POLYTECH GRENOBLE

Projet AVOSTTI – N° ANR-11-IDFI-0009

Signal and Systems : discrete-time signals

-

Traitement numérique du signal

Xidian University – April 2021

rl@xidian.edu.cn

Plan du cours

I. Rappels de traitement du signal
II. Signaux échantillonnés
III. Signaux numériques et transformée de Fourier Discrète
   1. Signaux numériques et définitions
   2. La Transformation en Z
   3. Transformée de Fourier Discrète et propriétés de la TFD
   4. Influence du fenêtrage temporel
IV. Conversion analogique numérique et bruit de quantification

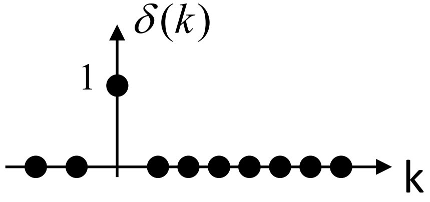
1. Signaux à temps discret

- Echantillonnage à la fréquence F_s de signaux analogiques $x(t)$
- $x(k)$ suite de nombres qui représente les échantillons $x(kT_s)$
- L'amplitude est
  - quantifiée (signaux numériques)
  - ou non (signaux échantillonnés)

Exemples de quelques signaux élémentaires

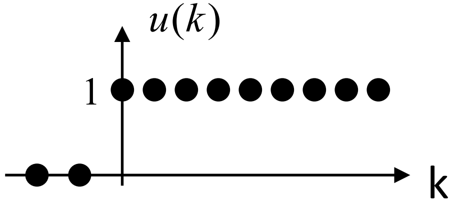
- Impulsion unité

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



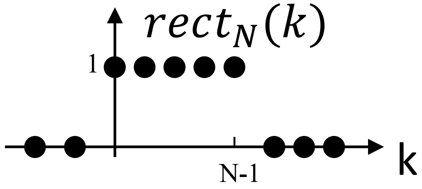
- Echelon unité

$$u(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}$$



- Rectangle

$$rect_N(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



- Signal exponentiel causal

$$s(k) = a^k.u(k)$$

Définitions des opérations discrètes utiles en traitement du signal

- <u>Notation</u> : on notera le signal numérique $x(k)$ ou x_k.
- Les concepts de périodicité, d'énergie et de puissance moyenne des signaux continus sont transposables
  - Energie et puissance moyenne de $x(k)$ (réel ou complexe)

$$E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|^2$$

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{+N} |x_k|^2$$

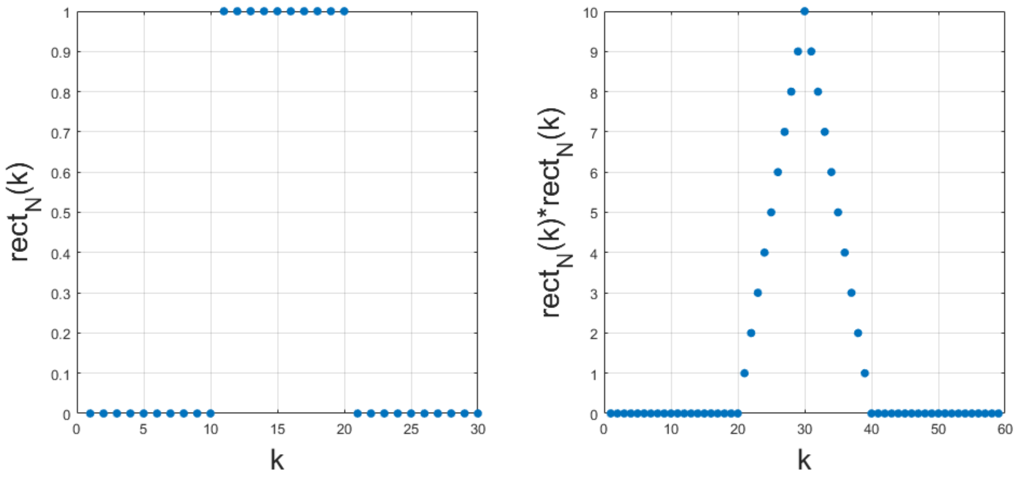
- On peut aussi définir des convolutions et corrélations discrètes

Produit de convolution

- **Définition** :

$$y(n) = x(n) * g(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)g(n-k)$$

- Ce produit est commutatif, associatif et distributif

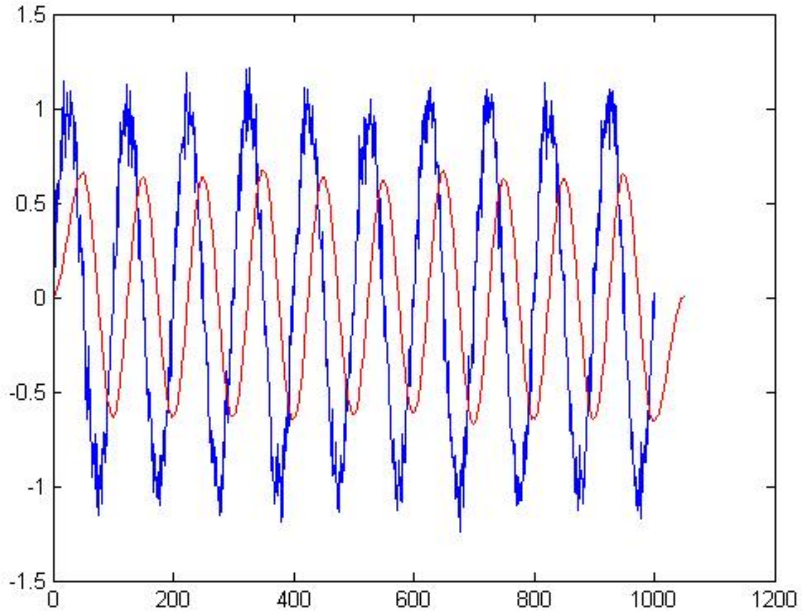


Système de convolution discret (SLIT ou SLID)

- On définit de la même manière un système de convolution discret

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n) = x(n) * h(n)$$

```
t=[1:1000];% temps
x=sin(2*pi*t/100)+0.1*randn(1,1000);
% sinus bruité que l'on va filtrer
figure; plot(x);

N=50;% ordre du filtre
h=1/N*ones(1,N); % opérateur de moyenne mobile
% filtre d'ordre N
y=conv(x,h);
% y sortie du système = signal filtré
% convolution du signal x par la
% réponse impulsionnelle du filtre
hold on; plot(y,'r')
```



Grandeurs d’importances des signaux numériques

	Signaux à énergie finie	**Signaux à puissance finie**
Définition	$E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lvert x_k \rvert^2 < \infty$	$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{+N} \lvert x_k \rvert^2 < \infty$
Intercorrélation $R_{xy}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_{xy}(n)\delta(t-nT_s)$	$R_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_{k+n} y_k$	$R_{xy}(n) = \lim_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{+N} x_{k+n} y_k \right)$
	$\mathcal{F}[R_{xy}] = S_{xy}$	$\mathcal{F}[R_{xy}] = S_{xy}$
Autocorrélation $R_x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_x(n)\delta(t-nT_s)$	$R_x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_{k+n} x_k$	$R_x(n) = \lim_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{+N} x_{k+n} x_k \right)$
	$R_x(0) = E_x$	$R_x(0) = P_x$
	$\mathcal{F}[R_x] = S_x$	$\mathcal{F}[R_x] = S_x$

2. La transformation en Z

- Une fois numérisé, le signal va subir des opérations (filtrage…)
- Ces opérations peuvent êtres décrites par des systèmes de convolution (ou Systèmes Linéaires et Invariants dans le Temps (SLIT))
- Les SLIT peuvent être programmés grâce à une équation aux différences entre l'entrée x_k et la sortie y_k

$$y_k + a_1 y_{k-1} + \cdots + a_{n_a} y_{k-n_a} = b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \ \ldots + b_{n_b} x_{k-n_b}$$

- Comme la TF a été introduite pour décrire les équations différentielles sur le plan fréquentiel, on peut introduire de la même manière la transformée en Z pour les équations aux différences.

La transformation en Z

- On définit la transformée en Z, notée $X(z)$ du signal numérique x_k par la relation suivante:

$$\boxed{TZ[x_k] = X(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k z^{-k}}$$

- z est une variable complexe.
- On rappelle que la transformée de Fourier de $x_e(t)$ est

$$X_e(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s)e^{-j2\pi kT_s f} = X(z = e^{j2\pi f T_s})$$

La transformation en Z

- La transformée en Z possède des propriétés similaires à la TF. Voici les plus importantes:
  - Théorème du retard :
$$TZ[x(k-n)] = z^{-n} \times TZ[x(k)]$$
  - Linéarité :
$$TZ[a.x(k) + b.y(k)] = a.TZ[x(k)] + b.TZ[y(k)]$$
  - Convolution :
$$TZ[x(k) * y(k)] = TZ[x(k)] \times TZ[y(k)]$$

La transformation en Z

- Pour un système de convolution, on a donc:

$$X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow \quad Y(z) = H(z) \times X(z)$$

- On peut facilement relier l'équation de récurrence d'un SLIT à sa TZ:

$$TZ[y_k + a_1 y_{k-1} + \cdots + a_{n_a} y_{k-n_a}] = TZ[b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \ \ldots + b_{n_b} x_{k-n_b}]$$

$$TZ[y_k] + a_1 . TZ[y_{k-1}] + \cdots + a_{n_a} . TZ\left[y_{k-n_a}\right] = b_0 . TZ[x_k] + b_1 . TZ[x_{k-1}\,] + \ \ldots + b_{n_b} . TZ[x_{k-n_b}\,] \qquad \text{(linéarité)}$$

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \cdots + a_{n_a} z^{-n_a} Y(z) = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + \cdots + b_{n_b} z^{-n_b} X(z) \qquad \text{(retard)}$$

$$Y(z)\left(1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n_a} z^{-n_a}\right) = X(z)\left(b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{n_b} z^{-n_b}\right)$$

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{n_b} z^{-n_b}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n_a} z^{-n_a}}}$$

La transformation en Z

- A retenir:

  - Savoir calculer la réponse fréquentielle d'un système de convolution avec $z = e^{j2\pi f T_s}$ (voir la fonction *freqz* de Matlab)

  - Savoir relier TZ et équations aux différences pour pouvoir calculer la sortie d'un système de convolution (voir la fonction *filter* de Matlab)

$$y_k + a_1 y_{k-1} + \cdots + a_{n_a} y_{k-n_a} = b_0 x_k + b_1 x_{k-1} + \ \ldots + b_{n_b} x_{k-n_b}$$

$$\Leftrightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{n_b} z^{-n_b}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_{n_a} z^{-n_a}}$$

3. Transformée de Fourier Discrète

- Les calculateurs n’ont accès qu’à un nombre fini d’échantillons et ne peuvent calculer qu’un nombre fini de valeurs de son spectre.

