Projet AVOSTTI – N° ANR-11-IDFI-0009

Signal and Systems : discrete-time signals
-
Traitement numérique du signal

Xidian University – March 2021

rl@xidian.edu.cn

sylvain.toru@univ-grenoble-alpes.fr

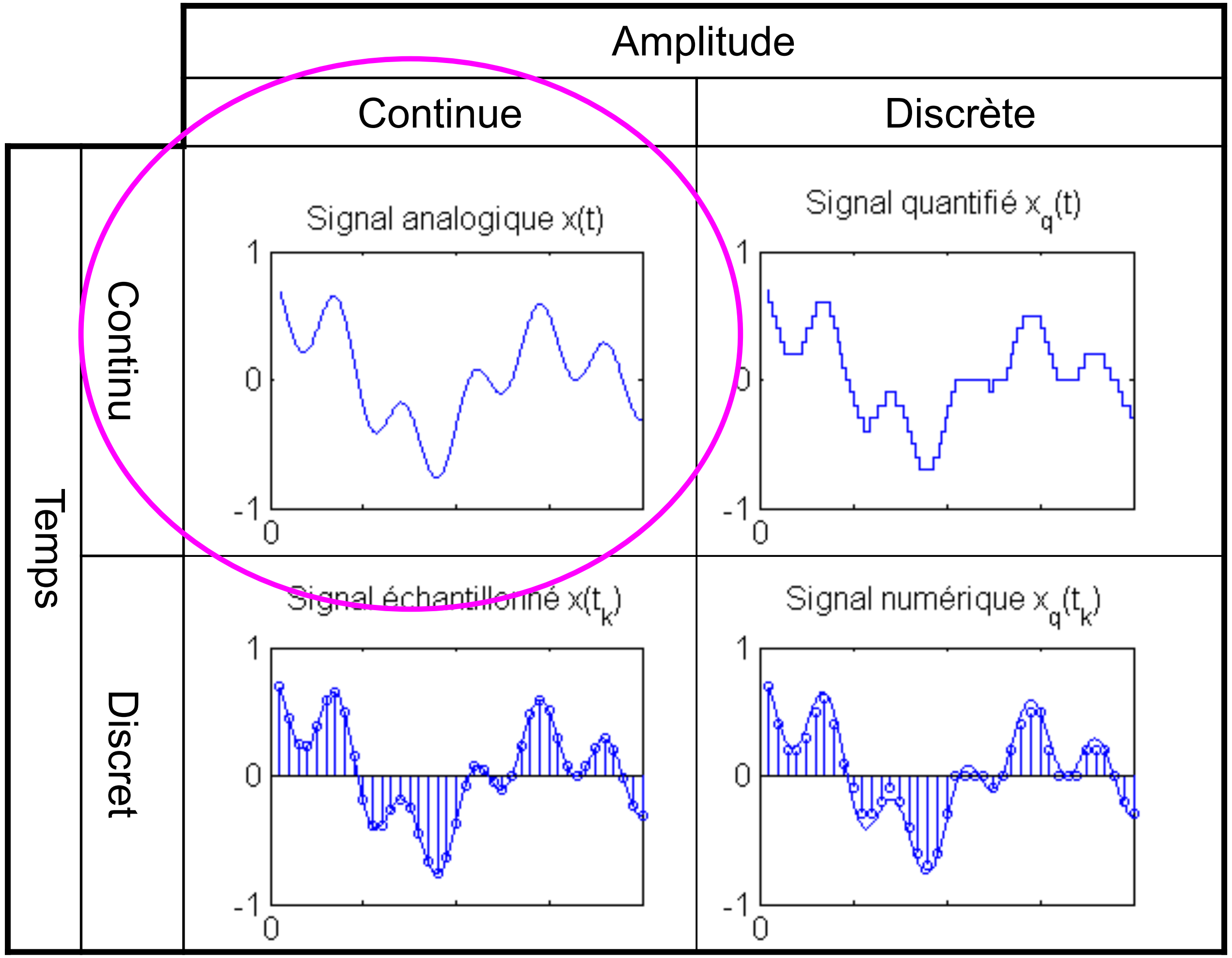
Plan du cours

I. Rappels de traitement du signal *(Cours 1)*
II. Signaux échantillonnés *(Cours 2 et 3)*
III. Signaux numériques et transformée de Fourier Discrète *(Cours 4 et 5)*
IV. Conversion analogique numérique et bruit de quantification *(Cours 6)*

