TD 0

Transformée de Laplace

Exercice 1 :

A- Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

1- fonction polynôme : $f(t) = t^n$, (n > 0)

2- fonction exponentielle : $f(t) = e^{-at}t^n$

3- fonction sinus amortie : $f(t) = e^{-at}\sin(\omega t)$

4- fonction cosinus amortie : $f(t) = e^{-at}\cos(\omega t)$

B- Les transformées inverses de Laplace, en utilisant la table des transformées de Laplace, des fonctions suivantes :

$$F(p) = \frac{p+2}{(1+p)(p+3)}, \; F(p) = \frac{3e^{-p}}{(1+p)p} \;, \; F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2+1}, \qquad F(p) = \frac{2pe^{-p}}{p^2+4}$$

Exercice 2 :

Soit y la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i}(t) = 1 \;, \; t \geq 0$$

Calculer la transformée de Laplace Y(p) de $y(t)$ pour :

1. $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 1$ — $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

2. $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, $a_2 = 4$, $a_3 = 1$ — $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$

3. $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_2 = 1$ — $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

avec les conditions initiales suivantes : $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$

Exercice 3 :

Trouver la réponse forcée du système décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 2u(t)$$

où $u(t) = e^{-3t}$ $t \geq 0$

Exercice 5 :

Trouver le signal de sortie d'un système décrit par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t)$$

où

. Signal rampe : $u(t) = t$ $t \geq 0$

. Signal échelon : $u(t)=1$

. Signal harmonique : $u(t)=\sin(\omega t)$

TD n° 1

Exercice 1 :

Soit un système linéaire modélisé par la fonction de transfert $G(p) = \dfrac{12}{25\,p^2 + 10\,p + 4}$

1- Donner les pôles de G(p) ? Que peut-on conclure

2- Déterminer le gain statique, la pulsation naturelle ω_n et le facteur d'amortissement ξ.

3- Donner le temps de réponse (utiliser la figure 1)

4- Calculer l'erreur

a. Lorsque l'entrée est un échelon unitaire.
b. Lorsque l'entrée est une rampe.

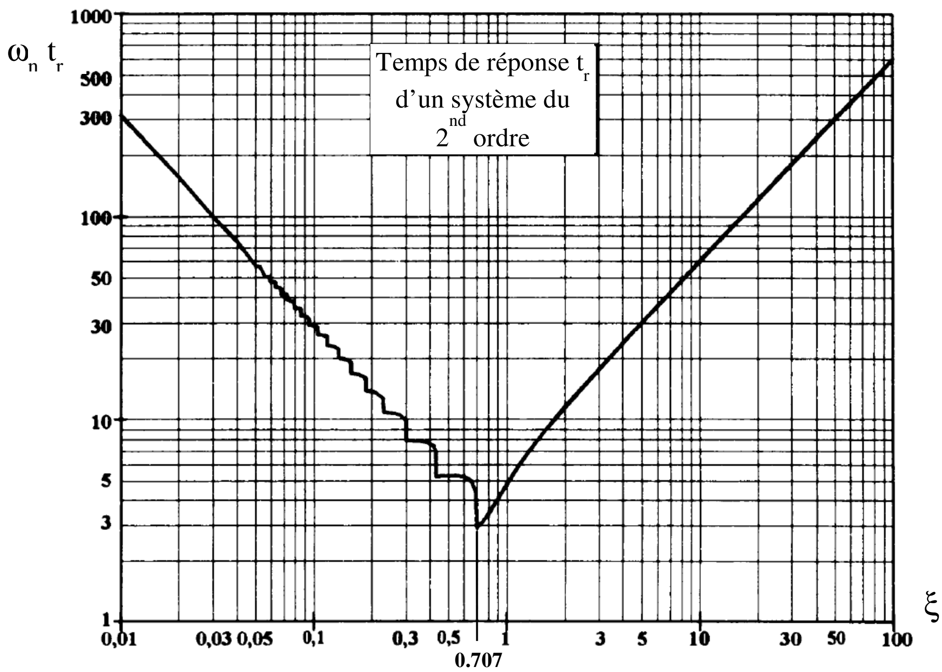
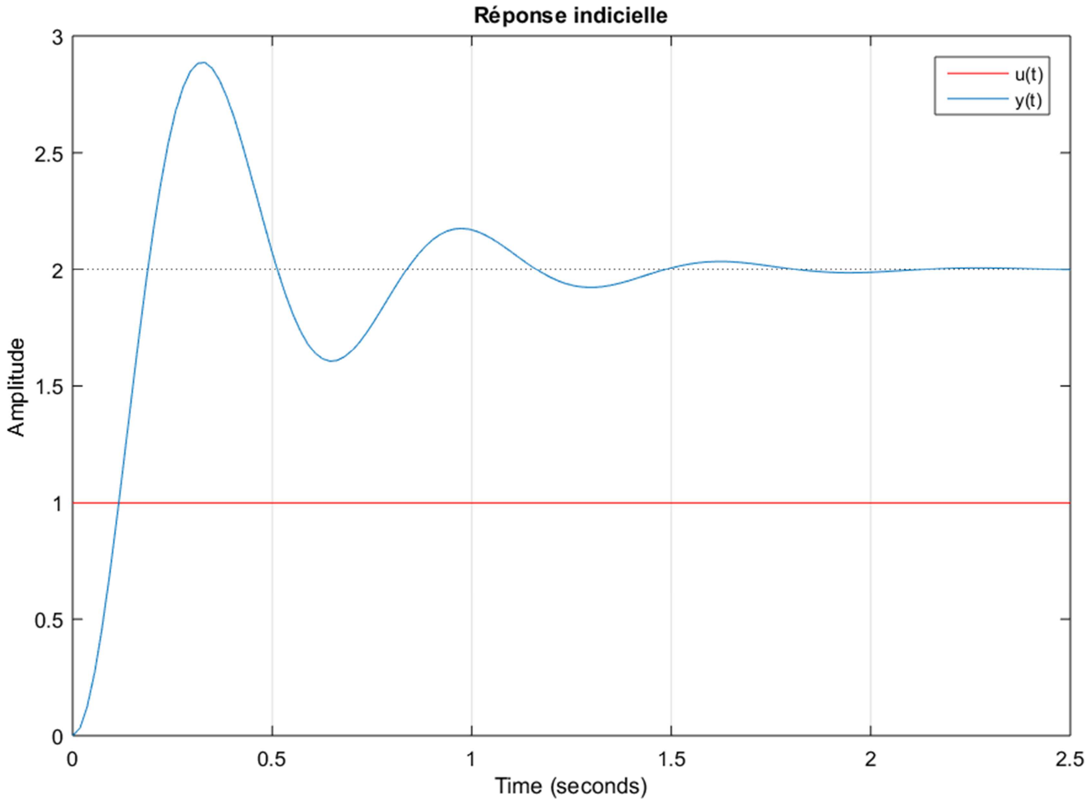