- En pratique, comment estimer le spectre $X(f)$ d’un signal analogique à partir de son signal échantillonné sur un intervalle de temps borné ?

Transformée de Fourier Discrète

- On définit donc les coefficients $\{X_n\}_{n\in\{0,\ldots,N-1\}}$ comme la Transformée de Fourier Discrète de $\{x_k\}_{k\in\{0,\ldots,N-1\}}$
- Transformée de Fourier discrète:

$$\boxed{X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2\pi j\frac{kn}{N}}}$$

- Transformation inverse:

$$x_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_n e^{2\pi j\frac{kn}{N}}$$

Transformée de Fourier Discrète

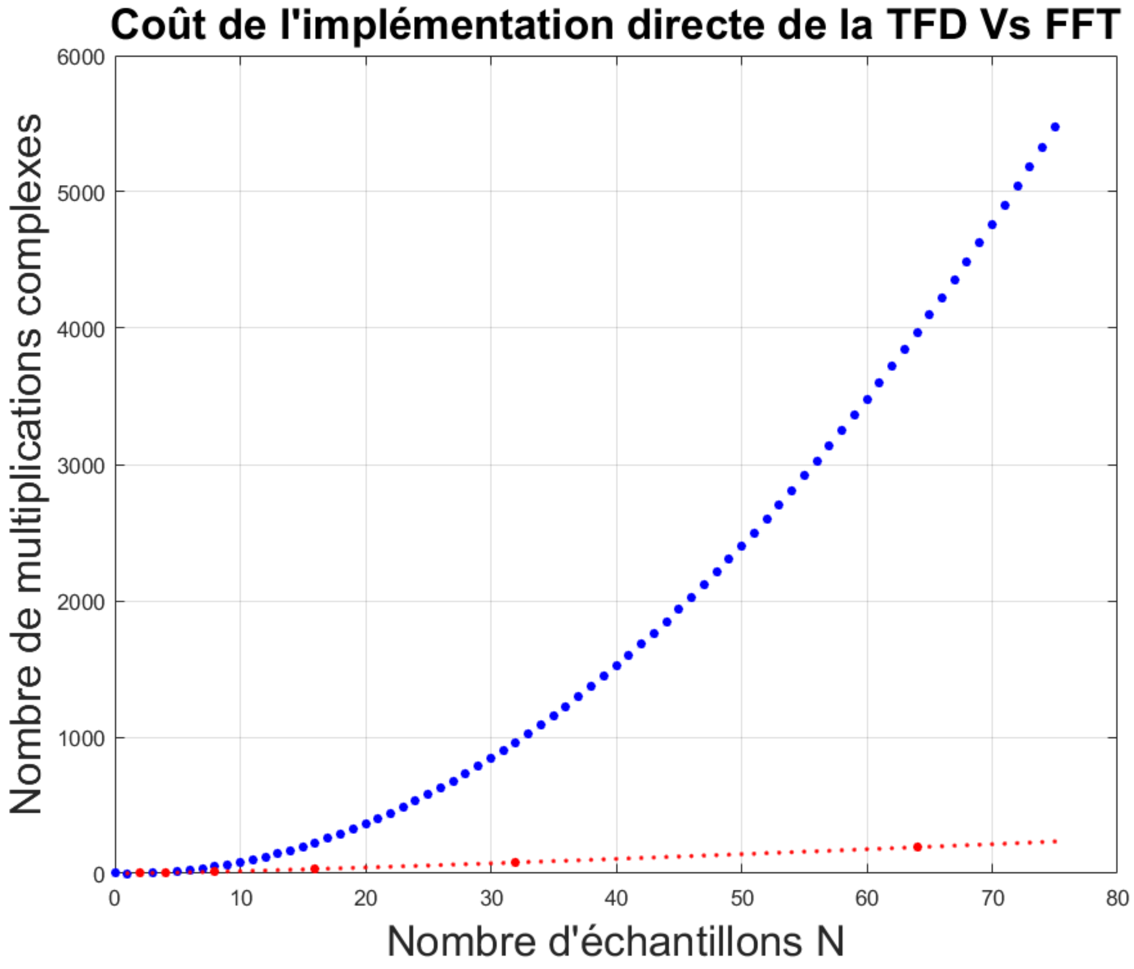
- Combien d'opérations arithmétiques doit effectuer un calculateur pour obtenir les N valeurs de X_n ?

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2\pi j \frac{kn}{N}}$$

Support	GSM	CD audio
Fréquence en Hz	8000	44100
Nb d'échantillons en 1 min	$\approx$ ½ million	$>$ 2,5 millions
$\sim N^2$ multiplications	$\approx$ 230 milliards	$>$ 7 billiards (7.10^{15})

Transformée de Fourier Discrète

- Il existe un algorithme plus efficace pour calculer la TFD **si N est une puissance de 2** ($N = 2^M$).
- Cet algorithme s'appelle la FFT (*Fast Fourier Transform*)
- Au lieu de N^2 multiplications, il en faut $\frac{N}{2}\log_2(N)$.



Transformée de Fourier Discrète

- Il existe un algorithme plus efficace pour calculer la TFD si N est une puissance de 2 ($N = 2^M$).
- Cet algorithme s'appelle la FFT (*Fast Fourier Transform*)
- Au lieu de N^2 multiplications, il en faut $\frac{N}{2}\log_2(N)$.

Support	GSM	CD audio
Fréquence en Hz	8000	44100
Nb d'échantillons en 1 min	$\approx$ ½ million	$>$ 2,5 millions
$\sim N^2$multiplications	$\approx$ 230 milliards	$>$ 7 billiards (7.10^{15})
$\frac{N}{2}\log_2(N)$ multiplications	< 4,6 millions	< 29 millions

Transformée de Fourier Discrète

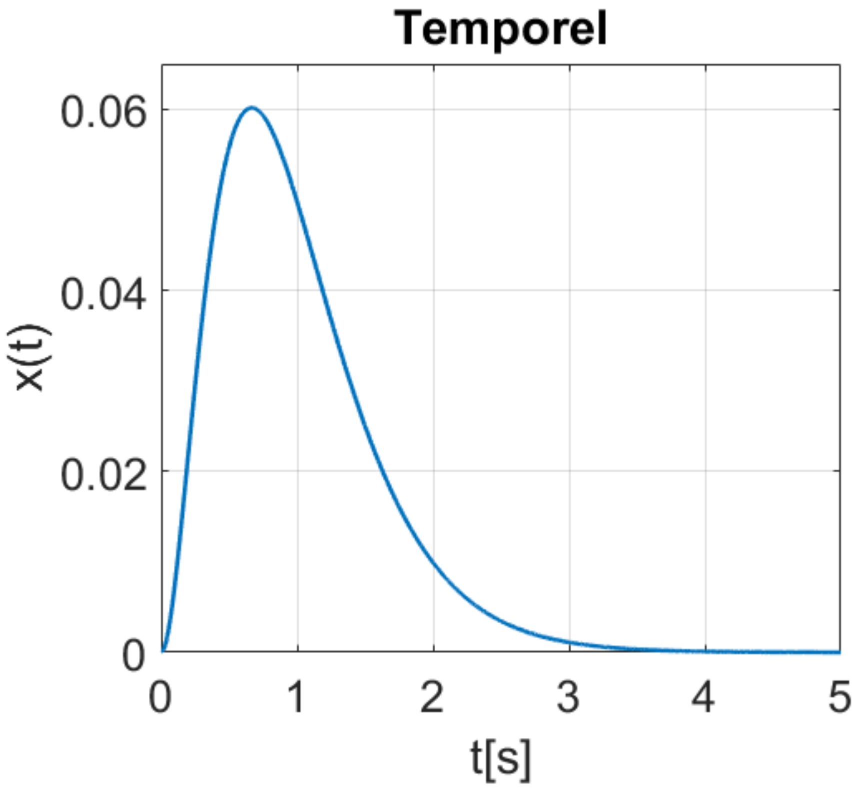
- Dans Matlab, on trouve la fonction FFT :

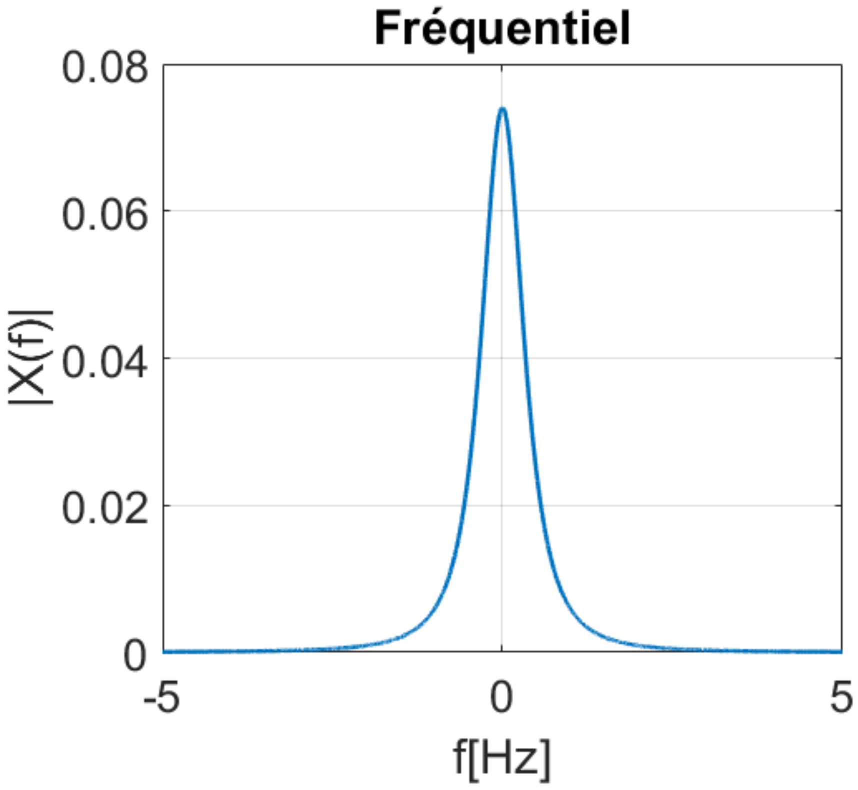
```
>> help fft
 fft Discrete Fourier transform.
    fft(X) is the discrete Fourier transform (DFT) of vector X.  For
    matrices, the fft operation is applied to each column. For N-D
    arrays, the fft operation operates on the first non-singleton
    dimension.

    For length N input vector x, the DFT is a length N vector X,
    with elements
                     N
       X(k) =       sum  x(n)*exp(-j*2*pi*(k-1)*(n-1)/N), 1 <= k <= N.
                    n=1
    The inverse DFT (computed by IFFT) is given by
                     N
       x(n) = (1/N) sum  X(k)*exp( j*2*pi*(k-1)*(n-1)/N), 1 <= n <= N.
                    k=1
```

