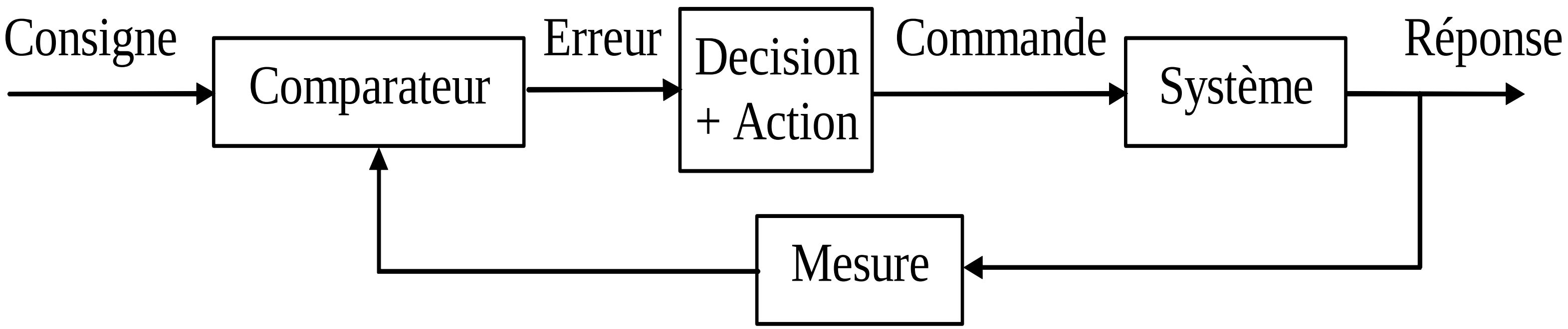
Systèmes Asservis Linéaires

Automatique S5



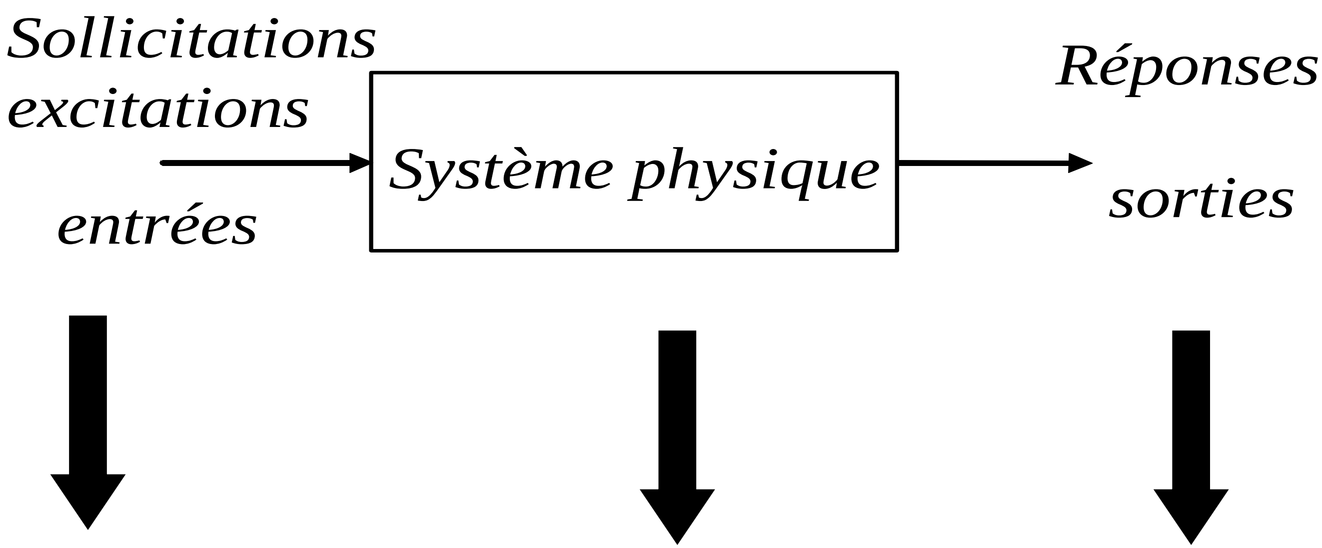
Nadia Aït-Ahmed

nadia.ait-ahmed@univ-nantes.fr

Sommaire

Introduction:

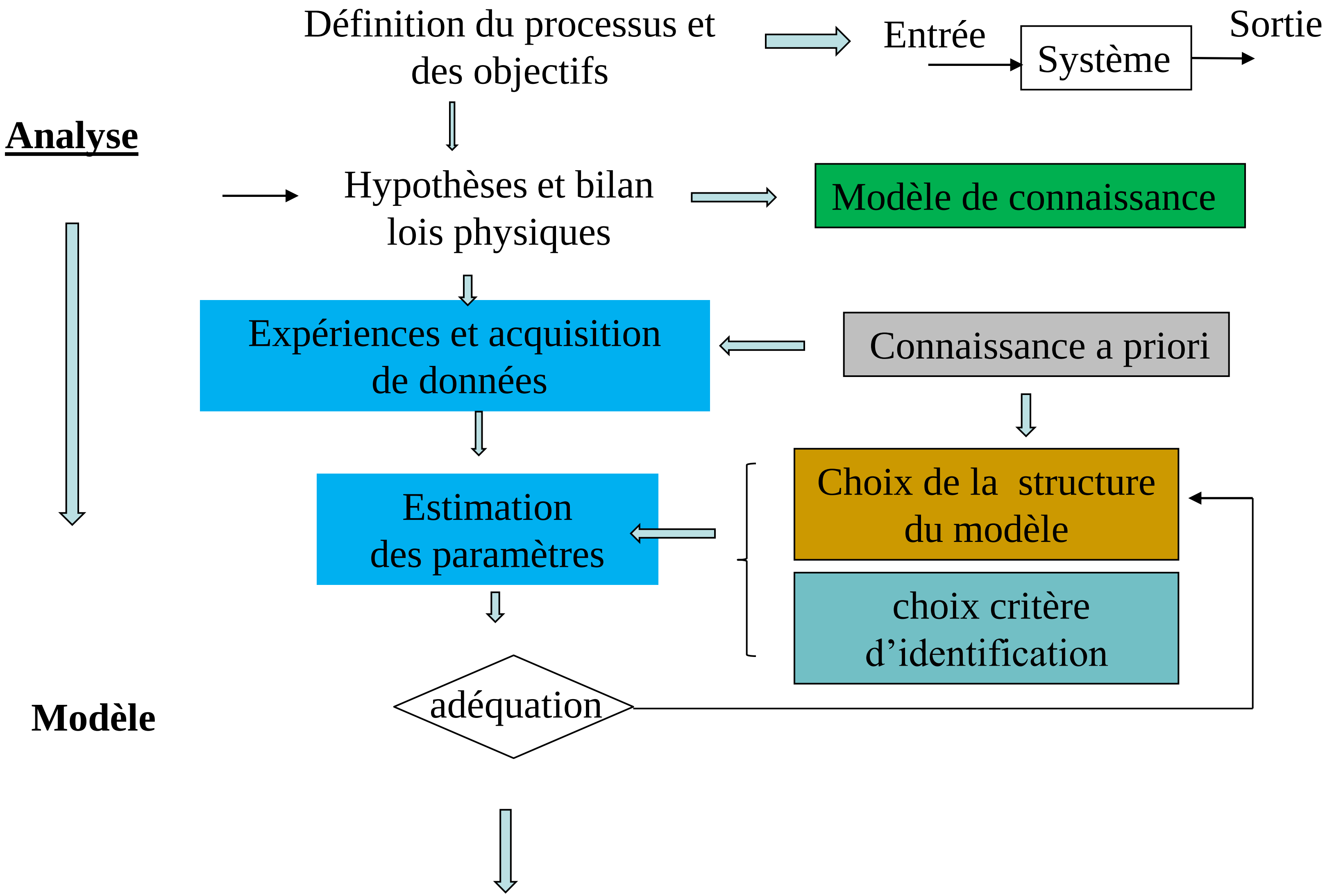
La plupart des systèmes physiques peuvent être décrits comme étant des opérateurs faisant correspondre des réponses (effets) à des sollicitations (causes).



Tension	Electrique	Courant
Position	Mécanique	Vitesse
Température	Chimie	Température
Pression	Optique	Débit
Etc…	Pneumatique	Etc…
	Etc…	

Analyse et synthèse des systèmes

Cahier des charges:



Modèle adéquat

Analyse temporelle

Equations différentielles

Equation différentielle matricielle (représentation d'état)

Analyse fréquentielle

Transformée de Laplace

Fonction de transfert

<u>Synthèse</u>

Synthèse régulateur → Simulation → Validation → Réalisation

A. Définitions

Un système est dit linéaire s'il est régi par des **équations différentielles linéaires à coefficients constants.**

Définition mathématique de la linéarité :

Soit y_1 la réponse du système pour une entrée u_1 :

$$u_1 \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow y_1$$

Soit y_2 la réponse du système pour une entrée u_2 :

$$u_2 \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow y_2$$

Alors, le système est linéaire si est seulement si y_1+y_2 est la réponse du système pour une entrée u_1+u_2

$$u_1+u_2 \longrightarrow \boxed{\text{Système}} \longrightarrow y_1+y_2$$

αy_1 est la réponse du système pour une entrée αu_1 et ceci quel que soit u_1, u_2 et α.

Dans le cas contraire le système est non linéaire.

* Un système asservi est linéaire s'il n'est composé que de systèmes linéaires (correcteur, système à commander, mesure, ...)

* Un système (asservi) est dit continu lorsque l'entrée, la sortie et toutes les variables intermédiaires sont des fonctions continues du temps au sens mathématique de la continuité.

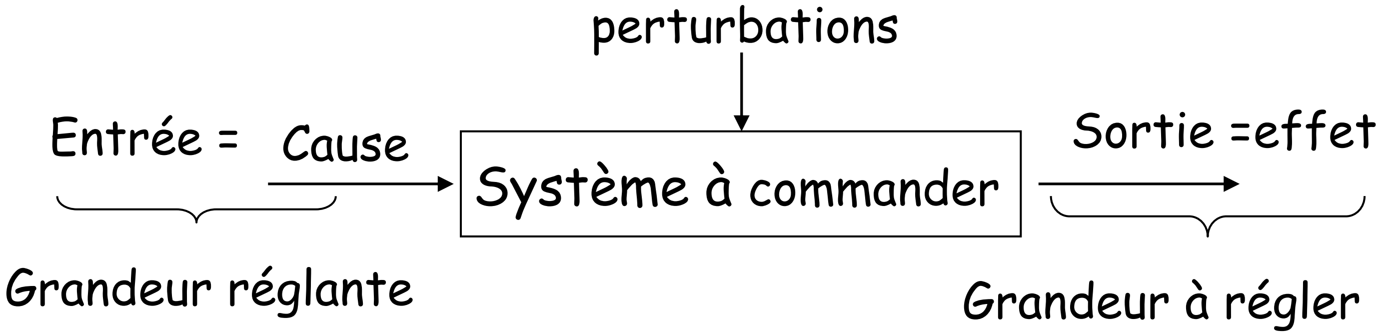
B. Système en boucle ouverte et système en boucle fermée

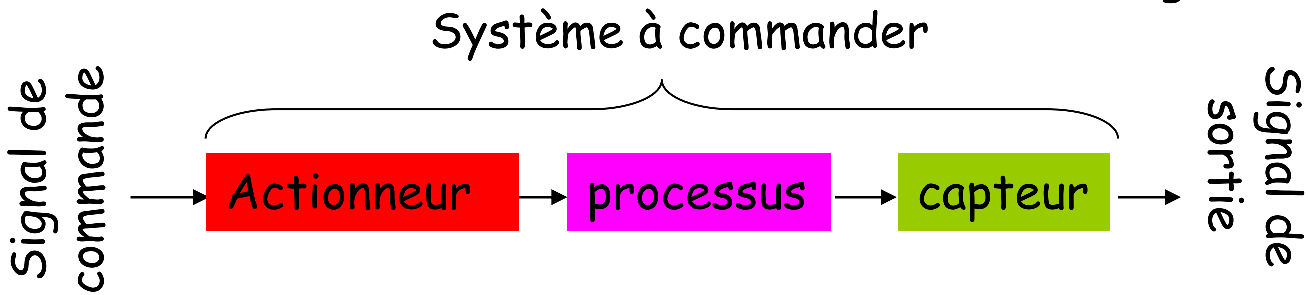
* On appel un **système de commande** tout système qui fournit une ou plusieurs grandeurs de sorties fonctions d'une ou plusieurs grandeurs d'entrées. On dit, alors, que l'entrée commande la sortie. L'entrée est appelée variable de commande (entrée ou commande) et la sortie variable commandée (sotie ou réponse).

* Quand un système ne possède qu'une seule entrée et une seule sortie on parle de **système monovariable** (système SISO : Single Input Single Output). Dans le cas contraire (plusieurs entrées et/ou plusieurs sorties) on parle de **système multivariable** (système MIMO : Multi Input Multi Output).

* On peut distinguer deux types de systèmes : les **systèmes bouclés** (en **boucle fermée**) et les **systèmes non bouclés** (en **boucle ouverte**).

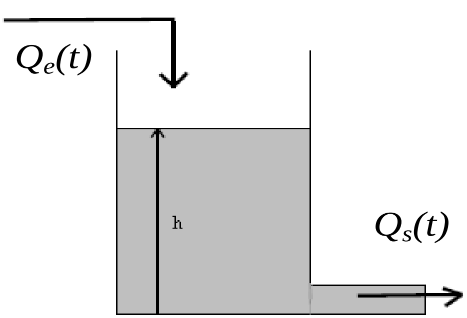
C- Structure d'un système en boucle ouverte

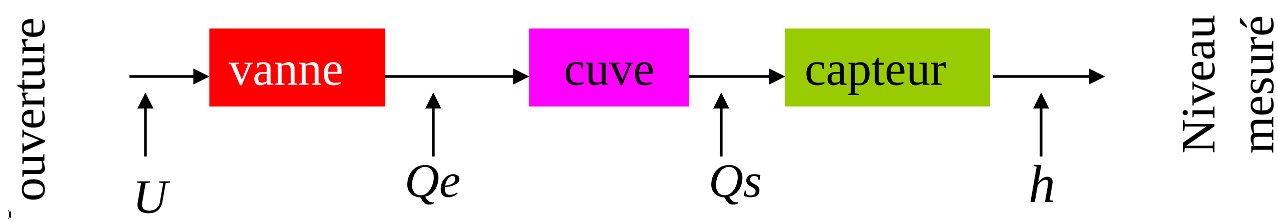




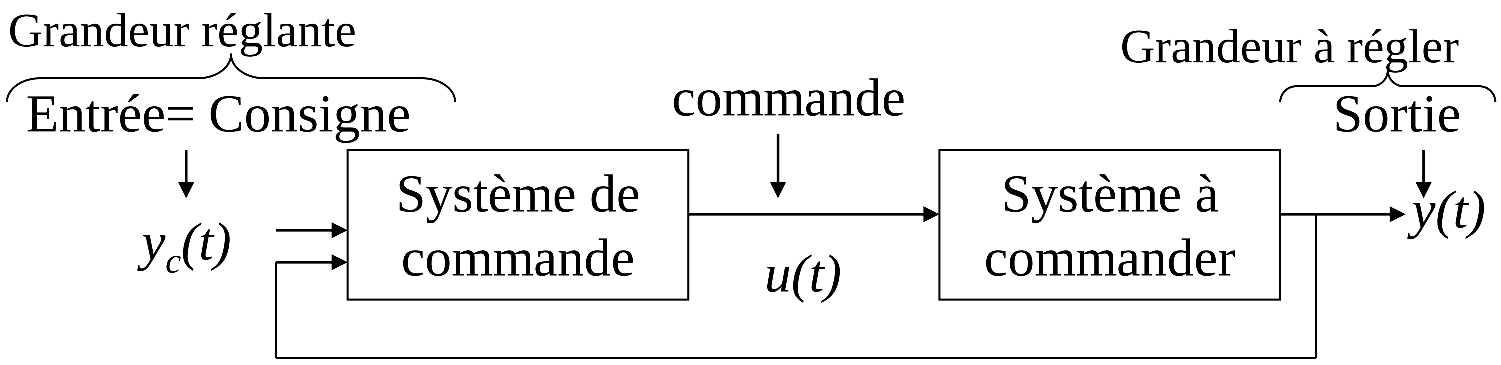
Cas monovariable: une entrée, une sortie (SISO)

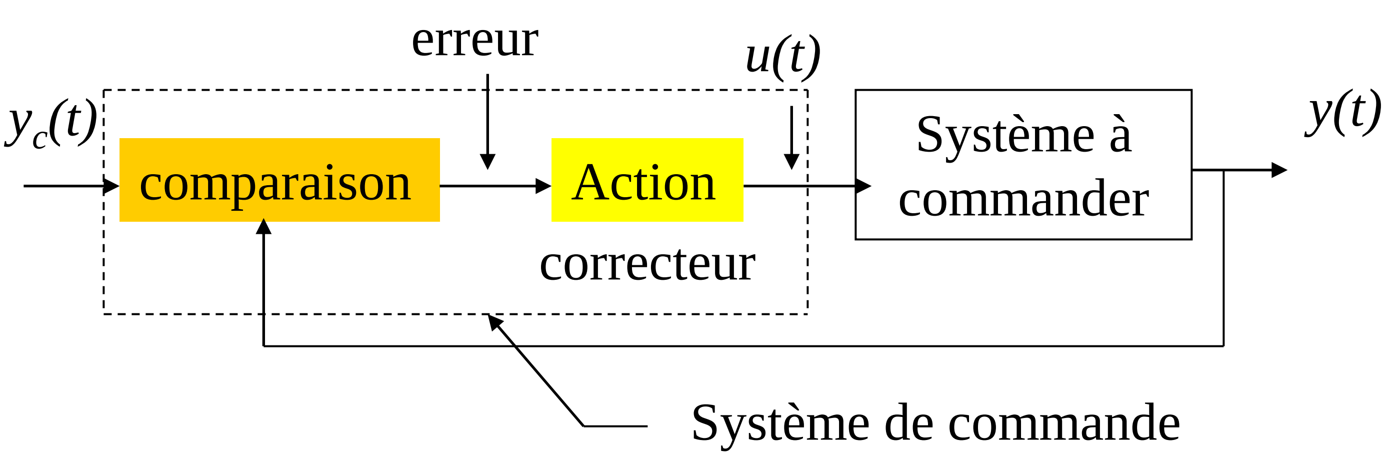
Réglage niveau d'eau



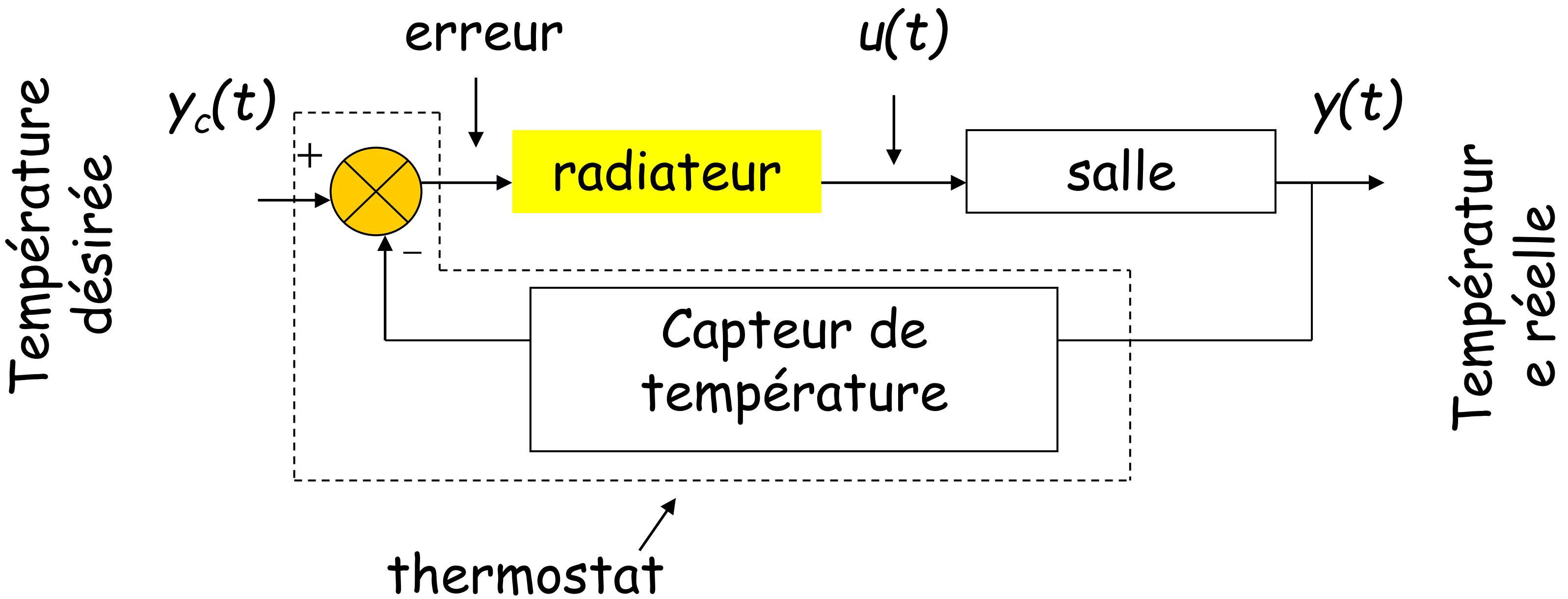


D. Structure générale d'un système en boucle fermée





Exemple: régulation de température



Modélisation des systèmes:

Équations différentielles, Fonction de transfert

Etude des systèmes base:

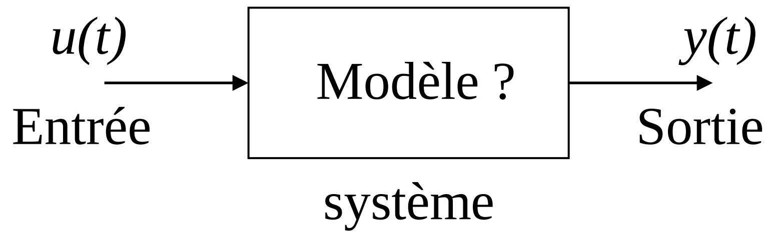
- Réponse temporelle aux entrées types
- Réponse fréquentielle

Performances:

- Stabilité: Critères algébriques et graphiques
- Précision

Synthèse de régulateurs des systèmes linéaires:

Chapitre I: Modélisation des systèmes linéaires



I.1. Représentation par équation différentielle

L'équation différentielle qui relie l'entrée à la sortie, d'un système linéaire monovariable, est de la forme :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

L'équation différentielle est d'**ordre n**.
Il faut que **n ≥ m**
L'ordre du système est : n
Les coefficients a_i et b_i sont constants

Le système peut-être représenté par le schéma suivant :

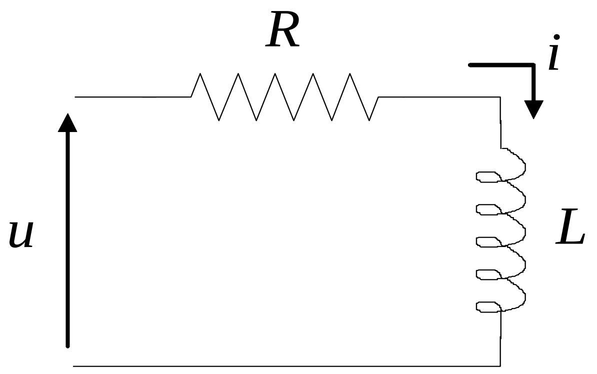
Conditions Initiales (C.I)

$u(t)$

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + \cdots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)$$

$y(t)$

<u>*Exemple*</u> : Considérons un circuit R L, où le signal d'entrée est la tension ***u*** et la sortie est le courant ***i*** qui circule dans le circuit :



C.I.

