TD –Signaux et Systèmes
Traitement numérique du signal

1. Partie I – Rappels

Exercice 1: L'importance de la Transformée de Fourier

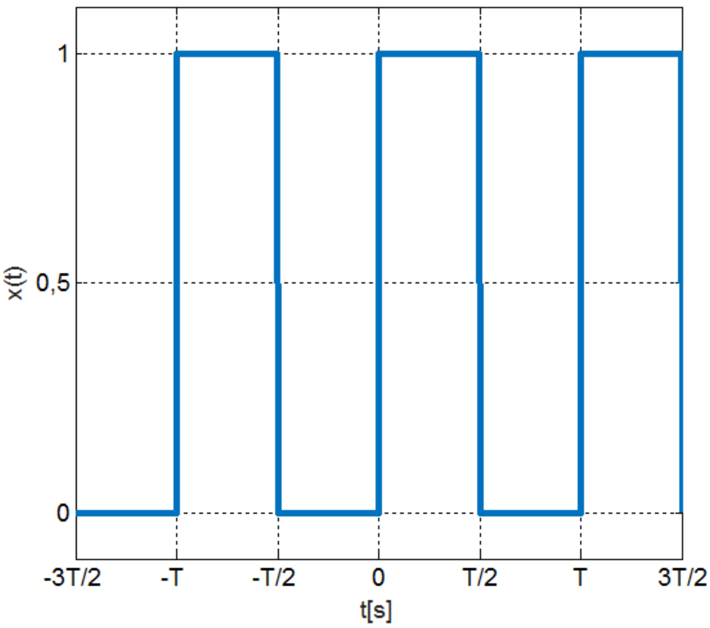


Figure 1 - Signal carré de fréquence $f = 1/T$

Soit le signal périodique x de fréquence f représenté sur la Figure 1.

On rappelle qu'un signal périodique peut s'écrire, suivant sa décomposition en série de Fourier :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi nft) + b_n \sin(2\pi nft) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\mathrm{f}\mathrm{n}\mathrm{t}}$$

Avec :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)dt$$

$$\forall n > 1, \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos(2\pi nft)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\sin(2\pi nft)dt$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-j2\pi fnt}dt = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - jb_n)\ si\ n > 0 \\ \frac{1}{2}(a_n + jb_n)\ si\ n < 0 \end{cases}$$

1. Calculer les coefficients a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(2\pi nft)dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \cos(2\pi nft)\,dt = \frac{2}{T}\left[\frac{1}{2\pi nf}\sin(2\pi nft)\right]_0^{\frac{T}{2}} = 0 - 0 = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin(2\pi nft)dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin(2\pi nft)\,dt = \frac{2}{T}\left[-\frac{1}{2\pi nf}\cos(2\pi nft)\right]_0^{\frac{T}{2}}$$
$$= -\frac{1}{\pi n}[\cos(\pi n) - 1] = \frac{1}{\pi n}[1 - (-1)^n]$$

2. Comment peut-on approximer x avec 2 sinus ? Avec 3 sinus ? Avec N sinus ?

Avec la formule de la DSF et n=N>

3. En déduire les coefficients c_n.

$c_0 = \frac{1}{2}$ (valeur moyenne, cf definition)

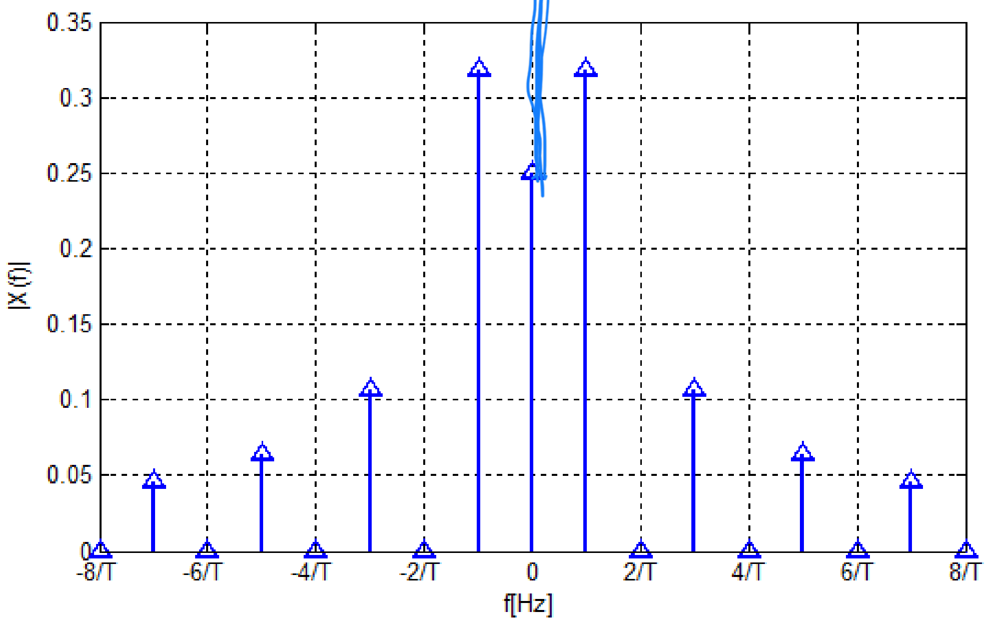
$$Si\ n > 0, \qquad c_n = -\frac{jb_n}{2} = -\frac{j}{2\pi n}[1 - (-1)^n]$$

$$Si\ n < 0, \qquad c_n = \frac{jb_{-n}}{2} = -\frac{j}{2\pi n}[1 - (-1)^n]$$

4. En déduire la transformée de Fourier de x et en représenter le module.

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_n \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

0,5 $c_0 = \frac{1}{2}\ pas\ \frac{1}{4} \ldots$



Exercice 2: Propriétés de la Transformée de Fourier

1. Quelle est la transformée de Fourier de $rect$?

$$sinc$$

Soit le signal x défini par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = rect\left(\frac{t}{T_a}\right)$$

2. Représenter x.
3. Calculer la transformée de Fourier de x et la représenter.
4. Représenter $x(t-\tau)$ pour $\tau = 2s$ et $T_a = 5s$.
5. Calculer et représenter la transformée de Fourier de $x(t-\tau)$pour $\tau = 2s$ et $T_a = 5s$.

Exercice 3 : Détermination de la TF de fonctions particulières

1. Montrer que $\mathcal{F}[rect] = sinc$.

On peut démontrer que :

$$\mathcal{F}^{-1}[X] = \mathcal{F}^*[X^*]$$

2. En déduire que $\mathcal{F}[sinc] = rect$.
3. En déduire qu'avec $T_0 > 0$:

$$\mathcal{F}\left[sinc\left(\frac{t}{T_0}\right)\right](f) = T_0.rect(fT_0)$$

4. Nous avons vu en cours que $\mathcal{F}(e^{j2\pi k\frac{t}{T}}) = \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$. Démontrer cette affirmation.

Exercice 4 : Calcul de Transformée de Fourier

Calculer la transformée de Fourier de la fonction x avec :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = t^2 e^{-3t}\epsilon(t)$$

On rappelle

$$\begin{cases} \forall t > 0 & \epsilon(t) = 1 \\ \forall t < 0 & \epsilon(t) = 0 \end{cases}$$

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Correction :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-3t}\epsilon(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(j2\pi f+3)t}dt$$

On utilise la formule (Intégration Par Parties en français) ci-dessus avec $u(t) = t^2$ et $v'(t) = e^{-(j2\pi f+3)t}$. Donc $u'(t) = 2t$ et $v(t) = -\frac{e^{-(j2\pi f+3)t}}{j2\pi f+3}$.

$$X(f) = \left[-\frac{t^2 e^{-(j2\pi f+3)t}}{j2\pi f + 3} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{2t}{j2\pi f + 3} e^{-(j2\pi f+3)t} dt$$

Or, $\lim_{t \to +\infty} t^2 e^{-(j2\pi f+3)t} = 0$, donc $\left[-\frac{t^2 e^{-(j2\pi f+3)t}}{j2\pi f+3} \right]_0^{+\infty} = 0 - 0 = 0$. Donc on a :

$$X(f) = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{j2\pi f + 3} e^{-(j2\pi f+3)t} dt$$

On réutilise cette même formule avec $u(t) = \frac{2}{j2\pi f+3} t$ et $v'(t) = e^{-(j2\pi f+3)t}$. Donc $u'(t) = \frac{2}{j2\pi f+3}$ et $v(t) = -\frac{e^{-(j2\pi f+3)t}}{j2\pi f+3}$.

$$X(f) = \left[-\frac{2t e^{-(j2\pi f+3)t}}{(j2\pi f + 3)^2} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\frac{2}{(j2\pi f + 3)^2} e^{-(j2\pi f+3)t} dt$$

Or, $\lim_{t \to +\infty} t e^{-(j2\pi f+3)t} = 0$, donc $\left[-\frac{2t e^{-(j2\pi f+3)t}}{(j2\pi f+3)^2} \right]_0^{+\infty} = 0 - 0 = 0$. Donc on a :

$$X(f) = \int_0^{+\infty} \frac{2}{(j2\pi f + 3)^2} e^{-(j2\pi f+3)t} dt = \left[-\frac{2}{(j2\pi f + 3)^3} e^{-(j2\pi f+3)t} \right]_0^{+\infty} = 0 - -\frac{2}{(j2\pi f + 3)^3}$$

$$X(f) = \frac{2}{(j2\pi f + 3)^3}$$

On retrouve bien la formule de l'exemple du cours.

