POLYTECH GRENOBLE

Projet AVOSTTI – N° ANR-11-IDFI-0009

Signal and Systems : discrete-time signals

-

Traitement numérique du signal

Xidian University – June 2021

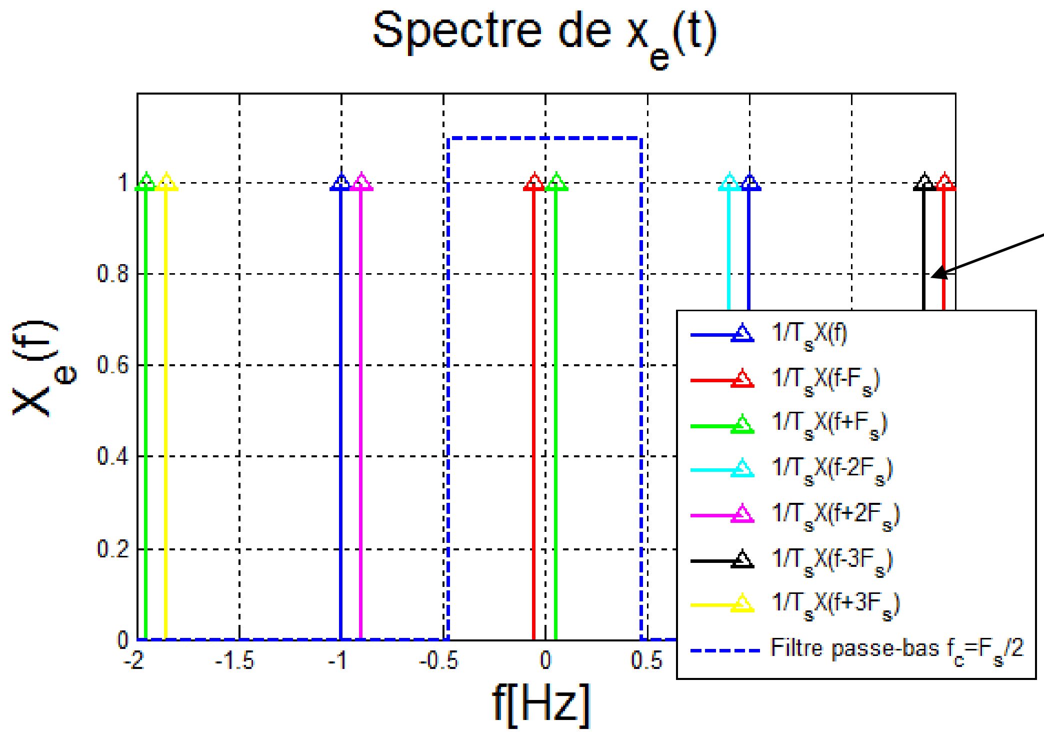
sylvain.toru@univ-grenoble-alpes.fr

Plan

I. Erreurs souvent faites
II. A retenir
III. Bilan de ces 3 semaines

Erreurs souvent faites

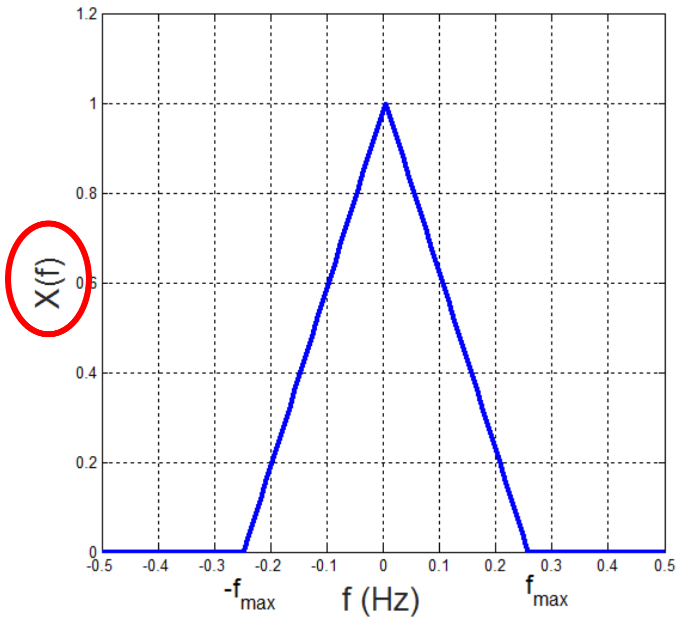
- Bonnes habitudes pour tracer des graphiques
  - **Nom des axes, axes gradués (abscisses ET ordonnées), unités**
  - Nom des grandeurs représentées

