Solutions TD0

Exercice 1 :

A- Calcul des transformées de Laplace

On applique la définition de la transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-tp}\, dt \qquad \text{avec } f(t) = 0 \text{ pour } t < 0$$

1- $\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^n dt$, *(n>0)*

On procède par une intégration par partie. On pose : $u(t) = t^n$ *et* $v'(t) = e^{-pt}$ donc $u'(t) = nt^{n-1}$ et $v(t) = -\frac{1}{p}e^{-pt}$

On a alors : $F(p) = \underbrace{\int_0^{+\infty} t^n e^{-pt} dt}_{u*v'} = \underbrace{\left[t^n\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\right)\right]_0^{+\infty}}_{u*v} - \int_0^{+\infty} \underbrace{nt^{n-1}\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\right)}_{u'*v} dt$

$\lim_{t\to+\infty} t^n\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\right) = 0$ et $\lim_{t\to 0} t^n\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\right) = 0$, on obtient alors :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^n dt = \frac{n}{p} \underbrace{\int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-pt} dt}_{\mathcal{L}[t^{n-1}]}$$

Soit $\boxed{\mathcal{L}[t^n] = \frac{n}{p}\,\mathcal{L}[t^{n-1}]}$ (1)

Pour n=1, la relation (1) s'écrit alors comme suit : $\mathcal{L}[t] = \frac{1}{p}\mathcal{L}[t^0] = \frac{1}{P}\frac{1}{P}$

Pour n=2, on a : $\mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{p}\mathcal{L}[t] = \frac{2}{p}\frac{1}{p^2} = \frac{2x1}{p^3} = \frac{2!}{p^3}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\mathcal{L}[t^2] = \frac{n!}{p^{n+1}} \text{ pour } n=2}$

Pour n=3, on a : $\mathcal{L}[t^3] = \frac{3}{p}\mathcal{L}[t^2] = \frac{3}{p}\frac{2}{p^3} = \frac{3x2}{p^3} = \frac{3!}{p^4}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\mathcal{L}[t^3] = \frac{n!}{p^{n+1}} \text{ pour } n=3}$

On peut alors déduire que : $\boxed{\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}}$

Remarque : on peut vérifier à partir de la table des transformée :

$\mathcal{L}\left[\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}\right] = \frac{1}{p^n}$, donc pour n on peut écrire : $\mathcal{L}\left[\frac{1}{(n)!}t^n\right] = \frac{1}{p^{n+1}}$ $\Longrightarrow$ $\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}$

2- $F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{-at}t^n dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t}\, t^n dt$

Or à partir des propriétés de Laplace on sait que :

$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(p+a)$, on peut alors déduire : $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{-at}t^n dt = \frac{n!}{(p+a)^{n+1}}}$

3- $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{-at}\sin(\omega t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} \sin(\omega t)\, dt$

On procède comme pour le cas précédent :

$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(p+a)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} \sin(\omega t)\, dt = \frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}}$

4- $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}e^{-at}\cos(\omega t)\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} \cos(\omega t) dt$

On procède comme pour le cas précédent :

$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(p+a)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-(p+a)t} \cos(\omega t)\, dt = \frac{\omega(p+a)}{(p+a)^2+\omega^2}}$

B- Calculer les transformées inverses de Laplace : on utilise **la méthode par décomposition en éléments simples** (voir la référence Y. Granjon, « Automatique : systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état », Edition Dunod, 2001)

a- $F(p) = \frac{p+2}{(1+p)(p+3)}$, le polynôme (1+p)(P+3) admet 2 racines :*p_1= -1 et p_2= -3*

On peut réécrire *F(p)* sous la forme suivante *:* $F(p) = \frac{p+2}{(1+p)(p+3)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(p+3)} + \frac{1}{2(p+1)}$

On applique la propriété de linéarité on obtient :

$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p+2}{(1+p)(p+3)}\right] = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p+3)}\right] + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}^{-1}[F(p)]\left[\frac{1}{(p+1)}\right]$ et à partir de la table des transformée on $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+a}\right] = e^{-at}$

On déduit : $\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p+2}{(1+p)(p+3)}\right] = \frac{1}{2}[e^{-3t} + e^{-t}]}$

b- $F(p) = \frac{3e^{-p}}{(1+p)p}$, pour calculer la transformée inverse on utilise :

La propriété du retard : $\mathcal{L}(f(t-\tau)) = e^{-\tau p}F(p)$.

Dans cet exemple $\frac{3e^{-p}}{(1+p)p}$ le retard $\tau = 1$, et $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(1+p)p}\right] = 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(1+p)p}\right] = 3(1-e^{-t})$

Alors $\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(1+p)p}e^{-p}\right] = 3(1-e^{-(t-1)})}$

c- $F(p)=\frac{e^{-p}}{p^2+1}$, on procède comme pour précédemment

Cette fois ci on pose : *ω=1 et τ= 1* , on trouve alors

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(1+p^2)}e^{-p}\right]=\sin(t-1)}$$

d- $F(p)=\frac{2pe^{-p}}{p^2+4}$, on procède comme pour précédemment

Cette fois ci on pose : *ω=2 et τ=1* , on trouve alors

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2p}{(4+p^2)}e^{-p}\right]=\cos(2(t-1))}$$

<u>Exercice 2</u>

Calculer la transformée de Laplace d'une équation différentielle :

a- $a_0=2$, $a_1=3$, $a_2=1$ $y(0)=0$, $y'(0)=0$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=1$$

On applique les propriétés de linéarité et de dérivation pour n=2 avec conditions initiales nulles, on obtient

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)\right]=\mathcal{L}[1]$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right]+3\mathcal{L}\left[\frac{dy(t)}{dt}\right]+2\mathcal{L}[y(t)]=\mathcal{L}[1]$$

$$p^2Y(p)+3pY(p)+2Y(p)=\frac{1}{p} \Longrightarrow \boxed{Y(p)=\frac{1}{(p^2+3p+2)p}}$$

b- $a_0=2$, $a_1=5$, $a_2=4$,$a_3=1$ avec $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=0$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^3y(t)}{dt^3}+4\frac{d^2y(t)}{dt^2}+5\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)\right]=\mathcal{L}[1]$$

$$p^3+4p^2Y(p)+5pY(p)+2Y(p)=\frac{1}{p} \Longrightarrow \boxed{Y(p)=\frac{1}{(p^3+4p^2+5p+2)p}}$$

c- $a_0=2$, $a_1=3$, $a_2=1$ $y(0)=0$, $y'(0)=1$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)\right]=\mathcal{L}[1]$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right]+3\mathcal{L}\left[\frac{dy(t)}{dt}\right]+2\mathcal{L}[y(t)]=\mathcal{L}[1]$$

$$p^2Y(p) - p\cancel{y(0)} - y'(0) + 3pY(p) - 3\cancel{y(0)} + 2Y(p) = \frac{1}{p}$$

$$(p^2 + 3p + 2)\,Y(p) - y'(0) = \frac{1}{p}$$

$$\boxed{Y(p) = \frac{1}{(p^2+3p+2)p} + \frac{1}{(p^2+3p+2)}}$$

Solution TD 1

Exercice 1 :

1- Calcul des pôles de G(p) :

$25p^2 + 10p + 4 = 0$, on trouve : p1=0.2+j0.1833 et p2= 0.2+j0.1833

On peut conclure que la réponse du système est de type oscillatoire-amortie

2- La forme canonique de G(p) est : $G(p) = \frac{3\,\frac{4}{25}}{p^2+\frac{10}{25}p+\frac{4}{25}}$, soit $G(p) = \frac{K\,\omega_n^2}{p^2+2\xi\omega_n p+\omega_n^2}$,

On déduit : $gain = K = 3$, $\omega_n^2 = \frac{4}{25}$ soit $\omega_n = 0.4\,rad/s$ et $2\xi\omega_n = \frac{10}{25} \rightarrow \xi = 0.5$

3- D'après la figure 1, on peut lire pour $\xi = 0.5$, le produit $\omega_n t_r \approx 5.5$ on déduit le temps de réponse : $t_r \approx 13{,}75$

4- <u>Calcul de l'erreur</u> : Erreur=entrée-sortie, soit :

$\varepsilon(p) = E(p) - Y(p) = E(p) - G(p)E(p) = \big(1 - G(p)\big)E(p)$

Soit : $\varepsilon(p) = \big(1 - G(p)\big)E(p)$ et $\boxed{\varepsilon(t) = e(t) - y(t)}$

On applique le théorème de la valeur Finale :

$\varepsilon(\infty) = \lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p)$, soit : $\boxed{\varepsilon(\infty) = \lim_{t\to+\infty}(e(t) - y(t))}$ ou

$\boxed{\varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0} p\big(1 - G(p)\big)E(p)}$

a- On souhaite calculer l'erreur statique, donc l'entrée est l'échelon unité ($E(p) = \frac{1}{p}$) :

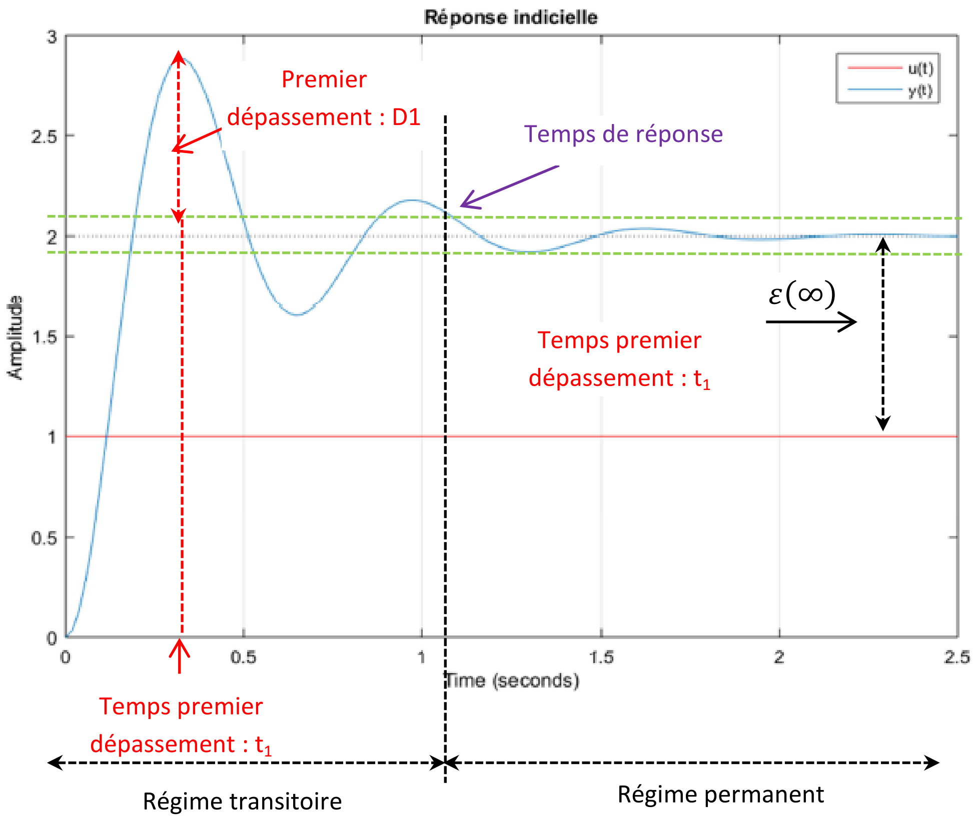
$\varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0} p\left(1 - \frac{12}{25p^2+10p+4}\right)\frac{1}{p}$, on trouve : $\varepsilon(\infty) = -2$

b- On souhaite calculer l'erreur de trainage, donc l'entrée est la rampe unité ($E(p) = \frac{1}{p^2}$)

$\varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0} p\left(1 - \frac{12}{25p^2+10p+4}\right)\frac{1}{p^2}$, on trouve : $\varepsilon(\infty) = +\infty$

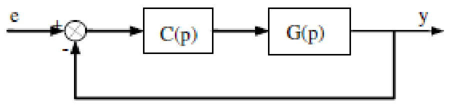
Exercice 2 :

On se base sur le cours (chapitre II, p44)



Exercice 3 :

Soit, le système représenté par le schéma fonctionnel suivant :



$G(p) = \frac{1}{1+Tp}$ avec $T > 0$

1°- Cas où $C(p)=K$

a- Calcul de la FTBF : On note la FTBF par F(p) : comme le retour est unitaire on applique la règle de Mason

$$\frac{Y(p)}{E(p)} = F(p) = \frac{C(p)G(p)}{1+C(p)G(p)} = \frac{K\frac{1}{1+Tp}}{1+K\frac{1}{1+Tp}} \Rightarrow \boxed{F(p) = \frac{K}{1+Tp+K}}$$

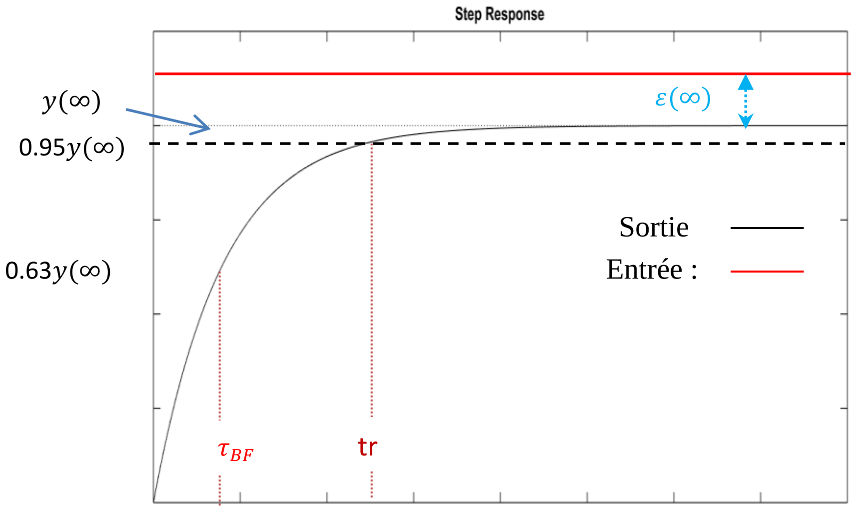
$$\Rightarrow F(p) = \frac{\frac{K}{1+K}}{\frac{T}{K+1}p+1} \text{ avec } Gain = \frac{K}{1+K} \text{ et } Constante\ de\ temps = \frac{T}{K+1}$$

Le système en boucle fermée se comporte comme un système du premier ordre : on pose $\tau_{BF} = \frac{T}{K+1}$ et $k_{BF} = \frac{K}{1+K}$

b- Réponse indicielle : l'entrée *e(t)* est un échelon unité, comme on a un système de 1er ordre, la réponse est alors :

$$\boxed{y(t) = k_{BF}\left(1 - e^{-\tau_{BF}t}\right)}$$

Trace de la réponse



tr : temps de réponse

c- Calcul de l'erreur :

$\varepsilon(p) = E(p) - Y(p) = E(p) - F(p)E(p) = \boxed{\left(1 - F(p)\right)E(p)}$

Soit : $\varepsilon(p) = \left(1 - F(p)\right)E(p)$ et $\boxed{\varepsilon(t) = e(t) - y(t)}$

On applique le théorème de la valeur Finale :

$\varepsilon(\infty) = \lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p\,\varepsilon(p)$, soit : $\boxed{\varepsilon(\infty) = \lim_{t\to+\infty}\left(e(t) - y(t)\right)}$ et

$\boxed{\varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0} p\left(1 - F(p)\right)E(p)}$

On souhaite calculer l'erreur statique, donc l'entrée est l'échelon unité ($E(p) = \frac{1}{p}$) :

$\varepsilon(\infty) = \lim_{t\to+\infty}\left(e(t) - y(t)\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(1 - k_{BF}\left(1 - e^{-\tau_{BF}t}\right)\right)$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\varepsilon(\infty) = 1 - k_{BF} = \frac{1}{1+K}}$

