Projet AVOSTTI – N° ANR-11-IDFI-0009

Signal and Systems : discrete-time signals

-

Traitement numérique du signal

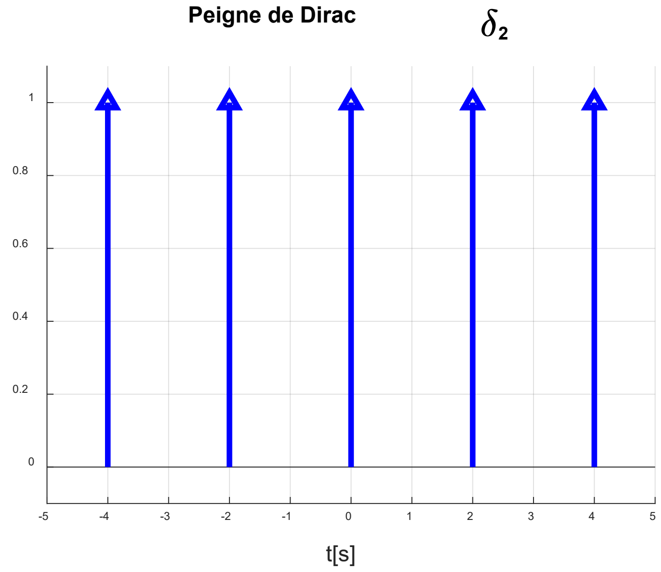
Xidian University – March 2021

rl@xidian.edu.cn

Rappels de traitement du signal

- Peigne de Dirac δ_{T_e}

$$\delta_{T_e} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$



- Quelques transformées de Fourier

$$\mathcal{F}[rect] = sinc$$

$$\mathcal{F}[\delta] = 1$$

$$\mathcal{F}[\cos(2\pi f_0 t)] = \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}$$

Rappels de traitement du signal

- Quelques propriétés importantes :

	Fonction (représentation temporelle)	**Transformée de Fourier (représentation fréquentielle)**
Convolution	$x(t)y(t)$	$X(f) * Y(f)$
Convolution	$x(t) * y(t)$	$X(f)Y(f)$
Linéarité	$ax(t) + by(t)$	$aX(f) + bY(f)$
Changement d'échelle	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|} X\left(\frac{f}{a}\right)$
Translation sur t	$x(t-\tau)$	$X(f)\exp(-j2\pi f\tau)$

Rappels de traitement du signal

- Quelques propriétés importantes :
  - on pourra retenir : « La transformée de Fourier d’une fonction périodique est un spectre de raies *et inversement »*
  - on pourra retenir : « *Une fonction large en temps (représentation temporelle) est étroite en fréquence (représentation fréquentielle) et inversement »*

Plan du cours

I. Rappels de traitement du signal

II. Signaux échantillonnés

1. Pourquoi des signaux numériques ?
2. Comment modéliser un signal échantillonné ?
3. TF d'un signal échantillonné
4. Théorème de Shannon
5. Reconstruction du signal continu

III. Signaux numériques et transformée de Fourier Discrète

IV. Conversion analogique numérique et bruit de quantification

Du temps continu au temps discret

- Pourquoi des signaux numériques ?
- Comment modéliser mathématiquement un signal discret ?
- Comment définit-on la transformée de Fourier d'un signal discret ? Quel est son lien avec celle du signal continu correspondant ?
- Comment échantillonner correctement un signal analogique ?
- Quelles sont les limites de cette représentation ?

1. Pourquoi des signaux numériques ?

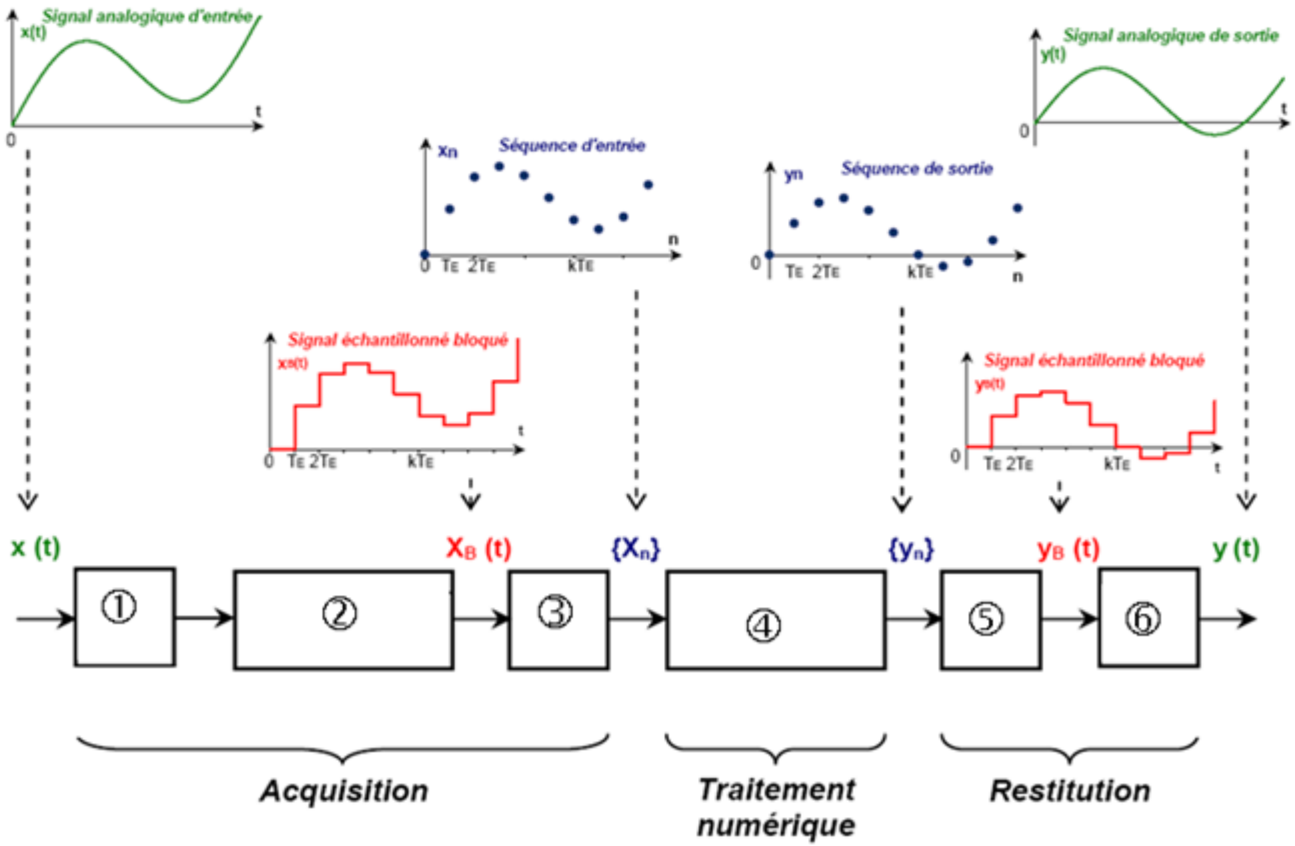
- De plus en plus, ce sont des ordinateurs ou des calculateurs dédiés qui réalisent le traitement du signal
  - Avantages:
    - Immunité au bruit lors du traitement,
    - Facilité de régler/paramétrer l'unité de traitement → prototypage rapide,
    - Fiable dans le temps (pas de dérives).
  - Inconvénients:
    - La numérisation peut dégrader le signal (échantillonnage, quantification),
    - Temps de traitement

Domaines d’utilisation

- Télécommunications
  - Codage de la parole, TV numérique, cryptage et protection, compression et transmission d’images, téléphonie cellulaire…
- Biomédical
  - Electrophysiologie (ECG, EEG…), échographie doppler
- Automobile
  - injection électronique, ABS
- Musique
  - Synthétiseurs, mélangeurs, enregistrements …
- Graphisme et imagerie
  - Reconnaissance de forme, restauration d’images, animation…

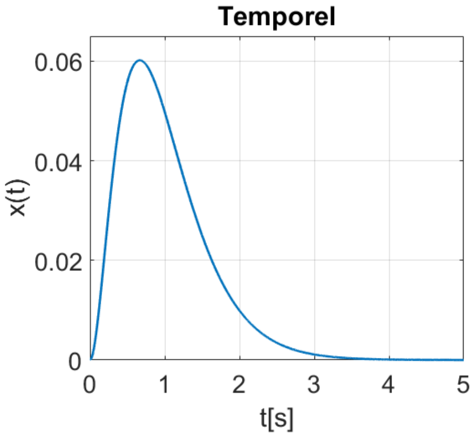
Comment obtient-on un signal numérique ?