Plan du cours

I. Rappels de traitement du signal
   1. Classification des signaux
   2. Signaux utiles en traitement du signal
   3. Transformée de Fourier et propriétés de la TF
   4. Définitions et opérations élémentaires
II. Signaux échantillonnés
III. Signaux numériques et transformée de Fourier Discrète
IV. Conversion analogique numérique et bruit de quantification

1. Classification des signaux

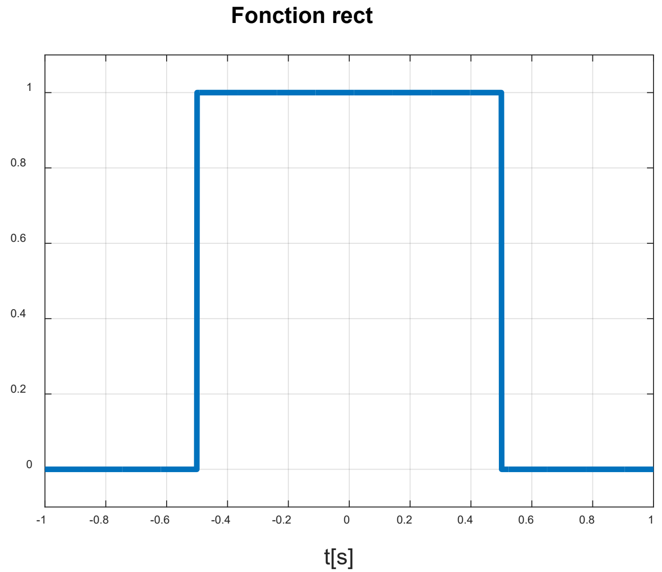


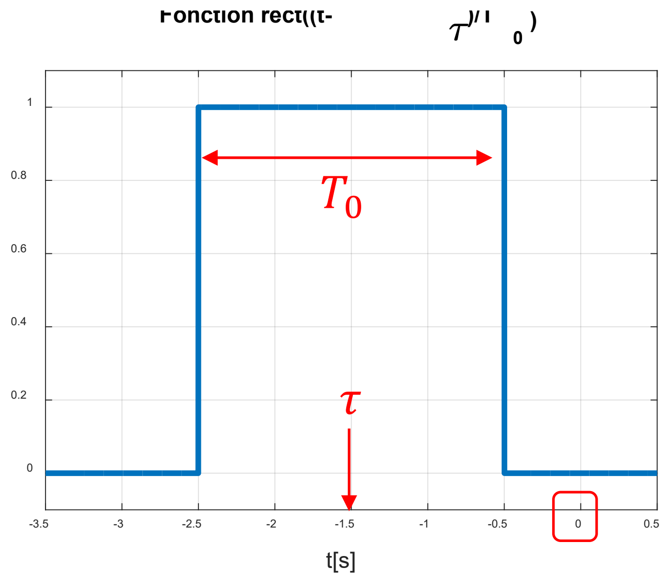
2. Signaux utiles en traitement du signal

- La fonction rectangle ou porte

$$\begin{cases} \forall t \epsilon \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] & rect(t) = 1 \\ sinon & rect(t) = 0 \end{cases}$$

- $rect\left(\frac{t-\tau}{T_0}\right)$?