$u(t)$

$$R\, i(t) + L \frac{di}{dt}(t) = u(t)$$

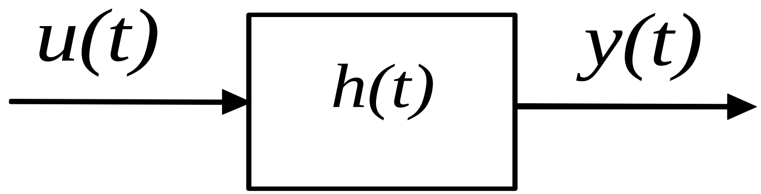
$i(t)$

Le circuit (R,L) est d'ordre 1

I.2. Représentation par fonction de transfert

I.2.1 Définition :

Soient $u(t)$, $h(t)$ et $y(t)$ des fonctions nulles pour $t < 0$, qui sont respectivement l'entrée, la réponse impulsionnelle et la sortie d'un système causal.



La relation temporelle qui relie $y(t)$ à $u(t)$ est le produit de convolution: $y(t)=h*u(t)$.

On sait que **la Transformée de Laplace** convertit le produit de convolution du domaine temporel en un produit de fonctions complexes dans le domaine fréquentiel.

$$y(t) = h * u(t) \xrightarrow[T.L]{} Y(p) = H(p)\,U(p) \text{ , avec } \boxed{H(p) = \mathcal{L}\,(h(t))}$$

T.L

H(p) est appelée ***transmittance***, ou ***fonction de transfert*** du système.

Si le système est représenté par une équation différentielle du type:

$$\boxed{a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^n} + \cdots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t)}$$

On applique la **T**ransformée de **L**aplace:

- En considérant que les C.I =0
- En utilisant: la propriété de la linéarité et la propriété de dérivation

On obtient la fonction de transfert du système :

$$\boxed{H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0} = \frac{Np)}{D(p)}}$$

$$\mathcal{L}\left[a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y(t)\right] = \mathcal{L}\left[b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \cdots + b_0 u\right]$$

$\downarrow$ TL, $CI \neq 0$

$$a_n \mathcal{L}\left[\frac{d^n y(t)}{dt^n}\right] + a_{n-1}\mathcal{L}\left[\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}\right] + \cdots + a_0 \mathcal{L}[y(t)] = b_m \mathcal{L}\left[\frac{d^m u(t)}{dt^m}\right] + \cdots + b_0 \mathcal{L}[u(t)]$$

$$a_n\left(p^n Y(p) - (CI_n)\right) + a_{n-1}\left(p^{n-1} Y(p) - (CI)\right) \cdots + a_0 Y(p) = b_m\left(p^m U(p) - CI\right) + \cdots + b_0 U(p)$$

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0) Y(p) - CI = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} \cdots + b_1 p + b_0) U(p) - CI$$

$$Y(p) = \boxed{\frac{b_m p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \cdots + a_1 p + a_0}}\, U(p) + \underbrace{CI}_{\text{Conditions initiales}}$$

$$\underbrace{Y(p)}_{\text{réponse}} = \underbrace{H(p)\,U(p)}_{\text{réponse forcée}} + \underbrace{CI}_{\text{réponse}}$$

$$U(p) \xrightarrow{u(t)} \boxed{\text{Modele FT}} \xrightarrow{y(t)} Y(p)$$

Remarques :

- L'ordre du système est n = degrés du polynôme D(p)
- si **m=n** on parle **de système propre**
- si **m<n** on parle de **système strictement propre**

- Les racines du polynôme D(p)=0 sont les **pôles du système**
- Les racines du polynôme N(p)=0 sont les **zéros du système**

- La réponse temporelle du système dépend de la nature d'entrée
- La réponse fréquentielle dépend de l'ordre du sytème

- Si les conditions initiales sont non nulles alors:

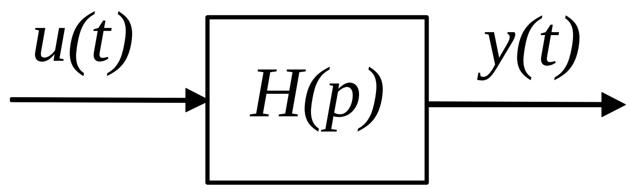
$$Y(p) = \underbrace{\text{réponse forcée liée à l'entrée}}_{H(p)\,U(p)} + \underbrace{\text{réponse libre liée aux CI}}$$

C.I =0

Entrée nulle
(u(t)=0)

Convention d'écriture :

Dans une représentation par schéma bloc des signaux et des systèmes, on préfère souvent la notation temporelle pour les signaux (soit *u(t), y(t)*), mais la notation transfert pour les systèmes (soit *H(p)*) :



<u>*Exemple*</u> : *Circuit (R,L)*
En appliquant la transformée de Laplace à l'équation différentielle obtenue précédemment , on arrive au résultat suivant :

$R \cdot I(p) + L \cdot p \cdot I(p) = U(p) \quad \Rightarrow \quad H(p) = \frac{I(p)}{U(p)} = \frac{1}{R + Lp}$

Si les Conditions Initiales = 0, (soit C.I =0)

Le système peut être représenté par le schéma bloc suivant :

$$\xrightarrow{u(t)} \boxed{\dfrac{1}{R+L\,p}} \xrightarrow{i(t)} \quad \text{ou} \quad \xrightarrow{U(p)} \boxed{\dfrac{1}{R+L\,p}} \xrightarrow{I(p)}$$

I.2.2 Interprétation physique de la fonction de transfert :

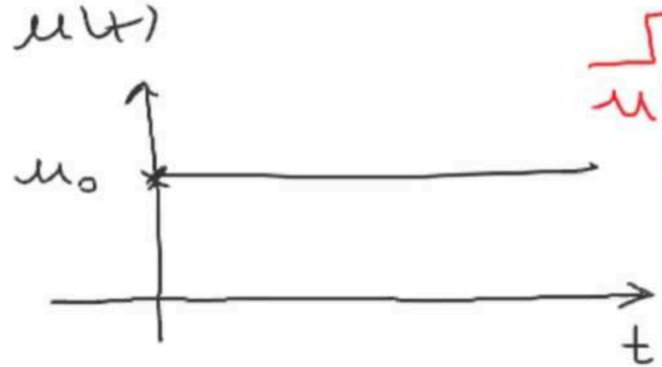
* Si on soumet le système à **une entrée type impulsion** :
$u(t) = \delta(t) \Rightarrow$ **$U(p) = 1$,** sa réponse sera alors : $Y(p) = H(p)$
La fonction de transfert d'un système est, alors, la transformée de Laplace de sa réponse impulsionnelle.

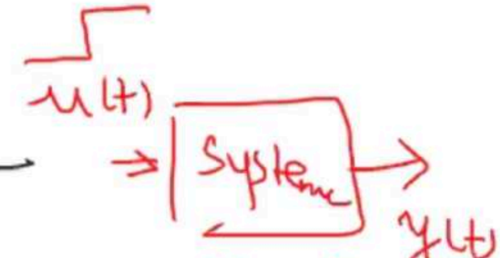
** Si on soumet le système à **une entrée type échelon** unitaire :*
$u(t) = \Gamma(t) \Rightarrow$ **$U(p) = 1/p$**, sa réponse sera alors : $Y(p) = H(p)/p \Rightarrow$
$H(p) = p\,Y(p)$
La fonction de transfert d'un système est la transformée de Laplace de la dérivée de sa réponse indicielle.

Entrées types:

. Entrée échelon

$$u(t) = \begin{cases} u_0 & t \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

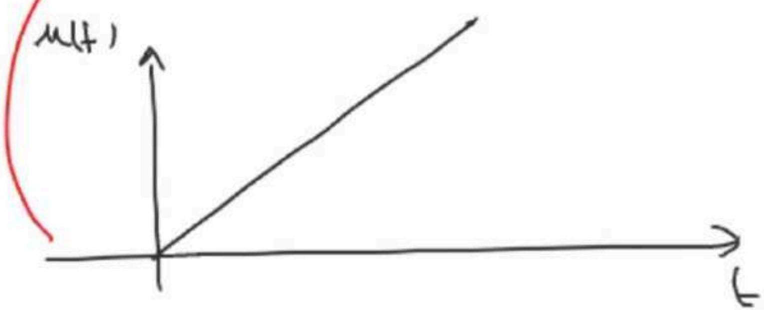




$$y(t) = f(u(t))$$

. entrée rampe:

$$u(t) = \begin{cases} u_0\, t & t \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



. entrée harmonique:

$$u(t) = u_0 \sin(\omega) \text{ ou } u(t) = u_0 \cos(\omega t)$$

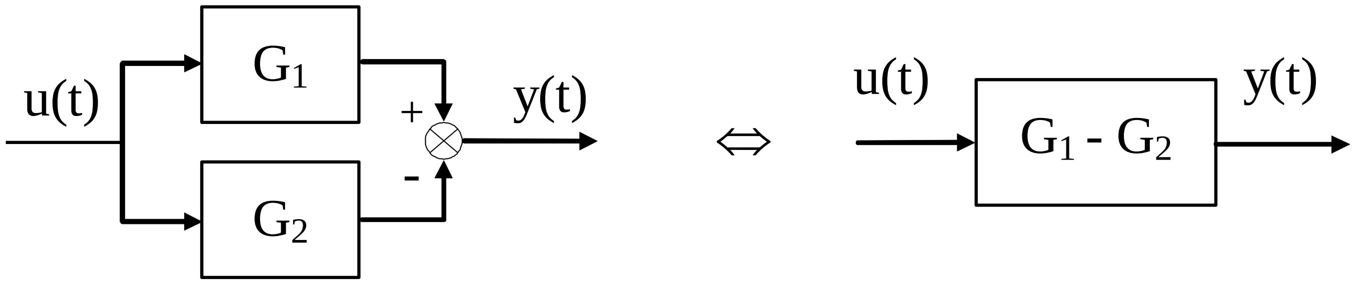
. entrée impulsion: impulsion de Dirac

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

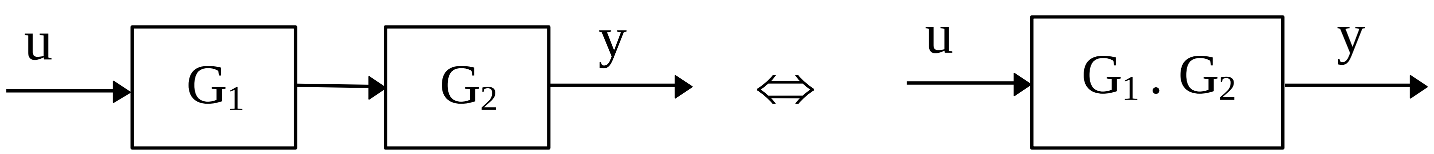
I.3. Algèbre des diagrammes:

Les propriétés de linéarité des transferts se traduisent par les transformations de diagramme suivantes :

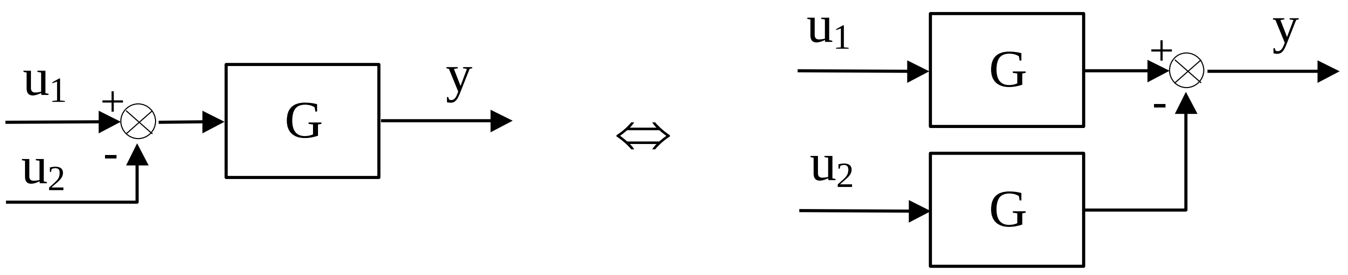
* Transmittance en parallèle :



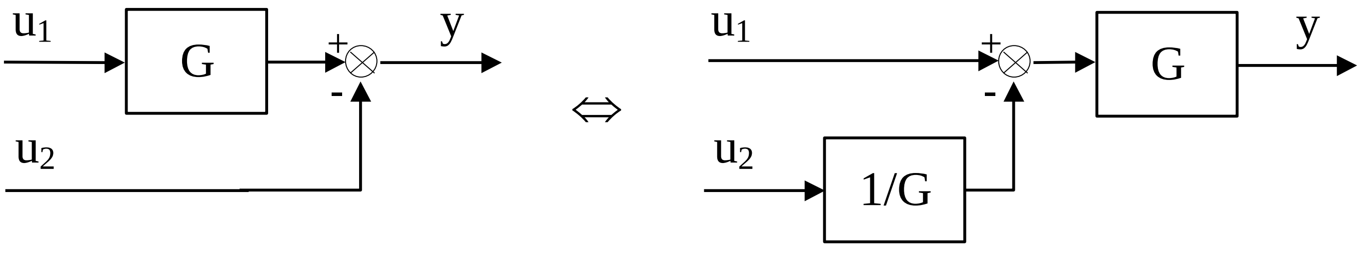
* Transmittance en série (cascade) :



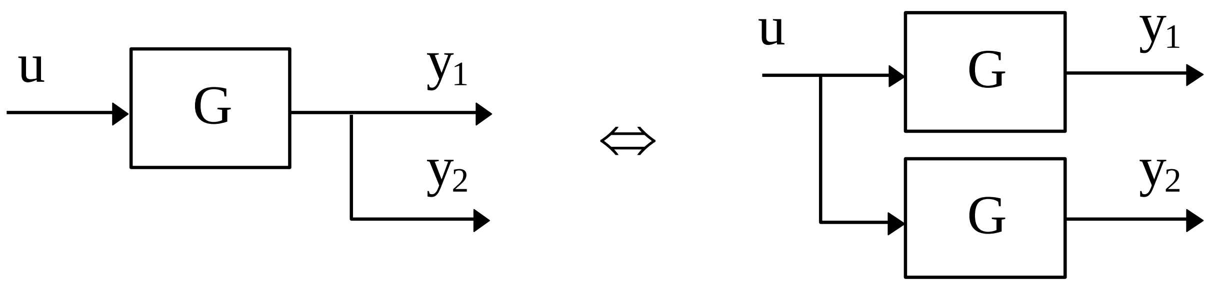
* Déplacement d'un bloc en amont d'un comparateur (ou sommateur) :



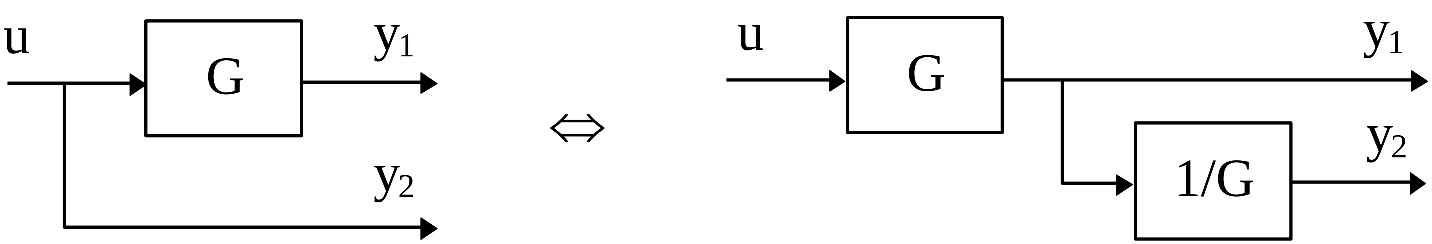
* Déplacement d'un bloc en aval d'un comparateur (ou sommateur)



* Déplacement d'un bloc en aval d'un point de prélèvement :



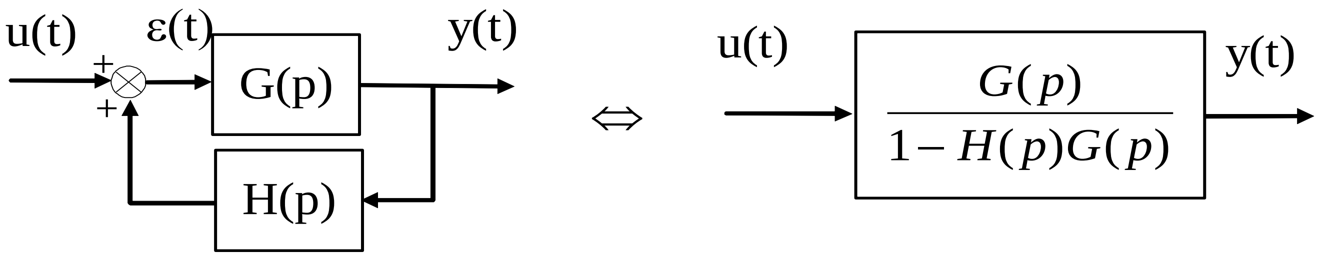
* Déplacement d'un bloc en amont d'un point de prélèvement :



Fonction de transfert d'un système bouclé, règle de Mason :

典型的

La forme canonique d'un système bouclé :



$$\left.\begin{aligned} Y(p) &= G(p)\varepsilon(p) \\ \varepsilon(p) &= U(p) + H(p)Y(p) \end{aligned}\right\} \Rightarrow Y(p) = G(p)\big(U(p) + H(p)Yp)\big)$$

$$\Rightarrow \qquad Y(p)\big(1 - H(p)G(p)\big) = G(p)U(p)$$

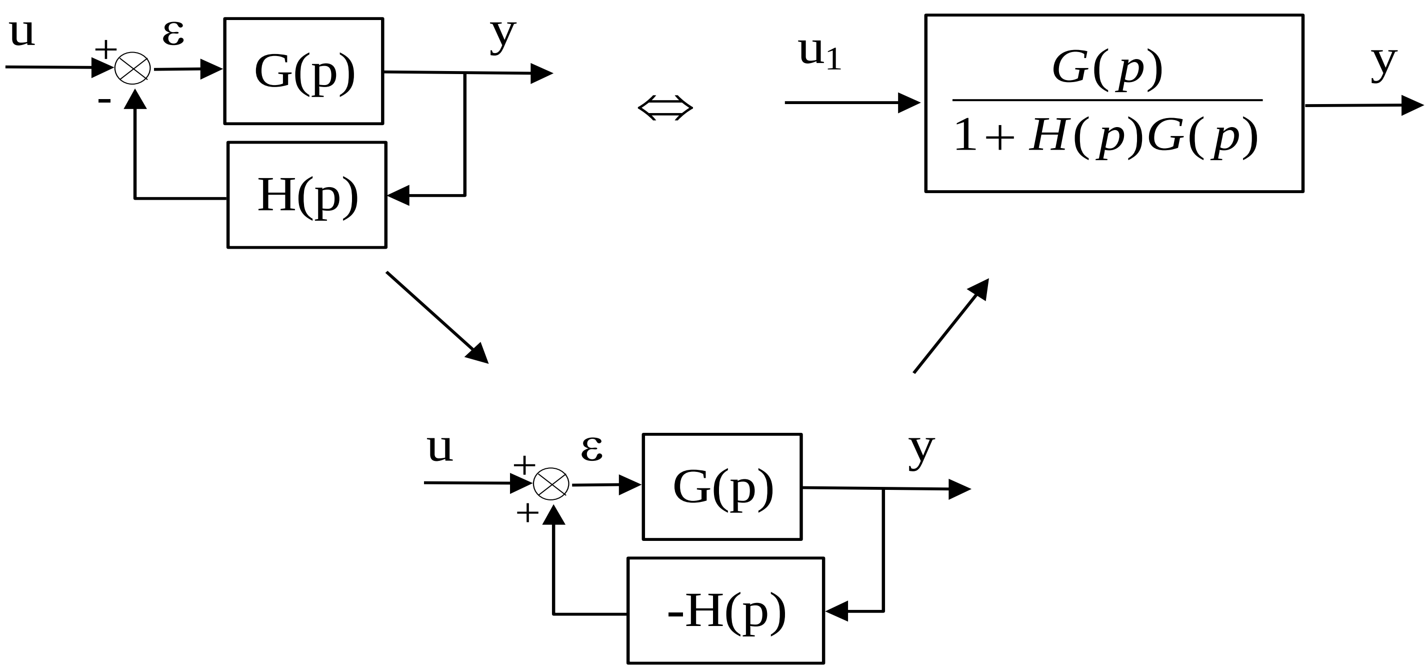
La fonction de transfert du système bouclé est donc :

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{G(p)}{1 - H(p)G(p)}$$

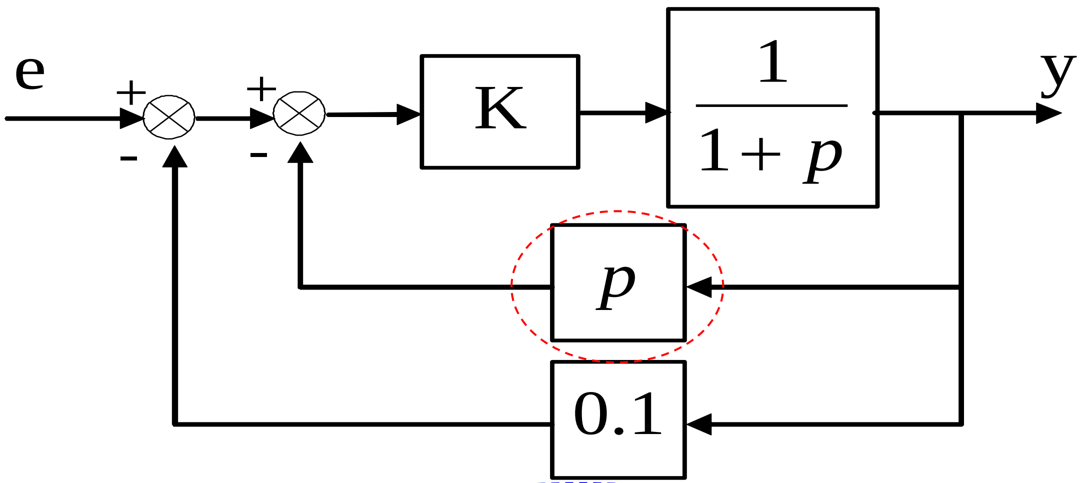
La règle de Mason s'énonce comme suit :

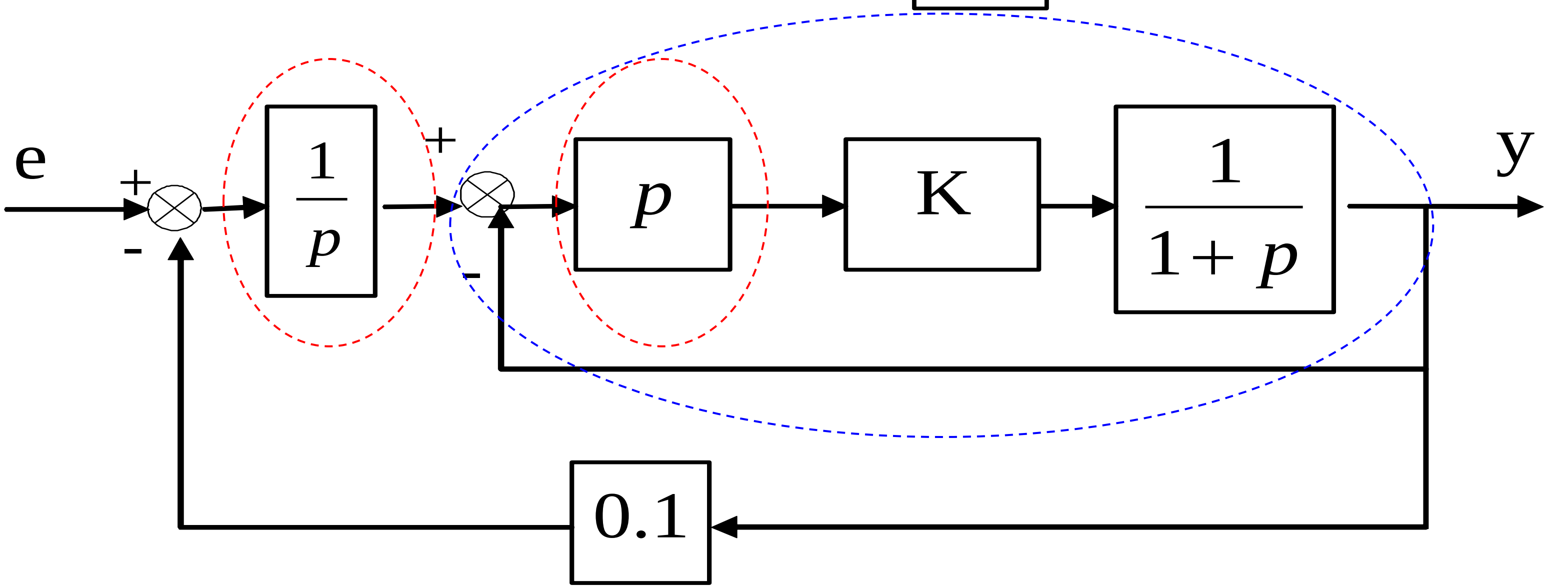
La transmittance entre une variable d'entrée u et une variable de sortie y est égale au produit de toutes les transmittances directes, divisé par les différences de retour (i.e. 1 - « le produit des transmittances directes et des transmittances de retour »).