Ou

$\varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0} p\left[\left(1 - \frac{k_{BF}}{\tau_{BF}p+1}\right)\frac{1}{p}\right]$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\varepsilon(\infty) = 1 - k_{BF} = \frac{1}{1+K}}$

d- Influence de K sur la réponse : on a $\tau_{BF} = \frac{T}{K+1}$, $t_r = 3\tau_{BF}$ et $k_{BF} = \frac{K}{1+K}$

Si K est élevé alors τ_{BF} est faible, t_r faible $\Longrightarrow$ Système en boucle fermée est rapide

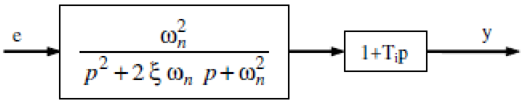
$k_{BF} \approx 1 \Longrightarrow$ plus l'erreur est faible

Si K est faible alors τ_{BF} est élevé, t_r élevé $\Longrightarrow$ Système en boucle fermée est lent

$0 < k_{BF} \ll 1 \Longrightarrow$ plus l'erreur est élevée

2°)- Cas où $C(p) = K\left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$ avec $T_i > 0$

Le schéma précédent peut se réduire sous la forme suivante



a- Calcul de la FTBF : on note la FTBF H(p)

$$\frac{Y(p)}{E(p)} = H(p) = \frac{C(p)G(p)}{1+C(p)G(p)} = \frac{K\left(1+\frac{1}{T_i p}\right)\left(\frac{1}{1+Tp}\right)}{1+K\left(1+\frac{1}{T_i p}\right)\left(\frac{1}{1+Tp}\right)} = \frac{K(T_i p+1)}{T_i p(1+Tp)+K(T_i p+1)}$$

$$\Longrightarrow \boxed{H(p) = \frac{\frac{K}{TT_i}}{p^2+\left(\frac{1+K}{T}\right)p+\frac{K}{TT_i}}(T_i p+1)} \Longleftarrow \text{ FTBF avec zéro}$$

Par identification on trouve : $\omega_n^2 = \frac{K}{TT_i}$ et $2\omega_n\xi = \left(\frac{1+K}{T}\right)$

$$\Longrightarrow \boxed{\omega_n = \sqrt{\frac{K}{TT_i}} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{1+K}{2}\sqrt{\frac{T_i}{TK}}}$$

Calcul de l'erreur statique :

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0}\left[\cancel{p}\left(1 - \frac{\frac{K}{TT_i}}{p^2+\left(\frac{1+K}{T}\right)p+\frac{K}{TT_i}}(T_i p+1)\right)\frac{1}{\cancel{p}}\right] \Longrightarrow \boxed{\varepsilon(\infty) = 0}$$

b- Calcul de la FTBF pour $T_i = T$,

$$FTBF = \frac{C(p)G(p)}{1+C(p)G(p)} = \frac{K\cancel{(T_i p+1)}}{T_i p\cancel{(1+Tp)}+K\cancel{(T_i p+1)}} \Longrightarrow FTBF = \frac{K}{T_i p+K} = \frac{1}{\frac{T_i}{K}p+1}$$

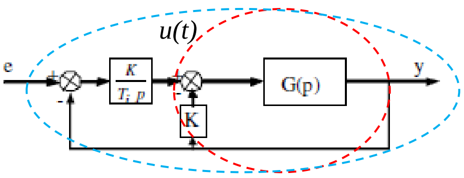
On retrouve dans ce cas la FTBF d'un 1er ordre. On conclut que

Si K est élevé alors $\frac{T_i}{K}$ est faible, $t_r = 3\frac{T_i}{K}$ faible $\Longrightarrow$ Système en boucle fermée est rapide

Si K est faible alors $\frac{T_i}{K}$ est élevé, $t_r = 3\frac{T_i}{K}$ est élevé $\Longrightarrow$ Système en boucle fermée est lent

Le gain en boucle fermée est =1 (indépendant de K) $\Longrightarrow$ l'erreur est nulle

3°)- Nouvelle structure avec la même FT de C(p)



a- Calcul de la FTBF :

$$F_1(p) = \frac{G(p)}{1+KG(p)} = \frac{\frac{1}{1+Tp}}{1+K\frac{1}{1+Tp}} \Rightarrow F_1(p) = \frac{1}{1+Tp+K} = \frac{\frac{1}{1+K}}{1+\frac{T}{1+K}p}$$

$$\frac{Y(p)}{E(p)} = FTBF = \frac{\frac{K}{T_i p}F_1(p)}{1+\frac{K}{T_i p}F_1(p)} = \frac{\frac{K}{T_i p}\frac{\frac{1}{1+K}}{(1+\frac{T}{1+K}p)}}{1+\frac{K}{T_i p}\frac{\frac{1}{1+K}}{(1+\frac{T}{1+K}p)}}$$

$$FTBF = \frac{\frac{K}{1+K}}{T_i p\left(1+\frac{T}{1+K}p\right)+\frac{K}{1+K}} = \frac{\frac{K}{1+K}}{T_i p+\frac{TT_i}{1+K}p^2+\frac{K}{1+K}} = \frac{K}{T_i p(1+K)+TT_i p^2+K}$$

$$\boxed{FTBF = \frac{\frac{K}{T_i T}}{p^2 + \frac{(1+K)}{T}p + \frac{K}{T_i T}}}$$

On peut remarquer que par rapport à la FTBF calculée en a), le terme $(T_i p + 1)$ n'est plus. Il est compensé.

Par identification on trouve $\boxed{\omega_n^2 = \frac{K}{TT_i} \text{ et } 2\omega_n \xi = \left(\frac{1+K}{T}\right)}$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{TT_i}} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{1+K}{2}\sqrt{\frac{T_i}{TK}}$$

Calcul de l'erreur statique :

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0}\left[\cancel{p}\left(1-\frac{\frac{K}{TT_i}}{p^2+\left(\frac{1+K}{T}\right)p+\frac{K}{TT_i}}\right)\frac{1}{\cancel{p}}\right] \Rightarrow \boxed{\varepsilon(\infty) = 0}$$

b- On pose K=1. Calcul de Ti pour obtenir $\xi = 1$

$$\xi = \sqrt{\frac{T_i}{T}} = 1 \Rightarrow \boxed{T_i = T}$$

Dans ce cas la FTBF est du 1er ordre identique à celle calculée plus haut, dans le cas où $T_i = T$:

$$\boxed{FTBF = \frac{1}{T_i p + 1} = \frac{1}{T_i p + 1}}$$

Ti >> alors temps réponse est élevé donc le système en BF est lent

Ti << alors temps réponse est faible donc le système en BF est rapide

Exercice 1

* Calcul de la réponse indicielle :

entrée = échelon $\Rightarrow$ $U(p) = 1/p$

$$U(p) \longrightarrow \boxed{F(p)} \longrightarrow Y(p)$$

$\Rightarrow$ $Y(p) = F(p) \cdot U(p)$

$$Y(p) = \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p} \cdot \frac{1}{p} \quad ; \quad T_1 > 0, \ T_2 > 0$$

on peut réécrire $Y(p)$ sous la forme suivante :

$$Y(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p + 1/T_2} = \frac{A(p + 1/T_2) + Bp}{(p)(p + 1/T_2)} = \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{1}{p} \, \frac{1/T_1 + p}{1/T_2 + p}$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{A(p + 1/T_2) + Bp}{p\,(p + 1/T_2)} = \frac{\frac{T_1}{T_2} p + 1/T_2}{p\,(1/T_2 + p)}$$

soit
$$A + B = T_1/T_2, \quad \frac{A}{T_2} = 1/T_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} B = T_1/T_2 - 1 = \dfrac{T_1 - T_2}{T_2} \\ A = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad Y(p) = \frac{1}{p} + \left(\frac{T_1 - T_2}{T_2}\right) \cdot \frac{1}{p + 1/T_2}$$

$\downarrow$ Transformée de Laplace inverse à partir de la table

$$y(t) = 1 + \left(\frac{T_1 - T_2}{T_2}\right) e^{-t/T_2}$$

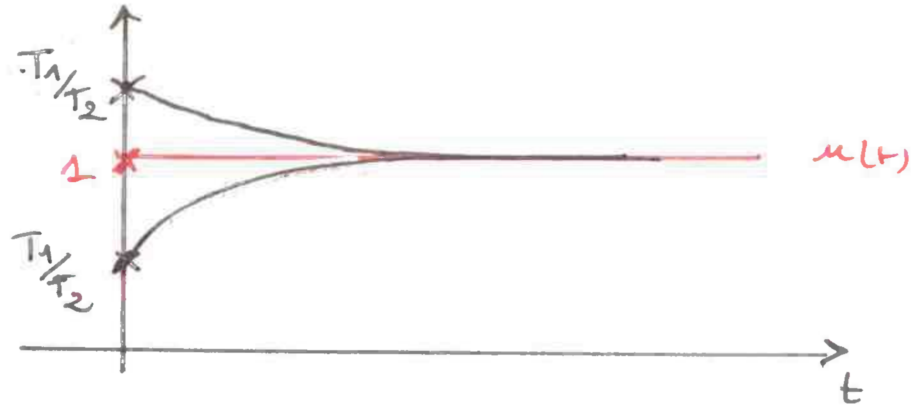
soit
$$\boxed{y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(p)] = \left(1 + \left(\frac{T_1 - T_2}{T_2}\right) e^{-t/T_2}\right)}$$

Tracé de la réponse indicielle :

$\lim_{t \to 0} y(t) \Rightarrow T_1/T_2$ et $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 1$

Si $T_1 > T_2$

Si $T_1 < T_2$



* Pour $T_2 = \frac{T_1}{2} = 1$, on trace diagramme de Bode et Black

• Etude aux limites : $F(p) = \frac{1+2p}{1+p} \longrightarrow F(j\omega) = \frac{1+j2\omega}{1+j\omega}$

$\omega \to 0 \Rightarrow F(j\omega) \to 1 \Rightarrow \begin{cases} |F(j\omega)| \to 1 \Rightarrow |F(j\omega)|_{dB} \to 0\,dB \\ Arg(F(j\omega)) \to 0^\circ \end{cases}$

ou

$(p \to 0 \Rightarrow F(p) \to 1 \Rightarrow \begin{cases} |F(p)| \to 1 \Rightarrow |F(p)|_{dB} \to 0\,dB \\ Arg(F(p)) \to 0^\circ \end{cases}$

$\omega \to +\infty \Rightarrow F(j\omega) \to 2 \Rightarrow \begin{cases} |F(j\omega)| \to 2 \Rightarrow |F(j\omega)|_{dB} \to 6\,dB \\ Arg(F(j\omega)) \to 0^\circ \end{cases}$

ou

$(p \to +\infty) \Rightarrow F(p) \approx 2 \Rightarrow \begin{cases} |F(p)| \to 2 \Rightarrow |F(p)|_{dB} = 6\,dB \\ Arg(F(p)) = 0^\circ \end{cases}$

ω	0		$+\infty$
A_{dB}	0 dB	?	6 dB
φ°	0°	?	0°

Question : Est ce que l'argument croît puis décroît ?

Est ce que le module croit puis décroit ?

Pour répondre, on décompose $F(p)$ comme suit :

$$F(p) = \underbrace{(1+2p)}_{F_1(p)} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+p}}_{F_2(p)}$$

On trace le diagramme asymptotique de $F_1(p)$ et $F_2(p)$ puis on déduit le diagramme de $F(p)$.

. Etude de $F_1(p)$:

$$F_1(p) = 1 + 2p \longrightarrow F_1(j\omega) = 1 + j2\omega \Rightarrow \left\{ \right.$$

$$\omega \to 0 \Rightarrow F_1(j\omega) \to 1 \Rightarrow \begin{cases} |F_1(j\omega)|_{dB} \to \boxed{0\ dB} \\ Arg(F_1(j\omega)) \to \boxed{0^\circ} \end{cases}$$

$$\omega \to +\infty \Rightarrow F_1(j\omega) \to +\infty \Rightarrow \begin{cases} |F_1(j\omega)|_{dB} \to \boxed{+\infty} \\ Arg(F_1(j\omega)) \to \boxed{+90^\circ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{dB} = |F_1(j\omega)|_{dB} = 10 \log_{10}(1+4\omega^2) \\ Arg(F_1(j\omega)) = + \operatorname{arctg}(2\omega) \end{cases}$$

Pour $\omega_1 = 1/2$ rad/s $\Rightarrow \begin{cases} A_{dB} \to \boxed{3}\ dB \\ Arg(F_1(j\omega)) \to \boxed{+45^\circ} \end{cases}$

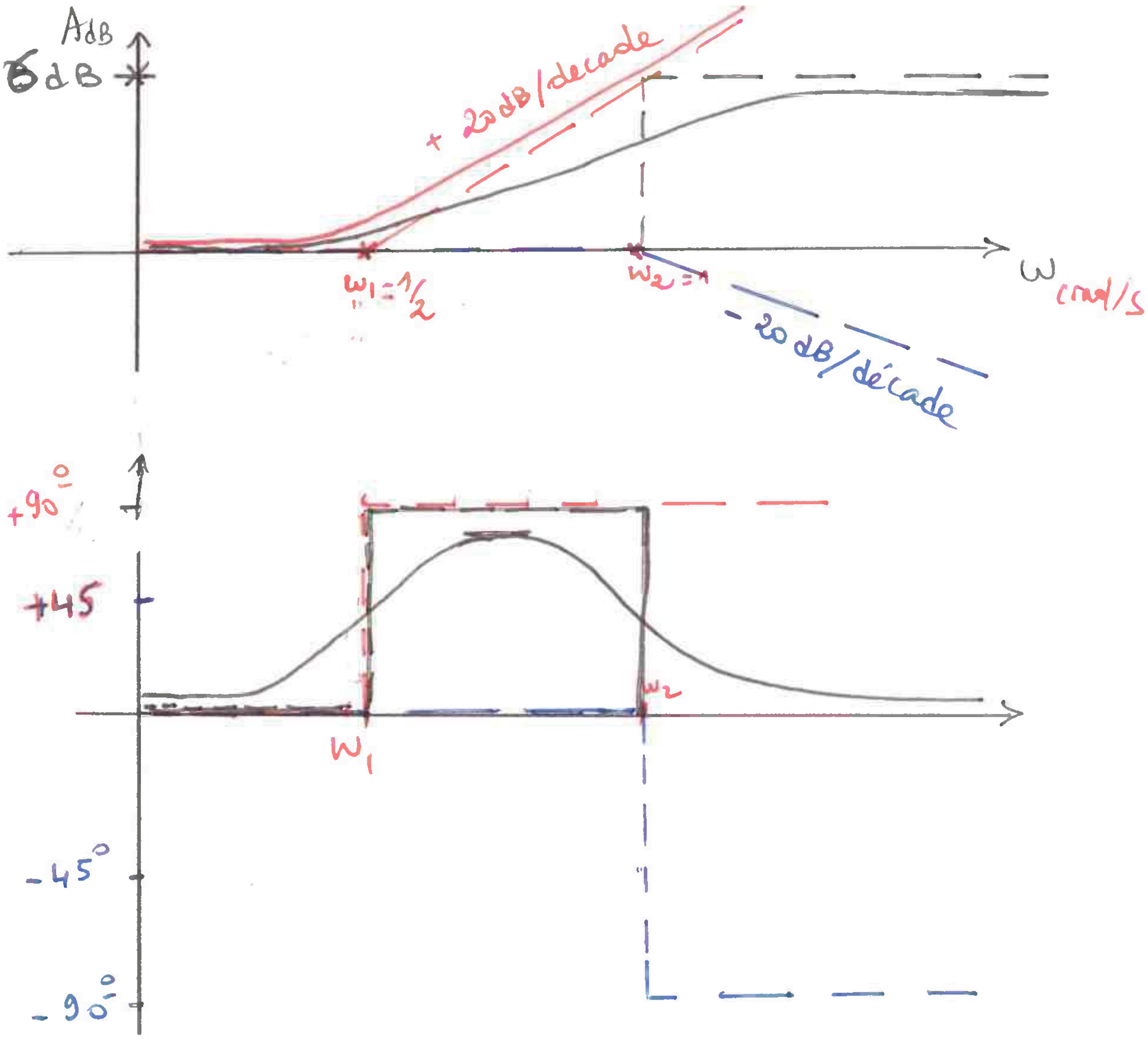
. Etude de $F_2(p)$: c'est un 1er ordre comme montré au niveau du cours, donc :

$$\omega \to 0 \Rightarrow F_2(j\omega) \to 1 \Rightarrow \begin{cases} |F_2(j\omega)|_{dB} \to \boxed{0\ dB} \\ Arg(F_2(j\omega)) \to \boxed{0^\circ} \end{cases}$$