Figure 1. Temps de réponse d'un système du 2^{nd} ordre

Exercice 2 :

La figure ci-dessous représente la réponse indicielle d'un système du second ordre y(t) ainsi que l'entrée échelon u(t).

Indiquer graphiquement sur la figure : l'erreur, le régime permanent et le régime transitoire, le premier dépassement, l'instant du 1^{er} dépassement, la valeur finale, le temps de réponse.



Exercice 3 :

Soit, le système représenté par le schéma fonctionnel suivant :

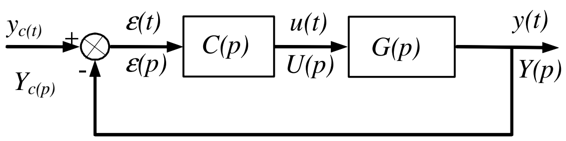
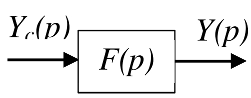


Figure 1. Système en Boucle Fermée

$$G(p) = \frac{1}{1 + T\ p} \qquad \text{où } T > 0$$

1. Soit C(p) = K (K est une constante positive)

   a- Calculer la **F**onction de **T**ransfert en **B**oucle **F**ermée (on note la FTBF : F(p)) et mettre le système sous la forme suivante :



   b- Dire quel est l'ordre de F(p)

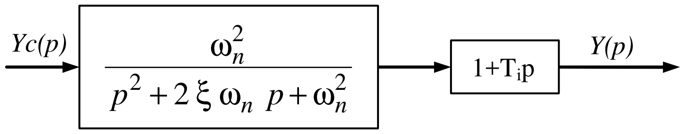
   c- Donner l'expression de la constante de temps et du temps de réponse à 95% e temps de réponse d- Donner l'expression de la réponse indicielle (lorsque l'entrée est un échelon unitaire)

e- Tracer l'allure de la réponse indicielle du système.

f- Quelle est l'influence de K sur la réponse : sur l'erreur et le temps de réponse.

2. Soit, maintenant, $C(\mathrm{p}) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i\,p}\right)$ avec $T_i > 0$.

a- Mettre le shcéma de la figre 1 sous la forme suivante :



a- Déterminer ω_n et ξ en fonction des paramètres T, K_p et T_i.

b- Calculer l'erreur statique.

c- En prenant $K = 1$ déterminer T_i pour obtenir $\xi = 1$.

d- Quelle est l'influence de T_i sur la réponse du système (en ne tenant pas compte de l'influence du numérateur) ?

e- Pour $T_i = T$ quelle est l'influence de K sur la réponse du système ?

TD n° 2

Diagramme de Bode et de Black

Exercice 1 :

Calculer et tracer la réponse indicielle du système décrit par la fonction de transfert suivante :

$$F(p) = \frac{1+T_1 p}{1+T_2 p}$$

Considérer les cas où $0 < T_1 < T_2$ et $0 < T_2 < T_1$

Tracer le diagramme de Bode (les asymptotes et le tracé exact) de ce système avec $T_2 = T_1/2 = 1$.

Déduire le diagramme de Balck

Exercice 2 :

La fonction de transfert entre l'angle de braquage du gouvernail de profondeur *b(t)* qui commande la manœuvre (gouverne) et l'assiette d'un avion *a(t)* (angle que fait l'axe longitudinal de l'avion avec l'axe horizontal) a été modélisé par :

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{2(0.2p+1)}{p(4p^2+2.4p+1)}$$

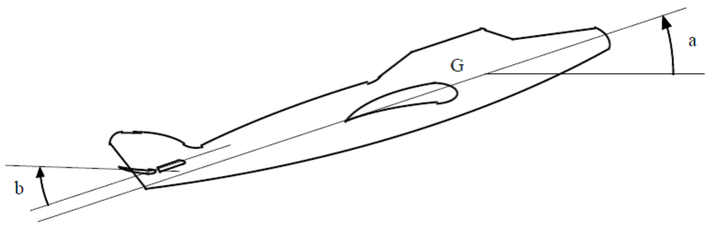


Figure 1 Schéma de l'avion

Le système de gouverne comporte les dispositifs suivants :

- Un système de commande électrique du gouvernail dont la fonction de transfert est :

$$F_a(p) = \frac{B(p)}{U(p)} = \frac{K_a}{2p+1} \quad \text{avec } K_a=0.05 \text{ rad/V}$$

- Un détecteur d'assiette (gyroscope) qui fournit un signal électrique proportionnel à l'assiette réelle représenté par $\frac{A_m(p)}{A(p)} = F_g(p) = K_g$ avec K_g*=8 V/rad*

Le schéma fonctionnel représentant le système de gouverne de l'assiette d'un avion est le suivant :

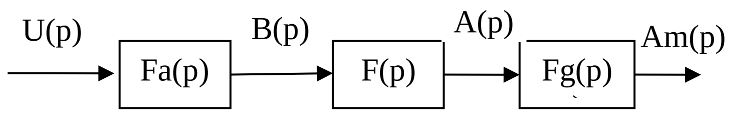


Figure 2 Schéma fonctionnel

Tracer le diagramme de Bode (asymptotes et tracé à main levé) de la fonction de transfert du système de gouverne ainsi que le diagramme de Black

Exercice 3

Le principe de la montgolfière représenté par la figure 3 est le suivant : un ballon contient de l'air qui est chauffé par un brûleur (par exemple alimenté en gaz). L'air chaud étant plus léger, le ballon et la nacelle s'élèvent.

