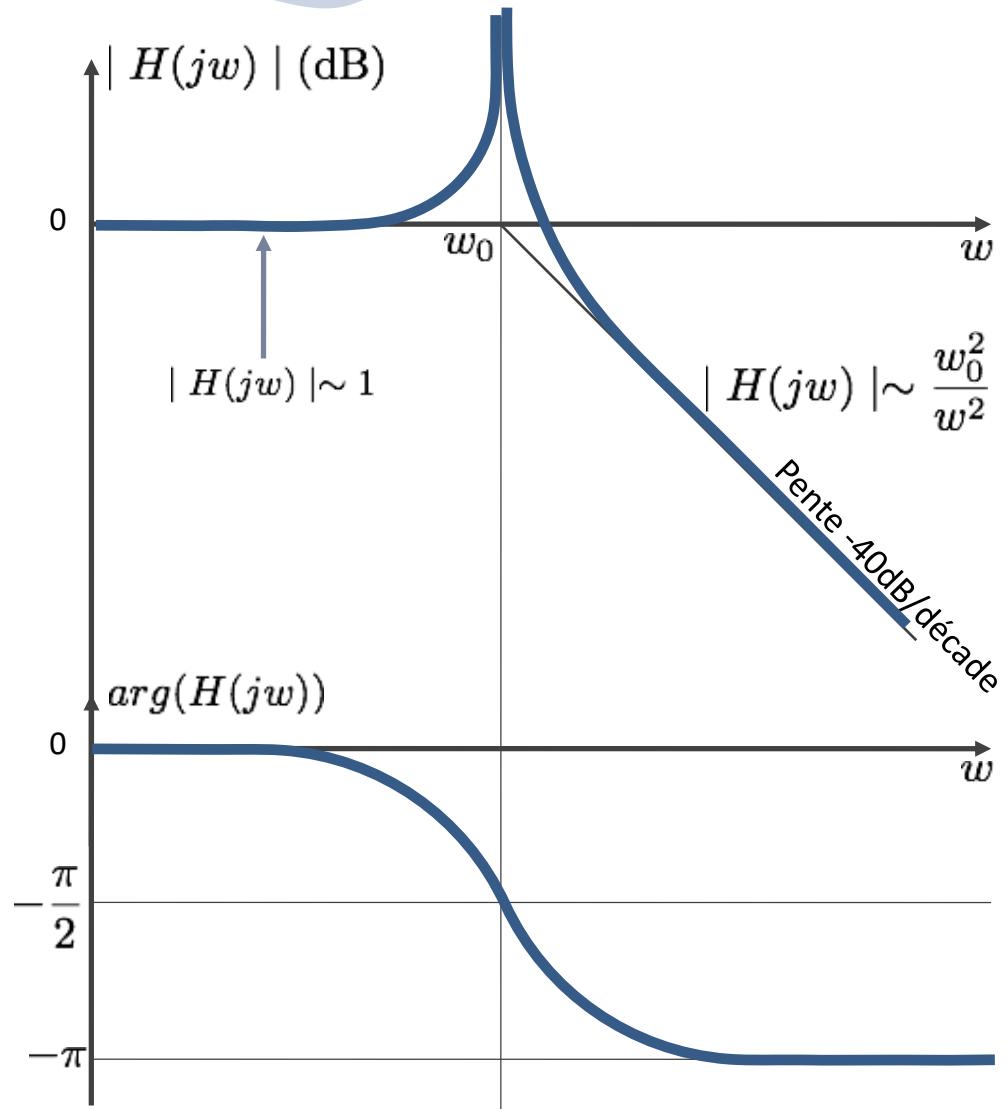
$$w \ll w_0 \rightarrow H(jw) \sim 1$$

$$\begin{aligned} w = w_0 \rightarrow H(jw) &= \frac{1}{j2z_0} \\ &= -j\infty \end{aligned}$$

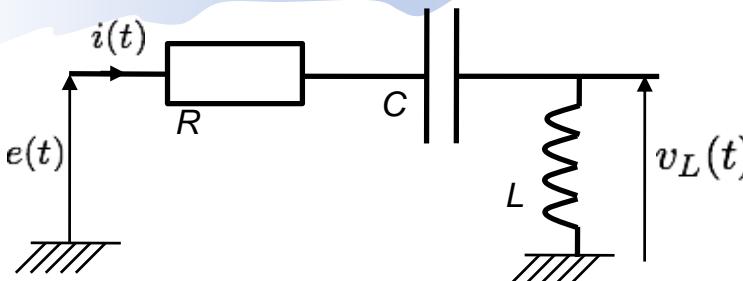
$$w \gg w_0 \rightarrow H(jw) \sim -\frac{w_0^2}{w^2}$$

