Automatique
Systèmes linéaires continus
Partie 2 : Représentation d'état

Sylvie Charbonnier
Associate professor, Polytech' Grenoble,
Laboratoire Gipsa-lab
France

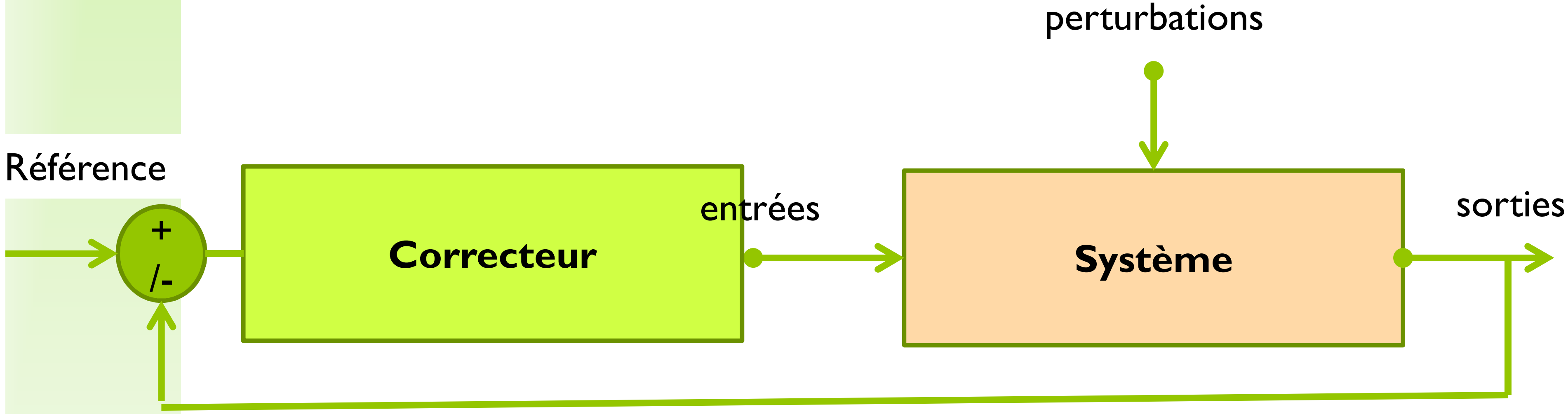
Automatique

Objectif : contrôle de systèmes

Établissement de lois de commande :

suivre une consigne : imposer un comportement en sortie, défini par une référence ou consigne

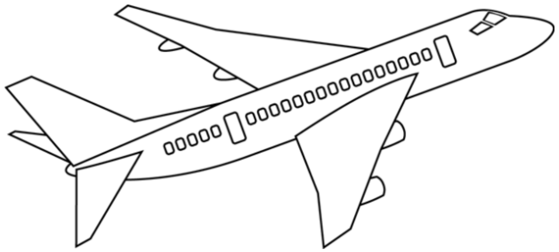
réguler : maintenir une ou plusieurs sorties constantes, quelque soient les perturbations auxquelles il peut être soumis.



Automatique

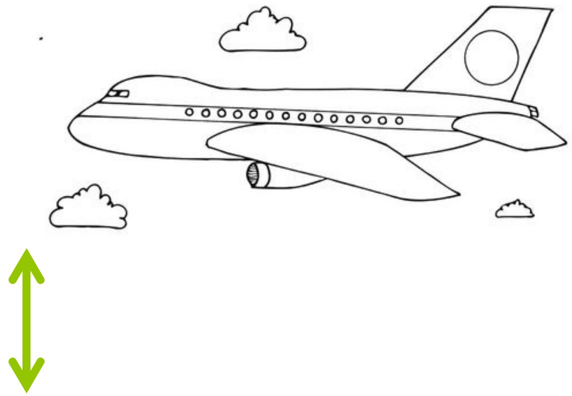
- **Objectif : contrôle de systèmes**

Suivi de consigne



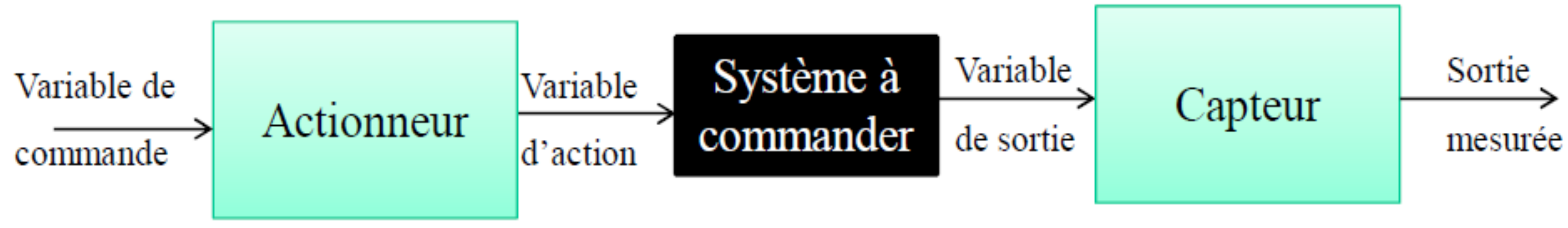
Position de référence

Régulation :
altitude = constante



Commande de systèmes

- Pour commander un système, il faut :
  - - une (plusieurs) variable permettant **d'agir**
    - **Actionneur** → Variable de commande, d'entrée
  - - une (plusieurs) variable permettant de **mesurer** l'état du système
    - **Capteur** → variable de sortie
  - Décrire les **relations dynamiques** entre la commande et la sortie
    - → **Modèle du système**

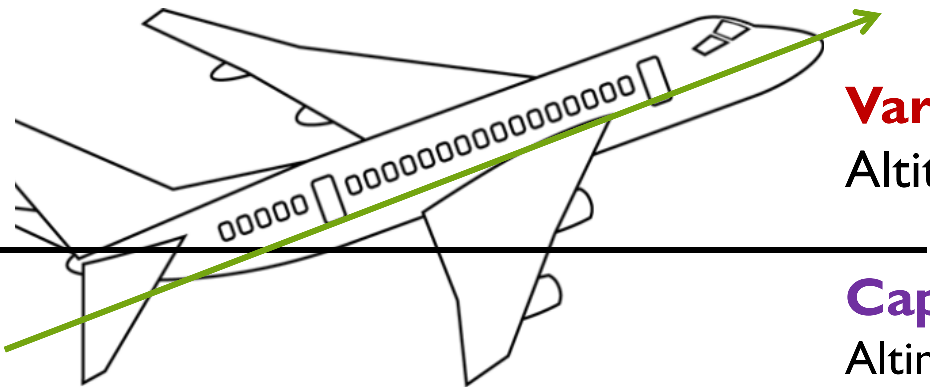


Exemple

Turbulences

Variable d'action :
Angle du gouvernail

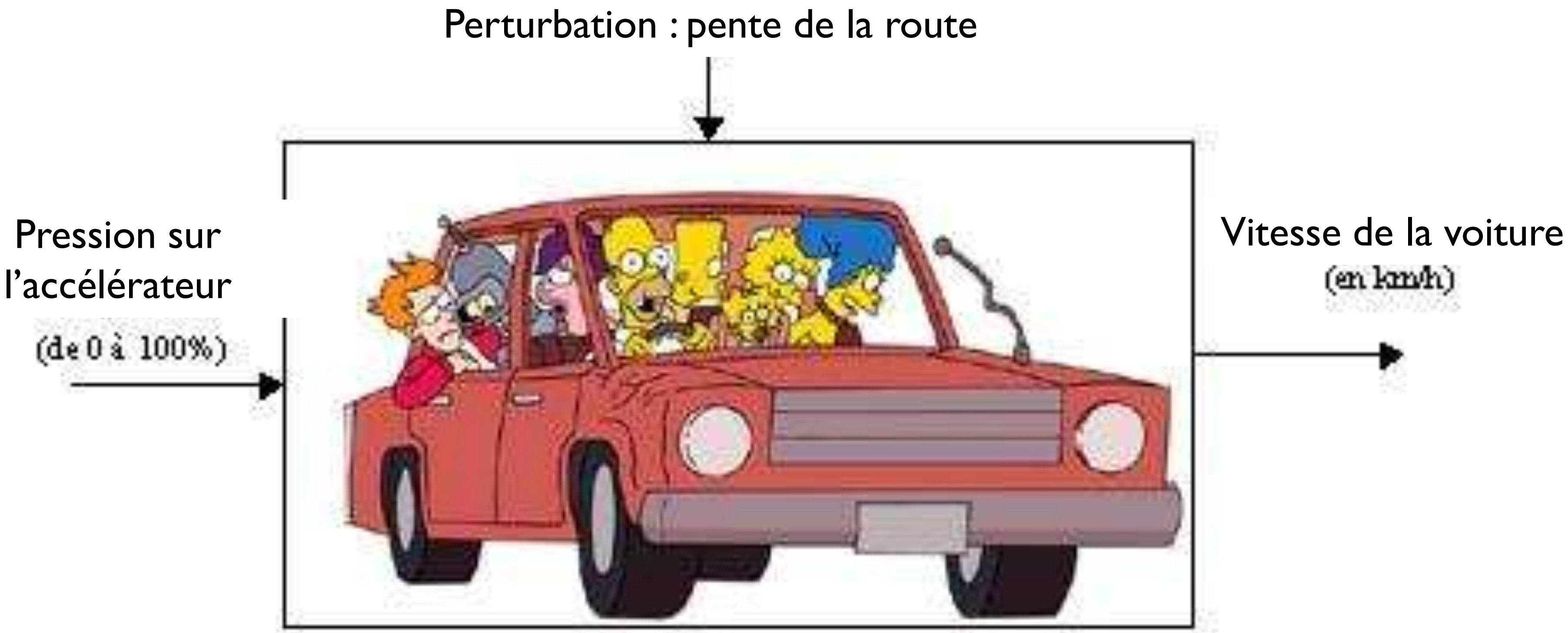
Actionneur :
Moteur asservi en position
Tension → *Angle*



Variable de sortie :
Altitude de l'avion

Capteur :
Altimètre
Altitude → *Tension*

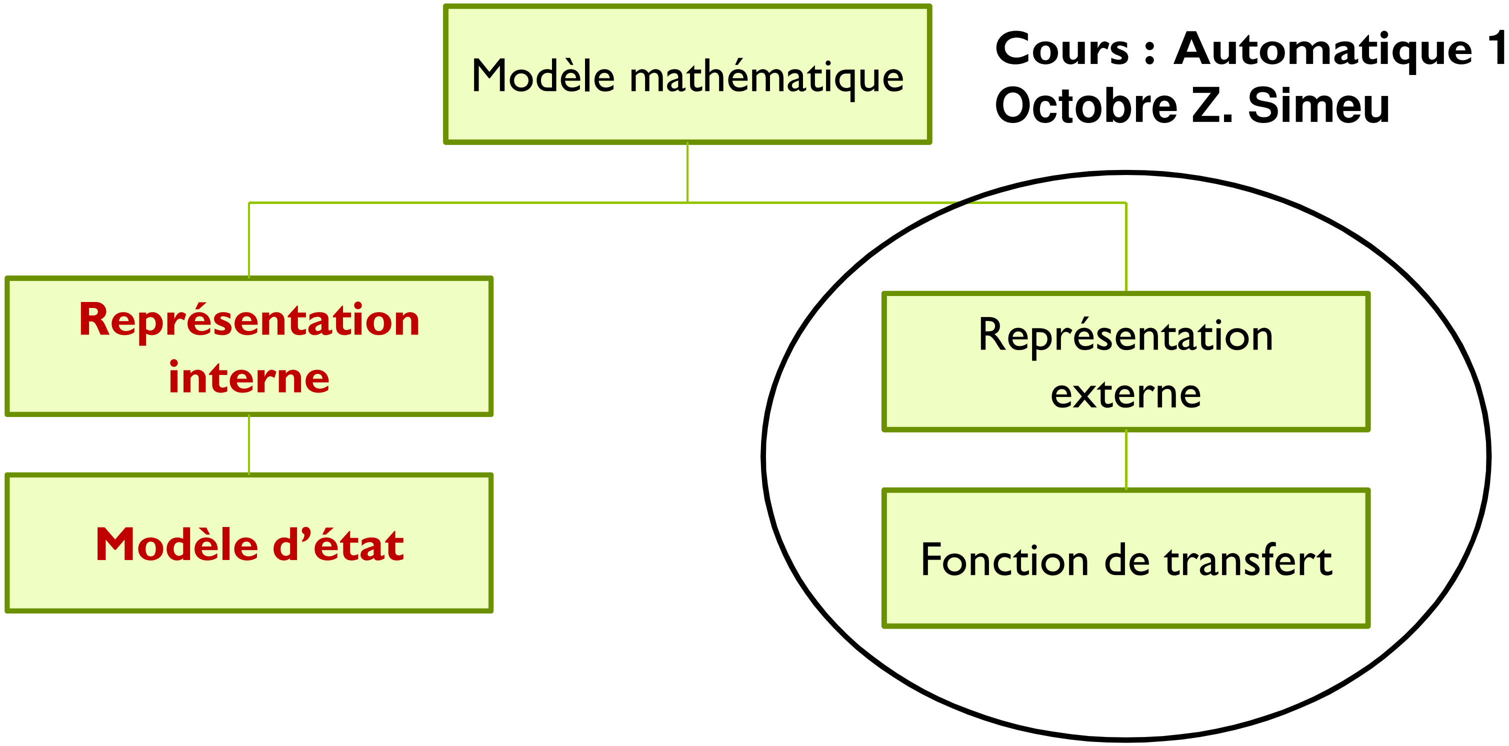
Exemple


Perturbation : pente de la route
Pression sur l'accélérateur
(de 0 à 100%)
Vitesse de la voiture
(en km/h)

Modèle mathématique

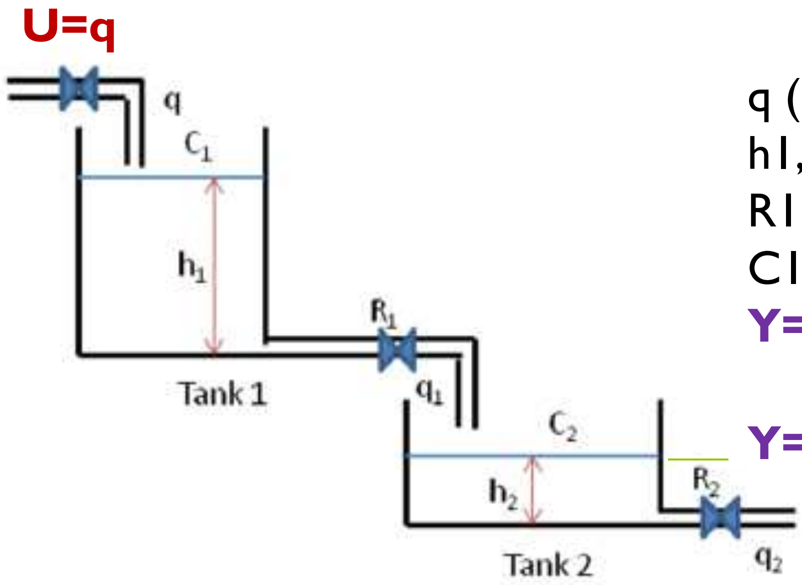
- Décrire les **relations dynamiques** entre variables, et notamment les **entrées** et les **sorties** du système.

Cours : Automatique 1
Octobre Z. Simeu



Système linéaire continu : modèle dynamique **linéaire** à paramètres **invariants** dans le temps

Modèle mathématique



q (m^3/s) : débit volumique **=U**
h1, h2 (m) hauteurs dans bac 1 et 2
R1, R2 (s/m^2) : restrictions
C1, C2 (m^2) : sections
Y=h2

Y=h2

Bilan volumique bac 1 :

Bilan volumique bac 2 :

Fonction de transfert

- Relation dynamique entrée/sortie

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{H_2(p)}{Q(p)}$$

Représentation d'état

- Description du système à partir de ses variables internes → **vecteur d'état**

$$X = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

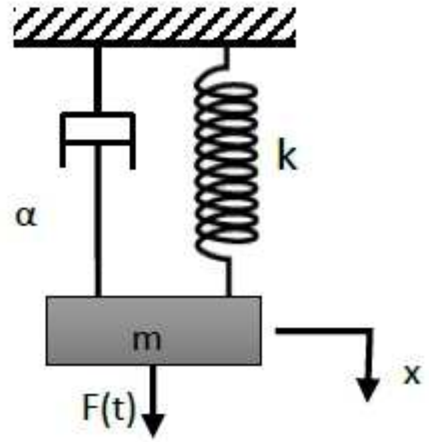
Représentation d'état

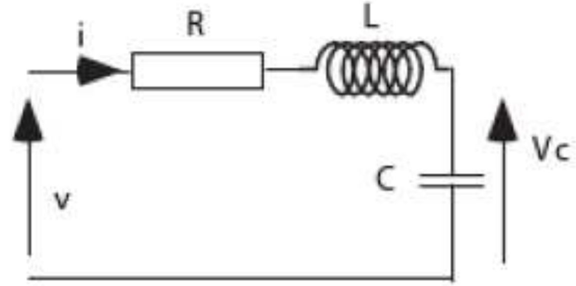
- $X(t)$ est appelé **vecteur d'état du système**
- Par rapport à la fonction de transfert, le modèle d'état donne des **informations sur la représentation interne du système** (h_1, h_2) qui n'apparaissent pas explicitement dans la fonction de transfert
- Le système **d'ordre 2** est converti dans la représentation d'état en :
  - **2** équations différentielles **d'ordre 1** → équation différentielle matricielle
  - une équation **statique** matricielle

Vecteur d’état

L‘**état** d'un système dynamique est le **plus petit ensemble de variables** $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ telles que la connaissance de ces variables à un instant $t = t_o$ et la connaissance du signal d'entrée pour $t \geq t_o$, suffisent à déterminer complètement le comportement du système pour tout $t \geq t_o$.

La concaténation des n **variables d’état** en un vecteur est le **vecteur d’état**.





Intérêt de la représentation d'état

- Le modèle d'état rend compte de la **dynamique interne** du système.

- Le modèle d'état est plus adapté la description de **systèmes multi-variables**.

- Le modèle d'état permet la description de systèmes **non linéaires et non stationnaires**.

- Il se prête bien à l'analyse de **stabilité**, à la synthèse **d'observateurs** …

Plan du cours

- **Chapitre 1: Représentation d'état des systèmes**
- **Chapitre 2:** Réponse des systèmes linéaires
- **Chapitre 3:** Commandabilité, observabilité
- **Chapitre 4:** Commande par retour d'état
- **Chapitre 5:** Observateurs d'état
- **Chapitre 6:** Commande par retour d'état avec observateur

Plan du chapitre

I. **Représentation d'état : définition**

I.I Forme générale

I.II. Simulation analogique

I.III. Non unicité de la représentation d'état

II. Relation entre **fonction de transfert** et **représentation d'état**

II.I. Passage RE→ FT

II.II. Passage FT → RE

I.1 Forme générale

Représentation d'état d'un **système d'ordre n**, d'entrée **U** et de sortie **Y** : **n équations différentielles d'ordre 1**, sous forme matricielle

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= AX + BU \\ Y &= CX + DU \end{aligned}}$$

Équation d'état ou **équation de commande**

Équation de sortie ou **équation d'observation**

- **Variables**
  - **X(t) :** vecteur d'état (n : nombre d'états) $X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$

    $$X(t) \in R^n$$
  - **U(t) :** vecteur des entrées (m : nombre d'entrées) $U(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \ldots \\ u_m(t) \end{bmatrix}$

    $$U(t) \in R^m$$
  - **Y(t) :** vecteur des sorties (p : nombre de sorties) $Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \ldots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$

    $$Y(t) \in R^p$$

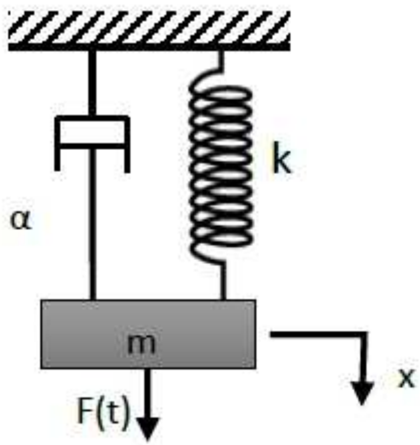
I.I. Forme générale

- **Matrices**
  - **A** : matrice d'états
    $$A \in R^{nxn}$$
  - **B** : matrice d'entrée
    $$B \in R^{nxm}$$
  - **C** : matrice de sortie
    $$C \in R^{pxn}$$
  - **D**: matrice de couplage
    $$D \in R^{pxm}$$
    (souvent D=0)

- L'équation d'état est une **équation dynamique d'ordre 1**
- L'équation de sortie est une **équation statique linéaire** reliant les sorties aux entrées et aux états

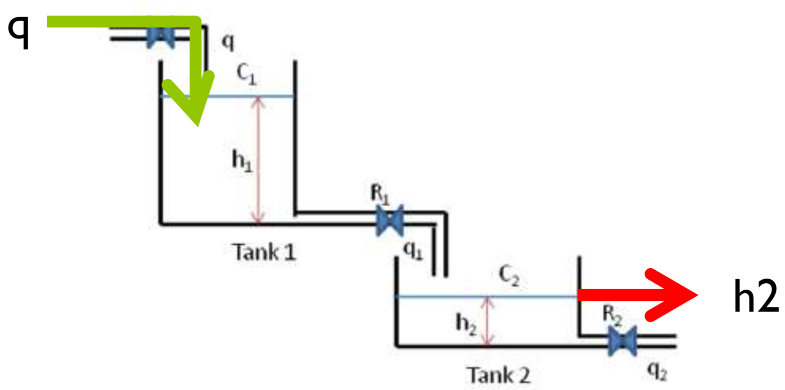
→ La **dynamique du système** dépend de la matrice **A**

Exemple



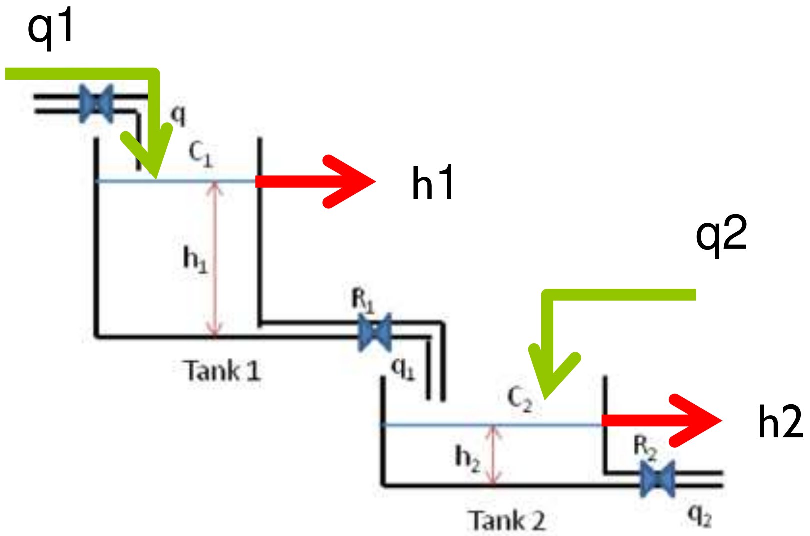
Relation fondamentale de la dynamique :

Exemple



$$\begin{bmatrix} \dfrac{dh_1}{dt} \\ \dfrac{dh_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_1C_1} & 0 \\ \dfrac{1}{R_1C_2} & -\dfrac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \boxed{\begin{bmatrix} \dfrac{1}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix}} q$$

$$Y = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}}$$

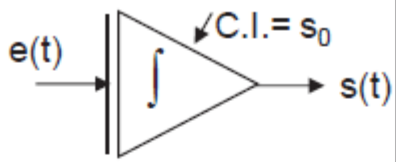
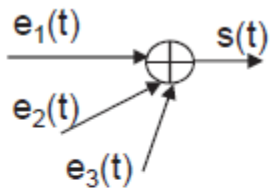
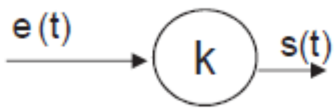


$$\begin{bmatrix} \dfrac{dh_1}{dt} \\ \dfrac{dh_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_1C_1} & 0 \\ \dfrac{1}{R_1C_2} & -\dfrac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \boxed{\begin{bmatrix} \dfrac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{C_2} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

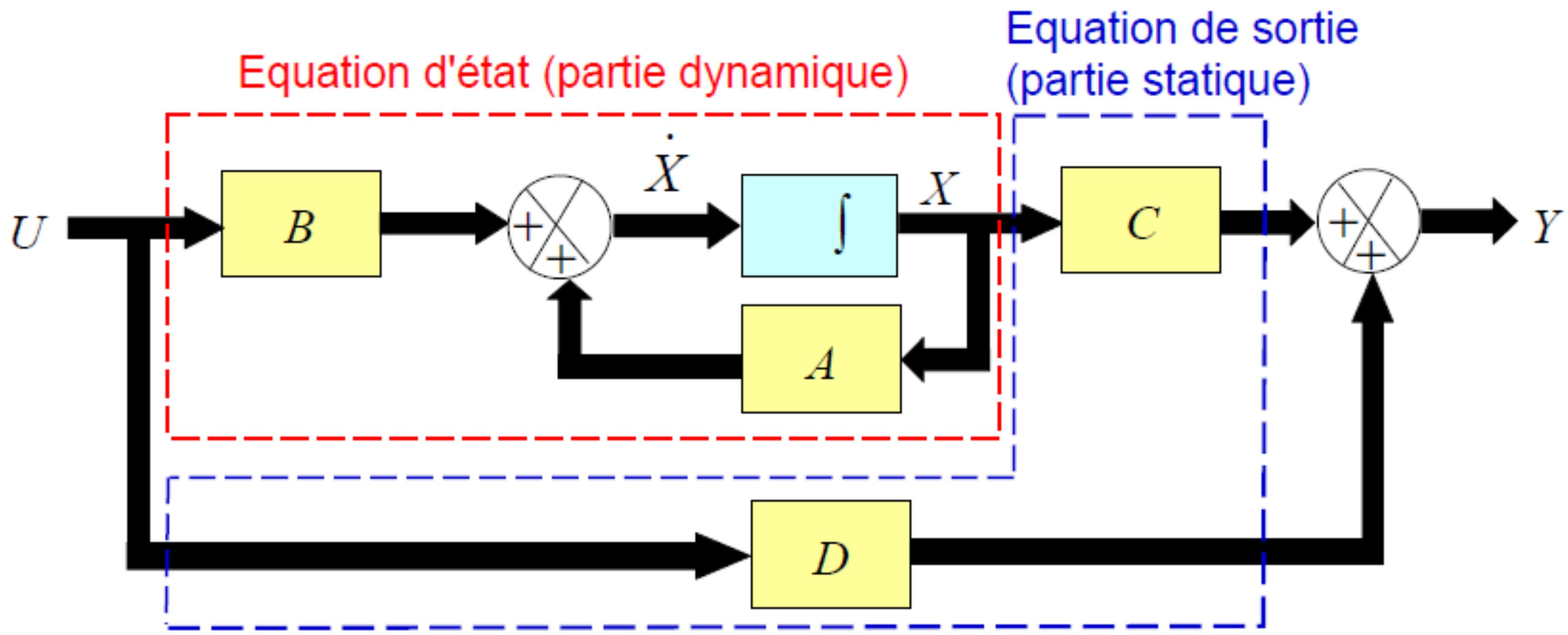
$$Y = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}}$$

I.II. Simulation analogique

- **Simulation :** reproduire le comportement d'un système dans des conditions diverses à l'aide d'un simulateur
  - Simulateur numérique : algorithme d'intégration
  - Simulateur analogique : intégration analogique

Intégrateur		$s(t) = s_0 + \int_0^t e(\tau)d\tau$
Sommateur		$s(t) = e_1(t) + e_2(t) + e_3(t)$
potentiomètre		$s(t) = k.e(t)$

I.II. Simulation analogique



- **Equation d'état** : vue interne du système
- **A** : interactions dynamiques entre les différents éléments internes
- **B** : action des entrées sur l'évolution dynamique du système
- **C** : capteurs permettant d'obtenir les sorties
- **D** : couplage direct entre entrées et sorties

I.II. Schéma analogique

- Une variable d'état→ un intégrateur

$$\begin{bmatrix} \frac{dh_1}{dt} \\ \frac{dh_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1C_1} & 0 \\ \frac{1}{R_1C_2} & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \end{bmatrix} q$$

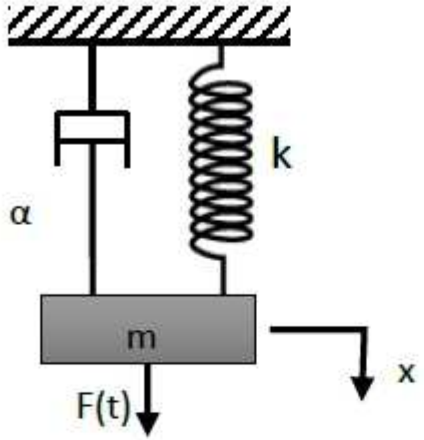
$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

C1=C2=1m²
R1=0.5 ; R2=1s/m²

$$\begin{bmatrix} \frac{dh_1}{dt} \\ \frac{dh_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} q$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

I.II. Schéma analogique

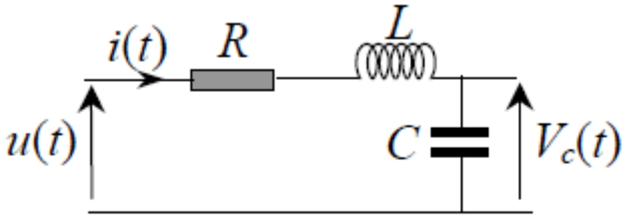


$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dX}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{\alpha}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} F$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X$$

I.III. Non unicité de la représentation d'état

Exemple : Circuit RLC



$$U = Ri + L\frac{di}{dt} + V$$

$$V_c = \frac{q}{C}\,;\, i = \frac{dq}{dt}\,;\, \Phi = Li$$

Variables d'état : V, i

Variables d'état : Φ , q

I.III. Non unicité de la représentation d'état

$$X = \begin{bmatrix} V \\ i \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} q \\ \Phi \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

$$X = TZ$$

Généralisation

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases}$$

Soit T, nxn, inversible / X=TZ

T : matrice de changement de base

$$\begin{cases} T\frac{dZ}{dt} = ATZ + BU \\ Y = CTZ + DU \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dZ}{dt} = T^{-1}ATZ + T^{-1}BU \\ Y = CTZ + DU \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{dZ}{dt} = A'Z + B'U \\ Y = C'Z + DU \end{cases}$$

Choix des variables d'état

- On choisit souvent des éléments du système susceptibles d'être des réservoirs d'énergie.