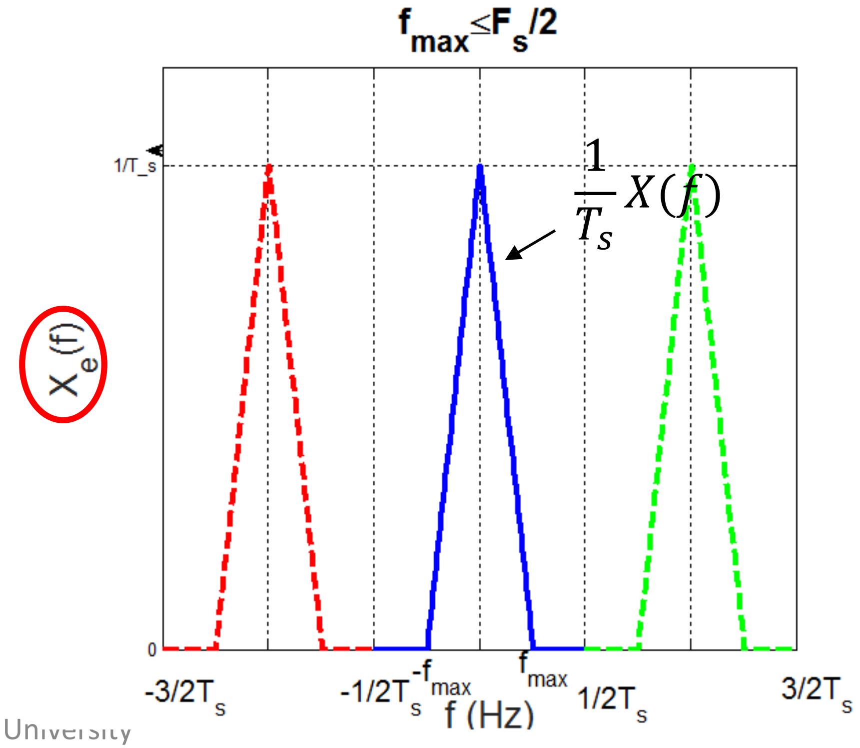


Attention à ne pas l'oublier, même si $3F_s$ ne fait pas partie du graphique, $X(f-3F_s)$ peut apparaitre.

Erreurs souvent faites

- Bonnes habitudes pour tracer des graphiques
  - **Nom des axes, axes gradués (abscisses ET ordonnées), unités**
  - Nom des grandeurs représentées
- Ne pas confondre $X(f)$ et $X_e(f)$





Erreurs souvent faites

- Bonnes habitudes pour tracer des graphiques
  - **Nom des axes, axes gradués (abscisses ET ordonnées), unités**
  - Nom des grandeurs représentées
- Ne pas confondre $X(f)$ et $X_e(f)$
- $\boldsymbol{X_e(f)}$ **est périodique de période** $\boldsymbol{\frac{1}{T_s} = F_s}$
  - Ne pas oublier le facteur $\frac{1}{T_s}$ dans l'expression de $X_e(f)$