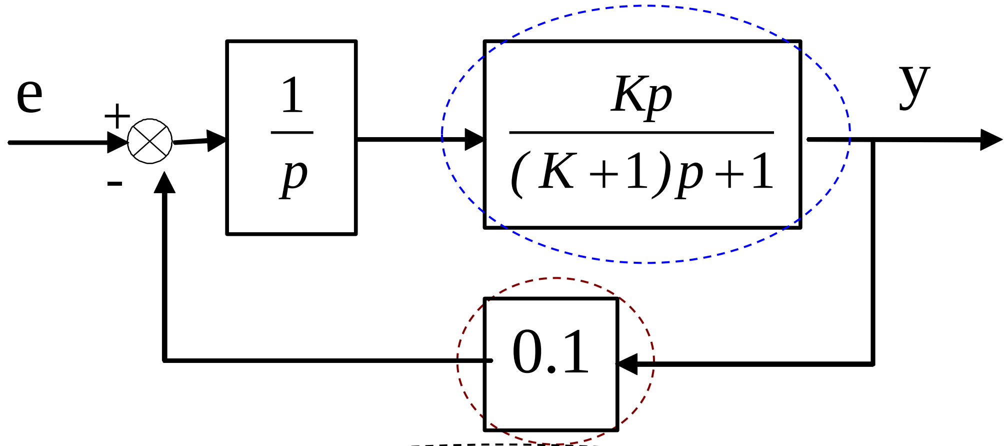
Cas d'une boucle de contre réaction :

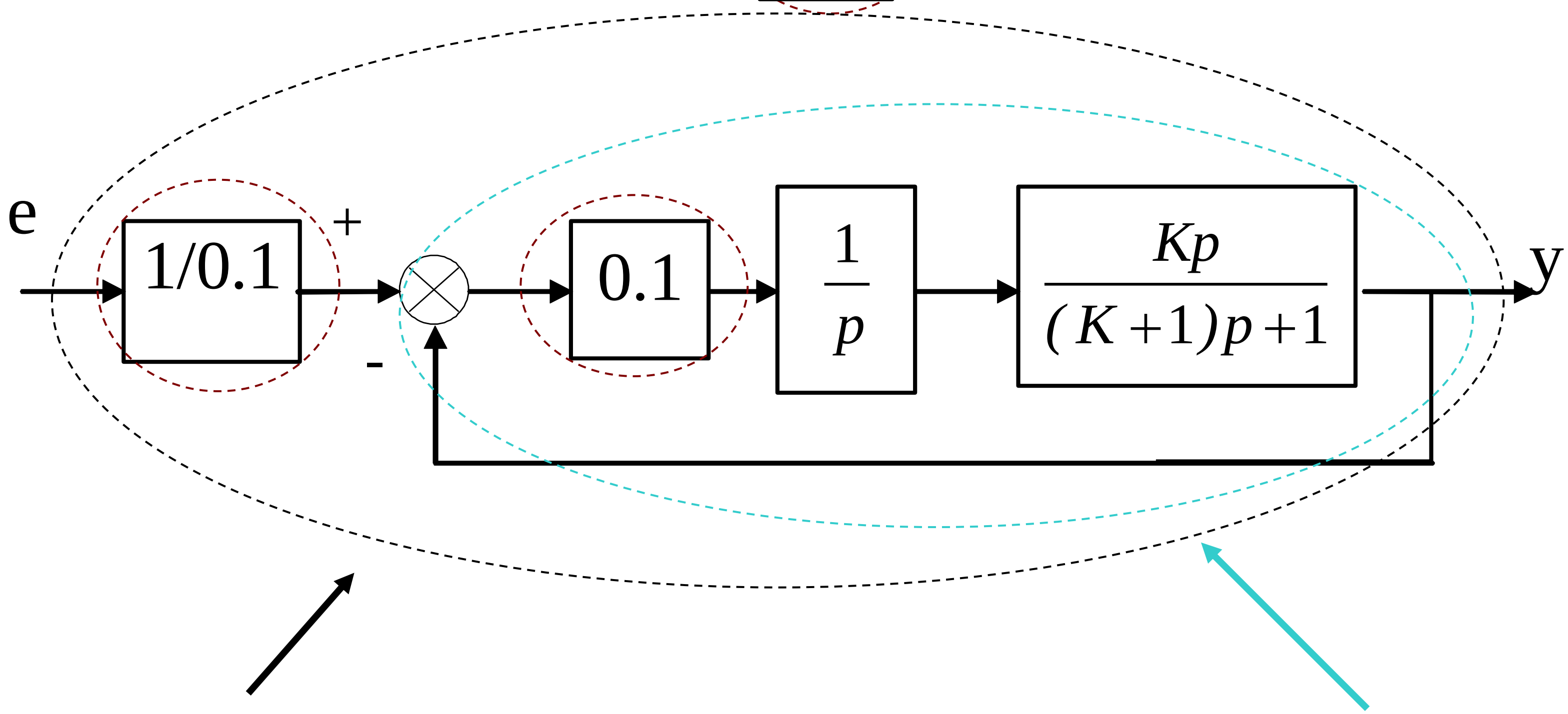


Exemple:









FTBF: $\dfrac{Y(p)}{E(p)} = \dfrac{K}{(K+1)p+1+0.1K}$

$$\frac{0.1K}{(K+1)p+1+0.1K}$$

Chapitre II :

Systèmes de Base

II.1. Systèmes du premier ordre

II.1.1 Définition et exemple

Un système du premier ordre est modélisé par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre de la forme :

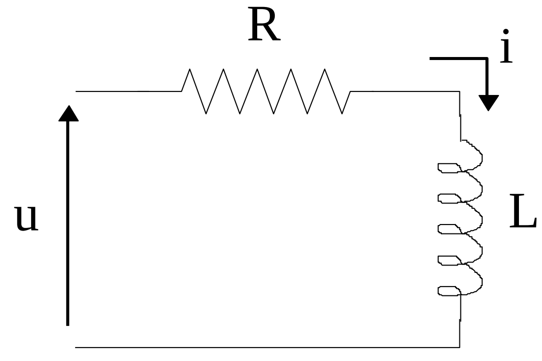
$$\boxed{\tau \frac{dy}{dt} + y = K.u}$$

constante de temps

gain statique

Exemple :

On s'intéresse au courant i(t) qui traverse une inductance :



L'équation différentielle qui caractérise ce système est :

$$R\,i(t) + L\frac{di}{dt}(t) = u(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{R}\frac{di}{dt}(t) + i(t) = \frac{1}{R}u(t)$$

La constante de temps *Le gain statique*

II.1.2 Fonction de transfert associée à un système du premier ordre:

La transformée de Laplace de l'équation différentielle précédente est :

$$\tau\big(pY(p) - y(0)\big) + Y(p) = K.U(p)$$

$$\Rightarrow \quad Y(p) = \frac{K}{1+\tau p}U(p) + \frac{\tau}{1+\tau p}y(0)$$

$$\Rightarrow \quad Y(p) = \frac{K}{1+\tau p}U(p) \qquad \text{(C.I =0)}$$

Fonction de Transfert: $G(p) = \dfrac{K}{1+\tau p}$

II.1.3 Réponses d'un système du premier ordre aux entrées types:

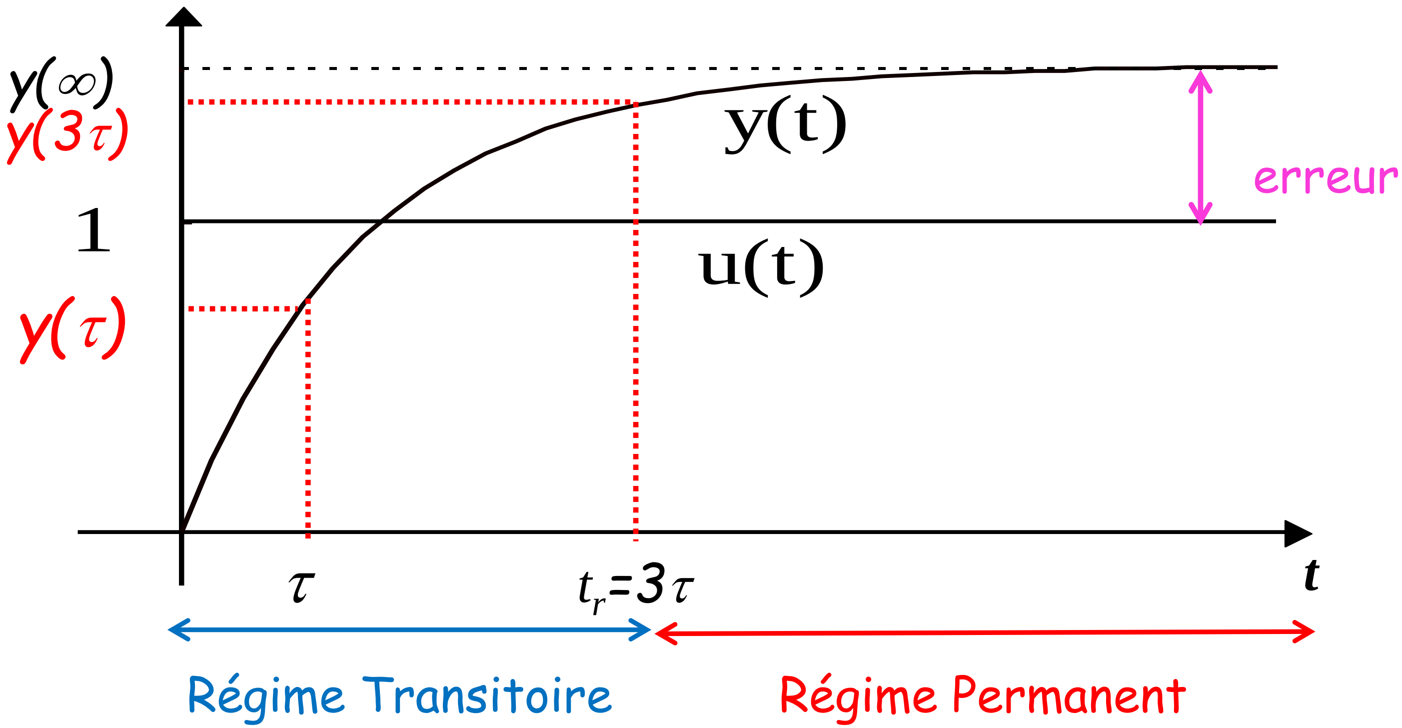
a- <u>Réponse indicielle (réponse à un échelon unitaire) :</u>

un échelon unitaire $\Rightarrow$ $u(t) = \Gamma(t)$ $\Rightarrow$ $U(p) = \dfrac{1}{p}$

$$\Rightarrow \quad Y(p) = \frac{K}{(1+\tau p)}\frac{1}{p}$$

En appliquant la transformée de Laplace inverse, on obtient :

$$\boxed{y(t) = K\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$



gain statique $\Rightarrow \quad K = \dfrac{y(\infty)}{u(\infty)}$, t_r= temps de réponse à 95%

Pour $t = \tau$, on a $y(\tau) = 0.63\, y(\infty)$, $t = 3\tau$, on a $y(3\tau) = 0.95\, y(\infty)$

Calcul de l'erreur Erreur:

$$\varepsilon(t) = u(t) - y(t) \quad \text{ou} \quad \varepsilon(p) = U(p) - Y(p)$$

Or Y(p)= G(p) U(p) soit:

$$\varepsilon(p) = U(p) - G(p)U(p) = \big(1 - G(p)\big)U(p)$$

$$\varepsilon(p) = (1 - \frac{K}{1 + \tau\, p})\,\frac{1}{P}$$

On applique le théorème de la valeur finale:

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p\,(U(p) - Y(p))$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0} p\left(1 - \frac{K}{1 + \tau\, p}\right)\frac{1}{P} = 1 - K$$

Si $K > 1\; alors\;\; \varepsilon(\infty) < 0$, Si $K < 1\; alors\;\; \varepsilon(\infty) > 0$

Si $K = 1\; alors\;\; \varepsilon(\infty) = 0$

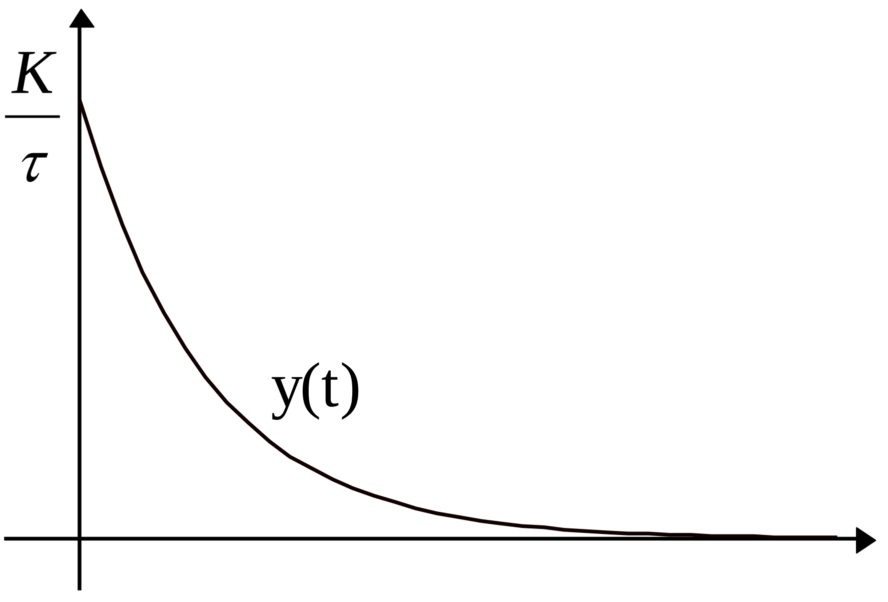
b- Réponse impulsionnelle (réponse à une impulsion) :

$u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(p) = 1$

$$\Rightarrow \quad Y(p) = \frac{K}{1+\tau p}$$

En appliquant la transformée de Laplace inverse, on obtient :

$$\boxed{y(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}}$$



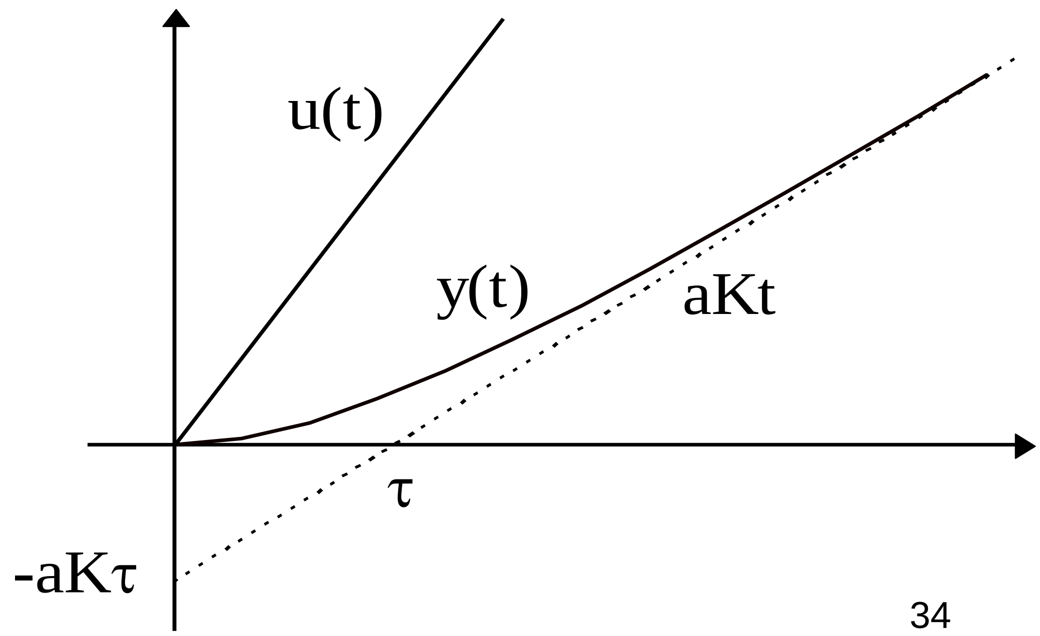
c- Réponse à une rampe :

$$u(t) = a.t \qquad \Rightarrow \qquad U(p) = \frac{a}{p^2}$$

$$\Rightarrow \qquad Y(p) = \frac{K}{1+\tau p}\frac{a}{p^2}$$

En appliquant la transformée de Laplace inverse, on obtient :

$$\boxed{y(t) = aK\left(t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$



Pour $t \to +\infty$

une asymptote : $y = aK(t-\tau)$

d- Réponse sinusoïdale (réponse harmonique, réponse à une entrée sinusoïdale) :

$$u(t) = E_0 \sin(\omega t) \quad \Rightarrow \quad U(p) = \frac{E_0 \omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$\Rightarrow \quad Y(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \frac{E_0 \omega}{p^2 + \omega^2}$$

En appliquant la transformée de Laplace inverse, on obtient :

$$y(t) = \frac{K E_0 \omega}{1 + \tau^2 \omega^2} \left(\tau^2 e^{-\frac{t}{\tau}} - \tau \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right)$$

$t >> \tau$ alors $e^{-\frac{t}{\tau}} \to 0 \quad \Rightarrow$ On est en régime permanent

$$\boxed{y(t) = A(\omega) E_0 \sin\left(\omega t + \varphi(\omega)\right)}$$

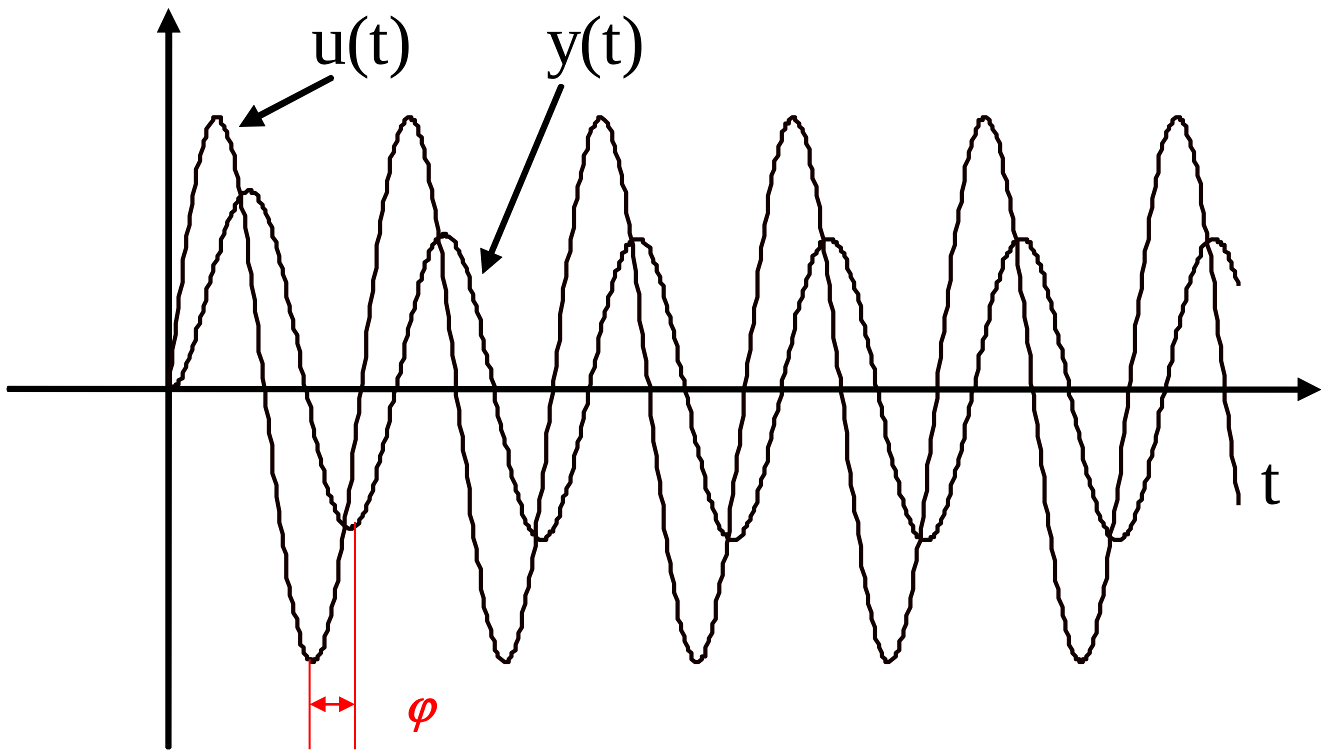
$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = -arctg(\omega\tau)$$

$A(\omega)$ = / $G(j\omega)$ /

φ = Arg(G(jω))

<u>Théorème</u> : En régime permanent, la réponse à une entrée sinusoïdale d'un système linéaire (modélisé par G(p)) est sinusoïdale de même pulsation que l'entrée mais amplifiée de / G(jω) / et déphasée par rapport à l'entrée de Arg(G(jω)).


u(t)
y(t)
t
φ

II.2 Systèmes du second ordre

II.2.1 Définition et exemple

Dans le cas général, un système linéaire du second ordre est modélisé par une équation différentielle de la forme :

$$c\frac{d^2y(t)}{dt^2}+b\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)=\gamma\frac{d^2u(t)}{dt^2}+\beta\frac{du(t)}{dt}+\alpha u(t)$$

Suivant que α, β et γ soient nuls ou pas, on obtient des filtres du second ordre dits passe-bas, passe-haut, passe-bande, ...