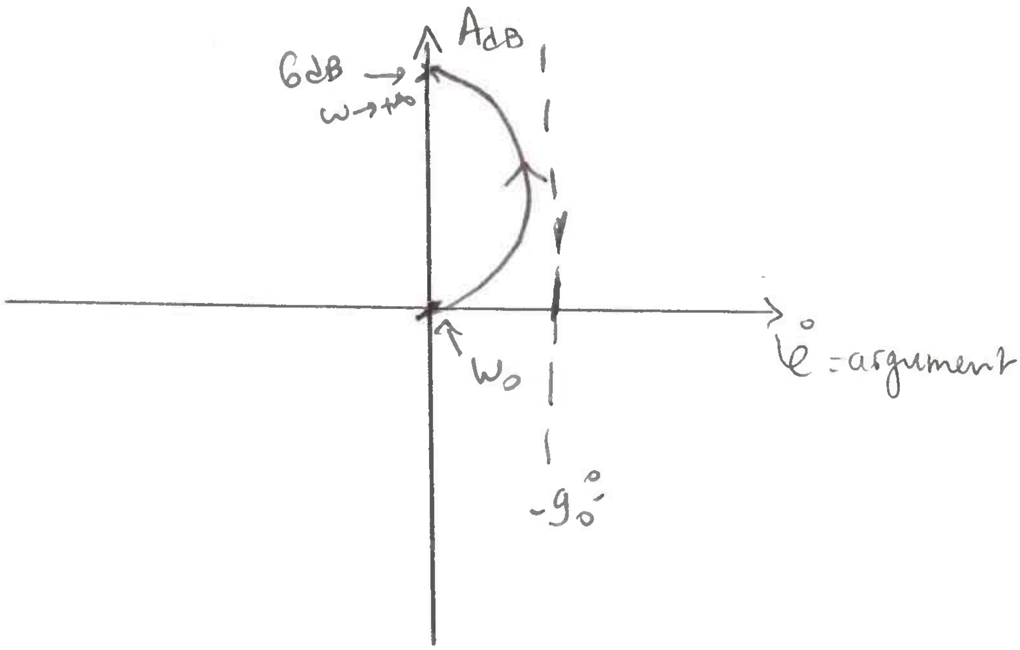
$$\omega_2 = 1\ rad/s \longrightarrow \begin{cases} |F_2(j\omega)|_{dB} = \boxed{-3\ dB} \\ Arg(F_2(j\omega)) = \boxed{-45^\circ} \end{cases}$$

$$\omega \to +\infty \Rightarrow F_2(j\omega) \to 0 \Rightarrow \begin{cases} |F_2(j\omega)|_{dB} \to \boxed{-\infty} \\ Arg(F_2(j\omega)) \to \boxed{-90^\circ} \end{cases}$$

on trace le diagramme asymptotique pour $F_1(p)$ et $F_2(p)$, on obtient :



En noir le tracé asymptotique F(p). C'est la somme géométrique des pente.



Exercice 2 :

$$F_a(p) = \frac{B(p)}{U(p)} = \frac{K_a}{2p+1} \quad ; \quad K_a = 0.05 \text{ rad/V}$$

$$\frac{A_m(p)}{A(p)} = 8$$

$$F(p) = \frac{2(0.2p+1)}{p\,(4p^2 + 2.4p + 1)}$$

On peut procéder comme l'exercice 1

$$G(p) = \underbrace{2}_{F_1} \cdot \underbrace{(0.2p+1)}_{F_2} \cdot \underbrace{\frac{1}{p}}_{F_3} \cdot \underbrace{\frac{1}{4p^2+2.4p+1}}_{F_4} \cdot \underbrace{\frac{1}{2p+1}}_{F_5}$$

On fait une étude aux limites de chaque terme

* $F_1(p) =$ est une constante ça sera une droite.

* $F_2(p) = 1 + 0.2p \longrightarrow F_2(j\omega) = 1 + j\,0.2\omega$

On fait comme au niveau de l'exercice 1

$$\omega \to 0 \Rightarrow \begin{cases} |F_2(j\omega)|_{dB} \to 0\text{ dB} \\ \text{Arg}(F_2(j\omega)) \to 0° \end{cases}$$

$$\omega \to +\infty \Rightarrow \begin{cases} |F_2(j\omega)|_{dB} \to +\infty \\ \text{Arg}(F_2(j\omega)) \to +90° \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Pour } \omega = \omega_2 = \frac{1}{0.2} = 5 \text{ rad/s} \\ \text{Arg}(F_2(j\omega_2)) \to +45° \\ |F_2(j\omega_2)|_{dB} = 3\text{ dB} \end{cases}$$

* $$F_4(p) = \frac{1}{4p^2 + 2.4p + 1} = \frac{1/4}{p^2 + \frac{2.4}{4}p + 1/4}$$

Système du 2nd ordre : on calcule

$$\boxed{\omega_n = \frac{1}{2} \text{ rad/s}} \quad \text{et} \quad \boxed{\xi = 0.6}$$

On procède comme le cours

* $F_3(p) = 1/p$ $\longrightarrow$ $F(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$ $\Rightarrow$ $\boxed{Arg\left(\frac{1}{j\omega}\right) = -90°}$ quelque soit ω

$\omega \rightarrow 0 \Rightarrow |F(j\omega)|_{dB} \longrightarrow +\infty$

$Arg(F(j\omega)) \longrightarrow -90°$

$\omega \rightarrow +\infty \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |F(j\omega)|_{dB} \longrightarrow -\infty \\ Arg(F(j\omega)) \longrightarrow -90° \end{array} \right.$

* $F_5(p)$ son étude aux limits c'est comme celle d'un 1^{e} ordre.

Exercice 3 :

1°/* Equations dans le domaine Laplace

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -5\,\theta(t) + u(t) \quad (1)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = -v(t) + 5\,\theta(t) + w(t) \quad (2)$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = v(t) \quad (3)$$

En prenant les conditions initiales nulles et en appliquant la propriété de linéarité et la propriété de dérivation on obtient :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d\theta(t)}{dt}\right] + 5\,\mathcal{L}[\theta(t)] = \mathcal{L}[u(t)] \quad (1)'$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{dv(t)}{dt}\right] + \mathcal{L}[v(t)] = 5\,\mathcal{L}[\theta(p)] + \mathcal{L}[w(t)] \quad (2)'$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{dh(t)}{dt}\right] = \mathcal{L}[v(t)] \quad (3)'$$

donc :

$$(1)' \Rightarrow \quad p\,\theta(p) + 5\,\theta(p) = U(p)$$

$$(2)' \quad p\,V(p) + V(p) = 5\,\theta(p) + W(p)$$

$$(3)' \quad p\,H(p) = V(p)$$

2°/* schéma bloc représentant le déplacement de la mongoflière en fonction de l'action sur le bruleur

(1)' $\Rightarrow$ $\theta(p) = \dfrac{1}{p+5}\, U(p)$ (1)''

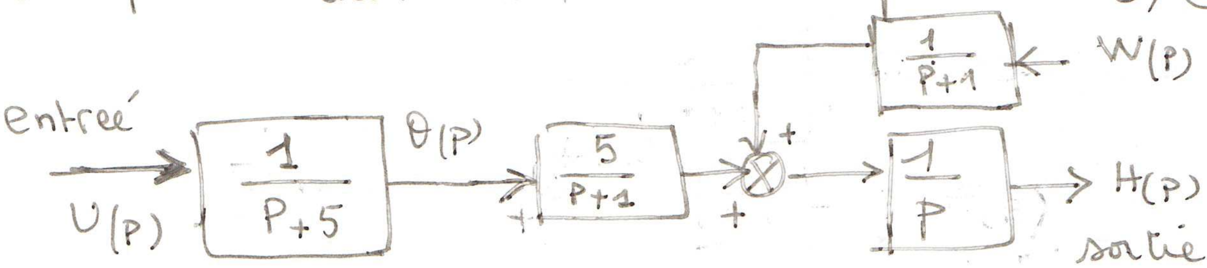
(2)' $\Rightarrow$ $V(p) = \dfrac{5}{p+1}\, \theta(p) + \dfrac{1}{p+1}\, W(p)$ (2)''

(3)' $\Rightarrow$ $H(p) = \dfrac{1}{p}\, V(p)$ (3)''

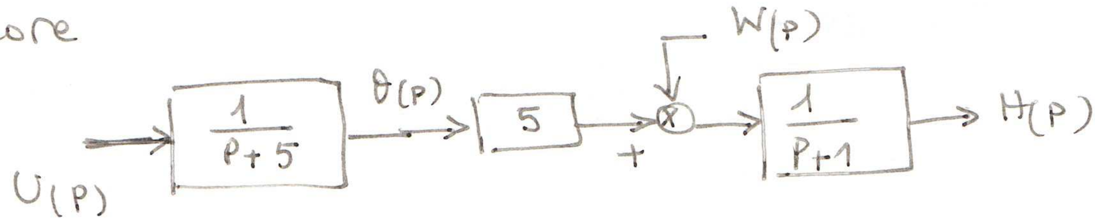
Déplacement $\Rightarrow$ $h(t)$ $(H(p))$

action sur le brûleur $\Rightarrow$ $u(t)$ $(U(p))$

on peut déduire le schéma à partir de (1)'', (2)'' et (3)''



ou encore



3°/* Calcul de $H(p) = f(U(p))$

à partir de (1)', (2)' et (3)' on peut écrire

$$H(p) = \frac{1}{p}\left[\frac{5}{p+1}\left(\frac{1}{p+5}\right) U(p) + \frac{1}{p+1}\, W(p)\right]$$

soit

$$\boxed{H(p) = \frac{5}{p(p+1)(p+5)}\, U(p) + \frac{1}{p(p+1)}\, W(p)}$$

4°/* on suppose que le vent est nul alors $w(t)=0$

a/* $$H(p) = \frac{5}{p(p+1)(p+5)} U(p)$$

donc la fonction de transfert qui modélise la mongoflière lorsqu'il n'y a pas de vent est :

$$\boxed{G(p) = \frac{H(p)}{U(p)} = \frac{5}{p(p+1)(p+5)}} = \frac{5}{p^3+6p^2+5p}$$

b/* Tracés de Bode et Black.

On fait l'étude aux limits:

$$\begin{matrix} w \to 0 \\ (p \to 0) \end{matrix} \Rightarrow G(p) \simeq \frac{5}{p} \quad \begin{cases} |G(jw)| = |G(p)|_{p=jw} \longrightarrow +\infty \Rightarrow \underbrace{A_{dB} = |G(jw)|_{dB} \longrightarrow +\infty} \\ \mathrm{Arg}(G(jw)) \longrightarrow \underline{-90°} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} w \to +\infty \\ (p \to +\infty) \end{matrix} \Rightarrow G(p) \simeq \frac{5}{p^3} \quad \begin{cases} |G(jw)| = |G(p)|_{p=jw} \longrightarrow 0 \Rightarrow \underbrace{A_{dB} = |G(jw)|_{dB} \longrightarrow -\infty} \\ \mathrm{Arg}(G(jw)) \longrightarrow \underline{-270°} \end{cases}$$

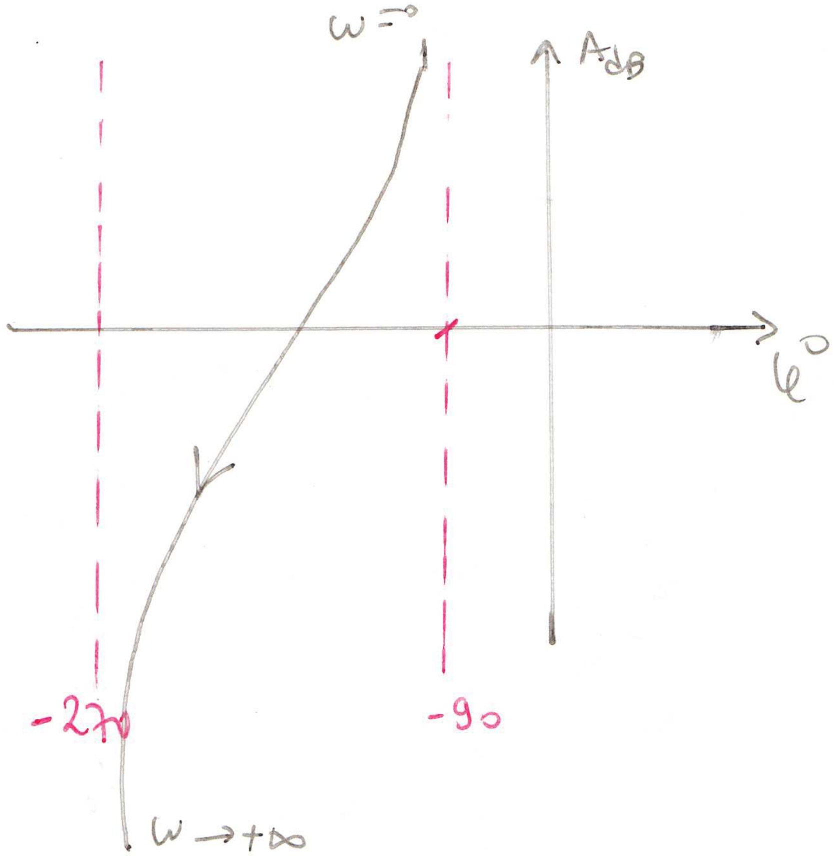
<u>Remarque</u>: si on developpe le module et l'argument de $G(p)|_{jw}$ on obtient:

$$G(jw) = \frac{5}{-jw^3-6w^2+5jw} = \frac{5}{-6w^2+jw(5-w^2)}$$

$$\Rightarrow |G(jw)| = \frac{5}{\sqrt{w^2(5-w^2)^2+36w^4}} \quad \text{et} \quad \varphi = -\mathrm{arctg}\left(\frac{w(5-w^2)}{-6w^2}\right)$$

- On peut conclure que le module en dB (A_{dB}) et l'argument (φ) ne vont que décroitre

