Nom :
Prénom :
Numéro étudiant : Date : 26 juin 2017

Contrôle d'Electromagnétisme

Aucun document autorisé

Question:	1	2	3	4	5	6	7	Total
Points:	1	1	4	½	½	6	7	20
Cote:								

1. On considère une surface $\mathcal{S}$ de l'espace sur laquelle existe une densité surfacique de charges σ.
   (a) (½ point) La composante tangentielle du champ électrique est continue à la traversée de la surface.
      √ **Vrai**
      ◯ Faux
   (b) (½ point) La composante normale du champ électrique est continue à la traversée de la surface.
      ◯ Vrai
      √ **Faux**
2. On considère une surface $\mathcal{S}$ de l'espace sur laquelle existe une densité surfacique de courant $\mathbf{j}$.
   (a) (½ point) La composante tangentielle de l'induction magnétique est continue à la traversée de la surface.
      ◯ Vrai
      √ **Faux**
   (b) (½ point) La composante normale de l'induction est continue à la traversée de la surface.
      √ **Vrai**
      ◯ Faux
3. (4 points) Enoncer les quatres équations de Maxwell dans le vide

Solution:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\
\mathbf{rotB} &= \mu_0\mathbf{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \\
Rot\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \\
\mathrm{div}\mathbf{B} &= 0
\end{aligned}$$

4. (½ point) On considère une densité volumique de charges possédant un plan de symétrie Π. Le champ électrique calculé en un point M de Π est orthogonal à Π.

    ◯ Vrai

    √ **Faux**

5. (½ point) On considère une densité volumique de courant possédant un plan d' anti-symétrie Π. L'induction magnétique $\mathbf{B}$ calculée en un point M de Π est orthogonal à Π.

    ◯ Vrai

    √ **Faux**

6. On considère une distribution volumique de charges à l'intérieur d'une sphère de rayon a. La densité de charge volumique dépend uniquement de la distance r au centre de la sphère et vérifie l'équation :

$$
\begin{aligned}
\rho(r) &= \rho_0 \frac{(a-r)}{a} \qquad 0 < r < a \\
\rho(r) &= 0 \qquad r > a
\end{aligned}
$$

(a) (2 points) En considérant la position du point d'observation M à l'intérieur où à l'extérieur de la sphère, donner l'expression de la charge totale notée Q à l'intérieur de la sphère de centre 0 et de rayon R, tel que $R = \|\mathbf{OM}\|$

Solution: Il faut considérer deux cas :

— Soit $\|\mathbf{OM}\| \leq a$ et dans ce cas là :

$$
\begin{aligned}
Q &= \iiint_{\mathcal{V}} \rho(r) d\tau = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(r) r^2 \sin(\theta) d\phi d\theta dr \\
&= \int_0^R 4\pi \rho(r) r^2 dr \\
&= \rho_0 4\pi \int_0^R \frac{(a-r)}{a} r^2 dr \\
&= \rho_0 4\pi \left[\frac{R^3}{3} - \frac{R^4}{4a} \right]
\end{aligned}
$$

— Soit $\|\mathbf{OM}\| \geq a$ et dans ce cas là :

$$
\begin{aligned}
Q &= \iiint_{\mathcal{V}} \rho(r) d\tau = \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(r) r^2 \sin(\theta) d\phi d\theta dr \\
&= \int_0^a 4\pi \rho(r) r^2 dr \\
&= \rho_0 4\pi \int_0^a \frac{(a-r)}{a} r^2 dr \\
&= \rho_0 \pi \frac{a^3}{3}
\end{aligned}
$$

(b) (2 points) Appliquer le théorème de Gauss afin de déterminer le champ électrique $\overrightarrow{E}$ au point M.

Solution: Tout plan passant par le point M et le centre de la sphère est un plan de symétrie du problème, le problème est invariant par rotation d'une angle θ ou ϕ donc le champ électrique est radial est : $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{e}_r$ On va donc prendre comme surface de Gausss une sphère centrée en O et de rayon $\|\mathbf{OM}\|$. On a donc encore deux cas :

— Soit $\|\mathbf{OM}\| \leq a$ et dans ce cas là :

$$\iint_{\mathcal{S}} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} ds = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

D'où :

$$4\pi R^2 E(R) = \frac{\rho_0 4\pi}{\varepsilon_0} \left[\frac{R^3}{3} - \frac{R^4}{4a} \right]$$

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left[\frac{R}{3} - \frac{R^2}{4a} \right] \mathbf{e}_r$$

— Soit $\|\mathbf{OM}\| \geq a$ et dans ce cas là :

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\rho_0 a^3}{12\varepsilon_0 R^2} \mathbf{e}_r$$

(c) (2 points) En déduire l'expression du potentiel V

Solution: On a $\mathbf{E} = -\mathbf{grad} V$ et ici vu que $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{e}_r$ cela se réduit à :

$$E(R) - \frac{\partial V}{\partial R}$$

Il faut donc trouver une primitive de $E(r)$ dans les deux cas :

— $R \geq a$:

$$V(R) = \frac{\rho_0 a^3}{12\varepsilon_0 R} + C_1$$

et comme

$$\lim_{R\to\infty} V(R) = 0$$

on a

$$C_1 = 0$$

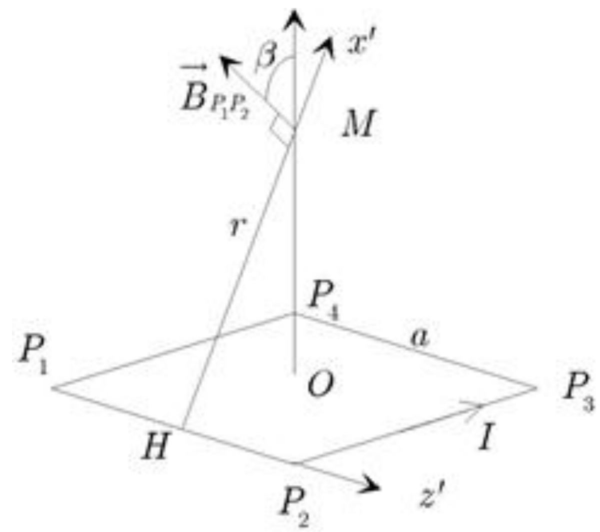
— $R \leq a$:

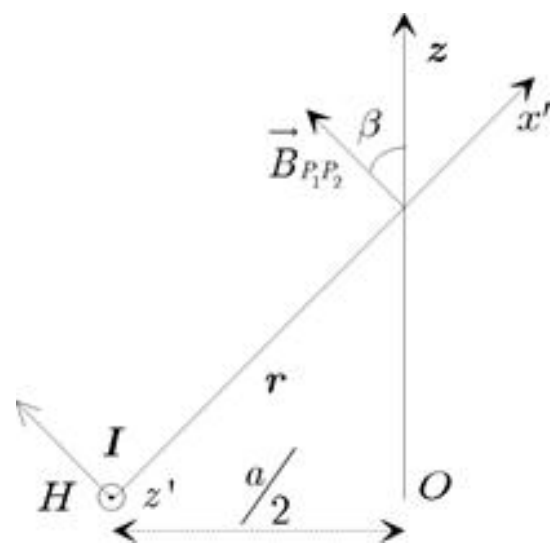
$$V(R) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left[\frac{R^2}{6} - \frac{R^3}{12a} \right] + C_2$$

C_2 est déterminé par continuité du potentiel en $R = a$. On obtient

$$C_2 = 0$$

7. Champ crée par une boucle carré.
   On considère les figures suivante

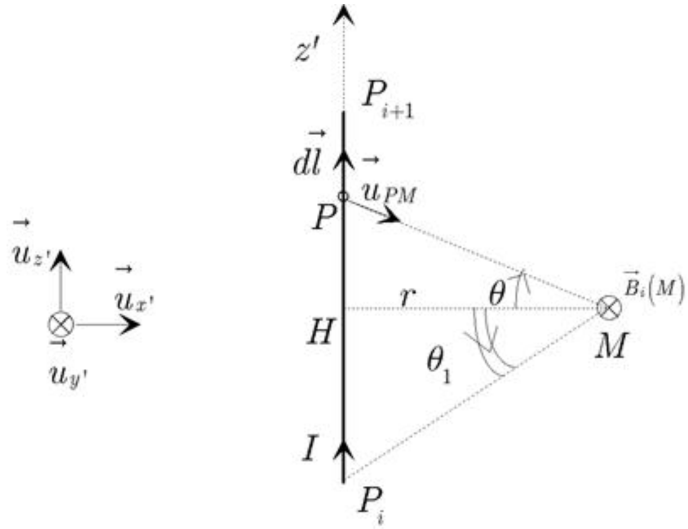




Un fil conducteur de forme carrée de côté a est parcouru par un courant stationnaire d'intensité I.

(a) (2 points) Quelle est l'induction magnétique **B** crée par le segment P_1P_2 au point M. Donner la valeur de sa composante suivant (Oz)

> **Solution:** On recherhe dans un premier temps le champ magnétqiue créee par un segment de longueur a en un point M de sa médiatrice



On pose $z' = HP$ et $r = HM$ On a :

$$\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{P_1}^{P^2}\frac{\mathbf{dl}\times\mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\mathbf{dz'}\sin(\mathbf{u_{z'}},\mathbf{PM})\mathbf{u_{y'}}}{\|\mathbf{PM}\|^2}$$

Pour effectuer l'intégrale on introduit l'angle $(MH, MP) = \theta$ et $\sin(\mathbf{u_{z'}},\mathbf{PM}) = \cos(\theta)$ on en déduit après calcul :

$$\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left[\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)\right]\mathbf{u_{y'}}$$

avec

$$\sin(\theta_2) = -\sin(\theta_1) = \frac{\frac{a}{2}}{(\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Si on veut exprimer la composante suivnat Oz il faut projeter et on a :

$$\cos(\beta) = \frac{a}{2r}$$

et

$$r = (\frac{a^2}{4} + +z^2)^{\frac{1}{2}}$$

D'où l'expression de la composante de $\mathbf{B}$ suivant (0z) :

$$B_{1z} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\frac{a}{2}}{(\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+z^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{(\frac{a^2}{4}+z^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{a}{(\frac{a^2}{4}+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

(b) (2 points) Montrer que pour des raisons de symétrie le champ crée par la spire au point M est dirigé suivant $\mathbf{e}_z$

Solution:

— Premiere version : Le champ total crée par la spire et la somme des champs crées par chacun des segments pris séparemment. Donc les composantes orthogonales à l'axe Oz des champs magnétiques crées par des segments symetriques se compensent deux à deux et ils ne reste donc qu'une seule composante suivant Oz

— Deuxième version : Le plan (x0z) est un plan d'antisymétrie pour la distribution de courant donc $\mathbf{B}(M)$ est inclus dans ce plan. Le plan(y0z) est aussi un plan d'antisymétrie pour la distribution de courant donc $\mathbf{B}(M)$ est inclus dans ce plan. $\mathbf{B}(M)$ appartient à l'intersection commune de ces deux plans et donc suivant l'axe $0z$.

(c) (3 points) En déduire l'expression du champ crée par la spire au point M en fonction de μ_0, I, a et z

Solution: Si B_{1z} est la composant du cahmp trouve suivant z à la question 1 alors on va avoir :

$$\mathbf{B}(M) = 4B_{1z}\mathbf{e}_z$$