En commande des systèmes, on a généralement affaire à des systèmes passe-bas de la forme:

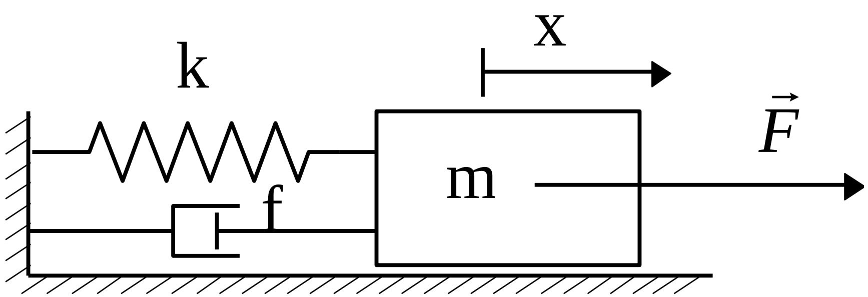
n=2 m=0

$$c\frac{d^2y(t)}{dt^2}+b\frac{dy(t)}{dt}+ay(t)=\alpha u(t)$$

$$\boxed{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = K\omega_n^2 u(t)}$$

ω_n : pulsation naturelle (propre non amortie) du système
ξ : coefficient d'amortissement
K : gain statique

<u>Exemple</u> : On s'intéresse à la position d'une charge



$$F(t) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} Masse+ \\ ressort \end{array}} \longrightarrow x(t)$$

L'équation dynamique est : $$F(t) = m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + f\frac{dx(t)}{dt} + kx(t)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{f}{m}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{m}x(t) = \frac{1}{m}F(t)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \xi = \frac{f}{2\sqrt{mk}} \qquad \text{et} \qquad K = \frac{1}{k}$$

II.2.2 Fonction de transfert associée à un système du second ordre

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$$

II.2.3 Réponses aux entrées types

On désigne par p_1 et p_2 les racines de $p^2 + 2\,\xi\,\omega_n\,p + \omega_n^2 = 0$

$$\Rightarrow \quad G(p) = \frac{K\omega_n^2}{(p-p_1)(p-p_2)}$$

* pour ξ **> 1** $\Rightarrow \Delta' > 0 \Rightarrow$ *les racines sont réelles et distinctes*

$$\begin{cases} p_1 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \\ p_2 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \end{cases} \quad \textit{Régime apériodique}$$

* pour ξ **= 1** $\Rightarrow \Delta' = 0 \Rightarrow$ une racine réelle double

$$p_1 = p_2 = -\omega_n$$ ***Régime apériodique critique***

* pour $\xi < 1 \Rightarrow \Delta' < 0 \Rightarrow$ les racines sont complexes conjuguées

$$\begin{cases} p_1 = -\xi\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \\ p_2 = -\xi\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \end{cases}$$ *Régime oscillatoire amortie (pseudo-oscillatoire)*

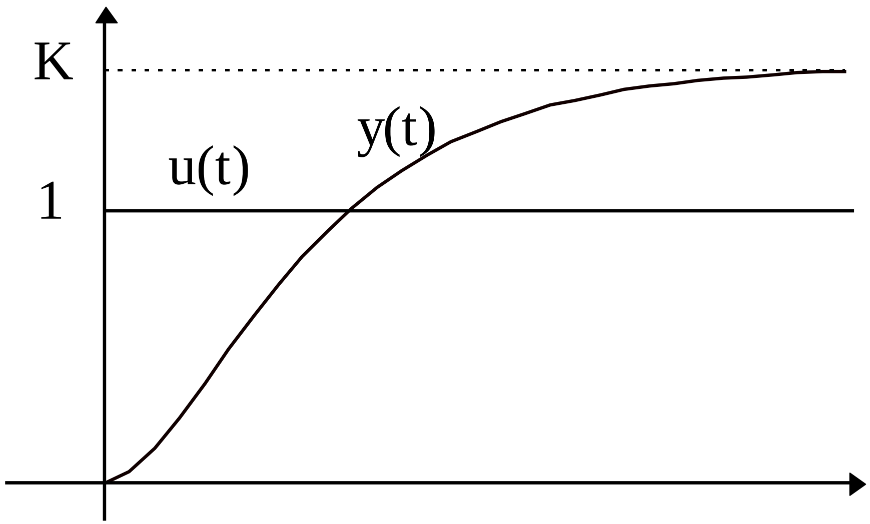
a- <u>Réponse indicielle</u> : *U(p) = 1/p*

* Régime apériodique $\xi > 1$:

$$y(t) = K\left[1 - \frac{1}{2\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\left(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}\right)\right]$$

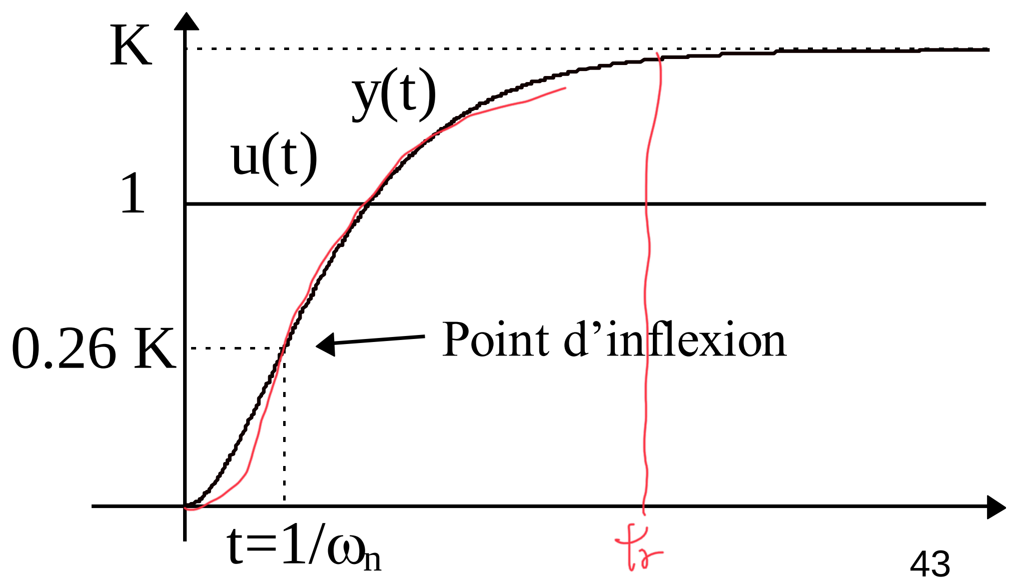
ou

$$y(t) = K\left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2}\right)$$ Avec $$T_2 = -\frac{1}{p_2}$$ $$T_1 = -\frac{1}{p_1}$$



* Régime apériodique critique $\xi = 1$:

$$y(t) = K\left[1-(1+\omega_n t)e^{-\omega_n t}\right]$$



* Régime pseudo-oscillatoire : $0 < \xi < 0.707$:

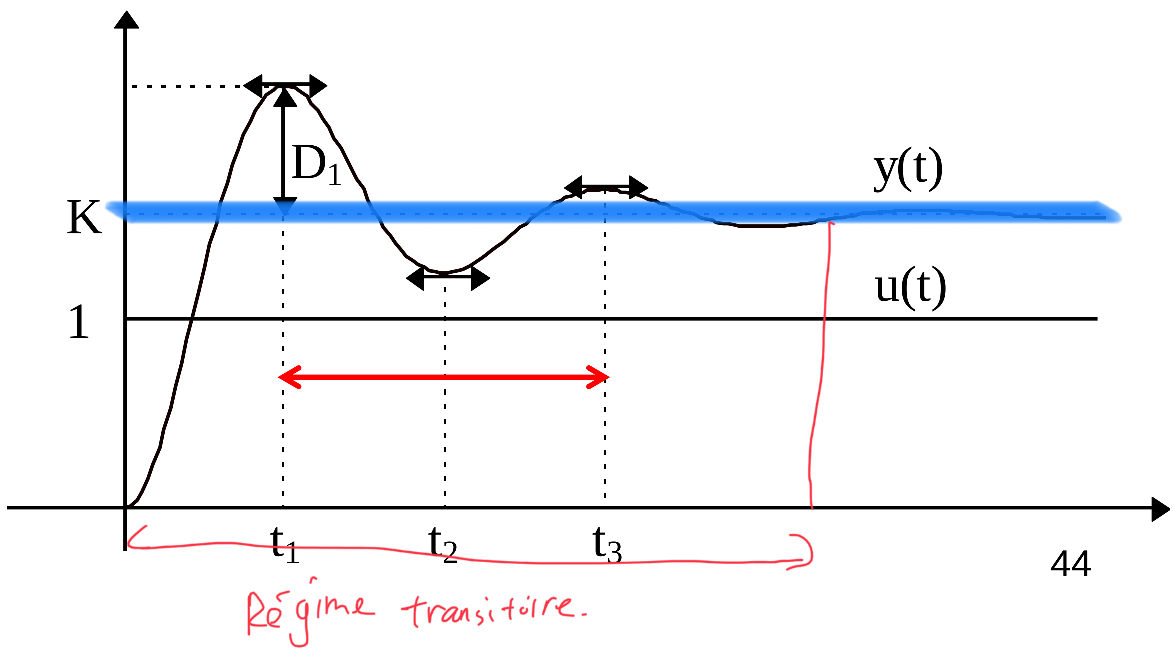
$$y(t) = K\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_p t + \Phi)e^{-\xi\omega_n t}\right]$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \cos(\Phi) = \xi \\ \sin(\Phi) = \sqrt{1-\xi^2} \end{cases} \qquad \omega_p = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} \qquad T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$$

,

T_p : période des oscillations

ω_p : pulsation propre



La valeur du premier dépassement est :

$$D_1 = \frac{y(t1) - y(\infty)}{y(\infty)} = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Ce dépassement est donné en pourcentage : $D_1\% = 100\ D_1$

Instants des dépassements: $t = t_k = \dfrac{k\pi}{\omega_p}$

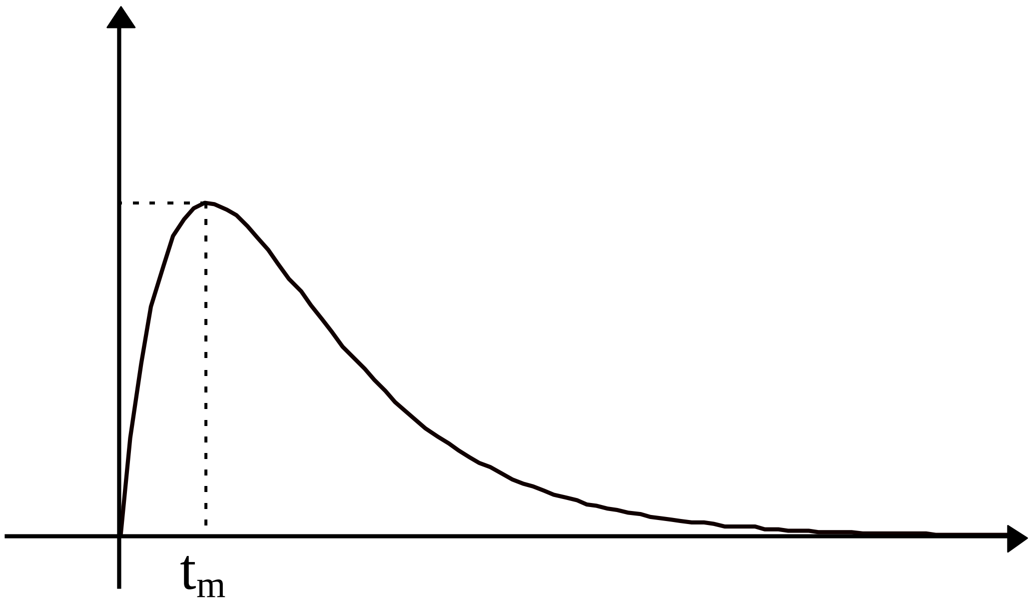
Premier dépassement: $t_1 = \dfrac{\pi}{\omega_p}$

b- <u>Réponse impulsionnelle</u> : $U(p) = 1$

* Régime apériodique $\xi > 1$:

$$y(t) = -K\frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right)$$

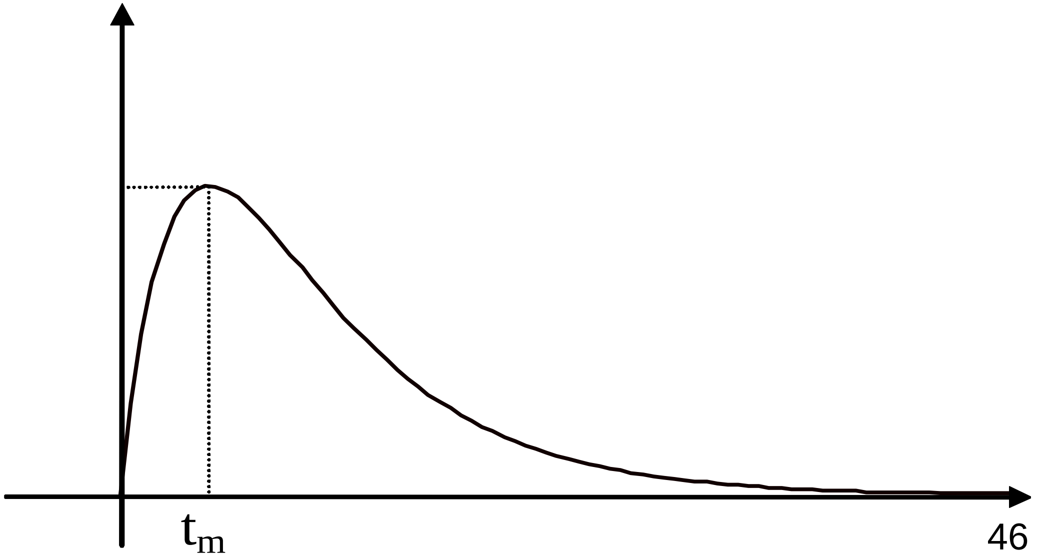
$$t_m = \frac{Log(-p_1) - Log(-p_2)}{p_2 - p_1}$$



* Régime apériodique critique $\xi = 1$:

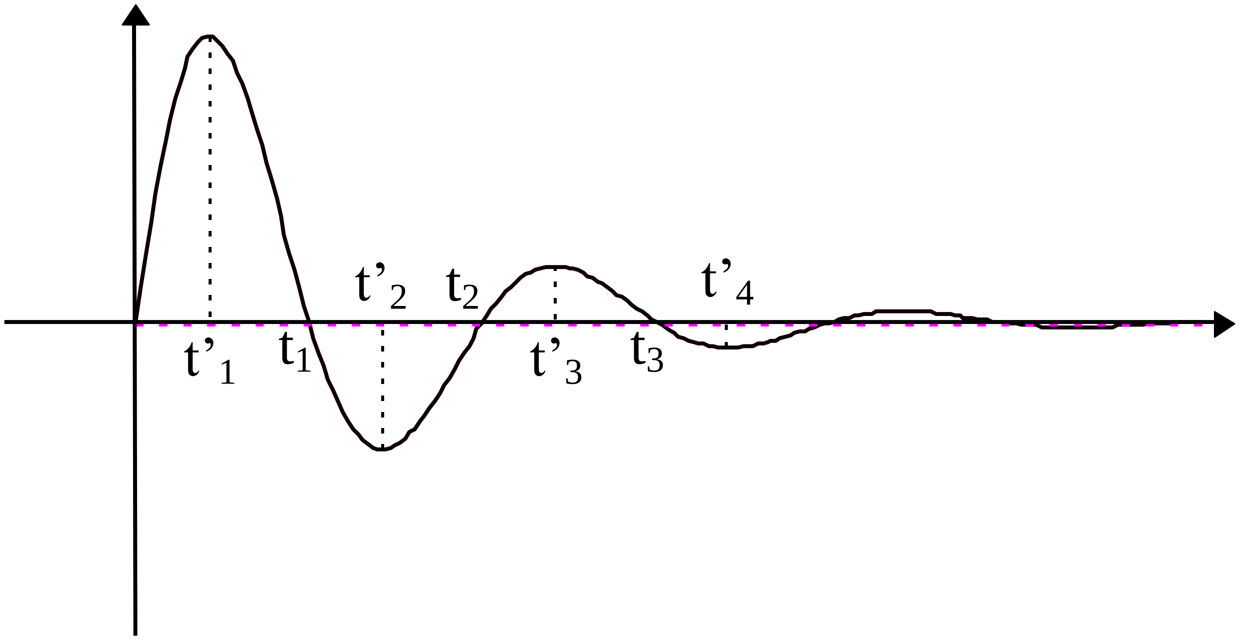
$$y(t) = K\omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$$

$$t_m = \frac{1}{\omega_n}$$



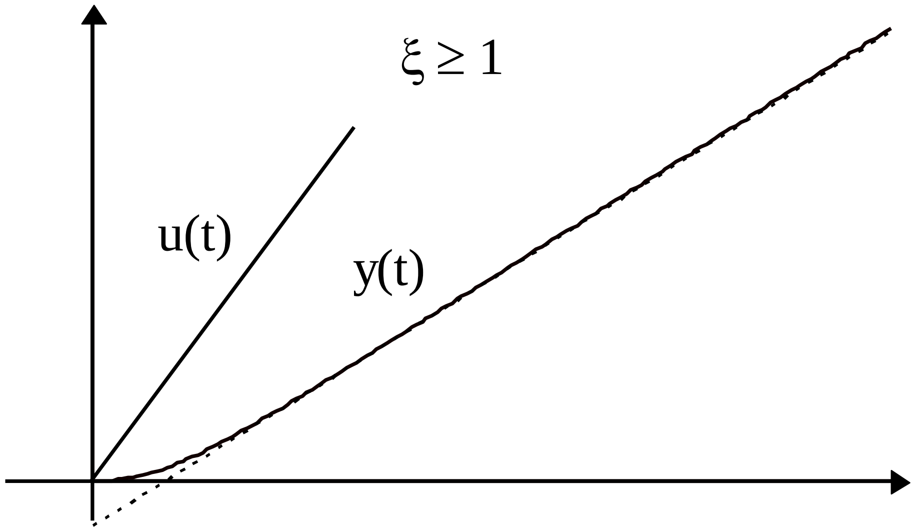
* Régime pseudo-oscillatoire $0 < \xi < 1$:

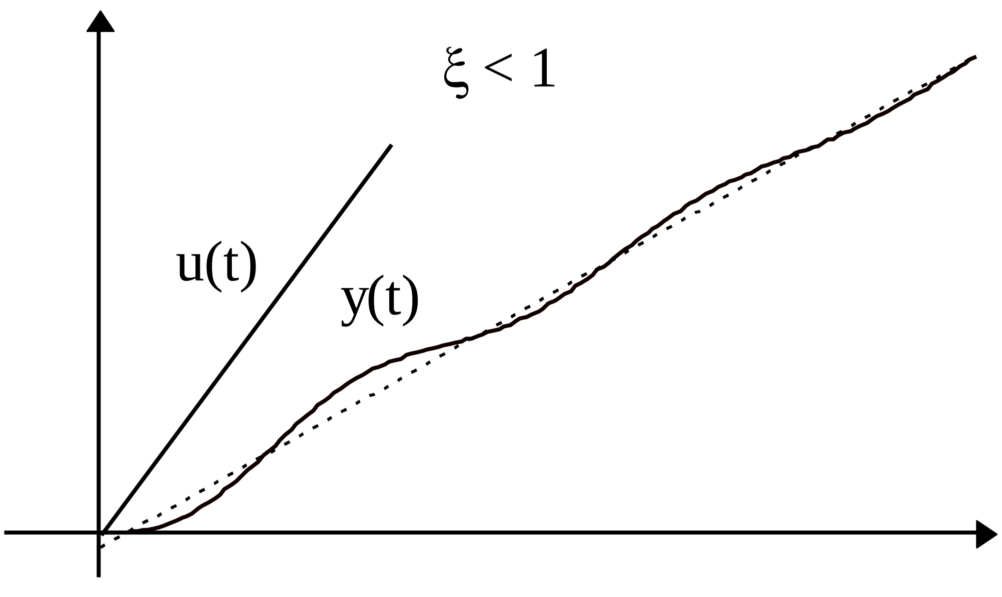
$$y(t) = \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_p t) e^{-\xi\omega_n t}$$



$$t = t'_k = \frac{(k-1)\pi + \Phi}{\omega_p}$$

c- <u>Réponse à une rampe</u> : $U(p) = \dfrac{a}{p^2}$





d- <u>Réponse sinusoïdale (réponse harmonique, réponse à une entrée sinusoïdale) :</u>

$$U(p) = \frac{E_0\omega}{p^2 + \omega^2}$$

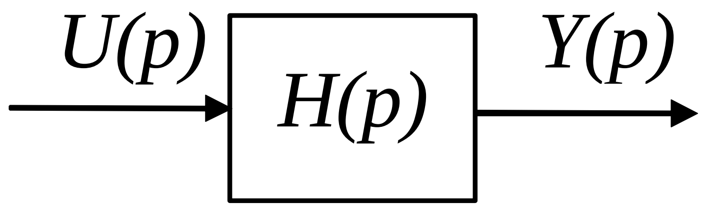
En régime permanent on obtient : $y(t) = A(\omega)E_0 \sin\left(\omega t + \varphi(\omega)\right)$

où :

$$A(\omega) = \left|G(j\omega)\right| = \frac{K\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = Arg\left(G(j\omega)\right) = -arctg\left(\frac{2\xi\omega\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)$$

Représentation graphique ou Réponse fréquentielle



$$Y(p)=H(p)U(p) \xRightarrow{p=j\omega} Y(j\omega)=H(j\omega)\,U(j\omega)$$

Transformées de Fourier de y(t) et u(t)

Spectre de y(t)

Module de $H(j\omega) \Rightarrow \left|H(j\omega)\right| = \dfrac{\left|Y(j\omega)\right|}{\left|U(j\omega)\right|}$

Spectre de u(t)

Argument de $H(j\omega)$ (Arg(H($j\omega$))) $\Rightarrow \varphi(j\omega) = Arg(H(j\omega)) = Arg(Y(j\omega)) - Arg(U(j\omega))$

La fonction H(jω) est la fonction de transfert du système (ou gain complexe du système). Elle fournit le gain réel $|H(j\omega)|$ et le déphasage φ((jω)). Elle traduit le comportement fréquentiel du système.