ω	0		+∞
A_{dB}	+∞	→	-∞
$\varphi°$	-90°	→	-270

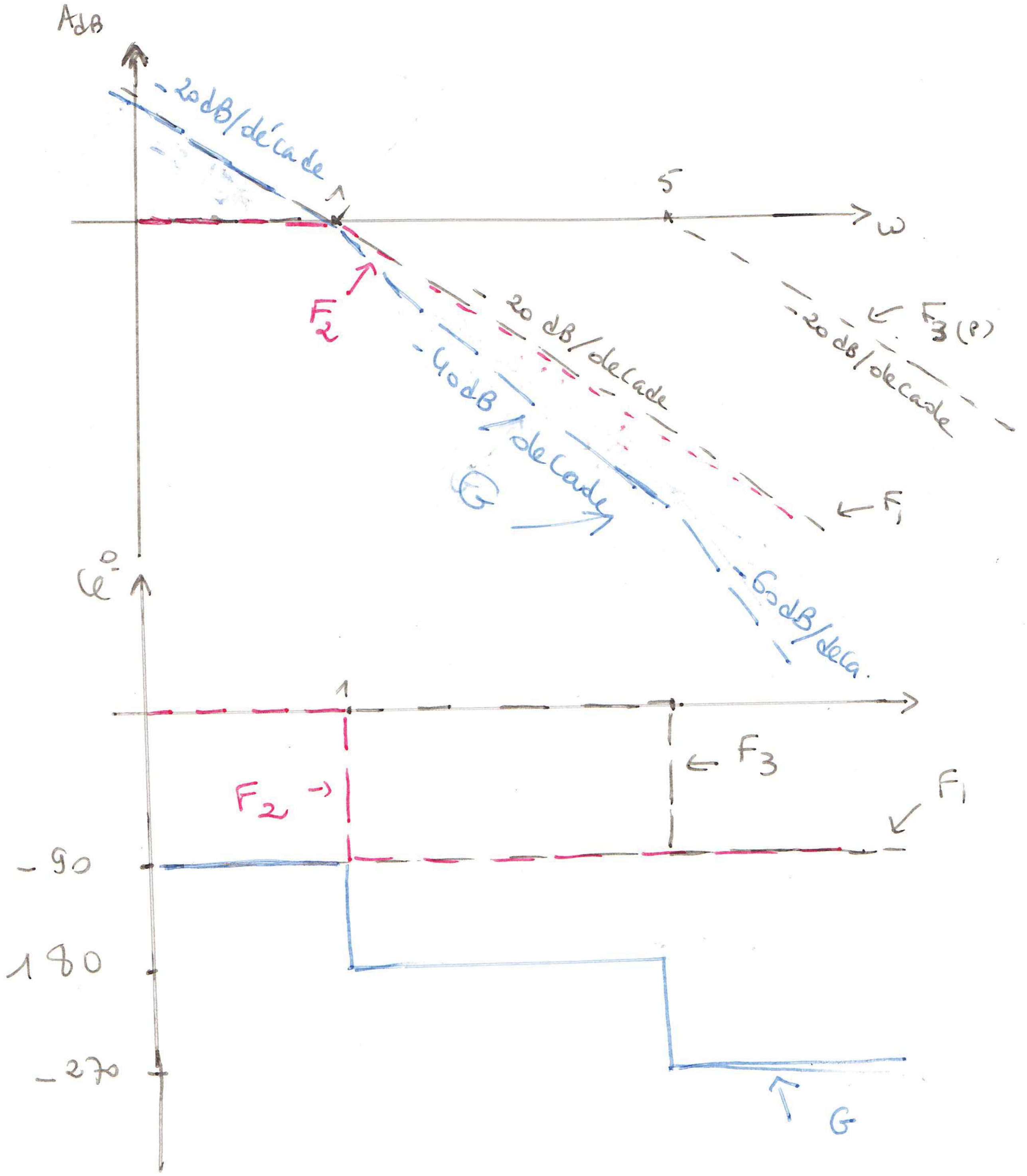


Pour le diagramme de Bode :

on peut faire comme les exercices 1 et 2.

on pose : $F_1(p) = 1/p$ $\quad F_2(p) = \dfrac{1}{p+1}$ $\quad F_3(p) = \dfrac{1}{p+5}$ $\quad F_4(p) = 5$

on trace le diagramme asymptotique de chaque fonction puis on fait la somme géométrique des pents.



Corrigé TD 3

Exercice 1 :

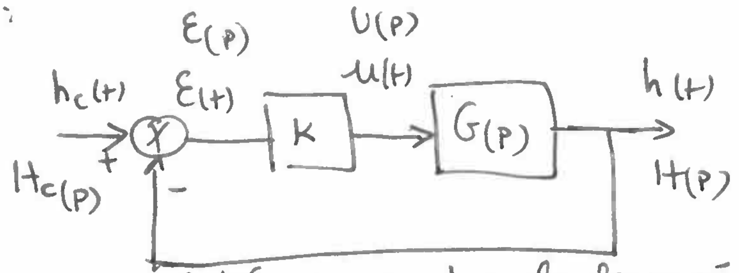


Schéma en boucle fermée

$h_c(t)$: désigne la hauteur désirée = (Consigne)

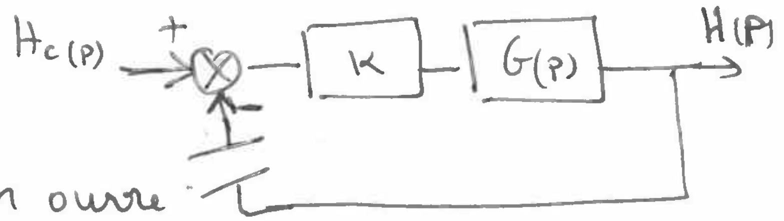
$h(t)$: désigne la hauteur réelle = (sortie)

$\varepsilon(t)$: écart entre la hauteur $h_c(t)$ et la hauteur mesurée

$u(t)$ = l'action sur le bruleur = commande

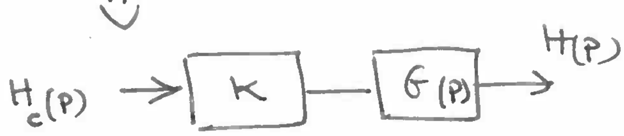
$$G(P) = \frac{5}{P(P+1)(P+5)} \quad ; \quad K = ?$$

a/ Fonction de Transfert en Boucle Ouverte : F.T.B.O



on ouvre la boucle

$\Updownarrow$



$$\Rightarrow \quad G_1(P) = \frac{H(P)}{H_c(P)} = K\,G(P)$$

$$G_1(P) = \frac{5K}{P(1+P)(P+5)} = K \cdot \frac{1}{P} \cdot \frac{5}{(P+1)(P+5)}$$

$$\Rightarrow \quad G_1(P) = K \cdot \frac{1}{P^\alpha} \cdot \frac{N(P)}{D(P)}$$

$N(p) = 5 \quad ; \quad D(p) = (p+1)(p+5) \; , \; \alpha = 1$

$G_1(p)$ est une fonction de transfert de type intégrateur (le terme $1/p$ est un intégrateur)

b/ * Marges de stabilité : pour $K=1$

$M_g|_{dB} = \; ?$

$M_\varphi^\circ = \; ?$

sur la figure 2, on peut lire que :

lorsque $\left. \begin{array}{l} A_{dB} = |G_1(j\omega)|_{dB} = 0\,dB \\ \varphi^\circ = \mathrm{Arg}(G_1(j\omega)) = -136^\circ \end{array} \right\}$ Pour $\omega \simeq 0.77$ rad/s

et $\left. \begin{array}{l} A_{dB} = -15.5\ dB \\ \varphi^\circ = -180^\circ \end{array} \right)$ pour $\omega = 2.23$ rad/s

d'après la définition de la marge de gain :

on cherche la pulsation pour laquelle l'argument est égal à -180°, on lit la pulsation 2.23 rad/s et sur le diagramme d'amplitude on a $A_{dB} = -15.5$ dB

donc $M_g|_{dB} = -A_{dB}$ à $\omega = 2.23$ rad/s

Soit $\boxed{M_g|_{dB} = 15{,}5 \text{ dB} \quad \text{à } \omega = 2{,}22 \text{ rad/s}}$

De même d'après la définition de la marge de phase :

on cherche la pulsation pour laquelle le module en dB $A_{dB} = 0\,dB$, on lit 0.77 rad/s, et sur le diagramme de phase on trouve que pour $\omega = 0.77$ rad/s l'argument $\varphi \simeq -136°$,

donc $M_\varphi = 180° + \varphi = 180° - 136$

soit $\boxed{M_\varphi = 44° \quad \text{à} \quad \omega \simeq 0.77\ \text{rad/s}}$

Comme les marges de stabilité sont positives alors le système est stable pour $K = 1$

. Pour trouver la condition sur K qui assure la stabilité

d'après la FTBO : $G_1(p) = K \cdot G(p)$

donc : $|G_1(p)|_{dB} = 20 \log_{10} K + 20 \log_{10} |G(p)|$

$$|G_1(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} K + 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$

et $\text{Arg}(G_1(p)) = \cancel{\text{argument}(K)} + \text{argument}(G(p))$

$\boxed{\text{Arg}(G(p)) = \text{argument}(G(p))}$ L'argument ne dépend pas de K.

donc on ne va s'intéresser qu'à la courbe d'amplitude puisque c'est juste le module qui dépend de K.

Si on décale la courbe d'amplitude vers le haut jusqu'à ce que $|G(j\omega)|_{dB} = 0\,dB$, le décalage nous donnera la valeur de $K|_{dB}$

d'après la courbe, il faut annuler la marge de gain

donc soit $20\log_{10} K = +15,5 \text{ dB}$

$$\Rightarrow \boxed{K = 10^{15,5/20}}$$

soit, $\boxed{K \simeq 5,95}$

donc pour assurer la stabilité il faut que :

$$\boxed{0 < K < 5,95}$$

pour $K = 5,95$ on a $M_g|_{dB} = 0 \text{ dB}$ et $M_\varphi = 0°$

le système sera à la limite de stabilité.

c/* Application du critère de Routh

on calcule la FTBF :

$$M(p) = \frac{K\,G(p)}{1 + K\,G(p)} = \frac{5K}{p(p+1)(p+5) + 5K}$$

$$M(p) = \frac{5K}{p^3 + 6p^2 + 5p + 5K}$$

on a l'équation caractéristique : $p^3 + 6p^2 + 5p + 5K = 0$

. On vérifie la condition nécessaire : il faut que tous les coefficients soient > 0

$$\Rightarrow 5K > 0 \Rightarrow \boxed{K > 0}$$

. Condition suffisante, on fait le tableau de Routh
C S

p^3	1	5
p^2	6	$5K$
p	$\frac{30-5K}{6}$	0
p^0	$5K$	
p^{-1}	0	

C.S :

$5K > 0 \Rightarrow K > 0$

et

$\frac{30-5K}{6} > 0 \Rightarrow 30-5K > 0$

$\Rightarrow K < 6$

donc le système sera stable si $\boxed{0 < K < 6}$

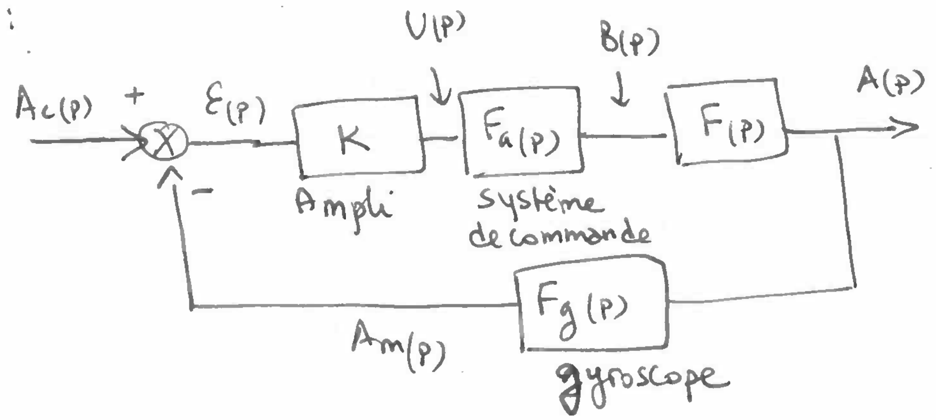
d/ La limite de stabilité est pour $M_g|_{dB} = 0\,dB$ et $M_\varphi = 0°$

soit lorsque $\boxed{K \simeq 6}$

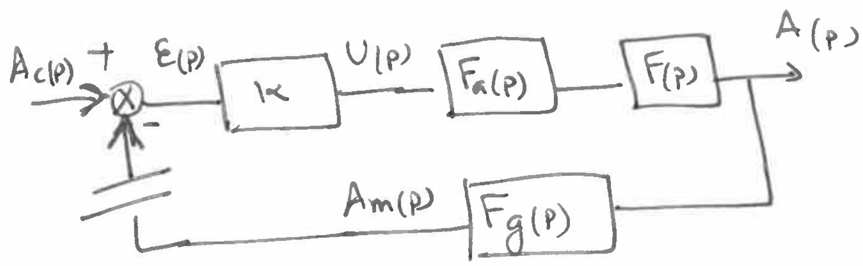
Si $K = 6$, alors le ballon va osciller

Exercice 2 :

1°/



2°/ F.T.BO :



FTBO :

$$G(p) = \frac{Am(p)}{A_c(p)} = Fa(p)\ F(p)\ F_g(p)\ K$$

Si $K = 1 \Rightarrow G(p) = Fa(p)\ F(p)\ F_g(p)$

Marges de stabilité : On procède comme pour l'exercice 2

$$M_g|_{dB} = -23{,}7 \text{ dB} \quad \text{à } w = 0.356 \text{ rad/s}$$

$$M_\varphi = 180 - 279 \quad \text{à } w = 0.938 \text{ rad/s}$$

$$M_\varphi = -35^\circ$$

Comme les marges de stabilité sont négatives alors le système est instable en boucle fermée

4°/ Le système est la limite de stabilité si :

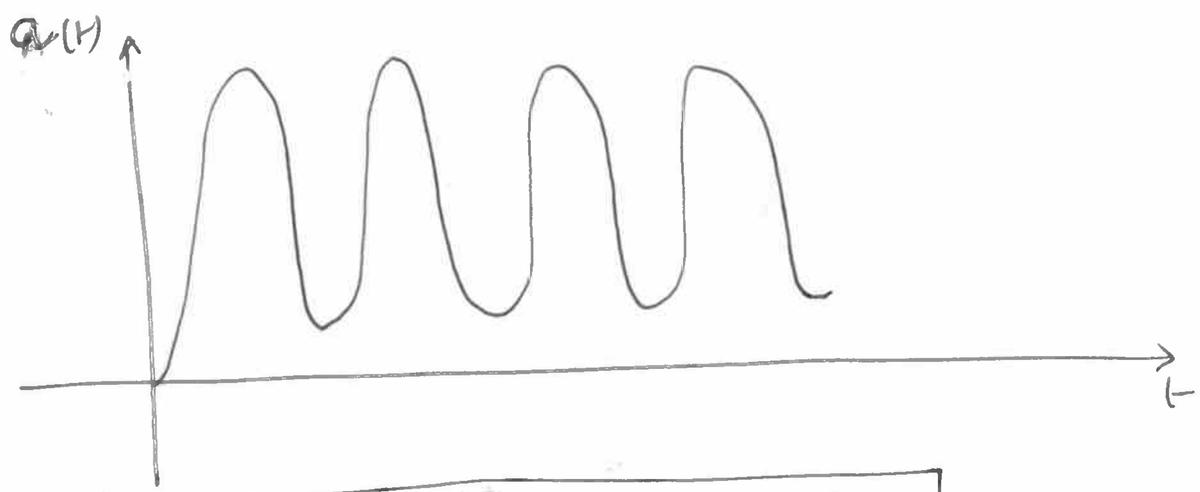
$$M_\varphi = 0^\circ \quad \text{et} \quad M_g|_{dB} = 0 \text{ dB}$$

soit $20 \log_{10} K = -23{,}7 \text{ dB} \rightarrow K = 10^{\frac{-23{,}7}{20}}$

soit $\boxed{K = 0{,}0668}$ pour $w =$

F.T.B.O : $G(p) = K \dfrac{0.05}{(1+2p)} \cdot \dfrac{0.4p + 2}{p(4p^2 + 2.4p + 1)} \times 8$