Facteur de qualité:

$$Q = \frac{1}{2z_0} = \infty$$

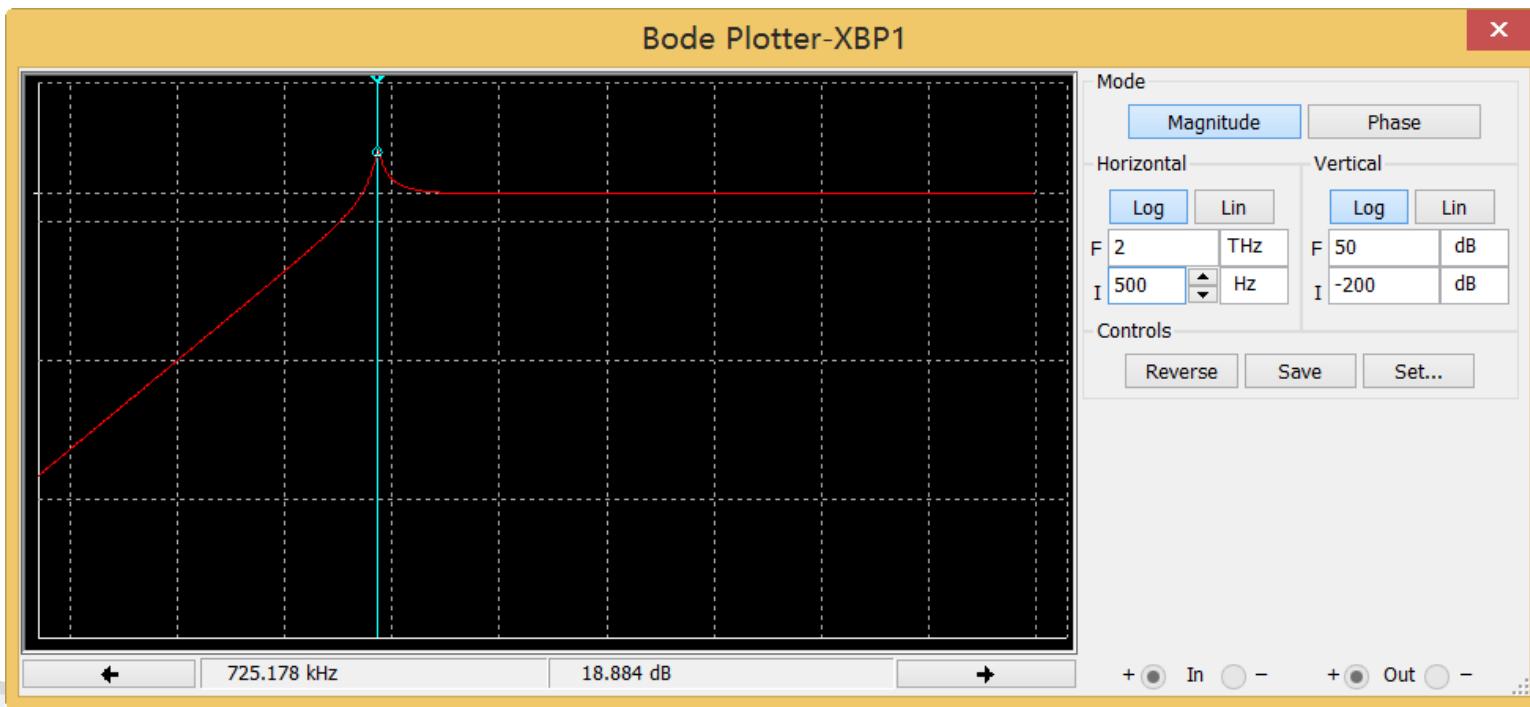
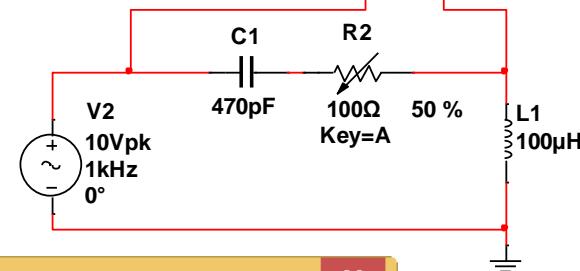
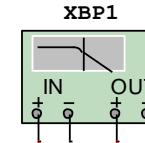