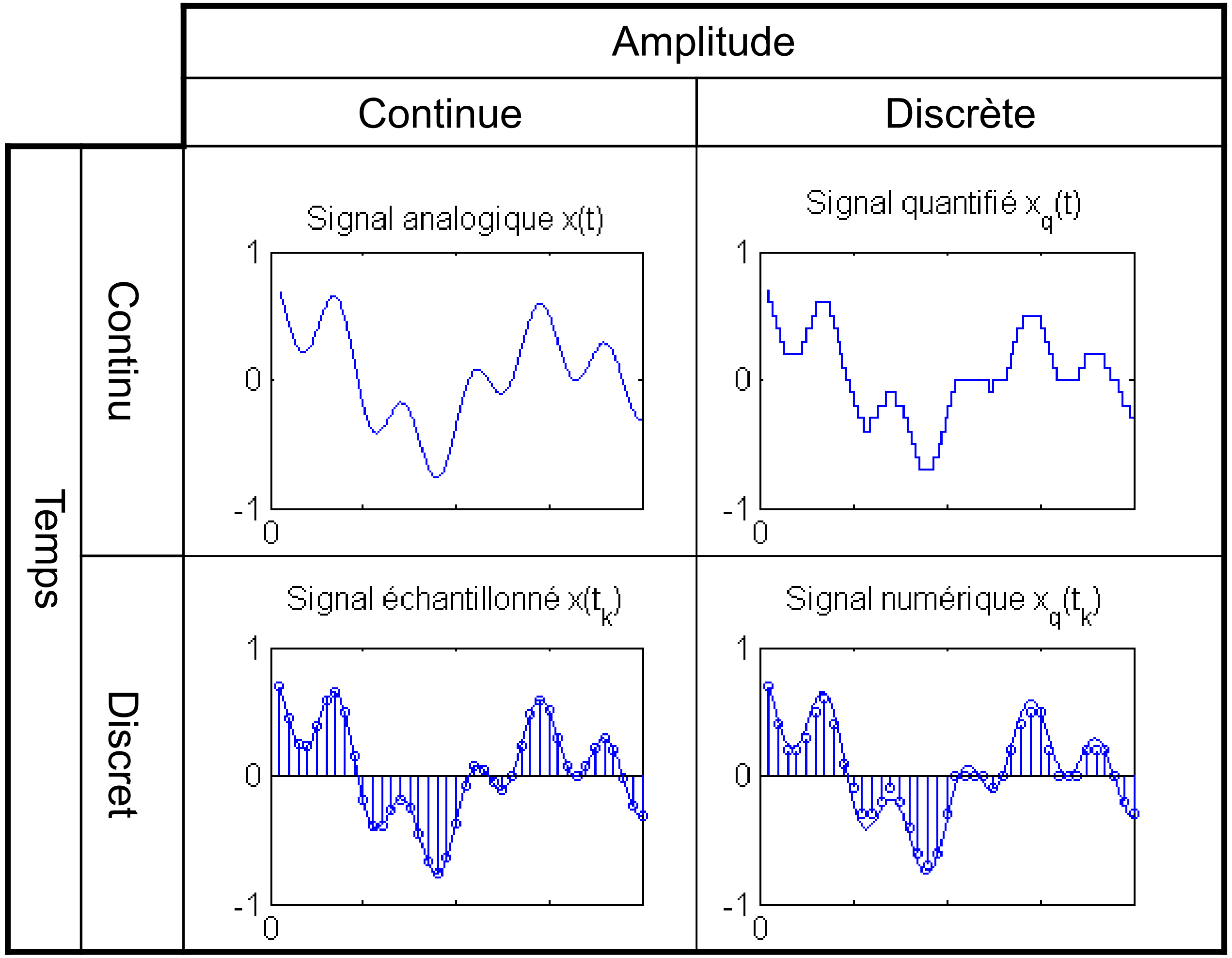
$$X_e(f) = \boldsymbol{\frac{1}{T_s}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

Ceci n'est pas toujours un δ !

