Année 2018-2019

**Nom :**

**Prénom :**

**N° étudiant :**

---

**Examen**
**Représentation d'état**
**Durée : 2 heures**

**Instructions:**
- **Documents autorisés**
- **Calculatrice autorisée**
- **Dictionnaire papier autorisé**

*Une erreur sur une réponse avec case à cocher coûte -1 point.*
*Pas de réponse coûte 0 point.*

$$X_1 = \frac{U}{p+1} \Rightarrow \frac{dx_1}{dt} = -X_1 + U$$

$$X_2 = \frac{X_1}{p+1} \Rightarrow \frac{dx_2}{dt} = -X_2 + X_1$$

$$X_3 = \frac{U}{p+2} \Rightarrow \frac{dx_3}{dt} = -2X_3 + U$$

$$X_4 = \frac{X_3}{p+2} \Rightarrow \frac{dx_4}{dt} = -2X_4 + X_3$$

---

**Exercice 1-** Soit la fonction de transfert suivante :

$$F(p) = \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p+2)^2}$$

- Donner la représentation d'état sous forme de Jordan de ce système :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$

$$\boldsymbol{y} = [\; 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \;]\mathbf{X}$$

$$F = \frac{2p^2 + 6p + 5}{p^4 + 6p^3 + 13p^2 + 12p + 4}$$

- Donner la représentation d'état sous forme de commandabilité de ce système :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -4 & -12 & -13 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}[u]$$

$$\boldsymbol{y} = [\,5 \quad 6 \quad 2 \quad 0\,]\mathbf{X}$$

**Exercice 2-** Soit la représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 1]X$$

Soit la matrice de passage

$$T = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

Montrer que $V1 = \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_1 = -1$

$$AV_1 = \lambda_1 V_1 \Rightarrow \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-1\\ -1\\ 0\end{bmatrix} = \lambda_1\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = -1$$

Montrer que $V2 = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_2 = -2$

$$AV_2 = \lambda_2 V_2 \Rightarrow \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ -2\\ 0\end{bmatrix} = \lambda_2\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}, \lambda_2 = -2$$

$$AV_3 = \lambda_3 V_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \lambda_3 = 1$$

Montrer que $V3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_3 = 1$

L'inverse de T vaut

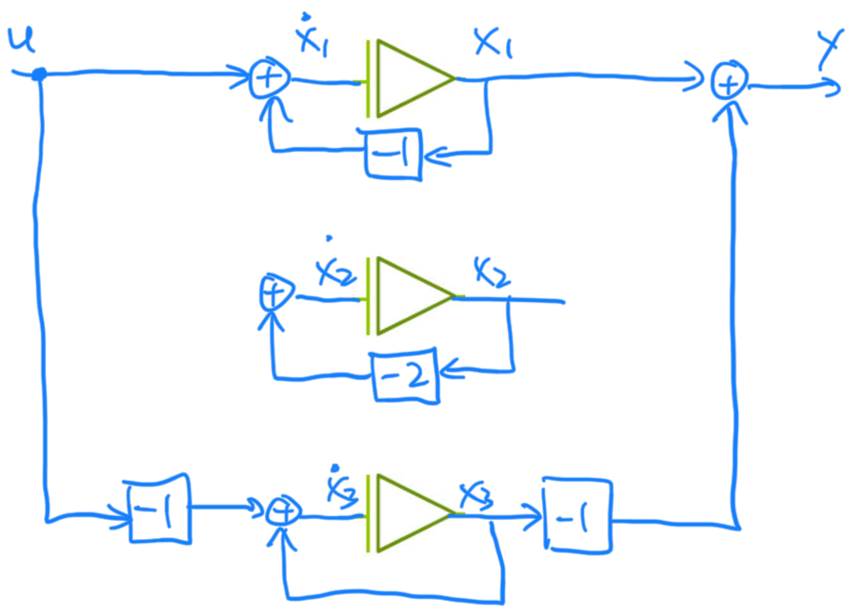
$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Donner la représentation d'état du système dans la base où la matrice A est diagonale.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} [u]$$

$$\boldsymbol{y} = [\quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad ]\mathbf{X}$$

Donner le schéma analogique du système dans la nouvelle base.



- Le système est-il commandable ?

  ☐ Oui

  ☐ Non

$\beta_i \neq \beta_j$ , $b_i \neq 0$

✓ ×

Pourquoi ?

- Le système est-il observable ?

  ☐ Oui

  ☐ Non

$\beta_i \neq \beta_j$ | $c_i \neq 0$

✓ ×

Pourquoi ?