Exercice 3 : Jeu des correspondances

Trouver la correspondance entre les signaux temporels et leurs transformées de Fourier sur les Figure 2 et Figure 3. Justifiez vos choix.

On rappelle

$$tri = rect * rect$$

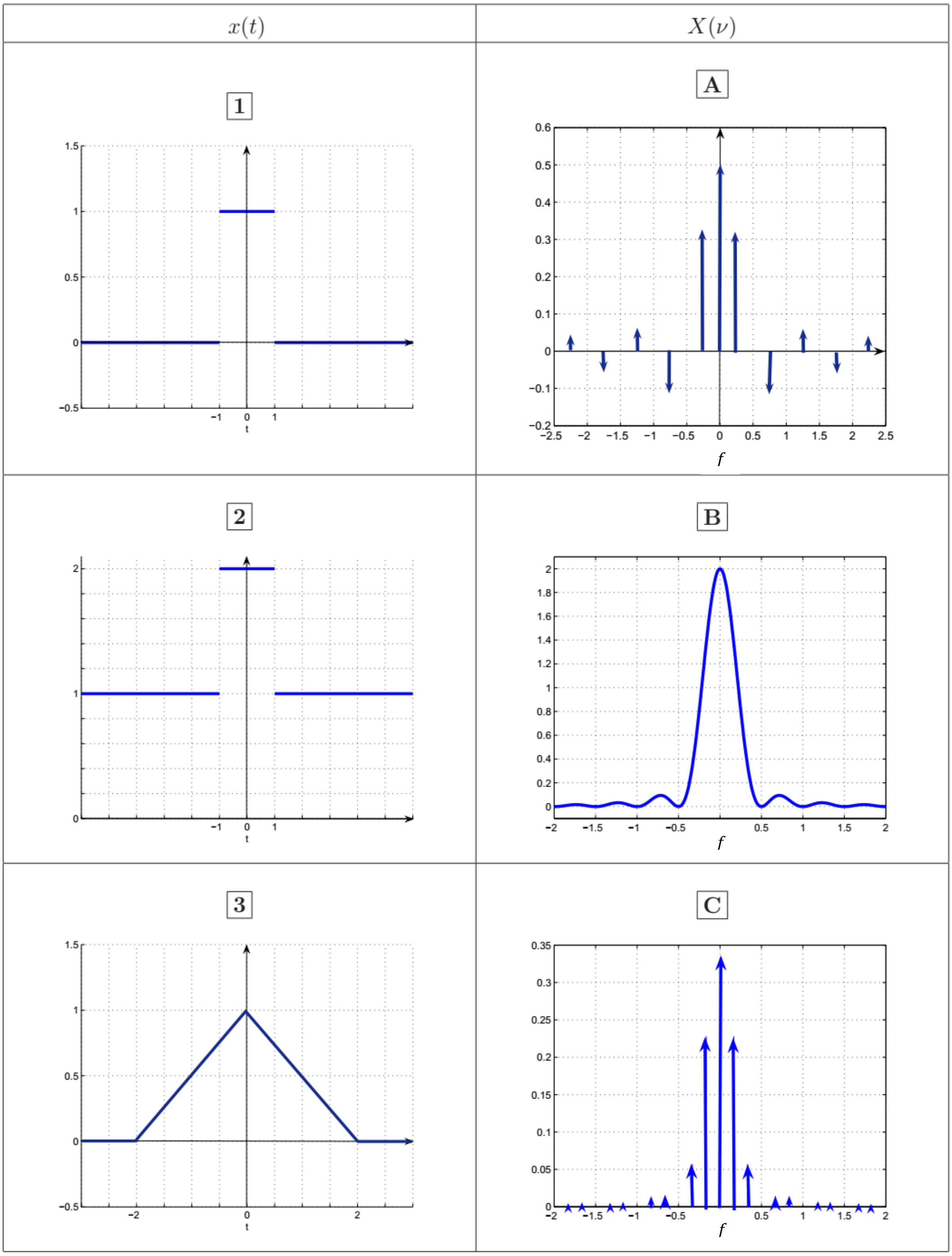


Figure 2 - Exercice 3: Partie I

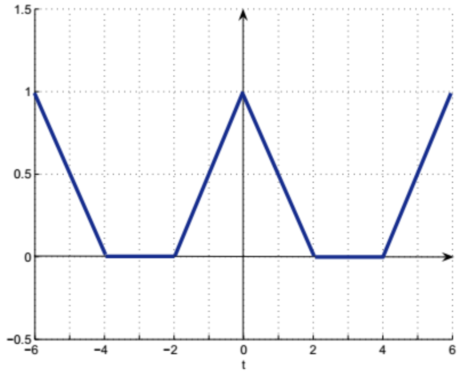
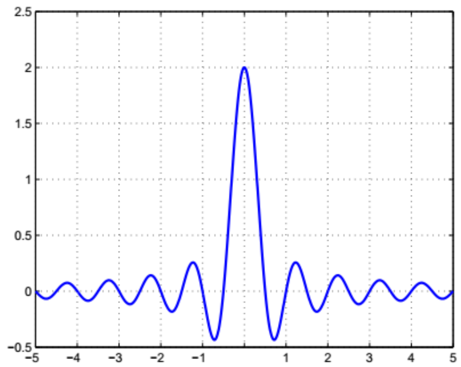
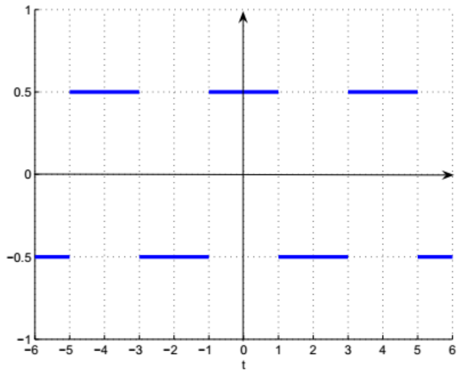
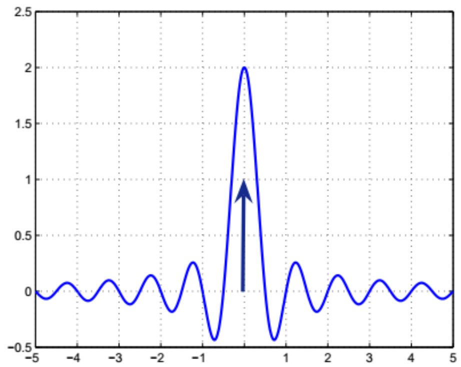
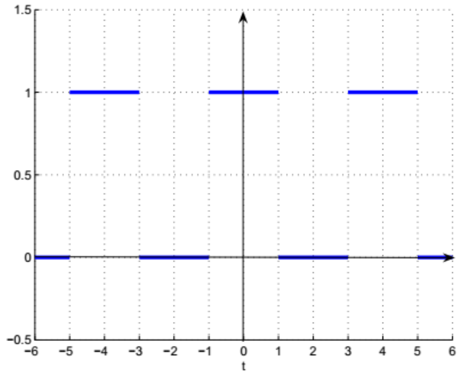
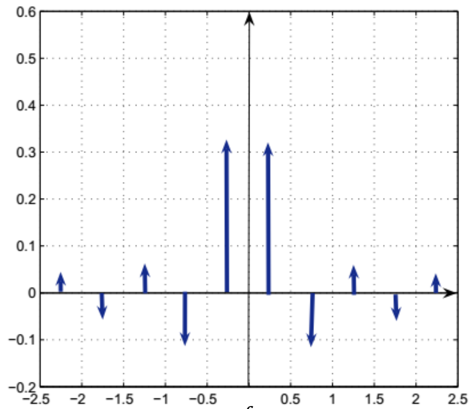
$x(t)$	$X(\nu)$
$\boxed{4}$ 	$\boxed{D}$ 
$\boxed{5}$ 	$\boxed{E}$ 
$\boxed{6}$ 	$\boxed{F}$ 

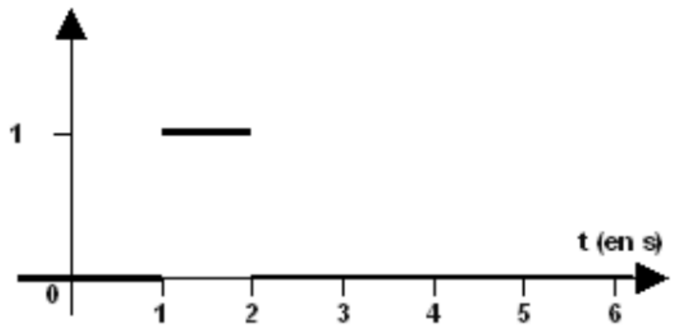
Figure 3 - Exercice 3: Partie II

2. Partie II – Signaux échantillonnés

Exercice 1 :

Le signal continu ci-dessous est échantillonné avec la période d'échantillonnage T_s . Donner l'expression analytique du signal échantillonné pour :

$$T_s = 0.8s, T_s = 1.5s, T_s = 0.5s, T_s = 1s \; et \; T_s = 2s$$



Exercice 2 :

