Polytech, Xidian University, Xi'An
28 Octobre 2020
durée : 1h300

Statistique Appliquée
Aucun document autorisé

Nom chinois : **Nom Pinyin :**

Numéro d'étudiant :

JUSTIFIEZ vos réponses !

1 Q.C.M. (4 points)

1. La borne de Chebyshev
   - caractérise la dispersion de la v.a. de Rayleigh
   - indique que $\mathbb{P}(|X - E[X]| > 3) \leq 0.11\sigma^2$
   - indique que $\mathbb{P}(|X - E[X]| > 3) \geq 0.11\sigma^2$
   - caractérise la dispersion de la v.a. normale
2. La variable aléatoire exponentielle
   - est le quotient de deux variables aléatoires normales centrées réduites
   - est le résultat de la somme d'un grand nombre de variables aléatoires
   - peut modéliser une durée de vie
   - est la racine carrée de la somme des carrés de deux v.a. normales
3. Soit une variable aléatoire discrète X binomiale de paramètres n et p
   - $p_X(x) = C_x^n (1-p)^x p^{n-x}, \forall x = 0, 1, 2, \cdots, n$
   - $p_X(x) = C_x^n p^x (1-p)^{n-x}, \forall x = 0, 1, 2, \cdots, n$
   - $p_X(x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \forall x = 0, 1, 2, \cdots, n$
   - $p_X(x) = C_n^x (1-p)^x p^{n-x}, \forall x = 0, 1, 2, \cdots, n$
4. Soient deux événements A et B conditionnellement indépendants par rapport à C (et $\mathbb{P}(C) \neq 0$)
   - si $\mathbb{P}(B|C) \neq 0, \mathbb{P}(A|B \cup C) = \mathbb{P}(C|A)$
   - si $\mathbb{P}(B|C) \neq 0, \mathbb{P}(A|B \cap C) = \mathbb{P}(C|A)$
   - si $\mathbb{P}(B|C) \neq 0, \mathbb{P}(A|B \cup C) = \mathbb{P}(A|C)$
   - si $\mathbb{P}(B|C) \neq 0, \mathbb{P}(A|B \cap C) = \mathbb{P}(A|C)$
5. Soient deux événement quelconques A et B :
   - $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) / \mathbb{P}(B)$
   - $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$
   - $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$
   - $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$
6. La médiane d'une variable aléatoire X
   - peut être plus grande que l'espérance de X
   - est toujours différente de l'espérance de X
   - est égale au mode de X
   - ne peut pas être plus petite que l'espérance de X

2 Théorie (6 points)

- Enoncez et démontrez le théorème de Bayes.
- Enoncez et démontrez le théorème des espérances itérées.

3 Trouver la loi de probabilité d'une v.a. discrète (5 points)

Soit un ensemble de 100 composants électroniques, dont 2 sont défectueux. On prend n composants et on note X le nombre de composants défectueux.

On demande :

1. La loi de probabilité (la masse de probabilité) de X si $n = 100$.
2. La loi de probabilité (la masse de probabilité) de X si $n = 1$.
3. En déduire la loi de probabilité (la masse de probabilité) de X si $n = 99$.
4. La loi de probabilité (la masse de probabilité) de X si $2 \leq n \leq 98$.

Préalable : on suppose que la probabilité d'avoir un composant défectueux parmi 100 vaut $p = 2/100$.
On suppose également que le tirage est aléatoire.

(1) Si $n = 100$ → il y a toujours 2 composants défectueux

$\Rightarrow P_X(2) = 1$ et $P_X(x) = 0 \quad \forall x \neq 2$

(2) Si $n = 1$ → le composant choisi est défectueux avec probabilité p

$\Rightarrow P_X(1) = p \quad P_X(0) = 1-p \quad P_X(x) = 0$ si $x \notin \{0,1\}$

(3) Si $n = 99$ → Le "centième" composant (celui qui n'est pas dans les 99) est défectueux avec probabilité p (il y a au moins 1 ct défectueux)

$\Rightarrow P_X(1) = p \quad P_X(2) = 1-p \quad P_X(0) = 0 \quad P_X(x) = 0$ si $x \notin \{1,2\}$

(4) Si $2 \leq n \leq 98$

$P_X(0) \rightarrow \mathbb{P}(1^{er}$ composant ok$) \times \mathbb{P}(2^e$ ok $| 1^e$ ok$) \cdot \mathbb{P}(3^e$ ok $| 1$ et 2 ok$) \ldots$

$= \frac{\cancel{98}}{100} \times \frac{\cancel{97}}{99} \times \frac{\cancel{96}}{\cancel{98}} \times \ldots \times \frac{(100-(n+1))}{100-(n)} = \frac{(100-n)(100-(n+1))}{100 \times 99}$

$$P_X(1) = \left[\mathbb{P}(1^e \text{ Nok}) \times \mathbb{P}(2^e \text{ ok} | 1^e \text{ Nok}) \times \mathbb{P}(3^e \text{ ok} | 1^e \text{ Nok et } 2^e \text{ ok}) \ldots \right] \times n$$

n permutations
$\to$ le composant défectueux dans n'importe quelle position

$$= \frac{2}{100} \times \frac{\cancel{98}}{99} \times \frac{\cancel{97}}{\cancel{98}} \times \ldots \times \frac{100-n}{100-(n-1)} \times n$$

$$= \frac{2 \times (100-n)}{99 \times 100} \times n$$

$$P_X(2) = 1 - P_X(0) - P_X(1) = 1 - (100-n) \frac{(100-(n-1))}{99 \times 10}$$

$$P_X(x) = 0 \quad \forall x \notin \{0, 1, 2\}$$

4 Loi exponentielle

Soit X une variable aléatoire suivant une distribution exponentielle de paramètre $\lambda = \ln 2$.

— Donnez l'expression la plus simple possible de $\mathbb{P}(X \geq x)$ en fonction de x.

— Que vaut $\mathbb{P}(X \leq 1 | X \leq 2)$?

Loi Exponentielle : $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$

$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

1) $\Rightarrow \mathbb{P}(X \geq x) = 1 - F_X(x) = e^{-\lambda x} = e^{-\ln 2 x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$

2) $\mathbb{P}(X \leq 1 | X \leq 2) = \frac{\mathbb{P}(X \leq 1 \cap X \leq 2)}{\mathbb{P}(X \leq 2)} = \frac{\mathbb{P}(X \leq 1)}{\mathbb{P}(X \leq 2)}$

$= \frac{1 - 0.5}{1 - 0.5^2} =$

$\mathbb{P}(X \leq 1 | X \leq 2) = \frac{\mathbb{P}(X \leq 1 \cap X \leq 2)}{\mathbb{P}(X \leq 2)} = \frac{\mathbb{P}(X \leq 1)}{\mathbb{P}(X \leq 2)}$

$\frac{1 - 0.5^1}{1 - 0.5^2} = \frac{2}{3}$