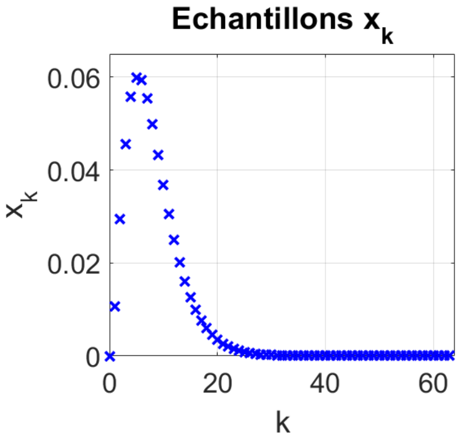
- Chaine de traitement classique:



1. Filtre anti-repliement
2. Echantillonneur bloqueur
3. Convertisseur analogique numérique (ADC)
4. Unité de traitement (CPU,DSP…)
5. Convertisseur numérique analogique (DAC)
6. Filtre de lissage (optionnel)

Source Image : http://lewebpedagogique.com/physiris/category/1ere-annee/page/3/



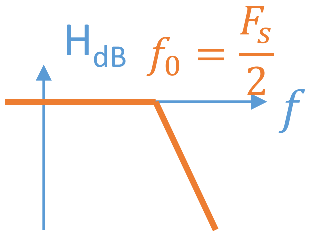


Filtre anti repliement

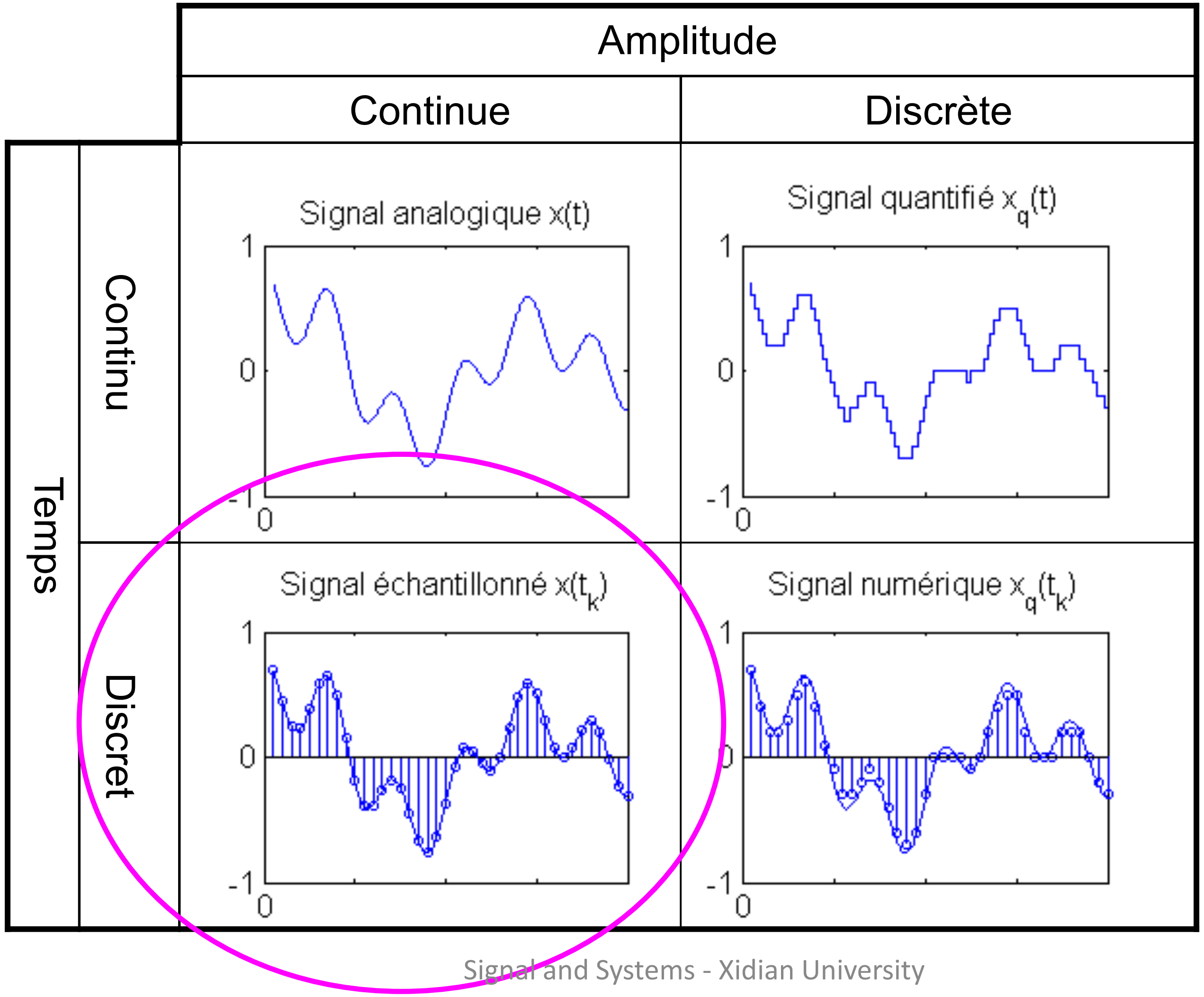
Echantillonnage (CAN = ADC)

Traitement numérique

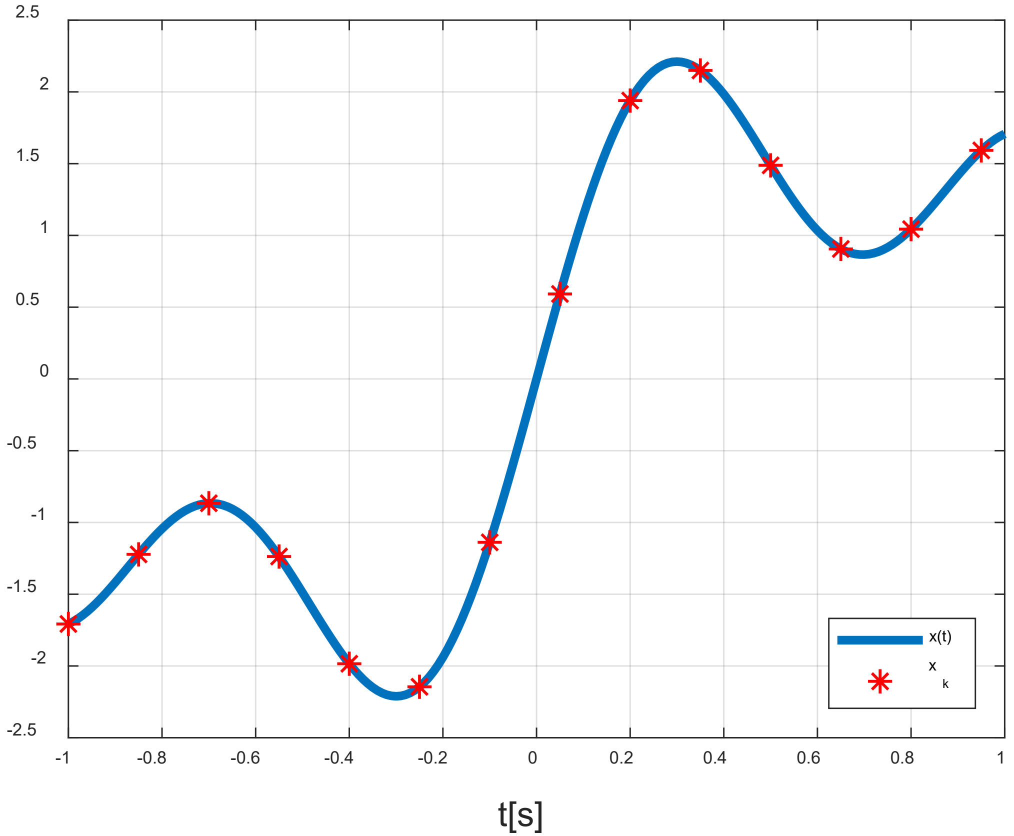
Reconstruction du signal analogique (CNA = DAC)