On considère une fréquence d'échantillonnage fixée à 15 kHz. Représenter (sans calcul) le spectre d'amplitude des signaux suivants après échantillonnage :

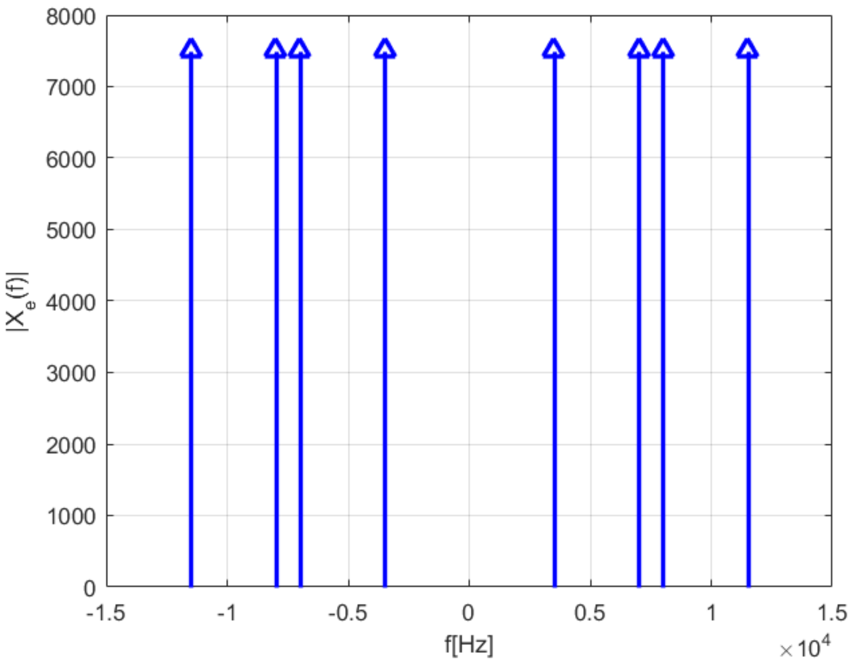
1. Une composante sinusoïdale pure de fréquence 3.5 kHz, additionnée d'une composante sinusoïdale pure de fréquence 7 kHz.

Le signal non échantillonné est composé de 4 diracs d'amplitude 0.5, en -7,-3.5,3.5 et 7 kHz. En notant $f_0 = 3.5 \; kHz$ et $f_1 = 7 \; kHz$:

$$X(f) = \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0) + \delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)}{2}$$

On utilise la formule du cours qui va périodiser ce spectre, de période F_s, et affecter l'amplitude d'un facteur $1/T_s$:

$$X_e(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$



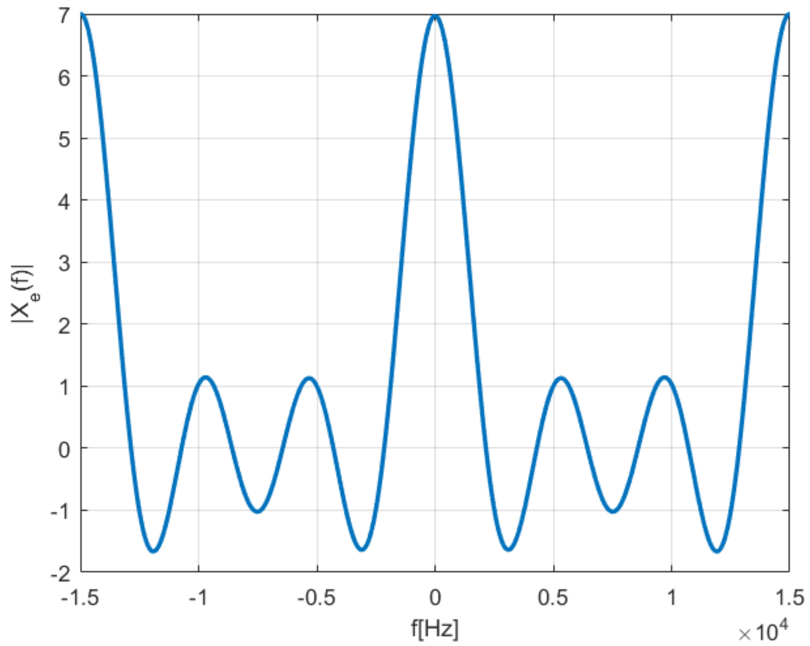
Ici, le théorème de Shannon est respecté car $f_{max} = f_1 = 7kHz < \frac{F_s}{2} = 7.5\ kHz.$

2. Un signal rectangulaire (ou porte) de durée 0.5 ms.

Ici, on a $x(t) = rect\left(\frac{t}{T_a}\right)$ avec $T_a = 0.5 \times 10^{-3}s$

En utilisant a propriété de changement d'échelle, on montre que $X(f) = T_a sinc(T_a f)$. On utilise la même formule que précédemment :

$$X_e(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$



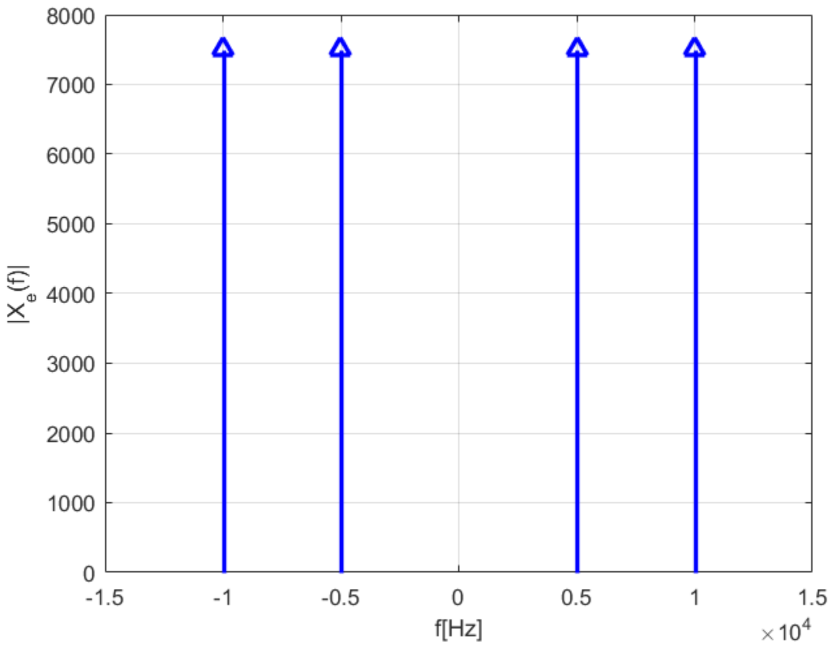
Ici, le théorème n'est clairement pas respecté, puisque pour $f > f_{max}$, on a $|X(f)| > 0$.

3. Un signal sinusoïdal à 10 kHz.

Comme pour la question 1, mais avec 2 diracs seulement (Ici $f_0 = 10\ kHz$):

$$X(f) = \frac{\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)}{2j}$$

$$|X(f)| = \frac{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)}{2}$$



Ici le théorème de Shannon n'est pas respecté : $f_{max} = f_1 = 10kHz > \frac{F_s}{2} = 7.5\ kHz$.

La fréquence aliasée (nouvelle fréquence) due au recouvrement de spectre est de $5\ kHz$.

Dans les 3 cas, on précisera si le théorème de Shannon est respecté ou non.

Exercice 3 :

Soit le signal *s(t)*=$a_0 + a_1.\cos(2\pi f_1 t) + a_2.\cos(2\pi.3f_1 t)$ avec f_1 = 20Hz, a_0=1, a_1=2 et a_2=1.

Le signal $s_e(t)$ est le signal *s(t)* échantillonné avec une fréquence $F_s = 150\ Hz$.

1. Le signal *s(t)* est-il périodique ? Si oui, de quelle période ? sinon, pourquoi ?

Une somme de signaux périodique est un signal périodique de période la plus petite période commune à tous les signaux périodiques le composant. Ici $T_1 = \frac{1}{f_1}$ est une période des 3 signaux contenus dans $s(t)$. On peut donc dire que $s(t)$ est périodique de période T_1.

2. Justifier le choix de la fréquence d'échantillonnage.

Pour respecter le théorème de Shannon, il faut $F_s > 2f_{max}$. Ici $f_{max} = 3f_1 = 60\ Hz$. Il faut donc $F_s > 120\ Hz$. Ici, $F_s = 150\ Hz$. Le théorème de Shannon est donc respecté et la fréquence d'échantillonnage est bien choisie.