Transformée de Fourier Discrète

- Les échantillons X_n correspondent à N points de X_e sur la période $[0, F_s]$
- Sur$[0, \frac{F_s}{2}]$, on a donc $X\left(f = \frac{n}{NT_s}\right) = T_s X_e\left(f = \frac{n}{NT_s}\right) = T_s X_n$
- Les points du spectre de $X(f)$ sont calculés avec un pas de $\frac{1}{NT_s} = \frac{1}{T_a}$
- La largeur de l'intervalle fréquentiel de calcul est $F_s = \frac{1}{T_s}$
- N échantillons temporels $x_k \rightarrow N$ points du spectre X

Transformée de Fourier Discrète: exemple





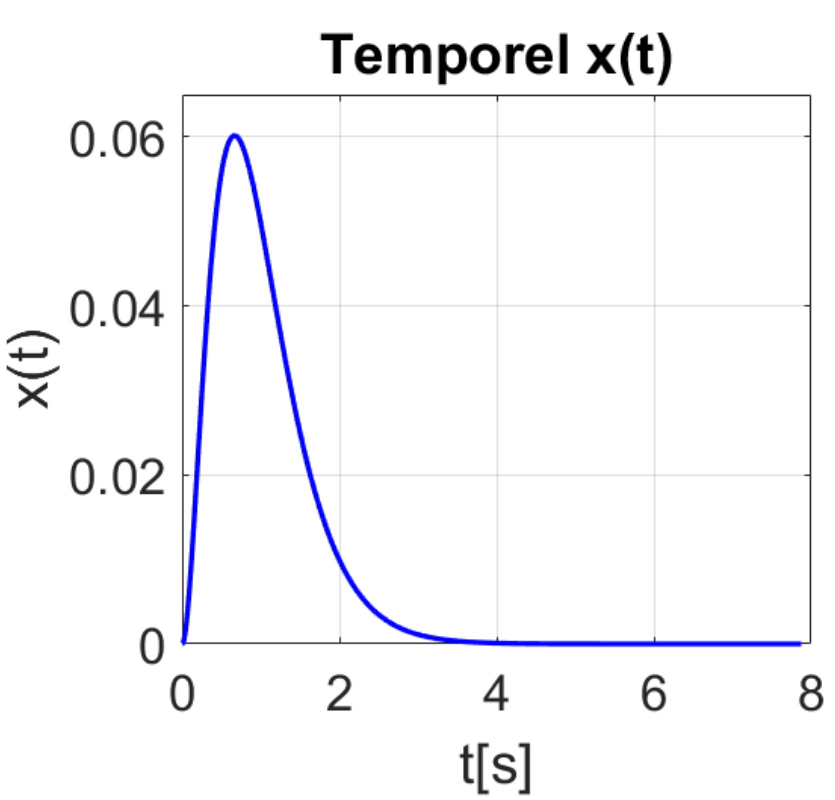
$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = t^2 e^{-3t} \epsilon(t)$

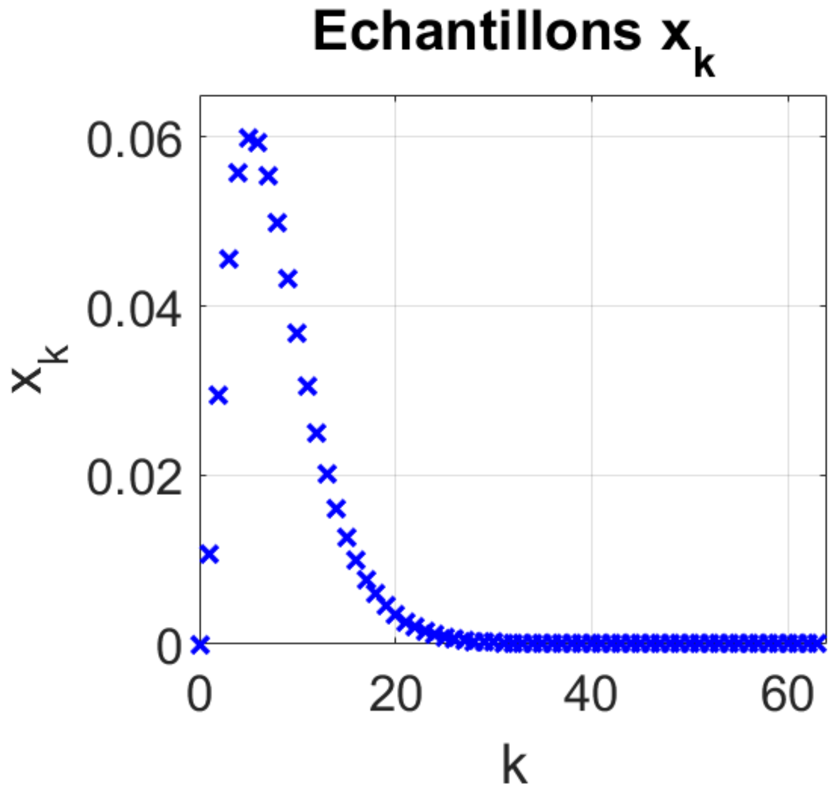
$\forall f \in \mathbb{R}, \qquad X(f) = \dfrac{2}{(j2\pi f + 3)^3}$

Le théorème de Shannon s'applique: $|X(f = 4Hz)| = 1{,}2334 \times 10^{-4} \approx 0$

Transformée de Fourier Discrète: exemple

- Echantillonnage de $x(t)$

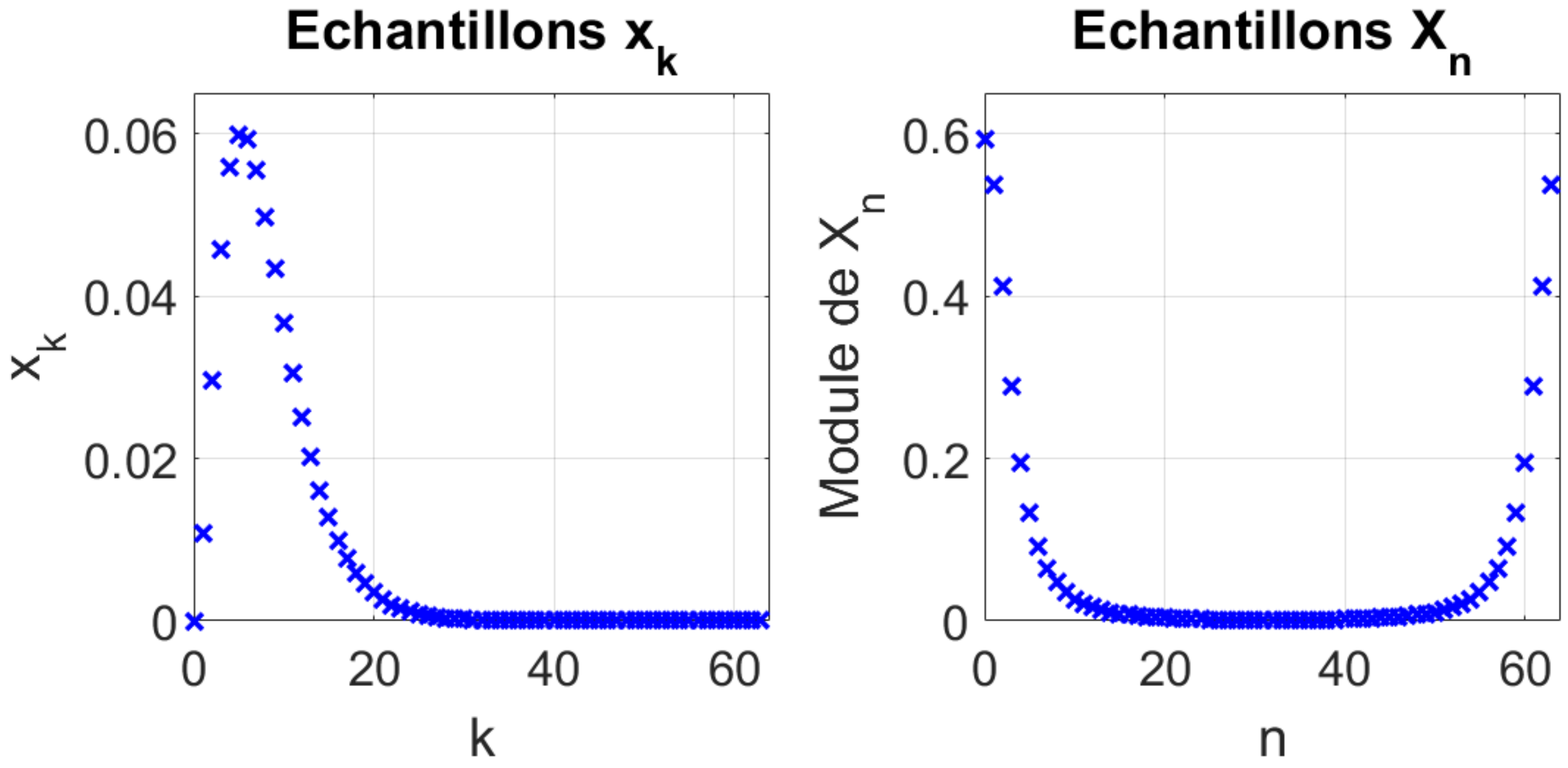




$$T_a = 8s,\, T_s = \frac{1}{8}s \Longrightarrow N = \frac{T_a}{T_s} = 2^6 = 64$$

Transformée de Fourier Discrète: exemple

- Calcul de $\{X_n\}_{n\in\{0,..,N-1\}}$ par la fonction fft de Matlab (TFD)