Classification des signaux

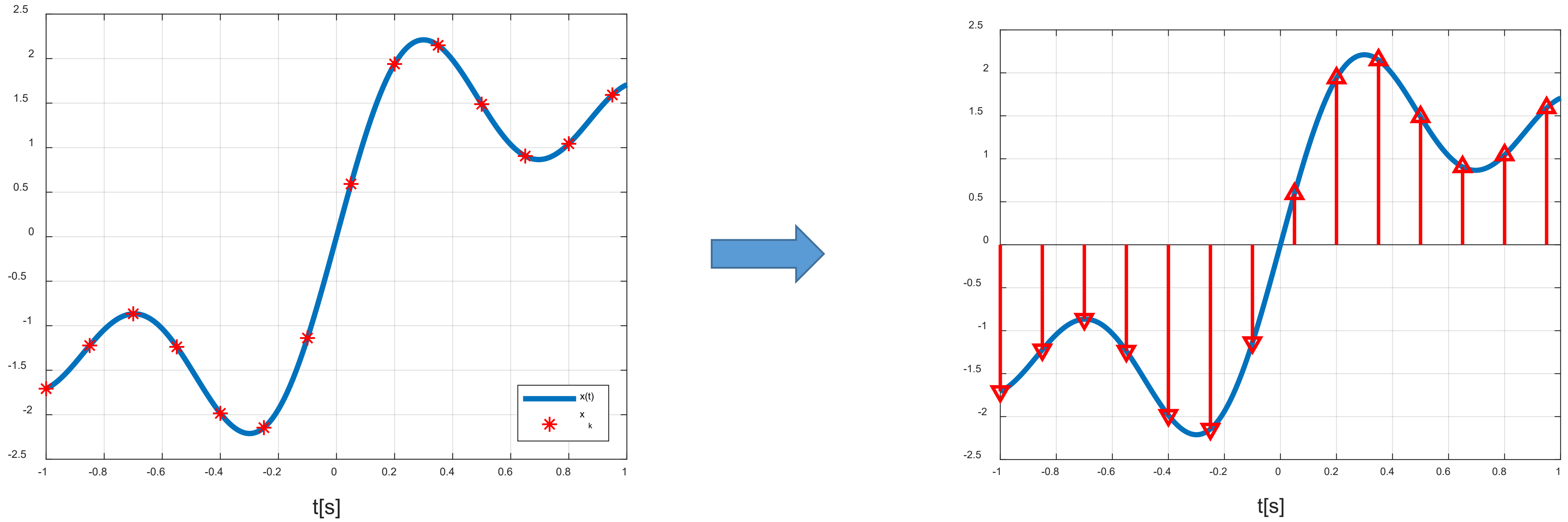


2. Comment modéliser un signal échantillonné ?



- Un signal échantillonné est une suite de points $\{x_k\}$ obtenus tous les T_s

Comment modéliser un signal échantillonné ?



$$x_e = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s)\delta(t - kT_s) = x.\delta_{T_s}$$

3. TF d'un signal échantillonné

$$\mathcal{F}(x_e) = \mathcal{F}(x.\delta_{T_s}) \Rightarrow X_e(f) = X(f) * \frac{1}{T_s}\delta_{\frac{1}{T_s}}(f)$$

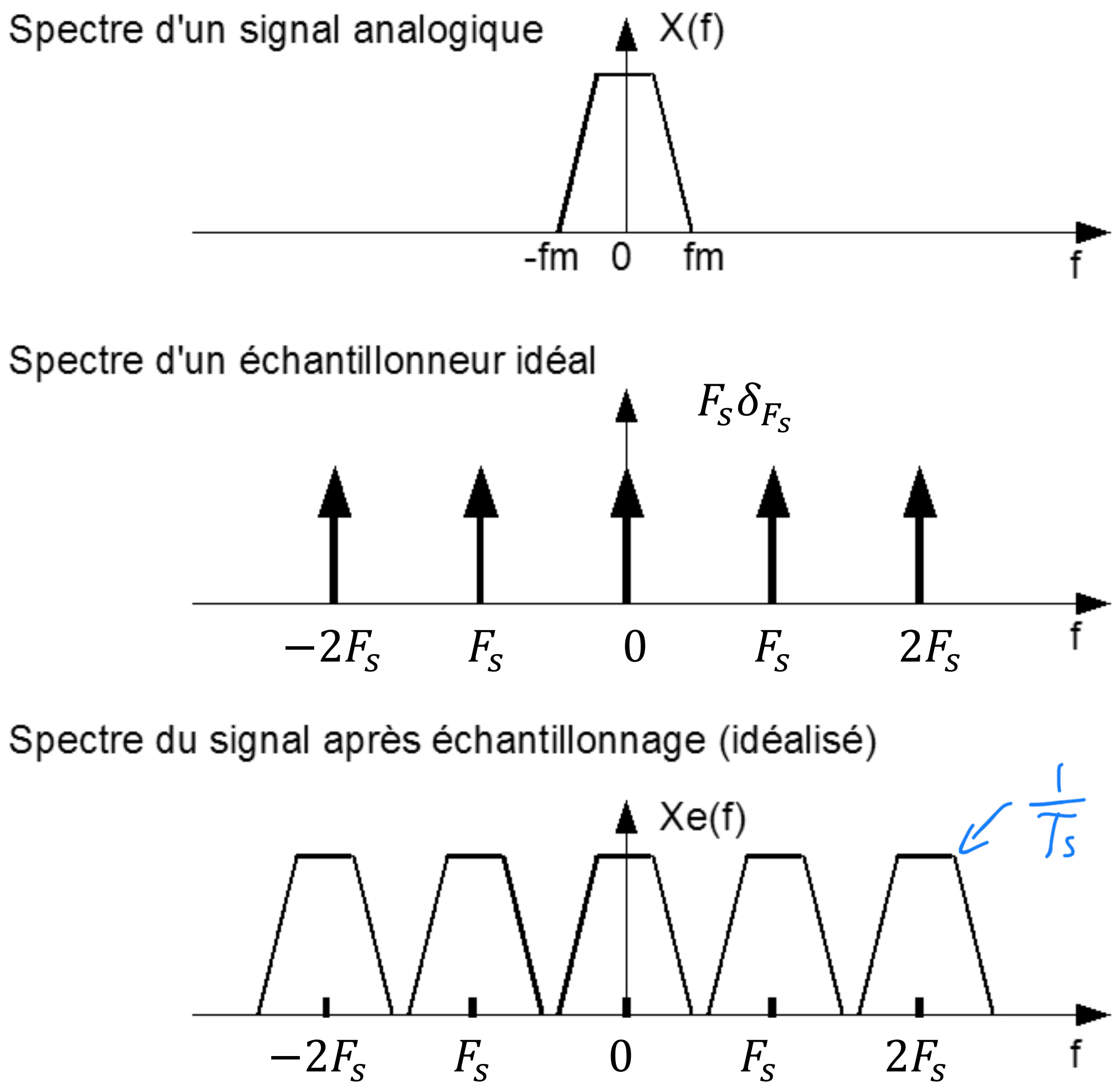
$$\boxed{X_e(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T_s}\right)}$$

Echantillonner en temps $\Rightarrow$ Périodiser en fréquence

La **TF d'un signal $\boldsymbol{x_e(t)}$ échantillonné** à $\boldsymbol{T_s}$ est la **TF du signal analogique $\boldsymbol{x(t)}$ périodisé**, de période $F_s = \frac{1}{T_s}$ et affecté d'un facteur $\boldsymbol{\frac{1}{T_s}}$.

TF d'un signal échantillonné

Exemple :



TF d'un signal échantillonné

- Remarque : $X_e(f)$ peut aussi s'exprimer autrement

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s)\delta(t - kT_s) \Rightarrow X_e(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s)e^{-j2\pi kT_s f}$$

- A rapprocher de la TF de $x(t)$

$$X(f) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi f t}dt$$

Constatations expérimentales: sinusoïde

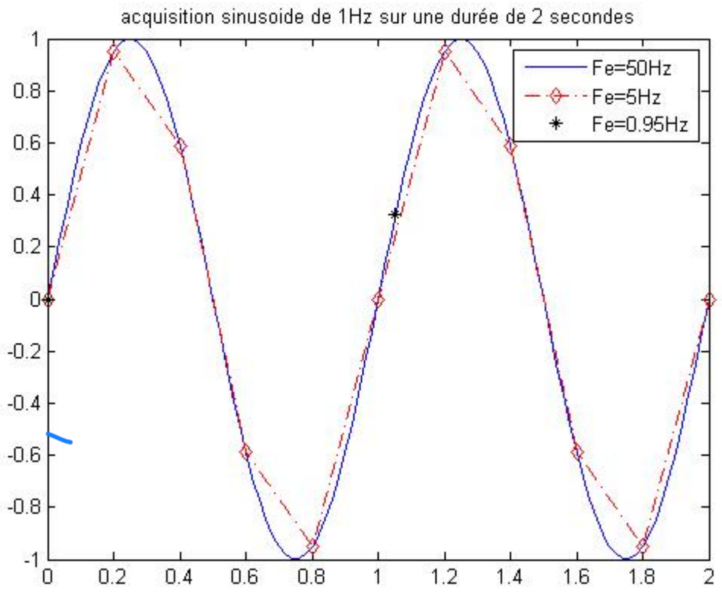
Illustration 1 : Acquisition d'une sinusoïde à différentes fréquences d'échantillonnage