On notera les grandeurs suivantes (toutes positives dans le sens de la montée) :

– $h(t)$: l'altitude de la nacelle par rapport à la hauteur de référence.

– $u(t)$: signal de commande du brûleur en volt.

– $\theta(t)$: différence de température ballon (air chaud)/ température extérieure (air froid).

– $v(t)$: vitesse de la montgolfière.

– $w(t)$: vitesse du vent dans le sens vertical (qui peut être vu comme une perturbation).

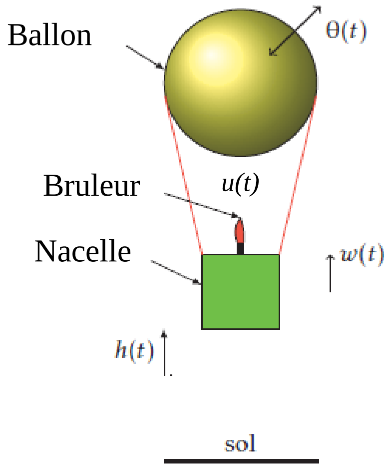


Figure 3. Montgolfière

En considérant que l'énergie thermique du brûleur est proportionnelle à la commande *u(t)* et que la température extérieure constante, les équations qui régissent la dynamique de la montgolfière sont les suivantes :

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -5.\theta(t) + u(t) \qquad (1)$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = -v(t) + 5.\theta(t) + w(t) \qquad (2)$$

$$\frac{dh(t)}{dt} = v(t) \qquad (3)$$

H(p), U(p), Θ(p), V(p), et W(p) représentent les transformées de Laplace de $h(t)$, $u(t)$, $\theta(t)$, $v(t)$ et $w(t)$.

1. Traduire ces trois équations dans le domaine de Laplace.

2. Etablir le schéma bloc représentant le déplacement de la montgolfière en fonction de l'action sur le bruleur en précisant les différents signaux d'entrée/sortie blocs.

3. Exprimez H(p) en fonction de U(p) et W(p).

4. On suppose que le vent est nul:

a)-Donner la fonction de transfert (on notera cette fonction de transfert *G(p)*) ainsi que les pôles du système.

b)- Tracer les diagrammes de Bode et Black

c)- On souhaite s'élever à une altitude de 2 km pour une entrée *u(t)* de type échelon d'amplitude 2. Quelle est la valeur atteinte par le ballon (régime permanent) si l'on est en boucle ouverte ? Que peut-on conclure ?

TD n°3

Stabilité : critère de Routh et Marges de stabilité

Exercice 1 :

Le modèle par fonction de transfert du système « montgolfière du TD N°2, exercice3 » en boucle ouverte est :

$$G(p) = \frac{H(p)}{U(p)} = \frac{5}{p(p+5)(p+1)}$$

On souhaite régler les variations d'altitude de la montgolfière. Pour cela on rajoute un altimètre qui mesure la hauteur du ballon (par rapport à la hauteur de référence $h_c(t)$). Le pilote peut commander la variation de hauteur ($h_c(t)$) de la montgolfière depuis le boitier de commande. Un régulateur génère la loi de commande, $u(t)$, du brûleur en fonction de l'écart de hauteur $\varepsilon(t)$. Le schéma d'asservissement est comme suit :

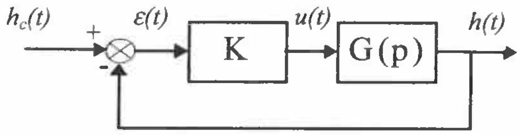


Figure 1.1 Schéma asservissement d'une montgolfière

a) Donner l'expression de la Fonction de transfert en boucle ouverte FTBO. (On la note : $G_1(p)$) et la mettre sous la forme suivante :

$$G_1(p) = K\frac{N(p)}{p^{\alpha}D(p)}$$

b) Les figures 1.2 et 1.3 représentent le diagramme de Bode et de Black-Nichols de $G_1(p)$ pour $K=1$ (données en fin de l'énoncé de ce TD)

- Relever les marges de stabilité (marge de gain et marge de phase).
- Dire si le système est stable en boucle fermée pour K=1.
- Quelle est la condition sur K qui assure la stabilité du système en boucle fermée.

c) Retrouver la condition sur K, qui assure la stabilité du système bouclé en utilisant le critère de Routh.

d) Pour quelle valeur de K a-t-on la limite de stabilité ? A quoi correspond physiquement cette limite de stabilité.

Tracé de Bode de $KG_1(p)$ pour K=1 (exercice 1)