Applications aux filtres

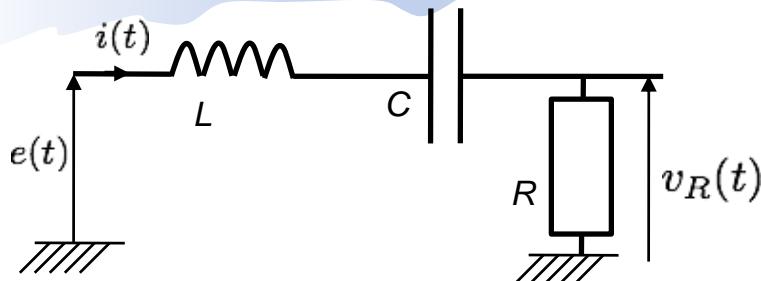


$R = 50\Omega$
 $L = 100\mu H$
 $C = 470\text{pF}$

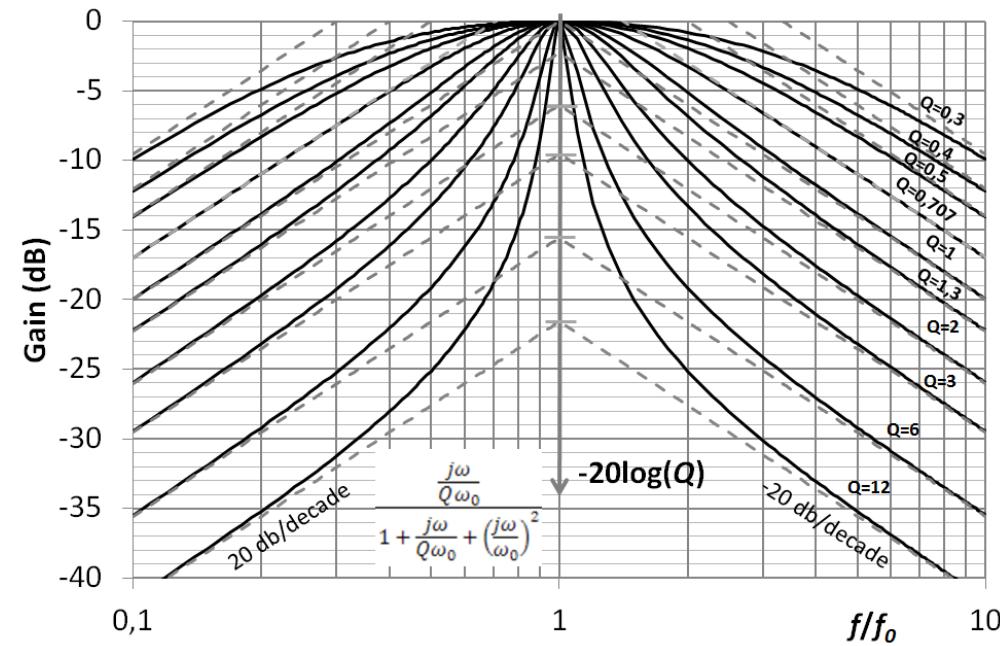
Calculer la fonction de transfert
 Tracer le diagramme asymptotique
 Tracer la réponse temporelle à un échelon