Quel est l'ordre d'e la réalisation minimale ? $=2$

$$\frac{Y}{U} = C'(pI - A')^{-1}B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{p+1} & & \\ & \frac{1}{p+2} & \\ & & \frac{1}{p-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{p+1} \frac{1}{p-1} = \frac{1}{p^2-1}$$ l'ordre $=2$

**Exercice 3-** Soit la représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} X$$

Calculer le gain L de l'observateur tel que la dynamique de l'observateur ait comme valeurs propres $\lambda_1$=-4, $\lambda_2$=-4 ;

$L_1$= 9

$L_2$= 6

$$[A - LC] = \begin{bmatrix} -1 & -L_1 \\ 1 & -1-L_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - (A - LC)) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & L_1 \\ -1 & \lambda+1+L_2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda+1+L_2) + L_1$$

$$= (\lambda+4)^2$$

$$\lambda^2 + (2+L_2)\lambda + (1+L_1+L_2) = \lambda^2 + 8\lambda + 16$$

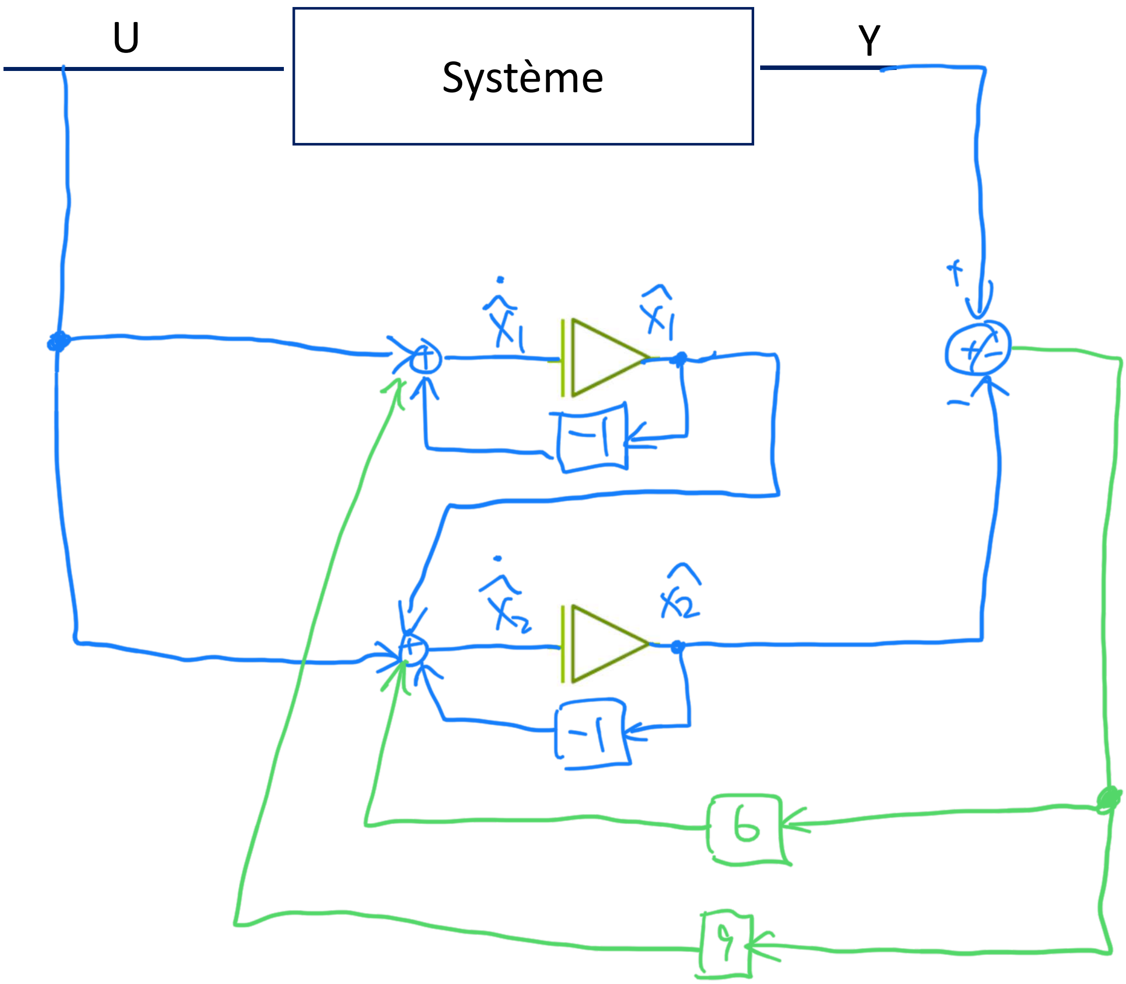
$2 + L_2 = 8$ $L_1 = 9$

$1 + L_1 + L_2 = 16$ $L_2 = 6$

---

---

Donner le schéma analogique de l'observateur




**Exercice 4-** Soit la représentation d'état suivante :

$$\begin{bmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=[1 \quad 0]X$$

- Le système est-il commandable ?