3. Donner l'expression de *S(f)* la transformée de Fourier de *s(t).*

On utilise la propriété de linéarité de la TF :

$$S(f) = a_0\delta(f) + \frac{a_1\delta(f-f_1) + a_1\delta(f+f_1) + a_2\delta(f-3f_1) + a_2\delta(f+3f_1)}{2}$$

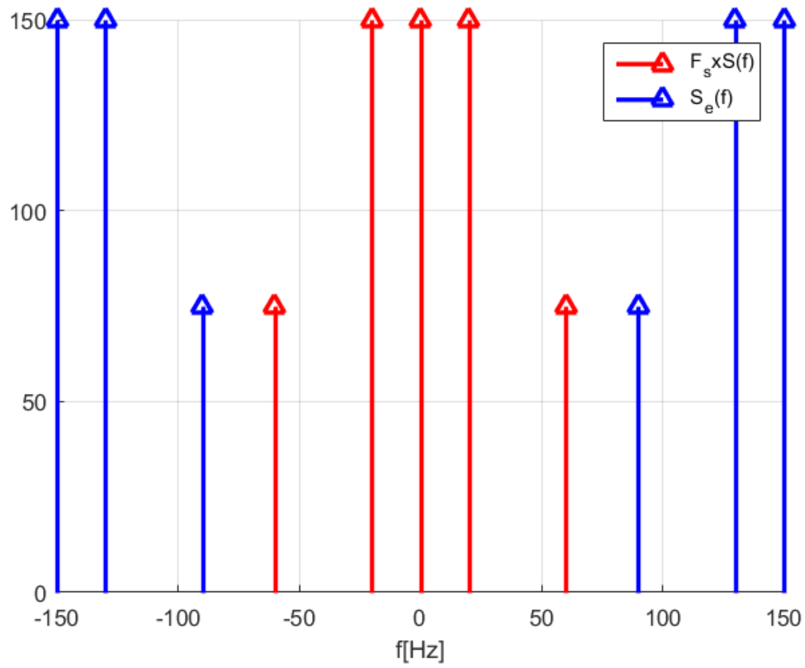
$$S(f) = \delta(f) + \ \delta(f-f_1) + \delta(f+f_1) + \frac{\delta(f-3f_1) + \delta(f+3f_1)}{2}$$

4. Donner l'expression de $S_e(f)$ la transformée de Fourier de $s_e(t)$.

$$S_e(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} S\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

5. Représenter sur le même graphe le module de *S(f)* et de $S_e(f)$ entre $-F_s$ etF_s.

On utilise la formule ci-dessus (périodisation de $S(f)$ de période F_s,multiplication par F_s)

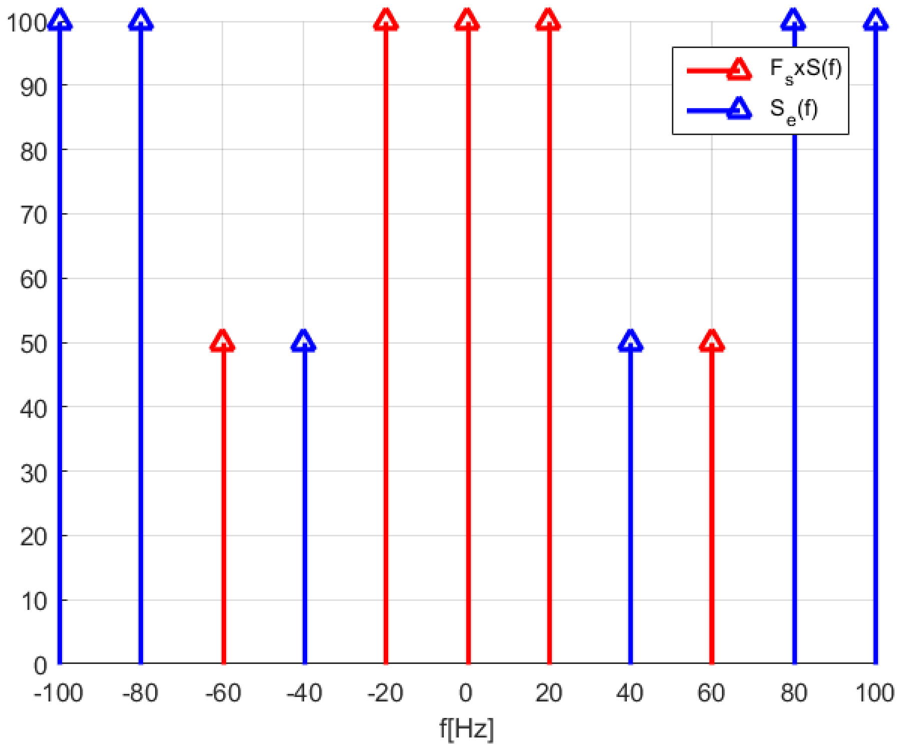


6. Expliquer les différences entre *S(f)* et *S_e(f)*. Quel est l'effet de l'échantillonnage sur le spectre du signal ?

Les différences ont été expliquées ci-dessus ($S_e(f)$ est périodique et son amplitude a été multipliée par F_s).

7. Tracer *S_e(f)* dans le cas où $F_s = 100\ Hz$.

Il y a alors du recouvrement de spectre car $F_s < 120\ Hz$. En appliquant la même méthode que précédemment, on trouve :



On échantillonne maintenant ($F_s = 150\ Hz$) le signal *s(t)* simplement sur une période. On note $s_{we}(t)$ le signal résultant.

8. Donner l'expression de $S_{we}(f)$ sans faire l'application numérique.

L'expression temporelle du signal fenêtre (« w » pour window = fenêtre en anglais) est :

$$s_w(t) = s(t) \times rect\left(\frac{t - \frac{T_a}{2}}{T_a}\right)$$

Avec T_a la durée d'acquisition. Ici, comme on échantillonne seulement sur une période, on a $T_a = T_1$. On a donc :

$$S_w(f) = S(f) * TF\left[rect\left(\frac{t-\frac{T_a}{2}}{T_a}\right)\right]$$

$$S_w(f) = S(f) * T_a e^{-j\pi f T_a} sinc(T_a f)$$

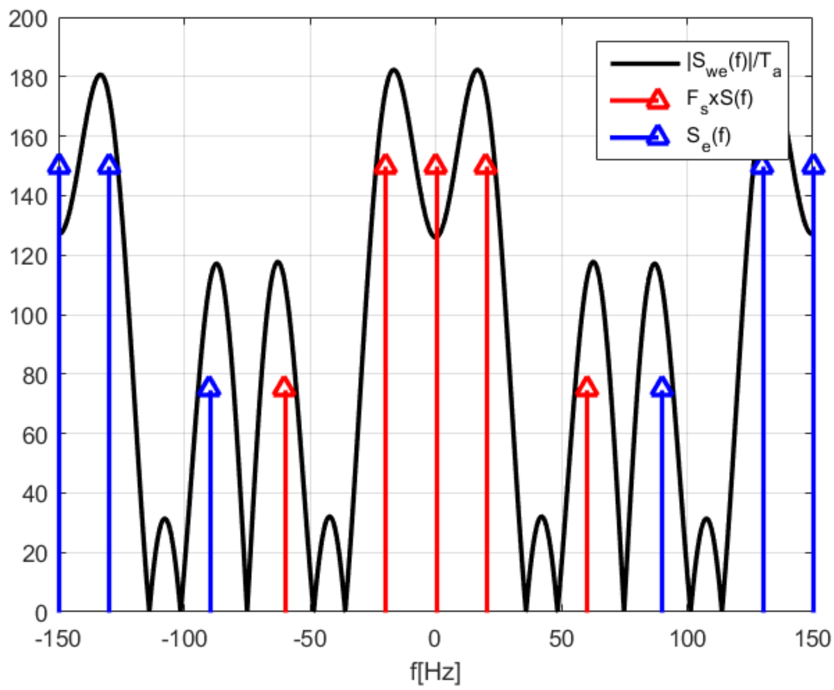
$$S_w(f) = \left(\delta(f) +\ \delta(f - f_1) + \delta(f + f_1) + \frac{\delta(f - 3f_1) + \delta(f + 3f_1)}{2}\right) * T_a e^{-j\pi f T_a} sinc(T_a f)$$

$$S_w(f) = T_a \left(e^{-j\pi f T_a} sinc(T_a f) + e^{-j\pi(f-f_1)T_a} sinc\big(T_a(f - f_1)\big) + e^{-j\pi(f+f_1)T_a} sinc\big(T_a(f + f_1)\big) + \frac{e^{-j\pi(f-3f_1)T_a} sinc\big(T_a(f - 3f_1)\big) + e^{-j\pi(f+3f_1)T_a} sinc\big(T_a(f + 3f_1)\big)}{2}\right)$$

Si on échantillonne ce signal, on a alors :

$$S_{we}(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_w\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

9. Représenter $S_{we}(f)$ sur le même graphique que précédemment.



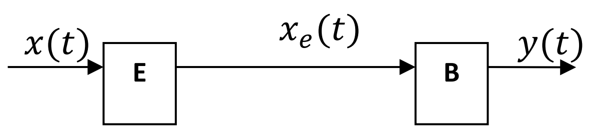
10. Expliquer les différences entre $S_e(f)$ et $S_{we}(f)$. A quoi sont-elles dues ?

Elles sont dues au fenêtrage du signal qui convolue le spectre par un $sinc$ d'amplitude T_a. (démonstration Q8). Au lieu d'avoir des diracs, nous avons donc des $sinc$, soit pour chaque pic un lobe principal et des lobes secondaires, qui s'ajoutent les uns aux autres, rendant la lecture difficile. Pour améliorer la lecture, on pourrait :

- Augmenter la durée d'acquisition, soit augmenter T_a.
- Utiliser une fenêtre de pondération (Hanning par exemple).

Exercice 4 :

On considère le système suivant :



E est un échantillonneur parfait qui produit des échantillons du signal d'entrée $x(t)$ à la fréquence d'échantillonnage F_s. Le signal $x_e(t)$ est la modélisation « idéale » dans le domaine temporel continu du signal échantillonné. *B* est un bloqueur d'ordre 0 (BOZ) : il maintient la valeur échantillonnée entre deux instants d'échantillonnage.