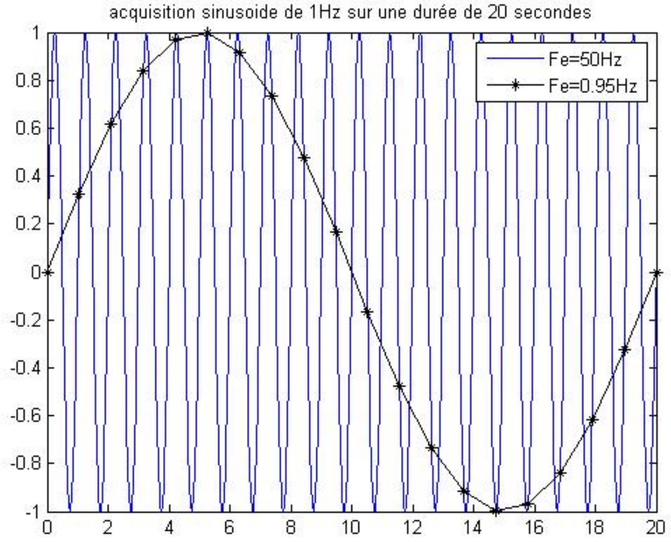
```
% acquisition d'un sinus de 1 Hz
f=1; % fréquence du sinus en Hz
duree=2; % duree d'acquisition (sec.)

%% echantillonnage à 50 Hz
fech=50;
k=0:1/fech:duree;
x1=sin(2*pi*f*k);
figure; plot(k,x1,'-')

%% echantillonnage à 5 Hz
fech=5; k=0:1/fech:duree;
x2=sin(2*pi*f*k);
hold on; plot(k,x2,'rd-.')

% echantillonnage à 0.95 Hz
fech=0.95; k=0:1/fech:duree;
x3=sin(2*pi*f*k);
hold on; plot(k,x3,'k*')
```

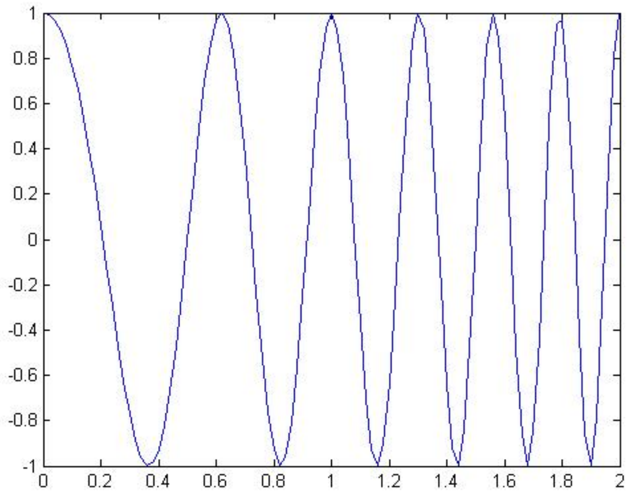




Constatations expérimentales

- ***Illustration 2 : Restitution audio d'un chirp linéaire***

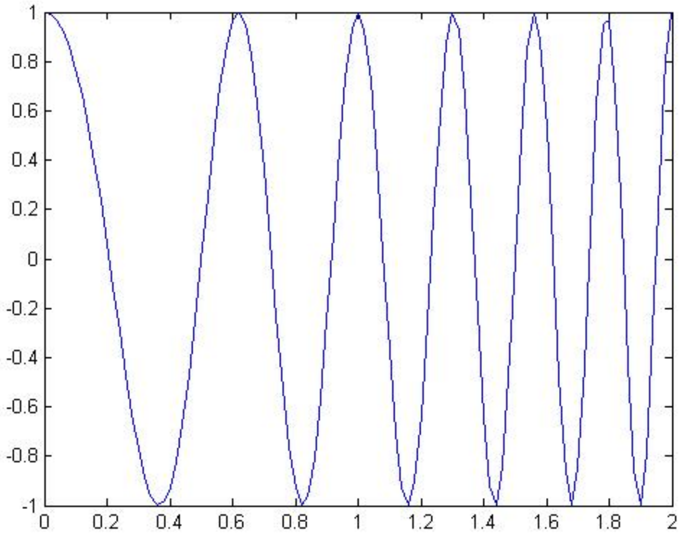
  - Soit un signal $x(t) = A.\cos(2\pi f_i(t)t + \varphi)$ de **fréquence instantanée $\boldsymbol{f_i(t)}$**
    - <u>Note</u> : pour un signal sinusoïdal de fréquence f_0, on a $f_i(t) = f_0$.
  - Si la fréquence dépend du temps, on dit que le signal est modulé en fréquence
  - <u>Cas du chirp linéaire</u>
    - $f_i(t) = f_0 + \lambda t$



Constatations expérimentales: chirp linéaire

Visualisation sous Matlab

```
fs=50;
lambda=2;
f0=1;
T=2;
n=(0:T*fs)/fs;
theta=2*pi*f0*n+2*pi*lambda*(n.^2);
x=cos(theta);
plot(n,x)
```



$$f_i(t) = f_0 + \lambda t$$

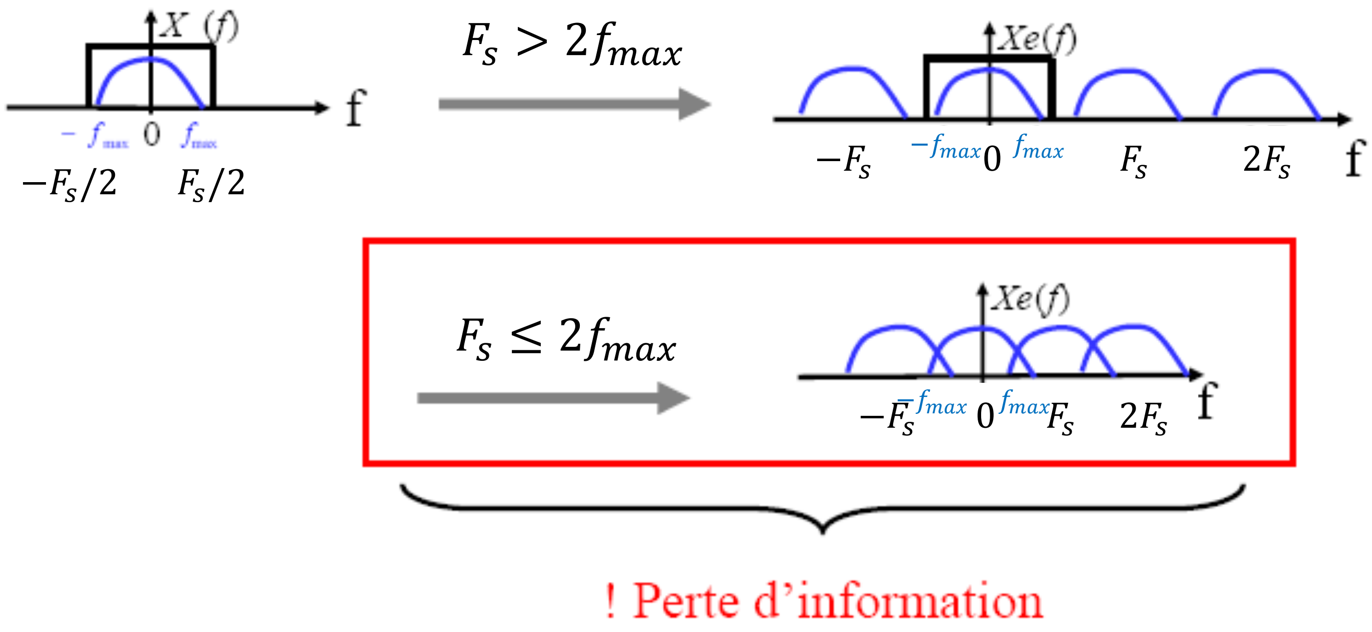
Restitution audio et échantillonnage (Matlab)

```
% audio sans repliement
lambda=1000;
fs=8000;
f0=1000;
T=2;
n=[0:T*fs]/fs;
theta=2*pi*f0*n+2*pi*lambda*(n.^2);
x=cos(theta);
soundsc(x,fs)
```

```
% audio avec repliement
lambda=3000;
fs=8000;
f0=1000;
T=2;
n=[0:T*fs]/fs;
theta=2*pi*f0*n+2*pi*lambda*(n.^2);
x=cos(theta);
soundsc(x,fs)
```

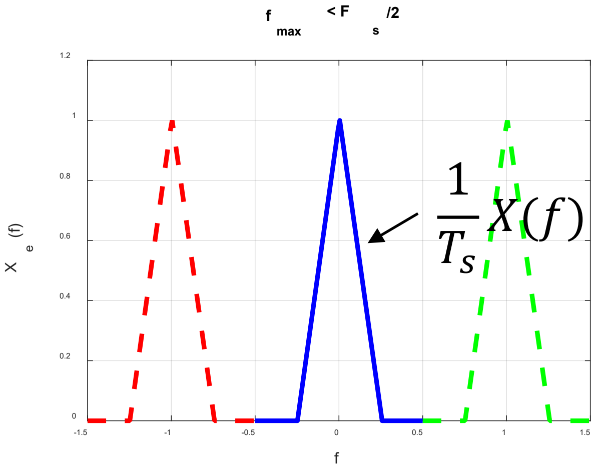
4. Théorème de Shannon

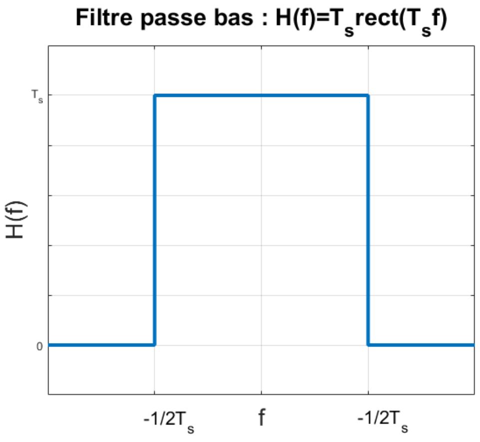
- Condition pour qu'il n'y ait pas perte d'information
  - La fréquence d'échantillonnage F_s doit être **strictement supérieure** à $2f_{max}$