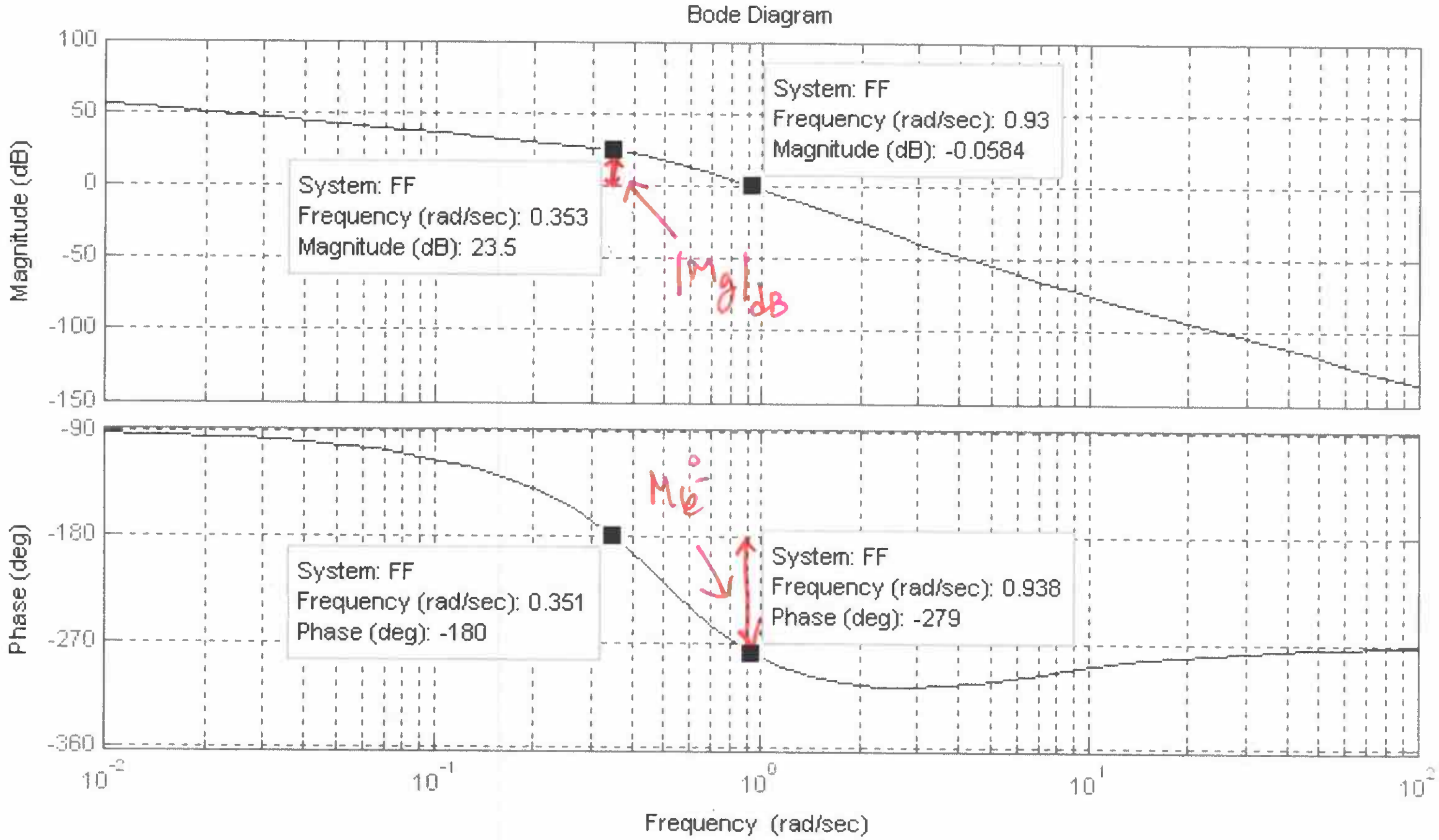
5°/ La réponse indicielle de la limite de stabilité : $a(t) = \mathcal{L}^{-1}[A(p)]$



$$\boxed{G(p) = \frac{0.16p + 0.8}{8p^4 + 8.8p^3 + 4.4p^2 + p} \cdot K}$$ F.T.B.O

14

Tracé TD3: Exercice 2



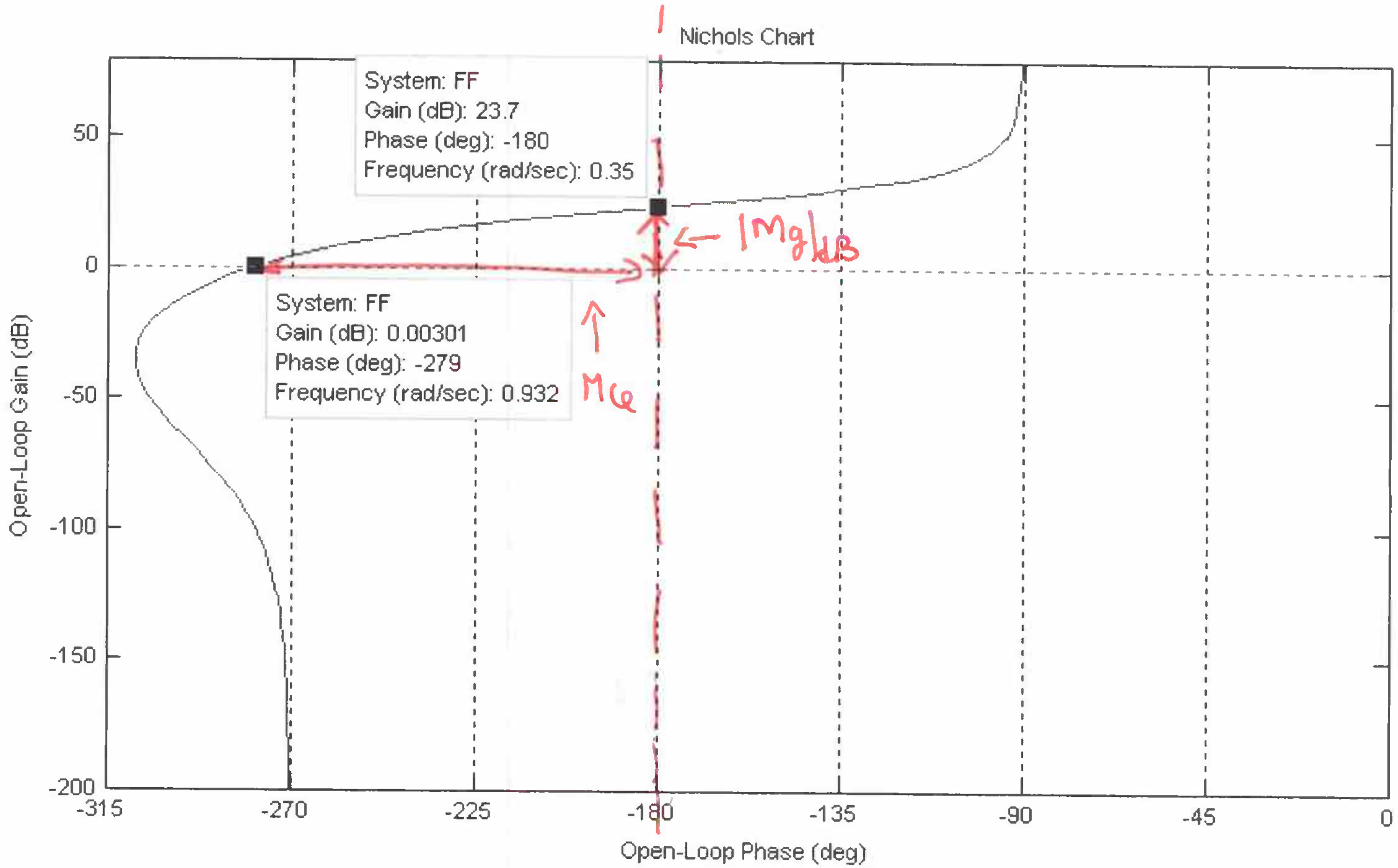

Nichols Chart
System: FF
Gain (dB): 23.7
Phase (deg): -180
Frequency (rad/sec): 0.35
System: FF
Gain (dB): 0.00301
Phase (deg): -279
Frequency (rad/sec): 0.932
|Mg|dB
Mφ
50
0
-50
-100
-150
-200
-315
-270
-225
-180
-135
-90
-45
0
Open-Loop Gain (dB)
Open-Loop Phase (deg)

Figure 2 : (Exercice 1)

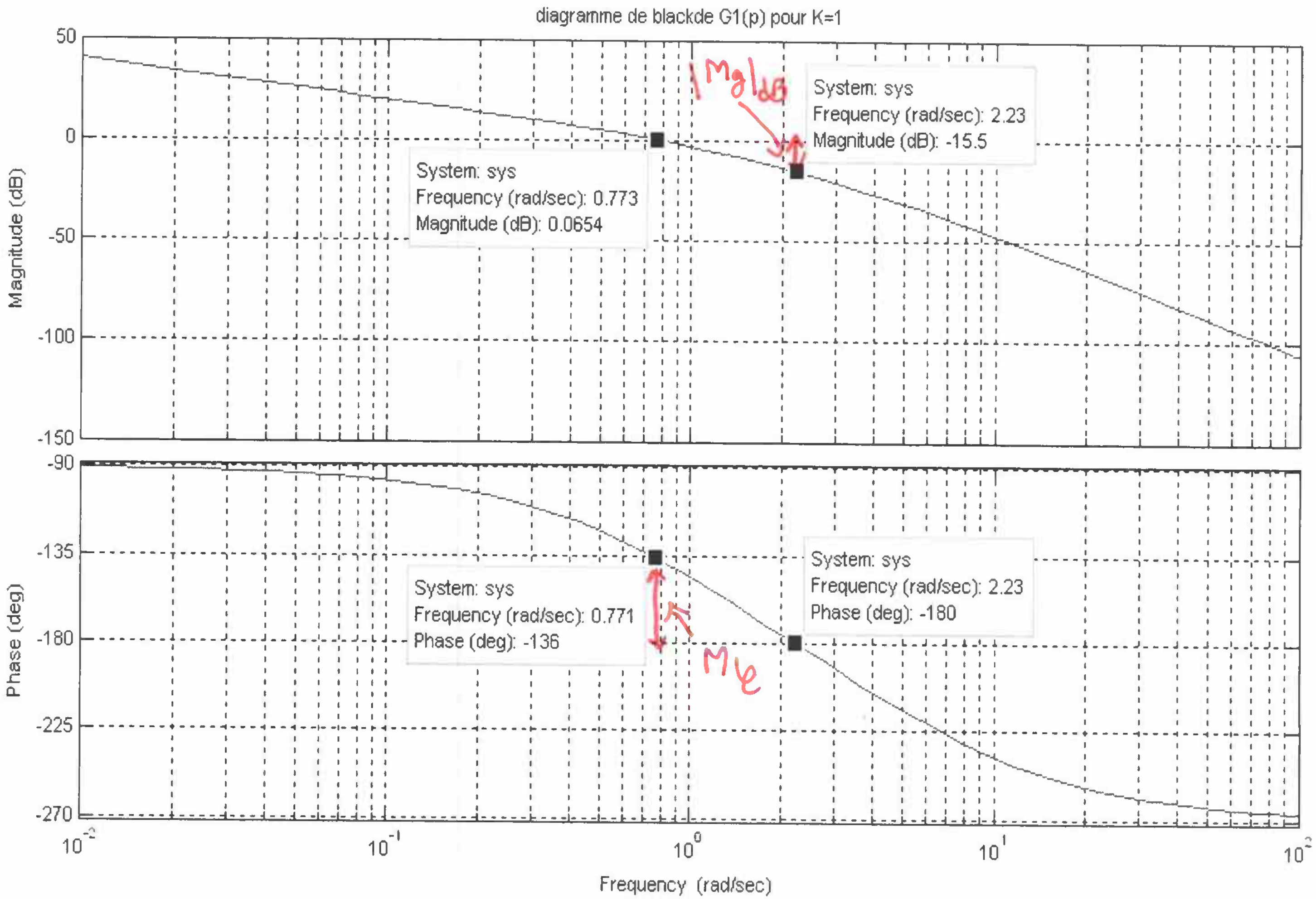


Figure2 (exercice 1)

Exercice 1 :

$$G(p) = \frac{30}{(1+0.5p)^3}$$

1°/ Orientation du tracé de la fonction de transfert dans le diagramme de Black : on fait une étude aux limites :

- $\omega \to 0$ $(p \to 0)$ $\Rightarrow G(j\omega) \simeq 30$ ou $G(p) \simeq 30$ $\Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| \to 30 \\ |G(j\omega)|_{dB} \to 20\log_{10} 30 \\ \arg(G(j\omega)) \to 0° \end{cases}$

- $\omega \to +\infty$ $(p \to +\infty)$ $\Rightarrow G(j\omega) \simeq \dfrac{30}{(0.5)^3(-j\omega^3)}$, $G(p) \simeq \dfrac{30}{(0.5)^3 p^3}$ $\Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| \to 0 \\ |G(j\omega)|_{dB} \to -\infty \\ \mathrm{Arg}(G(j\omega)) \to -270° \end{cases}$

Remarque : $G(j\omega) = \dfrac{30}{(1+0.5j\omega)^3} \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)| = \dfrac{30}{|(1+0.5j\omega)|^3} \\ \mathrm{Arg}(j\omega) = \mathrm{Arg}(30) - \mathrm{Arg}(1+0.5\omega j)^3 \end{cases}$

soit $$\boxed{|G(j\omega)| = \frac{30}{\sqrt{(1+0.25\omega^2)}\,(1+0.25\omega^2)}}$$

$$\mathrm{Arg}(G(j\omega)) = \cancel{\mathrm{Arg}(30)}^{\,0} - 3\arg(1+j0.5\omega)$$

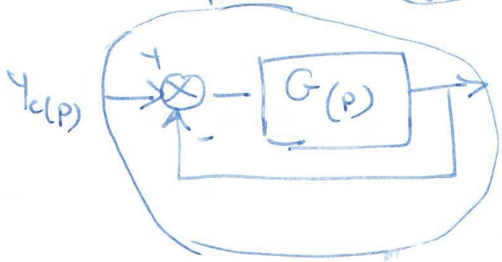
$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Arg}(G(j\omega)) = -3\,\mathrm{arctg}(0.5\omega)}$$

Sur la courbe en énoncé du TD, (Diagramme de Bode)

on a: $\underline{\omega = 3,46 \text{ rad/s}}$ $\longrightarrow$ $M_g\big|_{dB} = -11.5$ dB

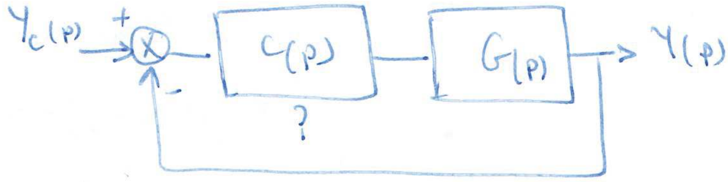
et $\underline{\omega = 5.88 \text{ rad/s}}$ $\longrightarrow$ $M_\varphi = -33.7^\circ$

on conclut que le système est instable en boucle fermée



← système en Boucle Fermée

3°/* On désire réaliser l'asservissement suivant



√* $C(p) = K_p$, calculons la valeur de K_p pour avoir la limite de stabilité.

d'après la question 2, si $K_p = 1$, alors

$\begin{cases} M_g\big|_{dB} = -11,5 \text{ dB} \\ \text{et } \omega = 3.46 \text{ rad/s} \end{cases}$ et $\begin{cases} M_\varphi = -33,7^\circ \\ \omega = 5.88 \text{ rads} \end{cases}$ $\Longrightarrow$ le système est instable en boucle fermée

si on exprime la FTBO en fonction de K_p, on a:

$$K_p G(p) = K_p \frac{30}{(1+0.5p)^3}$$

$$\Rightarrow |K_p G(p)|_{dB} = 20 \log_{10} K_p + 20 \log_{10} G(p)$$

$$\text{et } \operatorname{Arg}(K_p G(p)) = \cancel{\operatorname{Arg}(K_p)}^{\to 0^\circ} + \operatorname{Arg}(G(p))$$

on conclut que l'argument est indépendant de la valeur de K_p

* si $K_p = 1 \Rightarrow |K_p G(p)|_{dB} = |G(p)|_{dB}$, dans ce cas le système en Boucle Fermée est instable c'est ce qu'on a fait en question 2

* Si $K_p > 1 \Rightarrow |K_p G(p)|_{dB} = \underbrace{20 \log_{10}|K_p|}_{>0} + |G(p)|_{dB}$

$\Rightarrow$ cela signifie que la courbe dans le diagramme de Black sera translatée vers le haut, $\Rightarrow$ le système en BF sera instable (les margs de stabilité resteront < 0)

* Si $0 < K_p < 1 \Rightarrow |K_p G(p)|_{dB} = \underbrace{20 \log_{10} K_p}_{<0} + |G(p)|_{dB}$

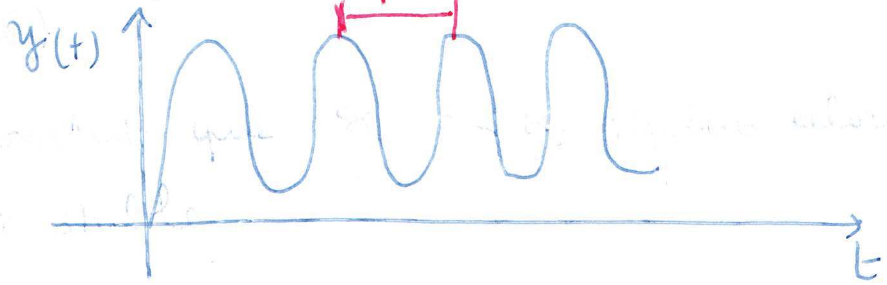
$\Rightarrow$ cela signifie que la courbe dans le diagramme de nichols sera translatée vers le bas.