Erreurs souvent faites

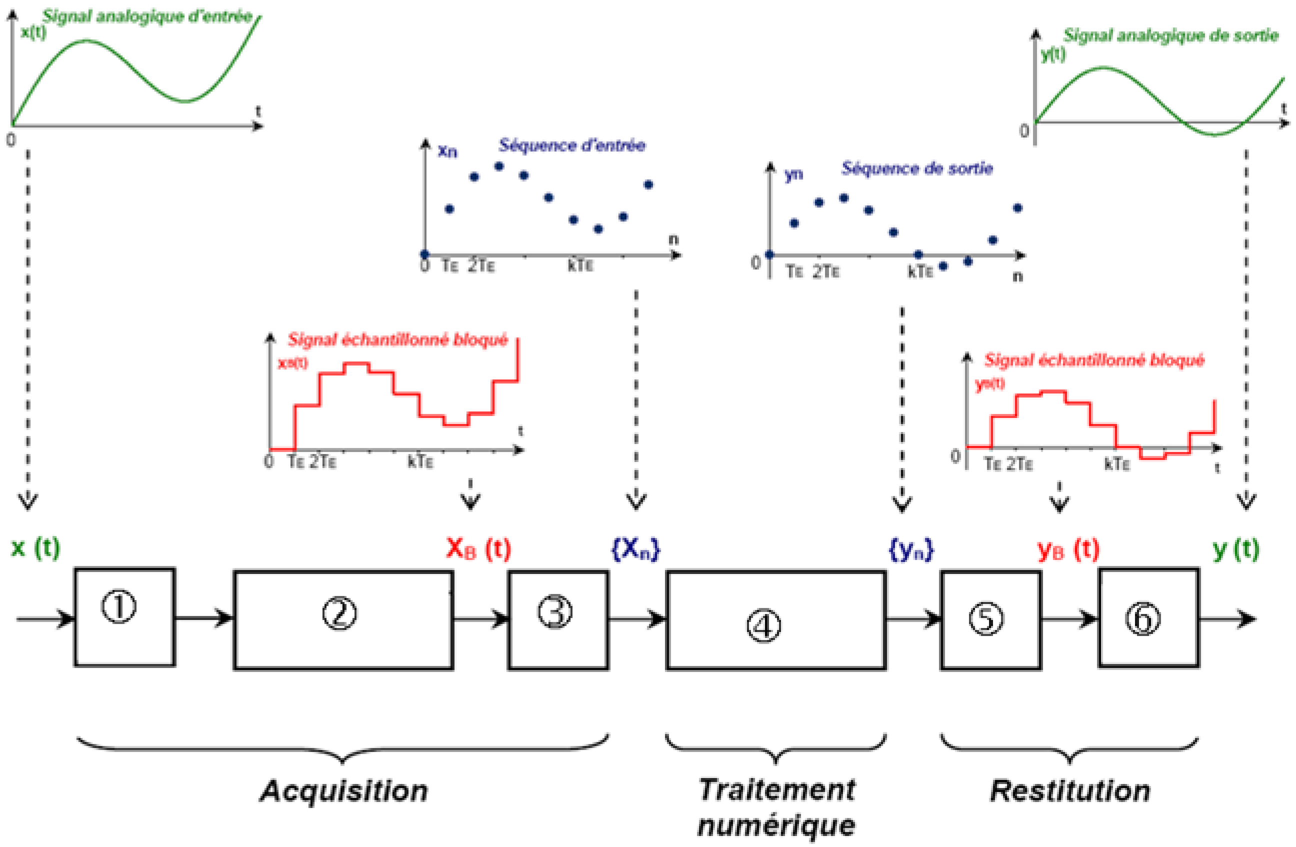
- Bonnes habitudes pour tracer des graphiques
  - Nom des axes, axes gradués (abscisses ET ordonnées), unités
  - Nom des grandeurs représentées
- Ne pas confondre $X(f)$ et $X_e(f)$
- $\boldsymbol{X_e(f)}$ **est périodique de période** $\boldsymbol{\frac{1}{T_s} = F_s}$
  - Ne pas oublier le facteur $\frac{1}{T_s}$ dans l'expression de $X_e(f)$
- Théorème de Shannon : pour ne pas avoir de recouvrement de spectre il faut $F_s > 2f_{max}$
  - f_{max} est la fréquence pour laquelle $X(f > f_{max}) = 0$
  - Elle se lit sur le spectre $X(f)$

II. A retenir


Amplitude
Continue
Discrète
Temps
Continu
Discret
Signal analogique x(t)
Signal quantifié $x_q(t)$
Signal échantillonné $x(t_k)$
Signal numérique $x_q(t_k)$
1
0
-1
0

Comment obtient-on un signal numérique ?