Elément	Energie	Etat
Inductance	$\frac{1}{2}Li^2$	i
Condensateur	$\frac{1}{2}CV_c^2$	V_c
Masse m	$\frac{1}{2}mv^2$	$v = dx/dt$ x
Ressort k	$\frac{1}{2}kx^2$	x

Elément	Energie	Etat
Moment d'inertie J	$\frac{1}{2}m\omega^2$	$\omega = d\theta/dt$ θ
Colonne de fluide de pression p	$\frac{1}{2}(V/\beta)p^2$	p
Colonne de fluide de hauteur h	$\frac{1}{2}\rho A h^2$	h

Plan du chapitre

I. Représentation d'état : définition

I.I Forme générale

I.II. Simulation analogique

I.III. Non unicité de la représentation d'état

II. Relation entre fonction de transfert et représentation d'état

II.I. Passage RE→ FT

II.II. Passage FT → RE

II.I. Passage RE→ FT

$$\frac{dX}{dt} = AX + BU \qquad \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} pX = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (pI - A)X = BU \\ Y = CX + DU \end{cases}$$

$$Y = CX + DU$$

$$\begin{cases} X = (pI - A)^{-1} BU \\ Y = CX + DU \end{cases} \qquad Y = C(pI - A)^{-1} BU + DU$$

$$\frac{Y}{U} = F(p) = C(pI - A)^{-1} B + D$$

$$F(p) = C \frac{1}{\det(pI - A)} com(pI - A)^T B + D$$

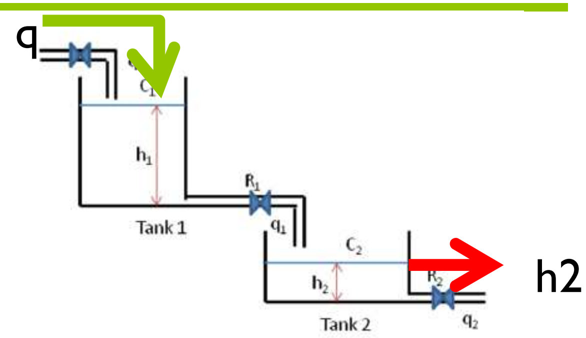
Les **pôles** de la FT sont inclus dans les **valeurs propres de A**

Dynamique du système : valeurs propres de A

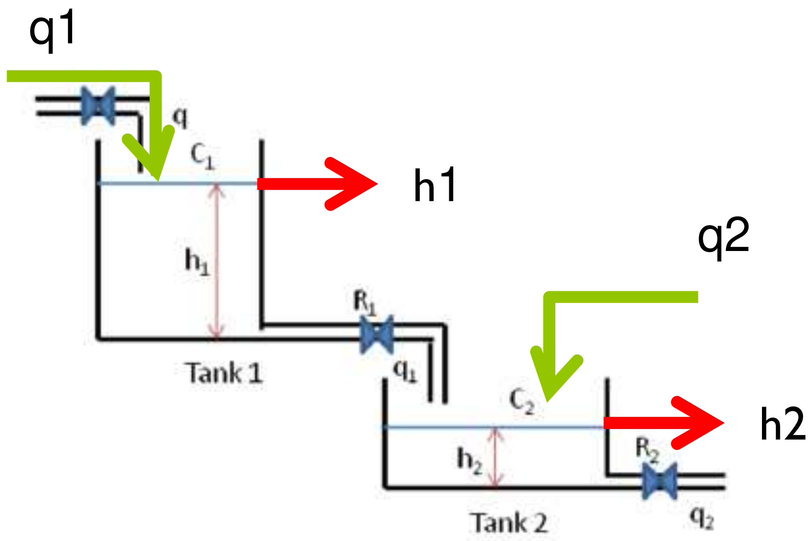
Exemple : Cas mono-variable

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dh_1}{dt} \\ \dfrac{dh_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} q$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$



Exemple : Cas multi-variable



C1=C2=1m2

R1=0.5 ; R2=1s/m2

$$\begin{bmatrix} \frac{dh_1}{dt} \\ \frac{dh_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

$$com(pI - A)^T = \begin{bmatrix} p+1 & 0 \\ 2 & p+2 \end{bmatrix}$$

Cas multivariable

$$\frac{dX}{dt} = AX + B\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad Y = C\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Signification de la matrice de transfert

$$H(p) = \begin{bmatrix} H_{11}(p) & H_{12}(p) \\ H_{21}(p) & H_{22}(p) \end{bmatrix}$$

$$H_{11}(p) = \frac{y_1}{u_1} \qquad H_{12}(p) = \frac{y_1}{u_2}$$

$$H_{21}(p) = \frac{y_2}{u_1} \qquad H_{22}(p) = \frac{y_2}{u_2}$$

$$Y(p) = H(p)U(p)$$

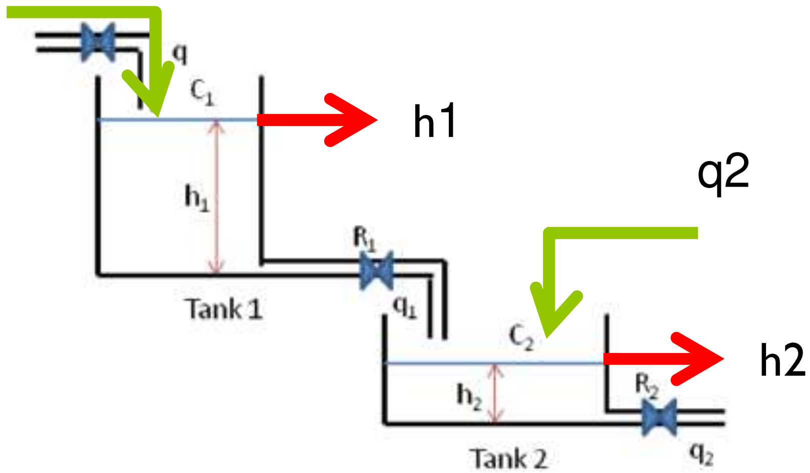
$$Y_1(p) = H_{11}(p)U_1(p) + H_{12}(p)U_2(p)$$

$$Y_2(p) = H_{21}(p)U_1(p) + H_{22}(p)U_2(p)$$

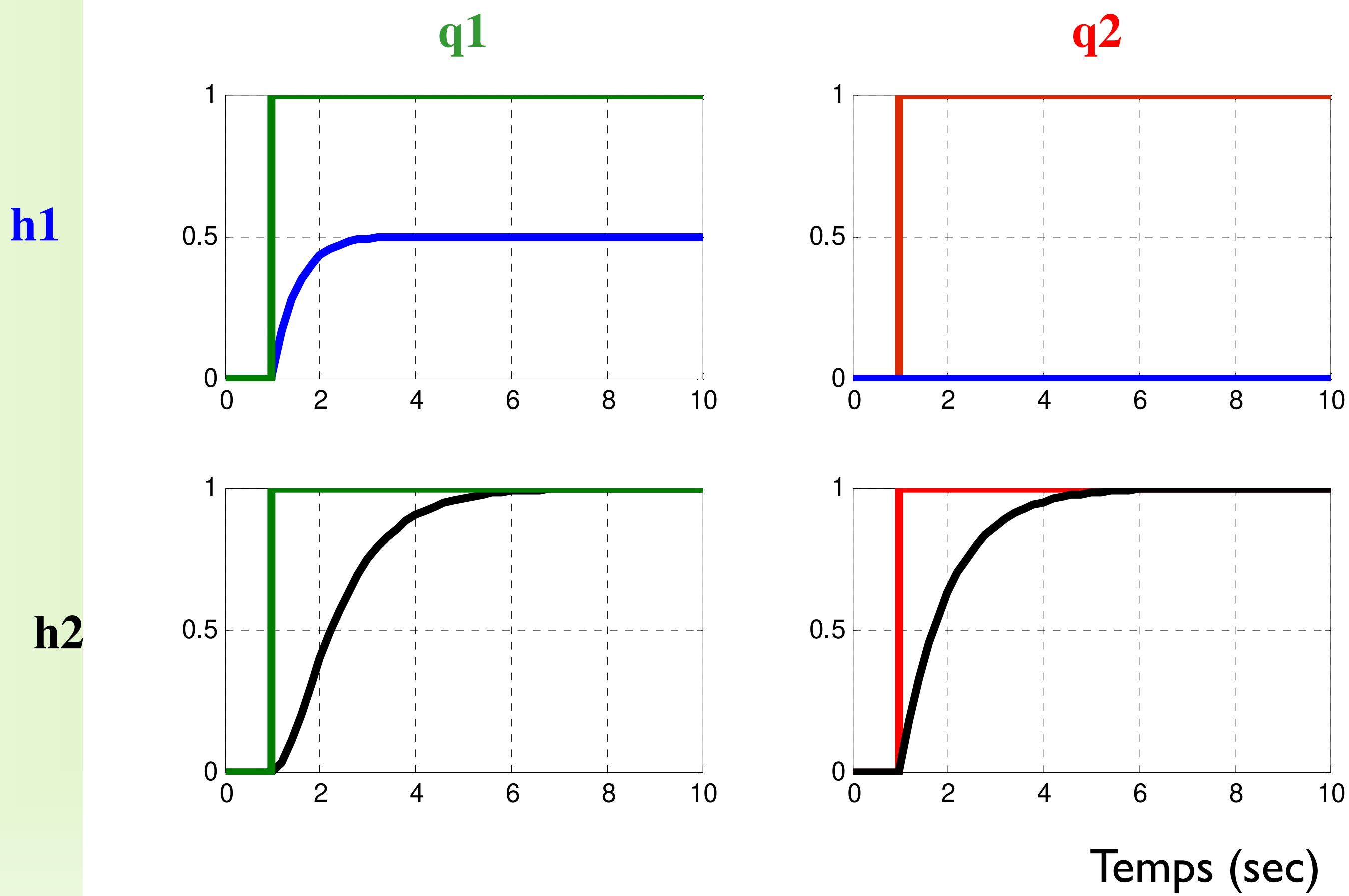
$$H(p) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(p+2)} & 0 \\ \dfrac{2}{(p+1)(p+2)} & \dfrac{1}{(p+1)} \end{bmatrix}$$

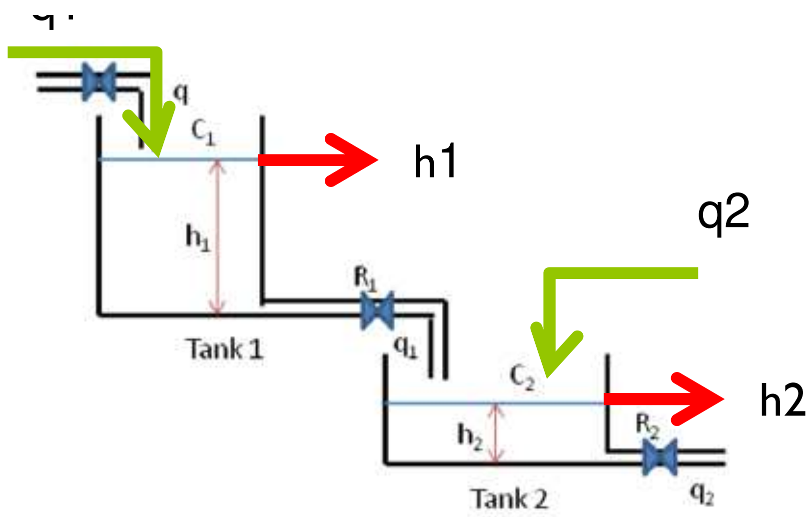
$$h_1(p) = \frac{1}{(p+2)} q_1(p)$$

$$h_2(p) = \frac{2}{(p+1)(p+2)} q_1(p) + \frac{1}{(p+1)} q_2(p)$$

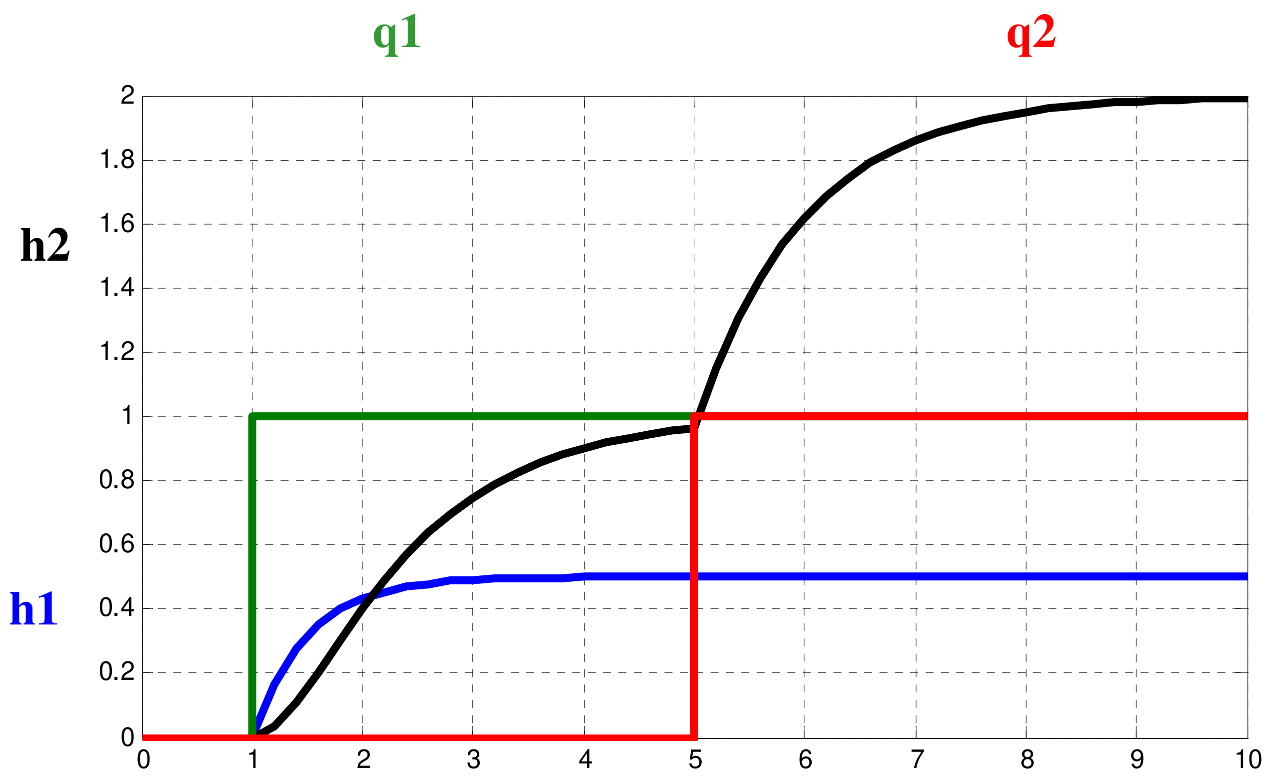


$$H(p) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(p+2)} & 0 \\ \dfrac{2}{(p+1)(p+2)} & \dfrac{1}{(p+1)} \end{bmatrix}$$

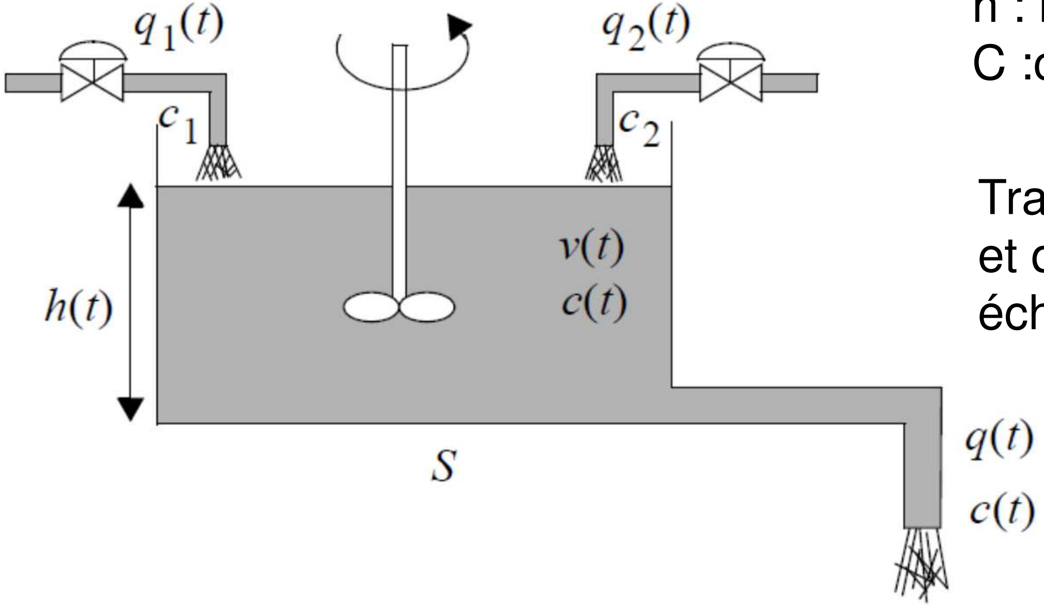




$$H(p) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(p+2)} & 0 \\ \dfrac{2}{(p+1)(p+2)} & \dfrac{1}{(p+1)} \end{bmatrix}$$



Exemple



h : niveau (m)
C :concentration

Tracer C(t) quand q_1 et q_2 sont des échelons unitaires

$$\begin{cases} S\dfrac{dh}{dt} = q_1 + q_2 - \dfrac{h}{R_1} \\ \dfrac{dC}{dt} = -q_0 C + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 \end{cases}$$

S=1, R1=1, q0=2

$$\frac{1}{s(s+a)} \qquad \frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$$

II.II Passage F.T.→ R.E.

$$\frac{dX}{dt} = AX + BU$$
$$Y = CX + DU$$

Soit T, nxn, inversible / X=TZ

$$\begin{cases} \frac{dZ}{dt} = A'Z + B'U \\ Y = C'Z + DU \end{cases}$$

La représentation d'état d'un système **n'est pas unique.**

mais $A \text{ et } A' = T^{-1}AT$ **sont semblables**

= elles ont **les mêmes valeurs propres**

→ Dynamique du système est conservée.

Il existe une unique FT pour un système donné

$$\frac{Y}{U} = C'(pI - A')^{-1}B' = CT(pI - T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B$$

$$\frac{Y}{U} = CT\left[T^{-1}(pI - A)T\right]^{-1}T^{-1}B \quad \frac{Y}{U} = CT\left[T^{-1}(pI - A)^{-1}T\right]T^{-1}B$$

$$\frac{Y}{U} = C(pI - A)^{-1}B$$

II.II. Passage FT→ RE

- **Position du problème**

  A partir d'une **FT**, est-il possible de déterminer **une représentation d'état** (une seule ou la plus simple possible)?

$$\frac{Y}{U}=\frac{b_{n-1}p^{n-1}+b_{n-2}p^{n-2}+....+b_0}{a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+....+a_0} \quad \rightarrow (A,B,C,D)$$

  - Ce problème est dénommé **problème de réalisation**

- On peut trouver autant de représentations d'état qu'on veut. Néanmoins il existe quelques **formes remarquables** exposées ci-après.

II.II. Passage F.T.→ R.E. : Forme canonique de commandabilité

$$\frac{Y}{U}=\frac{b_{n-1}p^{n-1}+b_{n-2}p^{n-2}+....+b_0}{p^n+a_{n-1}p^{n-1}+....+a_0}=\frac{N(p)}{D(p)}$$

Posons $\begin{cases}\boxed{\dfrac{dx_i}{dt}=x_{i+1}\ \text{pour}\ i=1} \text{ à n - 1}\\ \boxed{x_1=\dfrac{1}{D(p)}U(p)}\end{cases}$ $\boxed{\Rightarrow \mathrm{Y}=\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{D}}U=Nx_1}$

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_2=px_1\\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_3=px_2=p^2x_1\\ ....\\ \dfrac{dx_{n-1}}{dt}=x_n=p^{n-1}x_1\end{cases}$$

$$U=p^nx_1+a_{n-1}p^{n-1}x_1+...+a_0x_1$$

$$u=\frac{dx_n}{dt}+a_{n-1}x_n+a_{n-2}x_{n-2}+...+a_0x_1$$

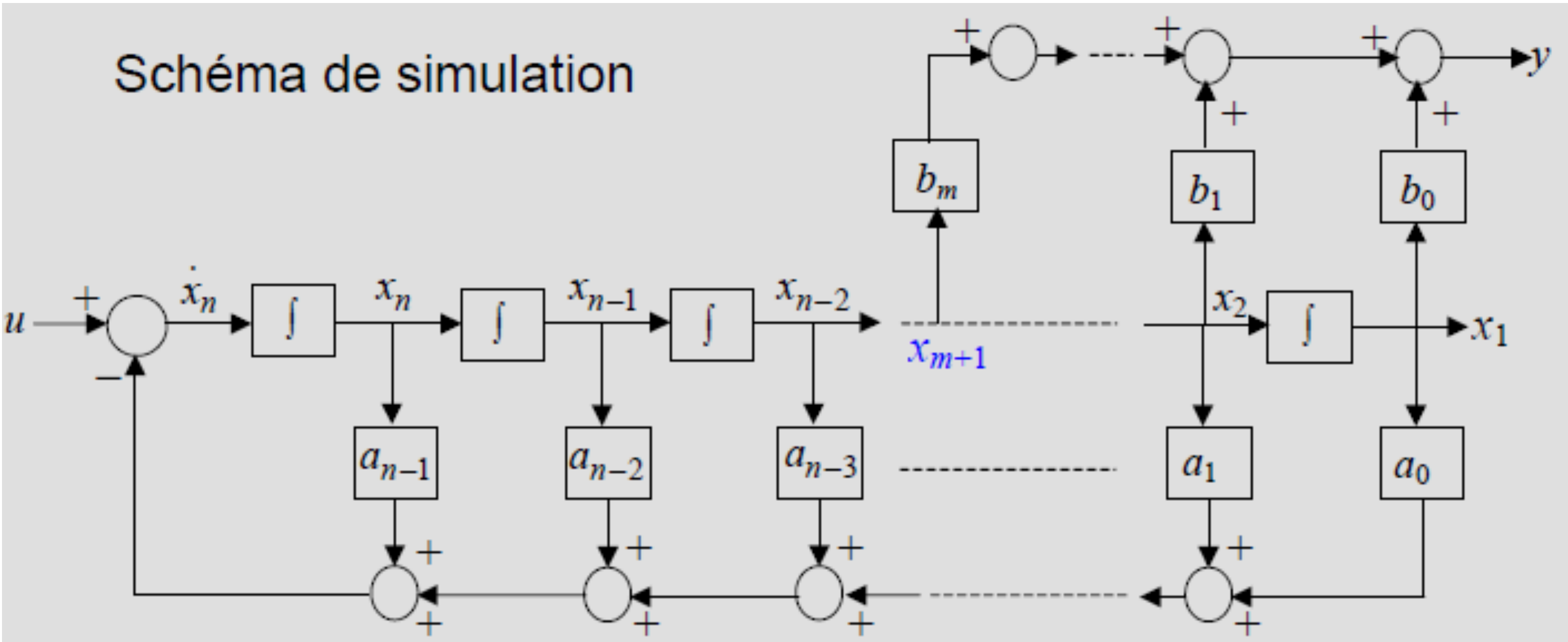
$$Y=(b_{n-1}p^{n-1}+...+b_0)x_1=b_{n-1}x_n+b_{n-2}x_{n-1}+...+b_0x_1$$

$$\frac{dX}{dt}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & ... & 0\\ 0 & 0 & 1 & ... & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ ... & & & & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & ... & -a_{n-1}\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}0\\0\\...\\0\\1\end{bmatrix}U \qquad Y=\begin{bmatrix}b_0 & b_1 & ... & ... & b_{n-1}\end{bmatrix}X$$

II.II. Passage F.T.→ R.E. : Forme canonique de commandabilité

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} U$$

$$Y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & \dots & b_{n-1} \end{bmatrix} X$$



Exemple

Donner la représentation d'état sous forme canonique de commandabilité ainsi que le schéma analogique du système décrit par :

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 4\frac{d^2 y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 2y = u$$

II.II. Passage F.T.→ R.E. : Forme canonique d'observabilité

$$\frac{Y}{U} = \frac{b_{n-1}p^{n-1} + b_{n-2}p^{n-2} + \dots + b_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

$$Y(p) \times (p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0) = (b_{n-1}p^{n-1} + b_{n-2}p^{n-2} + \dots + b_0) \times U(p)$$

$$p^n Y(p) = -(a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_0)Y + (b_{n-1}p^{n-1} + b_{n-2}p^{n-2} + \dots + b_0) \times U$$

On pose : $\dfrac{dx_{i+1}}{dt} = x_i - a_i y + b_i u \quad \text{pour i} = 1 \text{ à n - 1 } x_0 = 0$

$$p^n Y = -\sum_{i=0}^{n-1} a_i p^i Y + \sum_{i=0}^{n-1} b_i p^i U = \sum_{i=0}^{n-1} (-a_i Y + b_i U) p^i$$

$$p^n Y = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{dx_{i+1}}{dt} - x_i\right) p^i$$

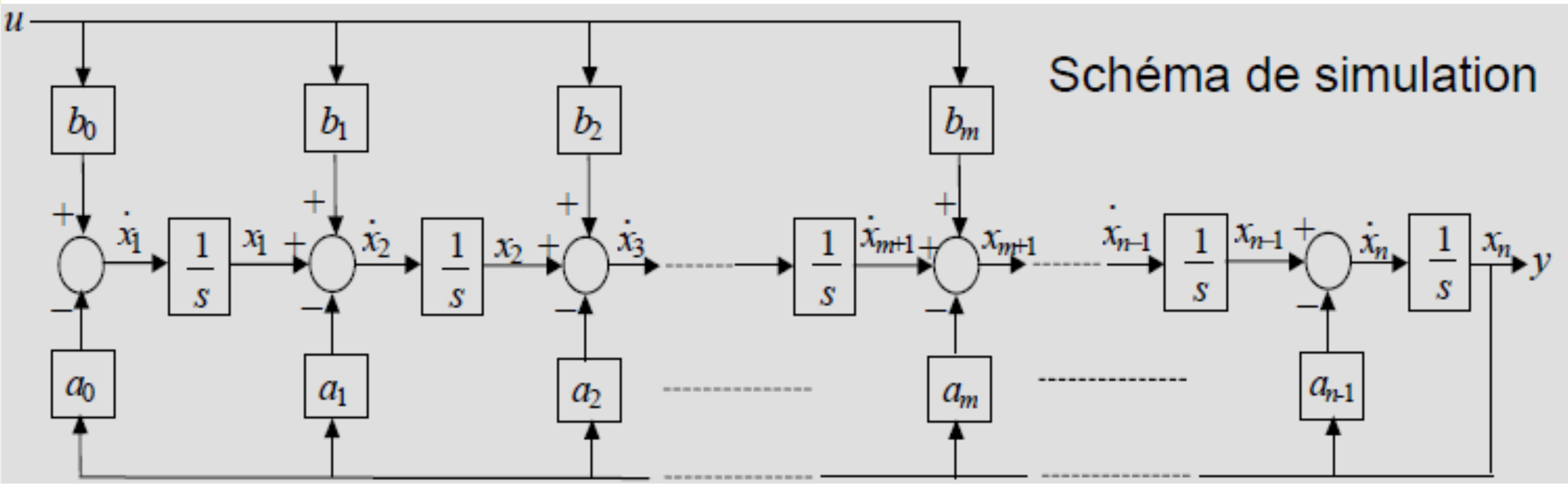
$$p^n Y = \sum_{i=0}^{n-1} (p^{i+1} x_{i+1} - p^i x_i) = p^n x_n - p^{n-1} x_{n-1} + p^{n-1} x_{n-1} - p^{n-2} x_{n-2} + \dots + p x_1 + x_0$$

$$p^n Y = p^n x_n \Rightarrow y = x_n$$

II.II. Passage F.T.→ R.E. : Forme canonique d'observabilité

$$y = x_n \qquad \frac{dx_{i+1}}{dt} = x_i - a_i y + b_i u \ \text{ pour } \ i = 0 \text{ à } n-1 \text{ et } x_0 = 0$$

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a_2 \\ \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ \dots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} U \ ; \ Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} X$$



Exemple

Donner la représentation d'état sous forme canonique d'observabilité ainsi que le schéma analogique du système décrit par :

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 4\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 2y = u \Rightarrow \frac{Y}{U} = \frac{1}{p^3 + 4p^2 + 5p + 2}, \quad y = x_3.$$

$$\frac{dx_{i+1}}{dt} = x_i - a_i y + b_i u$$

$$\begin{cases} \frac{dx_3}{dt} = x_2 - 4y = x_2 - 4x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 - 5y = x_1 - 5x_3 \\ \frac{dx_1}{dt} = -2y + u = -2x_3 + u, \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \ 0 \ 1] X.$$

Passage F.T.→ R.E. : Forme diagonale ou forme de Jordan

- La FT est décomposée en **éléments simples** → faire apparaître **les modes propres du système**.