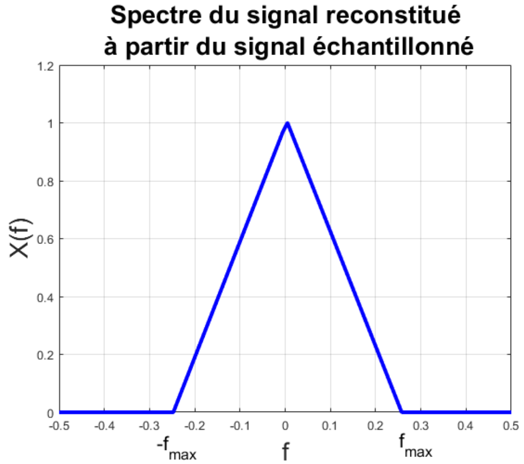


Théorème de Shannon

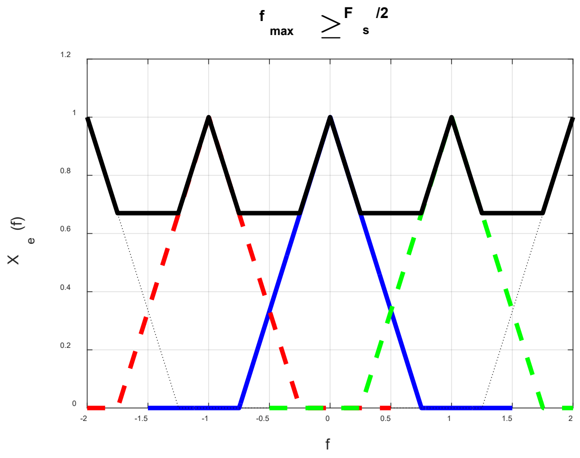
- Cas 1 :

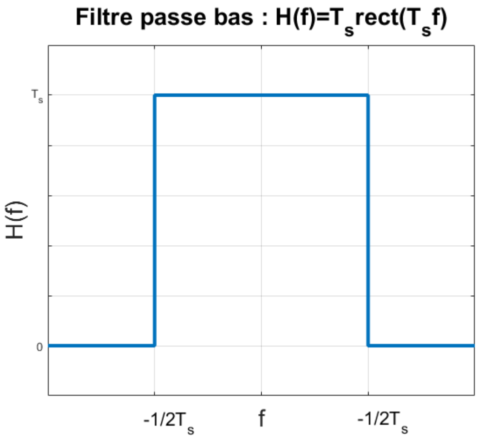


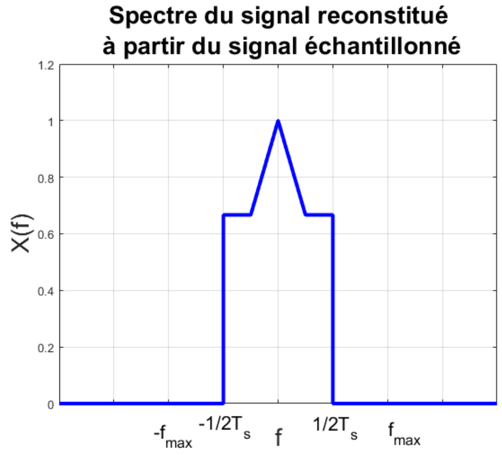




- Cas 2 :



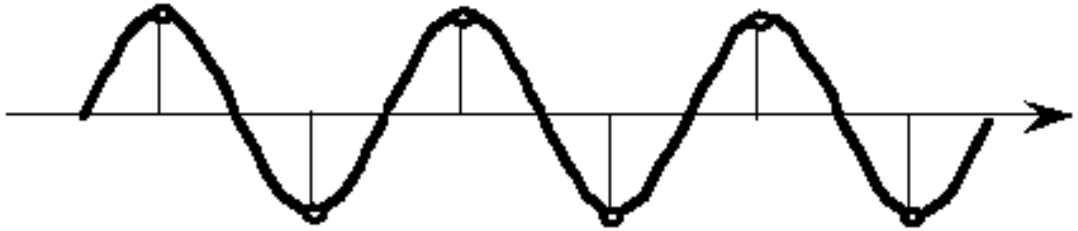




Exemple d'une sinusoïde

- Pour le signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

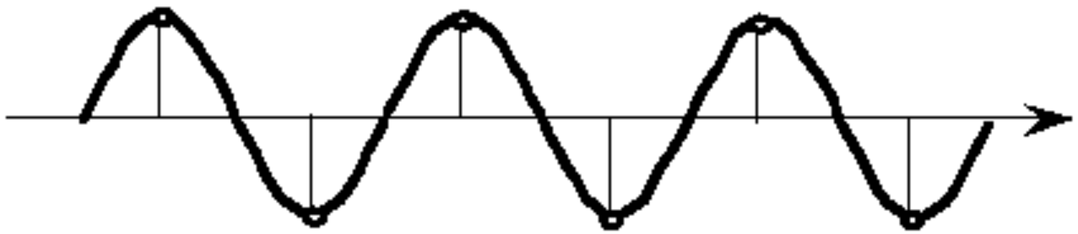
$$T_{smax} = ?$$



Exemple d’une sinusoïde

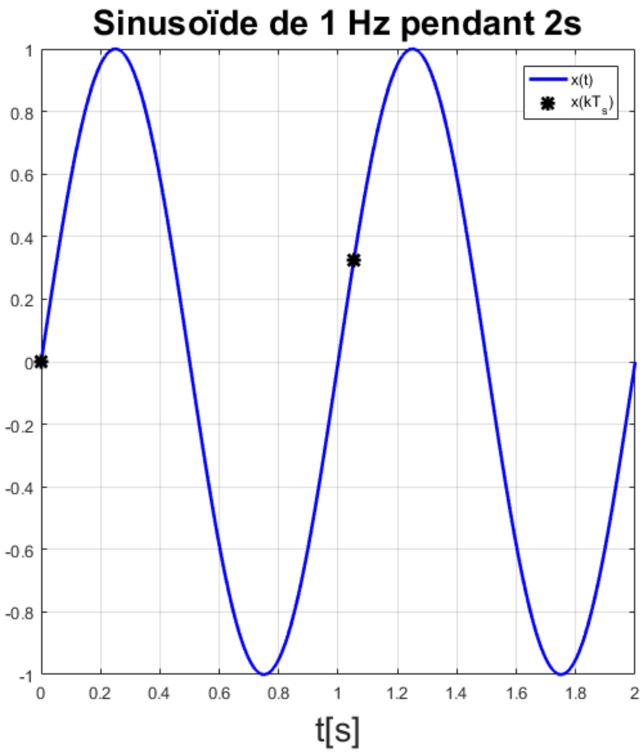
- Pour le signal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, la fréquence d’échantillonnage minimale est de 2 échantillons par cycle

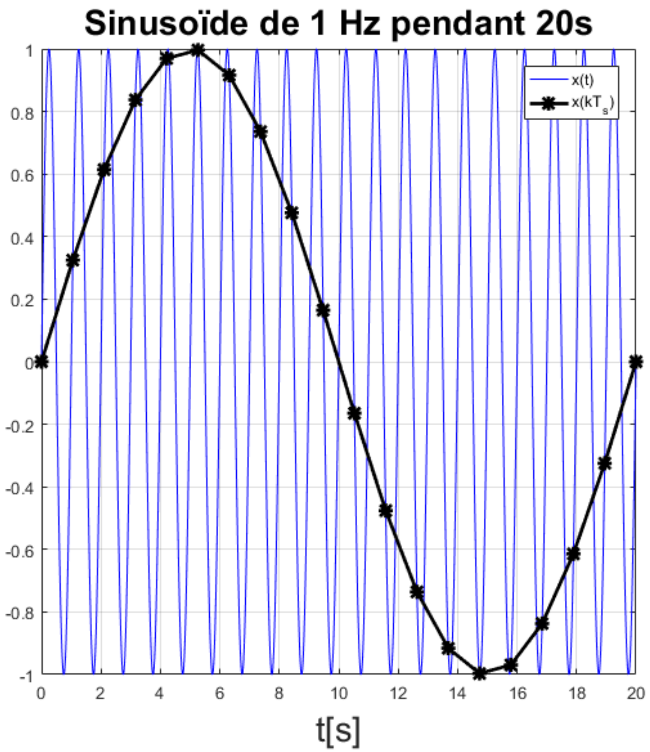
$$F_{smin} = 2f_{max} = 2f_0$$



Exemple d’une sinusoïde

- Si le théorème de Shannon n’est pas respecté, la fréquence d’échantillonnage est trop faible : $F_s \leq 2f_{max}$
- Retour sur l’exemple précédent : exercice