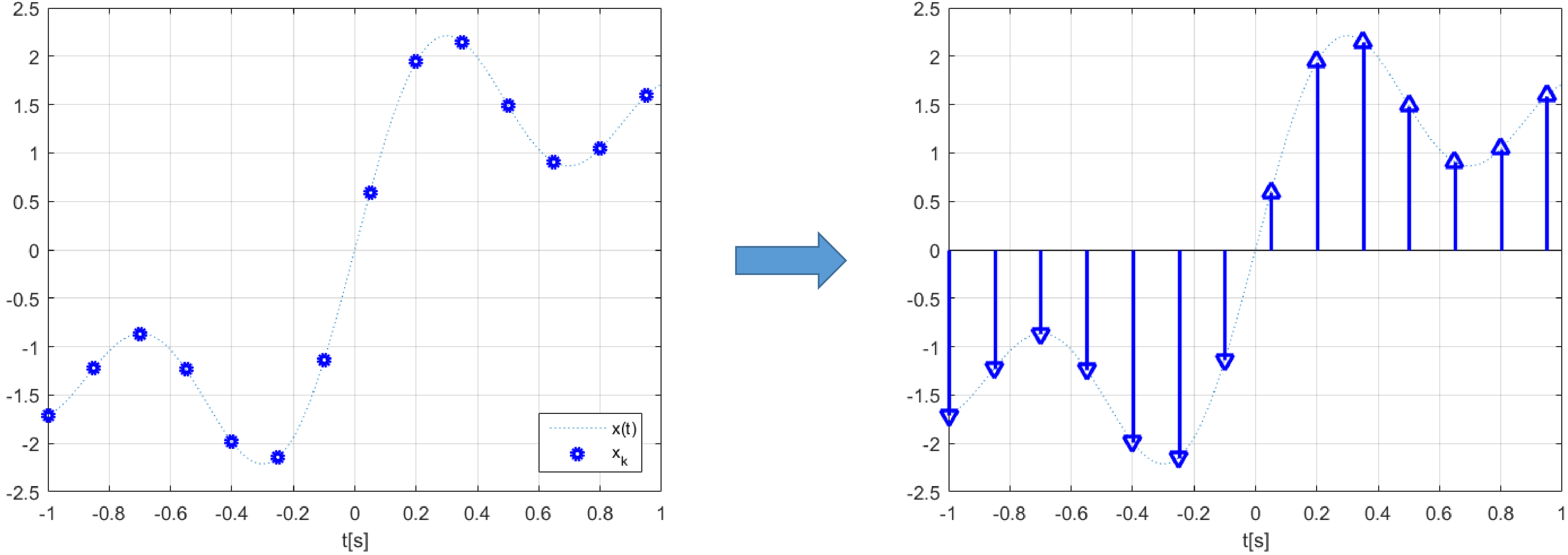
- Chaine de traitement classique:



1. Filtre anti-repliement
2. Echantillonneur bloqueur
3. Convertisseur analogique numérique (ADC)
4. Unité de traitement (CPU,DSP…)
5. Convertisseur numérique analogique (DAC)
6. Filtre de lissage (optionnel)

Source Image : http://lewebpedagogique.com/physiris/category/1ere-annee/page/3/

Comment modéliser un signal échantillonné ?



$$x_e = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s)\delta(t - kT_s) = x.\delta_{T_s}$$

TF d’un signal échantillonné

$$\mathcal{F}(x_e) = \mathcal{F}\left(x.\,\delta_{T_s}\right) \Rightarrow X_e(f) = X(f) * \frac{1}{T_s}\delta_{\frac{1}{T_s}}(f)$$