Si $20 \log_{10}|K_p| = -11{,}5\,dB \Rightarrow K_p = 10^{-11{,}5/20} = 0.266$, pour $\underline{w = 3.46\,rad/s}$

alors le tracé de $K_p G(p)$ dans le diagramme de Black va passer par le point critique. Les margs de stabilité vont être nulles (voir figure au niveau du corrigé)

donc le <u>gain limite des stabilité</u> = <u>0.266</u> à <u>$w = 3{,}46\,rd/s$</u>

* Allure de la réponse indicielle en Boucle Fermée dans le cas où le système est à la limite de stabilité



$T = \dfrac{2\pi}{3.46}$

V Calcul de $C(p)$ = type PID avec la méthode de Zeigler-Nichols.

On utilise les paramètres donnés par l'essai indiciel en boucle fermée :

On connait le gain limite de stabilité :

$$\boxed{K = 0.266 \Rightarrow K_u = 0.266}$$

On connait la pulsation limite de stabilité

$$\underline{\omega = 3.46 \text{ rad/s}} \Rightarrow \underline{\omega_u = 3.46 \text{ rad/s}}$$

$$\Rightarrow T_u = \frac{2\pi}{\omega_u} = \frac{2\pi}{3.46} \Rightarrow T_u = 1.8159 \text{ s}$$

alors $C(p) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p\right)$

avec $K_p = 0.6 K_u \longrightarrow \boxed{K_p = 0.1596}$

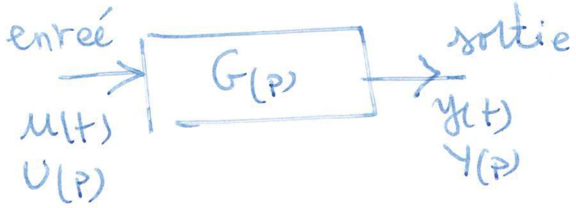
$T_d = \frac{T_u}{8} \longrightarrow \boxed{T_d = 0.226 \text{ s}}$

$T_i = \frac{T_u}{2} \longrightarrow \boxed{T_i = 0.907}$

Exercice 2 : . Soit le système ayant la Fonction de Transfert

$$G(p) = \frac{2}{1+5p} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{cöntante de temps} = 5\,s = \tau \\ \text{gain} = 2 = K \\ \text{Système du } 1^{e} \text{ ordre} \\ \text{pôle du système} = -1/5 \\ (5p+1) = 0 \end{array} \right.$$

temps de réponse = 3×5 = 15 s



1°/ * Gain statique : $\boxed{G(0) = 2}$

. Erreur statique : entreé échelon.

Erreur = entreé − sortie

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{E}(p) = U(p) - Y(p) \\ Y(p) = G(p)\,U(p) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}(p) = (1 - G(p))\,U(p)}$$

comme $U(p) = 1/p \Rightarrow \mathcal{E}(p) = \left(1 - G(p)\right)\frac{1}{p}$

$\Rightarrow \mathcal{E}(\infty)$ = erreur statique

$$\mathcal{E}(\infty) = \lim_{p \to 0} p\,\mathcal{E}(p) = \lim_{p \to 0} \cancel{p}\left[\left[1 - \frac{2}{1+5p}\right]\frac{1}{\cancel{p}}\right]$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(\infty) = 1 - 2 = -1 \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}(\infty) = -1}$$

. On peut tracer la réponse indicielle : comme c'est un système du 1^{e} ordre, la réponse indicielle est :

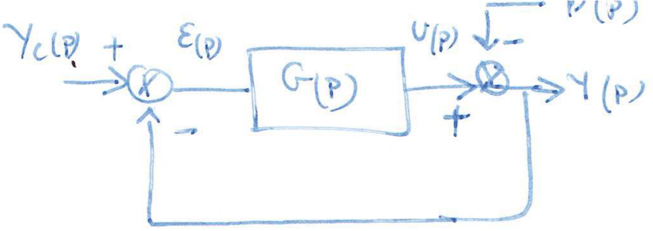
$$y(t) = \text{gain} * \left(1 - e^{-t/\text{constante de temps}}\right)$$

$$\boxed{y(t) = 2\left(1 - e^{-t/5}\right)}$$

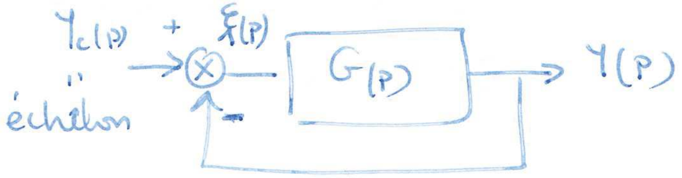
(Voir le tracé sur la feuille jointe)

t_{rBO} : temps de réponse en Boucle ouverte = 5×3 = 15 s

2°/*



a/* Si $D(p) = 0$ ⇒ pas de perturbation, on a :



$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \varepsilon_1(p) = Y_c(p) - Y(p) \\ Y(p) = \underbrace{\dfrac{G(p)}{1+G(p)}}_{F.T.BF} Y_c(p) \end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon_1(p) = \Big(1 - \underbrace{\dfrac{G(p)}{1+G(p)}}_{\frac{2}{3+5p}}\Big) Y_c(p)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1(p) = \left(1 - \frac{2}{3+5p}\right) \cdot \frac{1}{p} = \frac{5p+1}{p(3+5p)}$$

$$\varepsilon_1(\infty) = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon(p) = \lim_{p \to 0} \left[p \cdot \frac{(5p+1)}{p(3+5p)} \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_1(\infty) = 1/3}$$

b/* Si $D(p) \neq 0$, $Y_c(p) = 1/p$, $\varepsilon_2(p)$ = erreur statique avec perturbation non nulle

$$\Rightarrow \varepsilon_2(p) = Y_c(p) - Y(p)$$

$$Y(p) = U(p) - D(p)$$

$$U(p) = G(p)\, \varepsilon_2(p)$$

$$\varepsilon_2(p) = Y_c(p) - \left[G(p)\, \varepsilon_2(p) - D(p) \right]$$

$$\boxed{\varepsilon_2(p) = \frac{1}{1+G(p)} Y_c(p) + \frac{1}{1+G(p)} D(p)}$$

Exercice 2 : Soit le système ayant la Fonction de Transfert

$$G(p) = \frac{2}{1+5p} \Rightarrow \begin{cases} \text{constante de temps} = 5\,s = \tau \\ \text{gain} = 2 = K \\ \text{Système du } 1^{e} \text{ ordre} \\ \text{pôle du système} = -1/5 \\ (5p+1) = 0 \end{cases}$$

temps de réponse = 3x5 = 15 s

$$\text{entrée } u(t),\ U(p) \longrightarrow \boxed{G(p)} \longrightarrow \text{sortie } y(t),\ Y(p)$$

1°/ * Gain statique : $\boxed{G(0) = 2}$

• Erreur statique : entrée échelon.

Erreur = entrée − sortie

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E}(p) &= U(p) - Y(p) \\ Y(p) &= G(p)\,U(p) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}(p) = (1 - G(p))\,U(p)}$$

comme $U(p) = 1/p \Rightarrow \mathcal{E}(p) = \left(1 - G(p)\right)\frac{1}{p}$

$\Rightarrow \mathcal{E}(\infty)$ = erreur statique

$$\mathcal{E}(\infty) = \lim_{p \to 0} p\,\mathcal{E}(p) = \lim_{p \to 0} \left[\cancel{p}\left[1 - \frac{2}{1+5p}\right]\frac{1}{\cancel{p}}\right]$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(\infty) = 1 - 2 = -1 \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}(\infty) = -1}$$

- on peut tracer la réponse indicielle : comme c'est un système du 1^{e} ordre, la réponse indicielle est :

$$y(t) = \text{gain} * \left(1 - e^{-t/\text{constante de temps}}\right)$$

$$\boxed{y(t) = 2\left(1 - e^{-t/5}\right)}$$

(Voir le tracé sur la feuille jointe)

t_{rBO} = temps de réponse en Boucle ouverte = 5 x 3 = 15 s

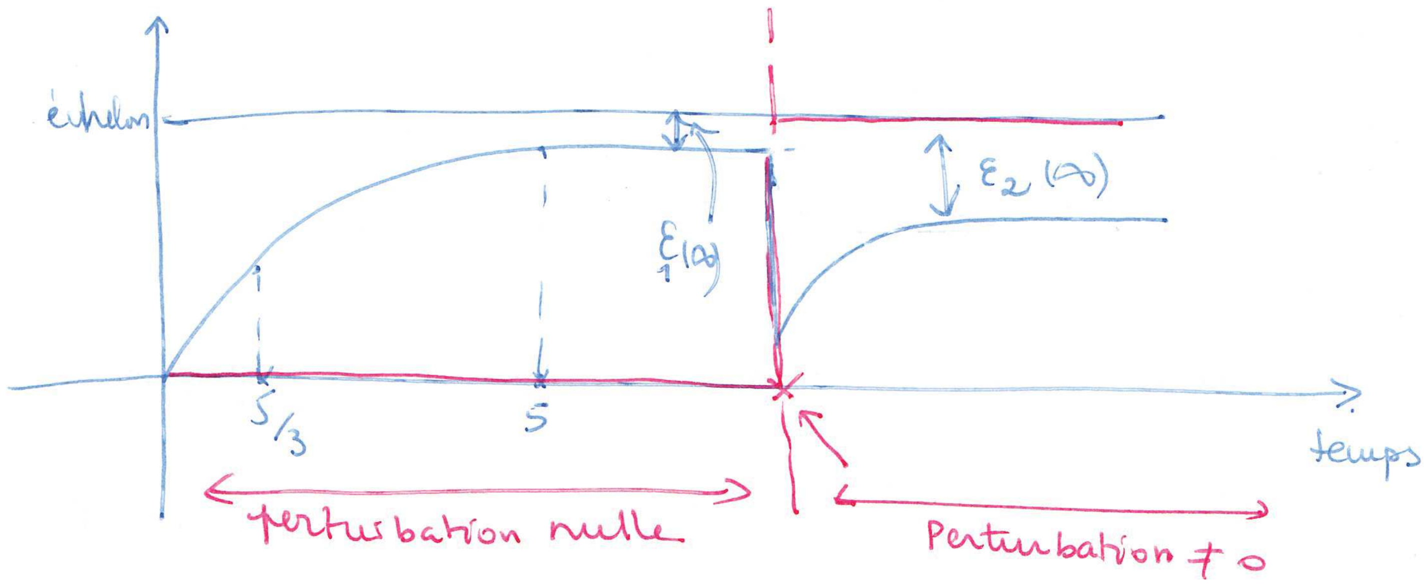
Si $D(p) = \text{échelon} = \frac{u_0}{p}$ $\quad u_0 < 1$ E1

$$\varepsilon_2(p) = \frac{1}{1+G(p)} \cdot \frac{1}{p} + \frac{u_0}{(1+G(p))\,p}$$

$$\varepsilon_2(p) = \frac{1+u_0}{(1+G(p))} \cdot \frac{1}{p} = \frac{(1+u_0)}{\left(1+\frac{2}{1+5p}\right)} \cdot \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_2(\infty) = \lim_{p \to 0} \cancel{p} \left[\frac{(1+u_0)(1+5p)}{(3+5p)\,\cancel{p}} \right] = \frac{1+u_0}{3}$$

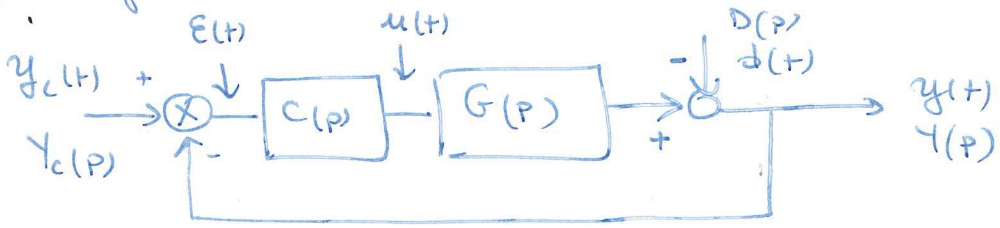
Remarque : La perturbation intervient après le régime permanent (comme montré au niveau de la figure du corrigé) :



$$\text{La FTBF} = \frac{2}{5p+3} = \frac{2/3}{\frac{5}{3}p+1} \Rightarrow \begin{cases} 1^{er} \text{ ordre} \\ \text{Constante de temps en BF} : 5/3 \text{ s} \\ \text{temps de réponse} = 3 \times \frac{5}{3} = 5 \text{ s} \\ \text{gain} = 2/3 \\ \text{pôle} = -3/5 \end{cases}$$

(voir tracé Matlab, $u_0 = 0.2 \Rightarrow \varepsilon_2(\infty) = \frac{1+0.2}{3} = \frac{1.2}{3} = 0.4$)

3°/ * on veut faire l'asservissement suivant :



d'après les questions précédentes : On avait :

- $\varepsilon(\infty) \neq 0$ (avec ou sans perturbation.
- Gain $\neq 1$ donc $y(\infty) \neq y_c(\infty)$
- Le temps de réponse $= \underline{\underline{5\,s}}$

- Pour annuler l'erreur statique : il faut un integrateur dans l'expression de $C(p) \Rightarrow$ action I
- Pour avoir un système 5 fois plus rapide en boucle fermée qu'en boucle ouverte il faut un Proportionnel $\Rightarrow$ P action proportionnel

. Comme c'est un système du 1er ordre $\left(\frac{2}{1+5p}\right)$ et on veut un système du 1er ordre en B.F alors la stabilité est garantie et on n'a pas besoin de l'action dérivée.

Le correcteur $C(p)$ est un correcteur P.I sa fonction de tranfert est de la forme :

$$C(p) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) = K_p\left(\frac{1 + T_i p}{T_i p}\right)$$

on fait comme dans le cours : on applique la méthode de compensation des pôls.

