Année 2020-2021

Nom :

Prénom :

N° étudiant :

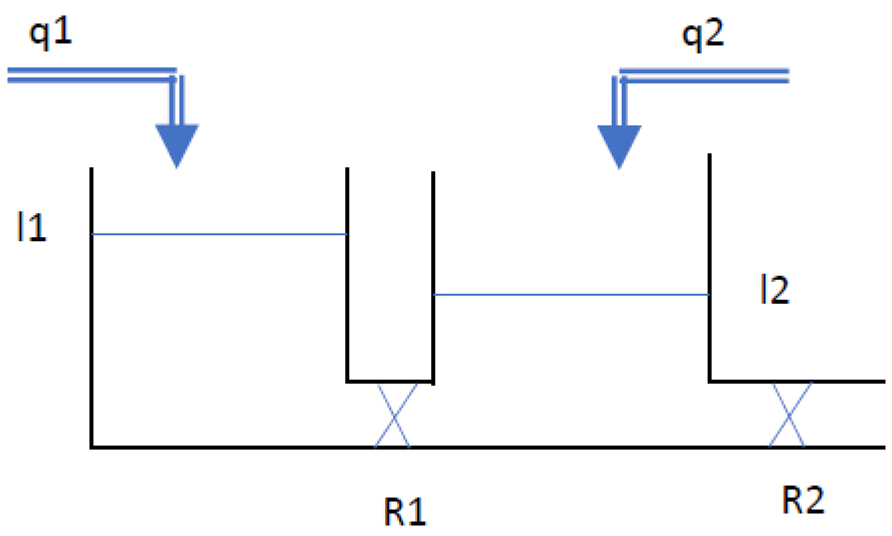
Examen
Représentation d'état
Durée : 2 heures

Instructions:
- **Documents autorisés**
- **Calculatrice autorisée**
- **Dictionnaire papier autorisé**

Une erreur sur une réponse avec case à cocher coûte -1 point.
Pas de réponse coûte 0 point.

1.Exercice 1-

Soit le système composé de 2 bacs communicants, alimentés respectivement par les débits q1 et q2. Le bac 1 est de section S1, sa restriction de sortie vaut R1, le bac 2 est de section S2, sa restriction de sortie vaut R2.



On prendra comme valeurs numériques $S1=1m^2$, $S2=1\ m^2$, $R1=0.5\ sm^{-2}$, $R2=1\ sm^{-2}$

1.1. Montrer que le système peut être représenté par la représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

Justification :

$$S_1 \frac{dl_1}{dt} = q_1 - \frac{l_1 - l_2}{R_1}$$

$$S_2 \frac{dl_2}{dt} = q_2 + \frac{l_1 - l_2}{R_1} - \frac{l_2}{R_2}$$

$$\Rightarrow \frac{dl_1}{dt} = q_1 - 2l_1 + 2l_2$$

$$\frac{dl_2}{dt} = q_2 + 2l_1 - 3l_2$$

Let $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = X$, $\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = U$

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} U$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -2 \\ -2 & \lambda+3 \end{vmatrix} \overset{\Delta}{=} 0$$

1.2. Le système est-il stable ?

☐ Oui

☐ Non

$$(\lambda+2)(\lambda+3) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

1.3. Le système est-il oscillant ?

☐ Oui

☐ Non

$$\lambda_i = Re(\lambda_i) < 0$$

Justification :

1.4. On suppose que l'entrée du système est q1. Le système est-il commandable avec q1 ?

☐ Oui

☐ Non

Justification :

$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\Gamma = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\text{rank}(\Gamma) = 2 = n$

1.5. On suppose que l'entrée du système est q2. Le système est-il commandable avec q2 ?

☐ Oui

☐ Non

Justification :

$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\Gamma = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

$\text{rank}\, \Gamma = 2 = n$

1.6. On suppose que la sortie y est l2. Le système est-il observable avec l2 ?

☐ Oui

☐ Non

Justification :

$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\Omega = [C \; ; \; CA] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

$\text{rank}\, \Omega = 2 = n$

1.7. L'entrée du système est q2. Sa sortie est l2. Que vaut fonction de transfert $\frac{L_2}{Q_2} = F(p)$? (mettre une croix sous la bonne réponse).

$F(p) = \dfrac{2}{p^2 + 5p + 2}$	$F(p) = \dfrac{p}{p^2 + 5p + 2}$	$F(p) = \dfrac{2 + p}{p^2 + 5p + 2}$
		×

Justification :

$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

$FT = C(pI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p+2 & -2 \\ -2 & p+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \dfrac{1}{(p+2)(p+3) - 4} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p+3 & 2 \\ 2 & p+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \dfrac{p+2}{p^2 + 5p + 2}$

1.8. On applique sur q2 un échelon d'amplitude 0.1 m^3/s. Quelle est la hauteur d'eau, l2, atteinte par le système en régime permanent ?

l2= 0.1 $\quad F(0) = 1 \Rightarrow$ régime permanent, $l_2 = 1 \times q_2 = 0{,}1$

Justification :

$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} X = l_2$ $\quad FT = \dfrac{Y}{U} = \dfrac{p+2}{p^2+5p+2} \Rightarrow Y = U \dfrac{p+2}{p^2+5p+2} = \dfrac{0.1\,(p+2)}{p(p^2+5p+2)}$

$U = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} X = q_2$

$\mathcal{L}\, U = \dfrac{0.1}{p}$

$$y = \frac{0.1(p+2)}{p(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{0.1}{p} + \frac{-0.086}{p+0.44} + \frac{-0.0136}{p+4.56}$$

$$l_2 = 0.1 - 0.086\, e^{-0.44t} - 0.0136\, e^{-4.56t}$$

1.9. On veut construire un observateur d'état permettant d'estimer le niveau l1 du bac 1. On veut fixer les deux valeurs propres de l'observateur à -10. Dans ce cas, que vaut la matrice de gain L de l'observateur d'état ? (mettre une croix sous la bonne réponse).

$L = \begin{bmatrix} 34 \\ 15 \end{bmatrix}$	$L = \begin{bmatrix} 15 \\ 31 \end{bmatrix}$	$L = \begin{bmatrix} 35 \\ 15 \end{bmatrix}$
X		

Justification :

$$A - LC = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & l_1 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2-l_1 \\ 2 & -3-l_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - (A-LC)) = \begin{vmatrix} \lambda+2 & -2+l_1 \\ -2 & \lambda+3+l_2 \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda+3+l_2) + 2(l_1-2)$$

$$= \lambda^2 + (5+l_2)\lambda + 2 + 2l_2 + 2l_1 \triangleq (\lambda+10)^2$$

$$= \lambda^2 + 20\lambda + 100 \qquad l_1 = 34$$

$$l_2 = 15$$

$$\dot{\hat{x}}_1 = -2\hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 + 34(x_2 - \hat{x}_2)$$

1.10. Donner le schéma analogique de l'observateur

$$\dot{\hat{x}}_2 = 2\hat{x}_1 - 3\hat{x}_2 + q_2 + 15(x_2 - \hat{x}_2)$$