F(p) composée de **pôles simples** :

$$\frac{Y}{U} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{p-\lambda_i} \; ; \beta_i \text{ réels}$$ → **Forme diagonale**

$$X_i(p) = \frac{U(p)}{p-\lambda_i} \Rightarrow pX_i(p) = \lambda_i X_i + U$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \lambda_i x_i + u(t) \;\; \text{pour} \;\; \mathrm{i} = 1,\ldots,\mathrm{n}$$

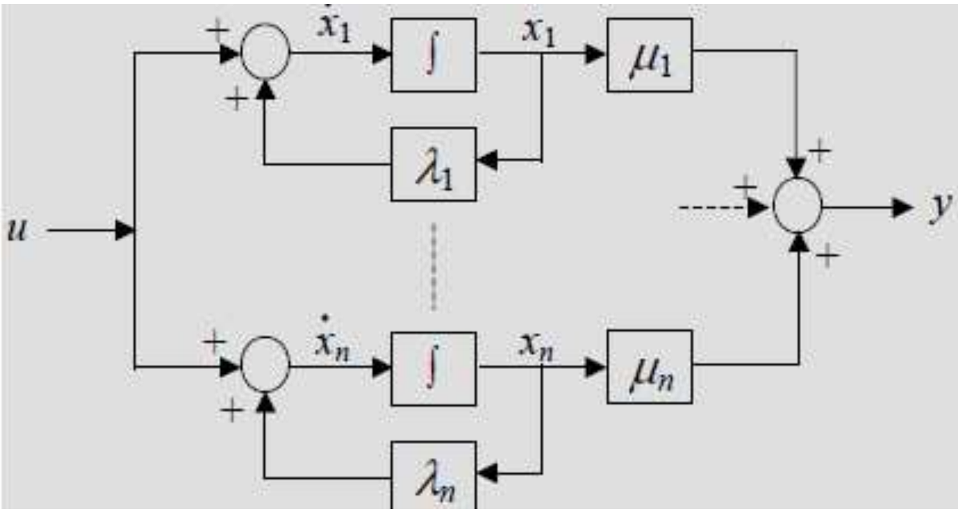
$$Y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{p-\lambda_i} \mathrm{U} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i(p) \qquad y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$$

Passage F.T.→ R.E. : Forme diagonale ou forme de Jordan

$$\frac{dx_i}{dt} = \lambda_i x_i + u(t) \;\; \text{pour} \;\; \mathrm{i} = 1,\ldots,\mathrm{n} \qquad y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$$

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_n \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} U \;\; ; \;\; Y = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_n \end{bmatrix} X$$

A : diagonale. λ_i : Valeurs propres = pôles



Forme diagonale ou **forme de Jordan**

Pôles multiples réels :

$$\frac{Y}{U} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{(p-\lambda)^i} \quad ; \lambda \text{ réel}$$

$$X_1 = \frac{U}{(p-\lambda)} \Rightarrow \frac{dx_1}{dt} = \lambda x_1 + u$$

$$X_2 = \frac{U}{(p-\lambda)^2} = \frac{X_1}{(p-\lambda)} \Rightarrow \frac{dx_2}{dt} = \lambda x_2 + x_1$$

$$X_n = \frac{U}{(p-\lambda)^n} = \frac{X_{n-1}}{(p-\lambda)} \Rightarrow \frac{dx_n}{dt} = \lambda x_n + x_{n-1}$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{(p-\lambda)^i} U = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$$

Forme diagonale ou **forme de Jordan**

$$\frac{dx_2}{dt} = \lambda x_2 + x_1 \qquad Y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{(p-\lambda)^i} U = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i$$

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U \quad ; \quad Y = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_n \end{bmatrix} X$$

→ **Forme de Jordan**

Pôles complexes conjugués :

On ne sait pas résoudre le problème

→ Forme de commandabilité ou d’observabilité

Exemple

Donner la représentation d'état sous forme de Jordan que le schéma analogique du système décrit par :

$$\frac{Y}{U} = \frac{1}{p^3 + 4p^2 + 5p + 2} = \frac{1}{(p+1)^2(p+2)}$$

Décomposition en éléments simples

$$\frac{Y}{U} = \frac{a}{p+2} + \frac{b}{p+1} + \frac{c}{(p+1)^2} = \frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2}$$

$$\begin{cases} X_1 = \frac{U}{p+2}. \Rightarrow \frac{dx_1}{dt} = -2x_1 + u. \\ X_2 = \frac{U}{p+1}. \Rightarrow \frac{dx_2}{dt} = -x_2 + u \\ x_3 = \frac{U}{(p+1)^2} = \frac{X}{p+1}. \Rightarrow \frac{dx_3}{dt} = -x_3 + x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$Y = \left[\frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(p+1)^2}\right] U = x_1 - x_2 + x_3 \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} X.$$

Exemple

Plan du cours

- Chapitre 1: Représentation d'état des systèmes
- **Chapitre 2: Réponse des systèmes linéaires**
- Chapitre 3: Commandabilité, observabilité
- Chapitre 4: Commande par retour d'état
- Chapitre 5: Observateurs d'état
- Chapitre 6: Commande par retour d'état avec observateur

Réponse des systèmes linéaires

I. **Solution de l'équation d'état**

II. Calcul de la matrice de transition

III. Stabilité des systèmes

I. Résolution de l'équation d'état

- **Systèmes linéaires invariants → équations d'états résolubles**

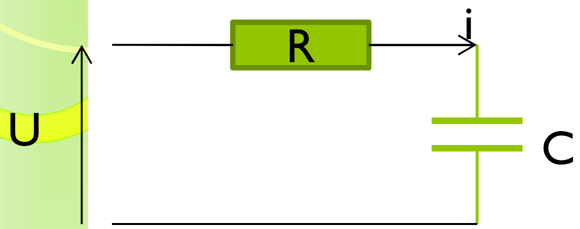
On peut calculer la réponse d'un système à partir d'un état initial pour des entrées connues.

- **Réponse du système**

somme de :

- **Réponse libre** : système abandonné à lui-même
- **Réponse forcée** : système soumis à u(t) à partir de l'équilibre

I. Cas d'un système mono-dimentionnel



$$U = Ri + \frac{q}{C}$$

$$\rightarrow \frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC} + \frac{U}{R}$$

$$\frac{dx}{dt} = ax + bu$$

Réponse libre : U=0

à $t=t_o$, $q(t_o)=q_o$ $$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC}$$

Solution générale :

$$q(t) = \alpha e^{-\frac{t}{RC}}$$

Conditions initiales :

$$q_0 = \alpha e^{-\frac{t_0}{RC}} \qquad \alpha = q_0 e^{\frac{t_0}{RC}}$$

$$\boxed{q(t) = q_0 e^{-\frac{(t-t_0)}{RC}}}$$

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

$$x(t) = \alpha e^{at}$$

$$x_0 = \alpha e^{at_0}$$

$$\boxed{x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}}$$

I. Réponse forcée

- **Conditions initiales nulles : q_0=0**

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC} + U$$

$$\frac{dx}{dt} = ax + bu$$

Méthode de la variation de la constante

$$q(t) = \beta(t)e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d\beta}{dt}e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{1}{RC}\beta e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{1}{RC}\beta e^{-\frac{t}{RC}} + U$$

$$\frac{d\beta}{dt}e^{-\frac{t}{RC}} = U \rightarrow \frac{d\beta}{dt} = Ue^{\frac{t}{RC}} \rightarrow \beta = \int_0^t e^{\frac{\tau}{RC}} U(\tau)d\tau$$

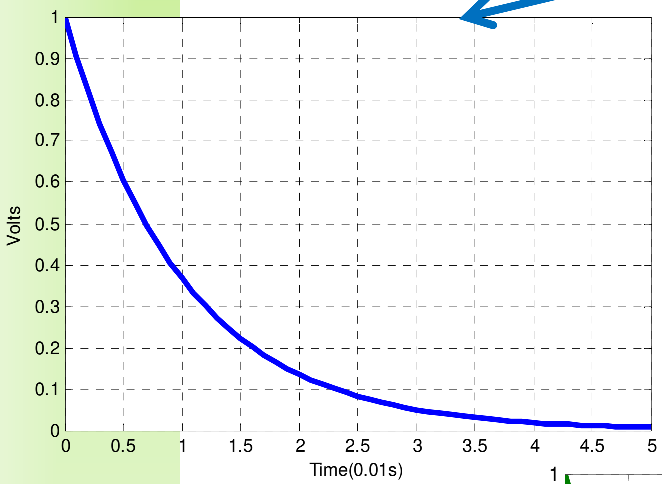
$$q(t) = (\int_0^t e^{\frac{\tau}{RC}} U(\tau)d\tau)e^{-\frac{t}{RC}} = \int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{RC}} U(\tau)d\tau$$

$$\boxed{x(t) = \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau)d\tau}$$

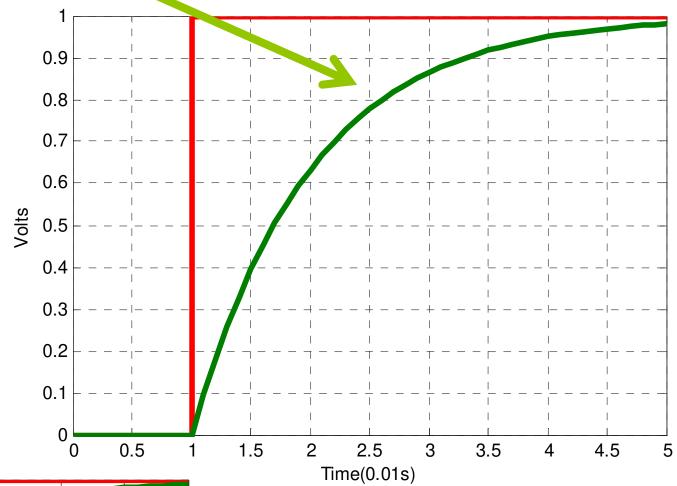
I. Réponse

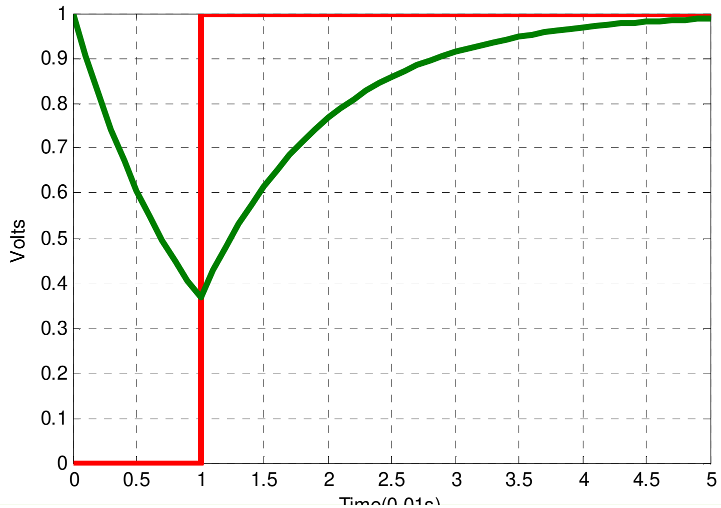
- Réponse libre + réponse forcée

$$q(t) = q_0 e^{-\frac{(t-t_0)}{RC}} + \int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{RC}} U(\tau)d\tau$$



+





$$x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)}$$

$$+ \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau)d\tau$$

I. Cas multi-dimensionnel

$$\frac{dX}{dt} = AX + BU \quad X(t_0) = X_0$$

Réponse libre

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} X_0$$

Réponse forcée

$$X(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} BU(\tau) d\tau$$

Solution générale

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} X_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} BU(\tau) d\tau$$

$$e^{At} = \Phi(t)$$

Matrice de transition

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!}$$

I. Propriétés de Φ(t)

$$\Phi(0) = e^{A0} = I$$

$$\Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0)$$

$$\Phi(t)^{-1} = \Phi(-t)$$

$$\Phi(t)^{n} = \Phi(nt)$$

$$\Phi(t_1 + t_2) = \Phi(t_1)\Phi(t_2) = \Phi(t_2)\Phi(t_1)$$

Attention !

$$e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt} \quad \text{ssi} \quad AB = BA$$

Réponse des systèmes linéaires

I. Solution de l'équation d'état

II. Calcul de la matrice de transition

II.I. Par développement limité

II.II. Par transformée de Laplace

II.III. Par diagonalisation de A

III. Stabilité des systèmes

II.I. Développement limité

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!}$$

幂零

Si A est nilpotente, il existe k tel que $A^k = 0$

Exemple $\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $e^{At} = I + At = \begin{bmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Réponse libre

$X(t) = e^{A(t)} X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ 1 \end{bmatrix}$

II.II. Transformée de Laplace

$e^{At} = \Phi(t)$ est la solution de $\dfrac{dX}{dt} = AX$

D'après la transformée de Laplace

$$pX - X_0 = AX \rightarrow (\mathrm{pI - A})X = X_0$$

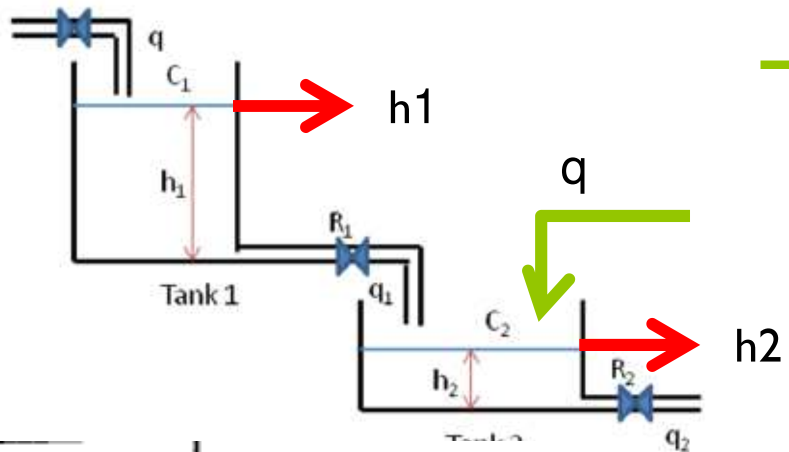
$$X = (\mathrm{pI - A})^{-1} X_0$$

T.L.$^{-1}$

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{At}} = L^{-1}((\mathrm{pI - A})^{-1})}$$

Exemple :

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U$$



$$\begin{bmatrix} \dfrac{dh_1}{dt} \\ \dfrac{dh_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} q$$

$\dfrac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$
$\dfrac{1}{s+a}$	e^{-at}

$$(pI - A) = \begin{bmatrix} p+2 & 0 \\ -2 & p+1 \end{bmatrix}$$

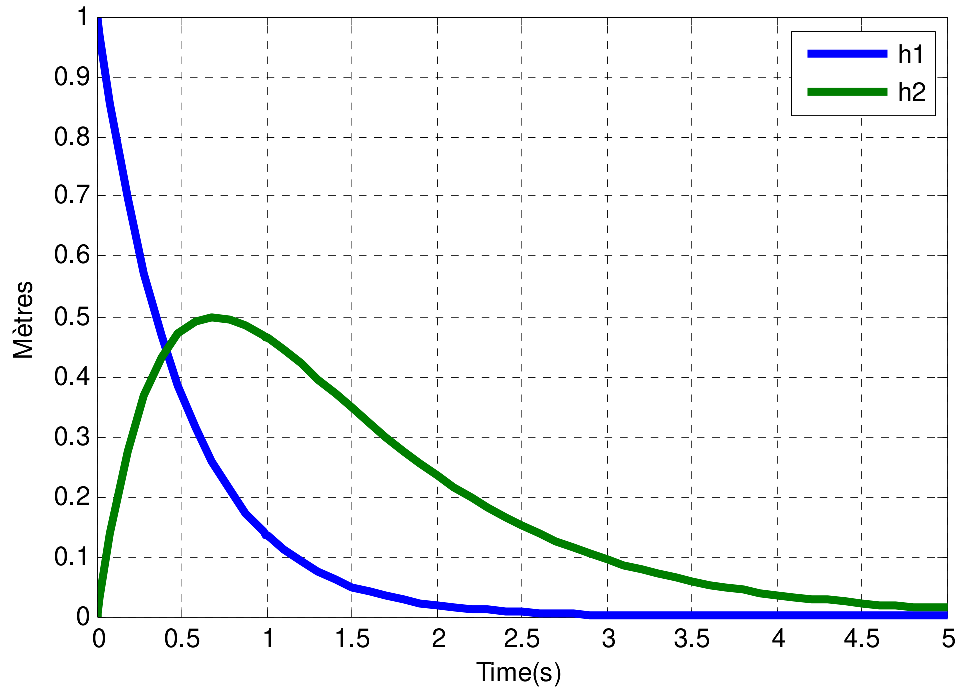
$$(pI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{p+2} & 0 \\ \dfrac{2}{(p+1)(p+2)} & \dfrac{1}{p+1} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ -2e^{-2t} + 2e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix} = \phi(t).$$ est la solution.

Réponse libre

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ -2e^{-2t}+2e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix} \qquad X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X(t) = e^{At} X_0 = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{-2t}+2e^{-t} \end{bmatrix}$$



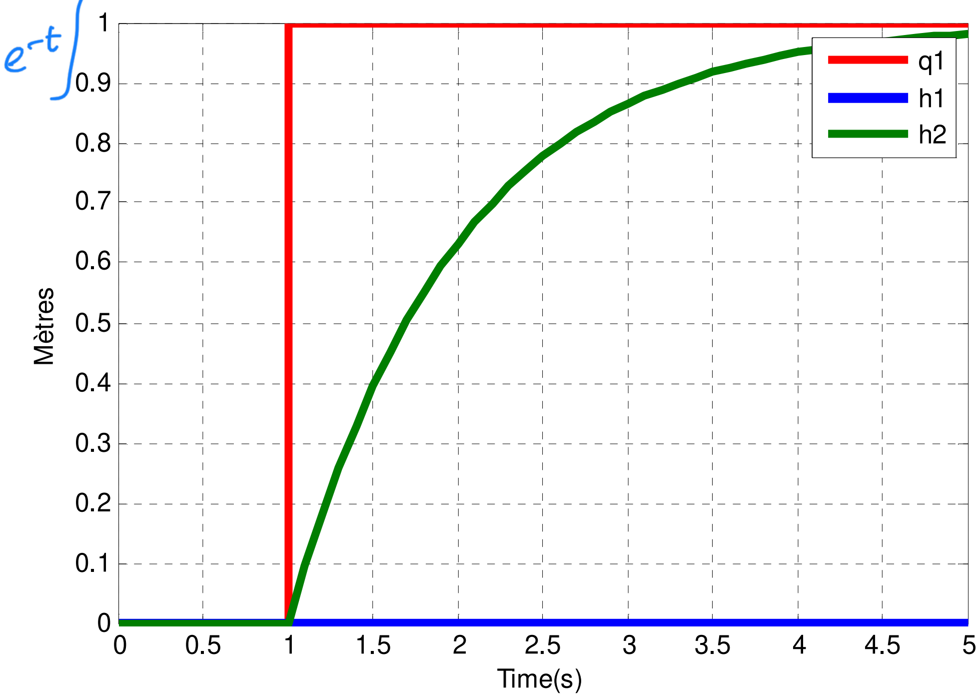
Réponse indicielle

- **U(t)=échelon de valeur 1 ; conditions initiales nulles**

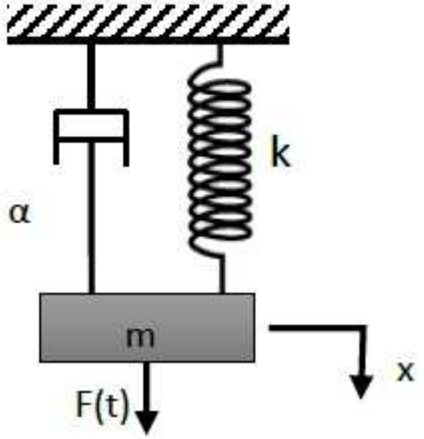
$$X(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} BU(\tau)d\tau$$

$$X(t) = \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2(t-\tau)} & 0 \\ -2e^{-2(t-\tau)}+2e^{-(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} d\tau$$

$$= \int_0^t \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} 0 \\ 1-e^{-t} \end{bmatrix}$$



Exemple



$$\rightarrow \frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dV}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\alpha}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ V \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

M=1kg ; k=1N/m ; α=2

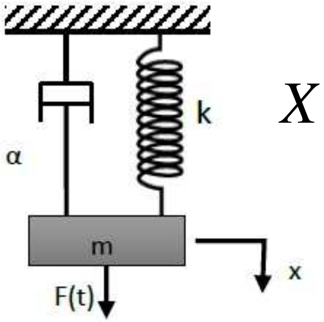
$$(pI - A)^{-1} = \frac{1}{p^2+2p+1} \begin{bmatrix} p+2 & 1 \\ -1 & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p+2}{(p+1)^2} & \frac{1}{(p+1)^2} \\ \frac{-1}{(p+1)^2} & \frac{p}{(p+1)^2} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(pI-A)^{-1}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} (1+t)\,e^{-t} & t\,e^{-t} \\ -t\,e^{-t} & (1-t)\,e^{-t} \end{bmatrix}$$

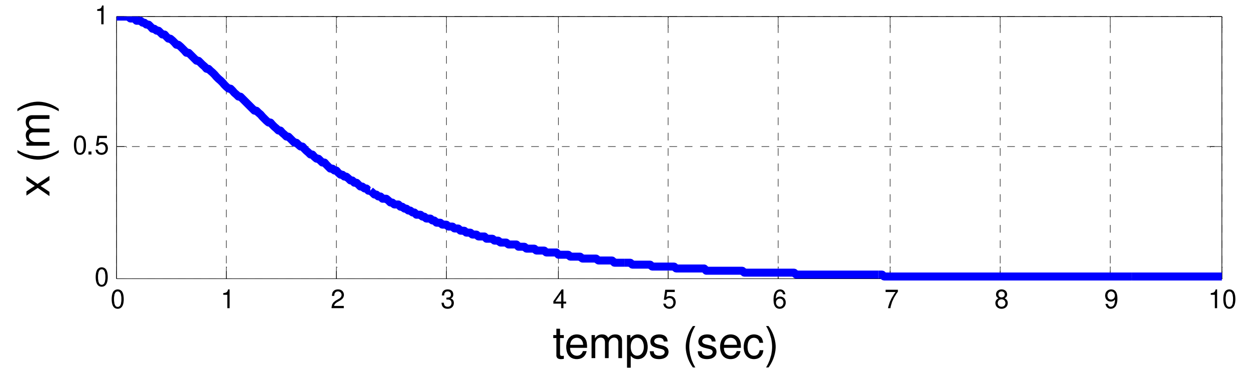
10.	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}
11.	$\frac{s}{(s+a)^2}$	$(1-at)e^{-at}$

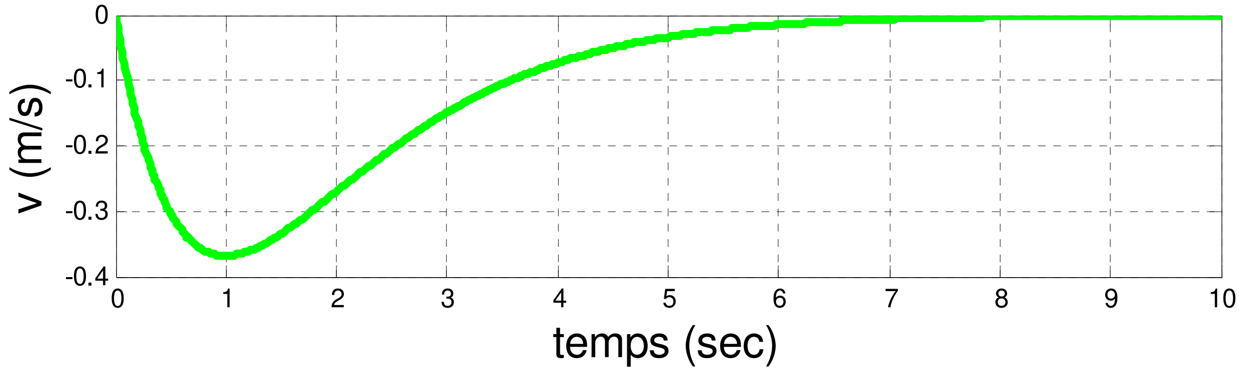
Exemple



$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^{At} X_0 = \begin{bmatrix} 1 + te^{-t} \\ -te^{-t} \end{bmatrix}$$