Soit $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$.

1. La condition de Shannon est respectée pour l'échantillonnage. Quelle est cette condition ?

Il faut $F_s > 2f_{max}$, f_{max} étant la fréquence maximale contenue dans le signal $x(t)$.

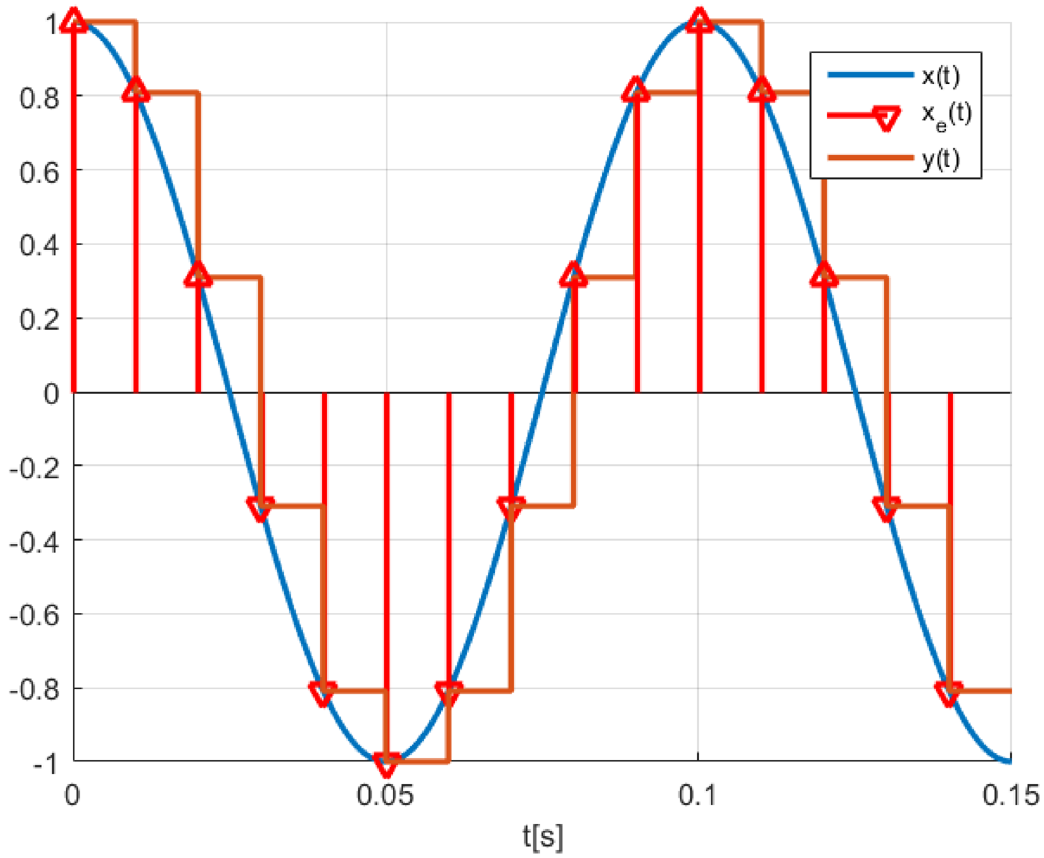
2. Donner l'expression théorique de $y(t)$

Comme précisé dans le cours, il s'agit d'une convolution du signal échantillonné avec une fonction porte (avec des $sinc$ pour une reconstitution parfaite).

$$y(t) = x_e(t) * rect\left(\frac{t - \frac{T_s}{2}}{T_s}\right)$$

3. Tracer les signaux $x(t), x_e(t)$ et $y(t)$.

Pour l'exemple, j'ai pris un signal sinusoïdal de fréquence $10\ Hz$, et une période d'échantillonnage de $100\ Hz$ pour respecter le théorème de Shannon. On a alors :



Soient $X(f), X_e(f)$ et $Y(f)$ les spectres respectifs des signaux $x(t), x_e(t)$ et $y(t)$. Tracer ces 3 spectres en module en précisant les fréquences importantes.

Avec $f_0 = 10\ Hz$, on a :

$$X(f) = \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}$$

Après échantillonnage,

$$X_e(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

D'après la question précédente,

$$y(t) = x_e(t) * rect\left(\frac{t - \frac{T_s}{2}}{T_s}\right)$$

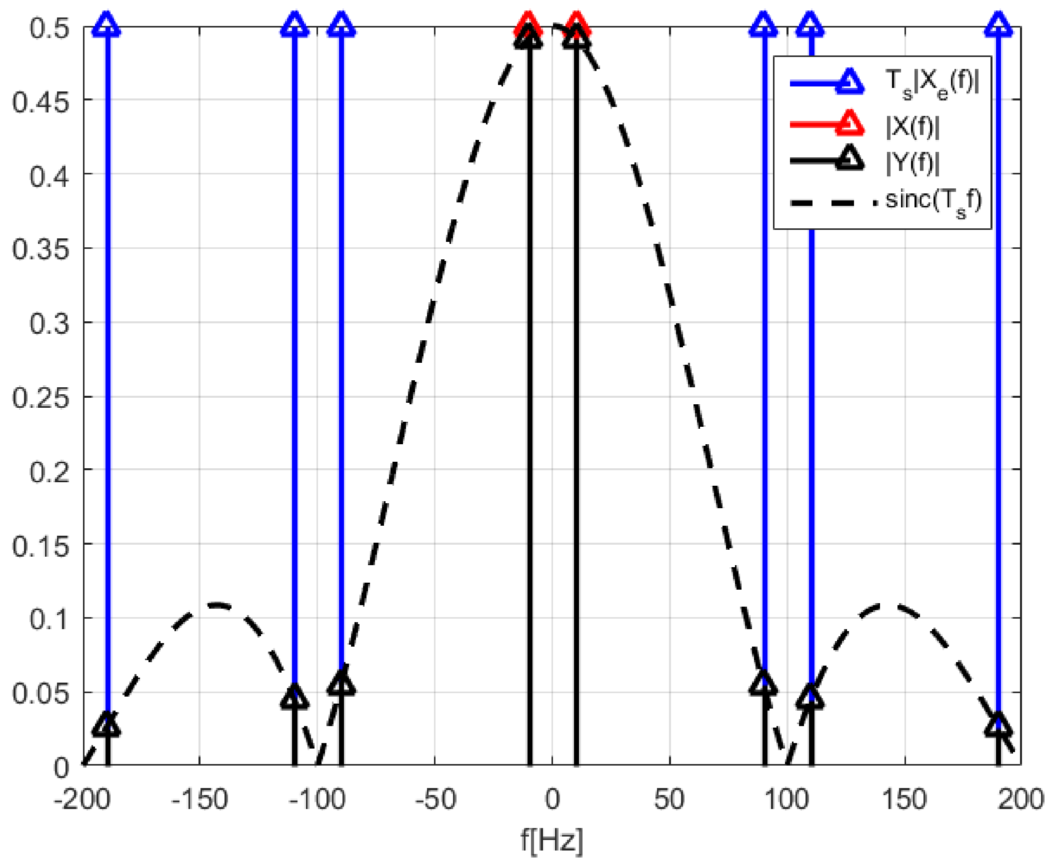
Donc on peut calculer le spectre $Y(f)$:

$$Y(f) = X_e(f) \times TF\left[rect\left(\frac{t - \frac{T_s}{2}}{T_s}\right)\right]$$

$$Y(f) = T_s \times X_e(f) \times e^{j2\pi f T_s} \times sinc(T_s f)$$

$$Y(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{k}{T_s}\right) \times e^{j2\pi f T_s} \times sinc(T_s f)$$

On peut alors tracer ces différents spectres :



On peut voir sur cette figure l'effet qu'un BOZ a sur le spectre d'un signal reconstitué. Il apparait quelques diracs indésirables (qu'on ne veut pas). C'est logique : on a en sortie un signal en « escalier » qui n'est pas parfaitement sinusoïdal, et donc composé de plusieurs fréquences.

Plus la fréquence d'échantillonnage augmente, et plus $y(t)$ se rapproche d'un sinus pur. On peut le voir sur le spectre : plus F_s augmente, plus l'amplitude des fréquences indésirables diminue (les diracs se rapprochent des zéros du $sinc$ qui sont tous les kF_s.

3. Partie III – Signaux numériques et TFD

Exercice 1

On considère de nouveau le signal $s(t)=a_0 + a_1.cos(2\pi f_1 t) + a_2.cos(2\pi.3f_1 t)$ avec f_1 = 20Hz, a_0=1, a_1=2 et a_2=1.

Le signal $s_e(t)$ est le signal $s(t)$ échantillonné avec une fréquence $F_s = 150Hz$. Les échantillons sont acquis par un ordinateur pendant une durée $T_a = 100\ ms$.