$$\boxed{X_e(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T_s}\right)}$$

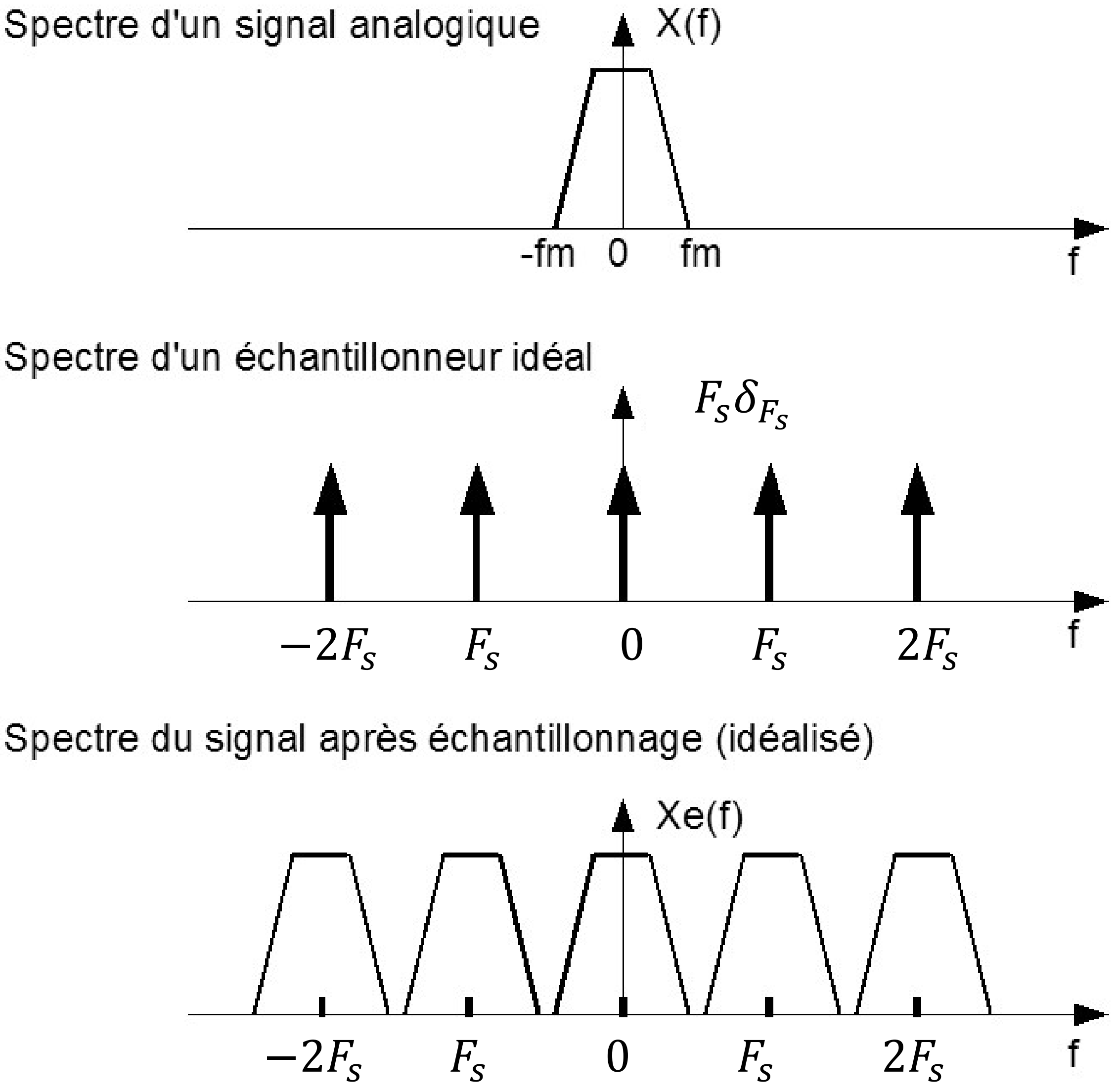
Echantillonner
en temps

Périodiser
en fréquence

La **TF d’un signal $\boldsymbol{x_e(t)}$ échantillonné** à $\boldsymbol{T_s}$ est la **TF du signal analogique $\boldsymbol{x(t)}$ périodisé** de période $\boldsymbol{F_s = \frac{1}{T_s}}$ et affecté d’un facteur $\boldsymbol{\frac{1}{T_s}}$.

TF d'un signal échantillonné

Exemple :



A retenir : Théorème de Shannon

- Un signal $x(t)$ ayant un spectre s'étendant jusqu'à la fréquence maximale f_m est entièrement décrit par ses échantillons $x(kT_s)$ prélevés avec une fréquence d'échantillonnage F_s telle que:

$$\boxed{F_s > 2 \times f_m}$$

La transformation en Z

- A retenir:

  - Savoir calculer la réponse fréquentielle d’un système de convolution avec $z = e^{j2\pi f T_s}$ (voir la fonction *freqz* de Matlab)

  - Savoir relier TZ et équations aux différences pour pouvoir calculer la sortie d’un système de convolution (voir la fonction *filter* de Matlab)

$$y_k + a_1 y_{k-1} + \cdots + a_{n_a} y_{k-n_a} = b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \ldots + b_{n_b} x_{k-n_b}$$

$$\Leftrightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{n_b} z^{-n_b}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n_a} z^{-n_a}}$$

Transformée de Fourier Discrète

$$\forall f \in \left[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2}\right], X(f) = T_s \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2\pi j k T_s f}$$