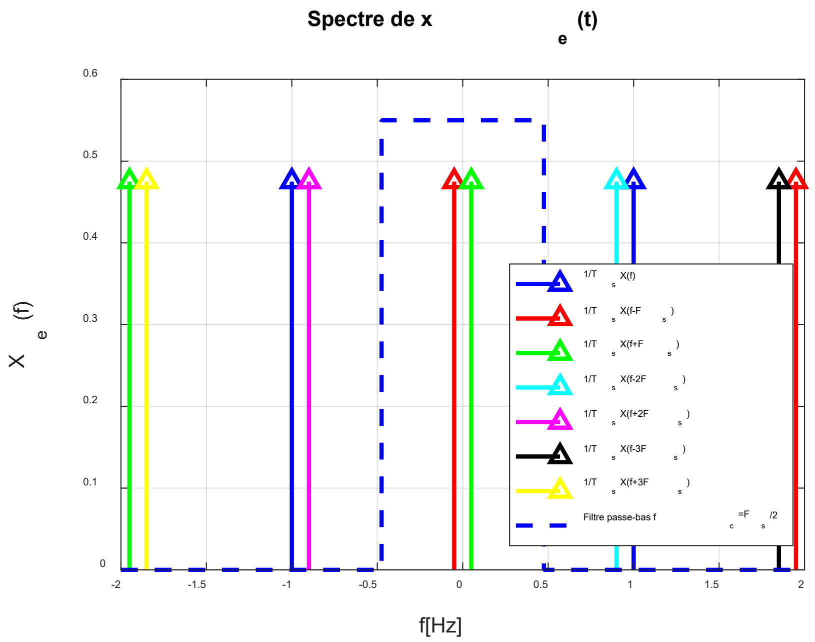


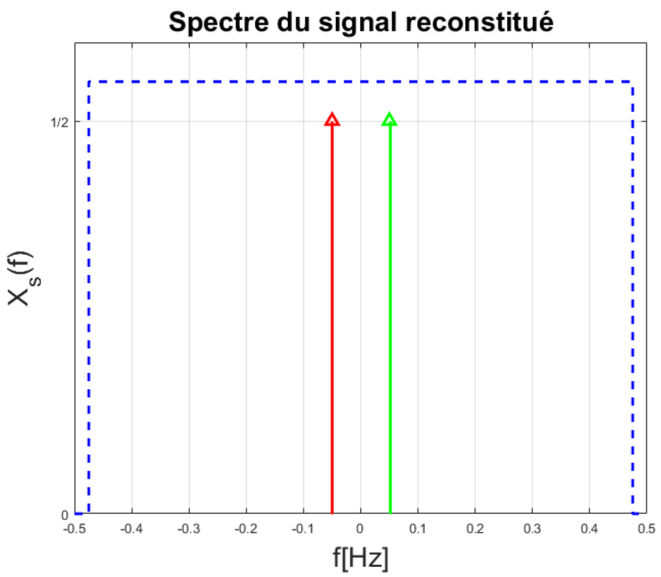


- Dessiner le spectre du signal échantillonné à 0,95Hz de -2 à 2 Hz.
- A quelle fréquence est le signal reconstitué ?
- Quelle aurait dû être la fréquence d’échantillonnage minimale?

Exemple d’une sinusoïde

- Si le théorème de Shannon n’est pas respecté, la fréquence d’échantillonnage est trop faible : $F_s \leq 2f_{max}$
- Retour sur l’exemple précédent : exercice





- Dessiner le spectre du signal échantillonné à 0,95Hz de -2 à 2 Hz.
- A quelle fréquence est le signal reconstitué ?
- Quelle aurait dû être la fréquence d’échantillonnage minimale?

Recouvrement de spectre

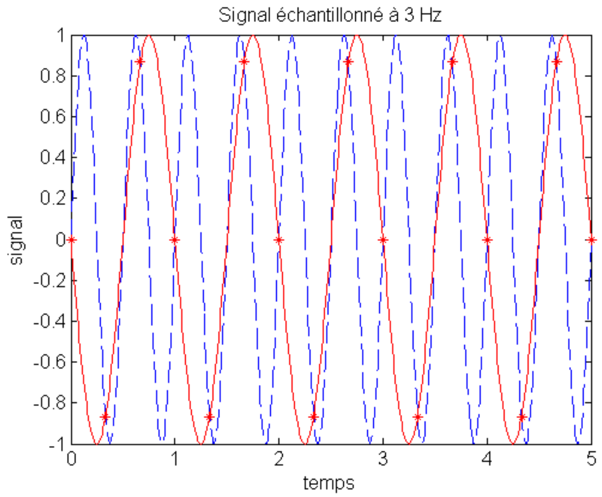
- Bilan : s'il y a recouvrement de spectre ($f_{max} \geq \frac{F_s}{2}$), des fréquences artificielles et indésirables apparaissent dans le signal reconstruit.
- Les fréquences f (plus grandes que $\frac{F_s}{2}$) génèrent des fréquences f_{alias} telles que:

$$\boxed{f_{alias} = |f - F_s|}$$

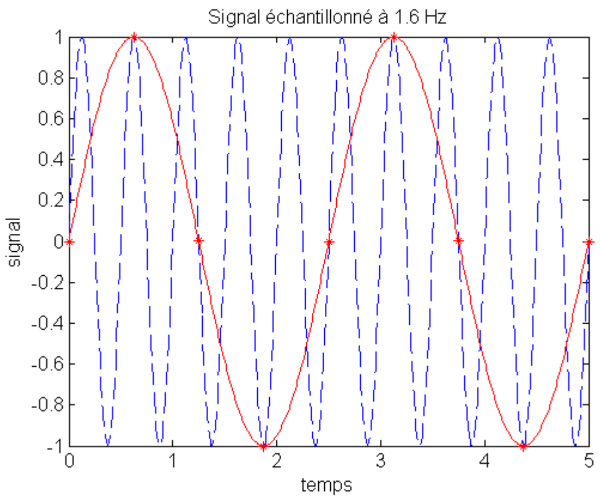
Théorème de Shannon: exercices

- Exemples de reconstruction
  - Signal de fréquence 2 Hz (en pointillés)
  - Retrouver la fréquence du signal reconstruit
  - Quelle est la fréquence d'échantillonnage minimum ?

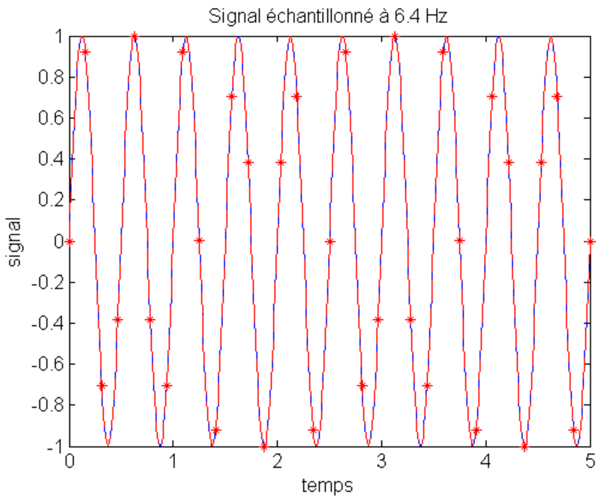
Fs=3 Hz



Fs=1.6 Hz



Fs=6.4 Hz



A retenir : Théorème de Shannon

- Un signal $x(t)$ ayant un spectre s'étendant jusqu'à la fréquence maximale f_m est entièrement décrit par ses échantillons $x(kT_s)$ prélevés avec une fréquence d'échantillonnage F_s telle que:

$$\boxed{F_s > 2 \times f_m}$$

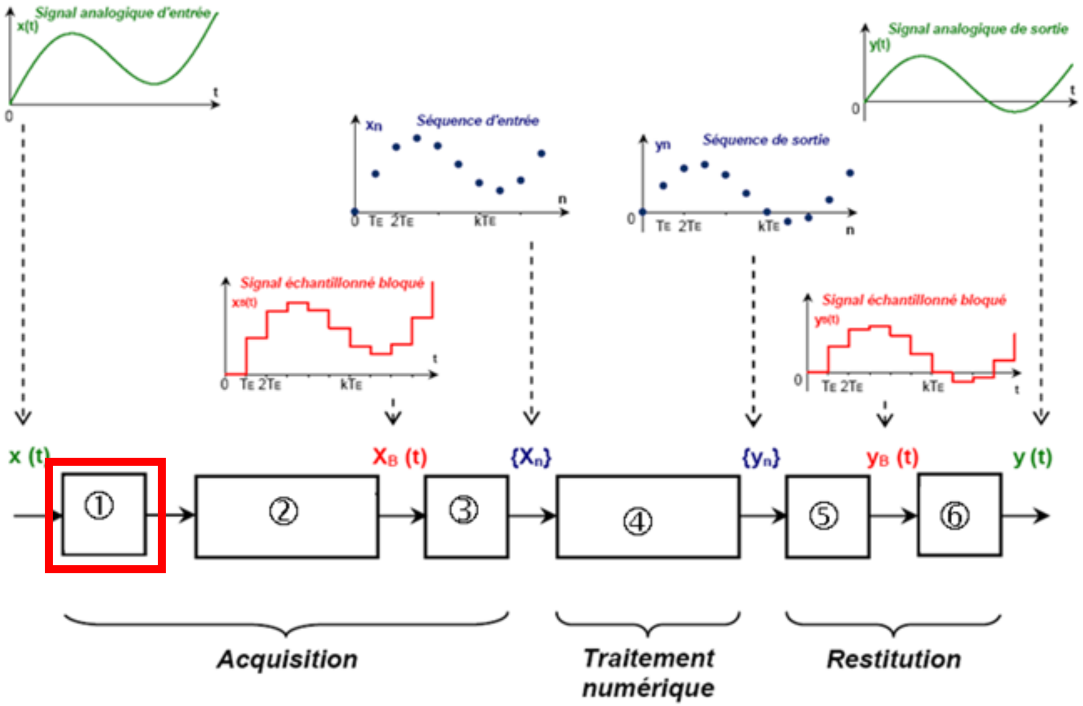
Filtre antirepliement

- Pour empêcher le repliement de spectre, on utilise en général un filtre antirepliement avant l'échantillonnage.

- Quel devrait être le type de ce filtre et quel est sa fréquence de coupure ?

Filtre antirepliement

- Pour prévenir le repliement de spectre, on utilise en général un filtre antirepliement avant l'échantillonnage.
- Pré-filtrage du signal analogique avant échantillonnage pour supprimer tout risque de repliement de spectre (aliasing)

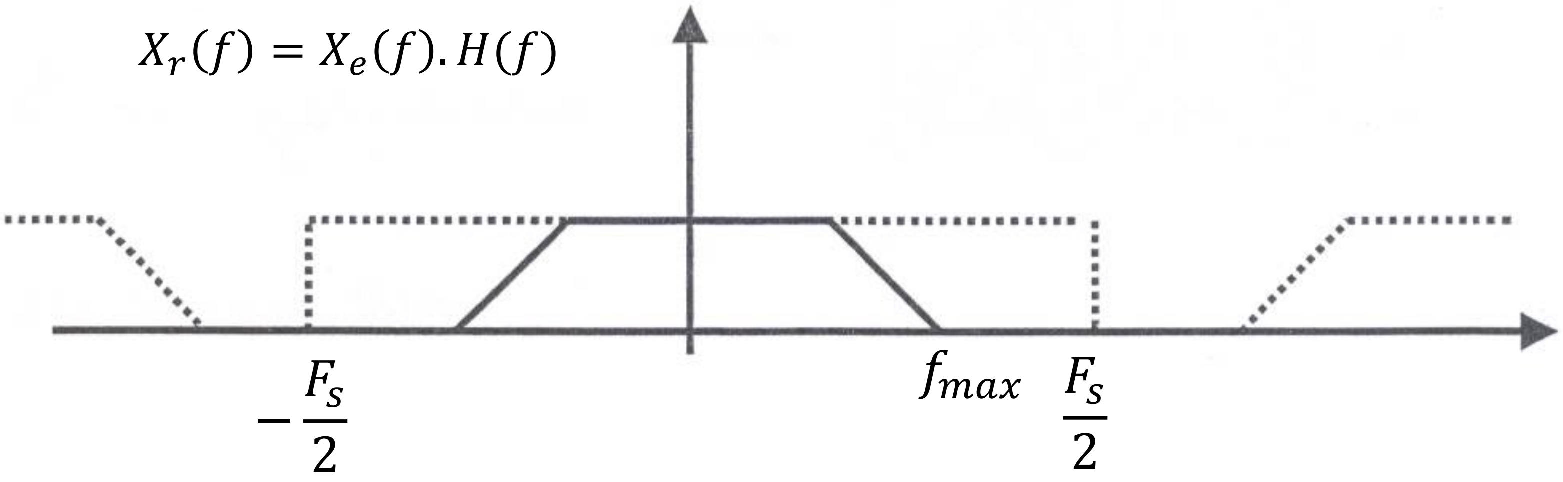


- 1 : filtre antirepliement (anti aliasing filter).

  C'est un filtre passe-bas de fréquence de coupure $\frac{F_S}{2}$.

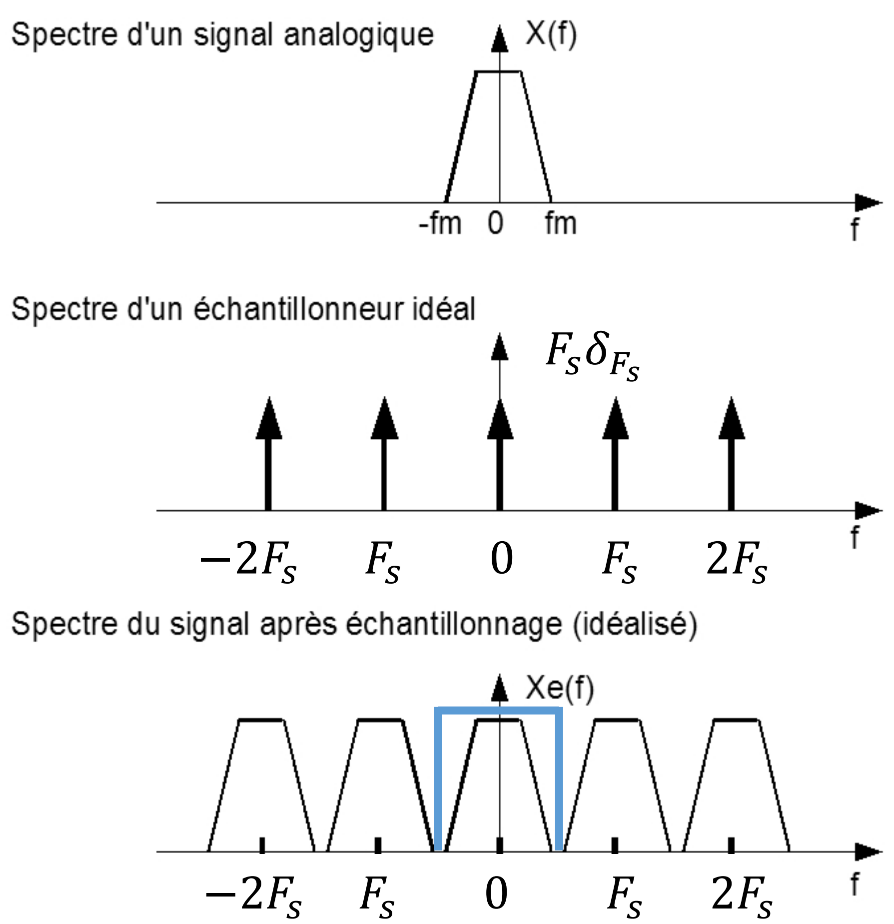
5. Reconstruction du signal continu

- L’opération d’échantillonnage doit être réversible. La reconstruction du signal d’origine $x(t)$ est noté $x_r(t)$ et doit être aussi fidèle que possible. Cette reconstruction passe par une interpolation des échantillons de $x_e(t)$.
- Pour reconstruire le signal d’origine $x_r(t)$, on filtre le signal échantillonné $x_e(t)$ par un filtre passe-bas-idéal (H) de fréquence de coupure $f_c = \frac{F_s}{2}$.
- *Opération de filtrage* :