1. Donner l'expression de tous les échantillons s_k.

$$s_k = a_0 + a_1 \cos(2\pi f_1 k T_s) + a_2 \cos\,(2\pi 3 f_1 k T_s)$$

2. Donner l'expression de *S(f)* la transformée de Fourier de *s(t).*

On utilise la propriété de linéarité de la TF :

$$S(f) = a_0\delta(f) + \frac{a_1\delta(f-f_1) + a_1\delta(f+f_1) + a_2\delta(f-3f_1) + a_2\delta(f+3f_1)}{2}$$

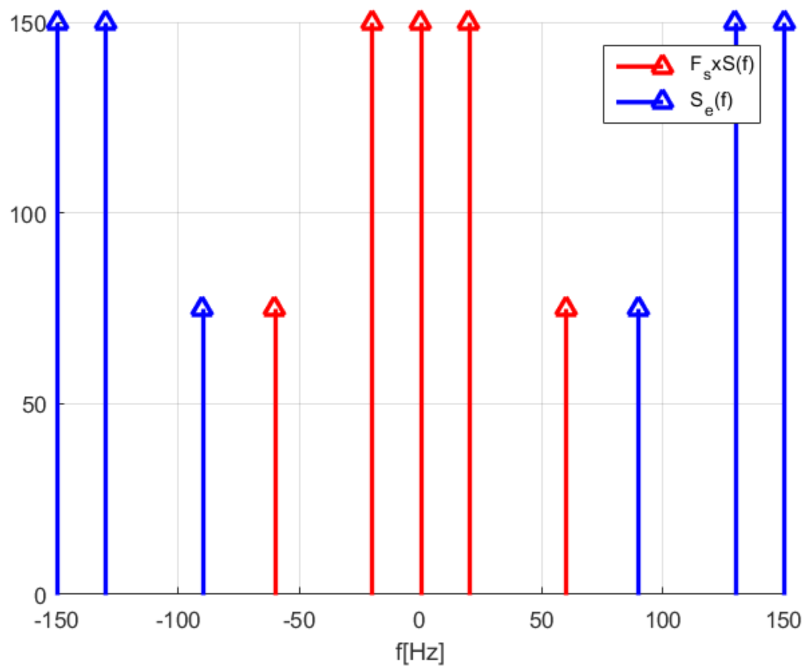
$$S(f) = \delta(f) + \delta(f-f_1) + \delta(f+f_1) + \frac{\delta(f-3f_1) + \delta(f+3f_1)}{2}$$

3. Donner l'expression de $S_e(f)$ la transformée de Fourier de $s_e(t)$.

$$S_e(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} S\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

4. Représenter sur le même graphe le module de *S(f)* et de $S_e(f)$ entre $-F_s$ et F_s.

On utilise la formule ci-dessus (périodisation de $S(f)$ de période F_s, multiplication par F_s)



5. Sur le même graphique, représenter la TFD S_n.

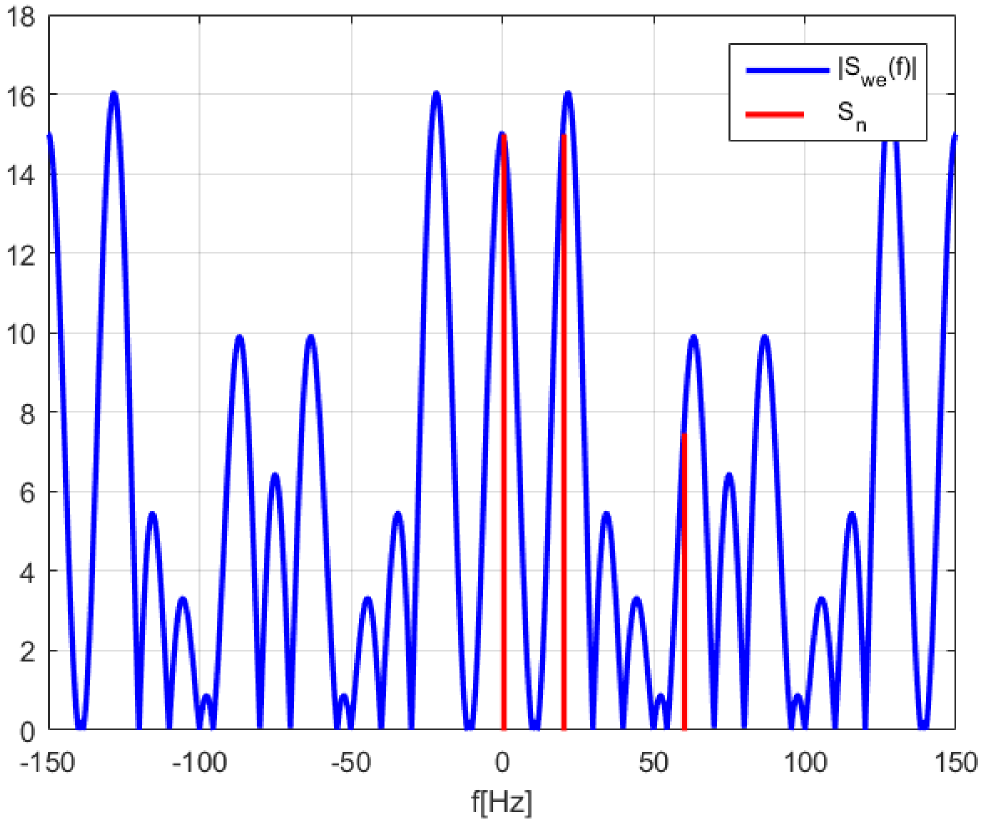
Concernant la TFD, il faut forcément prendre en compte le fenêtrage. Les coefficients S_n sont des points du spectre du signal fenêtré et échantillonné $s_{we}(t)$. Nous avons calculé son spectre dans l'exercice 3 de la partie précédente :

$$S_w(f) = T_a\left(sinc(T_a f) + sinc\big(T_a(f - f_1)\big) + sinc\big(T_a(f + f_1)\big) + \frac{sinc\big(T_a(f - 3f_1)\big) + sinc\big(T_a(f + 3f_1)\big)}{2}\right)$$

Si on échantillonne ce signal, on a alors :

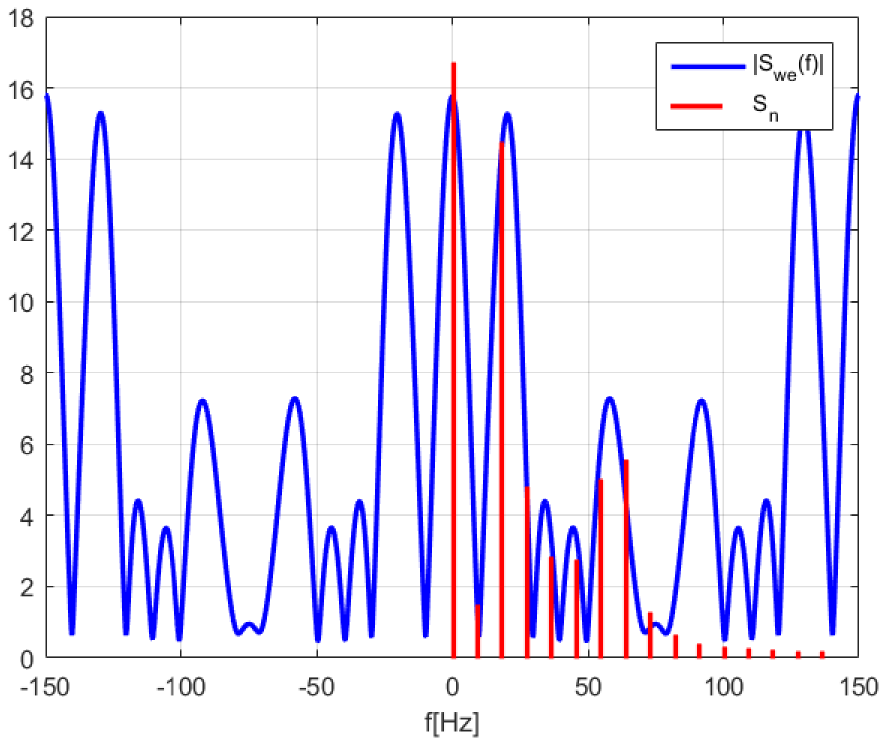
$$S_{we}(f) = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_w\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

Ici, on a $T_a = 0.1s$. Si on représente S_n sur le même graphique que précédemment, les points seront confondus avec les diracs de $S(f)$. Les voici sur une autre figure :



Toujours en échantillonnant à la même fréquence ($150\ Hz$), la durée d'acquisition est cette fois de $T_a = 110\ ms$.

6. Reprendre la question 5.



Ici, les points du spectre qui sont calculés tous les $1/T_a$ ne correspondent plus avec les différents pics. A la question précédente, c'était de la « chance » si les points correspondaient aux pics recherchés, tous les autres étant égaux à 0. Conclusion : il faut faire très attention quand on analyse le spectre d'un signal numérique.

Exercice 2: Zero padding

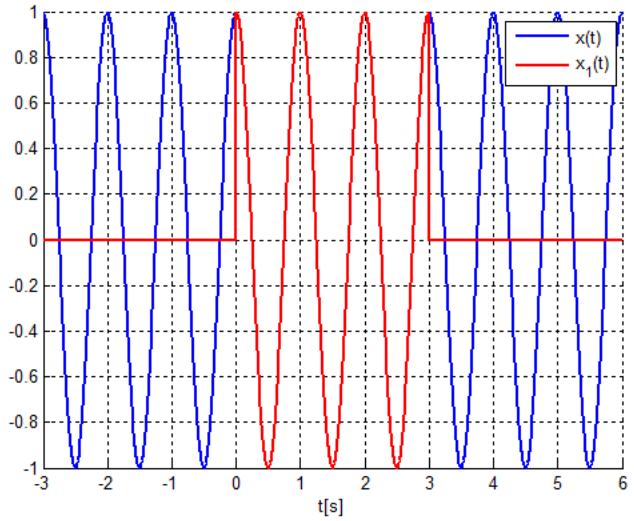
On cherche à estimer la transformée de Fourier d'un signal $x(t) = cos(2\pi f_0 t)$, avec $f_0 = 1\ Hz$. On a vu en cours qu'on ne pouvait pas la calculer de manière exacte à partir d'un nombre fini de points.