$G(p)$ admet pour pôle le pôle $= -1/5$

. on pose $\mathscr{D}(t) = 0$ (pas de perturbation), on calcule la

FTBO : $$C(p)\,G(p) = K_p\left(\frac{1+T_i p}{T_i p}\right) \cdot \frac{2}{1+5p}$$

$$\Rightarrow \text{FTBF} = \frac{K_p\,(\cancel{1+T_i p})\,2}{T_i p\,(\cancel{1+5p}) + 2K_p\,(\cancel{1+5p})} \Leftarrow \text{si } T_i = 5$$

on obtient :

$$\text{FTBF} = \frac{2K_p}{T_i p + 2K_p} = \frac{1}{\frac{T_i}{2K_p}p + 1}$$ 1^{e} ordre

. On veut un temps de réponse 5 fois plus petit en boucle fermée que la boucle ouverte

le temps de réponse de $G(p)$: $3 \times 5 \Rightarrow t_{r_{BO}} = 15\,s$

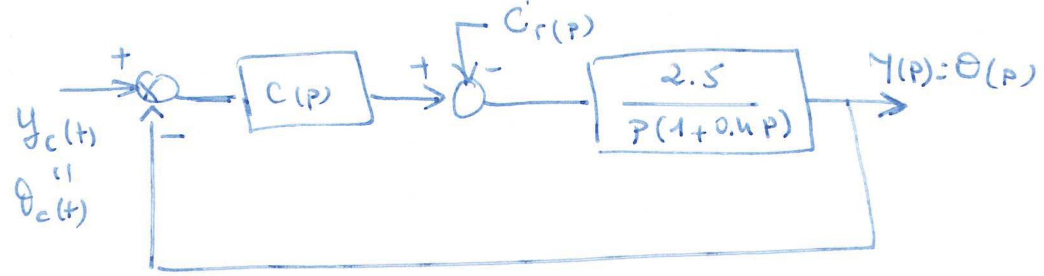
la FTBF $= \frac{1}{\frac{T_i}{2K_p}p + 1}$ admet pour temps réponse $= 3 \times \frac{T_i}{2K_p}$

soit $t_{r_{BF}} = \frac{3 \times 5}{2K_p} = \frac{15}{2K_p}$.

donc $t_{r_{BF}} = \frac{t_{r_{BO}}}{5} = 3\,s = \frac{15}{2K_p} \Rightarrow \boxed{K_p = \frac{15}{6}\,s}$

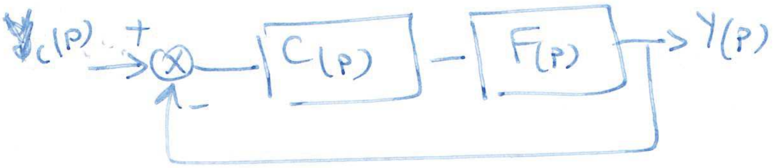
Constante de temps en boucle fermée avec correcteur PI $= \frac{T_i}{2K_p} = \frac{5 \times \cancel{6}^{3}}{\cancel{2} \times 15} = 1\,s$

Exercice 3 :



A * $C'_r(p) = 0$ (pas de perturbation)

Calculons la F.T.BF : $F(p) = \dfrac{2.5}{p(1+0.4p)}$



$$H(p) = \frac{C(p)\,F(p)}{1 + C(p)\,F(p)} \quad (1)$$

On veut $H(p)$ une fonction de transfert du 1er ordre avec un temps de réponse $t_r = 0.2\,s$ et une erreur statique nulle, donc :

$\dfrac{t_r}{3} = \dfrac{0.2}{3}$ = constante de temps de $H(p)$

et erreur statique nulle $\Rightarrow$ le gain $H(p) = 1$

on peut alors écrire : $H(p) = \dfrac{1}{1 + \frac{0.2}{3}p}$

$(1) \Rightarrow H(p) + H(p)C(p)F(p) = C(p)F(p)$

$\Rightarrow (1 - H(p))\,F(p)\,C(p) = H(p)$

$$\Rightarrow \boxed{C(p) = \frac{H(p)}{(1 - H(p))\,F(p)}}$$

$$C(p) = \frac{1}{\left(1 + \frac{0.2}{3}p\right)\left[1 - \frac{1}{1 + \frac{0.2}{3}p}\right]\frac{2.5}{p(1+0.4p)}}$$

$$\Rightarrow C(p) = \frac{1}{\left[1+\frac{0.2}{3}p\right]\left[1-\frac{1}{1+\frac{0.2}{3}p}\right]\left(\frac{2.5}{p(1+0.4p)}\right)}$$

$$\Rightarrow C(p) = \frac{p(1+0.4p)}{\cancel{\left(1+\frac{0.2}{3}p\right)}\left(\frac{0.2p}{\cancel{1+\frac{0.2}{3}p}}\right)2.5}$$

$$\Rightarrow \boxed{C(p) = 6(1+0.4p)}$$ ⇐ c'est la fonction de transfert d'un correcteur P. D ← dérivée.
Proportionnel

B → $\underline{C'_r(p) \neq 0}$ ⇒ $C'_r(p)$ = échelon

Calculons l'erreur statique :

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon(p) = Y_c(p) - Y(p) \\ Y(p) = F(p)\left[U(p) - C'_r(p)\right] \\ U(p) = C(p)\,\varepsilon(p) \end{array}\right\} \boxed{\varepsilon(p) = \frac{1}{1+C(p)F(p)} Y_c(p) + \frac{F(p)}{1+C(p)F(p)} C'_r(p)}$$

$Y_c(p) = 1/p$; $C'_r(p) = \frac{u_0}{p}$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p\to 0} \cancel{p}\left[\frac{1}{1+C(p)F(p)}\left(1+F(p)u_0\right)\frac{1}{\cancel{p}}\right]$$

$$= \lim_{p\to 0}\left[\frac{1}{\left[1+\frac{\cancel{(1+0.4p)}6\times 2.5}{p\cancel{(1+0.4p)}}\right]}\left(1+\frac{u_0 2.5}{p(1+0.4p)}\right)\right]$$

$$= \lim_{p\to 0}\left[\left(\frac{\cancel{p}}{\underset{0}{p}+2.5\times 6}\right)\left(\frac{\cancel{p(1+0.4p)}+u_0 2.5}{\cancel{p}(1+\cancel{0.4p})}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon(\infty) = \frac{u_0}{6}}$$ (voir graphique corrigé)

C/* On utilise un correcteur type P I D

D/* calcul des paramètres

$$C(p) = K_p\left(1+\frac{1}{T_i p}+T_d p\right) = \frac{K_p}{T_i p}\left(1+T_i p+T_i T_d p^2\right)$$

$$C(p) = \frac{K_p}{p T_i}\overbrace{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}^{(1+(\tau_1+\tau_2)p+\tau_1\tau_2 p^2)}$$

avec

$\tau_1+\tau_2 = T_i$ (1)

$\tau_1 \tau_2 = T_i T_d$ (2)

on calcule la F.TBF :

$$FTBoF = H(p) = \frac{C(p)F(p)}{1+C(p)F(p)} \; : \; C(p)F(p) = \frac{2.5(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)K_p}{T_i p^2(1+0.4p)}$$

$$H(p) = \frac{K_p\cancel{(1+\tau_1 p)}(1+\tau_2 p)\,2.5}{K_p\cancel{(1+\tau_1 p)}(1+\tau_2 p)\,2.5 + T_i p\,(p\,\cancel{(0.4p+1)})}$$

on procède par compensation (par simplification)

on pose : $\boxed{\tau_1 = 0.4\ s}$

on obtient
$$H(p) = \frac{2.5K_p}{2.5K_p(1+\tau_2 p)+T_i p^2}(1+\tau_2 p)$$

$$\Rightarrow \boxed{H(p) = \frac{\frac{2.5K_p}{T_i}}{p^2+\frac{2.5K_p\tau_2}{T_i}p+\frac{2.5K_p}{T_i}}(1+\tau_2 p)}$$

on peut poser :

$$w_n^2 = \frac{2.5}{T_i}K_p \quad (3) \quad ; \quad 2\xi w_n = \frac{2.5K_p}{T_i}\tau_2 \quad (4)$$

d'après le cahier des charges on veut : temps de réponse en Boucle fermée = 0.3 s ,

$H(p)$ est du second ordre, on utilise la courbe (TD 1) ; qui donne $w_n t_r = f(\xi)$

on peut lire que pour : $\xi = 0.707 \Longrightarrow w_n t_r = 3$

on peut fixer $\xi = 0.707$

$$\Rightarrow w_n t_r = 3 \Rightarrow w_n = \frac{3}{t_r} = \frac{3}{0.3} = 10 \text{ rad/s}$$

$$(4) \Rightarrow 2\xi w_n = \underbrace{\frac{2.5\,K_p}{T_i}}_{w_n^2} \tau_2 \Rightarrow \boxed{\tau_2 = \frac{2\xi}{w_n}} \qquad \tau_2 = \frac{2 \times 0.707}{10}$$

$$\boxed{\tau_2 = 0.1414 \text{ s}}$$

$$(1) \Rightarrow \boxed{\tau_1 + \tau_2 = T_i} \qquad \Rightarrow T_i = (0.1414 + 0.4) \text{ s}$$

$$\boxed{T_i = 0.5414 \text{ s}}$$

$$(2) \Rightarrow \tau_1 \tau_2 = T_i T_d \Rightarrow \boxed{T_d = \frac{\tau_1 \tau_2}{T_d}} \qquad T_d = \frac{0.4 \times 0.1414}{0.5414}$$

$$\boxed{T_d = 0.1045 \text{ s}}$$

$$(3) \Rightarrow w_n^2 = \frac{2.5}{T_i} K_p \Rightarrow \boxed{K_p = \frac{T_i}{2.5} w_n^2} \qquad K_p = \frac{0.1045}{2.5} 100$$

$$\Rightarrow \boxed{K_p = 21{,}656}$$

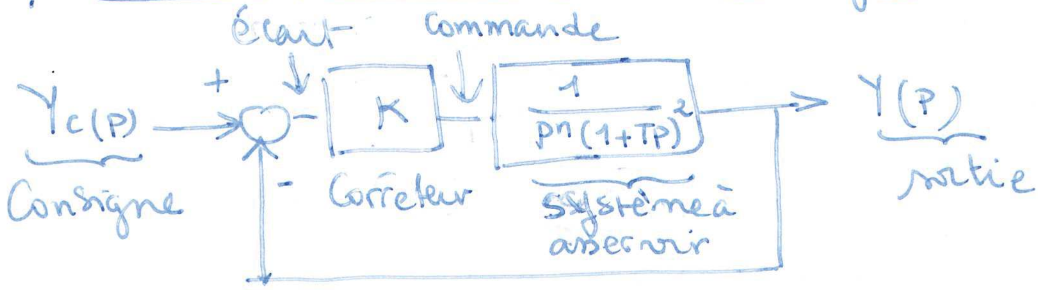
Exercice 4 : Soit $F(p)$ la fonction de transfert en B.O

(correcteur proportionnel et système à asservir)

donc : $$F(p) = \frac{K}{p^n (1+Tp)^2} = C(p) \cdot G(p)$$

$$F.T.B.O = F(p) = K \cdot \frac{1}{p^n (1+Tp)^2}$$

1°/ * Schéma fonctionnel en boucle fermée :



; erreur = écart

2°/ * Calcul de la fonction de transfert en Boucle Fermée

$$FTBF = H(p) = \frac{C(p)\,G(p)}{1 + C(p)\,G(p)} = \left(\frac{F(p)}{1 + F(p)}\right) = \frac{Y(p)}{Y_c(p)}$$

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{p^n (1+Tp)^2 + K}}$$

3°/ * L'objectif est de calculer n, K et T

Le cahier des charges est :

- Lorsque la consigne $Y_c(p)$ = rampe de pente unitaire, l'erreur de traînage $= 1/50$.

c'est à dire pour $Y_c(p) = \frac{1}{p^2} \longrightarrow \varepsilon(\infty) = 1/50$

- La marge de gain en boucle fermée est 6 dB

$$\Rightarrow \boxed{M_g|_{dB} = 6\,dB}$$

Comme on veut une erreur de traînage constante ($\varepsilon(\infty) = 1/50$) alors il faut qu'on ait 1 intégrateur au niveau de la FTBO. Donc $F(p)$ doit avoir $n=1$ $\Rightarrow$ $\boxed{F(p) = \frac{K}{p} \frac{1}{(1+Tp)^2}}$

- Calcul de l'erreur :

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon(p) = Y_c(p) - Y(p) \\ Y(p) = H(p) Y_c(p) \end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon(p) = (1 - H(p)) Y_c(p)$$

$$\Rightarrow \varepsilon(p) = \left[1 - \frac{K}{p(1+Tp)^2 + K} \right] \frac{1}{p^2}$$

$$\varepsilon(p) = \left(\frac{p(1+Tp)^2 + K - K}{p(1+Tp)^2 + K} \right) 1/p^2$$

$$\varepsilon(p) = \left(\frac{p(1+Tp)^2}{p^n(1+Tp)^2 + K} \cdot 1/p^2 \right.$$

$$\Rightarrow \varepsilon(\infty) = \lim_{p \to 0} \cancel{p} \left(\frac{\cancel{p}(1+Tp)^2}{\cancel{p}(1+Tp)^2 + K} \cdot \frac{1}{\cancel{p^2}} \right) = 1/50$$

$$= \lim_{p \to 0} \left(\frac{(1+Tp)^2}{p(1+Tp)^2 + K)} \right) = 1/50$$

$$\varepsilon(\infty) = \frac{1}{K} = \frac{1}{50} \Rightarrow \boxed{K = 50}$$

- Calcul de T :

On veut une $M_g|_{dB} = 6dB \Rightarrow M_g = 10^{6/20} = 2$

On exprime la marge de gain :

d'après le cours (à partir de la définition de la marge de gain) :

On cherche $w = ?$ tel que $\text{Arg}(F(p))\Big|_{p=jw} = -180°$

et on résout $M_g\Big|_{dB} = -\left|F(jw)_p\right|_{dB} = 20\log_{10}\left|\frac{1}{F(jw)}\right|$ ①

exprimons Argument de $F(jw)$:

$$F(p)\Big|_{p=j=0} = \frac{K}{(jW)} \cdot \frac{1}{(jTw+1)^2}$$

$$\Rightarrow \text{Arg}(F(jw)) = \cancel{\text{Arg}(K)} + \text{Arg}\left(\frac{1}{jw}\right) + \text{Arg}\left(\frac{1}{(1+jwT)^2}\right)$$

$K > 0$

$$\text{Arg}(F(jw)) = -90° + 2\,\text{Arg}\left(\frac{1}{1+jwT}\right)$$

soit $\text{Arg}(F(jw)) = -90 - 2\,\text{arctg}(Tw)$

donc on cherche $w = w_0$ tel que $\text{Arg}(F(jw_0)) = -180°$

$$\Rightarrow -180° = -90° - 2\,\text{arctg}(Tw_0)$$

$$\Rightarrow -2\,\text{arctg}(Tw_0) = -90°$$

$$\Rightarrow \text{arctg}(Tw_0) = 45° \Rightarrow \boxed{Tw_0 = 1}$$

on calcule le $|F(jw)|_{w=w_0}$

$$|F(jw_0)| = \frac{K}{|jw_0|\,|(1+j\underbrace{Tw_0}_{1})^2|}$$

$$= \frac{K}{w_0\,(1+T^2w_0^2)}$$

à partir de (1)

$$M_g\big|_{dB} = 20\log_{10}\left(\frac{1}{|F(j\omega)|}\right) = 20\log_{10} M_g$$

donc pour $w = w_0$

$$\Rightarrow M_g = \frac{1}{|F(j\omega)|} = 2$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{|j\omega_0|\,|(1+jT\omega_0)^2|}{K} = \frac{\omega_0\,(1+\overbrace{T^2\omega_0^2}^{1})}{K}$$

$$2 = \frac{\omega_0\,(1+\overbrace{T\omega_0}^{1})}{K} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2K}{2} = K$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_0 = 50 \text{ rad/s}}$$

or $\omega_0 T = 1 \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{\omega_0}}$

Exercice 1 :