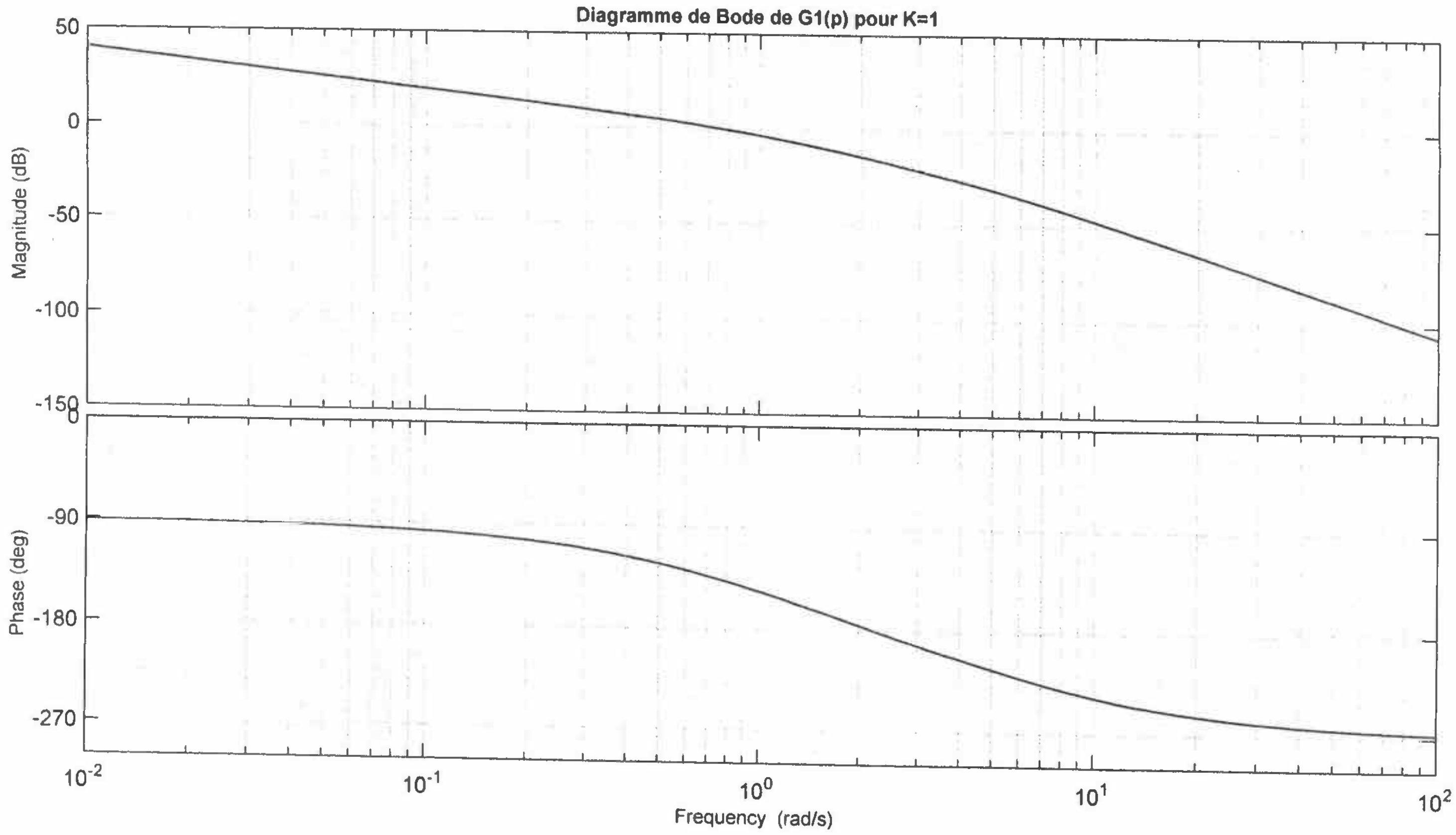


Figure 1.2 Diagramme de Bode de $KG_1(p)$ *(pour K=1)*

Tracé de Black-Nichols de $KG_1(p)$ pour K=1(exercice 1)