- Calcul des valeurs de $X(f)$ nous intéressant :

$$\forall n \in \left\{-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1\right\}, X\left(f = \frac{n}{\mathrm{NT_s}}\right) = \mathrm{T_s} \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2\pi j \frac{kn}{N}}}_{X_n}$$

Transformée de Fourier Discrète

- Pour résumer:

$$\begin{cases} \forall n \in \left\{-\frac{N}{2}, \dots, -1\right\}, X\left(f = \frac{n}{\mathrm{NT_s}}\right) = \mathrm{T_s} X_{n+N} \\ \forall n \in \left\{0, \dots, \frac{N}{2} - 1\right\}, X\left(f = \frac{n}{\mathrm{NT_s}}\right) = \mathrm{T_s} X_n \end{cases}$$

- Les points du spectre de $X(f)$ sont calculés avec un pas de $\frac{1}{NT_s} = \frac{1}{T_a}$
- La largeur de l'intervalle fréquentiel de calcul est $F_s = \frac{1}{T_s}$
- N échantillons temporels x_k → N points du spectre X

Transformée de Fourier Discrète

En temporel :

$t = 0$ $\qquad$ $t = (N-1)T_s$

$\{x_k\}_{k\in\{0,..,N-1\}}$ $\qquad$ $x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_k \quad \dots \quad x_{N-2} \quad x_{N-1}$

$T_s \qquad T_s \qquad T_s$

T_a

En fréquentiel :

$f = 0$ $\qquad$ $f = (N-1)/T_a$

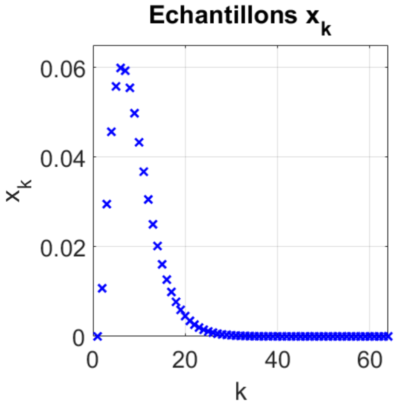
$\{X_n\}_{n\in\{0,..,N-1\}}$ $\qquad$ $X_0 \quad X_1 \quad X_2 \quad \dots \quad X_n \quad \dots \quad X_{N-2} \quad X_{N-1}$

$1/T_a \qquad 1/T_a \qquad 1/T_a$

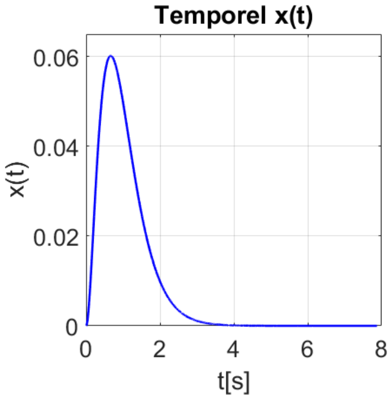
$1/T_s$

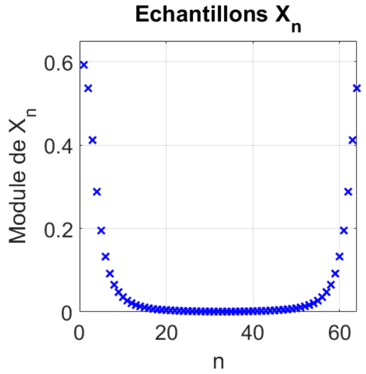
Utilisation de la TFD

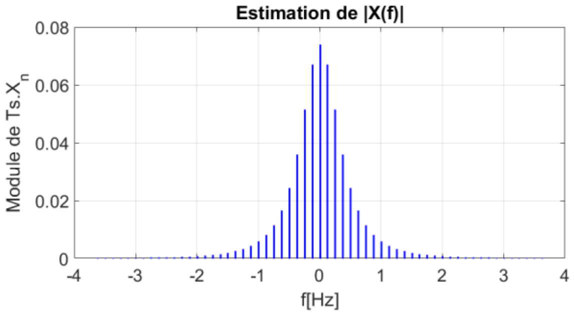
Echantillonnage



Calcul de la TFD







Estimation du spectre

III. Bilan de ces 3 semaines

- Si vous avez des remarques ou des questions :

  sylvain.toru@univ-grenoble-alpes.fr