II.III. Par diagonalisation de A

Changement de base
Soit T, nxn, inversible / X=TZ avec T, la matrice des vecteurs propres

$$T^{-1}AT = A_d = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$e^{A_d t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{e^{At} = Te^{A_d t}T^{-1}}$$

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Recherche des valeurs propres de A = solutions de $\det(\lambda I - A) = 0$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 \\ -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0. \Rightarrow \lambda = -1, -2$$

2. Recherche des vecteurs propres de A : Vecteurs X/ tels que $AX=\lambda X$

$$\lambda = -1, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -2, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

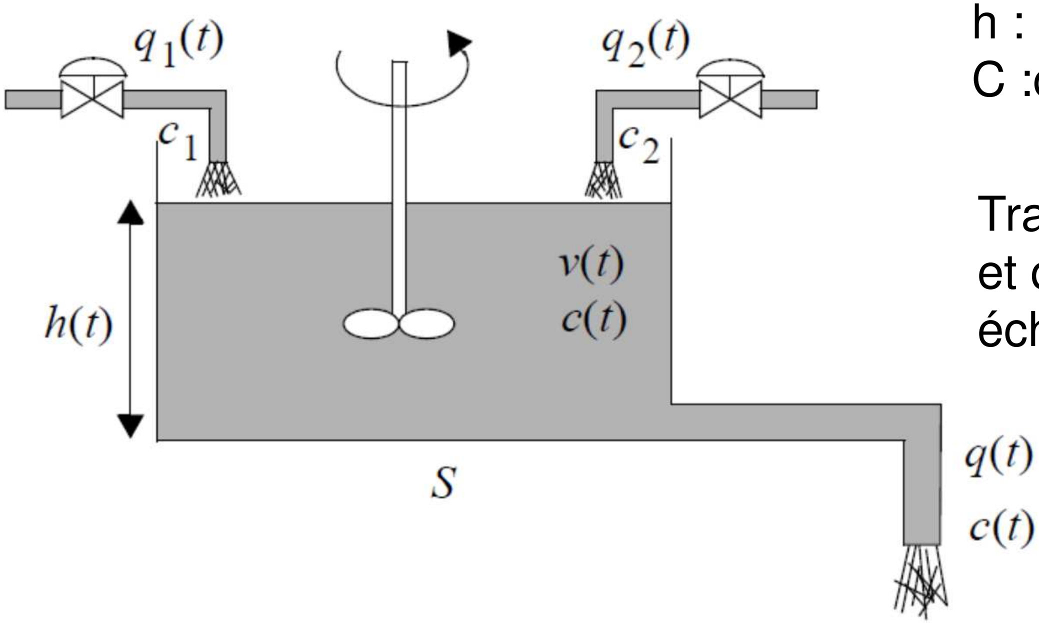
$$e^{At} = T\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \\ & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Matlab
[V,D = eig(A)

Matlab

[V,D] = eig(A)

Exemple



h : niveau (m)
C :concentration

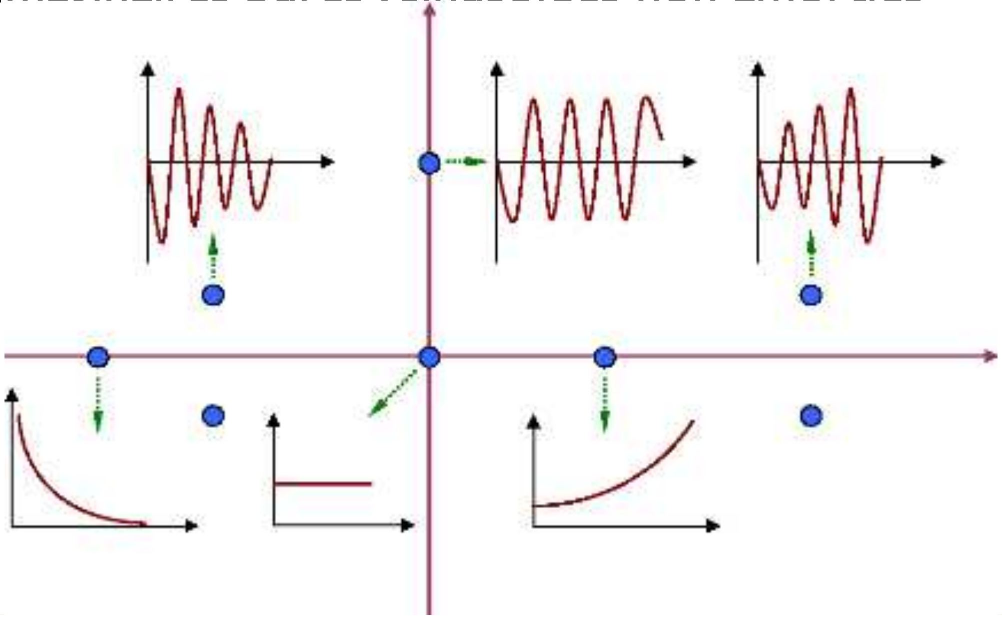
Tracer C(t) quand q_1 et q_2 sont des échelons unitaires

$$\begin{cases} S\dfrac{dh}{dt} = q_1 + q_2 - \dfrac{h}{R_1} \\ \dfrac{dC}{dt} = -q_0 C + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 \end{cases}$$

S=1, R1=1, q0=2

Remarques

- La dynamique du système est donnée par les **valeurs propres de A** : modes propres ou **pôles**
- $\det(\lambda I - A) = 0$: **équation caractéristique du système**
- La réponse du système est une combinaison linéaire des $e^{\lambda_i t}$
  - Si λ_i réels : exponentielles décroissantes (ou croissantes si $\lambda_i > 0$)
  - Si λ_i complexes conjuguées : sinusoïdes amorties
  - Si λ_i imaginaires pures : sinusoïdes non amorties



Réponse des systèmes linéaires

I. Solution de l'équation d'état

II. Calcul de la matrice de transition

II.I. Par développement limité

II.II. Par transformée de Laplace

II.III. Par diagonalisation de A

III. Stabilité des systèmes

Définition

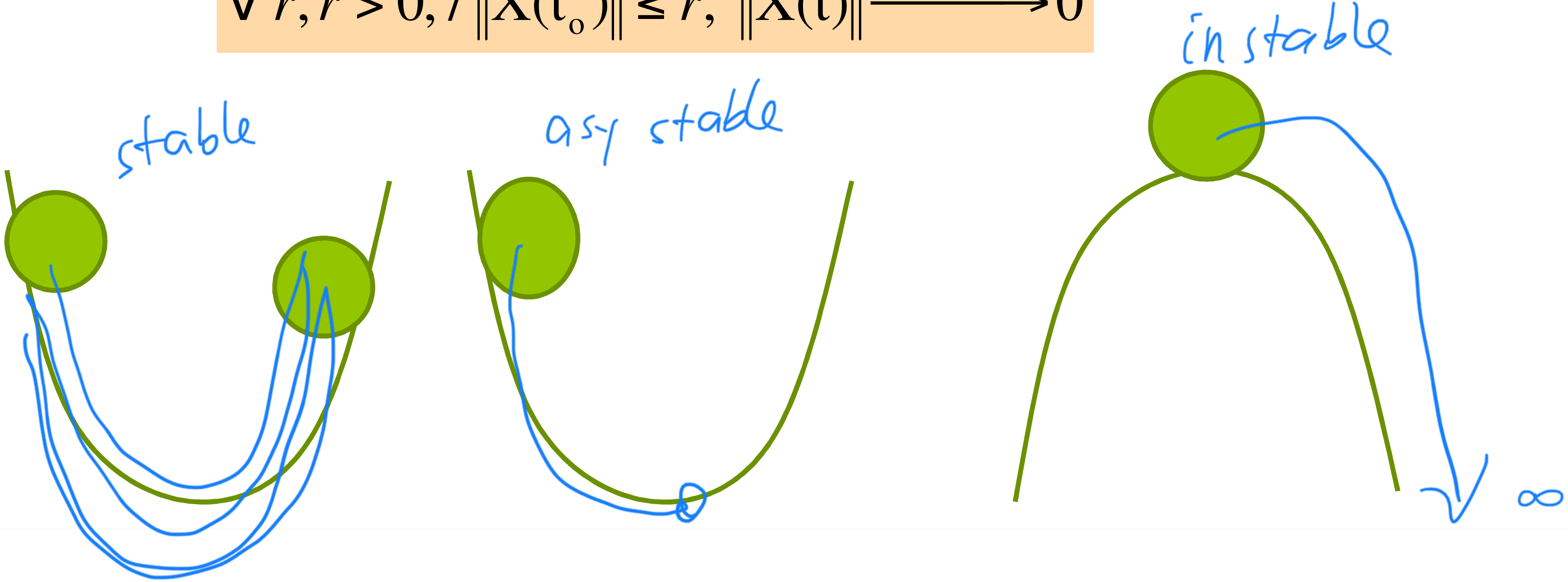
- Le point d'équilibre X=0 est **stable** au sens de Lyapunov si

$$\forall\, r, r > 0, / \left\|\mathrm{X}(\mathrm{t_o})\right\| \leq r, \exists \mathrm{R}, \mathrm{R} > 0, / \left\|\mathrm{X}(\mathrm{t})\right\| \leq R, \forall t > 0$$

- Le point d'équilibre X=0 est **asymptotiquement stable** si

渐近稳定

$$\forall\, r, r > 0, / \left\|\mathrm{X}(\mathrm{t_o})\right\| \leq r, \ \left\|\mathrm{X}(\mathrm{t})\right\| \xrightarrow{t \to \infty} 0$$



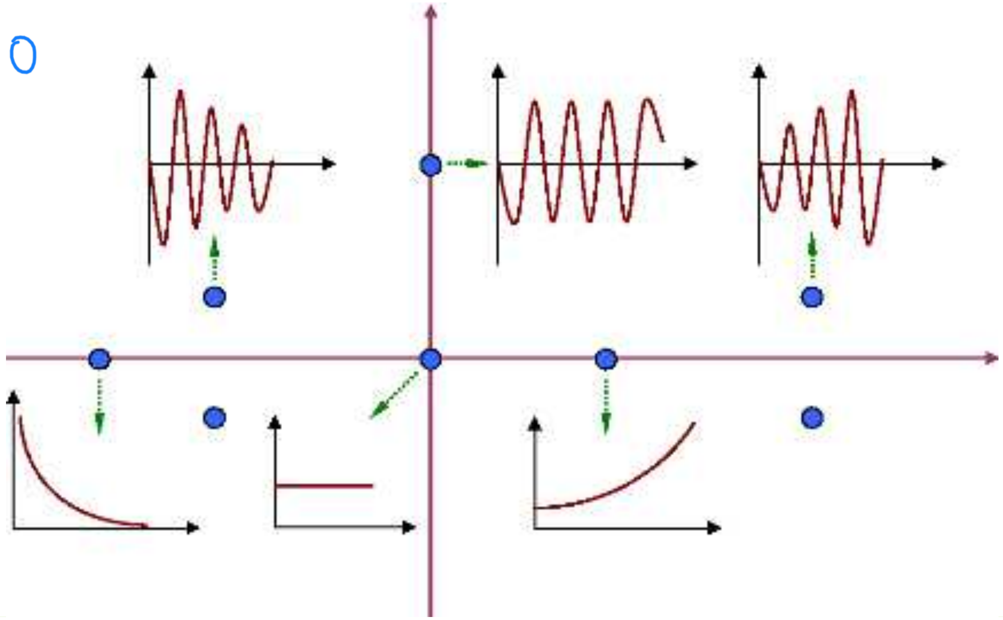
Condition nécessaire et suffisante de stabilité

- Soit un système défini par

$$\frac{dX}{dt} = AX + BU$$

Le point X=0 est **asymtotiquement stable** si et seulement si **toutes les valeurs propres de A sont à partie réelles strictement négatives**.

$Re(\lambda_{Ai}) < 0$



Exercice

- Quelles sont les conditions que a, b, c, d et e doivent vérifier pour que le système soit asymptotiquement stable?

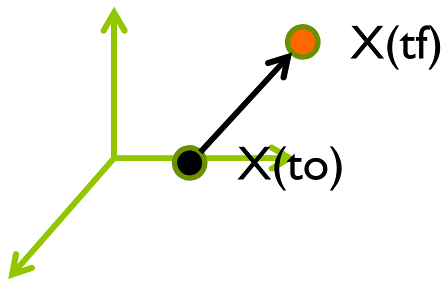
$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & b \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix} U \qquad \begin{cases} Re(a) < 0 \\ Re(b) < 0 \end{cases}$$

$\lambda_1 = a, \quad \lambda_2 = b$

Plan du cours

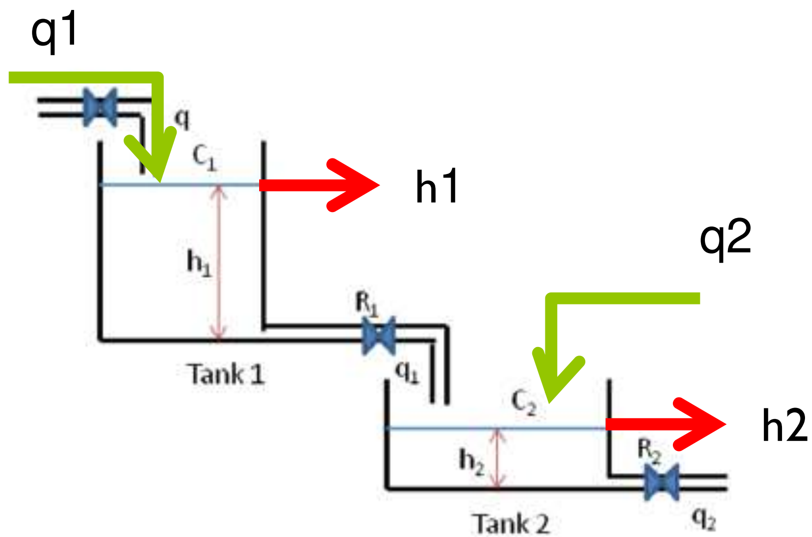
- Chapitre 1: Représentation d'état des systèmes
- Chapitre 2: Réponse des systèmes linéaires
- **Chapitre 3: Commandabilité, observabilité**
- Chapitre 4: Commande par retour d'état
- Chapitre 5: Observateurs d'état
- Chapitre 6: Commande par retour d'état avec observateur

Introduction



Commandabilité : Peut-on amener le système d’un état X(to) à un état X(tf) à l’aide d’une commande u(t) pendant un temps fini ?

Observabilité : Peut-on déterminer X en observant y pendant un temps fini?



Si u=q2, système commandable ?

Si y=h1, système observable ?

Si u=q1, système commandable ?

Si y=h2, système observable ?

Plan du chapitre

I. **Commandabilité**

I.I. Définition

I.II. Critère de commandabilité

I.III. Commandabilité et représentations particulières

II. Observabilité

II.I. Définition

II.II. Critère d'observabilité

II.III. Observabilité et représentations particulières

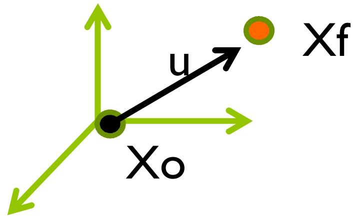
III. Représentation minimale

I. Définitions

Définitions :

可控的

- Un système linéaire est dit **commandable** si, quelque soit l'état Xf de l'espace d'état, il existe une commande **u(t)** qui permette de faire passer le système de l'état **Xo** à l'état **Xf** en un **temps fini**.



- L'ensemble des états atteignables à partir de X=0 est appelé le sous-espace de commandabilité.

- Si le sous-espace de commandabilité = R^n, le système est commandable

I.II. Critère de commandabilité

Un système $\frac{dX}{dt} = AX + BU$ d'ordre **n** est **commandable** ssi le **rang** de la matrice $\Gamma = [B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B]$ vaut **n**

單變量

Cas monovariable : Γ est **carrée**, de taille n.

$$rang(\Gamma) = n \text{ ssi } \det(\Gamma) \neq 0$$

Cas multivariable : Γ est **rectangle**, de taille nx(np).

$$rang(\Gamma) = n$$

$$\text{ssi } \exists \text{ sous matrice de } \Gamma, \Gamma_s, \text{carrée, nxn} / \det(\Gamma_s) \neq 0$$

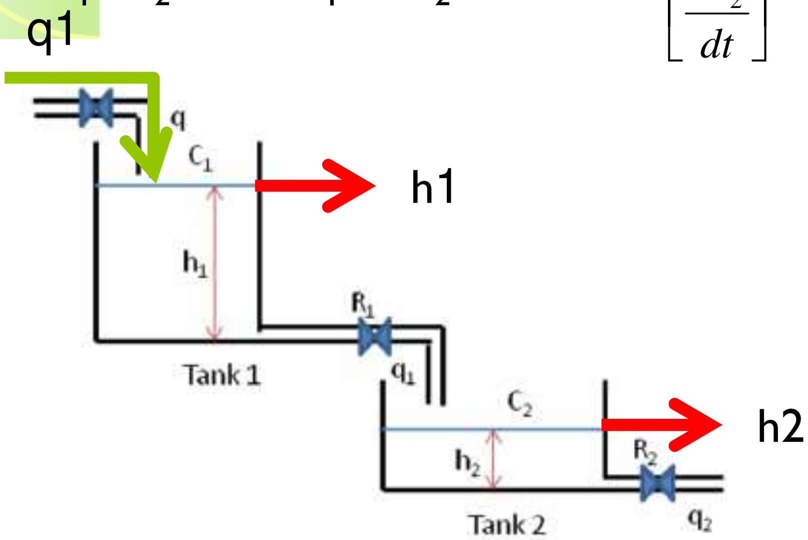
***Remarque : la commandabilité** ne dépend que de **B,** pas de C*

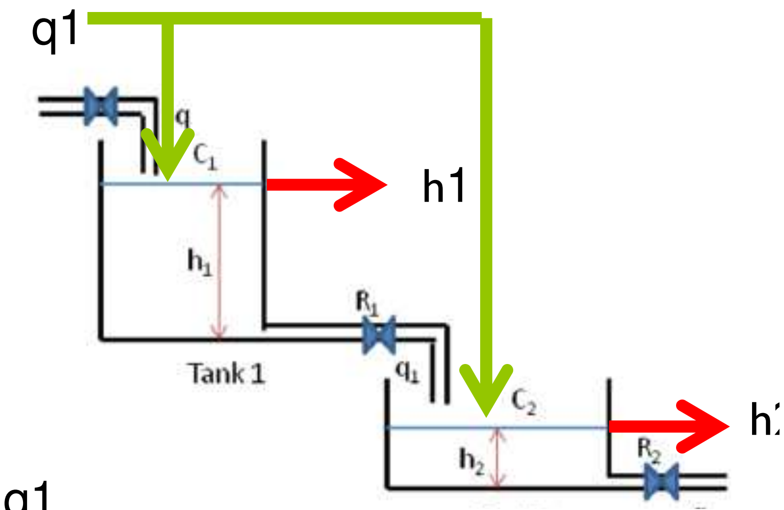
Exemple : les systèmes sont-ils commandables?

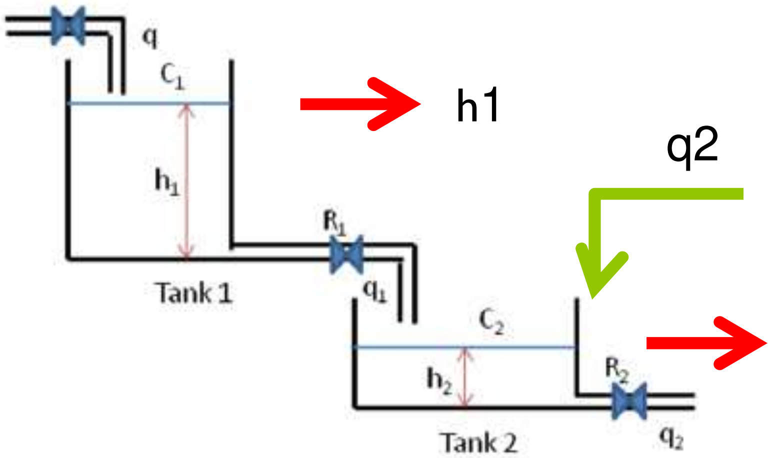
Application numérique :

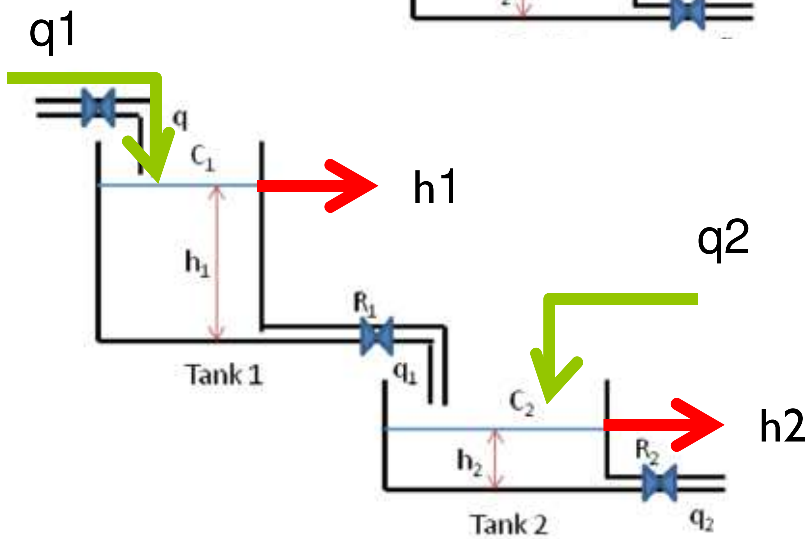
$C_1=C_2=1m^2$; $R_1=1$ $R_2=0{,}5$ $s^{-1}m$

$$\begin{bmatrix} \frac{dh_1}{dt} \\ \frac{dh_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + BU$$

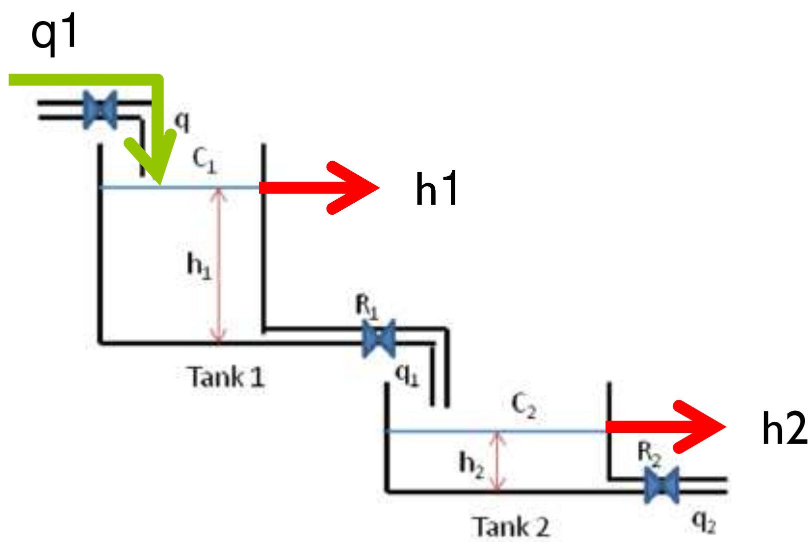








Exemple : les systèmes sont-ils commandables?



Application numérique :

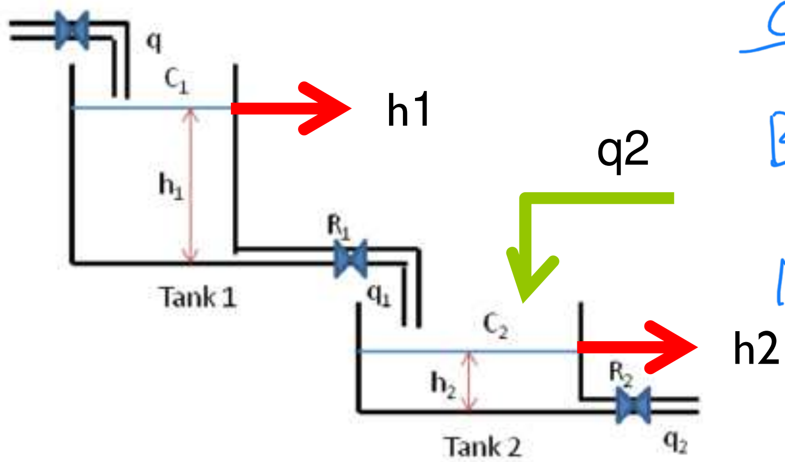
$C_1=C_2=1m^2; R_1=1\ R_2=0{,}5\ s^{-1}m$

$$\begin{bmatrix} \frac{dh_1}{dt} \\ \frac{dh_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + BU$$

$B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Gamma = [B, AB] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\det \Gamma = 2 \neq 0.$

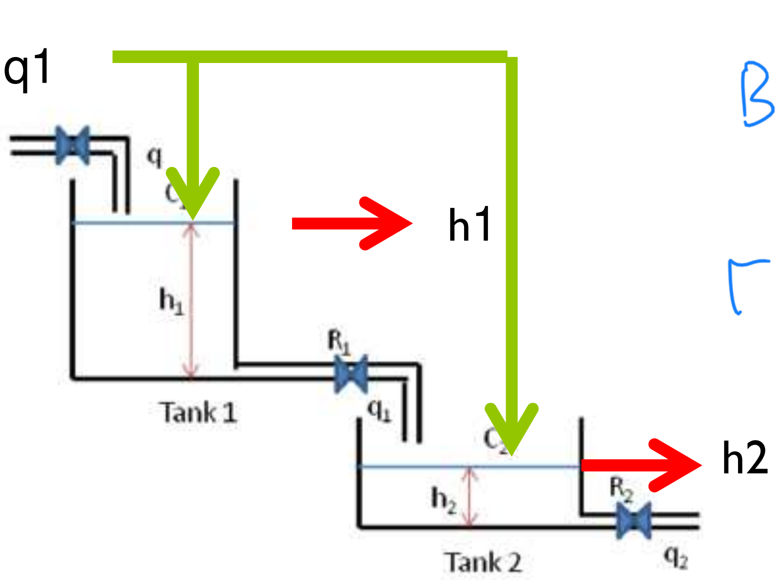
commandable



$B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

$\Gamma = [B, AB] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\det(\Gamma) = 0.$

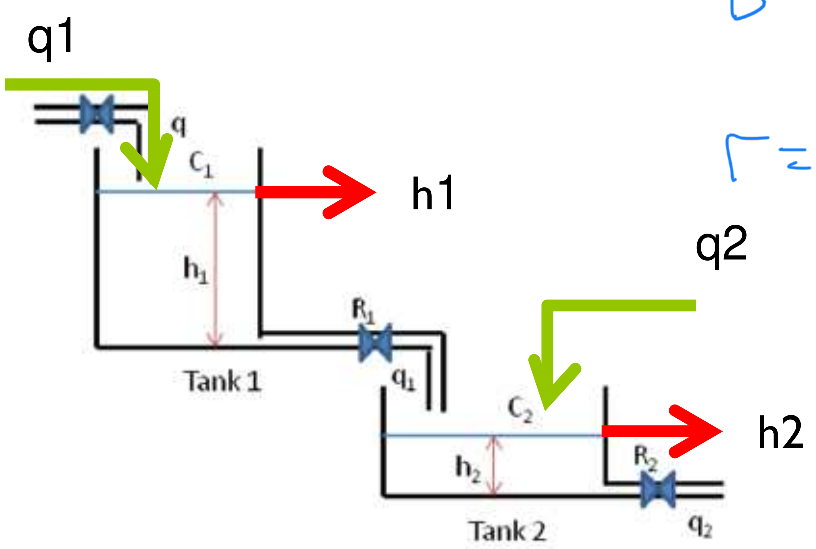
incommandable.



$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\Gamma = [B, AB] = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \det \Gamma = -1$$

commandable.



$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\Gamma = [B, AB] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rang}\, \Gamma = 2. = n$$

commandable.