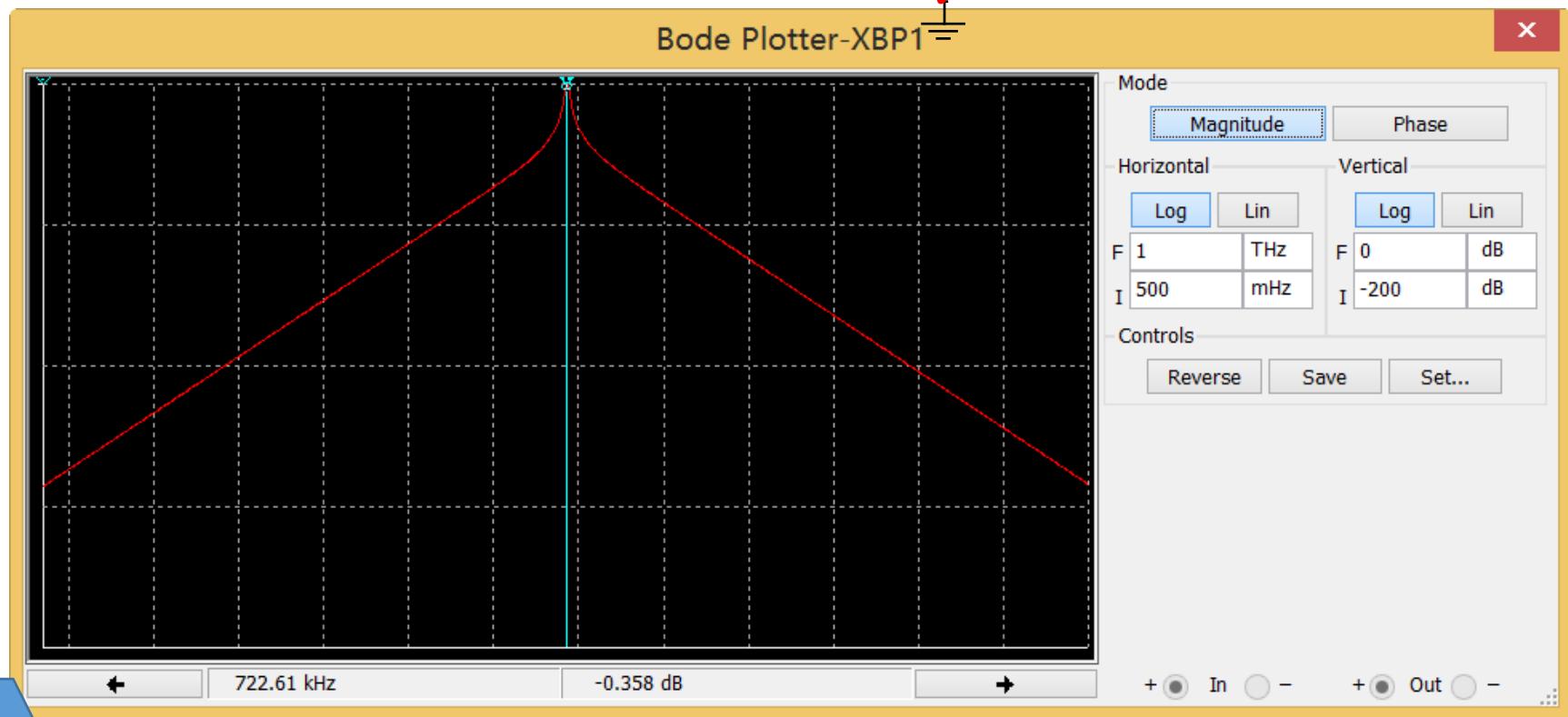
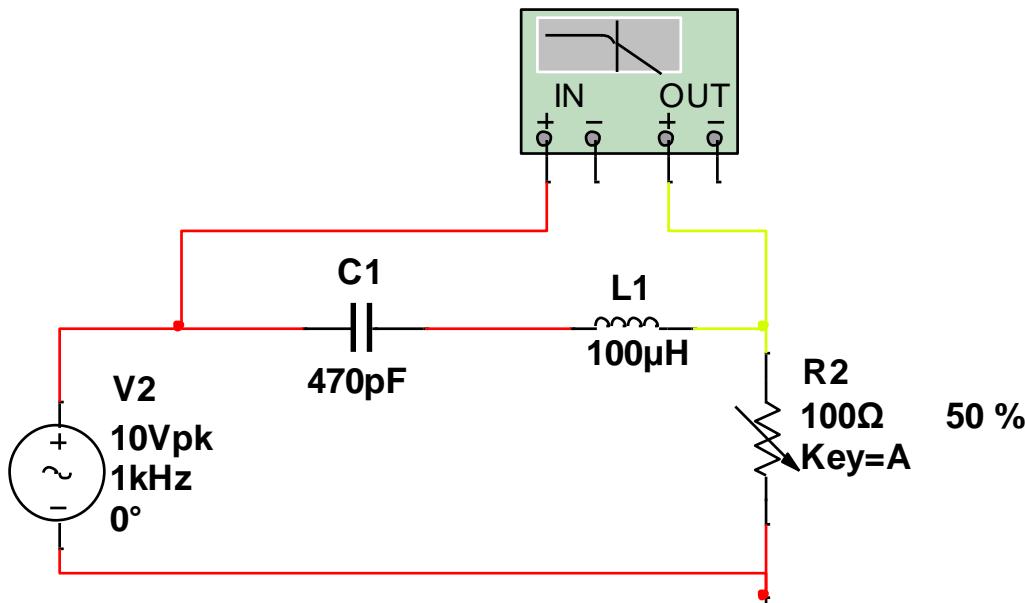


Applications aux filtres

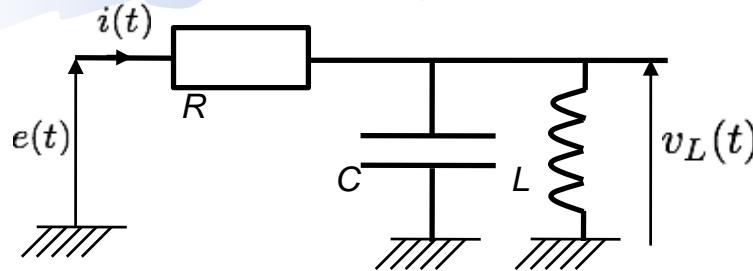


Calculer la fonction de transfert
 Tracer le diagramme asymptotique
 Tracer la réponse temporelle à un échelon





Applications aux filtres



Calculer la fonction de transfert
 Tracer le diagramme asymptotique