NB: $0 \leftrightarrow 0$ Hz

$63 \leftrightarrow F_s - \frac{F_s}{N}$

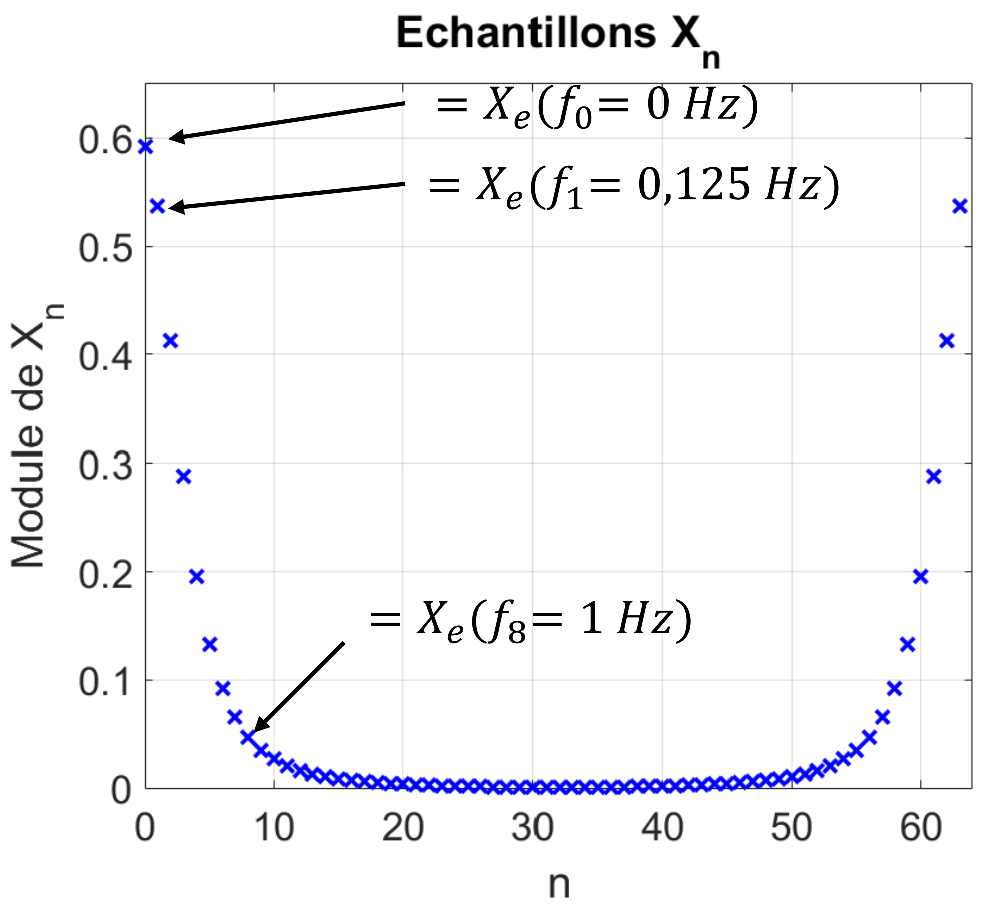
$n \leftrightarrow n\frac{F_s}{N}$

Transformée de Fourier Discrète: exemple

- Une précision : à quelle fréquence correspond chaque X_n ?
  - Rappel : $X_n = X_e(f_n)$ et $f_n = \frac{n}{NT_s} = n\frac{F_s}{N}$
  - $X_0 = X_e(f_0) = X_e(0)$
  - $X_1 = X_e(f_1) = X_e\left(\frac{1}{NT_s}\right)$
  - $X_2 = X_e(f_2) = X_e\left(\frac{2}{NT_s}\right)$
  - …
  - $X_n = X_e(f_n) = X_e\left(\frac{n}{NT_s}\right)$
  - …
  - $X_{N-2} = X(f_{N-2}) = X_e\left(\frac{N-2}{NT_s}\right) = X_e\left(F_s - \frac{2}{NT_s}\right)$
  - $X_{N-1} = X(f_{N-1}) = X_e\left(\frac{N-1}{NT_s}\right) = X_e\left(F_s - \frac{1}{NT_s}\right)$
  - $X_N = ?$

Transformée de Fourier Discrète: exemple

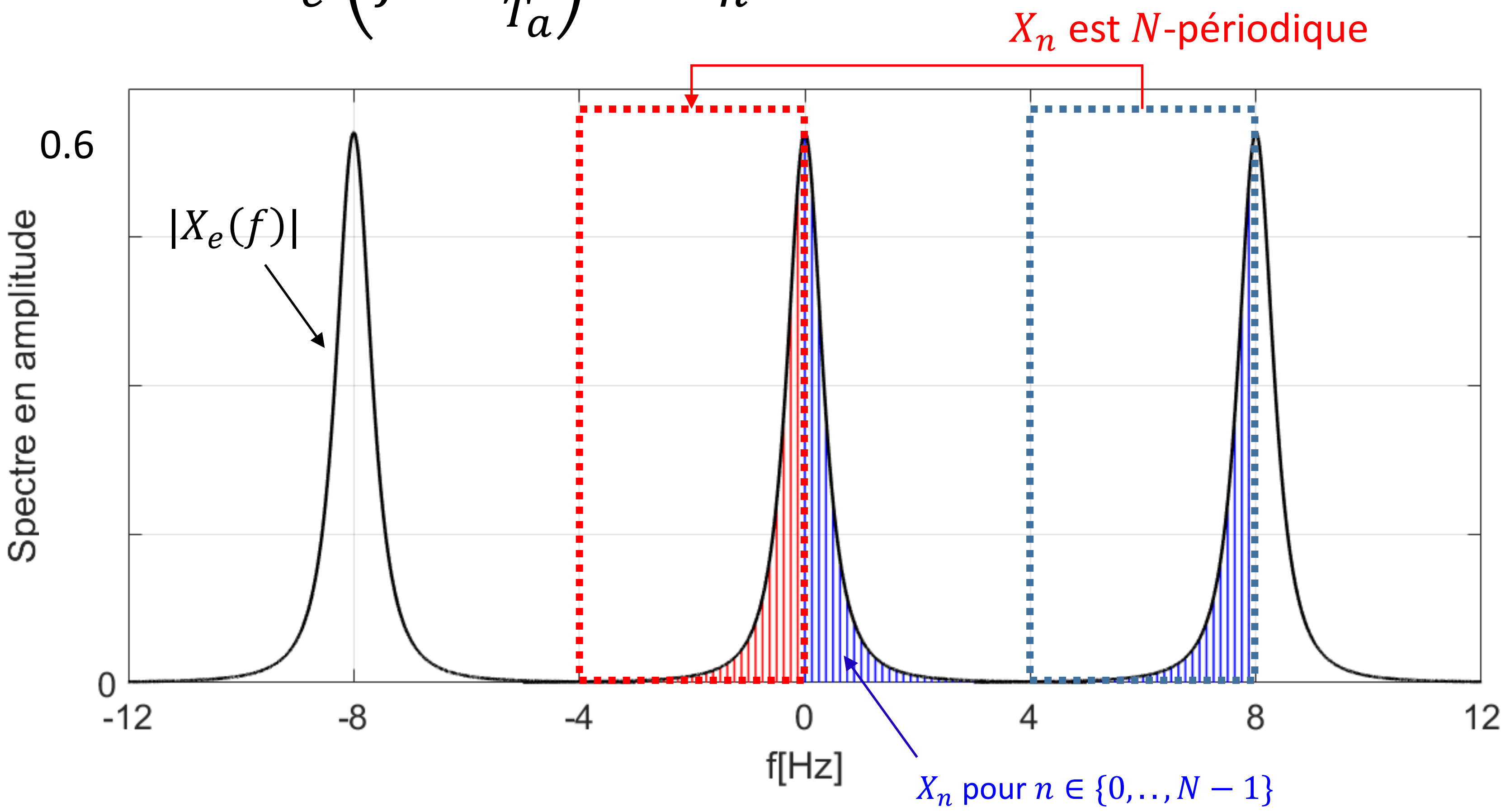
- Calcul de $\{X_n\}_{n\in\{0,..,N-1\}}$ par la fonction fft de Matlab (TFD)



$$f_n = \frac{n}{NT_s} = \frac{n}{64 \times \frac{1}{8}} = \frac{n}{8}$$

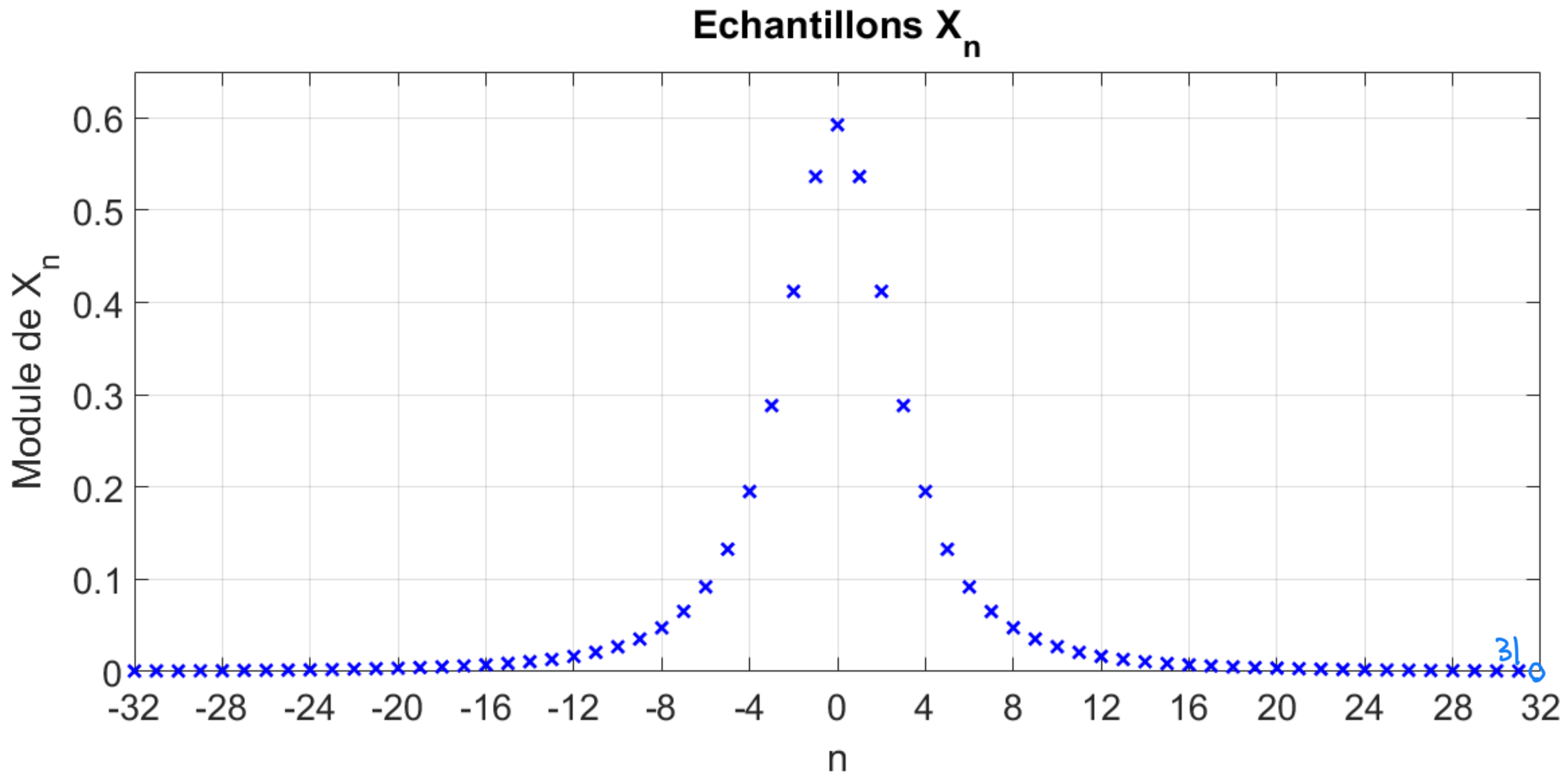
Transformée de Fourier Discrète: exemple