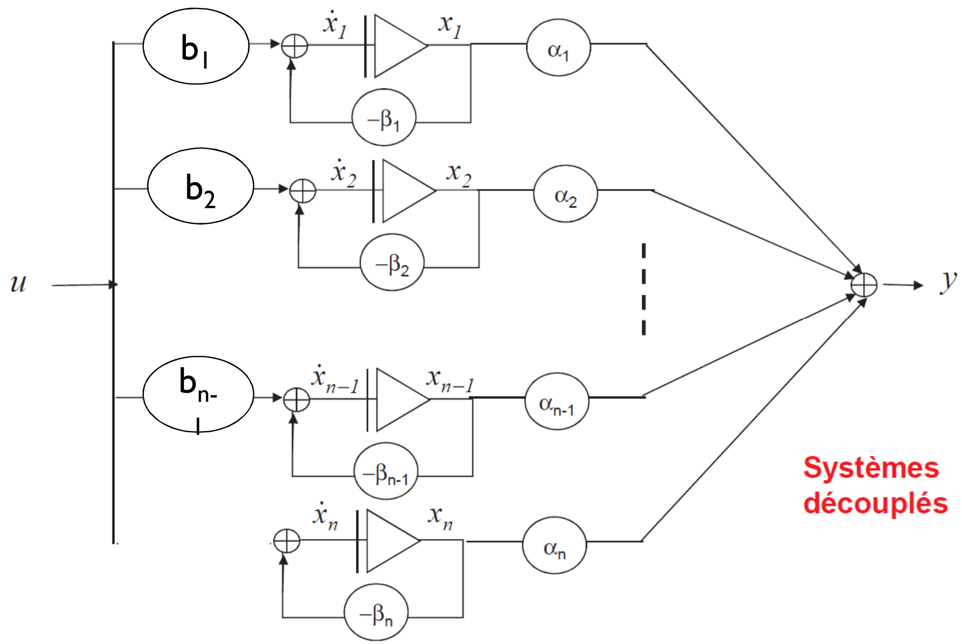
I.III Commandabilité et représentations particulières : Forme diagonale

$$\frac{dX}{dt}=\begin{bmatrix}-\beta_1 & 0 & 0\\ 0 & -\beta_2 & 0\\ 0 & 0 & -\beta_n\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_n\end{bmatrix}U$$

Condition **N**écessaire et **S**uffisante de commandabilité

$\forall\, i \neq j,\ \beta_i \neq \beta_j$

$b_i \neq 0$



Systèmes découplés

I.III Commandabilité et représentations particulières : Forme de Jordan

Forme de Jordan inférieure

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} -\beta & 0 & 0 \\ 1 & -\beta & 0 \\ 0 & 1 & -\beta \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{bmatrix} U$$

CNS de commandabilité

$$b_1 \neq 0$$

Forme de Jordan supérieure

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} -\beta & 1 & 0 \\ 0 & -\beta & 1 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{bmatrix} U$$

CNS de commandabilité

$$b_n \neq 0$$

I.III Commandabilité et représentations particulières : Forme de commandabilité

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} U$$

Un système qui peut se mettre sous forme de commandabilité est nécessairement commandable

Plan du chapitre

I. Commandabilité

I.I. Définition

I.II. Critère de commandabilité

I.III. Commandabilité et représentations particulières

II. Observabilité

II.I. Définition

II.II. Critère d’observabilité

II.III. Observabilité et représentations particulières

III. Représentation minimale

II.I. Définition

- Un système est **observable** si, par observation des entrées et des sorties sur un intervalle de temps fini, on peut déterminer l'état initial du système.

II.II. Critère d'observabilité

Un système d'ordre n $\frac{dX}{dt} = AX + BU \; ; Y = CX$

est **observable** ssi le **rang** de la matrice

$\Omega = [C, CA, CA^2, ..., CA^{n-1}]$ vaut **n**

Cas monovariable : Ω est **carrée**, de taille n.

$rang(\Omega) = n$ ssi $\det(\Omega) \neq 0$

Cas multivariable : Ω est **rectangle**, de taille mnxn.

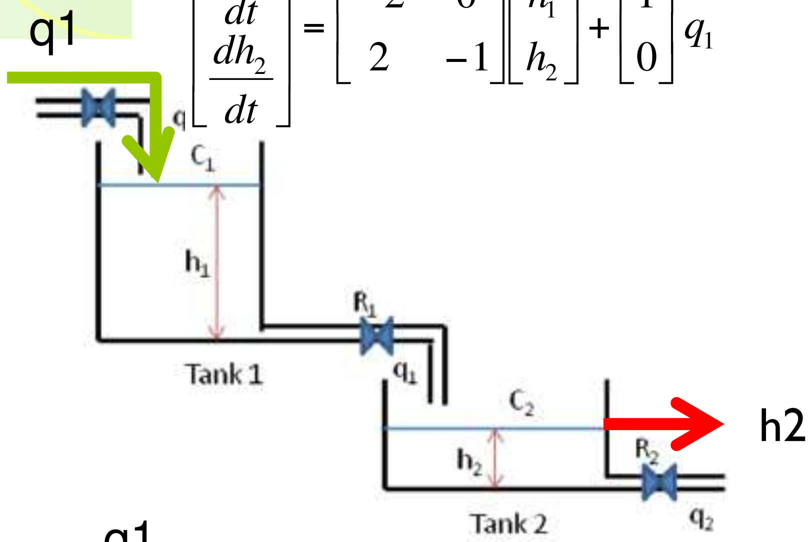
$rang(\Omega) = n$

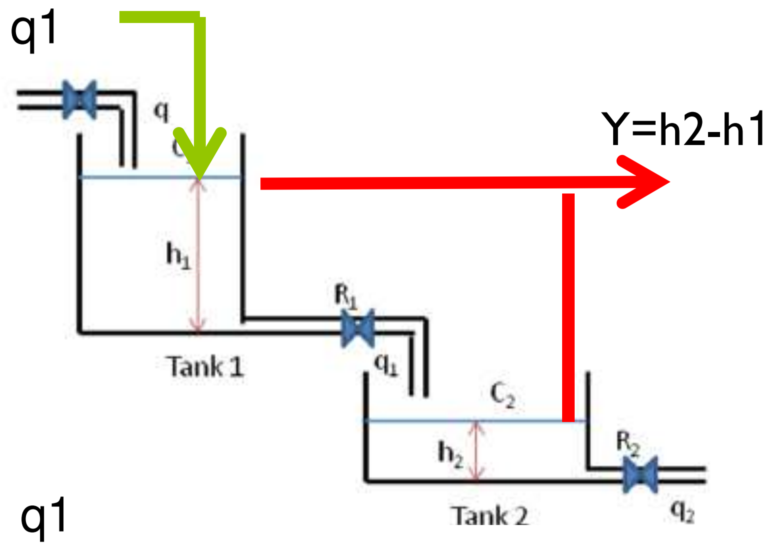
ssi $\exists$ sous matrice de Ω , Ω_s , carrée, nxn / $\det(\Omega_s) \neq 0$

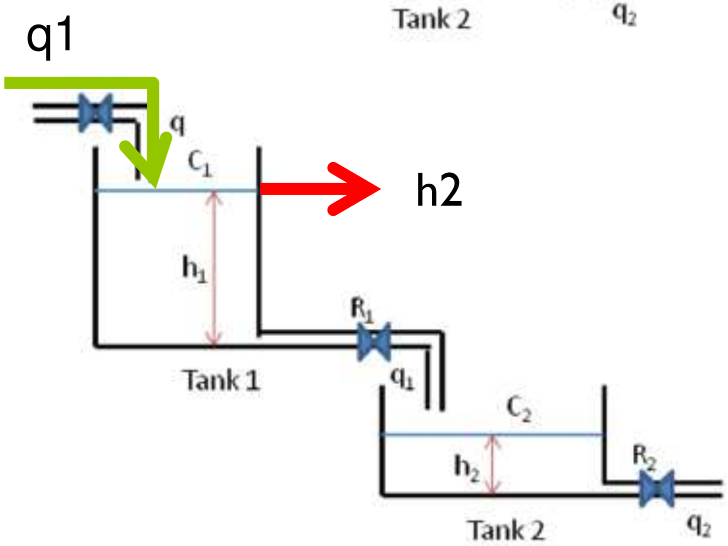
Remarque : l'observabilité ne dépend que de C, pas de B

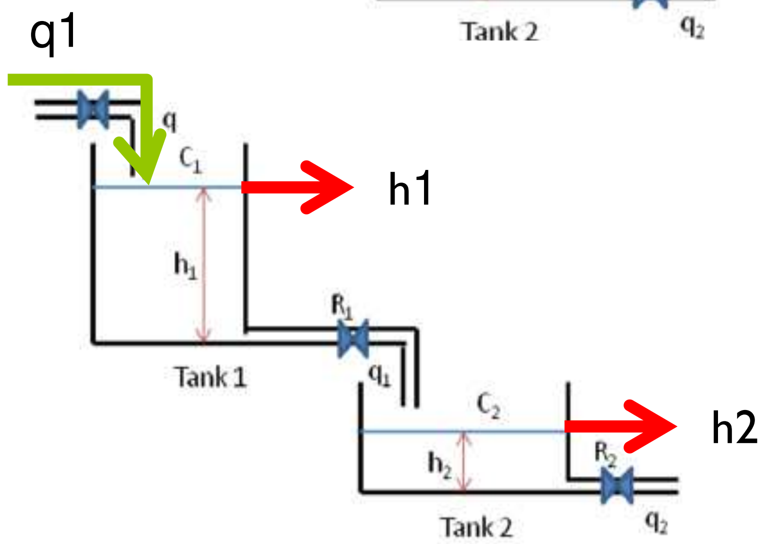
Exemple : les systèmes sont-ils observables?

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dh_1}{dt} \\ \dfrac{dh_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} q_1$$

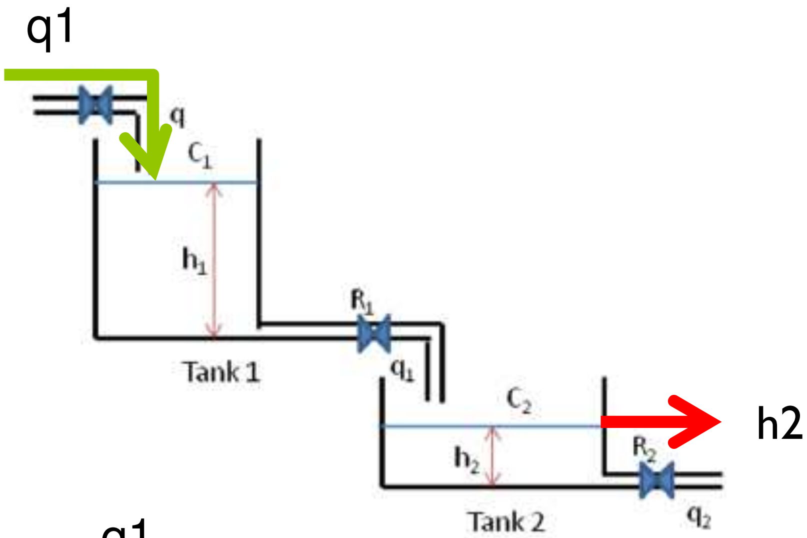


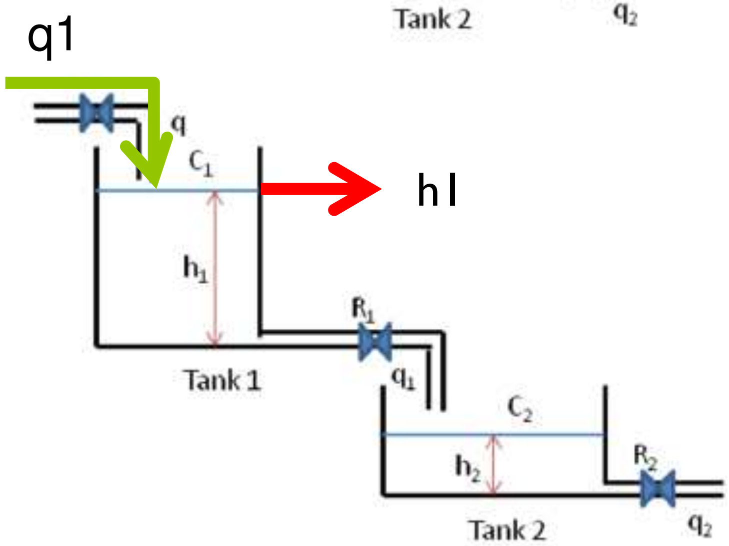






Exemple : les systèmes sont-ils observables?





Application numérique :
$C_1=C_2=1m^2$; $R_1=1$ $R_2=0{,}5\ s^{-1}m$

$$\begin{bmatrix} \frac{dh_1}{dt} \\ \frac{dh_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} q_1$$

$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$

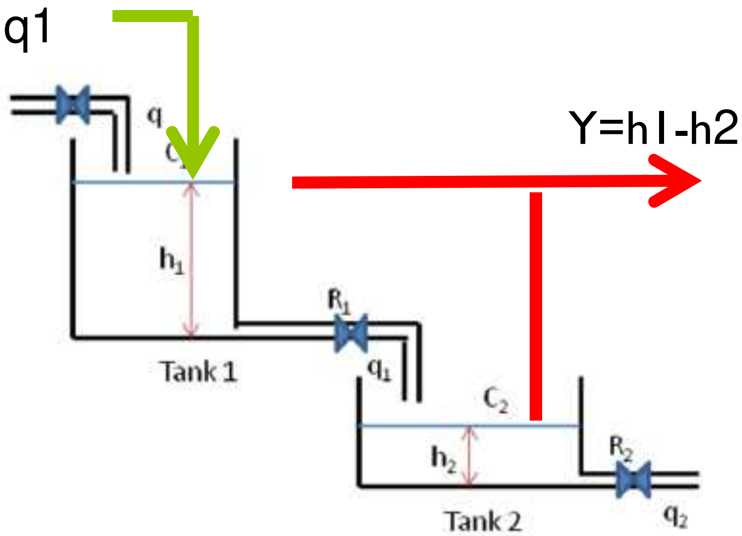
$\Omega = [C ; CA] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\det \Omega = -2$

observable

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\Omega = [C ; CA] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ $\det \Omega = 0$

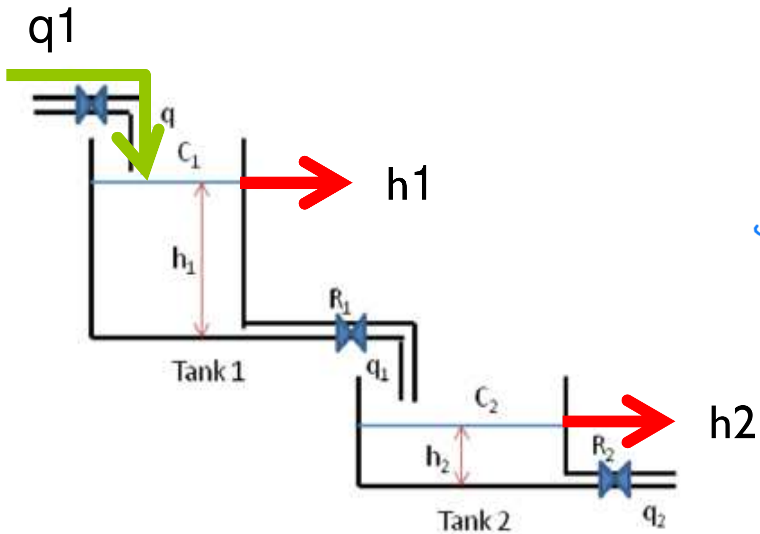
inobservable



$$C = [1 \ \ -1]$$

$$\Omega = [C ; CA] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \quad \det \Omega \neq 0$$

observable



$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Omega = [C ; CA] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{rang } \Omega = 2 = n$$

observable

II.III. Observabilité et représentations particulières : forme diagonale

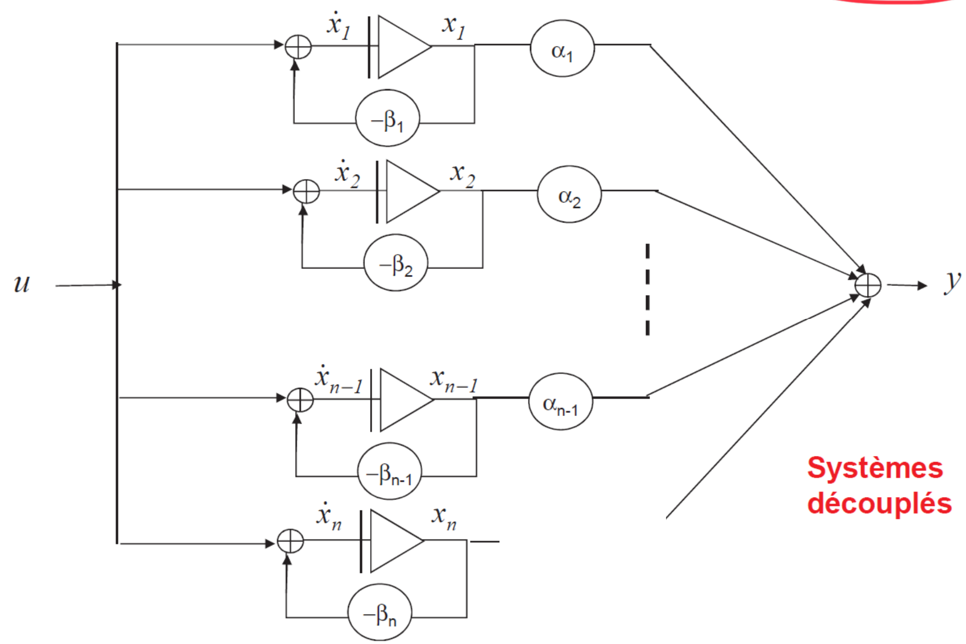
$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} -\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_n \end{bmatrix} X + BU$$

$$Y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_n \end{bmatrix} X$$

Condition **N**écessaire et **S**uffisante d'observabilité

$$\forall\, i \neq j,\ \beta_i \neq \beta_j$$

$$c_i \neq 0$$



Systèmes découplés

II.III. Observabilité et représentations particulières : forme de Jordan

Forme de Jordan inférieure

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} -\beta & 0 & 0 \\ 1 & -\beta & 0 \\ 0 & 1 & -\beta \end{bmatrix} X + BU$$

$$Y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_n \end{bmatrix} X$$

CNS d'observabilité

$$c_n \neq 0$$

Forme de Jordan supérieure

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} -\beta & 1 & 0 \\ 0 & -\beta & 1 \\ 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix} X + BU$$

$$Y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_n \end{bmatrix} X$$

CNS d'observabilité

$$c_1 \neq 0$$

II.III. Observabilité et représentations particulières : Forme d'observabilité

- Un système qui peut se mettre sous **forme d'observabilité** est nécessairement **observable**

$$\frac{dX}{dt} = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a_2 \\ \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{array}\right] X + BU$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} X$$

Plan du chapitre

I. Commandabilité

I.I. Définition

I.II. Critère de commandabilité

I.III. Commandabilité et représentations particulières

II. Observabilité

II.I. Définition

II.II. Critère d'observabilité

II.III. Observabilité et représentations particulières

III. Représentation minimale

Invariance de la commandabilité et de l'observabilité par changement de base

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = AX + BU \\ Y = CX \end{cases}$$

Soit T, nxn, inversible / X=TZ
T : matrice de changement de base

$$\begin{cases} \dfrac{dZ}{dt} = \boxed{T^{-1}AT}Z + \boxed{T^{-1}B}U \\ Y = \boxed{CT}Z + \boxed{D}U \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{dZ}{dt} = A'Z + B'U \\ Y = C'Z + D'U \end{cases}$$

$$\Gamma' = [B', A'B', \ldots, A'^{n-1}B']$$

$$\Gamma' = [\underline{T^{-1}}B, \underline{T^{-1}}A\cancel{T}T^{-1}B, \underline{T^{-1}}A^2\cancel{TT^{-1}}B, \ldots, \underline{T^{-1}}A^{n-1}TT^{-1}B]$$

$$\Gamma' = T^{-1}[B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B]$$

$$\underline{\det(\Gamma') = \det(T^{-1})\det(\Gamma)}$$

Idée ! Etudier la commandabilité et l'observabilité sur des bases où elles s'analysent facilement

Décomposition de Kalman

Il existe toujours une base de l'espace d'état qui permet de décomposer un système

$$\frac{dX}{dt} = AX + BU$$
$$Y = CX$$

en **4 sous systèmes**

$$X = \begin{bmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \\ X4 \end{bmatrix} \text{de dimension} \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{matrix} \text{avec}\, n = n_2 + n_2 + n_3 + n_4$$

Tel que

$$\begin{bmatrix} \frac{dX_1}{dt} \\ \frac{dX_2}{dt} \\ \frac{dX_3}{dt} \\ \frac{dX_4}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix} X$$

X_1 : **commandable**, non observable
X_2 : **commandable**, **observable**
X_3 : non commandable, non observable
X_4 : non commandable, **observable**

Exemple

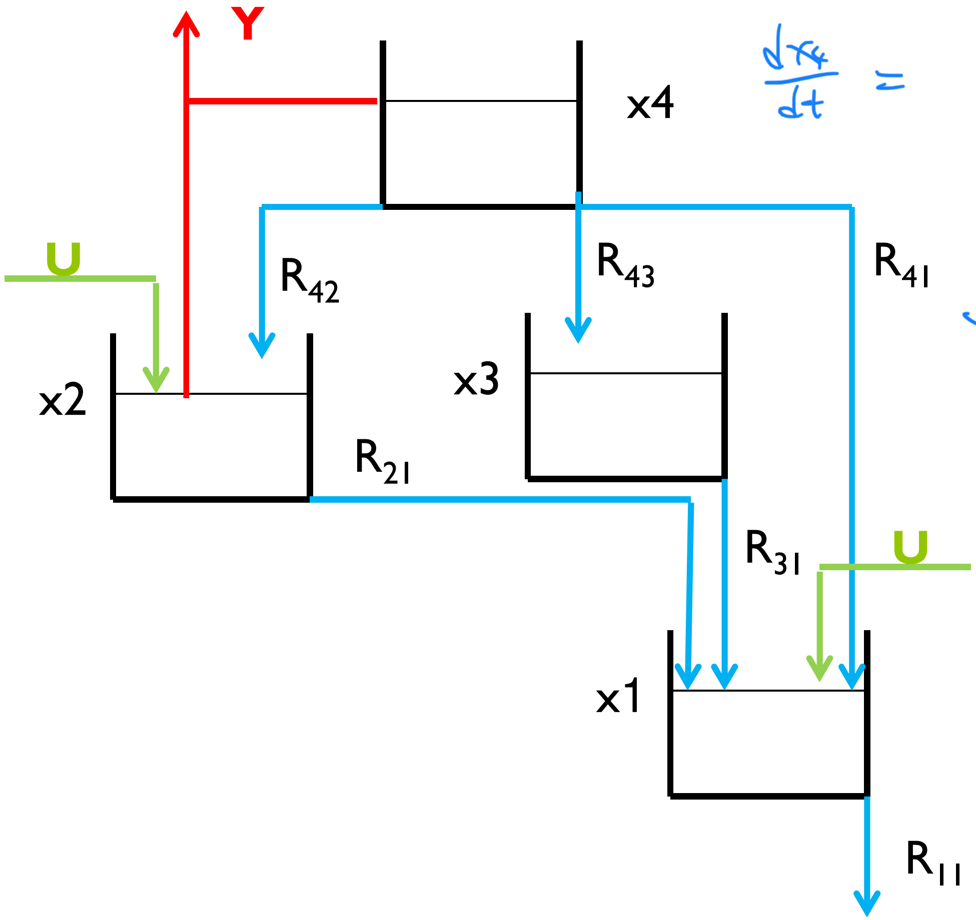
$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{R_{11}} x_1 + \frac{1}{R_{21}} x_2 + \frac{1}{R_{31}} x_3 + \frac{1}{R_{41}} x_4 + U$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{R_{21}} x_2 + \frac{1}{R_{42}} x_4 + U$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -\frac{1}{R_{31}} x_3 + \frac{1}{R_{43}} x_4$$

$$\frac{dx_4}{dt} = -\left(\frac{1}{R_{41}} + \frac{1}{R_{42}} + \frac{1}{R_{43}}\right) x_4$$

C1=C2=C3=C4=1m^2

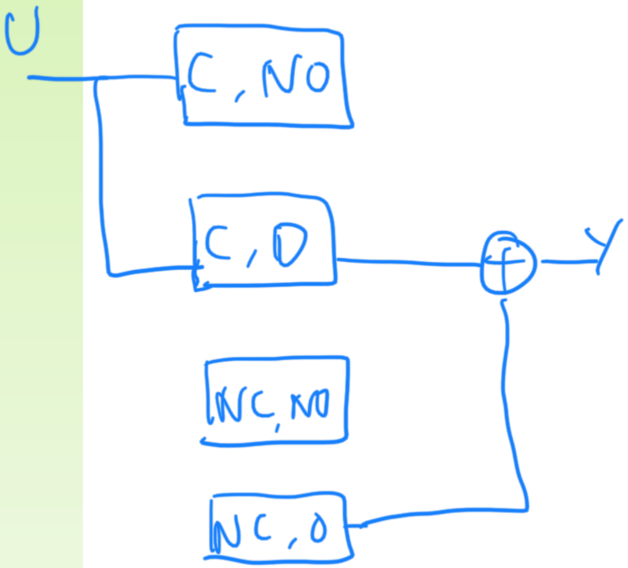


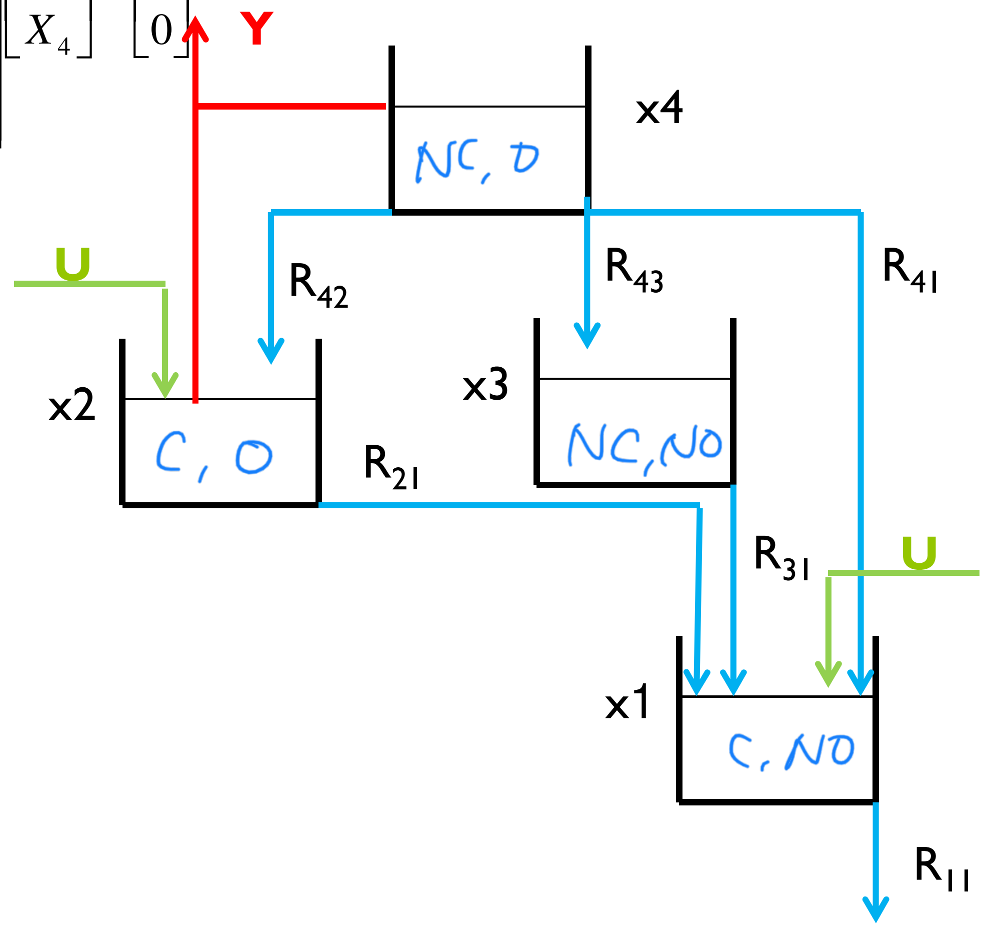
$$Y = [0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; -1]\, X.$$

Exemple

$$\begin{bmatrix} \frac{dX_1}{dt} \\ \frac{dX_2}{dt} \\ \frac{dX_3}{dt} \\ \frac{dX_4}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_{11}} & \frac{1}{R_{21}} & \frac{1}{R_{31}} & \frac{1}{R_{41}} \\ 0 & -\frac{1}{R_{21}} & 0 & \frac{1}{R_{42}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_{31}} & \frac{1}{R_{43}} \\ 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{1}{R_{42}} + \frac{1}{R_{43}} + \frac{1}{R_{41}}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} X$$





Décomposition de Kalman →Fonction de Transfert

$$\begin{bmatrix} \frac{dX_1}{dt} \\ \frac{dX_2}{dt} \\ \frac{dX_3}{dt} \\ \frac{dX_4}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} U$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix} X$$

$$\frac{dX_2}{dt} = A_{22}X_2 + \cancel{A_{24}X_4} + B_2U$$

$$pX_2 - x_2(0) = A_{22}X_2 + \cancel{A_{24}X_4} + B_2U$$

$$(pI - A_{22})X_2 = B_2U$$

$$Y = C_2X_2 + C_4X_4 = C_2X_2$$

$$Y = C_2X_2 = C_2(pI - A_{22})^{-1}B_2U$$

Fonction de transfert : réponse forcée

→ **Conditions initiales nulles**

$$\frac{dX_4}{dt} = A_{44}X_4$$

$$pX_4 - x_4(0) = A_{44}X_4$$

$$X_4 = (pI - A_{44})^{-1}x_4(0)$$

$$\Rightarrow X_4 = 0$$

$$\frac{dX_3}{dt} = A_{33}X_3 + A_{34}X_4$$

$$pX_3 - x_3(0) = A_{33}X_3 + \cancel{A_{34}X_4}$$

$$X_3 = (pI - A_{33})^{-1}x_3(0)$$

$$\Rightarrow X_3 = 0$$

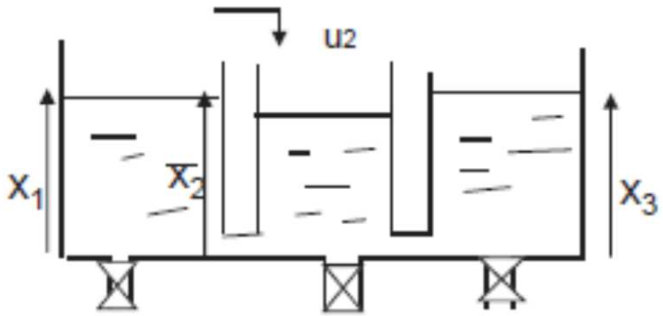
$$\boxed{\frac{Y}{U} = C_2(pI - A_{22})^{-1}B_2}$$

La FT ne représente que la partie **commandable et observable** d’un système.