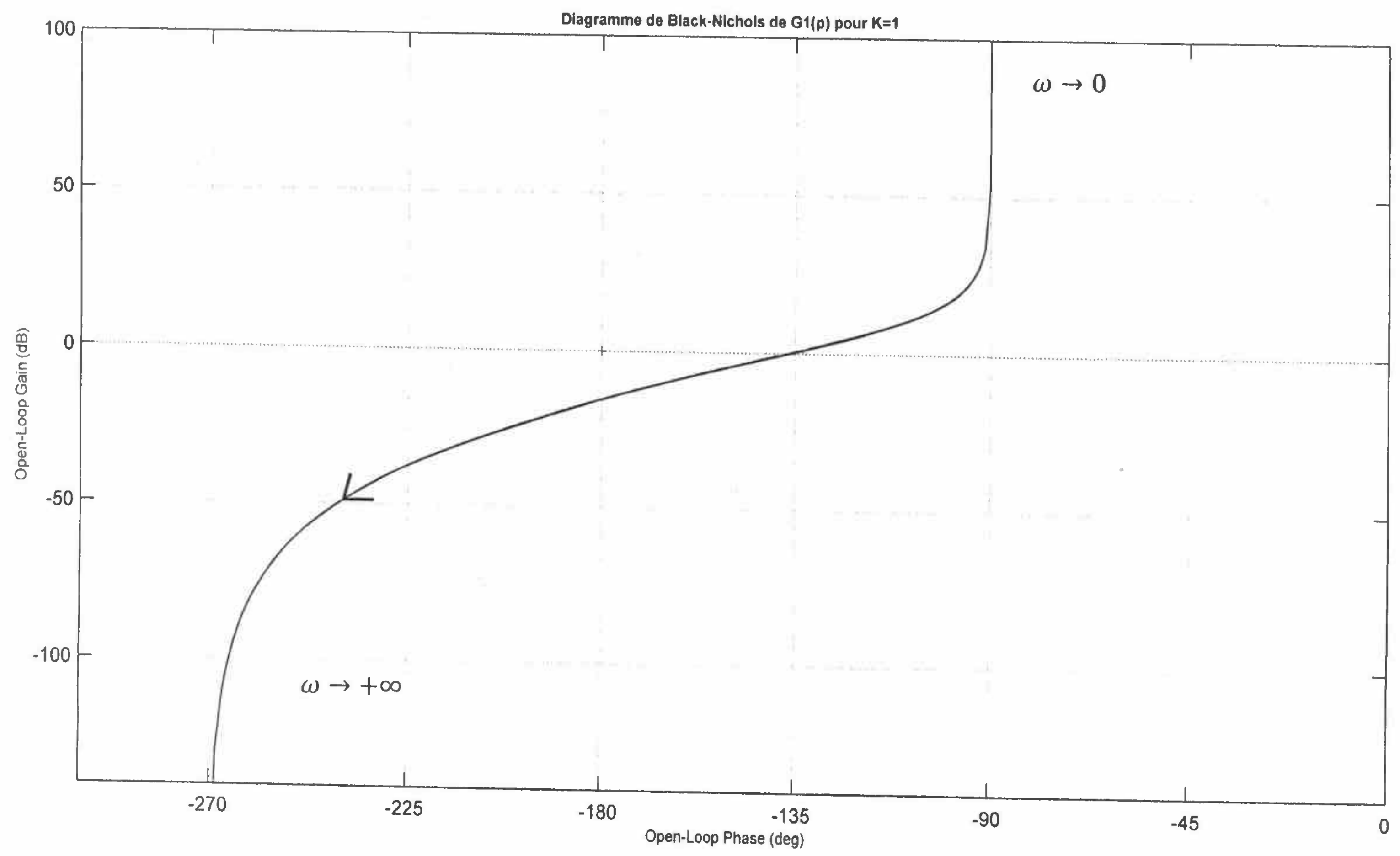


Figure 1.3 Diagramme de Black-Nichols de K $G_1(p)$ $(K=1)$

Exercice 2 :

Le système asservi de gouverne de l'assiette d'avion (TD 2 exercice2) comporte les dispositifs suivants

- Un amplificateur dont on suppose le gain K (réglable)
- Un système de commande électrique du gouvernail dont la fonction de transfert est :
  $\frac{B(p)}{U(p)} = F_{a(p)} = \frac{K_a}{1+2p}$ avec $K_a=0.05\ rad/V$
- Un détecteur d'assiette (gyroscope) qui fournit un signal électrique proportionnel à l'assiette réelle représenté par $\frac{A_m(p)}{A(p)} = F_g(p) = K_d$ avec $K_d=8\ V/rad$
- Le modèle de l'avion

$$F(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{2(0.2p+1)}{p(4p^2+2.4p+1)}$$

Le système peut être représenté par la figure 2.1 ci-dessous :

1°)- Compléter le schéma fonctionnel de l'asservissement de l'assiette d'un avion en précisant le modèle de chaque bloc ainsi que les différents signaux (entrée sortie bloc)

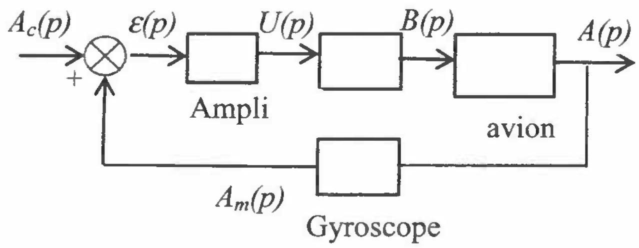


Figure 2.1. Schéma de l'asservissement de l'assiette d'un avion

2°)- Donner l'expression de la FTBO. On note la FTBO par $G(p)$

Les figures 2.2 et 2.3 représentent le diagramme de Bode et le diagramme de Black-Nichols de $G(p)$ pour K=*1*.

3°)- Orienter le lieu de Black-Nichols

4°)- Relever les marges de stabilité. Que peut-on conclure

4°)-Pour quelle valeur de K le système est à la limité de stabilité ? On note cette valeur K_{lim}. Que deviennent alors les marges de stabilité ?