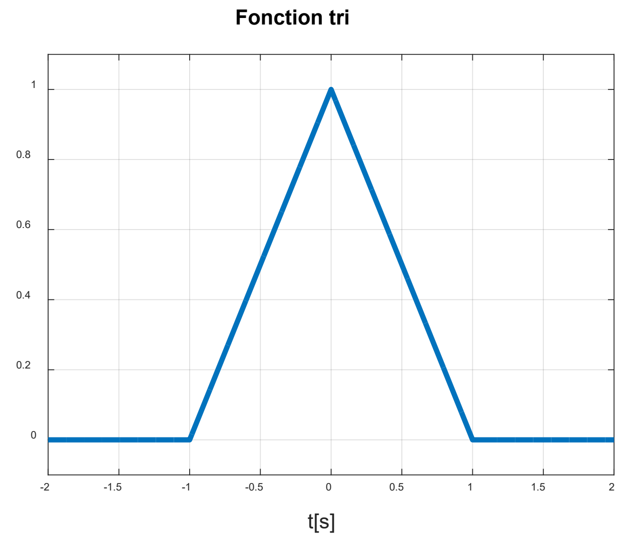




Signaux utiles en traitement du signal

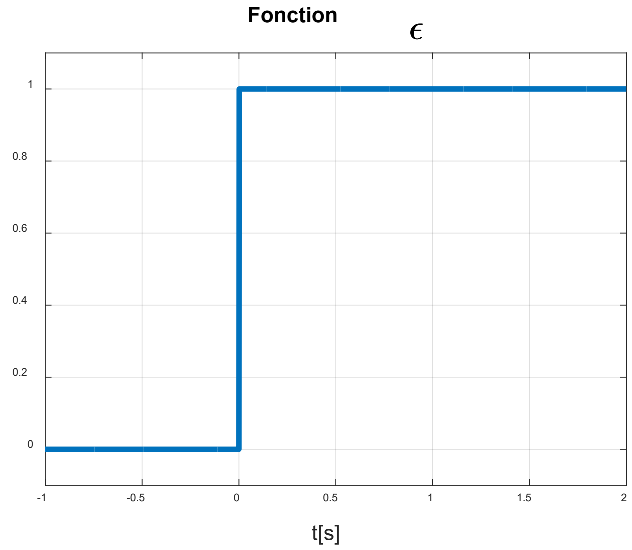
- La fonction triangle

$$\begin{cases} \forall t \epsilon [-1,1] & tri(t) = 1 - |t| \\ \quad sinon & \quad tri(t) = 0 \end{cases}$$



- L'échelon (de Heaviside)

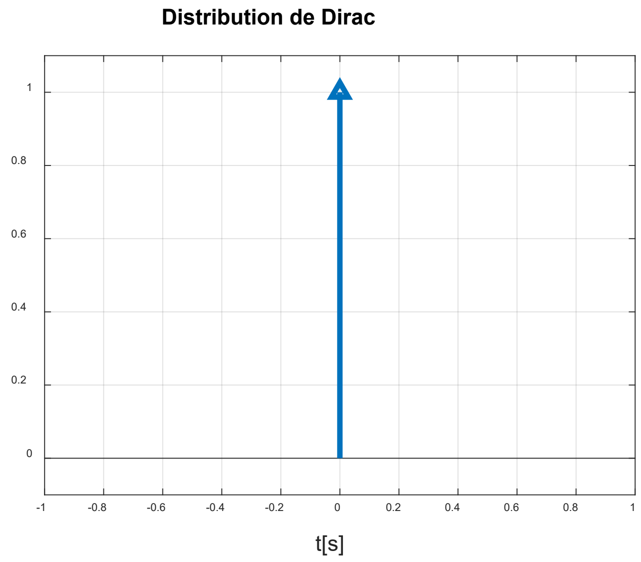
$$\begin{cases} \forall t > 0 & \epsilon(t) = 1 \\ \forall t < 0 & \epsilon(t) = 0 \end{cases}$$