Réalisation minimale

- **Réalisation minimale** : représentation d'état ayant le nombre minimal de variables d'état nécessaire pour modéliser la **relation entrée/sortie** d'un système.
- Une réalisation est **minimale** ssi elle est **commandable** et **observable**.
- **L'ordre de la réalisation minimale** est donnée par **l'ordre de la fonction de transfert.**
- L'ordre de la représentation d'état est **supérieur ou égal** à l'ordre de la FT. Si la R.E. n'est **pas commandable ou pas observable**, il y a **simplification** des pôles et des zéros dans la FT.

Exemple



$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_2 \quad \text{et} \quad y = x_3$$

NC, O.

Etudier la commandabilité et l'observabilité du système

Quel est l'ordre de la réalisation minimale? $\geqslant 3$.

Calculer la fonction de transfert du système.

Remarque : $3p^3+9p^2+23p+15 = (p+3)(p^2+6p+5)$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

特征值与特征向量

$\lambda_1 = -5, \quad x_1 = (1 \ -2 \ 1)^T$

$\lambda_2 = -3 \quad x_2 = (1 \ 0 \ -1)^T$

$\lambda_3 = -1 \quad x_3 = (1 \ 2 \ 1)^T$

① diagonalisation de A.

$$T = (x_1 \ x_2 \ x_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad A' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -5 & & \\ & -3 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

② changement de base.

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 2/4 & 0 & -2/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$B_d = B' = T^{-1}B = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 0 \\ 1/4 \end{bmatrix}.$$

CNS de commandable:

$\forall \lambda_i, \lambda_j \in A', \ \lambda_i \neq \lambda_j.$ ✓

$\forall \beta_i \in B', \ \beta_i \neq 0$ ✗.

$\Rightarrow$ non commandable

$$C_d = CT = [1 \ -1 \ 1].$$

CNS d'observable.

$\forall \lambda_i, \lambda_j \in A', \ \lambda_i \neq \lambda_j$ ✓.

$\forall c_i \in C', \ c_i \neq 0.$ ✓.

$\Rightarrow$ observable.

③ calcul de la FT.

$$F = CT^{-1}(pI - A')^{-1}TB$$

$$= C_d (pI - A')^{-1} B_d. = \frac{3}{2} \frac{1}{(p+1)(p+5)} \qquad \text{ordre} = 2$$

ordre d'une représentation minimale = 2

Diagonalisation de A

```
>> [T,D]=eig(A);
```

Changement de base

```
>> Tinv=inv(T);
>> Bd=Tinv*B;
>> Cd=C*T;
```

Calcul de la fonction de transfert

```
>> p=tf('p');
```

Nouvelle base

```
>> F=C*Tinv*(inv(p*eye(3,3)-D))*T*B;
```

Ancienne base

```
F=C*inv((p*eye(3,3)-A))*B
```

Plan du cours

- Chapitre 1: Représentation d'état des systèmes
- Chapitre 2: Réponse des systèmes linéaires
- Chapitre 3: Commandabilité, observabilité
- **Chapitre 4: Commande par retour d'état**
- Chapitre 5: Observateurs d'état
- Chapitre 6: Commande par retour d'état avec observateur

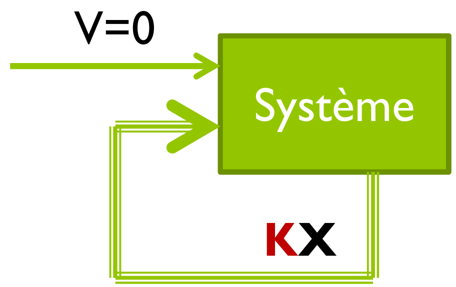
Plan du chapitre

I. **Placement de pôles**

II. Retour d'état et asservissement

I. Placement de pôles

- **Utiliser l'état** du système pour :
  - Modifier sa dynamique (système plus rapide, stable)
  - Rejeter les perturbations
- En appliquant une **commande** de la forme **U=KX**

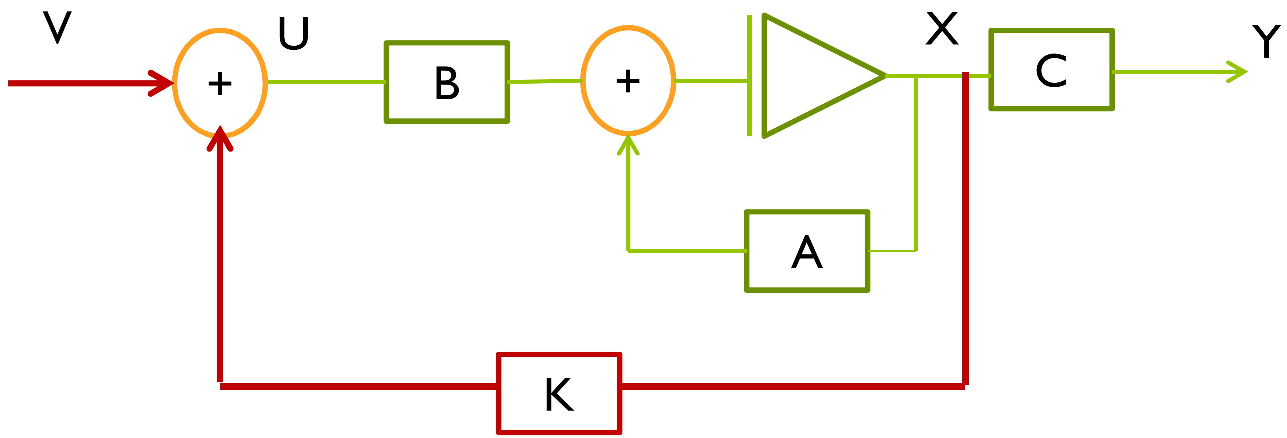


I. Placement de pôles

Soit le système en boucle ouverte

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = AX + BU \\ Y = CX \end{cases}$$

Si le système est **commandable** , une commande par retour d'état **U=KX** permet de placer tous les pôles aux valeurs désirées



- En boucle fermée

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = AX + B(KX + V) \\ Y = CX \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = (A + BK)X + BV \\ Y = CX \end{cases}$$

I. Placement de pôles

- **Problématique** :

Régler **K** tel que les **valeurs propres** de **(A+BK)** soient égales aux **pôles désirés :** λ_{ides}

$$\det(\lambda I - (A + BK)) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_{ides})$$

→ Résoudre un système de n équations à n inconnues

Exemple

- Soit le système

instable

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} U$$

Calculer le retour d'état qui permet de placer les pôles en BF à -1

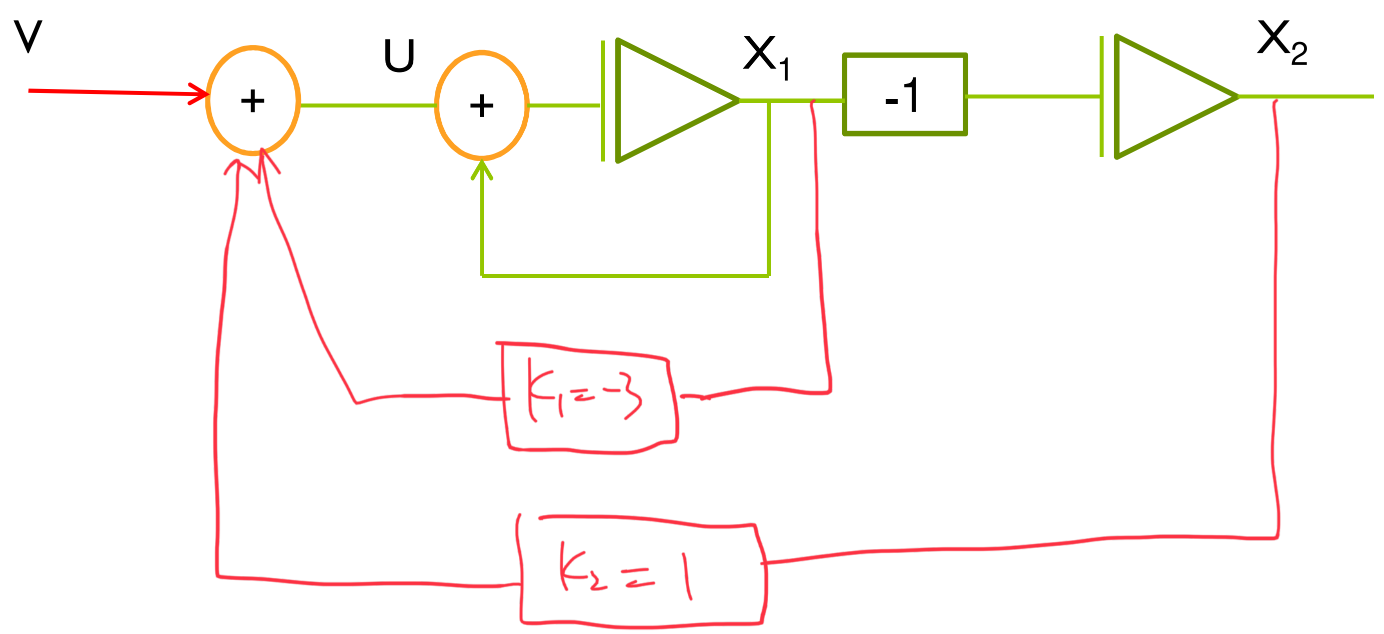
$$U = KX = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = k_1 x_1 + k_2 x_2$$

$$A + BK = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+k_1 & k_2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda I - (A + BK) = \begin{bmatrix} \lambda - 1 - k_1 & -k_2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - (A + BK)) \triangleq (\lambda - (-1))^2 \Rightarrow \begin{cases} k_1 = -3 \\ k_2 = 1 \end{cases}$$

Exemple



Exemple : Avec Matlab

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} U$$

Trouver le retour d'état K tel que le système en boucle fermée ait comme pôles (-1, -2, -3)

```
>> A=[1 2 0;0 2 2; -1 0 -2 ]
>> B=[1 1 1]'
```

1. **Evaluer la commandabilité du système :**

```
>> rank([B A*B A*A*B])
ans = 3
```

commandable

2. **Choisir les pôles désirés :**

```
>> pbf=[-1 -2 -3]‘
```

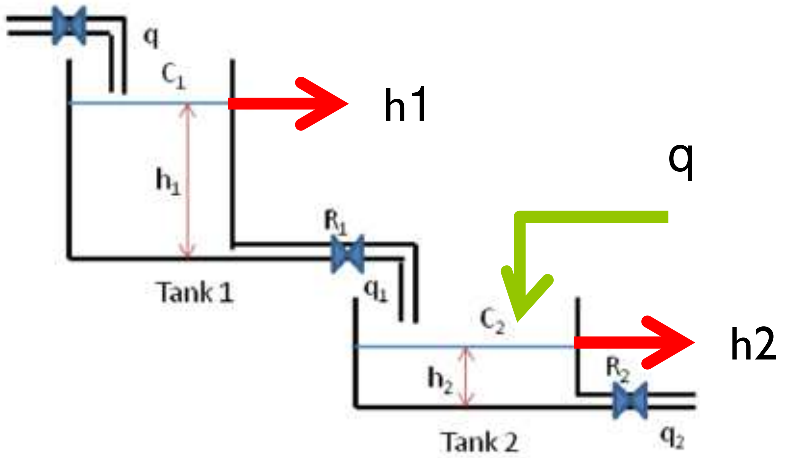
3. **Calculer le retour d'état avec la commande « place » :**

```
>> K=- place(A,B,pbf)
K = -3.7419   -2.9355   -0.3226
```

需要 A+BK.

! Matlab calcule le retour d'état A-BK

Que se passe-t-il si le système n'est pas commandable?



incommandable

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dh_1}{dt} \\ \dfrac{dh_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} q$$

Seule la partie commandable peut-être commandée.

$$(A+BK) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2+K_1 & -1+K_2 \end{bmatrix}.$$

$$[\lambda I - (A+BK)] = \begin{bmatrix} \lambda+2 & 0 \\ -2-K_1 & \lambda+1-K_2 \end{bmatrix}$$

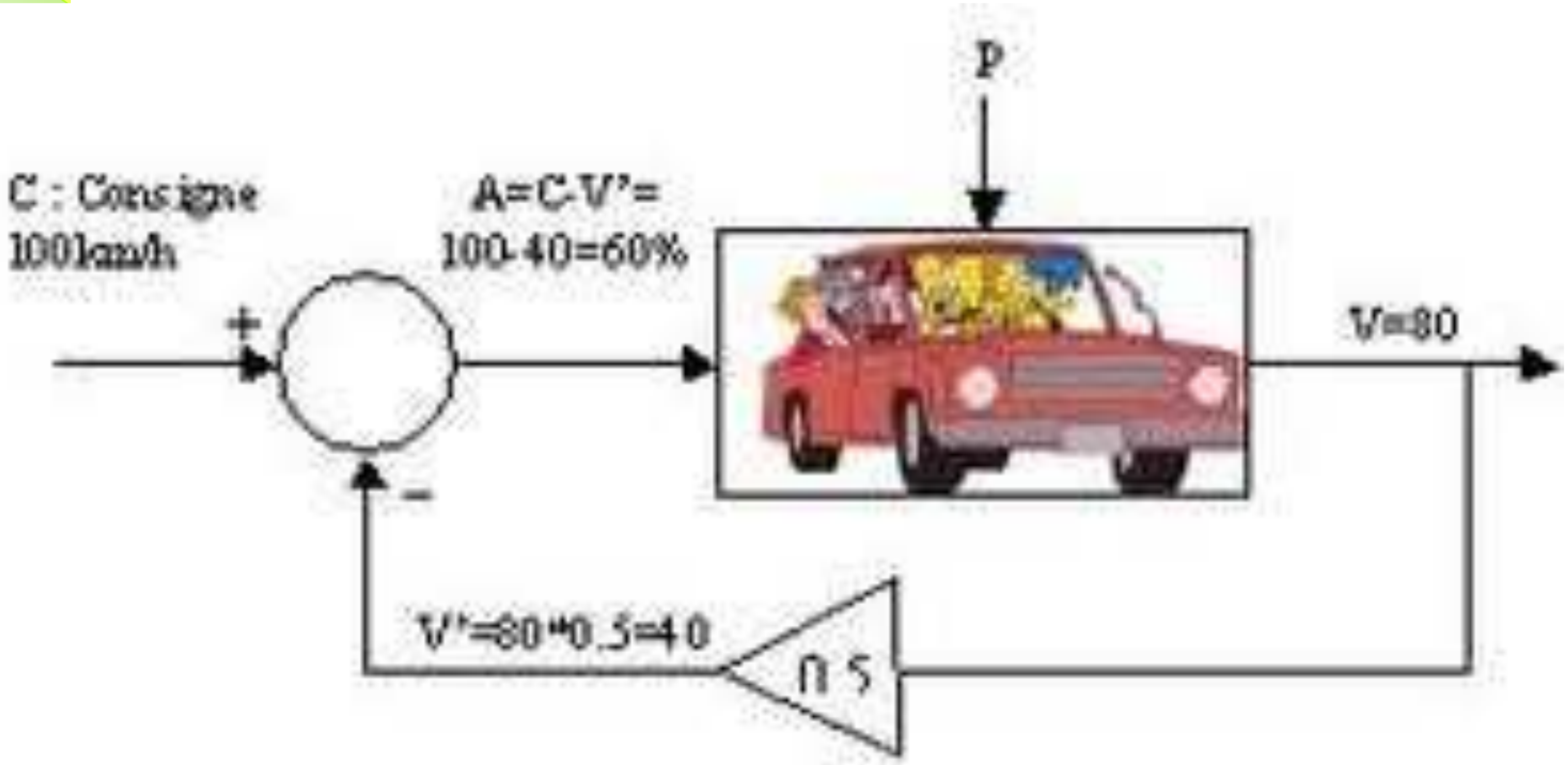
$$\det[\lambda I - (A+BK)] = (\lambda+2)(\lambda+1-K_2)$$

Plan du chapitre

I. Placement de pôles

II. Retour d'état et asservissement

II. Asservissement



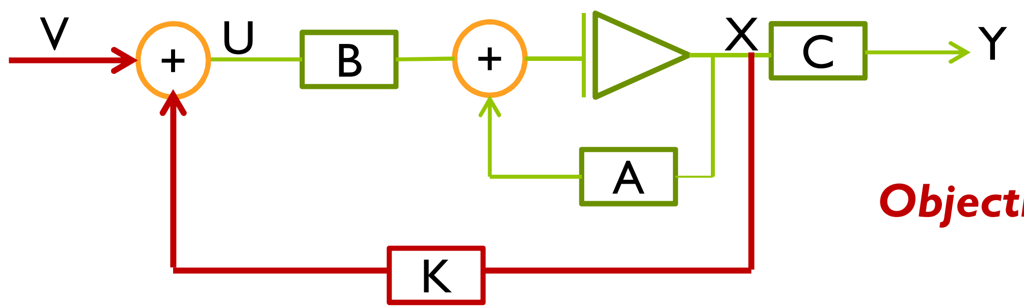
On veut que la sortie suive une valeur de référence ou de consigne.

II. Asservissement

Le retour d'état permet de **régler les performances dynamiques**.

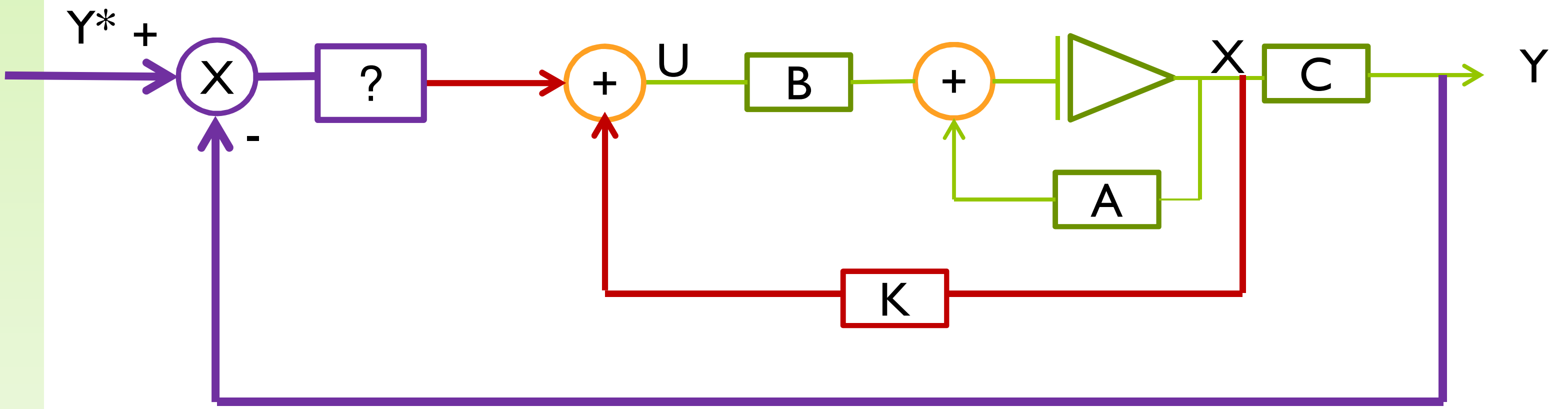
$$\frac{dX}{dt} = (A + BK)X + BV$$

Le retour d'état **n'asservit pas** une sortie à une consigne Y*.



Objectif : Rapidité, stabilité

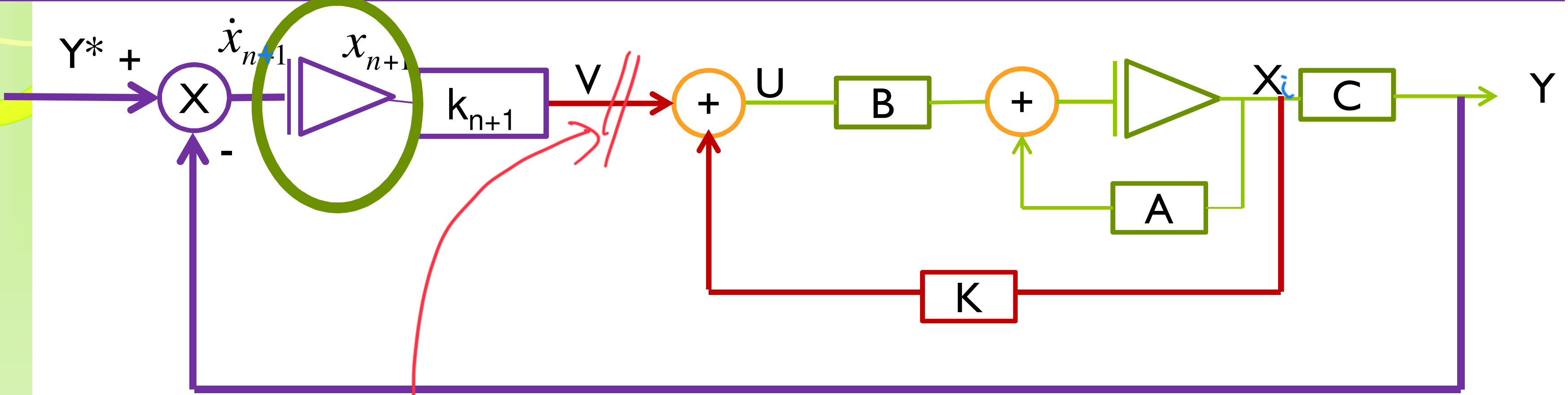
Asservissement



*Objectif : Précision Y=Y**

II. Asservissement et retour d'état

Erreur statique du 1er ordre = 0 → **intégrateur** dans la boucle **ouverte**



Introduction d'une variable d'état supplémentaire $\dot{x}_{n+1} = \varepsilon = y^* - y$

$\dot{X}_i = AX_i + BU$

$\dot{x}_{n+1} = -CX_i \quad +Y^*$

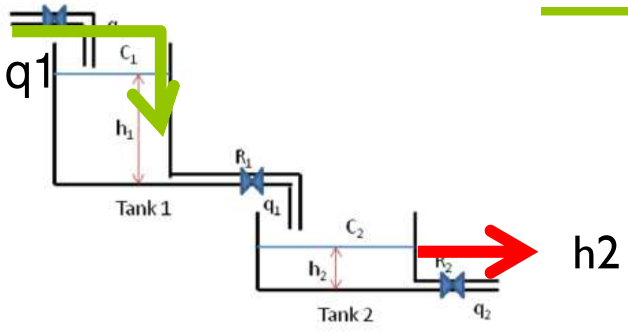
Système en boucle ouverte

$$\frac{dX}{dt} = AX + BU \qquad \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{x}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} Y^*$$

Système en boucle fermée

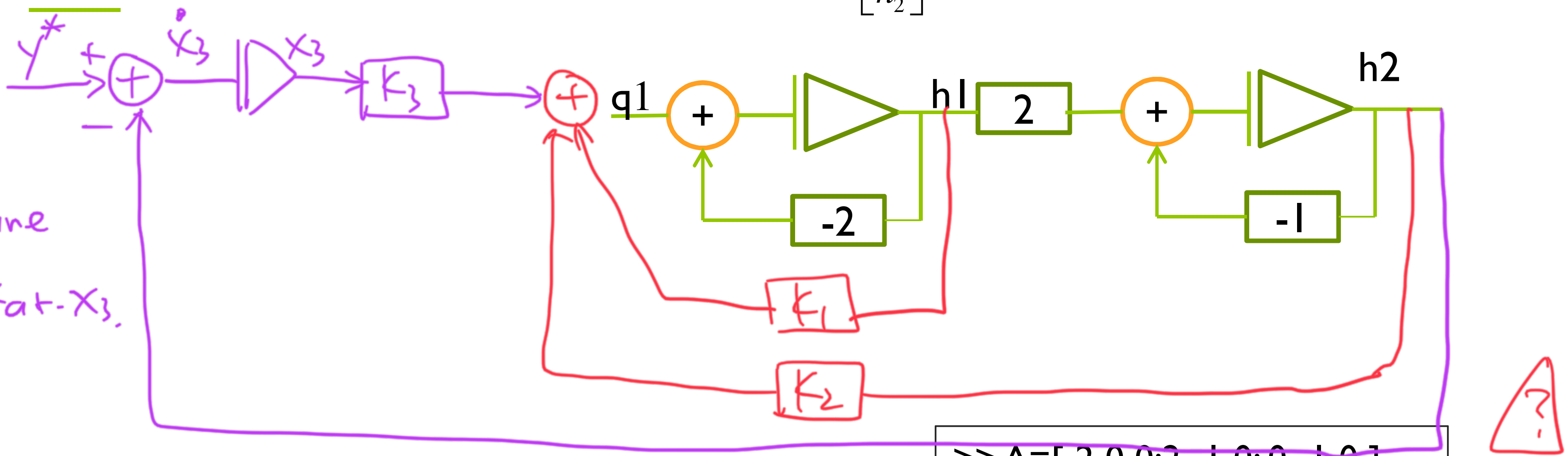
$$U = KX + k_{n+1}x_{n+1} = K'X' \quad \rightarrow \quad \frac{dX'}{dt} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} X' + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} K'X' + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} Y^*$$

Asservissement du niveau h_2



$$\begin{bmatrix} \dfrac{dh_1}{dt} \\ \dfrac{dh_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} q_1$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$



ajouter une variable d'état x_3.