5°)- Tracer la réponse indicielle dans le cas de la limite de stabilité

Tracé de Bode G(p) pour K=1 pour l'exercice 2

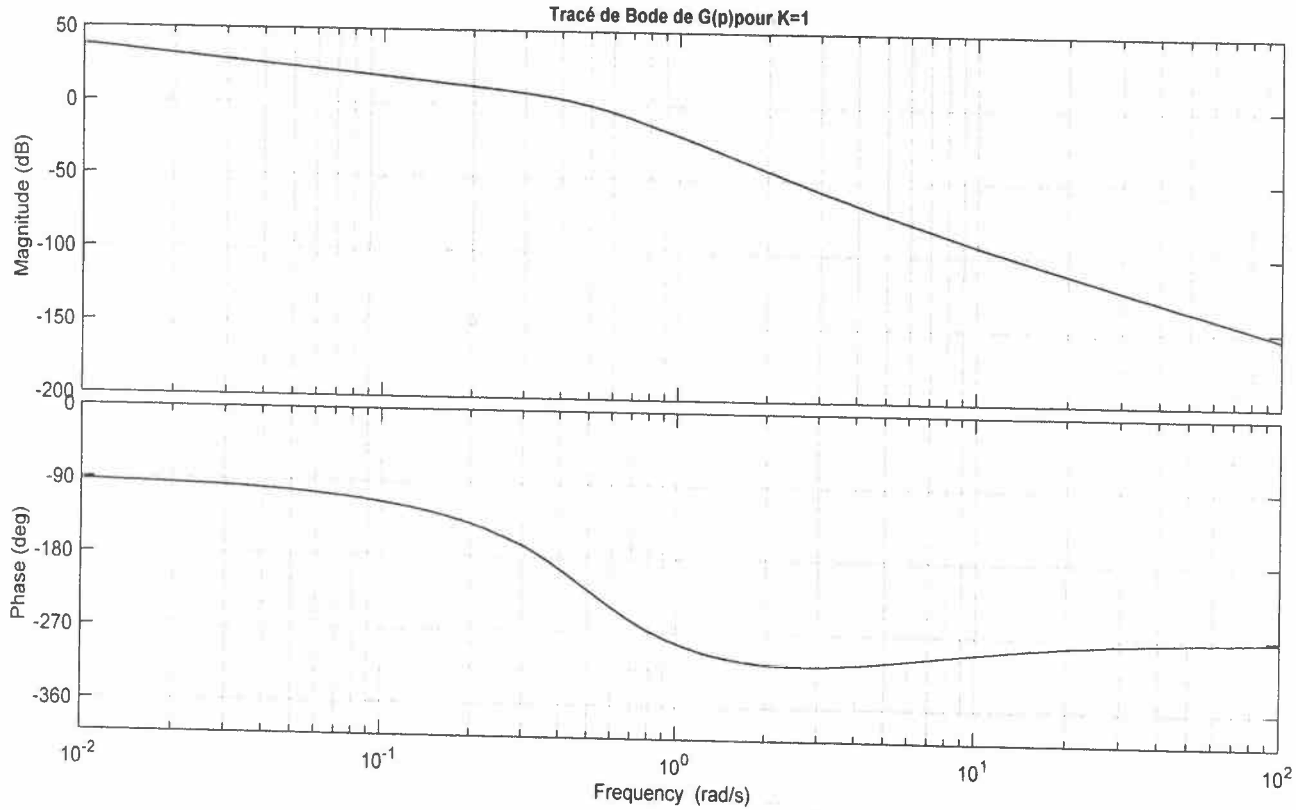


Figure 2.2 Diagramme de Bode de G(p) pour K=1

Tracé de Bode G(p) pour K=1 pour l'exercice 2

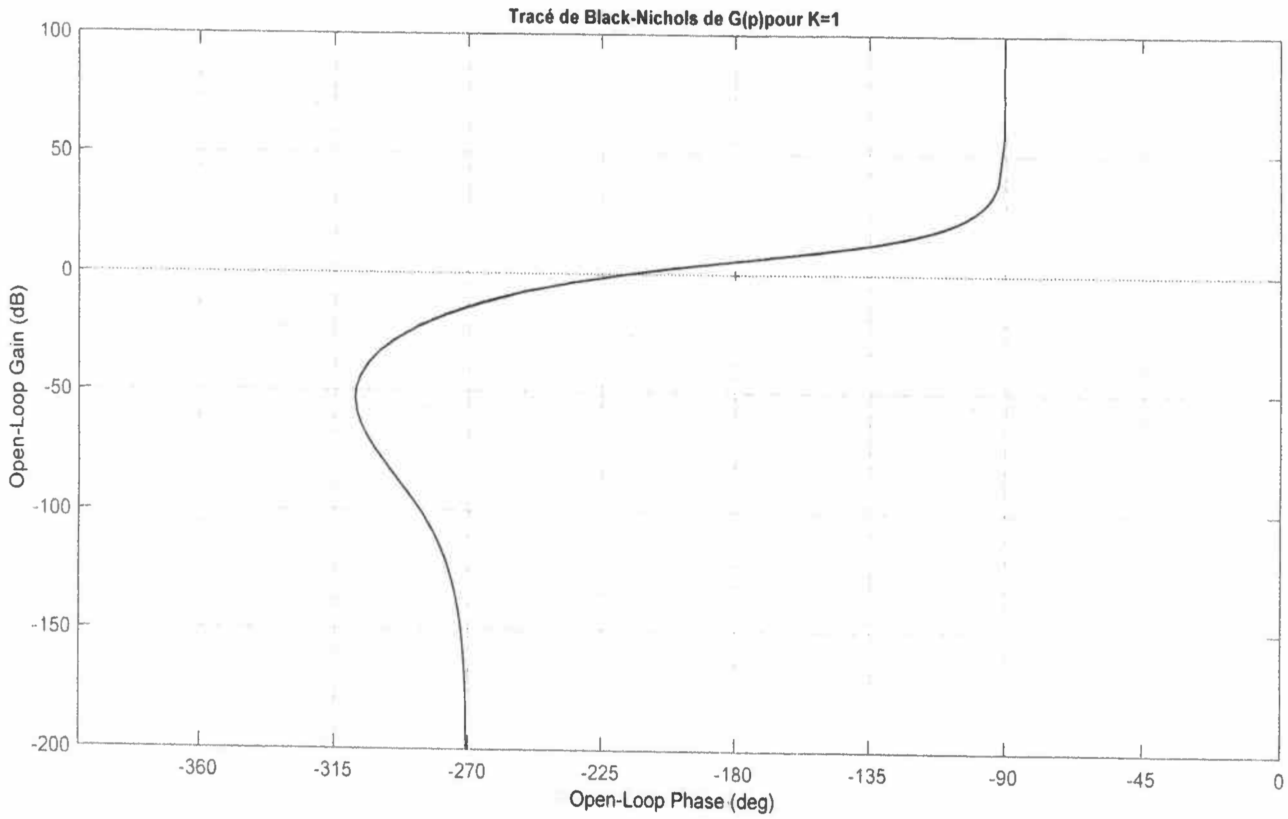


Figure 2.3 Diagramme de Black-Nichols de G(p) pour K=1

Exercice 3 :

Etudier la stabilité des systèmes représentés par leurs équations caractéristiques :

$$p^3 + p^2 + 2\,p + 8 = 0$$

$$a_2\,p^2 + a_1\,p + a_0 = 0$$

$$p^3 + 3\,p^2 + 3\,p + 1 + k = 0$$

$$p^4 + p^3 + p^2 + p + k = 0$$

$$p^5 + 2\,p^4 + 2\,p^3 + 4\,p^2 + 11\,p + 10 = 0$$

$$p^3 + 2\,p^2 + 4\,p + k = 0$$

$$p^8 + 2\,p^6 - 6\,p^5 + 4\,p^2 + 11\,p + 5 = 0$$

TD N°4 et TD N°5

Exercice 1 :

Soit le système dont la fonction de transfert est la suivante : $G(p) = \dfrac{2}{1+5p}$

1. Calculer le gain statique et l'erreur statique en boucle ouverte
2. Calculer l'erreur statique (avec et sans perturbation) et le temps de réponse en boucle fermée (sans correcteur) comme indiqué sur la figure suivante : *D(p)* représente la perturbation, *U(p)* la commande, *$Y_c(p)$* la consigne de type échelon, *Y(p)* la sortie et *$\varepsilon(p)$* l'erreur :

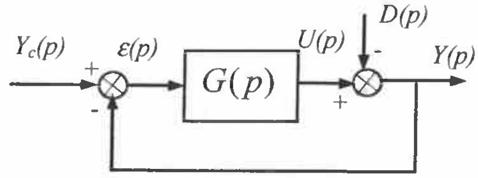


Figure 1. Système bouclé sans correcteur

3. Proposer et calculer la fonction de transfert du régulateur C(p) qui conduit à un système du premier ordre en boucle fermée, qui annule l'erreur statique et qui permet de rendre le système 5 fois plus rapide en boucle fermée qu'en boucle ouverte.