- Estimation de $X_e\left(f = \frac{n}{Ta}\right) = X_n$



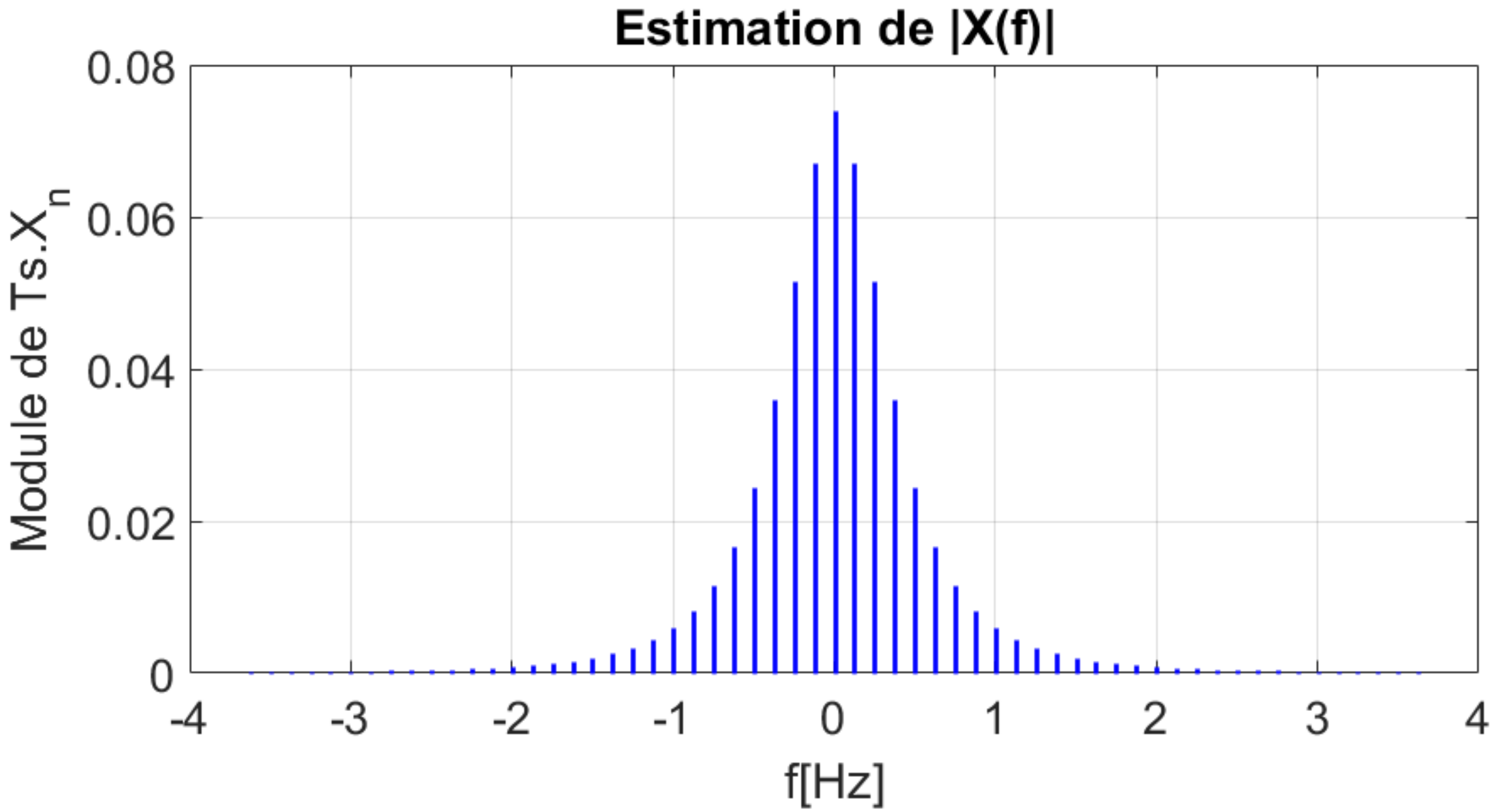
Transformée de Fourier Discrète: exemple

- Passage à $\{X_n\}_{n\in\left\{-\frac{N}{2},\ldots,\frac{N}{2}-1\right\}}$ par la fonction $fftshift$ de Matlab (TFD)



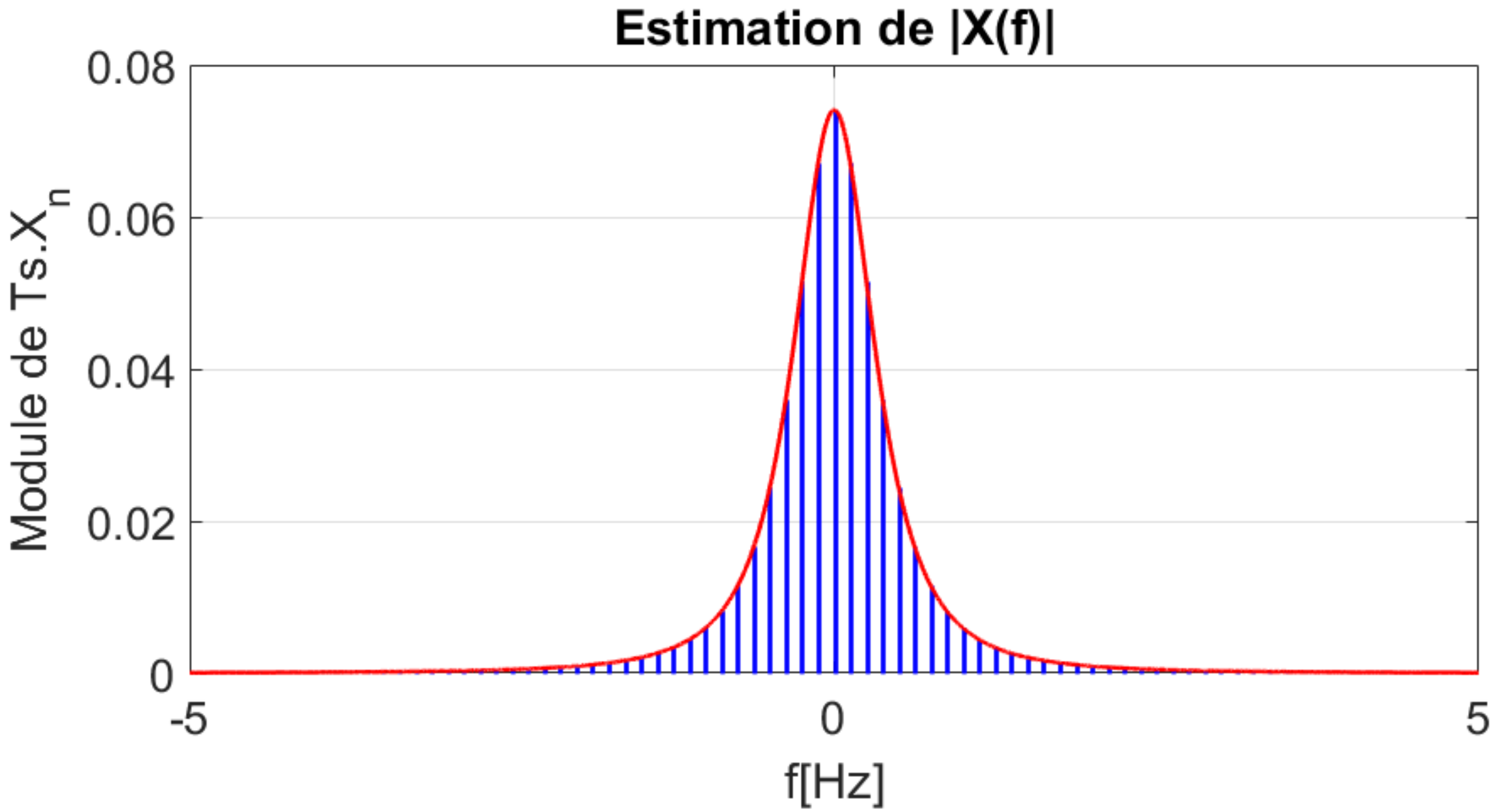
Transformée de Fourier Discrète: exemple

- Estimation de $X\left(f = \frac{n}{T_a}\right) = T_s X_n$

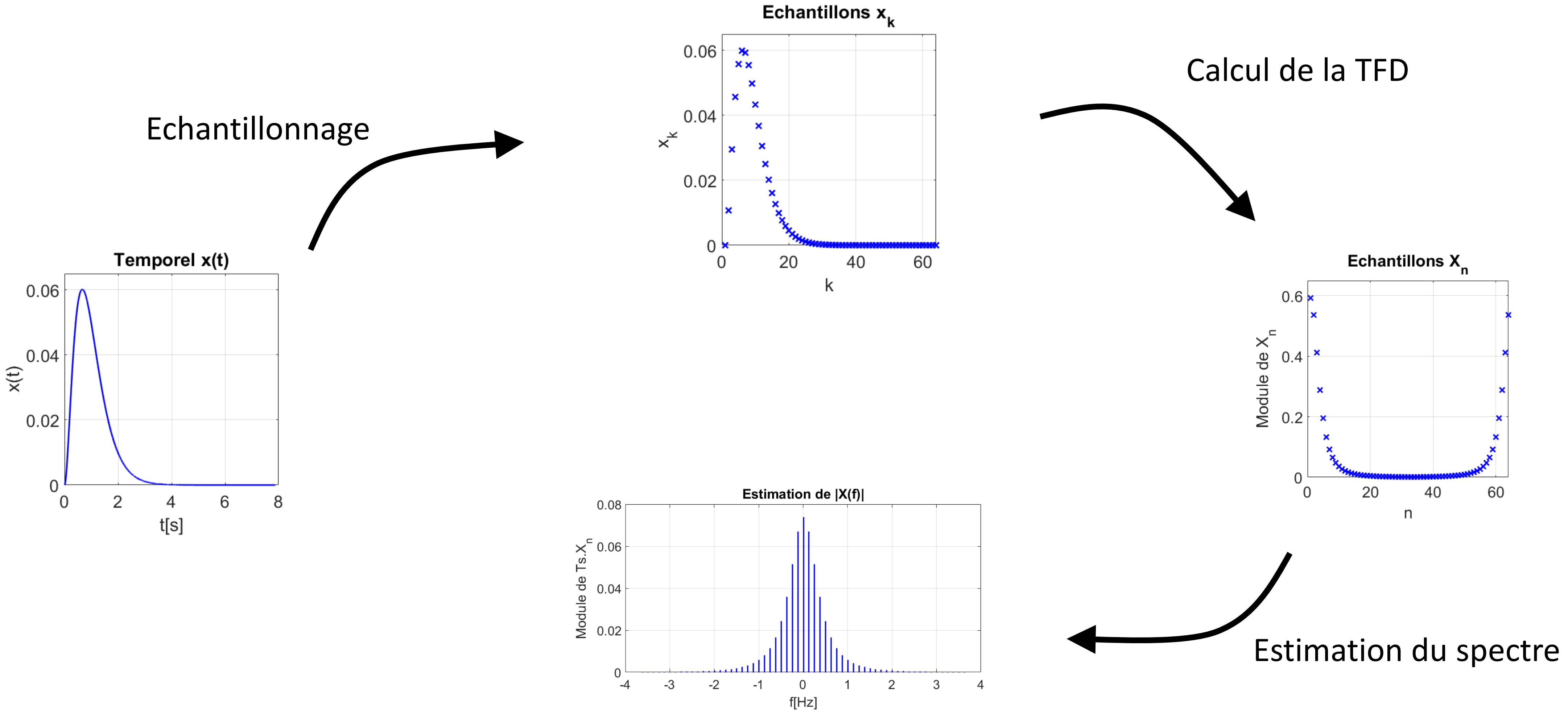


Transformée de Fourier Discrète: exemple

- Estimation de $X\left(f = \frac{n}{T_a}\right) = T_s X_n$



Utilisation de la TFD



Propriétés de la TFD

- La TFD possède les propriétés classiques de la TF (mais les calculs se font modulo N)