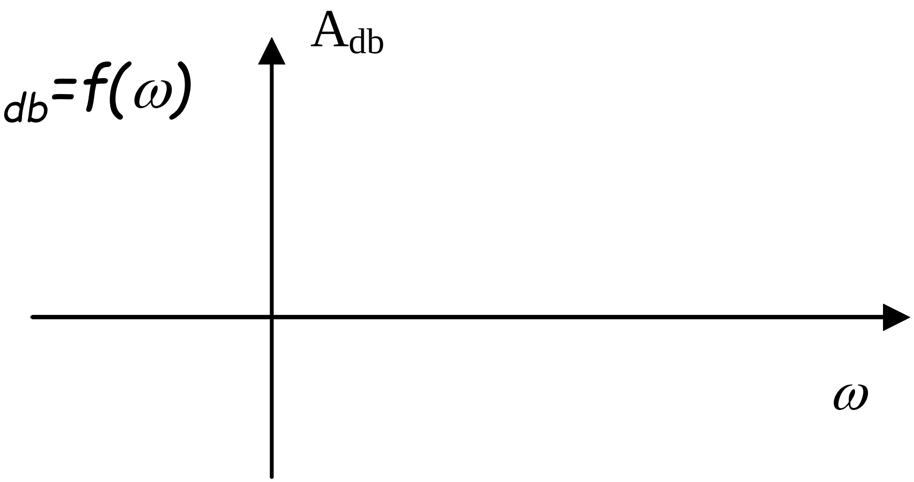
La représentation graphique permet de déduire, rapidement, les performances (rapidité, stabilité, ...) des systèmes

Les différentes représentations graphiques sont :

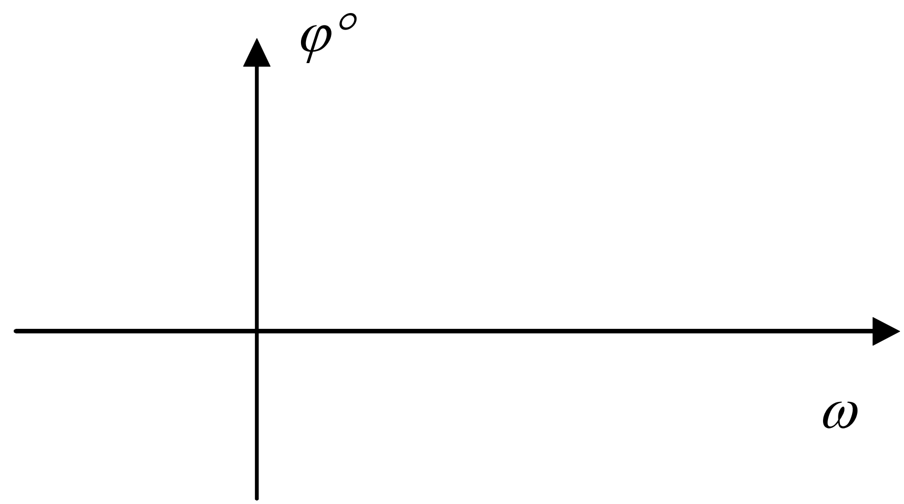
- **Le diagramme de Black**
- **Le diagramme de Bode**
- Le diagramme de Nyquist

III.1 Le diagramme de Bode consiste en deux diagrammes,avec une échelle logarithmique en abscisse:

- Diagramme d'amplitude: $A_{db}=f(\omega)$
  Amplitude en db :
  $A_{db}=20.\log 10|H(j\omega)|$

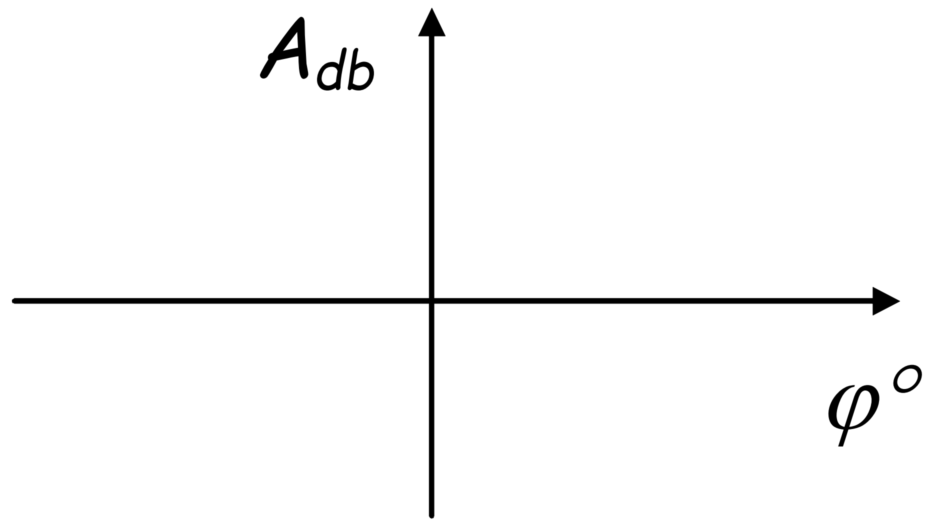


- Diagramme de phase: $\varphi = f(\omega)$
  φ=Argument $H(j\omega)$



III.2 Le diagramme de Black-Nichols consiste en un graphique unique

$$w_i = \begin{cases} A_{dB}(w_i) \\ \varphi^\circ(w_i) \end{cases}$$



III. 3. Représentation des systèmes de base

III.3.1 Système du premier ordre

$$G(p) = \frac{K}{1+\tau p} \quad \overset{p=j\omega}{\Rightarrow} \quad G(j\omega) = \frac{K}{1+j\tau\omega}$$

$$\begin{cases} \left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20\log_{10}\left|\dfrac{K}{1+j\tau\omega}\right| = 20\log_{10}(K) - 10\log_{10}(1+\tau^2\omega^2) \\ Arg\big(G(j\omega)\big) = -arctg(\tau\omega) \end{cases}$$

$\omega = \omega_c \rightarrow -3dB \rightarrow -45°$

$\omega = +\infty \rightarrow -\infty \rightarrow -90°$

Pour $\omega \rightarrow 0$ alors

$$\begin{cases} \left|G(j\omega)\right|_{dB} = 20\log(K) = K_{dB} \\ Arg\big(G(j\omega)\big) = 0° \end{cases}$$

On a 2 asymptotes horizontales:

- Une pour le module: la droite K_{db}
- Une pour l'argument : la droite 0°

Pour $\omega \rightarrow + \infty$ alors

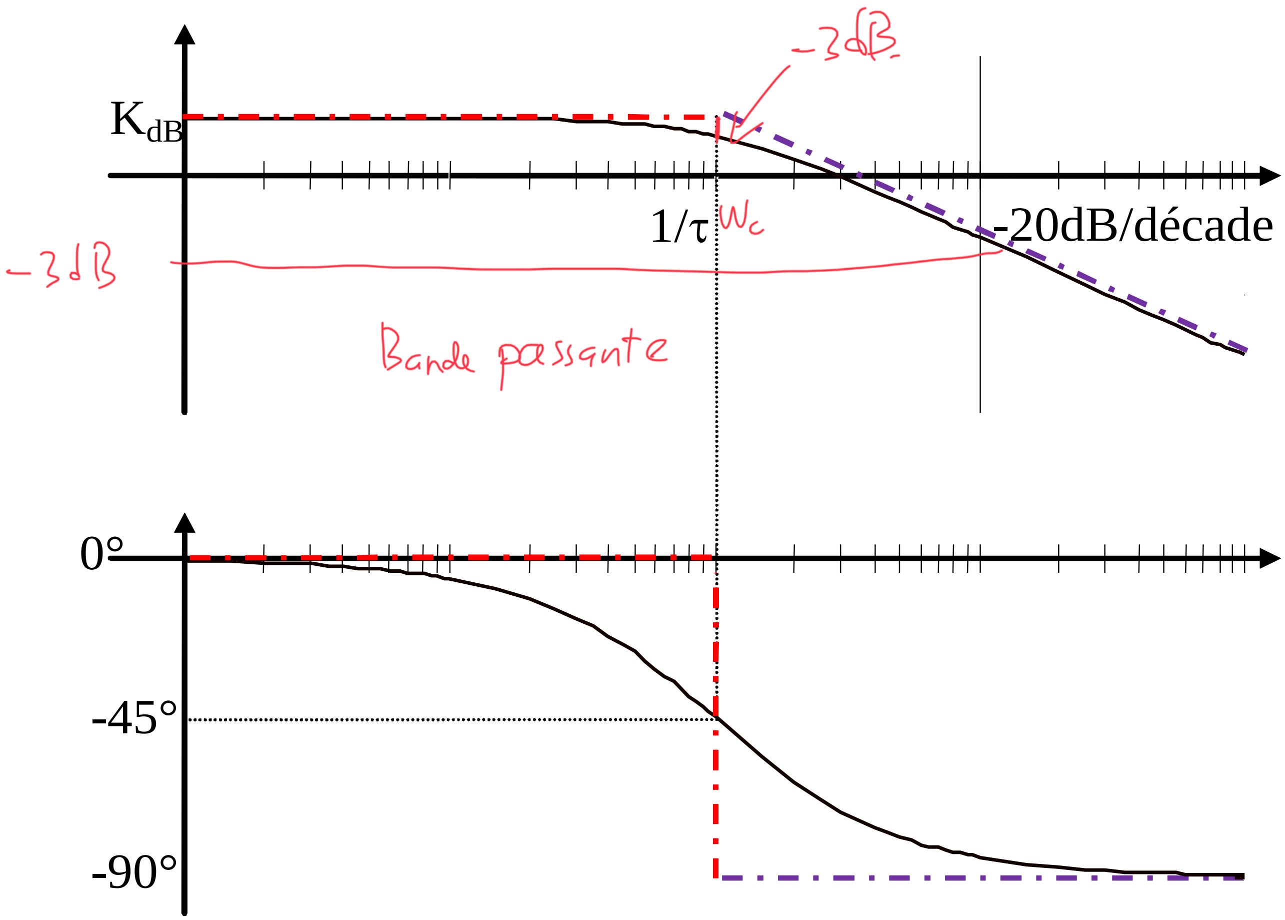
$$\begin{cases} \left|G(j\omega)\right|_{dB} \rightarrow -\infty \\ Arg\big(G(j\omega)\big) \rightarrow -90° \end{cases}$$

- Une asymptote pour le module, de pente: -6db/octave ou -20db/décade
- Une asymptote horizontale pour l'argument : -90°

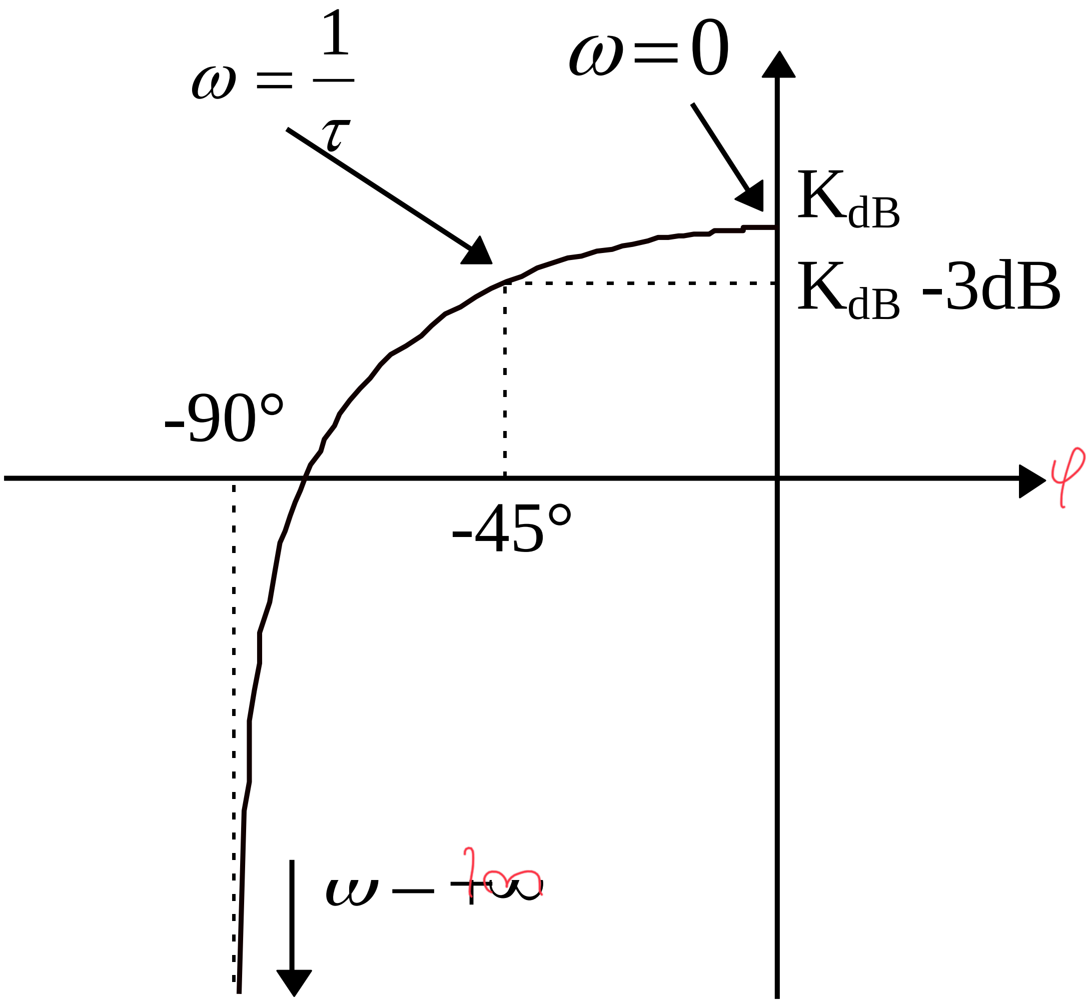
Pour $\omega \to 1/\tau$ alors

$$\begin{cases} \left|G(j\omega)\right|_{dB} \to -3dB \\ Arg\left(G(j\omega)\right) \to -45° \end{cases}$$

Si $K > 1$ alors $K_{dB} > 0$ dB



$A_{dB} = K_{dB} - 10\log(1+\tau^2\omega^2)$



III.3.2. Système du second ordre: cas gain K=1

$$G(p)=\frac{\omega_n^2}{p^2+2\xi\omega_n p+\omega_n^2}\Rightarrow G(j\omega)=\frac{\omega_n^2}{(\omega_n^2-\omega^2)+j2\xi\omega_n\omega}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left|G(j\omega)\right|=\dfrac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2+4\xi^2\omega_n^2\omega^2}}\\ \varphi=arg(G(j\omega))=-arctg\left(\dfrac{2\xi\omega_n\omega}{(\omega_n^2-\omega^2)}\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A_{dB}=20\,log_{10}\,\omega_n^2-10\,log_{10}((\omega_n^2-\omega^2)^2+4\xi^2\omega_n^2\omega^2)\\ \varphi=-arctg\left(\dfrac{2\xi\omega_n\omega}{(\omega_n^2-\omega^2)}\right)\end{cases}$$

Pour $\omega \to 0$ alors

$$\begin{cases} |G(j\omega)| = 1 \\ Arg\left(G(j\omega)\right) = 0° \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} = 0db \\ Arg\left(G(j\omega)\right) = 0° \end{cases}}$$

Pour $\omega \to +\infty$ alors

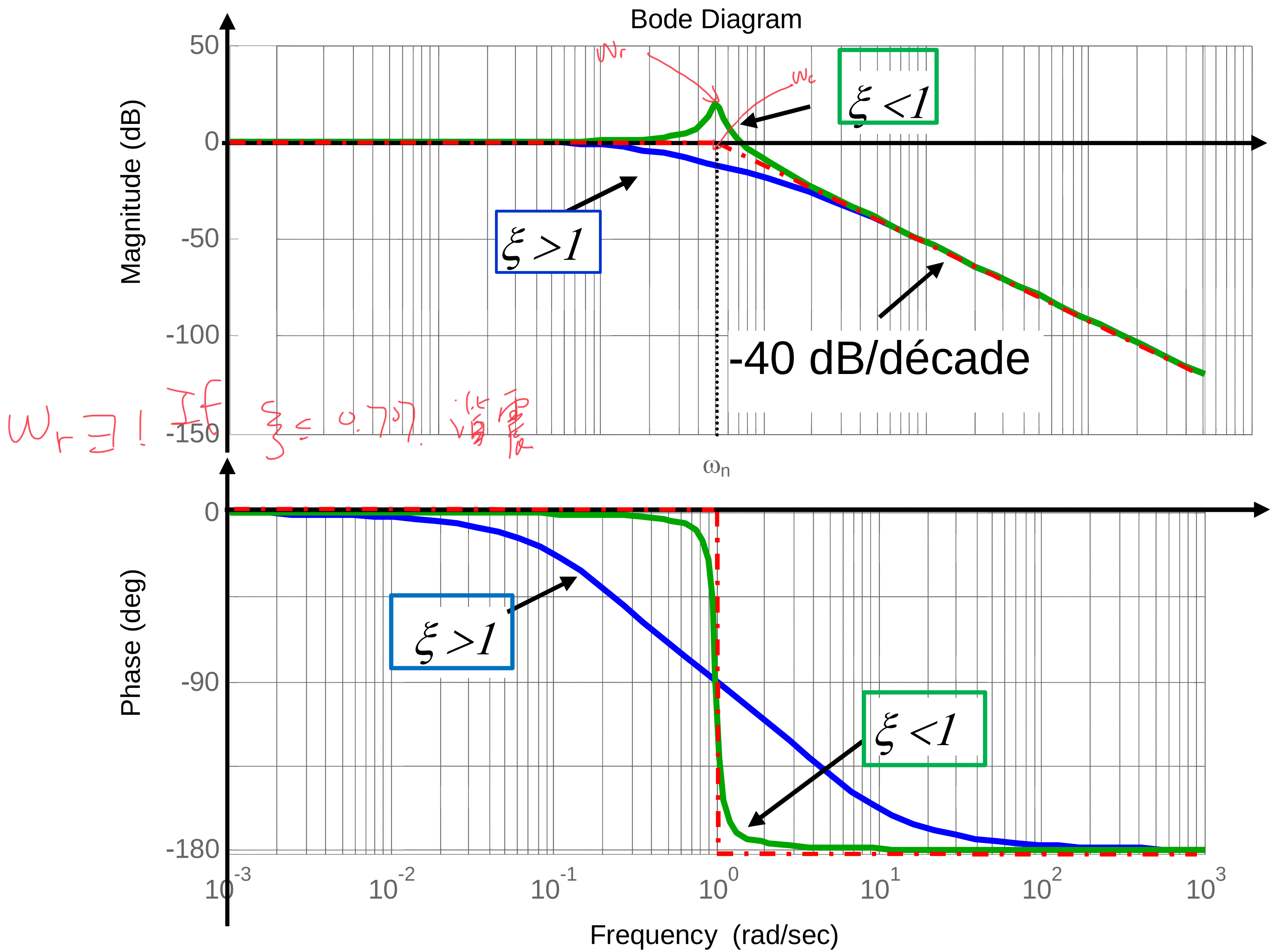
$$\begin{cases} |G(j\omega)| \to 0 \\ Arg\left(G(j\omega)\right) \to -180° \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} \to -\infty \\ Arg\left(G(j\omega)\right) \to -180° \end{cases}}$$

Pour $\omega = \omega_n$ alors $\Rightarrow \begin{cases} A_{dB} = -20\log_{10} 2\xi \\ \varphi = -90° \end{cases}$

A_{db} est maximum pour $\omega = \omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$

Facteur de surtension = $\dfrac{A_{db}(\omega_r)}{A_{db}(0)} = Q = \dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$

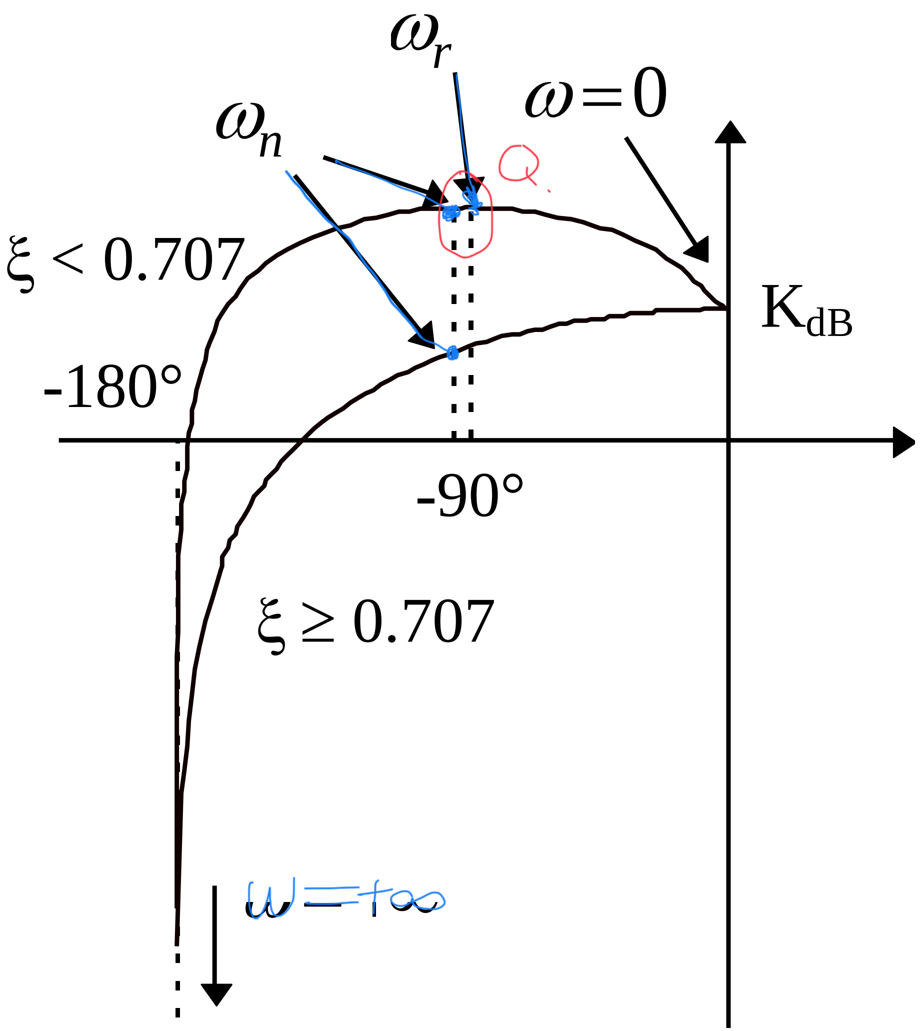
La résonance n'existe que si $\xi < \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$


Bode Diagram
Magnitude (dB)
50
0
-50
-100
-150
ωr
ωc
ξ <1
ξ >1
-40 dB/décade
ωn
Phase (deg)
0
-90
-180
ξ >1
ξ <1
10-3
10-2
10-1
100
101
102
103
Frequency (rad/sec)
ωr ∃! If ξ ≤ 0.707 諧震