$\dfrac{dx'}{dt}$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dh_1}{dt} \\ \dfrac{dh_2}{dt} \\ \dfrac{dx_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} q_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y^*$$

x'

```
>> A=[-2 0 0;2 -1 0;0 -1 0 ]
>> B=[1 0 0 ]'
>> pbf=[-2 -4 -3]'
>> K=-place(A,B,pbf)
K =-6.0000   -9.0000   12.0000
```

如何确定

$$q_1 = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x'}$$

$$\frac{dx'}{dt} = (A+BK)\,x' + B_{BF}\, y^*$$

$$y = C_{BF}\, x' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x'.$$

$$FT_{BF}(0) = -\,C_{BF}\,(A+BK)^{-1} B_{BF} = 1 \quad (\text{gain statique})$$

Exercice

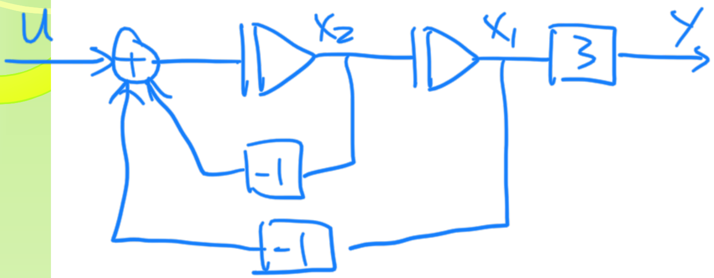
$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

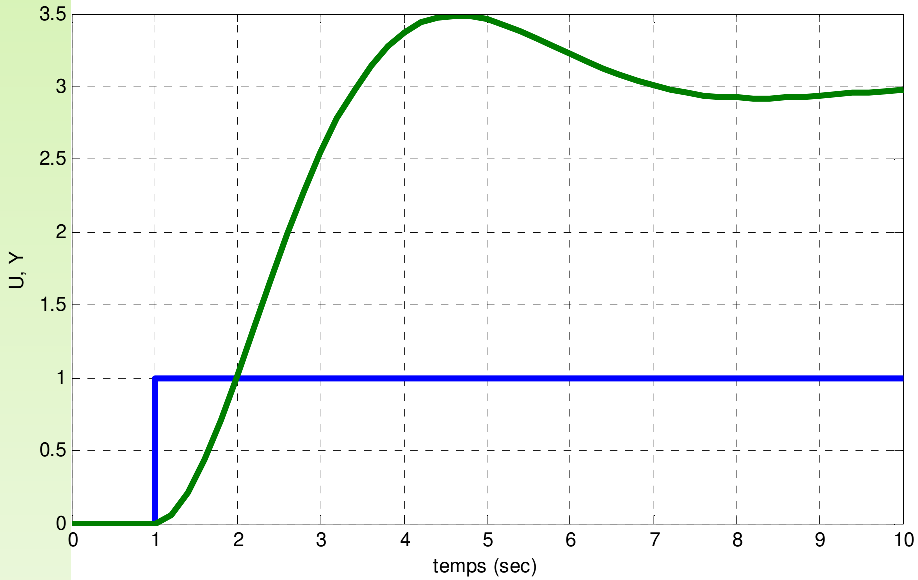
$$\mathrm{y} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- Proposer une commande par retour d'état permettant d'asservir la sortie y à une référence y*.
- On placera les pôles en boucle fermée à -1, -2 et -3.

Système en boucle ouverte

Schéma analogique





Valeurs propres

$\lambda_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

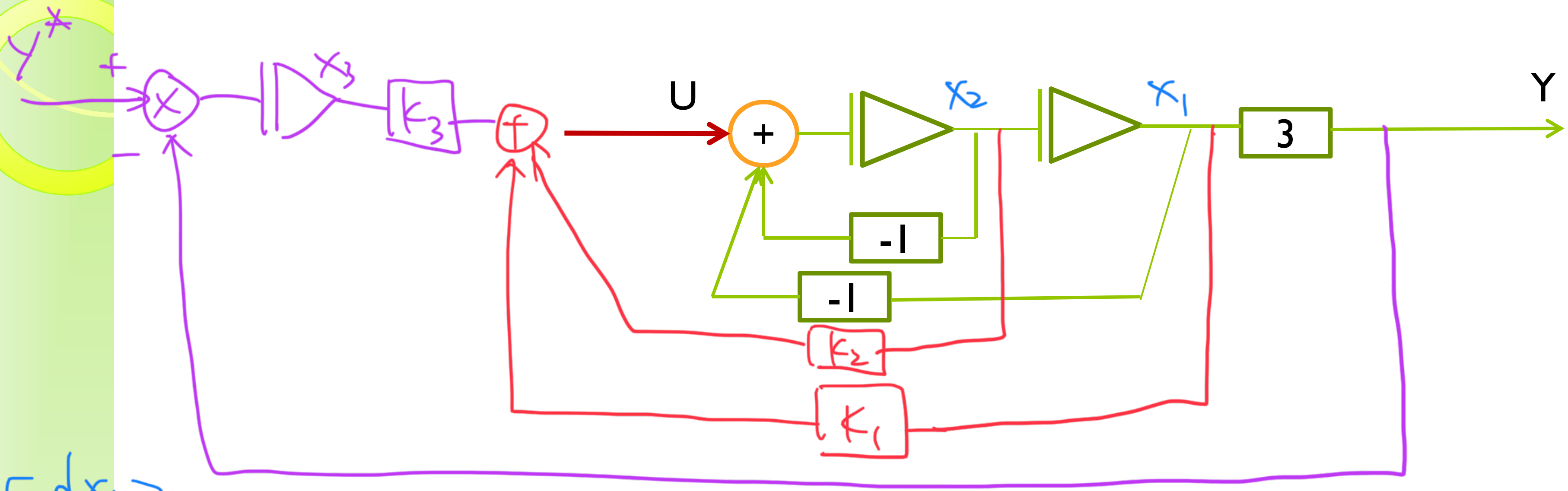
Gain statique

$F(0) = -C A^{-1} B = 3$

Commandabilité

$\Gamma = [B,\ AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ commandable

Système en boucle fermée



$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} U + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y^*$$

$$U = KX = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad A+BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1+k_1 & -1+k_2 & k_3 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I-(A+BK)) = \lambda^3+\lambda^2(1-k_2)-\lambda(k_1-1)+3k_3$$

$$\triangleq (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

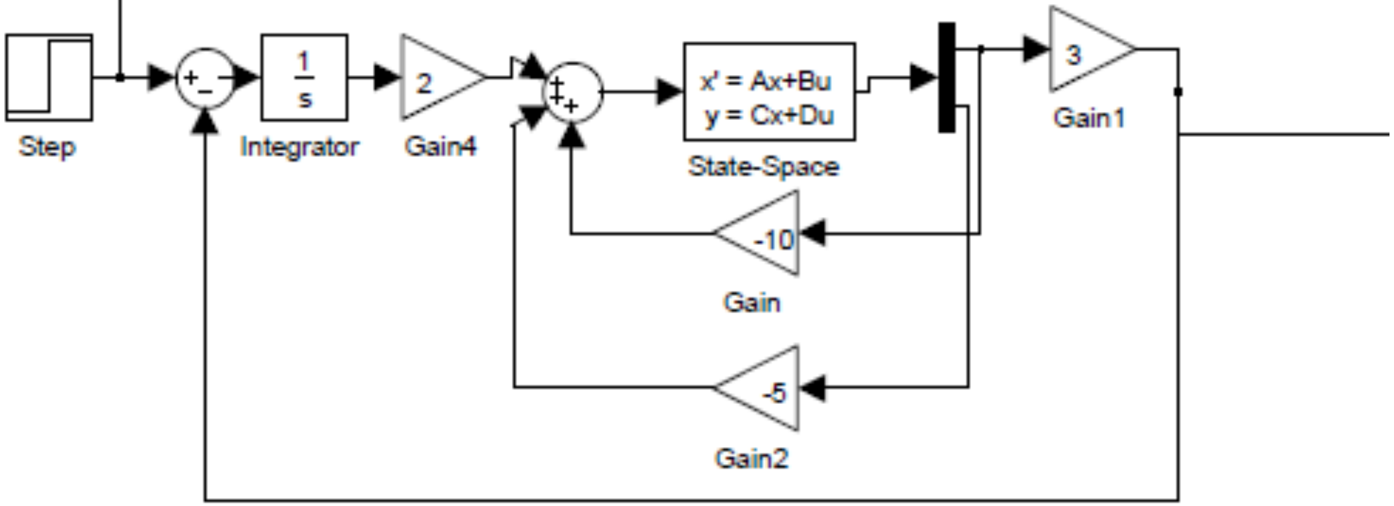
Gain statique en boucle fermée

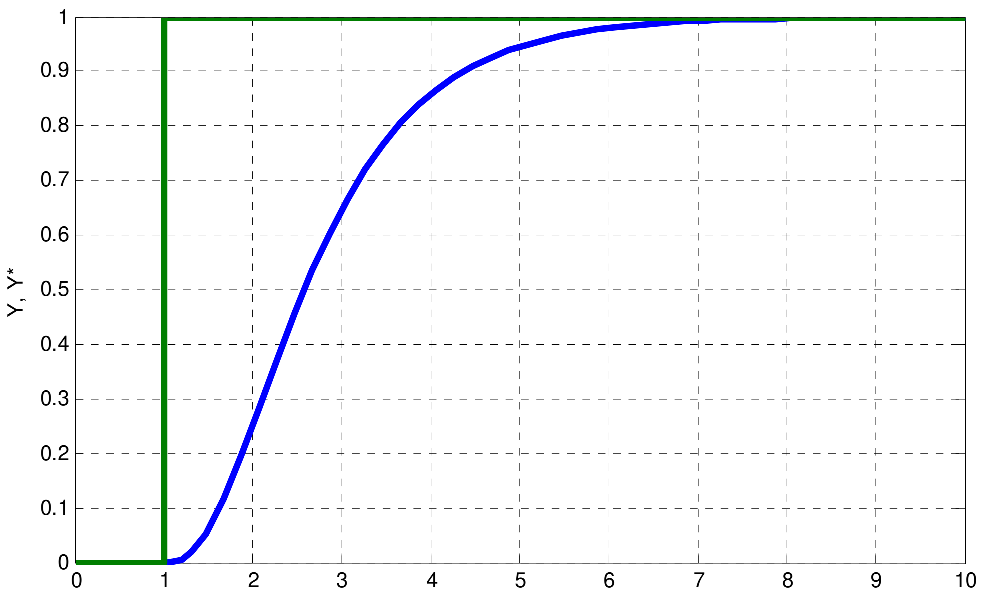
$$FT_{BF}(0) = -C_{BF}(A+BK)^{-1}B_{BF}$$

$$C_{BF} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad B_{BF} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad A_{BF} = A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -11 & -6 & 2 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$FT_{BF}(0) = 1$$

Système en boucle fermée



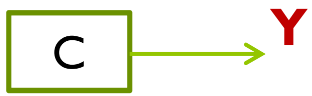


Plan du cours

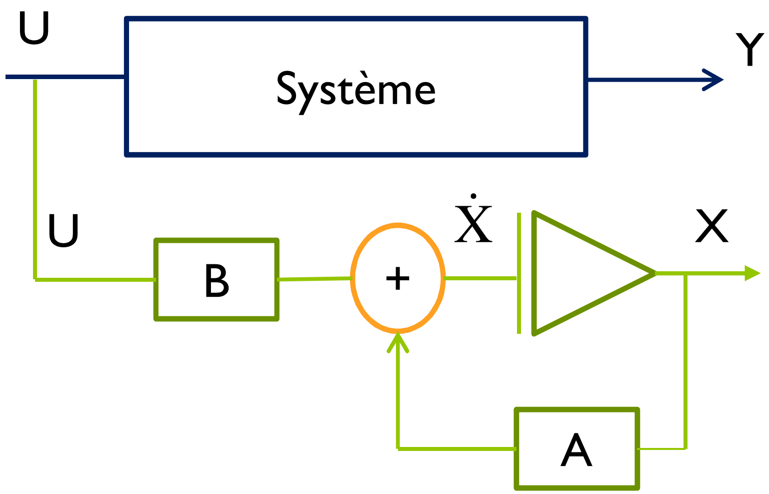
- Chapitre 1: Représentation d'état des systèmes
- Chapitre 2: Réponse des systèmes linéaires
- Chapitre 3: Commandabilité, observabilité
- Chapitre 4: Commande par retour d'état
- **Chapitre 5: Observateurs d'état**
- Chapitre 6: Commande par retour d'état avec observateur

Observateur d'état

- Pour appliquer une commande par retour d'état, **tout l'état X doit être mesurable**.
- On ne mesure que la sortie Y



- → **Retrouver X à partir de Y**



☺ Idée ! Simulation en parallèle du système : Intégrer le modèle d'état

☹ Oui mais !

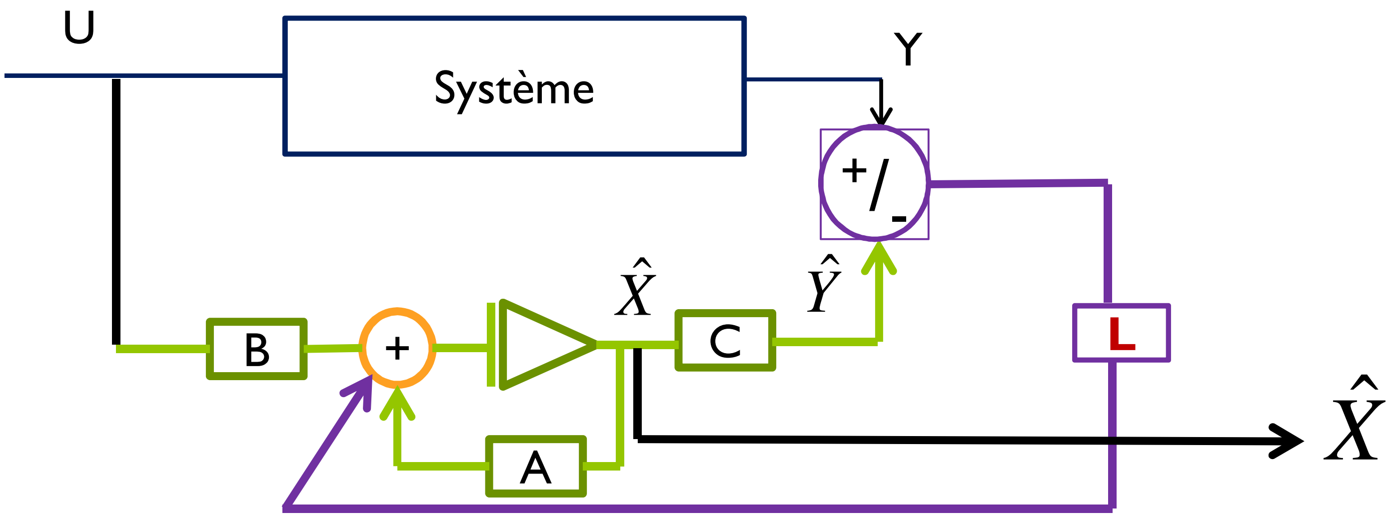
- ❖ On ne connait pas les conditions initiales.
- ❖ Il existe des perturbations

Observateur de Luenberger

- Soit le système $\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = AX + BU \\ Y = CX \end{cases}$

Pour retrouver l'état X, on construit **l'observateur d' état** :

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{X}}{dt} = A\hat{X} + BU + L(Y - \hat{Y}) \\ \hat{Y} = C\hat{X} \end{cases}$$



Dynamique de l'observateur

$$\tilde{X} = X - \hat{X}$$ erreur d'estimation

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = \frac{dX}{dt} - \frac{d\hat{X}}{dt} = AX + \cancel{B}U - (A\hat{X} + \cancel{B}U + LC(X - \hat{X}))$$

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = (A - LC)(X - \hat{X}) = (A - LC)\tilde{X}$$

$$\boxed{\tilde{X}(t) = e^{(A-LC)t}\,\tilde{X}_0}$$

La dynamique de l'observateur est réglée par les **valeurs propres de (A-LC)**.

Dynamique de l'observateur

- L'observateur doit être **asymptotiquement stable**. $Re(\lambda_i) < 0$

  → partie réelle des valeurs propres de (A-LC) <0

- L'observateur doit être **plus rapide que le système.** $Re(\lambda_{i_{A-LC}}) < Re(\lambda_{i_A})$

  →partie réelle des valeurs propres de (A-LC)<valeurs propres de A

<u>Valeurs propres de **A-LC <<0**</u>

☺ l'observateur converge **vite**.

☹ → il est sensible au **bruit de mesure**.

Réglage de l'observateur

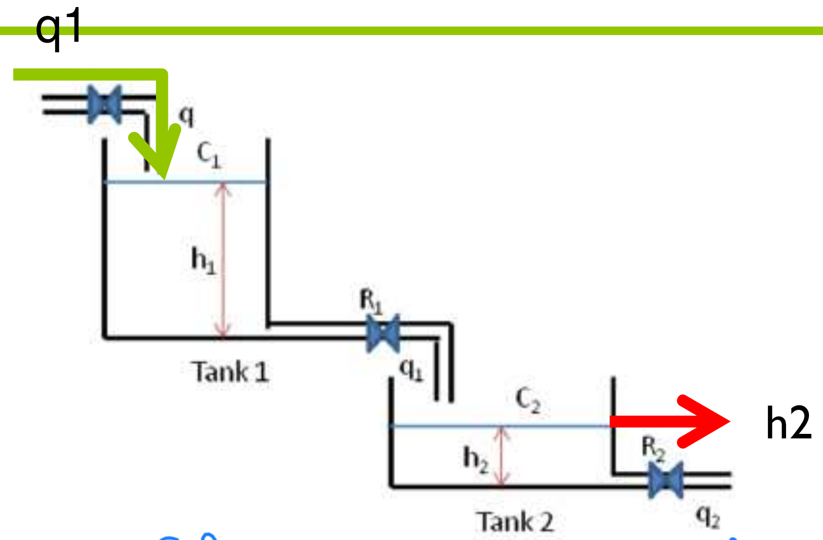
- Si un système d'ordre n est **observable**, on peut construire un **observateur** ayant **n valeurs propres fixées**.

→ Régler **L** tel que les **valeurs propres de (A-LC)** soient égales aux **valeurs propres désirées**

$$\det(\lambda I - (A - LC)) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_{ides})$$

→ Résoudre un système de n équations à n inconnues

Observateur



Application numérique :

$C_1 = C_2 = 1\,m^2$; $R_1 = 0{,}5$ $R_2 = 1\ s^{-1}m$

$\lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = -1$

$$\begin{bmatrix} \frac{dh_1}{dt} \\ \frac{dh_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} q_1$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

observable

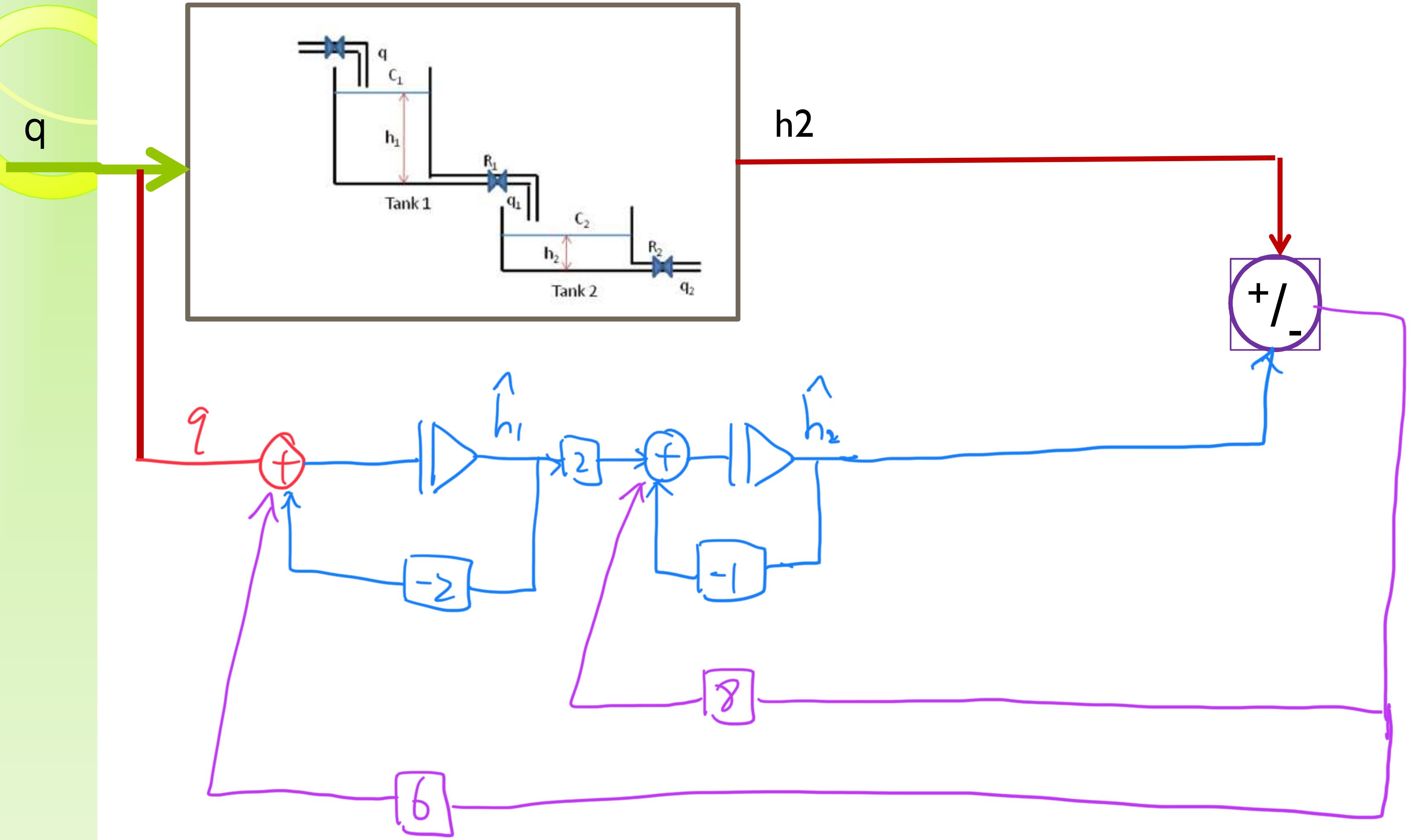
$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}. \quad (A - LC) = \begin{bmatrix} -2 & -l_1 \\ 2 & -1-l_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - (A - LC)) = \lambda^2 + (3 + l_2)\lambda + 2(l_2 + 1) + 2l_1 \triangleq (\lambda + 5)(\lambda + 6)$$

确定λide时取2倍或2倍多λiA. $\lambda_1 = -5, \quad \lambda_2 = -6$

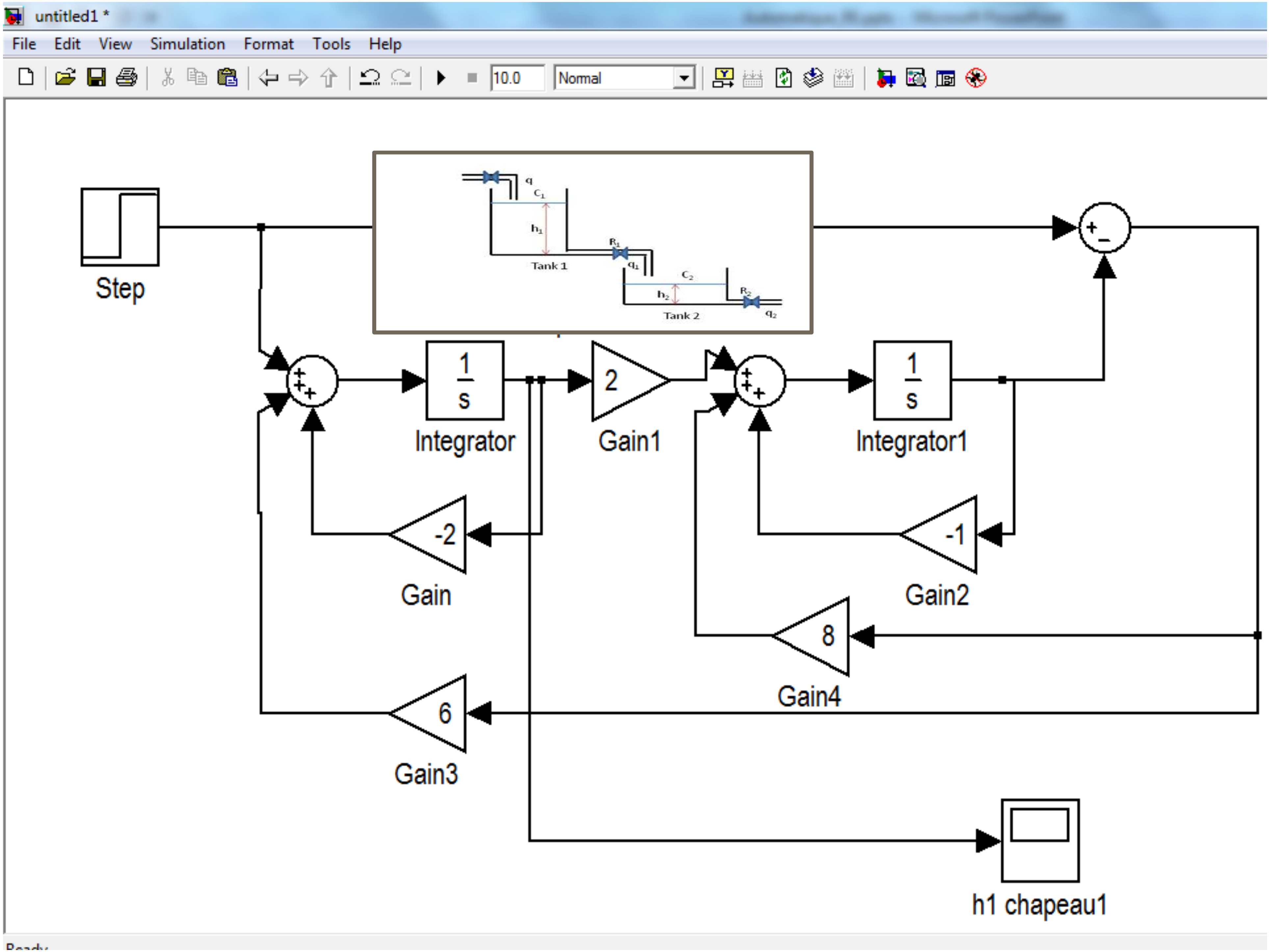
$$\Rightarrow \begin{cases} l_1 = 6 \\ l_2 = 8 \end{cases}$$