On fait l'acquisition de x sur une durée T_a. On note ce signal x_1.

1. Quelle est la transformée de Fourier de x ?

$$X(f) = \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}$$

2. Représenter le signal x_1.



3. Quelle est la transformée de Fourier théorique de x_1 dont on fait l'acquisition ? Tracer sur un graphique le module de cette transformée de Fourier.

$$x_1(t) = x(t).rect\left(\frac{t-T_a}{2}\right)$$

$$X_1(f) = X(f) * TF\left[rect\left(\frac{t-T_a}{2}\right)\right]$$

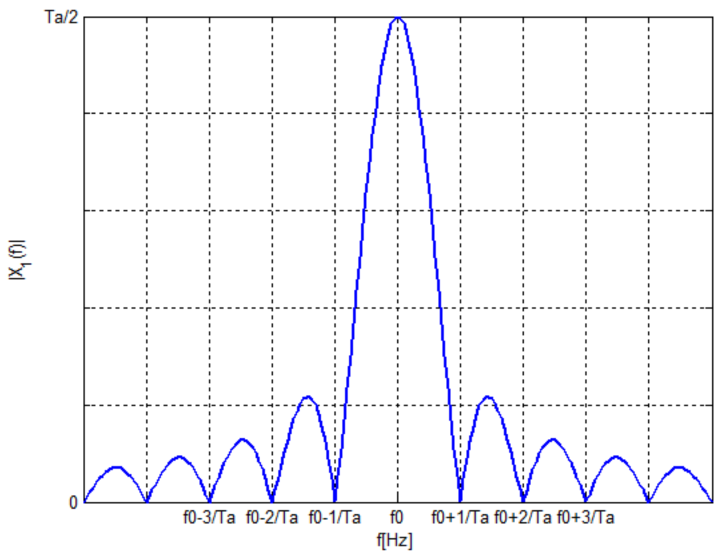
$$X_1(f) = \frac{\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)}{2} * T_a sinc(T_a f)e^{-\pi f T_a}$$

$$X_1(f) = \frac{T_a}{2}\left(e^{-\pi(f-f_0)T_a} sinc\big(T_a(f-f_0)\big) + e^{-\pi(f+f_0)T_a} sinc\big(T_a(f+f_0)\big)\right)$$

Si $T_a \gg \frac{1}{f_0}$, les $sinc$ sont disjoints et on peut dire :

$$|X_1(f)| \approx \frac{T_a}{2}|sinc(T_a(f-f_0)| + \frac{T_a}{2}|sinc(T_a(f+f_0)|$$

Le spectre de x_1 est périodique, on ne trace celui-ci que pour les fréquences positives :



Pour calculer numériquement des points de cette transformée de Fourier, on utilise la TFD, par l'intermédiaire de la FFT, sur Matlab par exemple. N échantillons de x ont été acquis tous les T_s. La durée d'acquisition est ainsi $T_a = NT_s$.

4. Rappeler la définition de la TFD.

Il s'agit de calculs de N points de $X_{1e}(f)$, le spectre du signal échantillonné $x_{1e}(t)$, distants de $\frac{1}{T_a}$ et compris entre 0 et $F_s - \frac{1}{T_a}$.

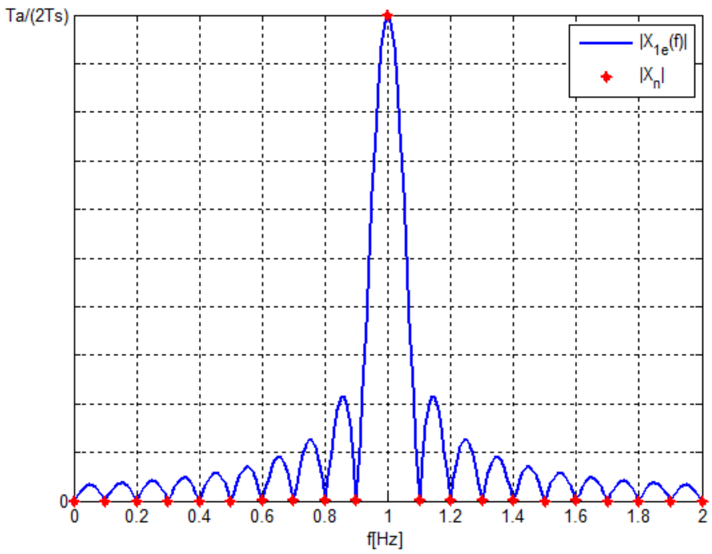
De plus on a :

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2\pi j \frac{kn}{N}}$$

5. Quelle est la résolution fréquentielle de la TFD (=quel est l'intervalle fréquentiel entre 2 points) ?

Comme précisé précédemment, $\Delta f = \frac{1}{T_a}$

6. Pour $T_a = 10s$, représenter sur un même graphique le module de la transformée de Fourier théorique du signal échantillonné et les points de la TFD. Qu'en concluez-vous ?

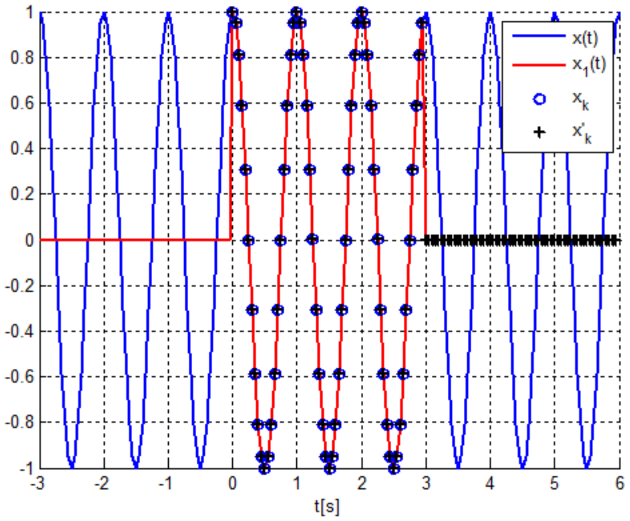


On ne voit pas le $sinc$ car il n'y a pas assez de points calculés par la TFD :

On peut améliorer la résolution fréquentielle en utilisant une technique appelée « zero padding ». Cette méthode consiste à construire un signal $x_1'(k)$ qui vaut $x_1(k)$ sur ses N premiers échantillons, et 0 sur les suivants (L échantillons en tout), puis d'en calculer sa TFD.

On notera L le nombre d'éléments de $x_1'(k)$.

7. Sur un même graphe, représenter $x_1(k)$ et x_1 '(k).



8. Montrer que la TFD de $x'_1(k)$ est le calcul de points de la transformée de Fourier de $x_1(t)$.

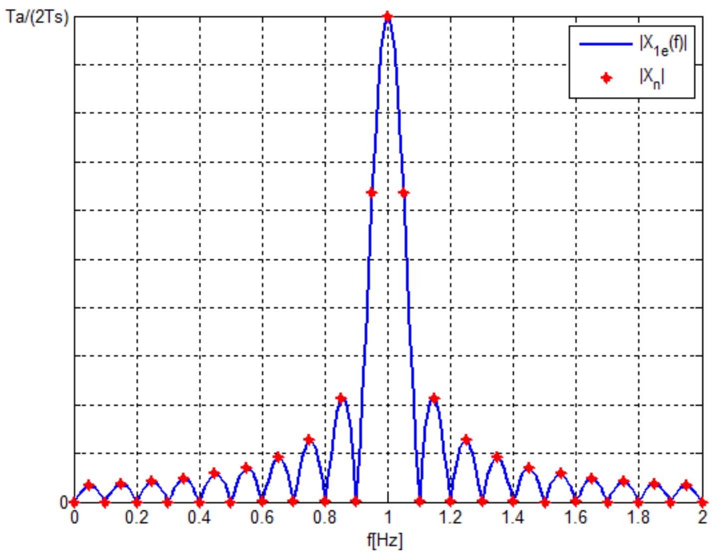
La TFD de $x_1'(k)$ est le calcul de L points du spectre du signal échantillonné. Ce signal échantillonné est ici $x_1(t)$, car comme on peut le voir sur la figure précédente, les points noirs sont sur la courbe rouge. Les points calculés sont donc des points de la transformée de Fourier représentée à la question 6.

9. Quelle est la résolution fréquentielle de la TFD de $x_1'(k)$?

L points donc$\Delta f = \frac{F_s}{L}$

10. Pour $L = 2N$, représenter sur le graphique de la question 6 les points de cette nouvelle TFD. Qu'en concluez-vous ?

Les points sont cette fois distants de $\frac{1}{2T_a}$:



Dans Matlab, vous avez la possibilité de faire du zero padding avec $fft(x, L)$. On rappelle que la FFT est un algorithme de calcul de la TFD optimisé pour un nombre étant une puissance de 2.