品质因数

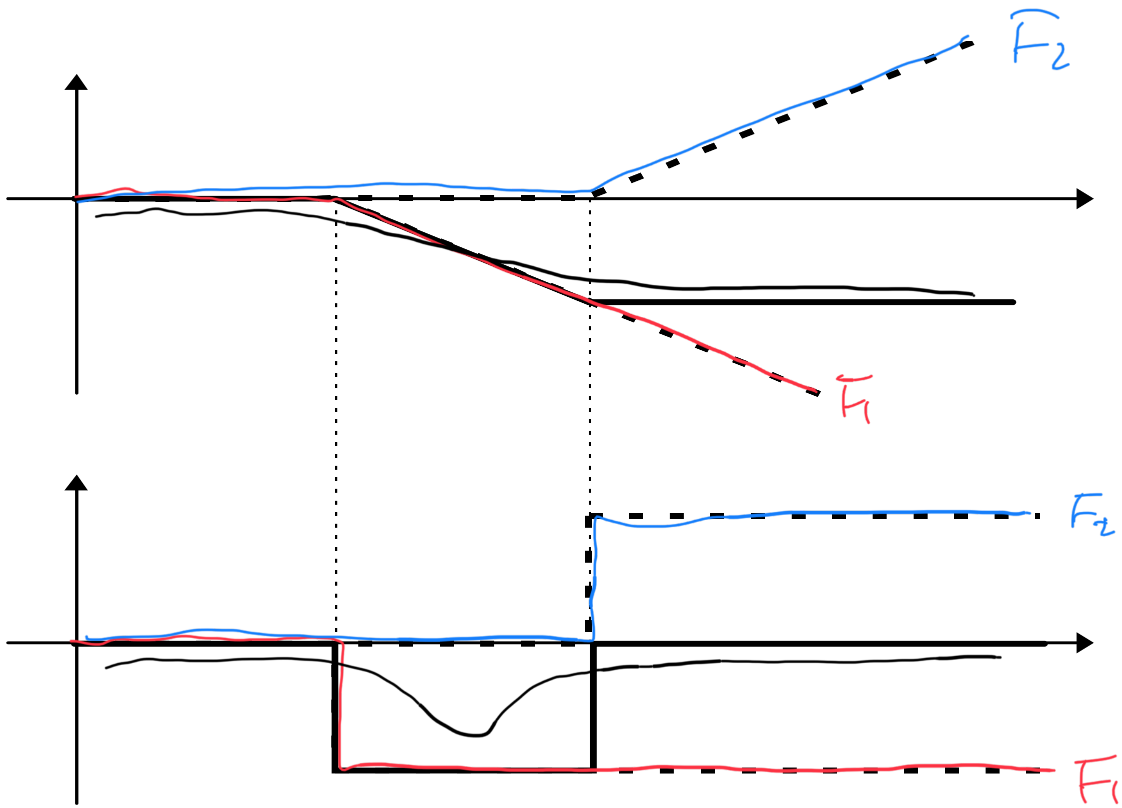
Q = coefficient de surtension

$$Q = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$



L'avantage du diagramme asymptotique dans le plan de Bode : le produit de plusieurs fonctions de transfert sera représenté par la somme géométrique de toutes les asymptotes de chaque fonction de transfert.

$$Si\ F(p) = F_1(p).F_2(p)\ alors\ |F(j\omega)|_{dB} = |F_1(j\omega)|_{dB} + |F_2(j\omega)|_{dB}$$
$$et\ Arg(F(j\omega)) = Arg(F_1(j\omega)) + Arg(F_2(j\omega))$$



III.4. Etude aux limites des systèmes d'ordre n

III.4.1 Fonction de transfert sans intégrateurs:

$$F(p)=\frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1}+\cdots+b_1 p+b_0}{a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}+\cdots+a_1 p+a_0},\, n>m$$

Pour $p \to 0$

$(\omega \to 0)$

$$\boxed{F(p)\approx\frac{b_0}{a_0}} \Rightarrow \begin{cases}|F(p)|=\dfrac{b_0}{a_0}\\ \varphi=0°\end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases}|F(p)|_{db}=20\log_{10}\dfrac{b_0}{a_0}\\ \varphi=0°\end{cases}}$$

Pour $p \to +\infty$

$(\omega \to 0)$

$$\boxed{F(p)\approx\frac{b_m}{a_n}p^{m-n}} \Rightarrow \begin{cases}|F(p)|=0\\ \varphi=(m-n)\dfrac{\pi}{2}\end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases}|F(p)|_{db}=-\infty\\ \varphi=(m-n)\dfrac{\pi}{2}\end{cases}}$$

III.4.2 Fonction de transfert avec intégrateurs:

$$F(p) = \frac{1}{p^k} \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0}, n > m$$

Pour p $\rightarrow$ 0 alors

$\omega \rightarrow 0$

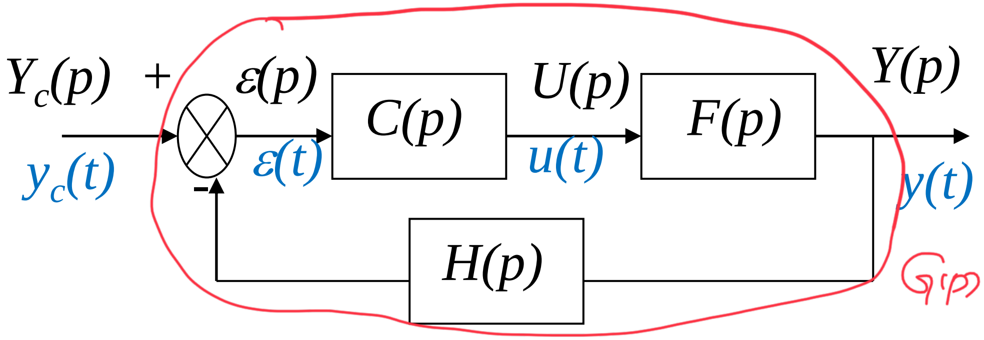
$$F(p) \approx \frac{b_0}{a_0 p^k} \Rightarrow \begin{cases} |F(p)| = +\infty \\ \varphi = -k\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |F(p)|_{db} = +\infty \\ \varphi = -k\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Pour p $\rightarrow$ + ∞ alors

$\omega \rightarrow +\infty$

$$F(p) \approx \frac{b_m}{a_n} p^{m-n-k} \Rightarrow \begin{cases} |F(p)| = 0 \\ \varphi = (m-n-k)\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |F(p)|_{db} = -\infty \\ \varphi = (m-n-k)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

III.5. Fonction de Transfert en Boucle Fermée: FTBF

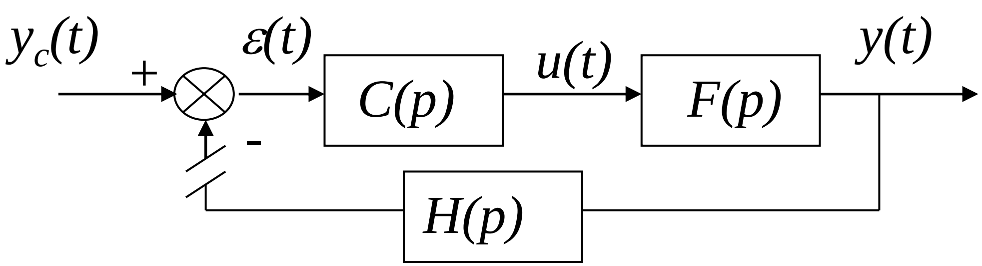


<u>FTBF</u> :

$$\boxed{G(p) = \frac{C(p)F(p}{1 + C(p)F(p)H(p)}}$$

C(p)F(p): transfert de la chaîne directe et *H(p)*: transfert de la chaîne de retour

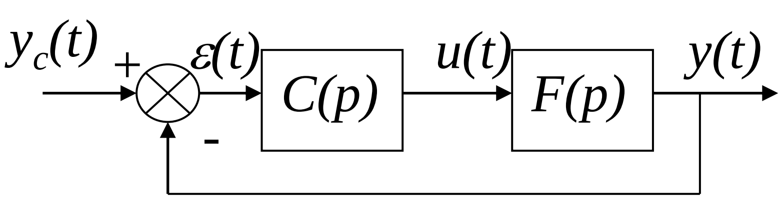
III.6 Fonction de Transfert en Boucle ouverte: FTBO



<u>FTBO</u>:

$$C(p)F(p)H(p)$$

<u>Remarque</u>: en général, le schéma fonctionnel d 'un SAL peut se ramener au schéma suivant:

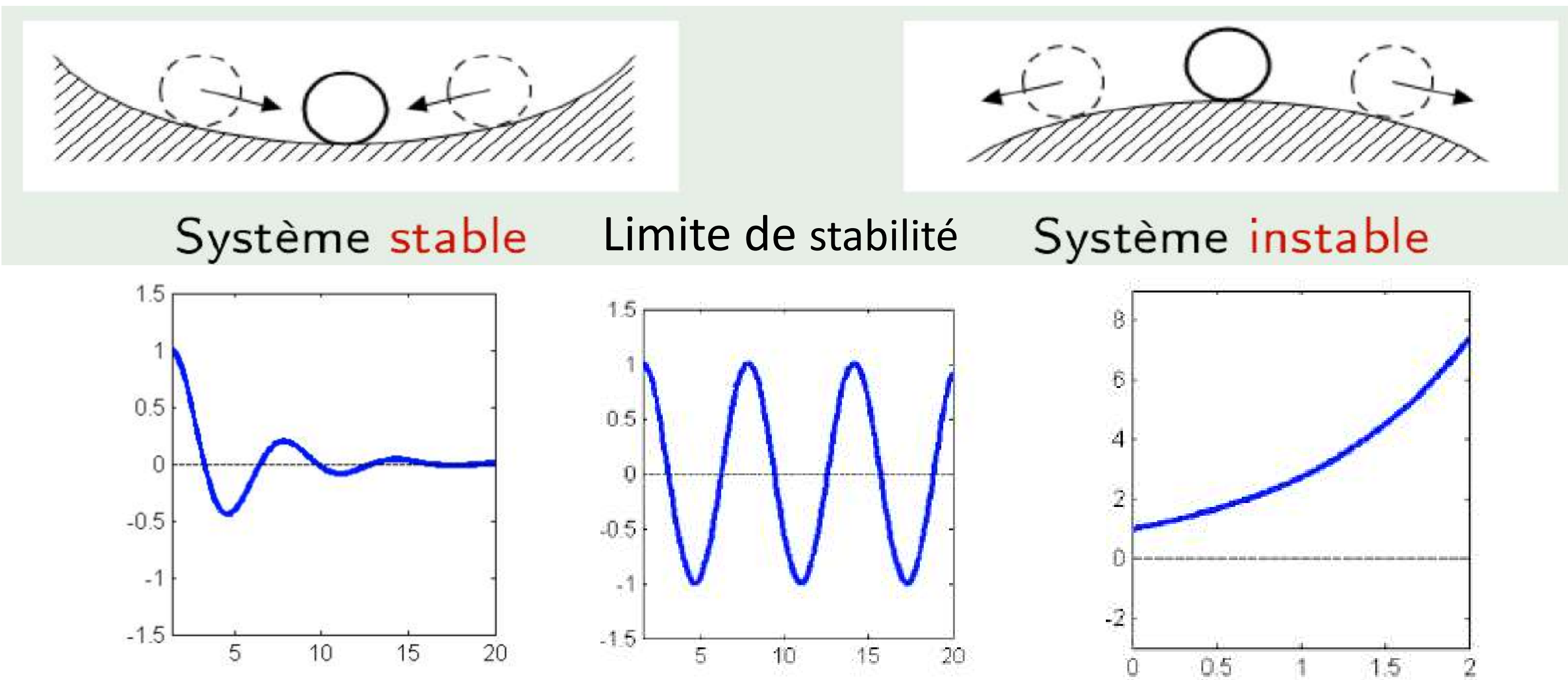


<u>FTBF</u> :

$$G(p) = \frac{C(p)F(p}{1+C(p)F(p)} = \frac{FTBO}{1+FTBO}$$

Chapitre IV : Stabilité des systèmes linéaires

IV.1. Généralités



<u>Définition mathématique</u>: Un système linéaire est stable si et seulement si sa réponse impulsionnelle h(t), tend vers 0 quand le temps t tend vers l'infini (en régime permanent).

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} h(t) = 0}$$

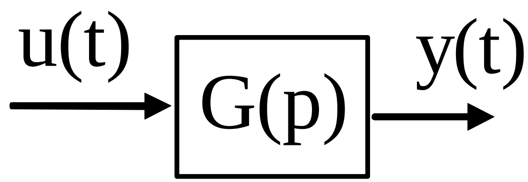
IV.2. Condition nécessaire et suffisante de stabilité

***<u>Théorème</u>* : Un système linéaire continu est stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative**. On parle, alors, de stabilité asymptotique.

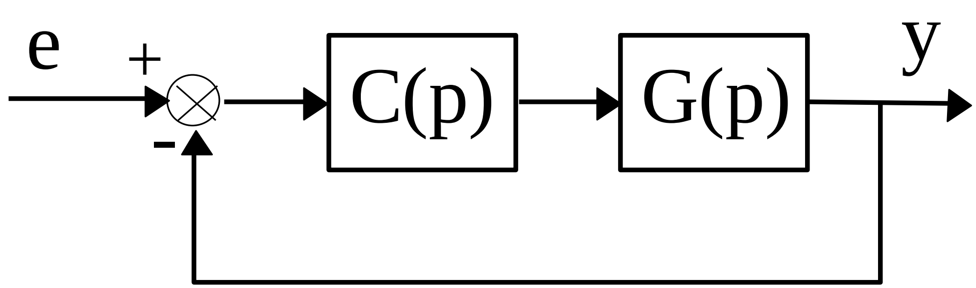
$FT = \frac{N(p)}{D(p)}$.

$D(p) = 0 \Rightarrow$ pôles

$Re(\text{pôles}) < 0$



Un système asservi linéaire est stable si et seulement si les racines de son équation caractéristique $1 + C(p)G(p) = 0$ sont toutes à parties réelles strictement négatives.



* *Relation entre les pôles et la réponse impulsionnelle* :

Soit c_i et a_i+jb_i les pôles réels et complexes de la fonction de transfert d'un système. La fonction de transfert de ce système peut-être décomposée en éléments simples de la manière suivante :

$$F(p)=\boxed{\sum\frac{C_i}{p-c_i}}+\boxed{\sum\frac{A_i p+B_i}{(p-a_i)^2+b_i^2}}$$

TL^{-1} TL^{-1}

sa réponse impulsionnelle est :

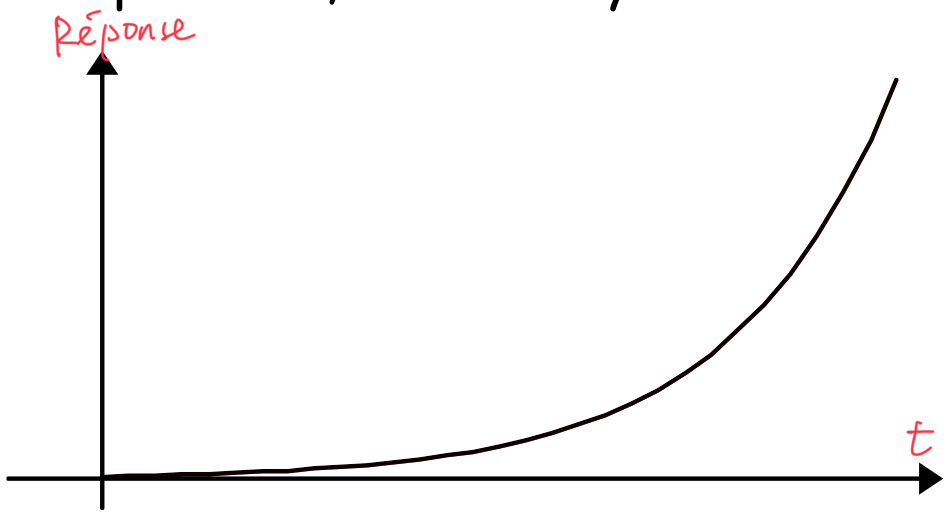
$$h(t)=TL^{-1}(F(p))=\sum C_i e^{c_i t}+\sum A'_i e^{a_i t}\sin(b_i t+\phi_i)$$

Si tous les c_i et a_i sont négatifs (les pôles sont à parties réelles négatives), alors tous les termes en exponentielle (transitoires) vont tendre vers 0 quand le temps t tend vers l'infini. Auquel cas h(t) tend vers 0. Ce qui permet de conclure que le système est stable

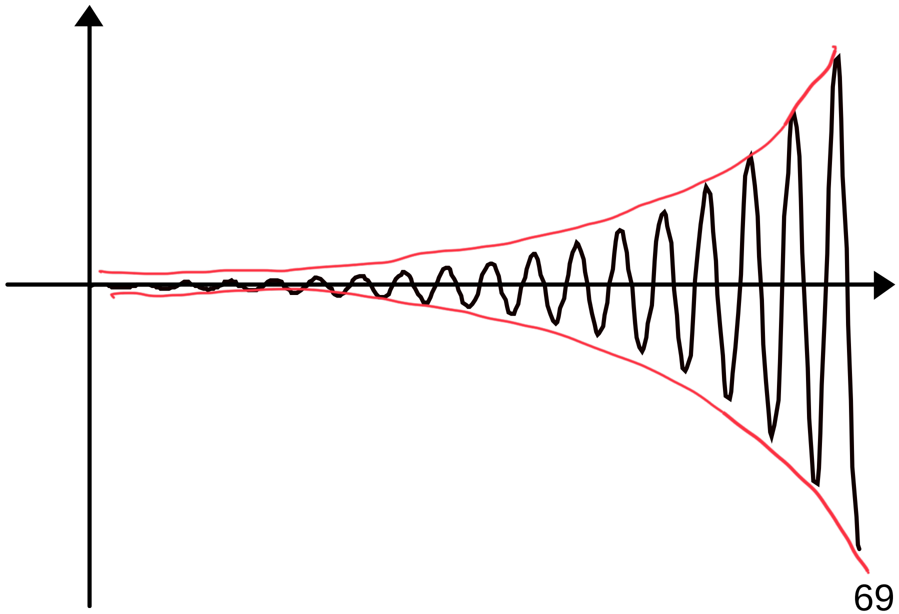
$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \sum C_i e^{c_i t} + \sum A'_i e^{a_i t} \sin(b_i t + \phi_i)$$

$$\lim_{t \to +\infty} h(t) = 0$$

Si un des pôles est à partie réelle positive, alors le système est instable :



•de type divergent s'il s'agit d'un pôle réel positif



•de type oscillatoire s'il s'agit d'un pôle complexe à partie réelle positive.

Cas limite : Cas où certains pôles de *F(p)* sont sur l'axe des imaginaires (partie réelle nulle) ; les autres pôles étant situés dans le demi-plan de gauche (partie réelle négative).

* Si l'un des pôles imaginaires est multiple alors le système est instable.

Exemples :

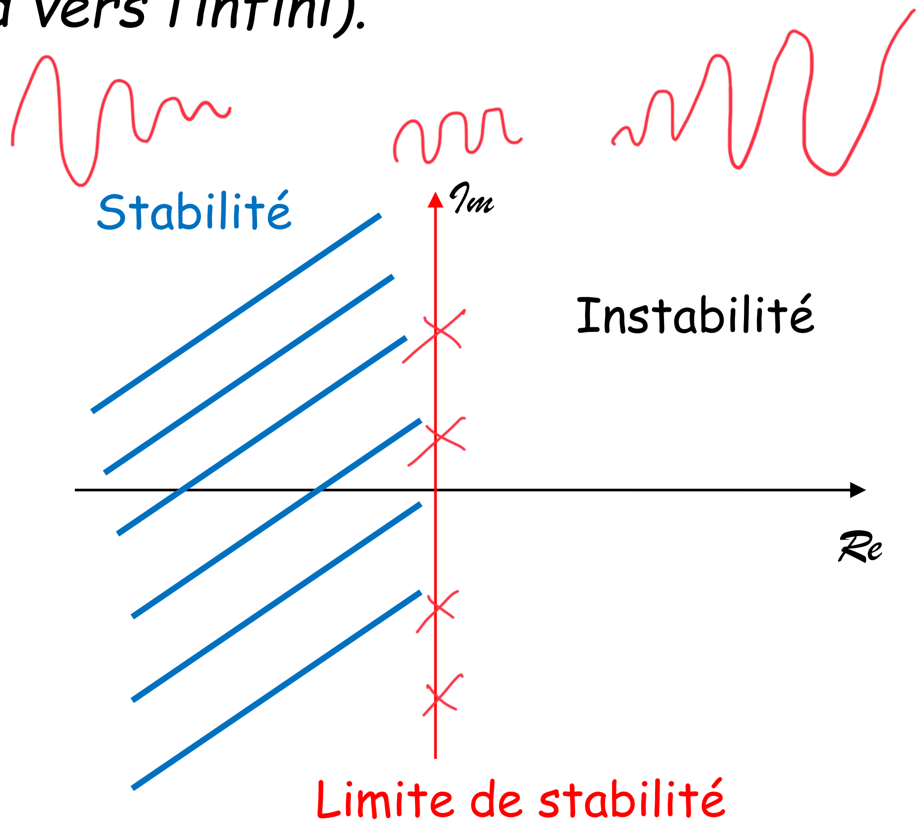
- Réponse de *1/p2 est t (tend, donc, vers l'infini quand le temps tend vers l'infini)*
- Réponse de $1/(p^2+\omega^2)^2$ *est* $c(\sin t(\omega t)-\omega t\cos(\omega t))$ *(tend, aussi, vers l'infini quand le t tend vers l'infini)*

* Si tous ces pôles imaginaires sont simples, le système ne revient pas à sa position d'équilibre, mais il ne s'en éloigne pas trop. On dit que le système est stable mais non asymptotiquement (limite de stabilité, ou stabilité simple).

Exemples :

. 1/p est 1 (il tend, donc, vers une valeur finie quand le temps tend vers l'infini).

. $1/(p^2+\omega^2)$ est $c(\sin t(\omega t))$ (il reste dans une bande finie quand le temps tend vers l'infini).



Si les pôles(x) sont multiples, alors le système sont instable.

IV.3. Critère algébrique de Routh

利用根与系数关系

2 conditions

Ce critère permet de savoir si les racines d'une équation algébrique ont leurs parties réelles négatives sans avoir à la résoudre. On l'applique, alors, à l'équation caractéristique d'un système asservi linéaire (i.e. au dénominateur de sa fonction de transfert en boucle fermée).

ou boucle ouverte.

a. Condition nécessaire :

La condition nécessaire de stabilité est que **tous les coefficients de l'équation algébrique sont de mêmes signes**.

a_i soient de même signe.

Cette condition nécessaire est suffisante si le degré de l'équation est inférieur ou égal à deux.

$a_i > 0$

ou

$a_i < 0$

$$FT = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n p^n + \cdots \cdots + a_0}$$

b. Condition nécessaire et suffisante : Règle de Routh

dénominateur de la FT

Soit l'équation algébrique suivante : $a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0 = 0$

même signe → stable

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	....
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	....
p^{n-2}	$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$	$b_3 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$	....
p^{n-3}	$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}$	$c_3 = \frac{b_1 a_{n-7} - a_{n-1} b_4}{b_1}$	....
....	....	....	....	....
p^0	XXX	0	0	....
p^{-1}	0	0	0	....

变号次数是引起不稳定根的个数.

Le critère de Routh s'énonce comme suit :

Le nombre de changement de signe dans la première colonne est égal au nombre de racines à parties réelles positives ou nulles de l'équation caractéristique.
En particulier, si tous les termes de la première colonne sont de même signe, alors le système est stable. Cette condition est nécessaire et suffisante.

Ex. $a_2 p^2 + a_1 p + a_0 =$

Condition nécessaire : $a_2, a_1, a_0 > 0$ ou $a_2, a_1, a_0 < 0$

p^2	a_2	a_0
p^1	a_1	0
p^0		0
p^{-1}	0	

$$\frac{a_1 a_0 - 0 \cdot a_2}{a_1}$$

Si $a_2 < 0$, $a_1 < 0$, $a_0 < 0$

Exemple:

1- Soit le système asservi dont l'équation caractéristique est donnée par : $p^3 + 0.5\,p^2 + 3\,p + 3.5 = 0$

> 0 même signe

- La condition nécessaire est satisfaite: tous les coefficients sont de même signe

- Le tableau de Routh est le suivant :

1e changement du signe

2ème changement du signe

p^3	1	3
p^2	0.5	3.5
p	-4	0
p^0	3.5	0
p^{-1}	0	0

Le système est donc instable, du fait de la présence de deux changements de signe dans la première colonne.