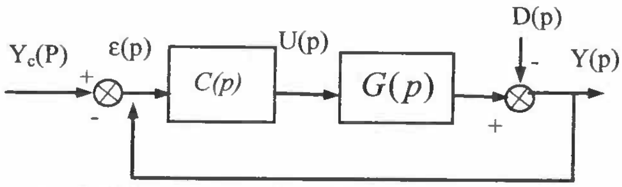


Figure 2. Schéma du système bouclé avec le correcteur

4. Donner l'allure de la réponse indicielle en boucle ouverte et en boucle fermée avec correcteur.

Exercice 2 : Asservissement d'un système du second ordre avec une intégration

On s'intéresse à l'asservissement de position d'un moteur à courant continu. Le schéma du système en boucle fermée est le suivant :

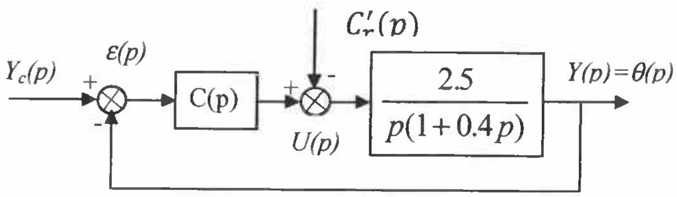


Figure Schéma de l'asservissement en position d'un moteur

A. Cas où $C'_r(p)=0$

Calculer les coefficients de C(p) pour imposer un comportement d'un système du premier ordre, un temps de réponse de 0.2s et une erreur statique nulle.

B. Cas où $C'_r(p) \neq 0$

Calculer l'erreur statique.

C. Quel type de correcteur permet d'améliorer les performances du système en poursuite et en régulation ?

D. Donner les coefficients du correcteur pour imposer un temps de réponse en asservissement de 0.3s.

Exercice 3 :

La fonction de transfert *F(p)* en boucle ouverte (correcteur proportionnel et système à asservir) d'un asservissement à retour unitaire est de la forme : $F(p) = \dfrac{K}{p^n(1+Tp)^2}$

1. Donner le schéma fonctionnel en boucle fermée en précisant : la consigne, l'écart, la commande, la sortie, le correcteur et le système.
2. Calculer la fonction de transfert en boucle fermée.
3. Déterminer *K*, *T* et *n*, pour qu'en boucle fermée le système réponde aux deux spécifications suivantes :
   - Pour une rampe d'entrée $Y_c(t)$ de pente unitaire, l'erreur de traînage est de *1/50*.
   - La marge de gain est de *6dB*. ($Mg|_{dB} = 6dB$ ou $Mg = 2$).

$$\text{Aide : } arg\left[\left(\frac{\alpha}{(i\beta)^n}\right)\left(\frac{c}{(a+ib)^m}\right)\right] = n * arg\left(\frac{\alpha}{(i\beta)}\right) + m * arg\left(\frac{c}{(a+ib)}\right)$$

Exercice 4:

On désire asservir le système représenté par la fonction de transfert suivante:

$$G(p) = \frac{30}{(1+0.5p)^3}$$

1. La figure 1.2 représente le lieu de Black du système. Orienter le lieu en argumentant.

2. Donner les marges de gain et phase (à partir des figures 1.2 et 1.3). Conclure sur la stabilité du système.

3. On désire asservir le système par un régulateur *C(p)* Soit :

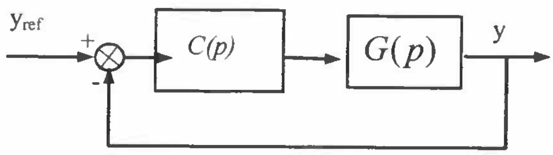


Figure 1.1 Système en boucle fermée avec correcteur C(p)

- ✓ Si C(p) est un simple Gain ($C(p)=K_p$), calculer le gain limite de stabilité et donner l'allure de la réponse indicielle.
- ✓ Retrouver la valeur gain limite par le critère de Routh
- ✓ Dans le cas où *C(p)* serait un régulateur PID, calculer les paramètres *C(p)* pour asservir le système en utilisant la méthode de Ziegler-Nichols.