Signaux utiles en traitement du signal

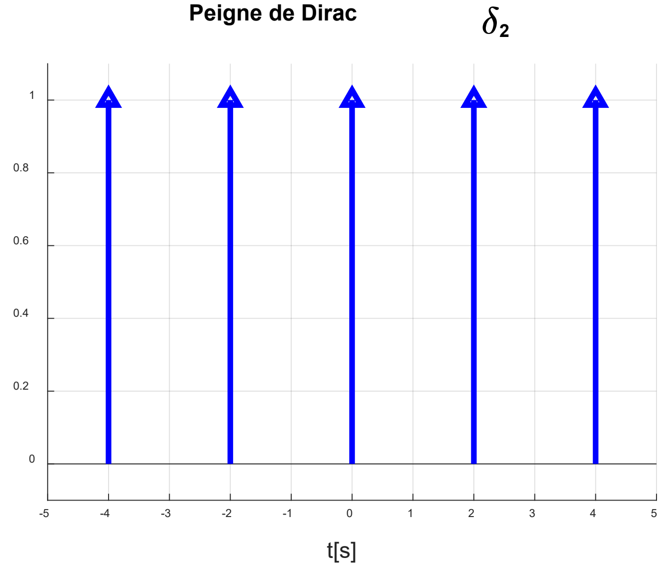
- La distribution de Dirac δ

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0) \\ \Rightarrow x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0) \\ x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0) \end{cases}$$



- Peigne de Dirac δ_{T_e}

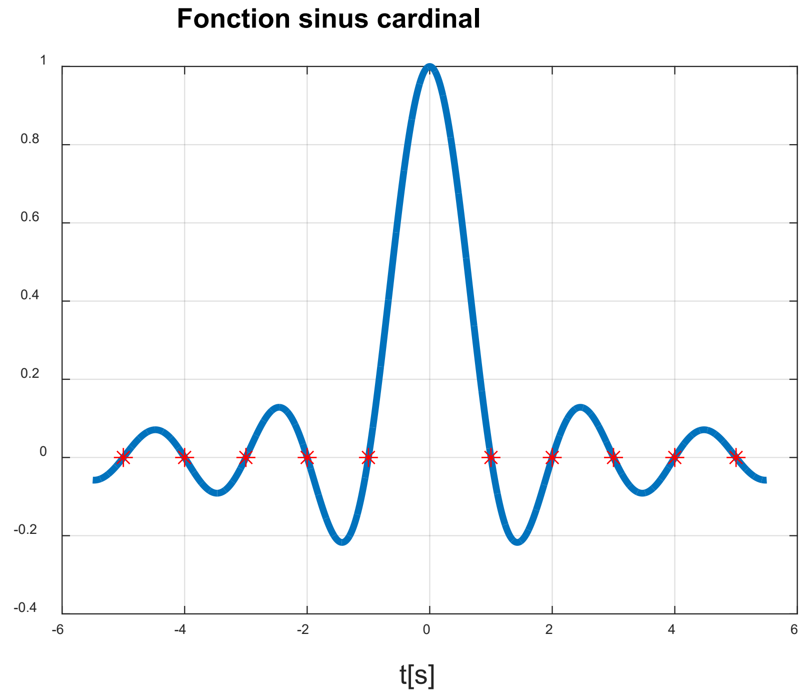
$$\delta_{T_e} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT_e)$$



Signaux utiles en traitement du signal

- La fonction sinus cardinal

1. $\forall t \in \mathbb{R}, sinc(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$
2. $sinc(0) = 1$
3. $\forall k \in \mathbb{Z}^*, sinc(k) = 0$



3. Transformée de Fourier – Propriétés de la TF

- Définition: la transformée de Fourier d'un signal d'énergie finie x est définie comme:

$$\forall f \in \mathbb{R}, \qquad X(f) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

- La transformée inverse est donnée par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = \int_{f=-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df$$

Transformée de Fourier – Propriétés de la TF

	Fonction (représentation temporelle)	**Transformée de Fourier (représentation fréquentielle)**
Linéarité	$ax(t) + by(t)$	$aX(f) + bY(f)$
Conjugué	$x^*(t)$	$X^*(-f)$
Changement d'échelle	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} X\left(\frac{f}{a}\right)$
Inversion axe t	$x(-t)$	$X(-f)$
Translation sur t	$x(t-\tau)$	$X(f)\exp(-j2\pi f\tau)$
Translation sur f	$x(t)e^{j2\pi f_0 t}$	$X(f-f_0)$
Dérivation	$\frac{d^n}{dt^n} x(t)$	$(j2\pi f)^n X(f)$
Intégration	$\int_{-\infty}^{t} x(u)du$	$\frac{1}{j2\pi f} X(f)$, si $\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)du = 0$