☐ Oui $\Gamma = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ rank $\Gamma = 2 = n$

☐ Non

Pourquoi ?

* Le système est-il asymptotiquement stable ?

$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda = 0$

☐ Oui

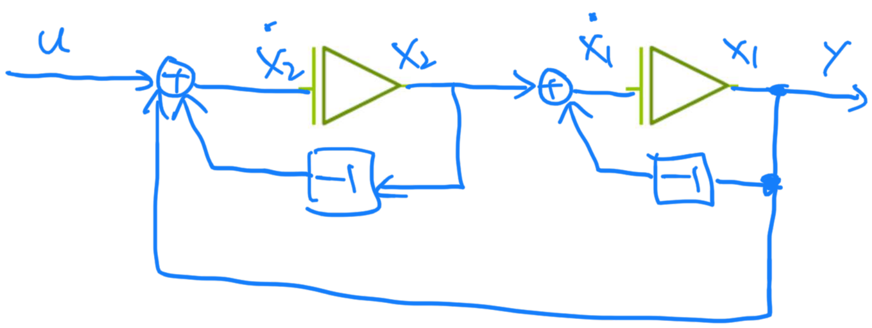
☐ Non

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -2$

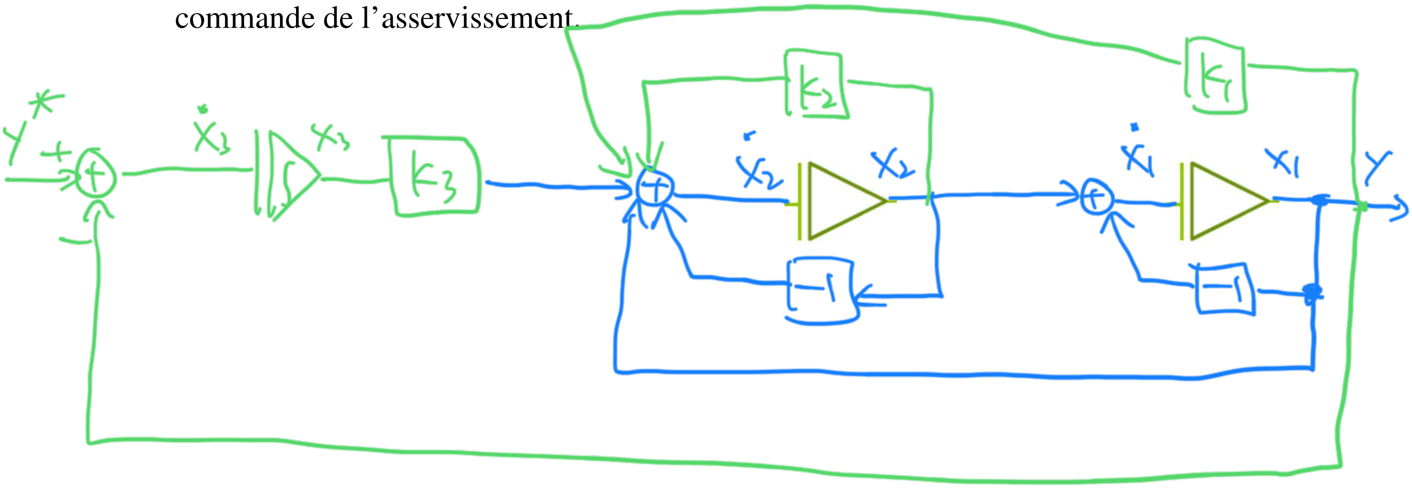
Pourquoi ?

$Re(\lambda_i) < 0$

Donner le schéma analogique du système.



- On veut réaliser un asservissement de la sortie de ce système à une consigne y*. Tracer le schéma de commande de l'asservissement.




- Donner la représentation d'état du système en boucle ouverte, en intégrant la consigne y* comme entrée.

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [u] + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [y^*]$$

- Calculer le retour d'état pour que le système en boucle fermée ait comme valeurs propres (-1, -1, -1).

$k_1=$ -2

$k_2=$ -1

$k_3=$ 1

$$A+BK=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1+k_1 & k_2-1 & k_3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I-(A+BK))=\begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ -1-k_1 & \lambda-k_2+1 & -k_3 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)(\lambda-k_2+1)\lambda+k_3-\lambda(k_1+1)$$

$$=\lambda^3+(2-k_2)\lambda^2+(-k_2-k_1)\lambda+k_3$$

$$=\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1$$

$k_1=-2$

$k_2=-1$

$k_3=1$