11. Si on veut une résolution fréquentielle d'au moins $1\ mHz$, avec $T_s = 1\ ms$, quelle valeur choisiriez-vous pour L ?

On veut $\Delta f < 10^{-3}\ Hz$. On sait que$\Delta f = \frac{1}{T_a} = \frac{1}{LT_s}$

Donc $\frac{1}{LT_s} < 10^{-3} \Rightarrow L > \frac{10^3}{T_s} \Rightarrow L > 10^6$

Pour calculer la fft, il est préférable de choisir pour L une puissance de 2 (le calcul sera rapide). Soit $L = 2^M$. Il faut donc trouver M pour que $2^M > 10^6$.

On peut choisir $M = 20$ et donc $L = 1048576$.

Exercice 2 : Equation aux différences

Le comportement d'un système linéaire invariant (SLIT) est caractérisé par l'équation aux différences:

$$y_n - 1.2y_{n-1} + 0.3y_{n-2} = 2.10^{-3}x_n + 0.5x_{n-1}$$

1. Calculer la fonction de transfert $H(z)$ du système.

On utilise la propriété du retard ($TZ[x_{k-n}] = z^{-n} \times TZ[x_k]$)

$$Y(z) - 1.2z^{-1}Y(z) + 0.3z^{-2}Y(z) = 2.10^{-3}X(z) + 0.5z^{-1}X(z)$$

$$Y(z) \times (1 - 1.2z^{-1} + 0.3z^{-2}) = X(z) \times (2.10^{-3} + 0.5z^{-1})$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2.10^{-3} + 0.5z^{-1}}{1 - 1.2z^{-1} + 0.3z^{-2}}$$

2. Calculer les 5 premiers éléments de la réponse impulsionnelle h_k du système.

La réponse impulsionnelle correspond à la réponse à une impulsion de dirac. Soit $x_n = \delta_n$. Avec $\delta_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \delta_n = 0$.

$$y_0 = 1.2 \times y_{-1} - 0.3y_{-2} + 2.10^{-3}\delta_0 + 0.5\delta_{-1} = 0 - 0 + 2.10^{-3} + 0 = 2.10^{-3}$$

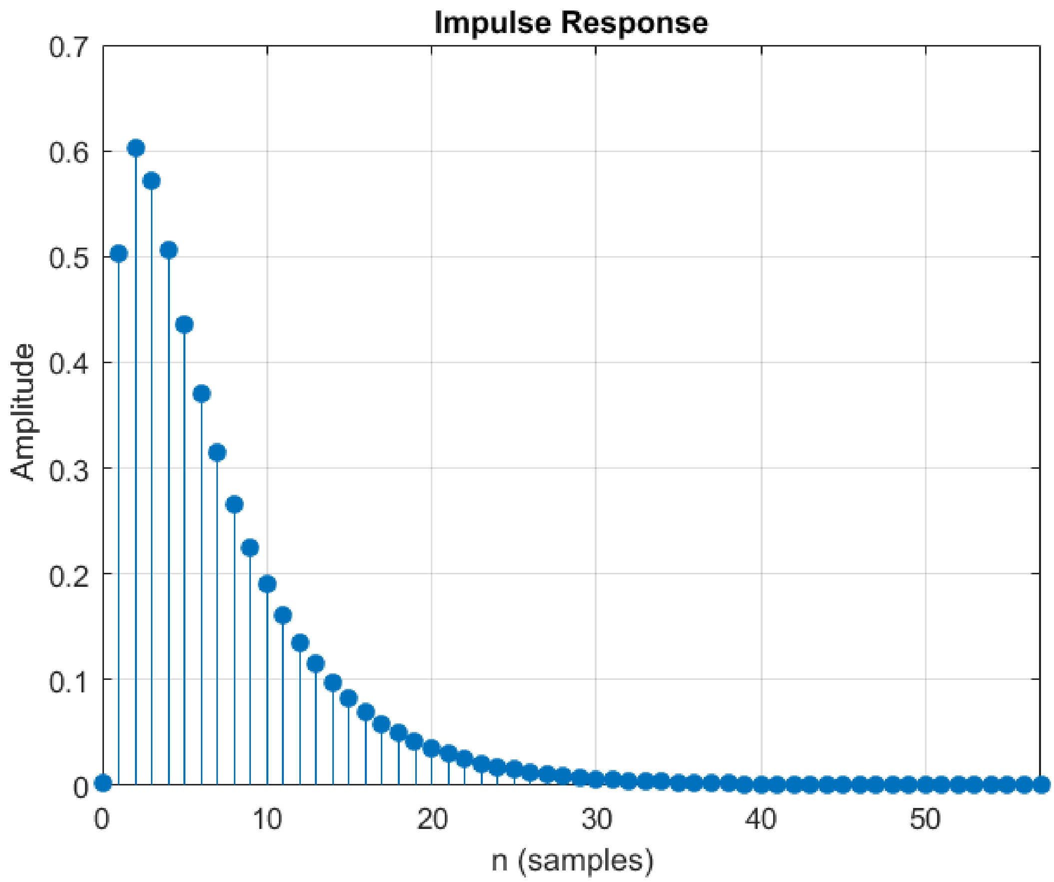
$$y_1 = 1.2 \times y_0 - 0.3y_{-1} + 2.10^{-3}\delta_1 + 0.5\delta_0 = 1.2 \times 2.10^{-3} - 0 + 0 + 0.5 \times 1 = 0.5024$$

$$y_2 = 1.2 \times y_1 - 0.3y_0 + 2.10^{-3}\delta_2 + 0.5\delta_1 = 1.2 \times 0.5024 - 0.3 \times 2.10^{-3} + 0 + 0 = 0.6023$$

$$y_3 = 1.2 \times y_2 - 0.3y_1 + 2.10^{-3}\delta_3 + 0.5\delta_2 = 1.2 \times 0.6023 - 0.3 \times 0.5024 + 0 + 0 = 0.5720$$

$$y_4 = 1.2 \times y_3 - 0.3y_2 + 2.10^{-3}\delta_4 + 0.5\delta_3 = 1.2 \times 0.5720 - 0.3 \times 0.6023 + 0 + 0 = 0.5057$$

Avec Matlab, on peut tracer la réponse impulsionnelle (fonction $impz$) :

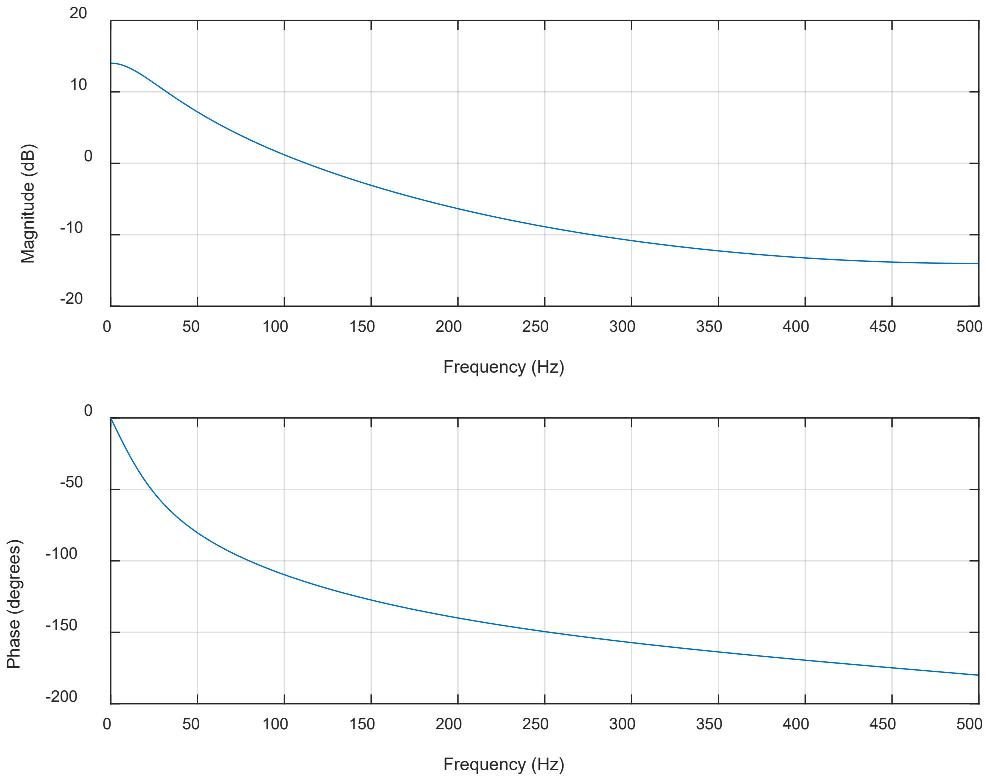


3. Calculer la réponse fréquentielle du système.

Il faut remplacer z par $e^{j2\pi fT_s}$. Cela donne :

$$H'(f) = H\left(z = e^{j2\pi fT_s}\right) = \frac{2.10^{-3} + 0.5e^{-j2\pi fT_s}}{1 - 1.2e^{-j2\pi fT_s} + 0.3e^{-j4\pi fT_s}}$$

Avec Matlab, on peut en faire le tracer avec la fonction $freqz$.


20
10
0
-10
-20
Magnitude (dB)
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
Frequency (Hz)
0
-50
-100
-150
-200
Phase (degrees)
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
Frequency (Hz)