Interpolateur idéal

- Utilisation d’un filtre passe-bas idéal



$$X_e(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

$$X(f) = T_s \times X_e(f) \times rect(T_s f)$$

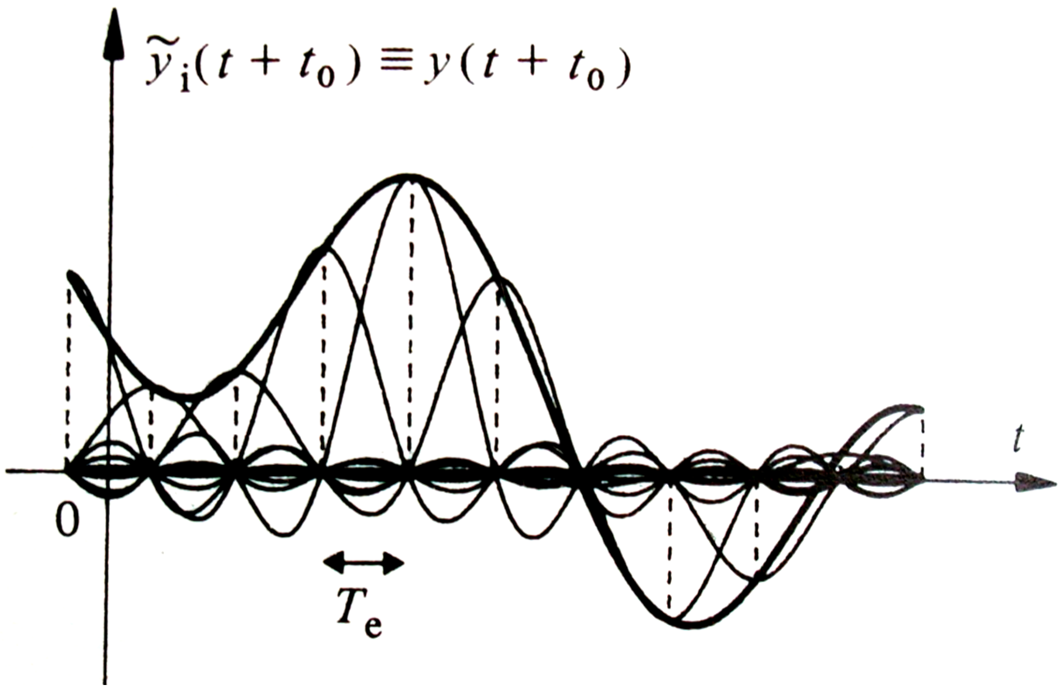
$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\big(X(f)\big) = T_s x_e(t) * \frac{1}{T_s} sinc\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s)\delta(t - kT_s) * sinc\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s) \times sinc\left(\frac{t - kT_s}{T_s}\right)}$$

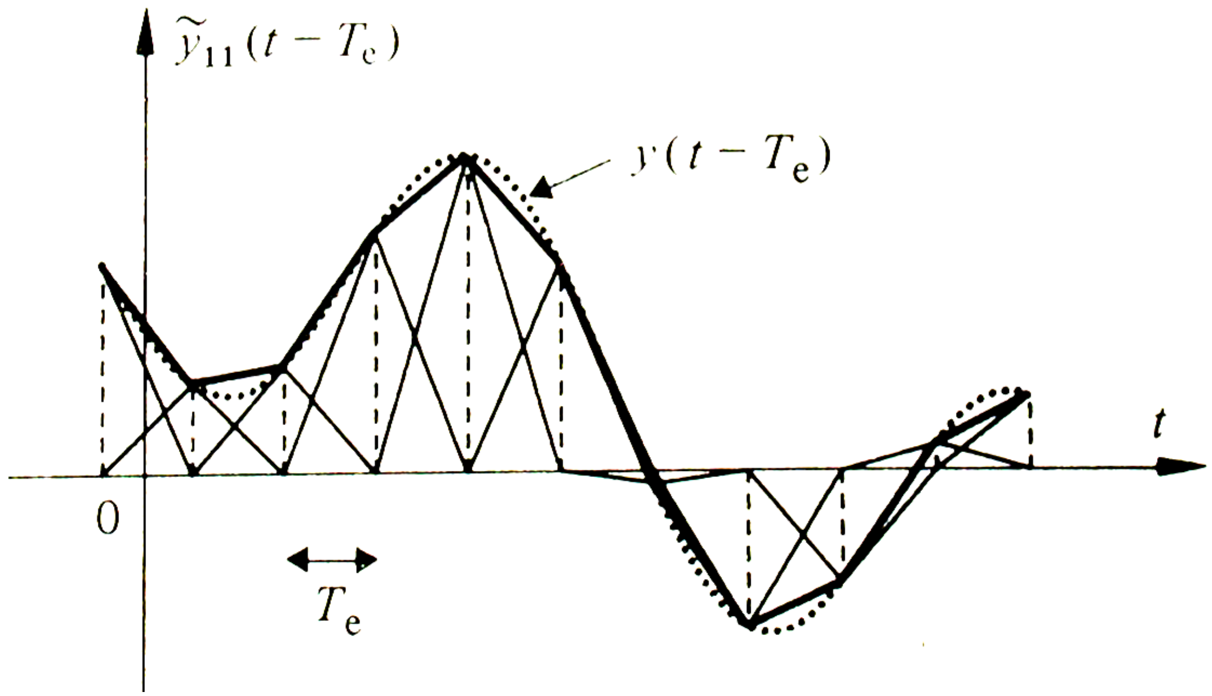
Interpolateur idéal 理想插值.

- Utilisation d'un filtre passe-bas idéal
  - Equivalent à convoluer par une fonction sinus cardinal



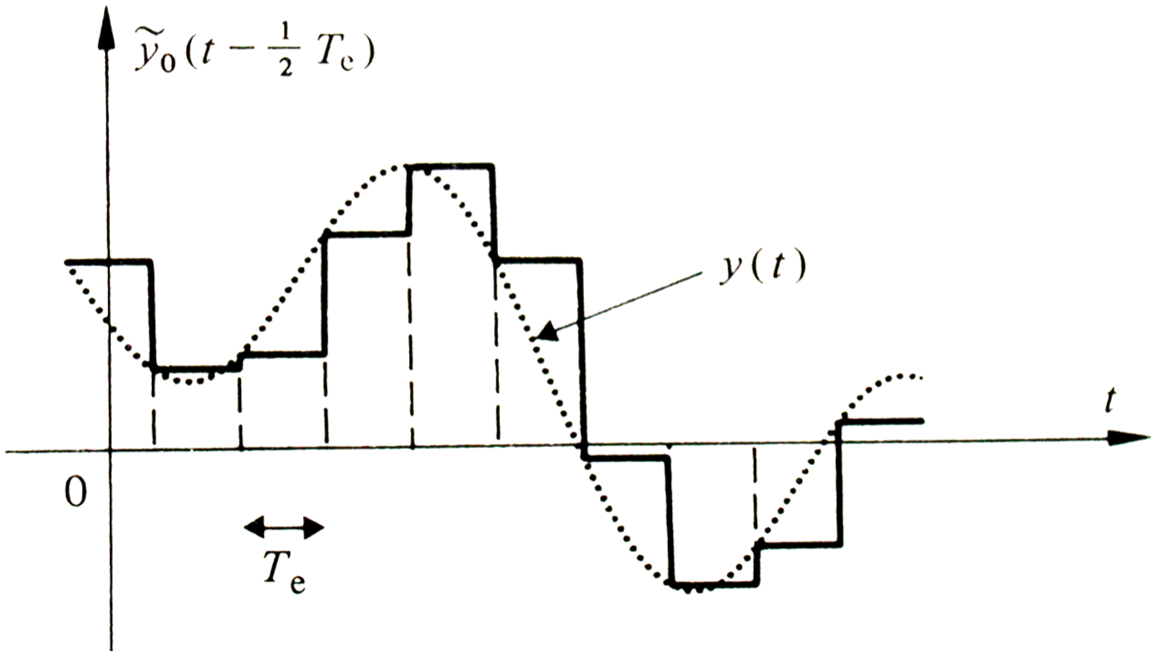
Interpolateur d’ordre un 一阶插值

- Relier les échantillons successifs par des droites
  - Equivalent à convoluer avec une fonction triangle



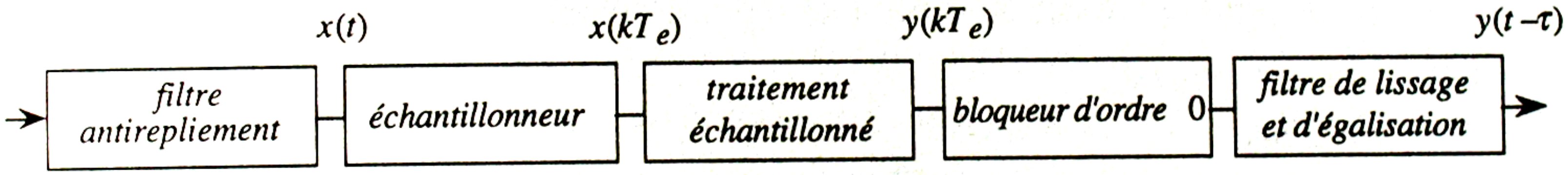
Interpolateur d'ordre zéro 零阶插值

- Ou bloqueur d'ordre zéro 零阶阻塞器
  - La fonction maintien est naturellement réalisée par un convertisseur numérique-analogique



Pour résumer : chaîne de traitement échantillonné

- Exemple de chaîne avec un bloqueur d'ordre zéro (cas le plus fréquent) associé à un filtre de lissage



- Remarque : le traitement échantillonné effectué peut être dans les domaines temporel ou fréquentiel