Tracé de Black-Nichol de G(p) pour l'exercice 4 du TD 4-5

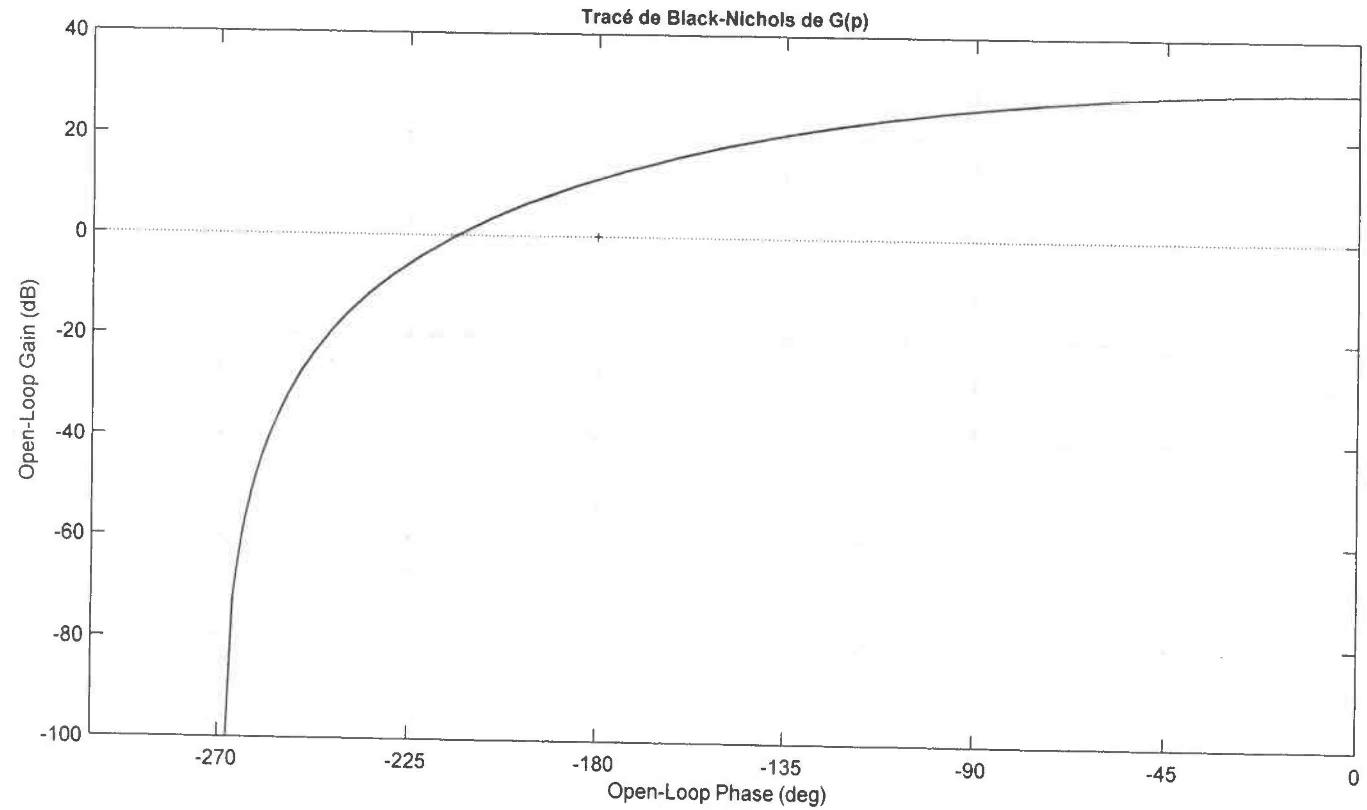


Figure 1.2 Tracé de Black-Nichol de G(p)

Tracé de Bode de G(p) pour l'exercice 4 du TD 4-5

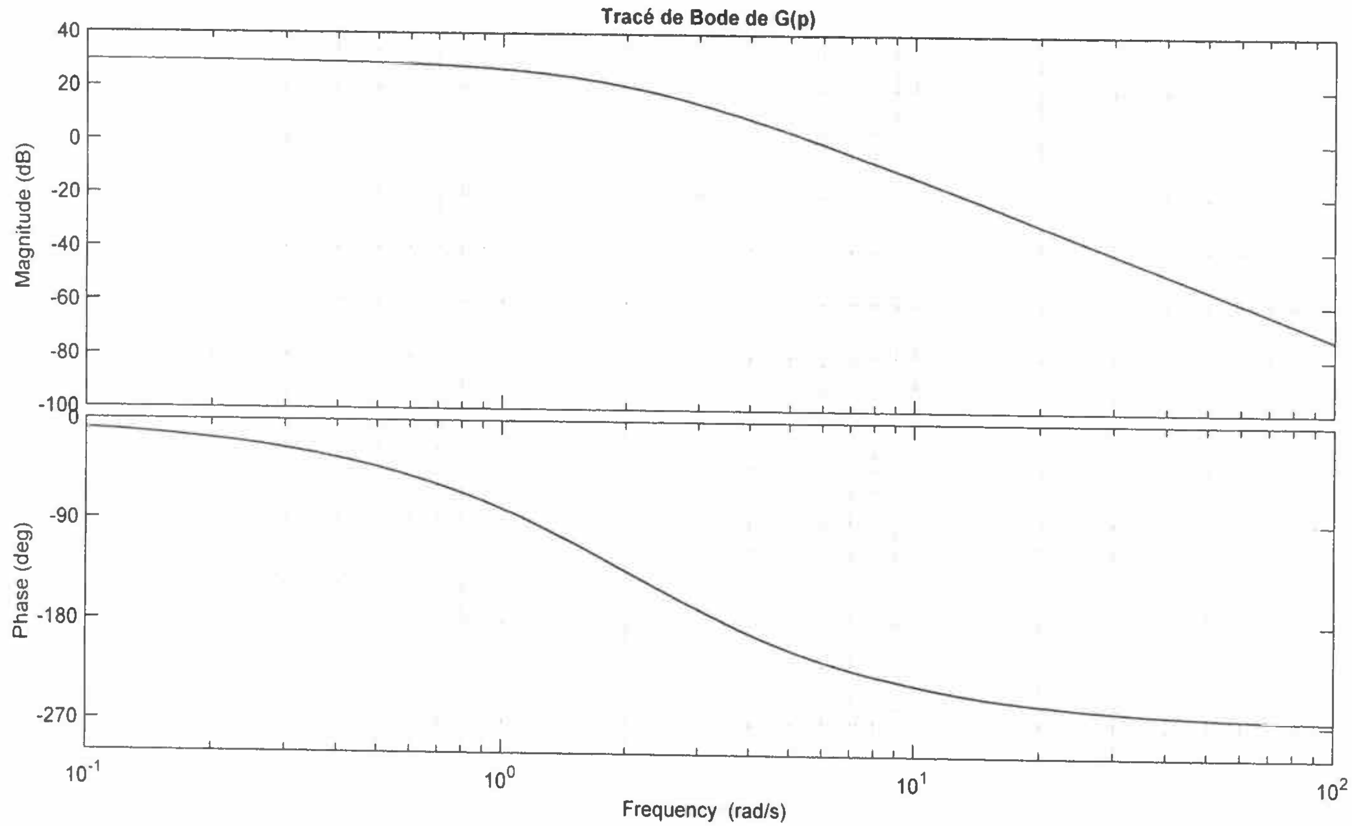


Figure 1.3 Tracé de Bode de G(p)