- Périodicité : X_n est périodique de période N

$t_0 \rightarrow n_0 T_s \quad f \rightarrow n\frac{F_s}{N}$

$ft = \frac{n}{N} n_0$

- Linéarité : $$a.x_k + b.\mathrm{y_k} \Leftrightarrow a.X_n + b.Y_n$$

- Décalage temporel : $$y_k = x_{k-n_0} \Leftrightarrow Y_n = X_n.e^{-j2\pi\frac{n}{N}n_0}$$

- Décalage fréquentiel : $$y_k = x_k.e^{j2\pi\frac{k}{N}n_0} \Leftrightarrow Y_n = X_{n-n_0}$$

  ou modulation

Propriétés de la TFD

- Relation de Parseval

  Conservation de l'énergie

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left| x_k \right|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |X_n|^2$$

- Produit de convolution circulaire 循环卷积

$$x_1(k) * x_2(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x_1(i).x_2(k-i) \Leftrightarrow X_1(n).X_2(n)$$

$$x_1(k).x_2(k) \Leftrightarrow \frac{1}{N} X_1(n) * X_2(n)$$

Résumé : TFD d'un signal acquis sur N points

- TF à temps continu d'un signal

$$X(f) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

  - En remplaçant *t* par nT_s (T_s: période d'échantillonnage) et en remplaçant l'intégrale par une somme :

- TF d'un signal échantillonné

$$X_e(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T_s}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s)e^{-j2\pi kT_s f}$$

  - Dans le cas d'un calculateur, l'acquisition et le calcul ne peuvent se faire avec un nombre infini d'échantillons. La variable *f* devient une variable discrète $\frac{n}{NT_s}$ $f \to \frac{n}{NT_s}$

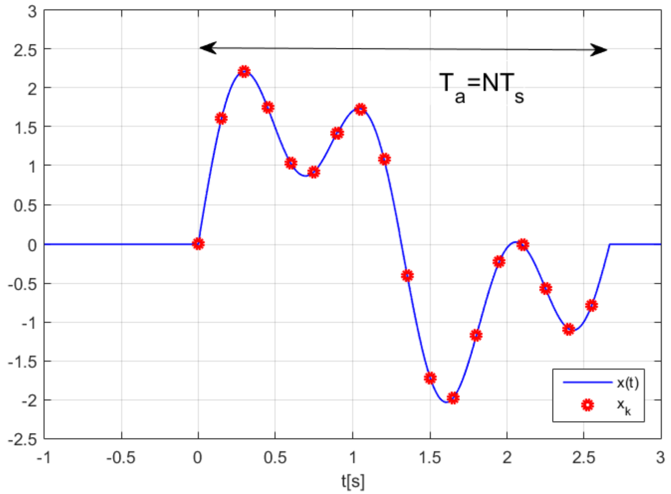
- TFD d'un signal numérique

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2\pi j\frac{kn}{N}}$$

4. Fenêtrage temporel

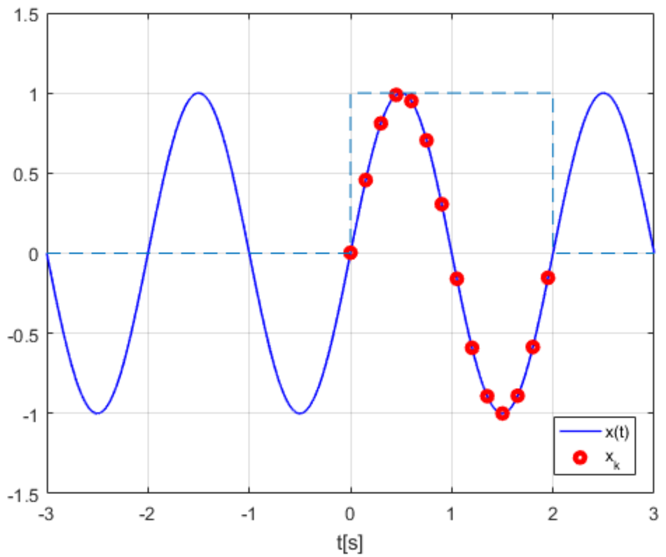
- Nous avons vu que le fait de travailler avec des signaux numériques impliquait un nombre N fini d'échantillons x_k.

  - Si le signal est à durée limitée, alors on peut analyser toute l'information contenue dans ce signal à condition d'avoir une durée d'acquisition T_a suffisamment grande.



Fenêtrage temporel

- Nous avons vu que le fait de travailler avec des signaux numériques impliquait un nombre N fini d'échantillons x_k.
  - En cas de ***durée illimitée***, la TFD ne s'applique que sur le signal ***tronqué***.
    - Pour tronquer le signal, on le regarde à travers une fenêtre (produit du signal par une fenêtre temporelle)



- Quel est l'effet de cette troncature sur le spectre du signal qu'on va calculer ?

Troncature du signal discret

- Fenêtrage temporel sur une durée T_a

$$x_{T_a}(t) = x(t) \times rect\left(\frac{t}{T_a}\right) \overset{TF}{\Rightarrow} X_{T_a}(f) = X(f) * T_a sinc(T_a f)$$

- Influence dans le domaine fréquentiel
    - Le fenêtrage temporel entraîne une **convolution** des spectres du signal de départ et de la fenêtre.

Troncature du signal discret

- Exemple sur un signal x sinusoïdal:

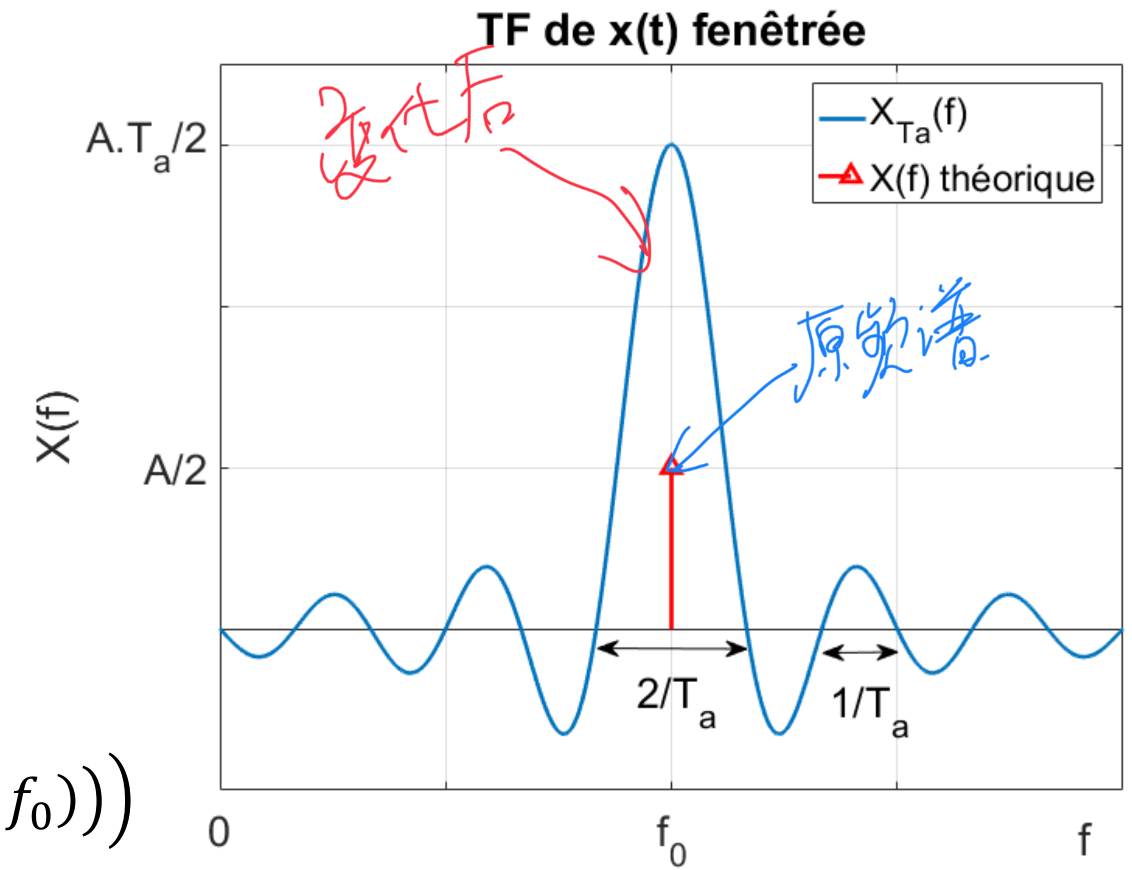
$$x(t) = A.\cos(2\pi f_0 t)$$

①展宽
②副瓣 (波纹)

$$X(f) = A.\frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}$$

$$X_{T_a}(f) = A.\frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2} * T_a sinc(T_a f)$$

$$X_{T_a}(f) = \frac{A.T_a}{2}\left(sinc\big(T_a(f - f_0)\big) + sinc\big(T_a(f + f_0)\big)\right)$$



La convolution fréquentielle de $X(f)$ par $\mathcal{F}\left(rect\left(\frac{t}{T_a}\right)\right)$ aura pour conséquence l'apparition d'ondulations dans le spectre $X_{T_a}(f)$ et donc dans $X_{T_a}(n)$: c'est le problème de résolution

Fenêtres de pondération

要求：起伏较弱的窗代替矩形窗

- **Objectif** : Amélioration de l’analyse spectrale par pondération des échantillons

- **Réalisation** : Remplacement de la fenêtre rectangulaire par une fenêtre dont la TF présente des ondulations plus faibles

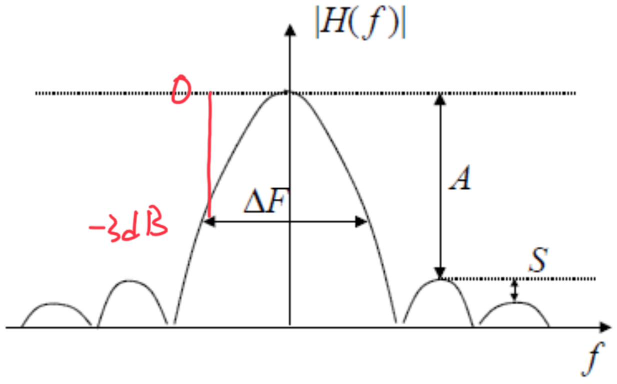
  - Chaque type de fenêtre a une réponse en fréquence particulière qui permet de choisir au mieux la « bonne » fenêtre en fonction des applications

  - En général, les résolutions sont d’autant meilleures que le lobe principal est étroit et les lobes secondaires sont de faibles amplitudes

Fenêtres de pondération

- Pour diminuer l'influence de cette fenêtre de pondération, on peut la modifier et essayer de trouver des fenêtres plus adaptées.