Observateur

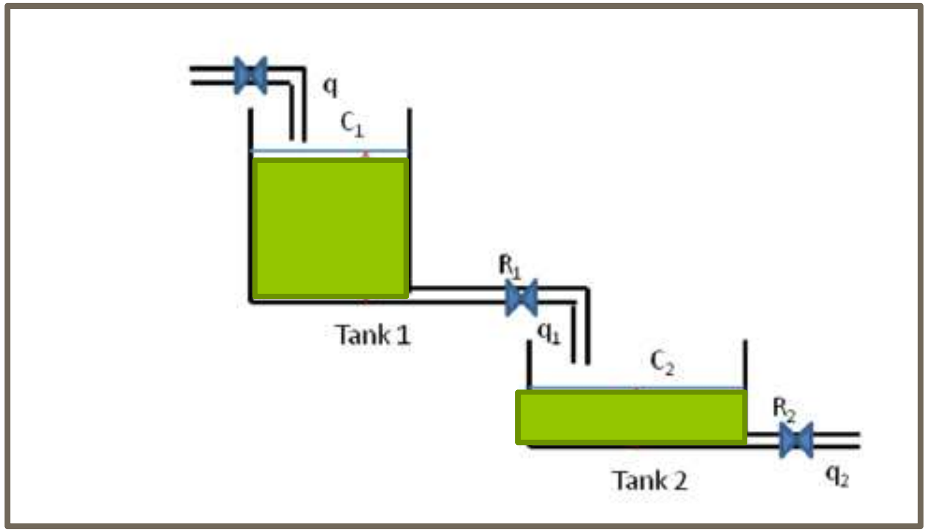


Avec Matlab

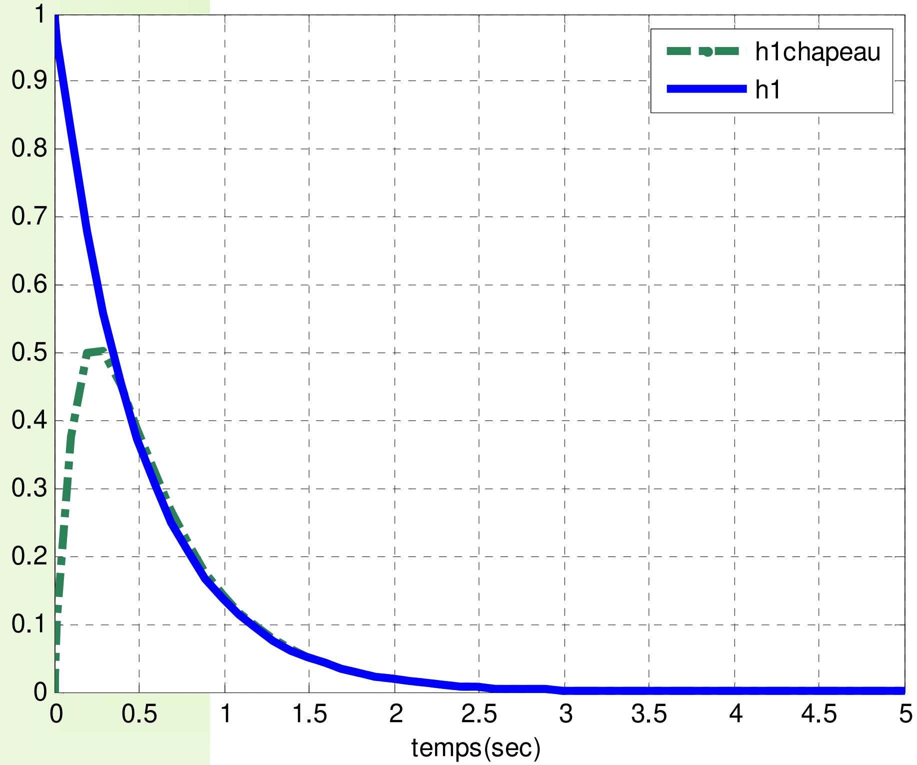
```
>> A=[-2 0;2 -1]
A =
 -2     0
  2    -1
>> C=[0 1]
C =
     0     1
>> L=place(A',C',[-3 -4]')

L =


    6.0000    8.0000
```


untitled1 *
File Edit View Simulation Format Tools Help
10.0
Normal
Step
q
C_1
h_1
Tank 1
R_1
q_1
C_2
h_2
Tank 2
R_2
q_2
1/s
Integrator
2
Gain1
1/s
Integrator1
-2
Gain
-1
Gain2
8
Gain4
6
Gain3
h1 chapeau1

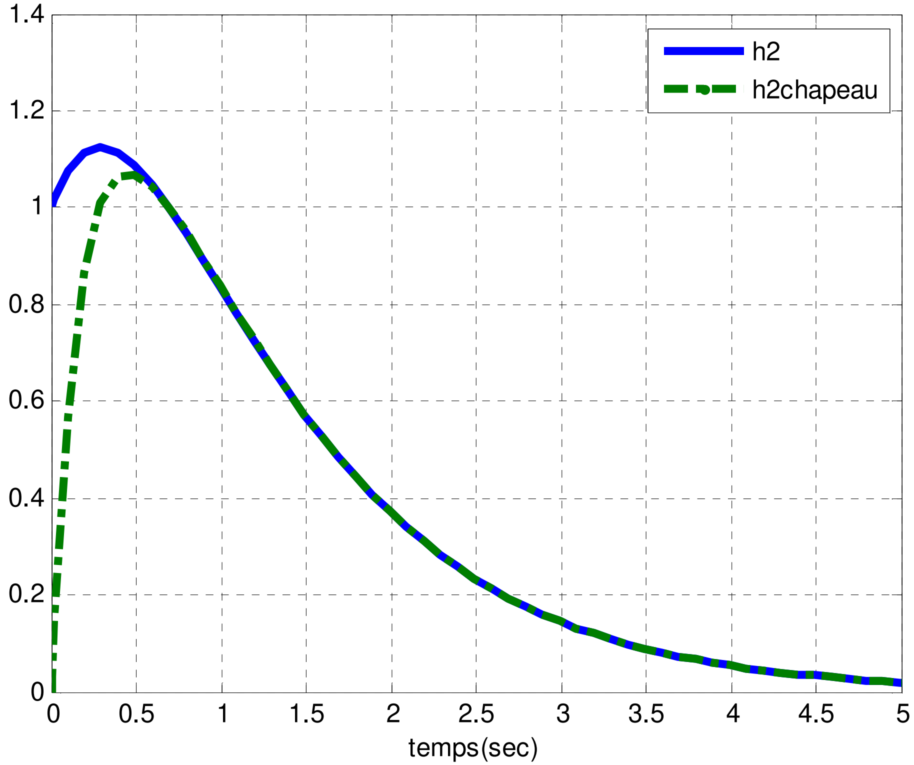
q=0



q
C_1
R_1
Tank 1
q_1
C_2
R_2
Tank 2
q_2



h1chapeau
h1
temps(sec)



h2
h2chapeau
temps(sec)

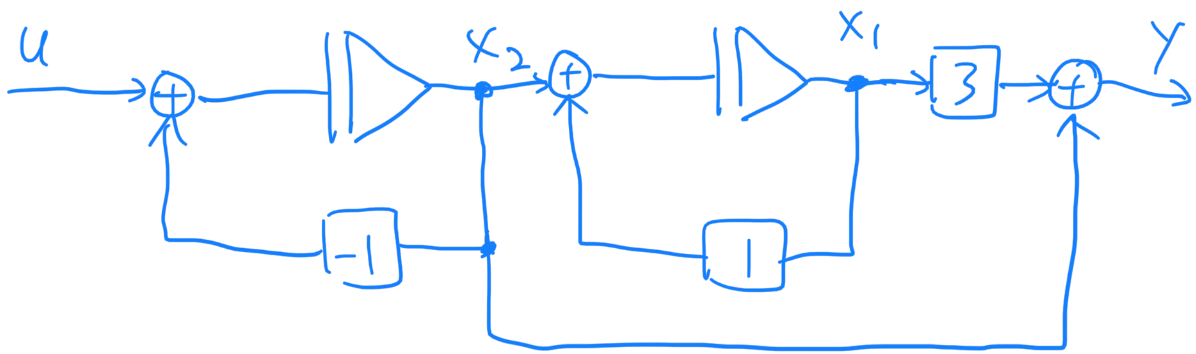
Exercice

- Soit le système décrit par la représentation d'état suivante.

Peut-on construire un observateur d'état, estimant x1 et x2, dont la durée du transitoire soit plus courte que celle du système ? Donner le schéma analogique du système + observateur.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\mathrm{y} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



Exercice

- Observabilité

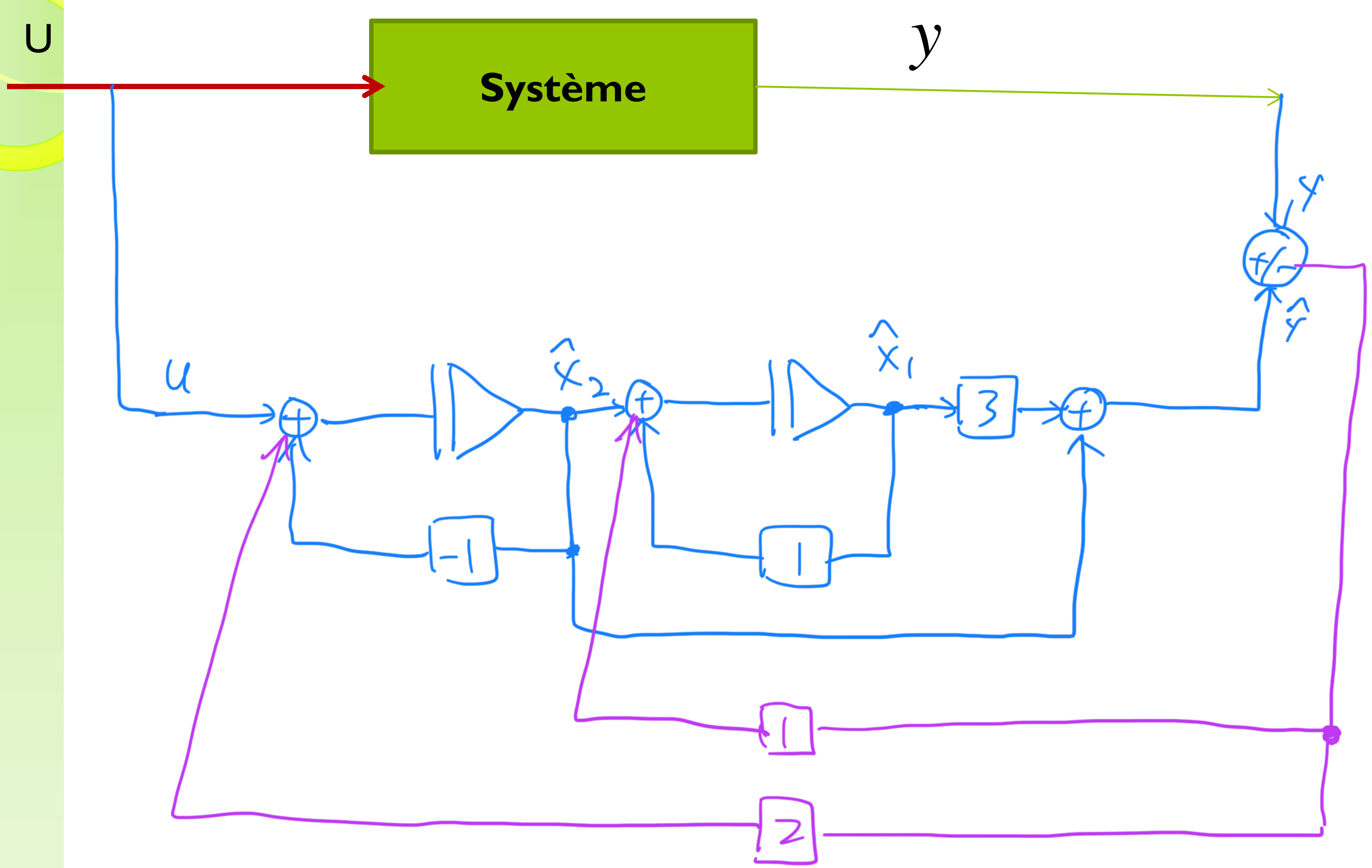
$$\Omega = [C \,;\, CA] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{rank } \Omega = 2 \quad \text{observable}$$

- Observateur

$$A - LC = \begin{bmatrix} 1-3l_1 & 1-l_1 \\ -3l_2 & -1-l_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - (A-LC)) = \lambda^2 + (3l_1 + l_2)\lambda + (3l_1 + 2l_2 - 1) \triangleq (\lambda+2)(\lambda+3)$$

$$\Rightarrow l_1 = 1, \; l_2 = 2$$



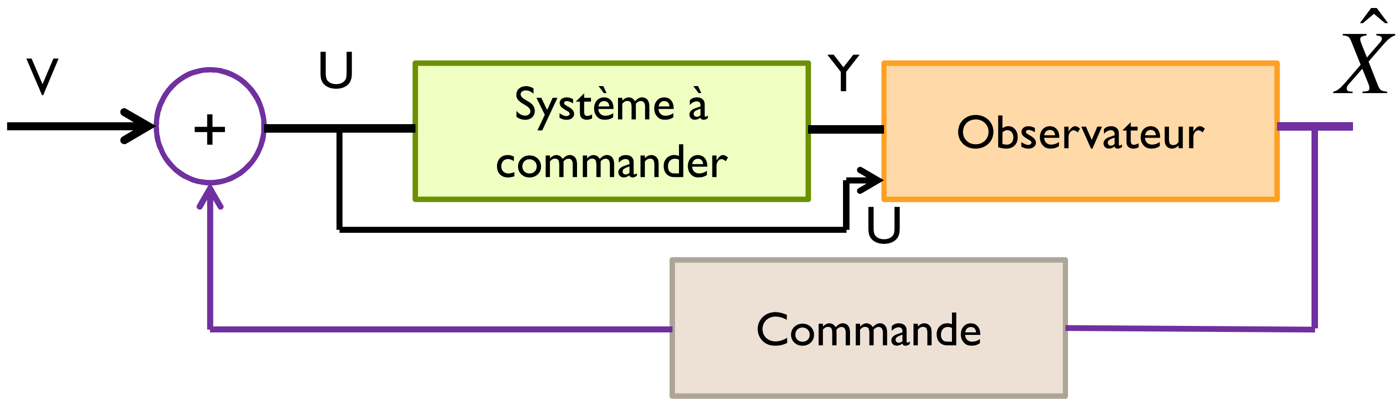
U
Système
y
u
-1
1
3
2
+/-

Plan du cours

- Chapitre 1: Représentation d'état des systèmes
- Chapitre 2: Réponse des systèmes linéaires
- Chapitre 3: Commandabilité, observabilité
- Chapitre 4: Commande par retour d'état
- Chapitre 5: Observateurs d'état
- **Chapitre 6: Commande par retour d'état avec observateur**

Commande par retour d'état avec observateur

- Commande par **retour d'état** → On doit mesurer **tout l'état**
- Si l'état n'est pas mesuré → **Observateur d'état** (si système observable)



Système à commander

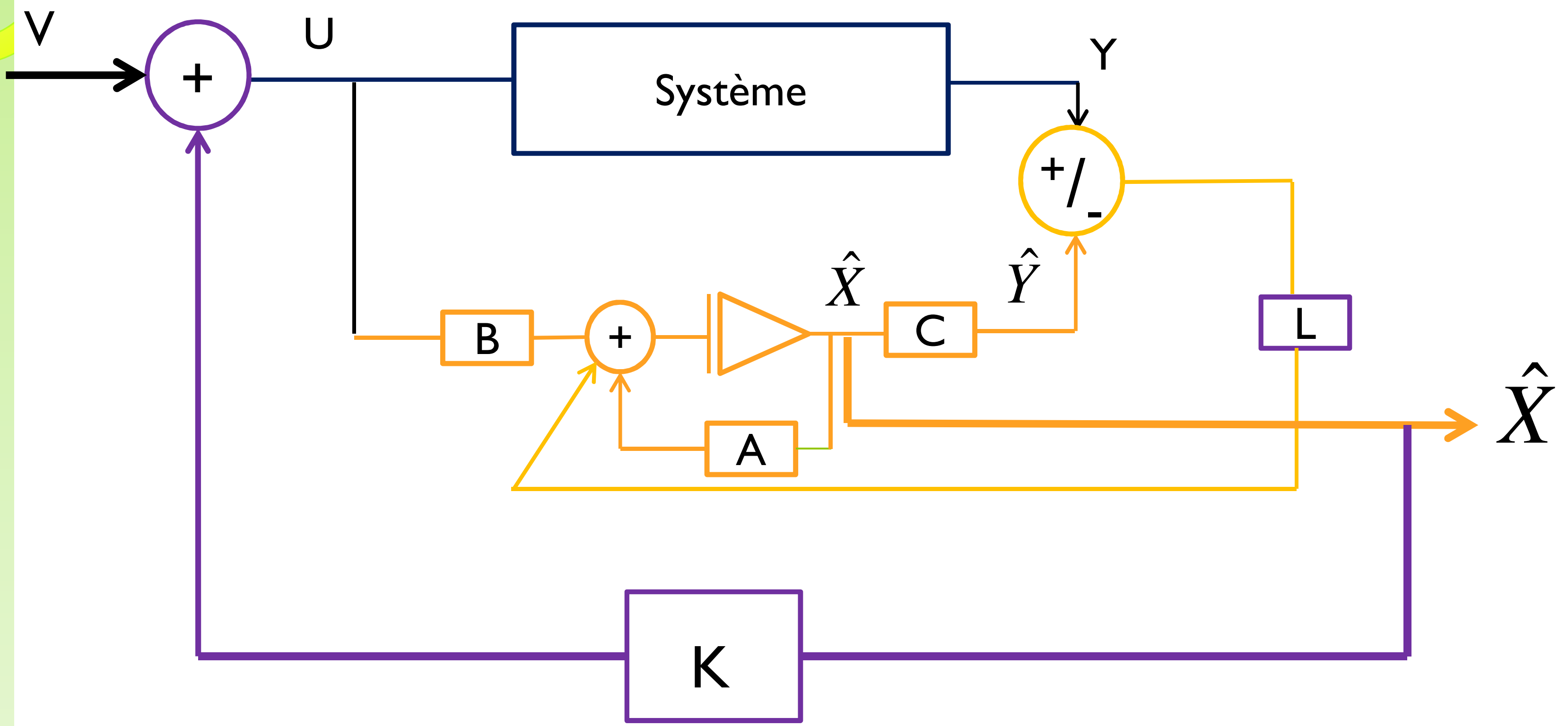
$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = AX + BU \\ Y = CX \end{cases}$$

Observateur

$$\frac{d\hat{X}}{dt} = A\hat{X} + BU + LC(X - \hat{X})$$

Commande $\quad U = K\hat{X} + V$

Commande par retour d'état avec observateur



Equation d'état du système en boucle fermée

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = AX + BK\hat{X} + BV \\ \dfrac{d\hat{X}}{dt} = (A - LC)\hat{X} + BK\hat{X} + BV + LCX \\ Y = CX \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dX}{dt} \\ \dfrac{d\hat{X}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BK \\ LC & A - LC + BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \hat{X} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} V$$

Quelle est la ***dynamique*** *du* ***système bouclé****?*

Les ***performances dynamiques*** *dépendent-elles du* ***réglage de l'observateur ?***

Dynamique du système en boucle fermée

- **Idée!** Faire apparaitre X et $\tilde{X}$

$$\frac{dX}{dt} = AX + BK\hat{X} + BV$$

$$\frac{dX}{dt} = AX + BK(\hat{X} + X - X) + BV$$

$$\frac{dX}{dt} = (A + BK)X + BK(\hat{X} - X) + BV$$

$$\boxed{\frac{dX}{dt} = (A + BK)X + BK\tilde{X} + BV}$$

$$\frac{d\hat{X}}{dt} = (A - LC)\hat{X} + BK\hat{X} + BV + LCX$$

$$\frac{d\hat{X}}{dt} - \frac{dX}{dt} = (A - LC)\hat{X} + BK\hat{X} + BV + LCX - \frac{dX}{dt}$$

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = (A - LC)\hat{X} + \cancel{BK\hat{X}} + \cancel{BV} + LCX - AX - \cancel{BK\hat{X}} - \cancel{BV}$$

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = (A - LC)\hat{X} + LCX - AX$$

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = (A - LC)\hat{X} - (A - LC)X$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{d\tilde{X}}{dt} = (A - LC)\tilde{X}}$$

Dynamique du système en boucle fermée

$$\frac{dX}{dt} = (A + BK)X + BK\tilde{X} + BV$$

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = (A - LC)\tilde{X}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dX}{dt} \\ \dfrac{d\tilde{X}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \tilde{X} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} V$$

A_{BF} est triangulaire → valeurs propres sur la diagonale

Théorème de séparation :

La dynamique de **X en boucle fermée** est réglée par les valeurs propres de **A+BK**

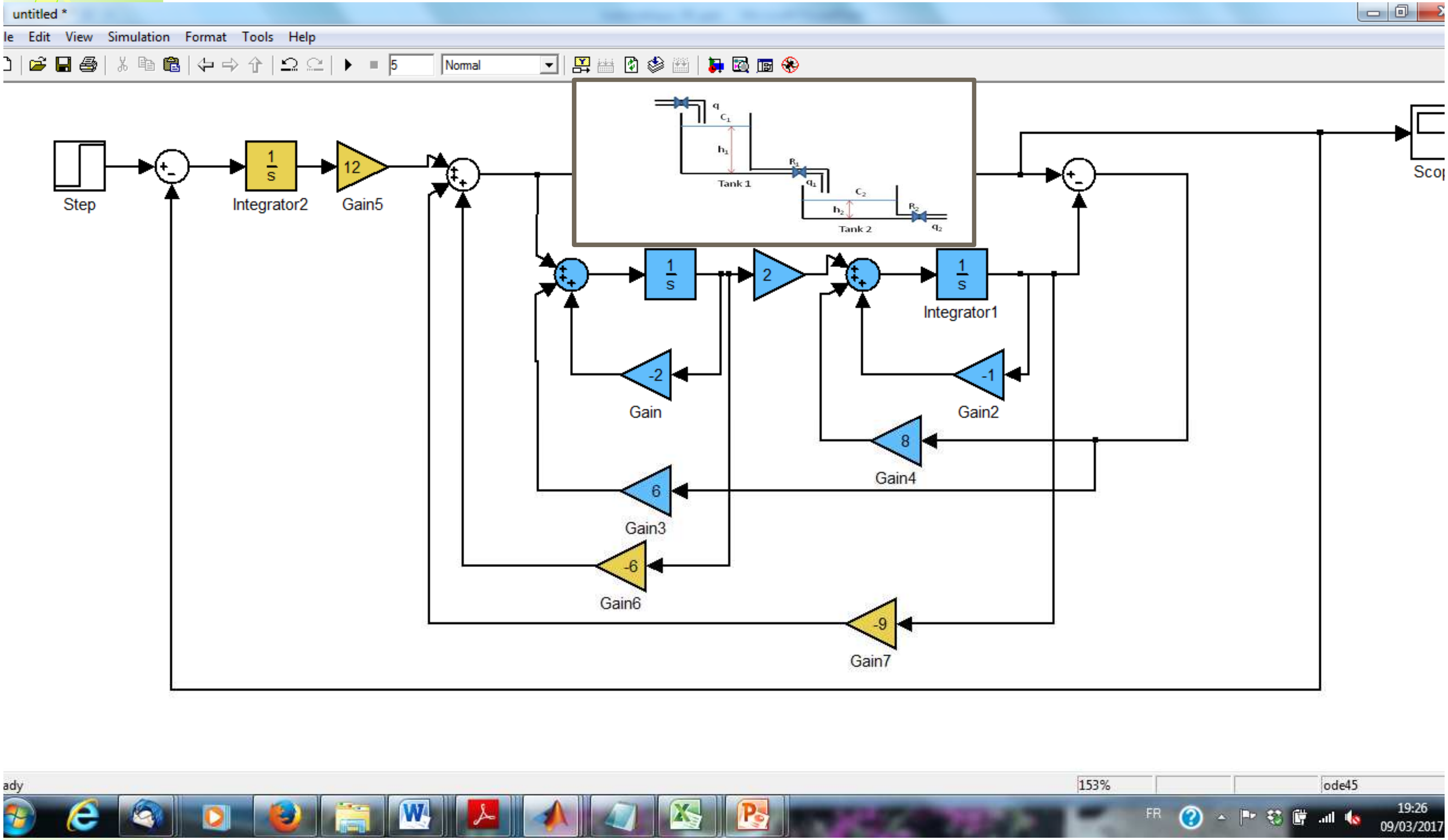
La dynamique de **l'observateur** est réglée par les valeurs propres de **A-LC**

Les performance de la commande par retour d'état ne sont pas modifiées par l'observateur.

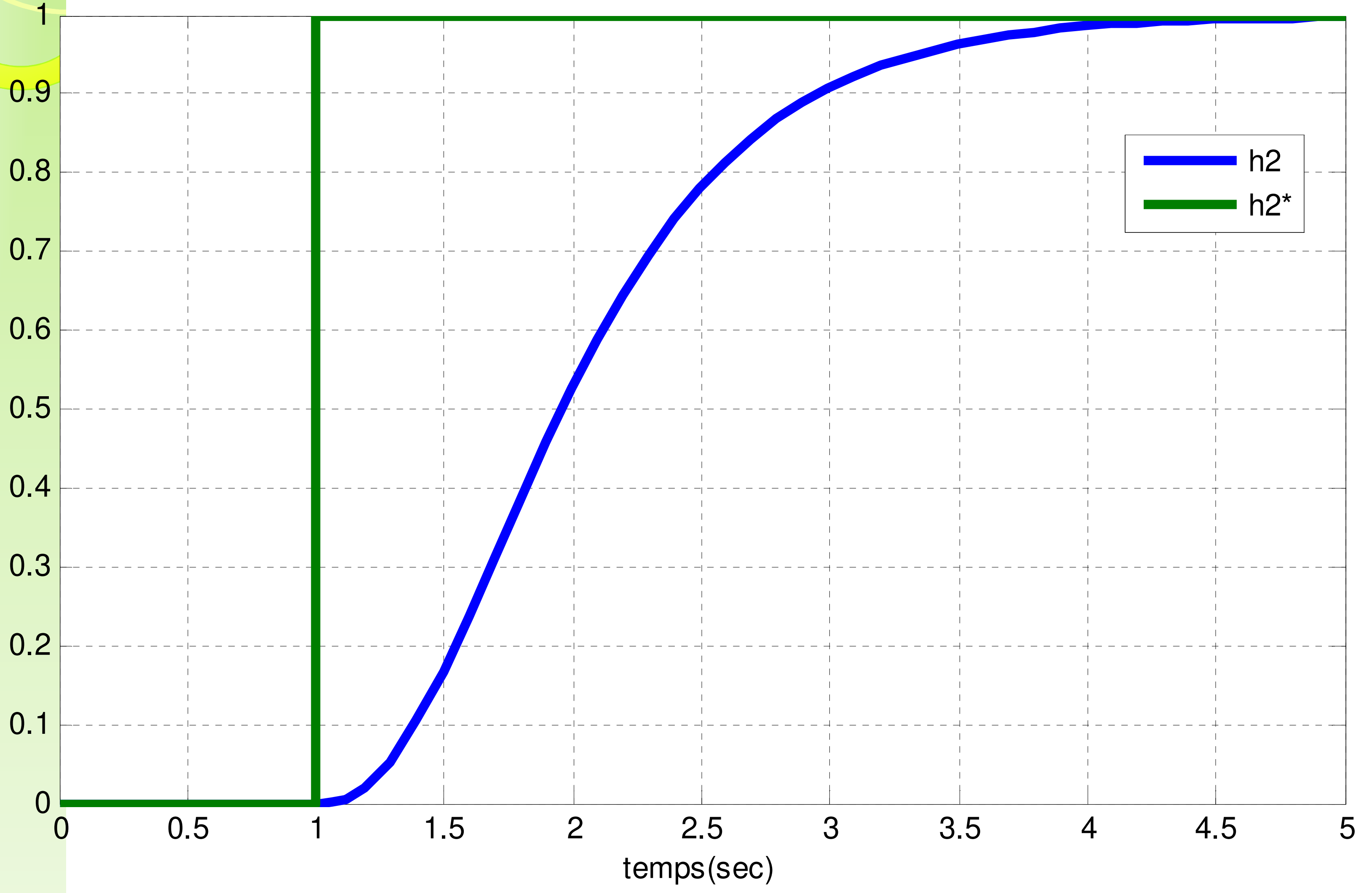
Les performances de l'observateur ne sont pas modifiées par le retour d'état.

→ **On règle la commande et l'observateur de manière indépendante.**

Asservissement du niveau h_2



Asservissement du niveau h2



Conclusion

- Modéliser un système linéaire multivariable sous forme de représentation d’état
- Passer de la représentation d’état à la fonction de transfert
- Analyser la commandabilité et l’observabilité d’un système
- Calculer une commande par retour d’état avec asservissement
- Construire un observateur d’état
- Calculer la commande complète : observateur + retour d’état