Questions 1 et 2

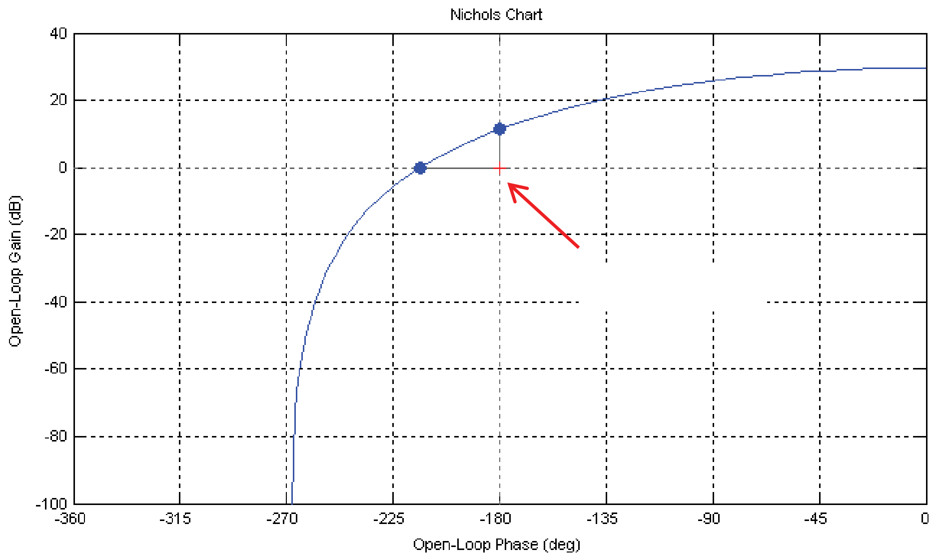


Figure 2 Tracé de Black de G(p) avec les marges de stabilité

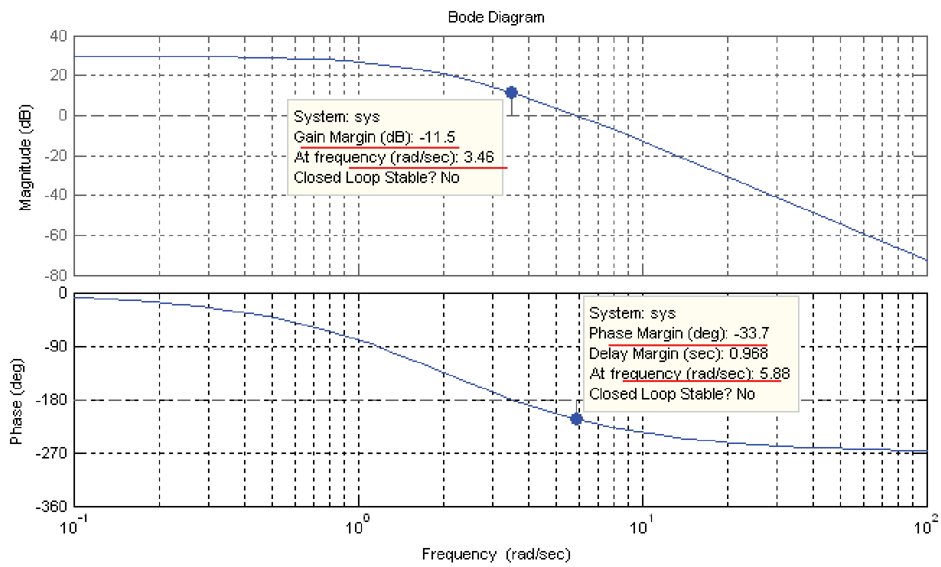
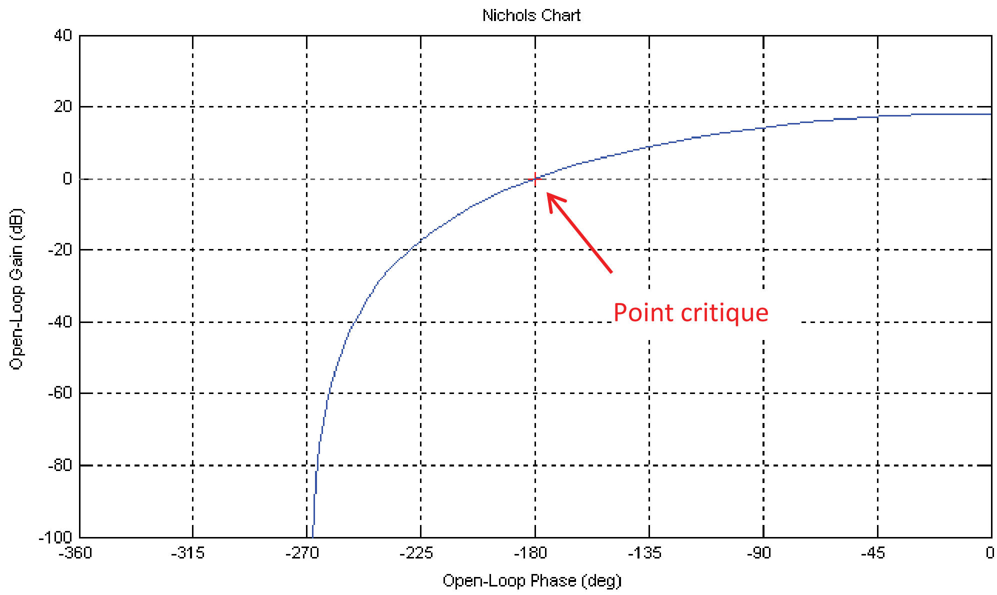
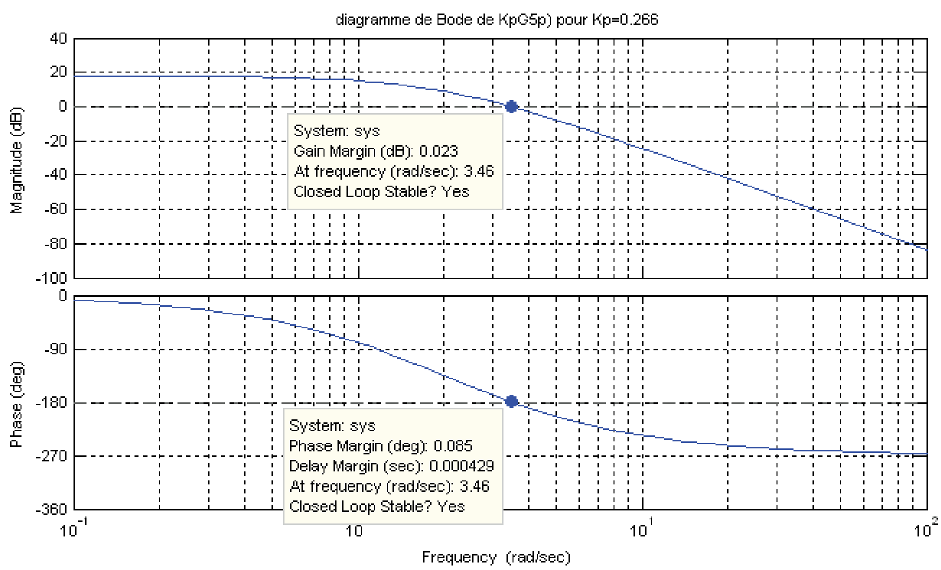


Figure 2 Tracé de Bode de G(p) avec les marges de stabilité

Question 3 : Cas de la limite de stabilité

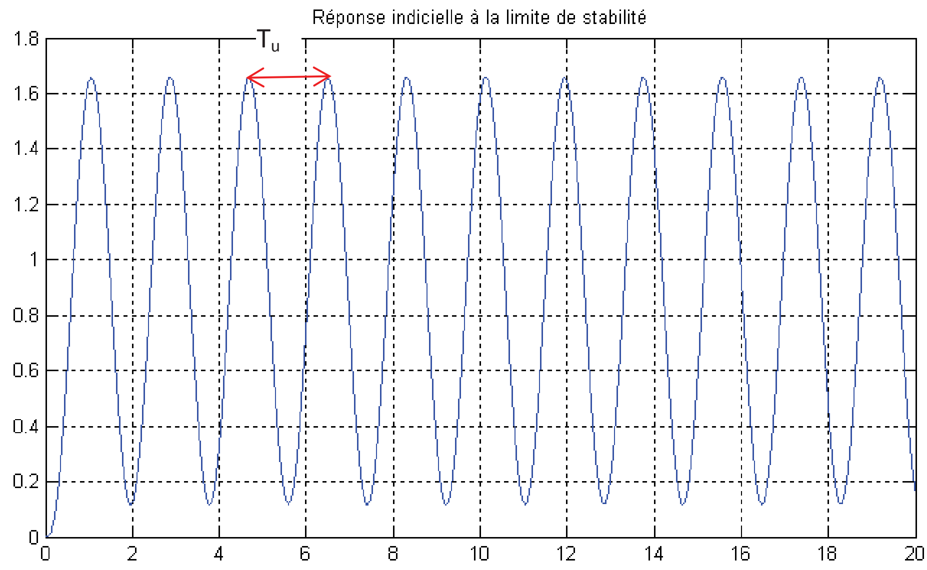


Tracé de black pour $K_pG(p)$ lorsque K_p=0.266



Tracé de Bode pour $K_pG(p)$ lorsque K_p=0.266

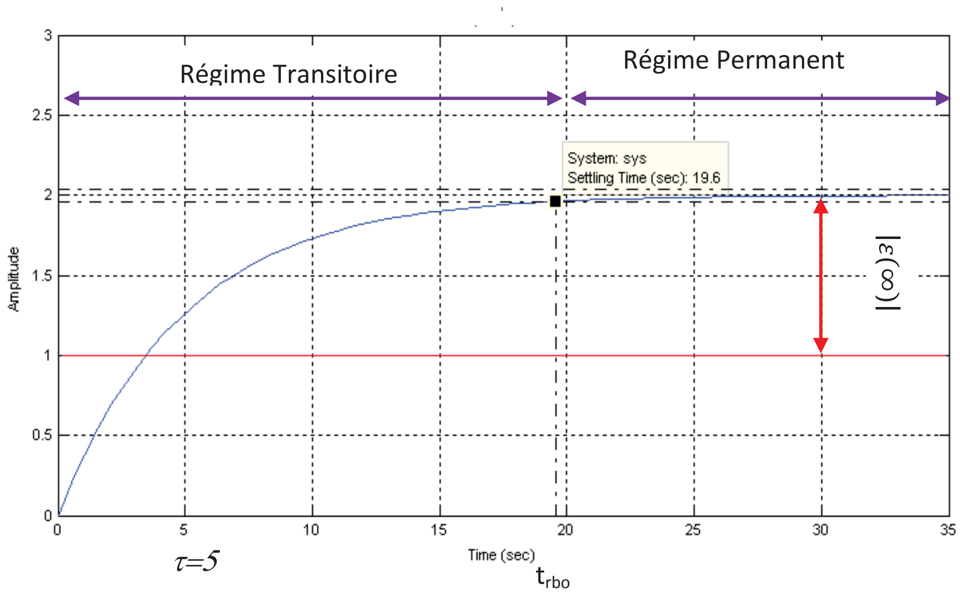
Réponse indicielle à la limite de stabilité (obtenu avec MATLAB/SIMULINK)



Tu= période des oscillations lorsque le système est à la limite de stabilité

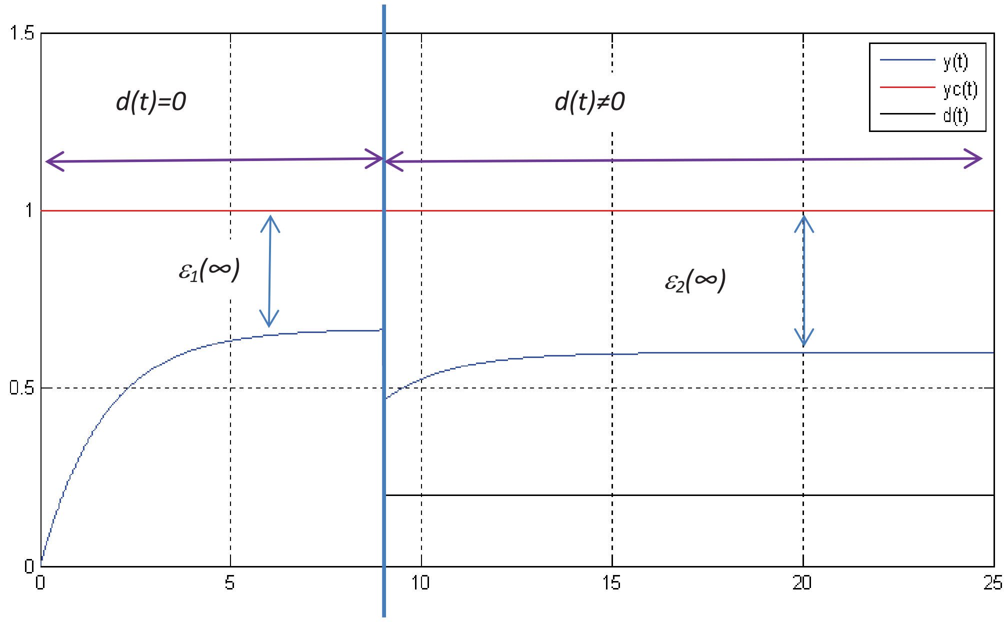
Exercice 2 :

Question 1 : tracé de la réponse indicielle en boucle ouverte



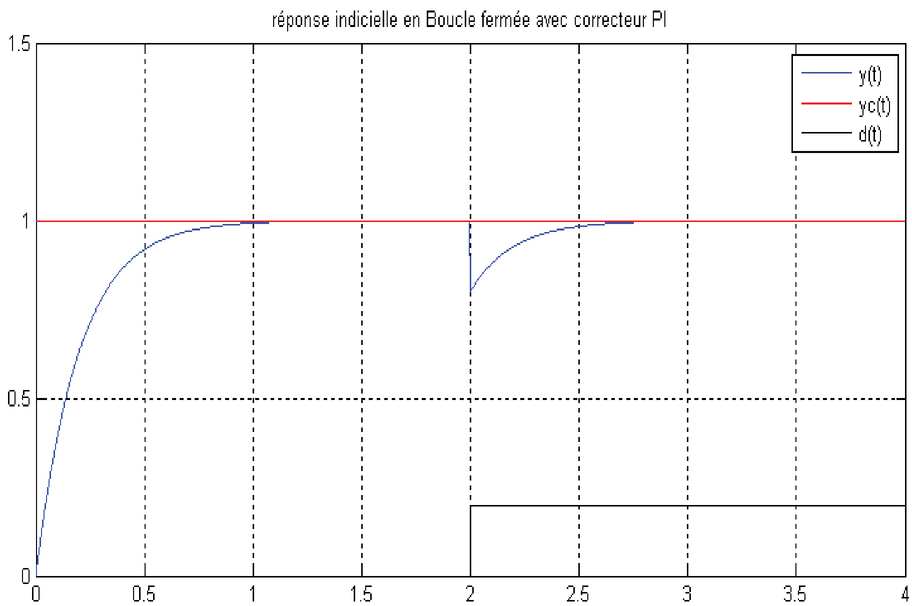
Réponse indicielle en boucle ouverte

Question 2



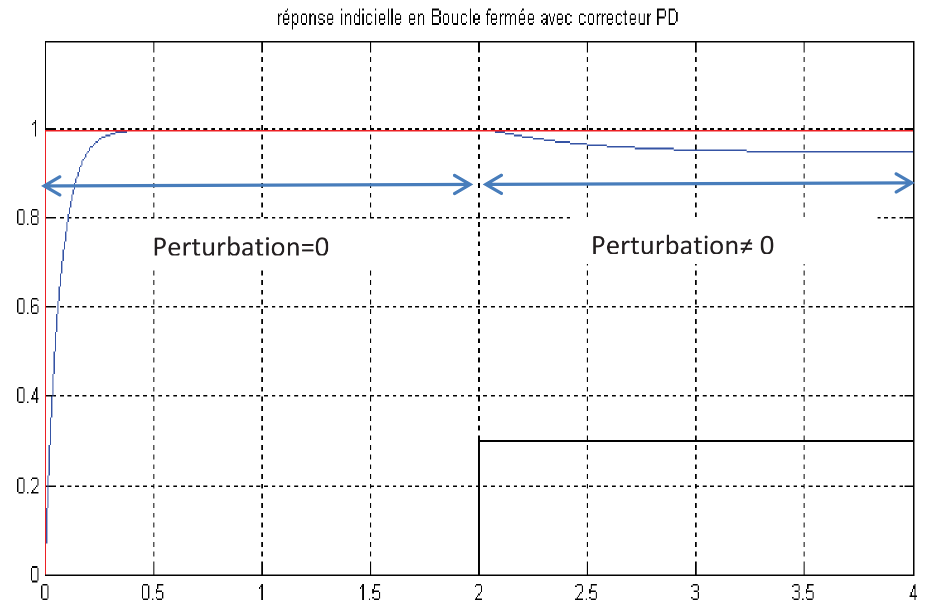
Réponse indicielle question 2 avec et sans perturbation

Question 3 :



Exercice 3

Questions A et B



Question D: Trace de la réponse indicielle avec correcteur PID