  - **Critères de sélection**
    - Rapport A entre les max du lobe central et lobes secondaires de la TFD des fenêtres
    - Atténuation S des lobes secondaires de la TFD des fenêtres
    - Largeur du lobe central ΔF



① 主瓣/第一副瓣 比值大 A/S ↑

- En général, résolutions d'autant meilleures que lobe principal étroit et lobes secondaires de faibles amplitudes
- Mais : diminution de la largeur du lobe principal → augmentation de l'amplitude des lobes secondaires

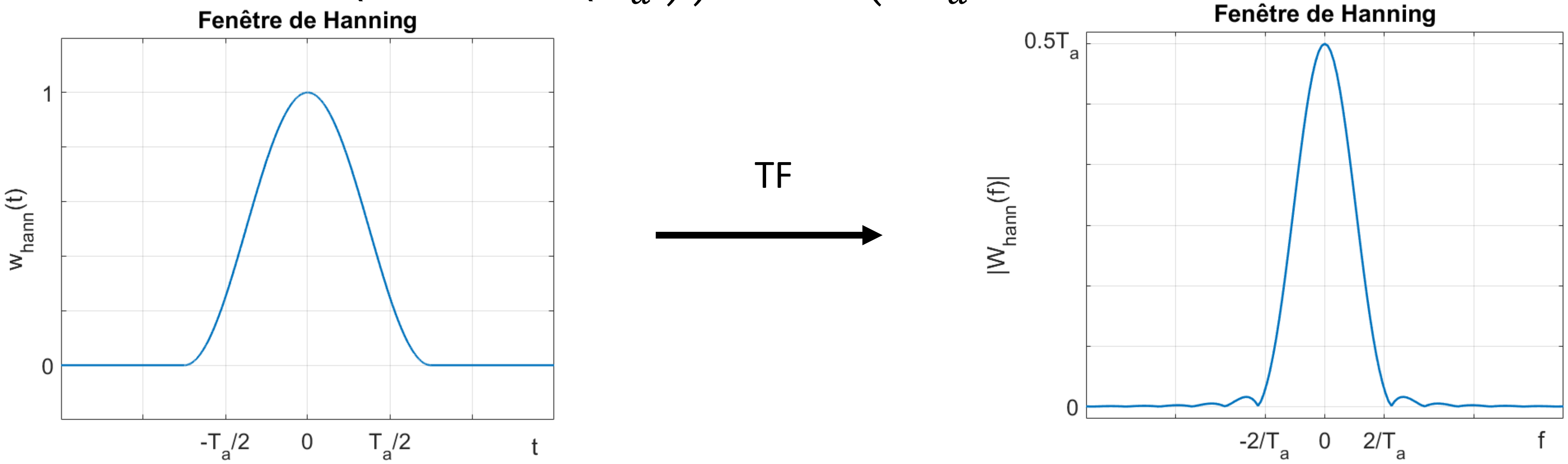
② 副瓣衰减快

- Donc : Compromis à trouver

③ 主瓣宽度要小. ΔF↓

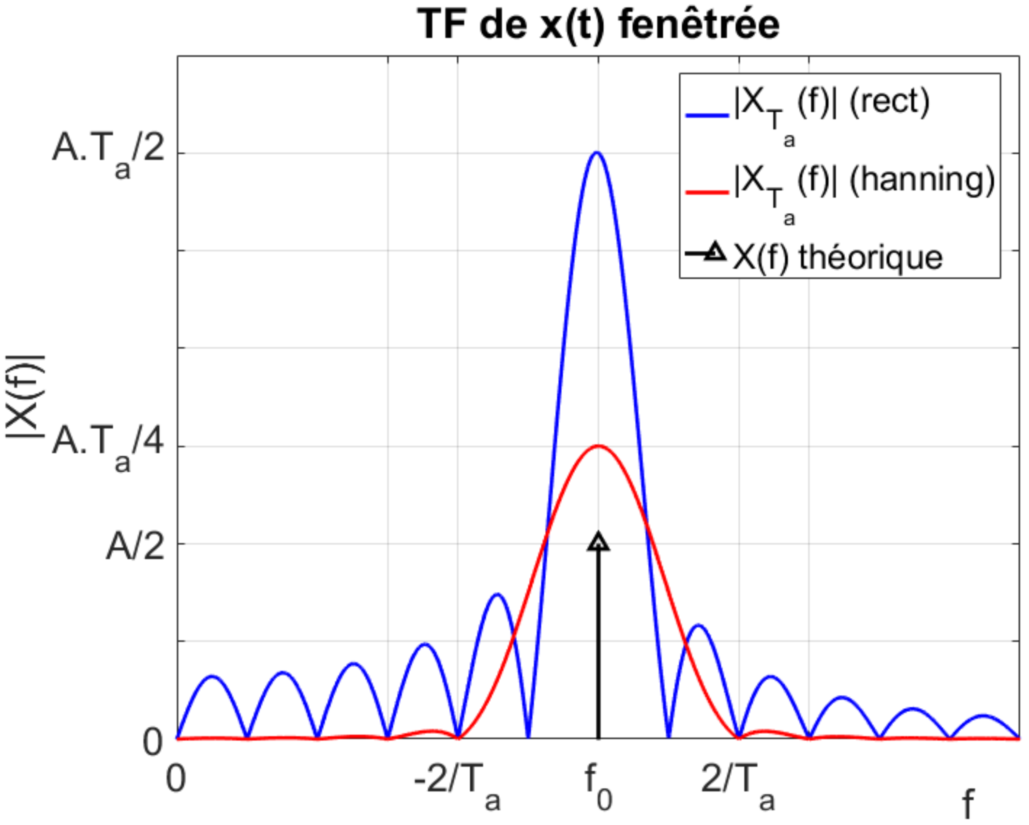
Fenêtres de pondération

- Pour diminuer l'influence de cette fenêtre de pondération, on peut la modifier et essayer de trouver des fenêtres plus adaptées.
    - Parmi les fenêtres existantes, on trouve la fenêtre de Hanning:
    - $w_{hann}(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi t}{T_a}\right)\right).rect\left(\frac{t - T_a/2}{T_a}\right)$

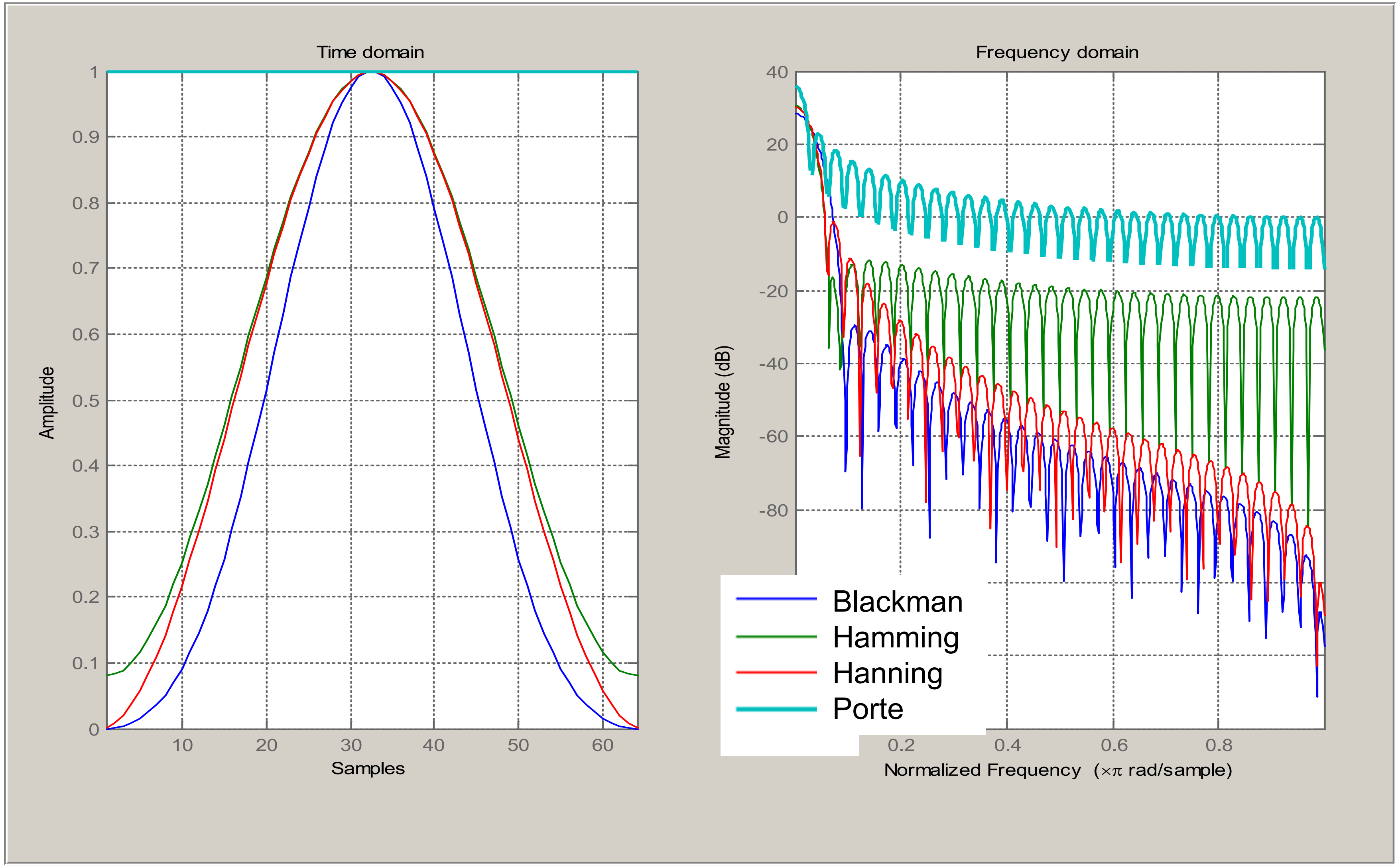


Fenêtres de pondération

- Pour $x(t) = A.\sin(2\pi f_0 t) \times w_{hann}(t)$:

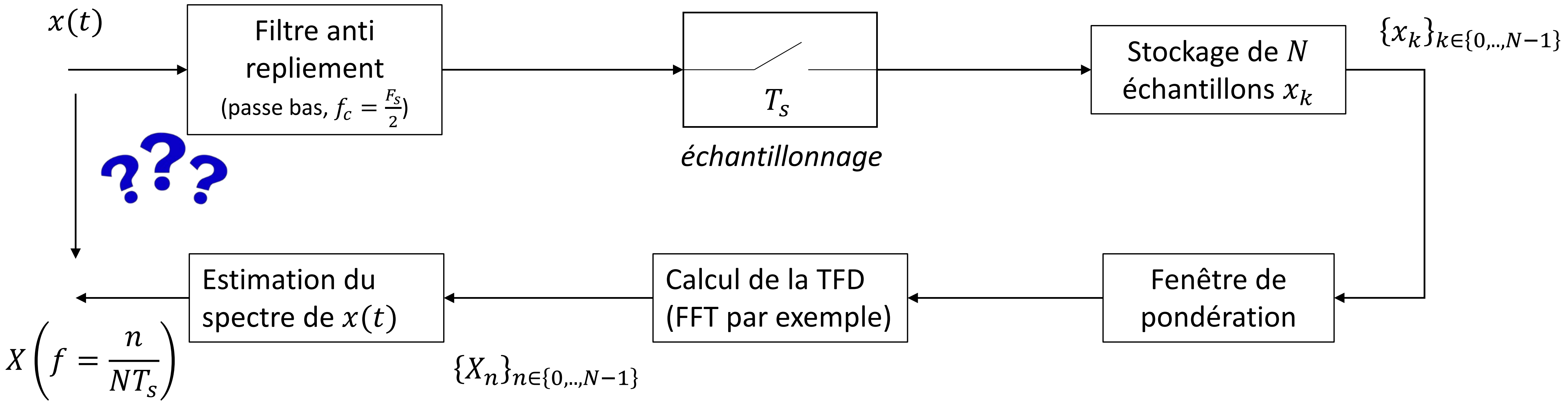


Allure temporelle et fréquentielle de quelques fenêtres



Transformée de Fourier Discrète

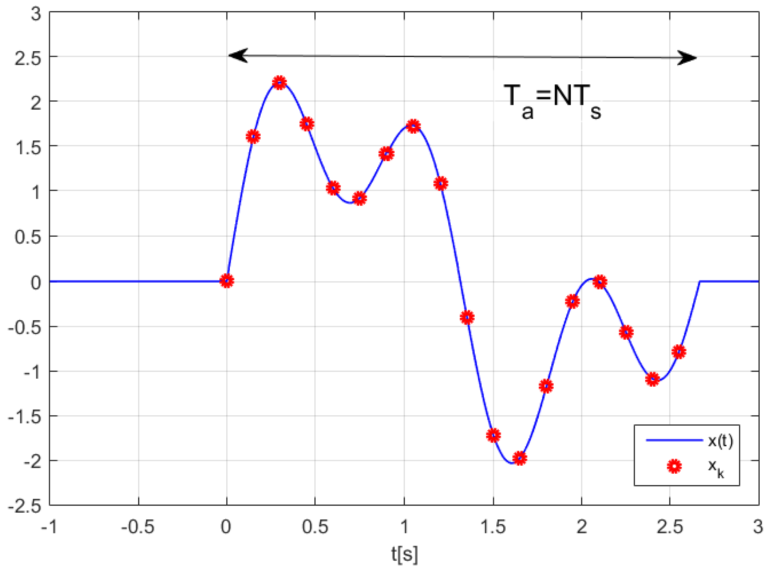
- Bilan sur le calcul numérique de la TF d'un signal analogique:



Annexe : Pour aller plus loin …

Transformée de Fourier Discrète

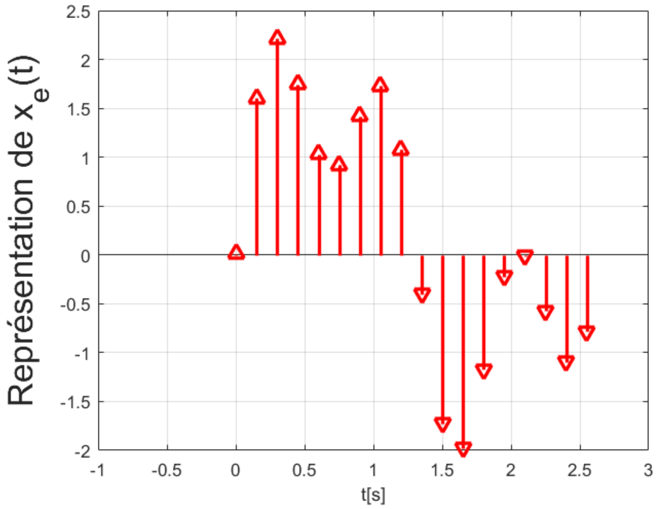
- Exemple : signal continu x, tel que $\forall t \in \mathbb{R} \setminus [0, T_a], x(t) \approx 0$.
- Mesuré sur $[0, T_a]$, échantillonné avec une période d'échantillonnage T_s telle que $T_a = NT_s$



Transformée de Fourier Discrète

- Pour un signal $x(t)$ échantillonné sur une durée T_a telle que $T_a = NT_s$:

$$x_e(t) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_s)\delta(t - kT_s) \Rightarrow X_e(f) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_s)e^{-2\pi jkT_sf}$$



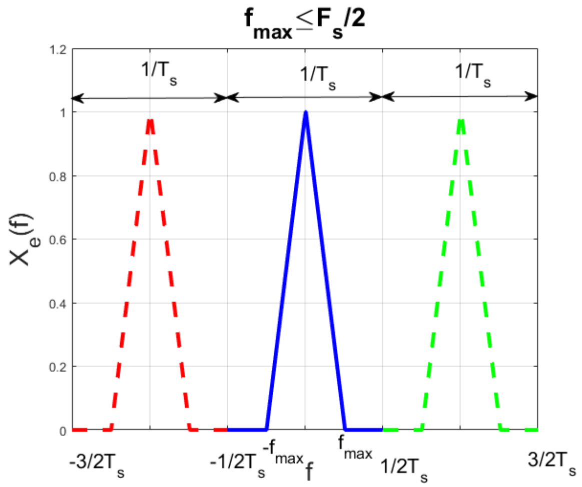
Transformée de Fourier Discrète

- On peut donc en conclure :

$$X_e(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T_s}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_s) e^{-2\pi jkT_s f}$$

- On sait calculer $X_e(f)$
- De plus, s'il n'y a pas de repliement de spectre :

$$\forall f \in \left[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2}\right], X_e(f) = \frac{1}{T_s} X(f)$$



Transformée de Fourier Discrète

- On peut alors calculer le spectre du signal x qui nous intéresse sur $\left[-\frac{F_s}{2},\frac{F_s}{2}\right]$:

$$\forall f \in \left[-\frac{F_s}{2},\frac{F_s}{2}\right], X(f) = T_s \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_s)e^{-2\pi jkT_s f}$$

$$\boxed{\forall f \in \left[-\frac{F_s}{2},\frac{F_s}{2}\right], X(f) = T_s \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2\pi jkT_s f}}$$

Transformée de Fourier Discrète

- **Comment choisir le pas d'échantillonnage fréquentiel Δf?**
  - L'échantillonnage de $x(t)$ se fait à une fréquence F_s sur une durée de $\mathrm{NT_s} = N/F_s$.
  - La plus petite fréquence mesurable (correspondant à la plus grande période mesurable sur le signal acquis) est donc $\Delta F_{min} = \frac{F_s}{N} = \frac{1}{NT_s}$.
  - Il est logique de choisir un pas fréquentiel $\Delta F = \frac{1}{NT_s}$.
  - <u>Finalement, les nombres d'échantillons temporels et fréquentiels calculés sont choisis identiques (Il y en a N)</u>

$$\forall f \in \left[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2}\right], X(f) = T_s \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2\pi j k T_s f}$$

Transformée de Fourier Discrète

$$\forall f \in \left[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2}\right], X(f) = T_s \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2\pi j k T_s f}$$

不含 $\frac{F_s}{2}$

- Calcul de N valeurs de f équidistantes dans l'intervalle $\left[-\frac{F_s}{2}, \frac{F_s}{2} \boxed{[}\right.$:

$$f = \frac{n}{NT_s} = \frac{n}{N} F_s = \frac{n}{T_a}, avec\ n \in \left\{-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1\right\}$$

- Calcul des valeurs de $X(f)$ nous intéressant :

$$\forall n \in \left\{-\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1\right\}, X\left(f = \frac{n}{\mathrm{NT_s}}\right) = \underbrace{\mathrm{T_s} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2\pi j \frac{kn}{N}}}_{X_n}$$

Transformée de Fourier Discrète

- Le calcul de $X(f)$ se résume donc au calcul de N valeurs de X_n pour n allant de $-\frac{N}{2}$ à $\frac{N}{2}-1$
- Remarque:

$$X_{n+N} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2\pi j \frac{k(n+N)}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2\pi j \frac{kn}{N}} = X_n$$

- X_e est F_s-périodique et X_n est N-périodique
- Le calcul de $X(f)$ est donc équivalent au calcul de N valeurs de X_n pour n allant de 0 à $N-1$, correspondants à des fréquences allant de 0 à $F_s - \frac{1}{T_a}$.

Transformée de Fourier Discrète

- Pour résumer:

$$\begin{cases} \forall n \in \left\{-\frac{N}{2}, \dots, -1\right\}, X\left(f = \frac{n}{\mathrm{NT_s}}\right) = \mathrm{T_s} X_{n+N} \\ \forall n \in \left\{0, \dots, \frac{N}{2} - 1\right\}, X\left(f = \frac{n}{\mathrm{NT_s}}\right) = \mathrm{T_s} X_n \end{cases}$$

- Les points du spectre de $X(f)$ sont calculés avec un pas de $\frac{1}{NT_s} = \frac{1}{T_a}$
- La largeur de l'intervalle fréquentiel de calcul est $F_s = \frac{1}{T_s}$
- N échantillons temporels $x_k \rightarrow N$ points du spectre X