Cas particuliers

• cas où $a_0 = 0$: il suffit de mettre l'équation sous la forme: $p(a_n p^{n-1} + ... + a_2 p + a_1) = 0$, puis on applique le critère de Routh au terme qui est à l'intérieur de la parenthèse (on remarque que l'on a déjà un pôle nul).

2- Soit l'équation caractéristique suivante :

$$p^4 + 0.5\,p^3 + 3\,p^2 + 3.5\,p = 0 \Leftrightarrow p\,(p^3 + 0.5\,p^2 + 3\,p + 3.5) = 0$$

On a, donc, une racine nulle.

Soit l'équation caractéristique: $p^4 + p^3 + 5p^2 + 4p + 4 = 0$

p^4	*1*	*5*	*4*
p^3	*1*	*4*	*0*
p^2	*1*	*4*	*0*
p	***0***	***0***	***0***
p^0	?	?	*0*
p^{-1}	?	*0*	*0*

→ On a une ligne nulle. *Problème: comment compléter le tableau??*

Solution: on remonte au niveau de la ligne au dessus, et on calcul le polynôme auxiliaire et on complète le tableau

Dans le cas de l'exemple c'est la ligne 3, dont les coefficients sont ceux du polynôme p^2+4. Ce polynôme est appelé : polynôme auxiliaire .

p^4	1	5	4
p^3	1	4	0
p^2	1	4	0
p	**2**	**0**	**0**
p^0	4	0	0
p^{-1}	0	0	0

$\rightarrow$ Polynôme auxiliaire : $1\,p^2 + 4$

2 est le coefficient de la dérivée du polynôme auxiliaire

Le système est, donc, stable mais non asymptotiquement puisqu'il possède deux pôles imaginaires pures ($p=\pm 2j$)

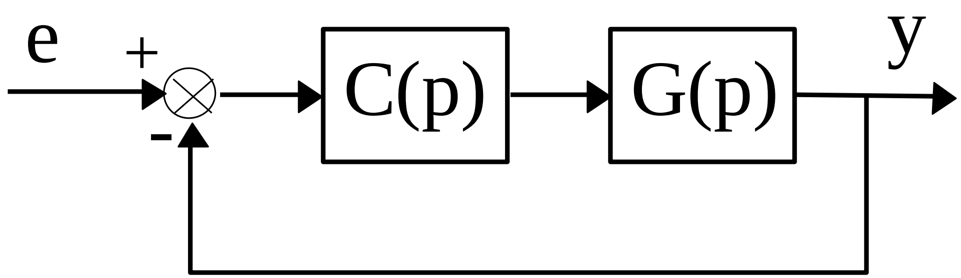
IV.4. Critères graphiques :

Ces critères s'appliquent seulement aux systèmes bouclés.

On vient de voir que la stabilité peut-être étudiée en utilisant des critères algébriques. Ces critères se basent sur la connaissance du modèle du système à étudier, d'où leur inconvénient. En effet, en industrie, un bon nombre de systèmes sont caractérisés par des données expérimentales (réponse fréquentielle, ...), et de par leurs complexités il est difficile de les modéliser. Pour cela, on fait appel à des critères graphiques.

Critère de Nyquist, Règle du revers, **Marges de stabilités (Marge de phase et Marge de gain)**.

Pour le système bouclé suivant :



la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$F(p) = \frac{C(p)G(p)}{1 + C(p)G(p)}$$

Si $C(p)G(p) = -1$ pour $\omega = \omega_{cr}$ alors $|F(p)|_{p=j\omega cr} \to +\infty$

Donc la réponse du système va tendre vers l'infini ce qui permet de conclure que le système est instable

Si le lieu de $C(p)G(p)$ vient à passer au point -1, on a à la fréquence correspondante $1+C(j\omega_{cr})G(j\omega_{cr})=0$, et la réponse du système va osciller avec la dite fréquence même en l'absence d'entrée (il faudrait en réalité qu'il y ait des conditions initiales non nulles ou des courants de fuites ou statiques non nulles et/ou des offsets dans le cas des circuits électriques : c'est le principe des oscillateurs en électroniques).

Ce point -1 est appelé **point critique**.

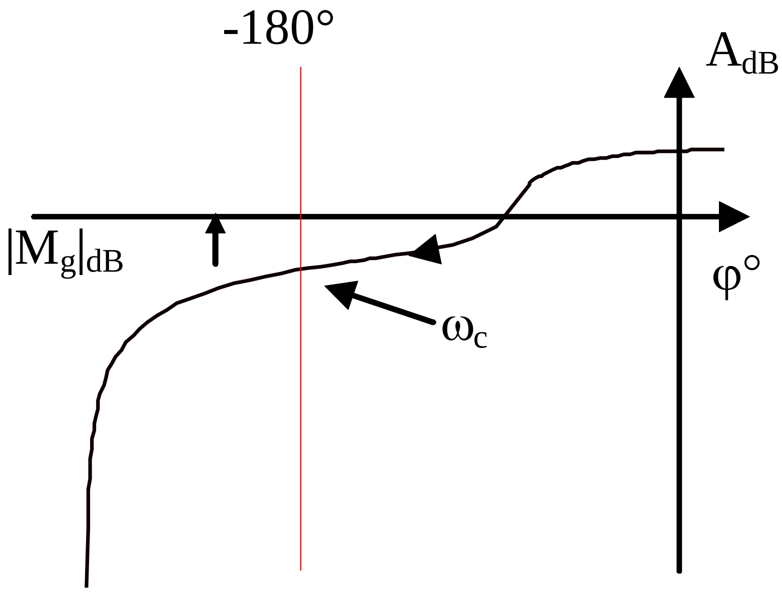
Le point critique a pour coordonnées *(-180°, 0db)* pour $\omega=\omega_{cr}$, dans les diagrammes fréquentiels de Bode et Black-Nichols.

Marges de stabilité:

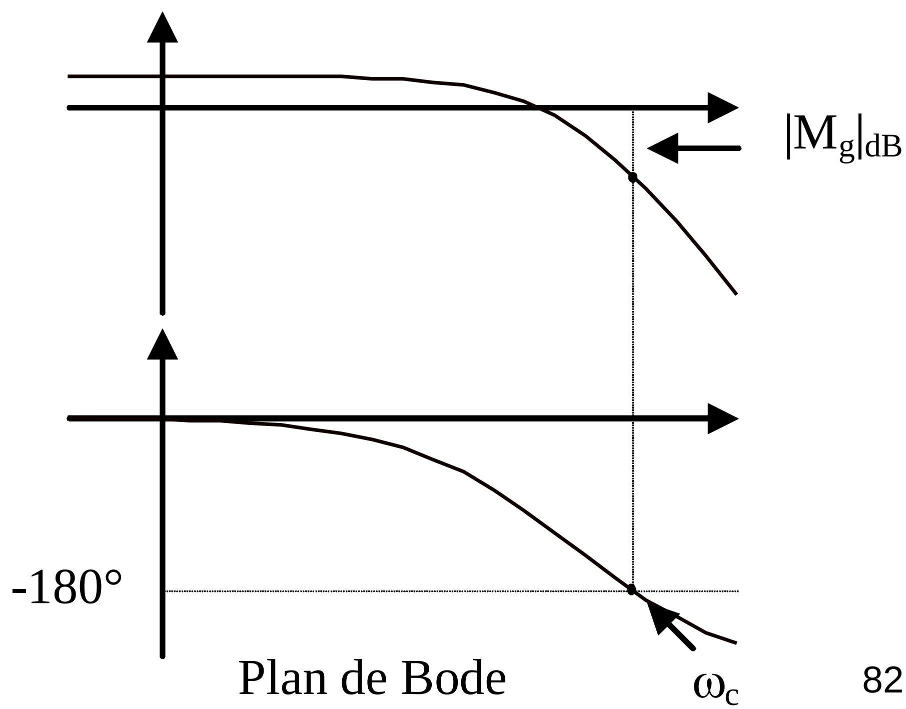
IV.1. Marge de gain: est le nombre dont le gain en boucle ouverte peut augmenter sans détruire la stabilité. On la note par Mg.

Calcul de Mg analytiquement:

ω_c/ $arg(FTBO) = -180°$ et on calcule $Mg_{dB} = -20\log_{10}|FTBO|$



Plan de Black-Nichols



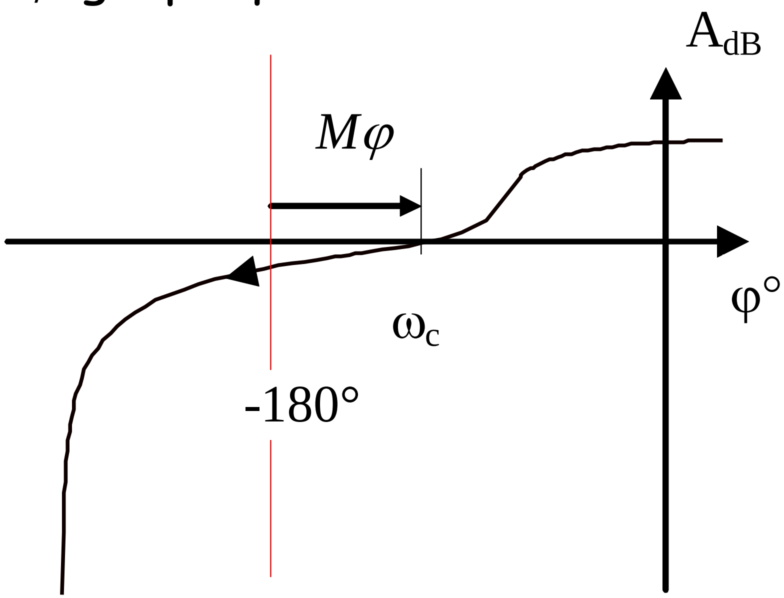
Plan de Bode

<u>IV.2- Marge de phase</u>: est le déphasage complémentaire qui dans la zone de résonance ferait passer le lieu de la FTBO de l 'autre côté du point critique. On la note par $M\varphi$.

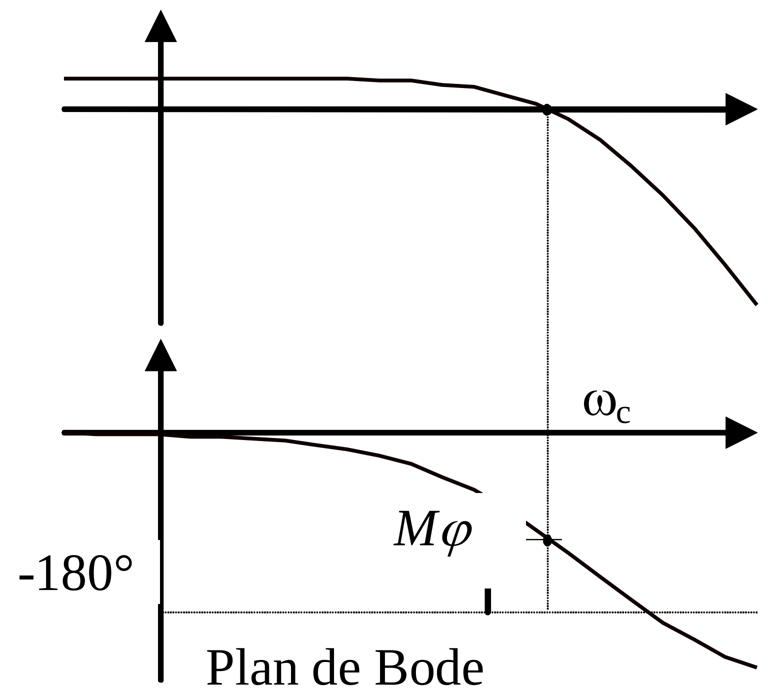
$M\varphi$ analytiquement:

$\boxed{\omega_c / \, |FTBO|=1 \text{ et on calcule } M\varphi=180+arg(FTBO)}$

$M\ \varphi$ graphiquement



Plan de Black-Nichols

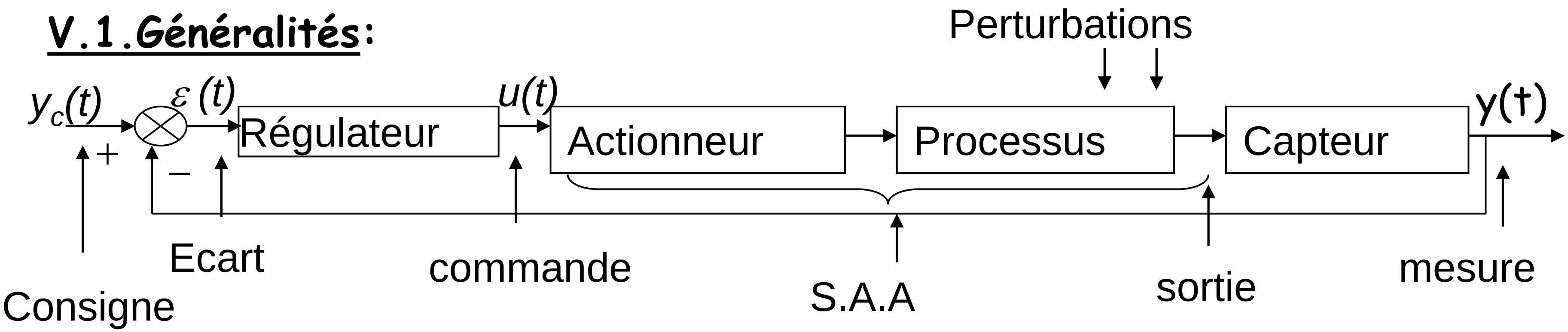


Plan de Bode

Chapitre V:

PERFORMANCES DES SYSTEMS ASSERVIS LINEAIRES

V.1.Généralités:

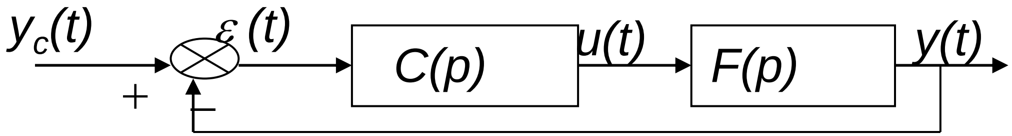


S.A.A: Système A Asservir composé d 'un actionneur (ex: vanne) et du processus (ex: mélangeur). Il comporte 2 entrées: commande (ex: tension) et perturbation (ex: débit de fuite).

Régulateur (ou correcteur): contraint la grandeur à régler du processus à rester au voisinage de sa consigne en s 'opposant en particulier aux perturbations. Il élabore la commande à partir de l 'écart.

Capteur: il donne une image de la grandeur mesurée (ex: thermocouple délivre une tension électrique proportionnelle à une température).

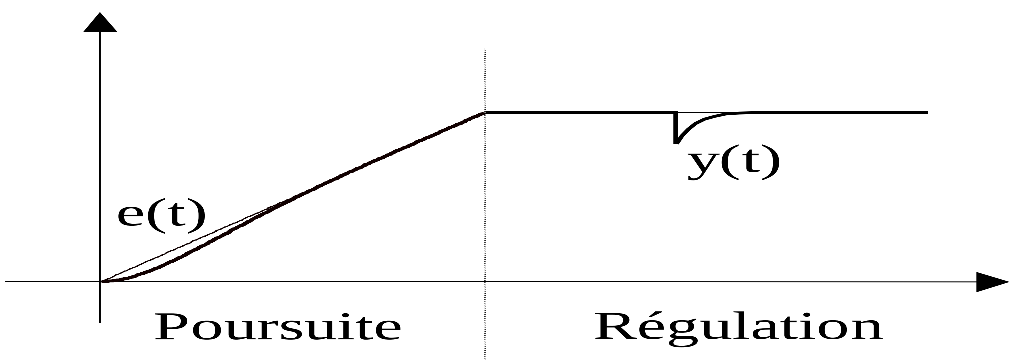
On peut ramener la boucle d 'asservissement au schéma suivant:



But: $y(t) = y_c(t)$ soit $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ le plus rapidement possible sans que le système ne devienne instable.

Cette condition doit être vérifiée:

- $\forall$ la variation de l'entrée:
 (Problème de poursuite) $\longrightarrow$ rapidité.
- $\forall$ la perturbation:
 (Problème de régulation) $\longrightarrow$ raideur



V.2.Cahier des charges:

Le cahier des charges d 'un système asservi comporte, en général, les conditions suivantes:
- Pour le régime permanent: faibles erreurs de position (lorsque la consigne est de type échelon et de traînage (lorsque la consigne est de type rampe).
- Pour le régime transitoire: rapide et bien amorti.
- Stabilité.

On a les compromis suivants à résoudre:

Performances → rapidité, précision

Robustesse → stabilité, insensibilité aux bruits

Une régulation doit être:

- **précise** :

Consigne échelon: il faut une intégration en chaîne directe pour que le système soit précis

Consigne rampe: pour que l 'erreur de traînage soit nulle, il faut deux intégrations en chaîne directe

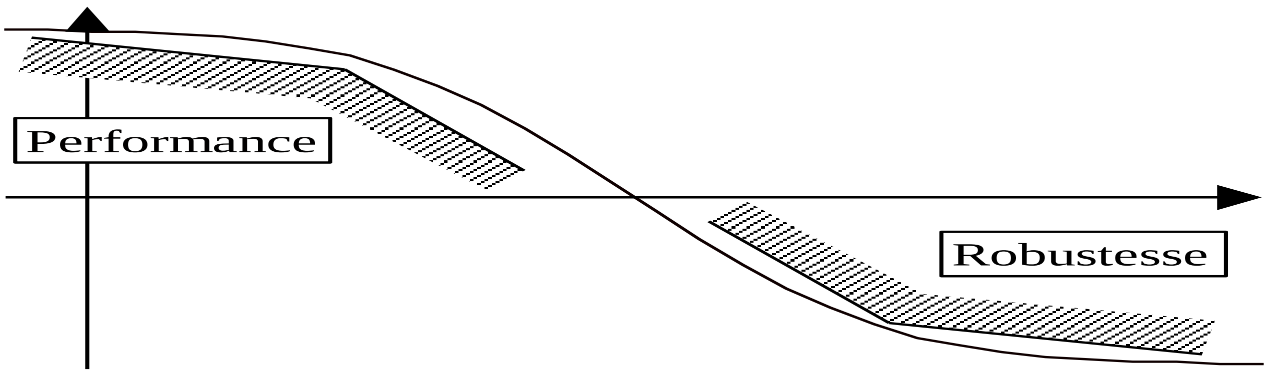
- suffisamment **stable** : $M\phi$ et MG (diagrammes de Bode et Black)

- La plus **rapide** possible, sous contrainte des deux critères précédents

•t_r, temps de réponse, minimum (réponse indicielle)

•Bp, bande passante, maximum (diagramme de Bode)

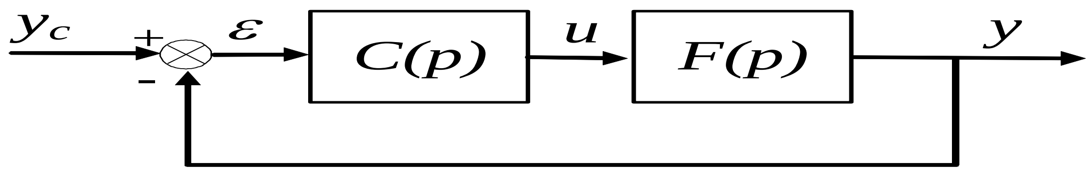
D'où la dualité Performance-Robustesse. Solution: Gabarit performance-robustesse



Chapitre VI:

PRINCIPE DE LA COMPENSATION

VI.1.Généralités:



Dans le cas idéal on veut avoir $y(\infty) = y_c(\infty)$, i.e. avoir une FTBF *G(p)=1.*

La FTBF est donnée par :

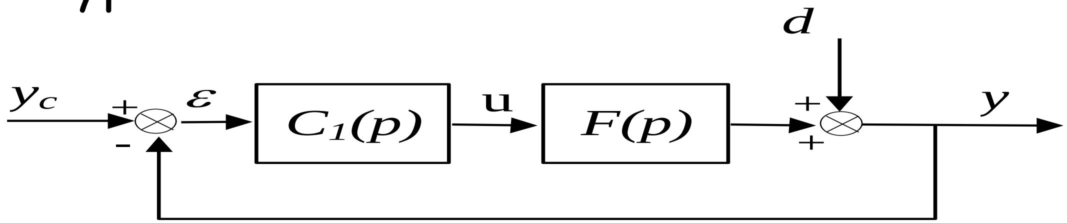
$$G(p) = \frac{C(p)F(p)}{1 + C(p)F(p)}$$

Pour avoir *G(p) = 1* il faut avoir *C(p)F(p)=+*∞ $\forall$ *p*, ce qui est impossible.

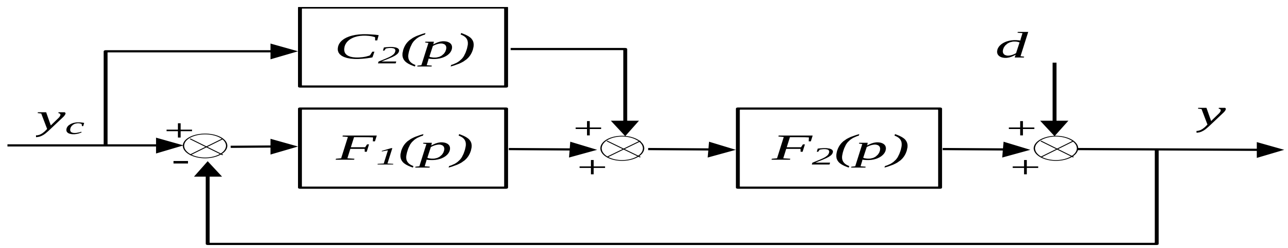
Une fois le cahier des charges fixé, la seconde étape consiste à synthétiser le correcteur *C(p)* qui vérifie ce cahier des charges.