Transformée de Fourier – Propriétés de la TF

	Fonction (représentation temporelle)	Transformée de Fourier (représentation fréquentielle)
Convolution	$x(t)y(t)$	$X(f) * Y(f)$
Convolution	$x(t) * y(t)$	$X(f)Y(f)$
Théorème de Parseval	$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \|x(t)\|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \|X(f)\|^2 df = E_X$	
Parité	Réelle paire Réelle impaire Imaginaire paire Imaginaire impaire	Réelle paire Imaginaire impaire Imaginaire paire Réelle impaire

Transformée de Fourier – Propriétés de la TF

- Application : Soit un système linéaire et invariant en temps (SLIT). Ce système est un système de convolution de réponse impulsionnelle $h(t)$.

$$x \longrightarrow \boxed{\quad h \quad} \longrightarrow y = x * h$$

- Que vaut Y?

$$h(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} H(f)$$
$$y(t) = x(t) * h(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} Y(f) = X(f)H(f)$$

- h est appelée réponse impulsionnelle du SLIT et H est sa réponse fréquentielle.

Transformée de Fourier – Propriétés de la TF

- **TF utiles** (en étendant la définition précédente aux signaux périodiques ou constants → TF au sens des distributions)

Signal	Transformée de Fourier
$rect\left(\frac{t}{T}\right)$	$\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} = T\ sinc(fT)$
$tri\left(\frac{t}{T}\right)$	$T\ sinc^2(fT)$
$\delta(t-\tau)$	$e^{-j2\pi f\tau}$
$\delta_T(t)$	$\frac{1}{T}\delta_{\frac{1}{T}}(f)$

Remarque: on pourra retenir : « *Une fonction large en temps (représentation temporelle) est étroite en fréquence (représentation fréquentielle) et inversement* »

Transformée de Fourier – Propriétés de la TF

- **TF utiles** (en étendant la définition précédentes aux signaux périodiques ou constants → TF au sens des distributions)

Signal	Transformée de Fourier
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)}{2}$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)}{2j}$

<u>Remarque:</u> on pourra retenir : « *Une fonction large en temps (représentation temporelle) est étroite en fréquence (représentation fréquentielle) et inversement* »

Transformée de Fourier – Propriétés de la TF

- Cas général des fonctions périodiques de période T (et donc admettant une décomposition en série de Fourier)

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi k\frac{t}{T}} \ avec \ c_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-j2\pi n\frac{t}{T}} dt$$

- Sa TF est :

$$\forall f \in \mathbb{R}, \qquad X(f) = \mathcal{F}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j2\pi n\frac{t}{T}}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathcal{F}(e^{j2\pi n\frac{t}{T}}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

<u>Remarque:</u> on pourra retenir : « La transformée de Fourier d'une fonction périodique est un spectre de raies *et inversement »*

4. Définitions et opérations élémentaires

	Signaux à énergie finie	Signaux à puissance finie
Définition	$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt < \infty$	$P_x = \lim_{T\to+\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \lvert x(t)\rvert^2 dt \right) < \infty$
Echange	$E_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t)dt$	$P_{xy} = \lim_{T\to+\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t)y(t)dt \right)$
Densité spectrale $S_x(f)$	D'énergie : $\lvert X(f)\rvert^2$	De puissance : $\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \lvert X(f,T)\rvert^2$ $X(f,T) = \mathcal{F}\left[x(t).rect\left(\frac{t}{T}\right)\right]$
Densité spectrale interspectre $S_{xy}(f)$	D'énergie: $X(f)Y^*(f)$	De puissance $\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} X(f,T)Y^*(f,T)$

Définitions et opérations élémentaires

	Signaux à énergie finie	Signaux à puissance finie
Intercorrélation	$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y^*(t)dt$	$R_{xy} = \lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t+\tau)y(t)dt\right)$
	$\mathcal{F}[R_{xy}] = S_{xy}$	$\mathcal{F}[R_{xy}] = S_{xy}$
Autocorrélation	$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)x(t)dt$	$R_x = \lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t+\tau)x(t)dt\right)$
	$R_x(0) = E_x$	$R_x(0) = P_x$
	$\mathcal{F}[R_x] = S_x$	$\mathcal{F}[R_x] = S_x$