Il existe différentes méthodes de corrections :

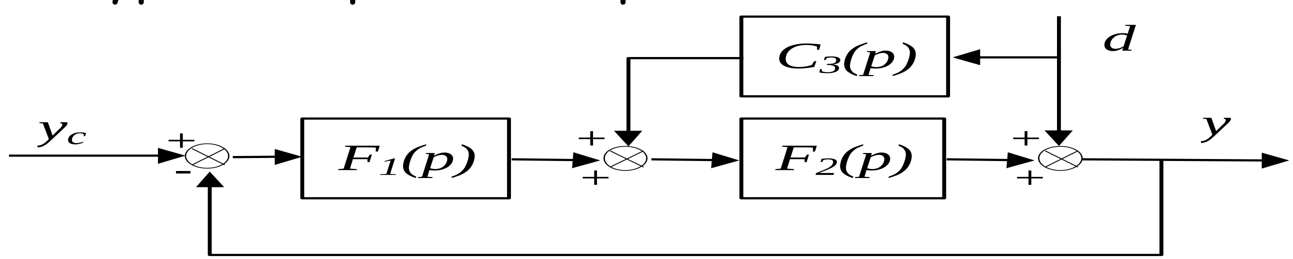
•Correcteur de type série ou cascade:



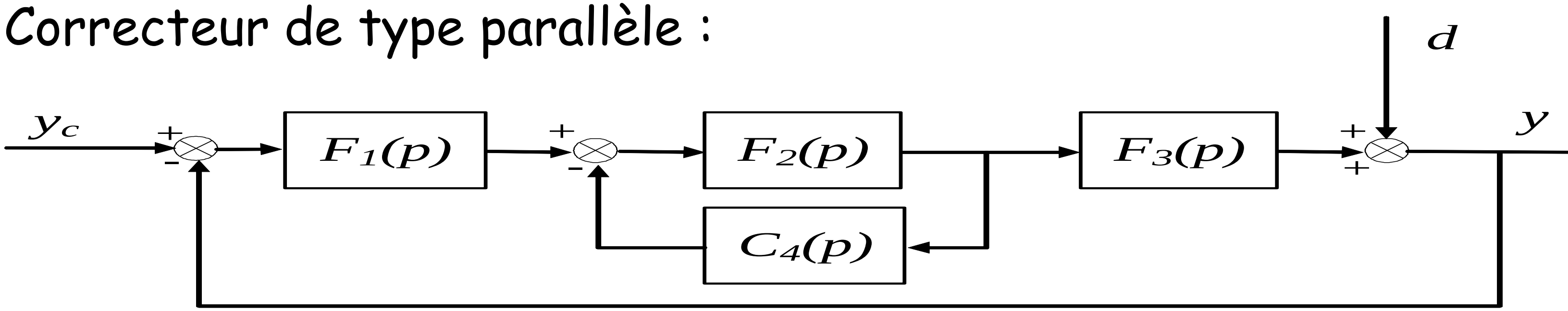
•Correcteur de type anticipation de l'entrée :



•Correcteur de type anticipation des perturbations :



•Correcteur de type parallèle :



Classification des régulateurs

1. Selon la nature de l'énergie qu'ils utilisent :

- Pneumatique : sortie 0.2 à 1 bar. Il sont utilisés dans l'industrie chimique du gaz, ne présentent pas de danger d'explosion, de moins au moins utilisés car lents et encombrants.
- Electronique : sortie 4-20 mA utilisent des signaux analogiques à base d'amplificateurs opérationnels.
- Numérique : Sortie sous forme numérique. La technologie numérique permet d'avoir une grande souplesse : opération arithmétique, auto ajustage des coefficients, possibilité d'émettre ou de recevoir des données.

2. Selon le type d'action:

P-régulateur, PI Régulateur, PD régulateur, PID régulateur, Tout ou rien

3. Selon le sens d'action :

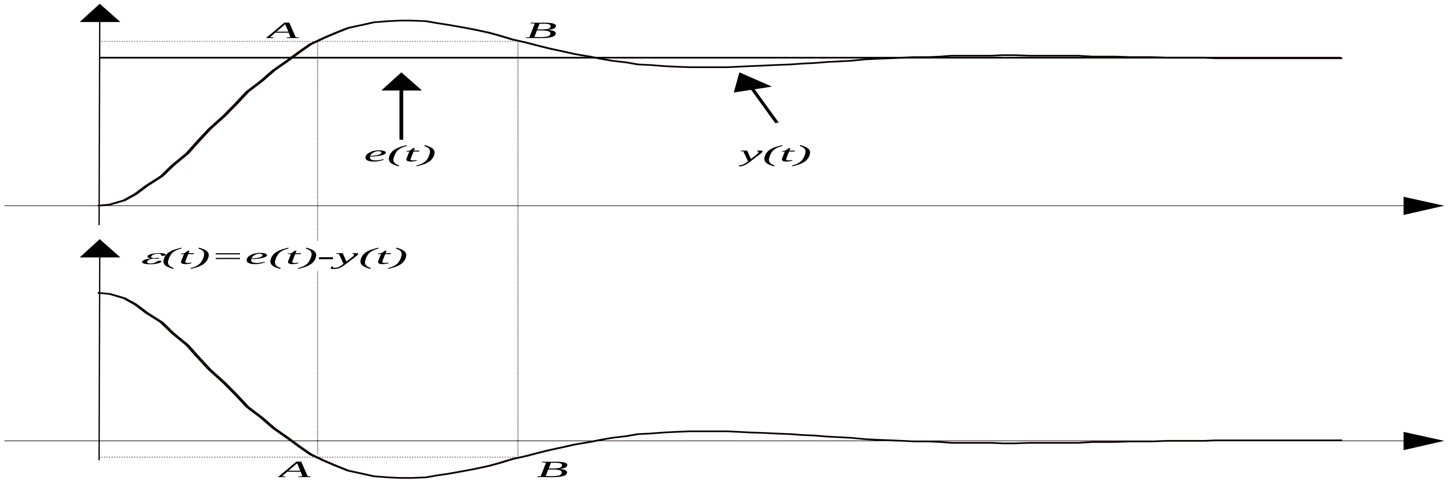
Le sens d'action est inversible et est choisi en fonction de celui de la vanne. Le sens de celle ci est fixé en fonction des conditions de sécurité . Ainsi par exemple , une vanne de réglage d'un gaz combustible doit être fermée par manque d'air

. Direct - l'augmentation de la mesure provoque l'augmentation de la commande

. Inverse - l'augmentation de la mesure provoque la diminution de la commande

VI.2.Approche intuitive du problème:

La figure ci-dessous est la réponse indicielle d'un système asservi, représentée par la figure ci-dessous:



Plus l'erreur $\varepsilon(t)$ est important, plus le signal de commande (u(t)) doit être important pour ramener l'erreur vers zéro. Nous parlons de commande proportionnelle (P)

$\varepsilon(t) \nearrow \Longrightarrow u(t) \nearrow \Longrightarrow$ Nous parlons de commande proportionnelle (P).

Prendre en compte que la valeur de l'écart pour commander le système est souvent insuffisant: on a en particulier la même commande en A et en B bien que l'erreur en valeur absolue augmente en A et diminue en B. Pour cela, le signal de commande sera généré par:

$$\varepsilon(t) + \alpha\dot{\varepsilon}(t)$$

Nous parlons de commande proportionnelle - dérivée (PD).

Nous avons déjà vu qu'en rajoutant une intégration dans la chaîne directe nous annulons l'erreur statique

$\varepsilon(t) = 0 \Longrightarrow$ Nous parlons de commande intégrale (I).

Le signal de commande s'exprime alors comme suit :

$$u(t) = \underbrace{K\varepsilon(t)}_{P} + \underbrace{\beta\int\varepsilon(t)}_{I} + \underbrace{\alpha\dot{\varepsilon}(t)}_{D}$$

$$\xrightarrow{TL} U(p) = \underbrace{K\varepsilon(p)}_{P} + \underbrace{\frac{\beta}{p}\varepsilon(p)}_{I} + \underbrace{\alpha p\varepsilon(p)}_{D}$$

En posant $T_d = \alpha$ et $T_i = 1/\beta$, nous obtenons la forme canonique d'un correcteur PID:

$$\boxed{C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K\left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p\right) = K_p + \frac{K_i}{p} + K_d p}$$

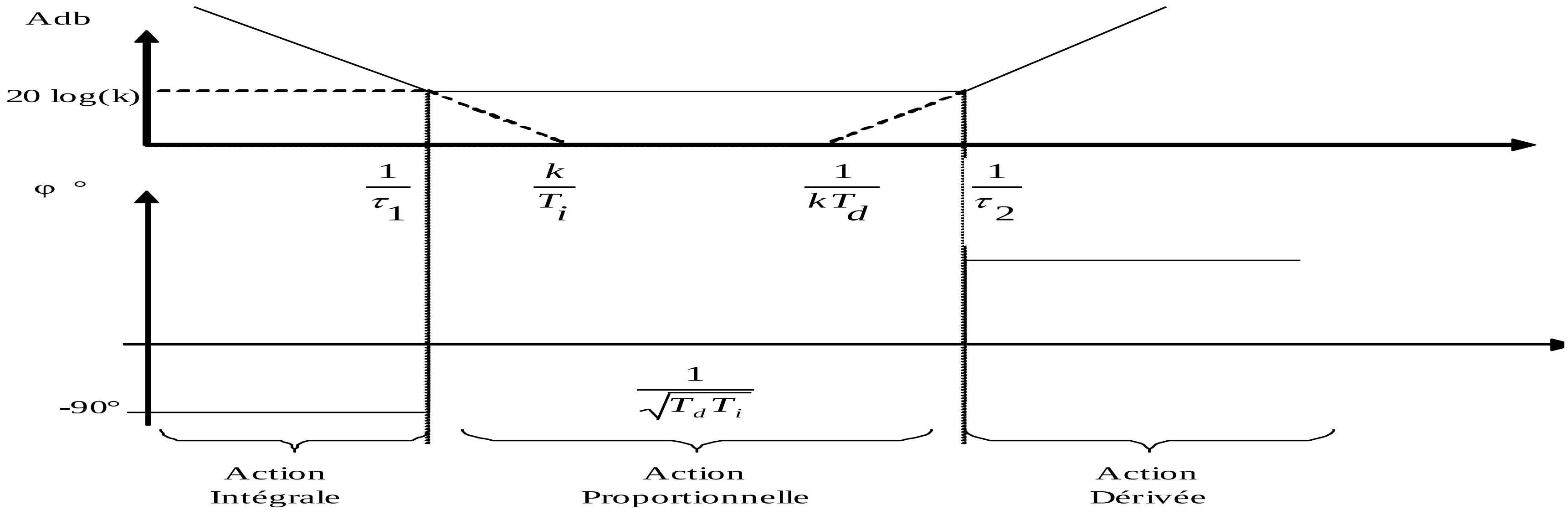
En résumé:

- L'action P augmente la précision dynamique : agit sur la rapidité.
- L'action I annule l 'erreur statique: agit sur la précision.
- L'action D tend à stabiliser le système: agit sur la stabilité.

Ces trois actions sont complémentaires.

<u>Remarque:</u> le dérivateur idéal $T_d\, p$ n'existe pas ; nous l'approximons par

$$\frac{T_d\, p}{1+\frac{T_d}{N}\, p} \quad , \quad \text{avec } N \gg 1, \; (N \approx 10)$$



<u>6.3.Différents correcteurs</u>:

- **<u>P, PI,IP,PD, PID</u>**

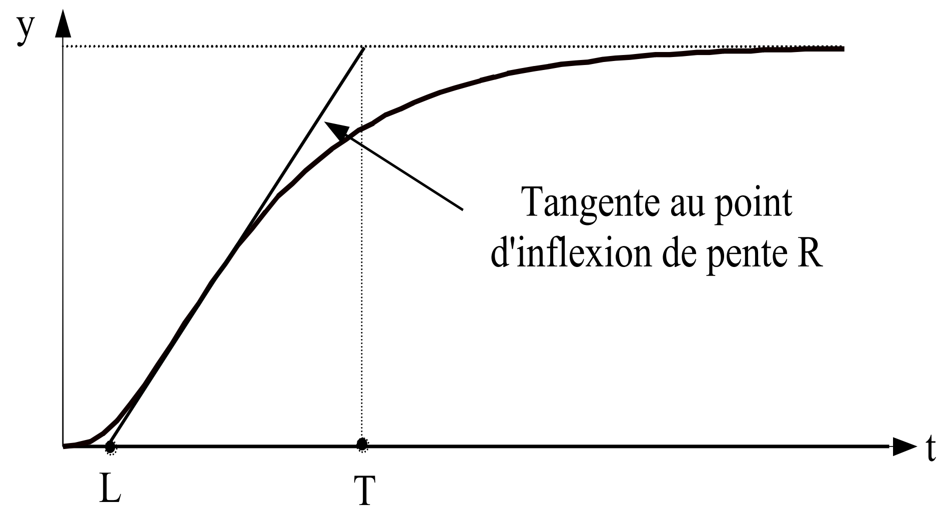
- **Avance de phase, retard de phase, Reseau avance-retard**

Chapitre VII:

METHODES DE SYNTHESE DU P.I.D

VII.1-Méthodes expérimentales: Méthode de Ziegler - Nichols

1-Essai indiciel en boucle ouverte



Cette réponse peut être approximée par, si T est très grand devant L, par:

$$F(p) = \frac{RT}{1+Tp}$$

•Régulateur proportionnel: $C(p) = K$, avec $\boxed{K = \frac{1}{LR}}$

•Régulateur proportionnel-Intégral:

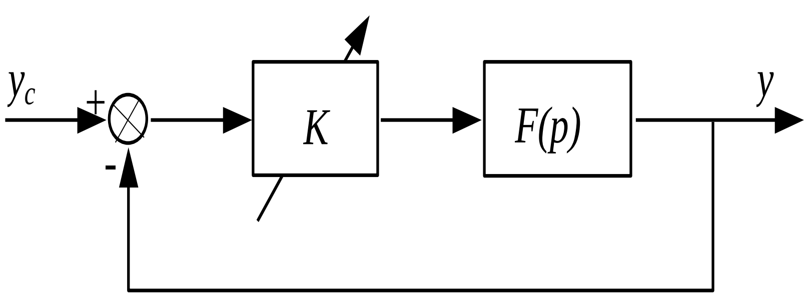
$$C(p) = K\left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) = K_p + \frac{K_i}{p},$$ avec $$\boxed{\begin{cases} K = \frac{0.9}{LR} \\ T_i = 3.3L \end{cases}}$$

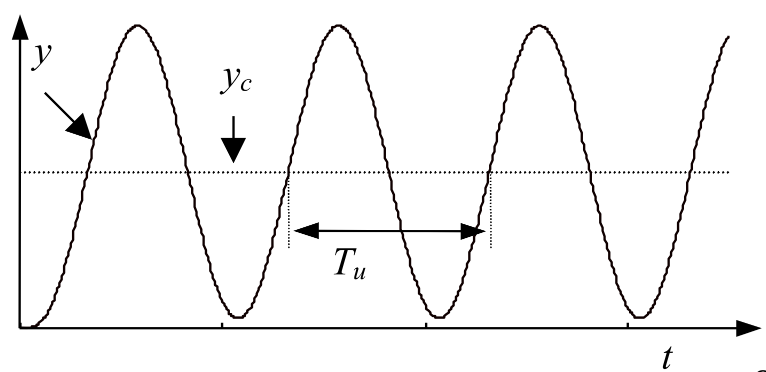
•Régulateur Proportionnel-Intégral-Dérivée:

$$C(p) = K\left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p\right) = K_p + \frac{K_i}{p} + K_d p, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K = \dfrac{1.2}{LR} \\ T_i = 2L \\ T_d = \dfrac{L}{2} \end{cases}$$

2-Essai indiciel en boucle fermée: (essai de pompage)

On utilise, d'abord, un correcteur proportionnel, on règle $K = K_u$ de telle sorte à avoir une réponse indicielle oscillante et non amortie. On prélève la période des oscillations T_u.





•Régulateur proportionnel: $C(p) = K$, avec $K = 0.5K_u$

•Régulateur proportionnel-Intégral:

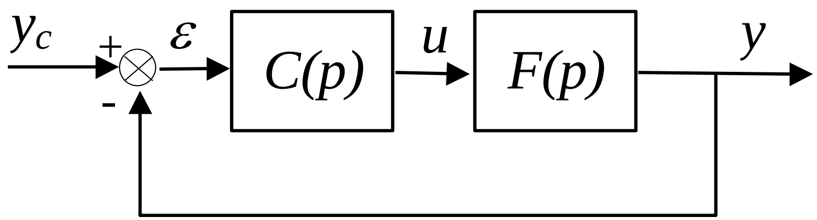
$$C(p) = K\left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) = K_p + \frac{K_i}{p},$$ avec $$\begin{cases} K = 0.45K_u \\ T_i = 0.83T_u \end{cases}$$

•Régulateur proportionnel-Intégral-Dérivée:

$$C(p) = K\left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p\right) = K_p + \frac{K_i}{p} + K_d p,$$ avec $$\begin{cases} K = 0.6K_u \\ T_i = \frac{T_u}{2} \\ T_d = \frac{T_u}{8} \end{cases}$$

Une fois ces valeurs calculées, on peut modifier les paramètres autour de ces valeurs pour une amélioration sur site.

VII.2.-Méthodes du modèle:



Soit *H(p)* la FTBF désirée (modèle désiré en BF). *C(p)* est la FT du régulateur à concevoir et *F(p)* la FT du système à réguler.

$$H(p)=\frac{C(p)F(p)}{1+C(p)F(p)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C(p)=\frac{H(p)}{F(p)(1-H(p))}=\frac{N_c(p)}{D_c(p)}}$$

La réalisabilité de *C(p)* impose que le d° $D_c(p)$ > ou = d°$N_c(p)$.
Il faut aussi nécessairement que les pôles de *C(p)* soient stables soit:

racines de $D_c(p)=F(p)(1-H(p))=0$ à parties réelles négatives

Synthèse du PID pour un système du 1er et du 2nd ordre :

1- Système du 1er ordre:

A- Compensation de pôles

Soit à asservir un système du 1er ordre de la forme : $G(p)=\dfrac{G}{1+\tau p}$

En BF on veut $F(p)=\dfrac{1}{1+T_0 p}$ avec $T_0=\dfrac{\tau}{n}$

Pour cela, l'utilisation d'un PI suffit: $C(p)=K\left(1+\dfrac{1}{T_i p}\right)=K\dfrac{1+T_i p}{T_i p}$

FTBF $\Rightarrow$ $F(p)=\dfrac{C(p)G(p)}{1+C(p)G(p)}=\dfrac{KG(1+T_i p)}{T_i p(1+\tau p)+KG(1+T_i p)}$

en choisissant $T_i=\tau$, on compense le pôle de *G(p)*. Ce qui permet d'obtenir $F(p)=\dfrac{KG}{T_i p+KG}=\dfrac{1}{1+\dfrac{T_i}{KG}p}$ $\Rightarrow$ $\boxed{K=\dfrac{T_i}{T_0 G}=\dfrac{nT_i}{\tau G}}$

Cette technique est appelée "technique de compensation de pôles". Ce qui revient à simplifier un pôle lent (grâce à T_i) et le remplacer par un pôle rapide (grâce à K).

B- Placement de pôles

Cette fois ci, au lieu de compenser un pôle on va placer deux pôles désirées en boucle fermée sans compensation. En effet, comme le système ainsi que le régulateur (le PI) sont du premier ordre, alors le système en boucle fermée est, naturellement, du second ordre.
On fixe, alors, les deux pôles désirées p_1 et p_2, comme on peut fixer le coefficient d'amortissement (ξ) ainsi que la pulsation naturelle (ω_n).
Sachant que les relations qui relient ses différentes constantes sont :

$$p_{1,2} = -\xi\,\omega_n \pm j\,\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

La fonction de transfert en boucle fermée, calculée précédemment, est :

$$F(p) = \frac{C(p)G(p)}{1+C(p)G(p)} = \frac{KG(1+T_i p)}{T_i p(1+\tau p)+KG(1+T_i p)} = \boxed{\frac{\frac{KG}{T_i\,\tau}(1+T_i p)}{p^2+\frac{1+KG}{\tau}p+\frac{KG}{T_i\,\tau}}}$$

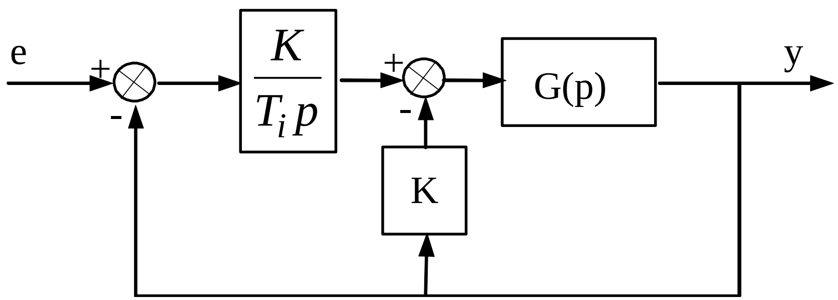
Par identification avec la dynamique d'un système du second ordre ($p^2+2\xi\omega_n p+\omega_n^2$) on obtient :

$$\boxed{\begin{cases} K = \dfrac{2\,\xi\,\omega_n\tau-1}{G} \\[2ex] T_i = \dfrac{2\,\xi\,\omega_n\tau-1}{\omega_n^2\,\tau} \end{cases}}$$

Finalement, la fonction de transfert en boucle fermée est :

$$F(p) = \frac{\omega_n^2 (1 + T_i p)}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$$

On remarque la présence d'un zéro dans la FTBF ce qui pourrait posé un problème, si ce zéro s'avère lent ou instable. Si on est confronté à ce problème, on pourrait remplacer le régulateur PI par le régulateur IP suivant :



Pour les mêmes valeurs de K et de T_i, calculées précédemment, on obtient la fonction de transfert sans zéro suivante :

$$F(p) = \frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$$

2- Système du 2er ordre:

Soit à asservir un système du 2er ordre de la forme :

$$G(p) = \frac{b_0}{1 + a_1 p + a_2 p^2}$$

Les objectifs sont :une erreur statique nulle, une réponse à un échelon ayant un temps de montét t_M et un dépassement D (ou un temps de réponse t_r et un amortissement ξ). Soit une FTBF de la forme:

$$H(p) = \frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$$

Un PID avec l'action dérivée filtrée (pour filtrer les bruits de mesure), permet de satisfaire les conditions du cahier des charges:

$$C(p) = K\left(1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{T_d p}{1+\tau_d p}\right), \ \tau_d = \frac{T_d}{N}, \quad N \gg 1$$

La FTBF est :

$$F(p) = \frac{C(p)G(p)}{1+C(p)G(p)} = \frac{Kb_0\left(1+(T_i+\tau_d)p + T_i(T_d+\tau_d)p^2\right)}{(1+a_1 p + a_2 p^2)T_i p(1+\tau_d p) + Kb_0\left(1+(T_i+\tau_d)p + T_i(T_d+\tau_d)p^2\right)}$$

On choisit T_i, T_d et τ_d de telle sorte que les pôles de *G(p)* soient simplifiés: $T_i + \tau_d = a_1$ et $T_i\,(T_d + \tau_d) = a_2$.On obtient alors :

$$F(p) = \frac{Kb_0}{T_i p(1+\tau_d p) + Kb_0} = \frac{\dfrac{Kb_0}{T_i\tau_d}}{p2 + \dfrac{1}{\tau_d}p + \dfrac{Kb_0}{T_i\tau_d}}$$

En identifiant *H(p)=F(p)*, on obtient:

$$\begin{cases} T_i = a_1 - \dfrac{1}{2\xi\omega_0} \\ T_d = \dfrac{a_2}{T_i} - \dfrac{1}{2\xi\omega_0} \\ \tau_d = \dfrac{1}{2\xi\omega_0} \\ K = \dfrac{\omega_0 T_i}{2\xi b_0} \end{cases}$$

Références :

- M. Rivoire, J.L Ferrier, J. Groleau, « Cours d'automatique : Signaux et systèmes (tome1) », Edition Eyrolles.

- Y. Granjon, « Automatique : systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état », Edition Dunod.

- J.P Caron, J.P Hautier, P.J Barre, « Systèmes automatiques : problèmes corrigés , applications industrielles, tome 3 », ISBN 2-7298-6780-5 , Edition Ellipses.

- E. Godoy et coll., « Régulation industrielle », l'usine nouvelle, ISBN 978-2-10-049739-3, Edition Dunod.