Signal and Systems
Part 1: Introduction au traitement du signal (TS)

信号与系统I 第1讲

冉磊

Xidian University

2020.08

Based on Prof. Nathalie GUYADER’ syllabus.

课程安排
Plan du cours

- Chapitre 1 – Introduction 介绍
- Chapitre 2 – Signaux et opérations de base 信号及其基本操作
- Chapitre 3 – Classification des signaux 信号分类
- Chapitre 4 – Signaux déterministes 确定性信号
- Chapitre 5 – Filtrage 滤波

.... Ce planning peut être amené à évoluer en fonction de l'avancement du groupe

CHAPITRE 1
INTRODUCTION

- L’objectif de ce chapitre est de répondre à la question :

qu’est-ce qu’est la théorie du signal et le traitement du signal?

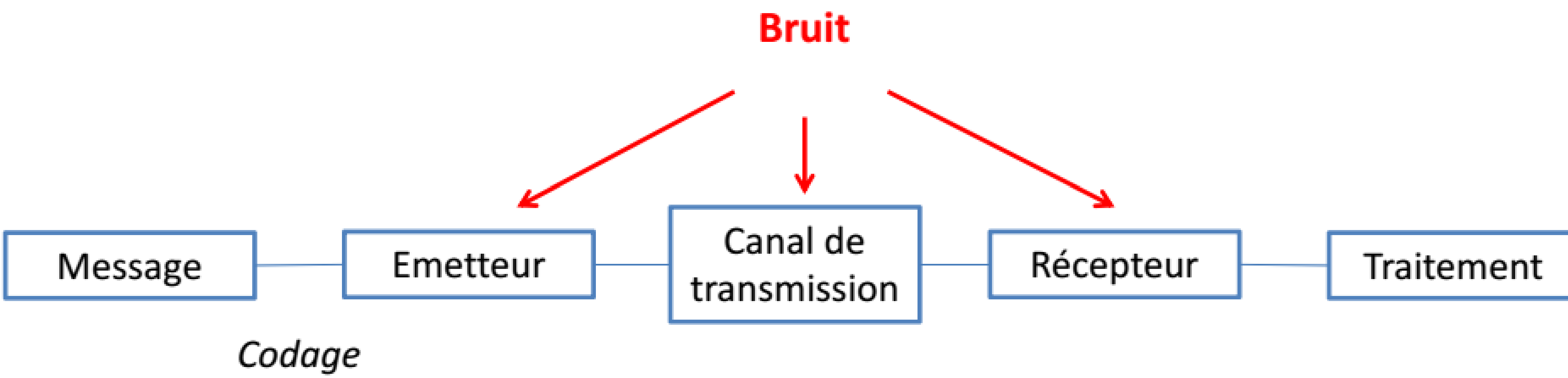
Définitions

- Le mot « signal »: vient du latin signum qui signifie *signe*, variation d'une grandeur physique de nature quelconque porteuse d'information

Un signal est la représentation physique de l'information. Sa nature physique peut être très variable : acoustique, électronique, optique etc.

Le mot *signal* est presque toujours associé au mot *bruit.*

Un bruit est une perturbation indésirable qui se superpose au signal dans un canal de transmission ou dans un système de traitement.


Bruit
Message
Emetteur
Canal de transmission
Récepteur
Traitement
Codage

La théorie du signal consiste en l'étude des **modèles mathématiques** qui représentent le signal et rendent compte des transformations qu'il subit lors de sa transmission et/ou lors de son traitement afin d'en extraire l'information (le message) véhiculée.

L'étude des signaux et des bruits ne peut être dissociée.

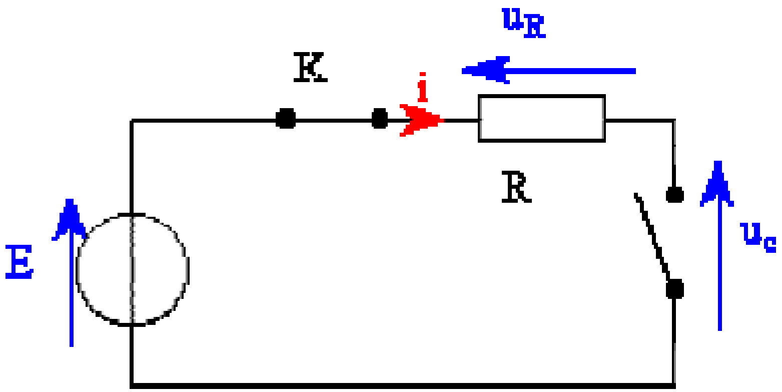
<u>Signal et bruit sont deux notions très relatives</u> qui dépendent de l'intérêt que leur porte l'observateur.

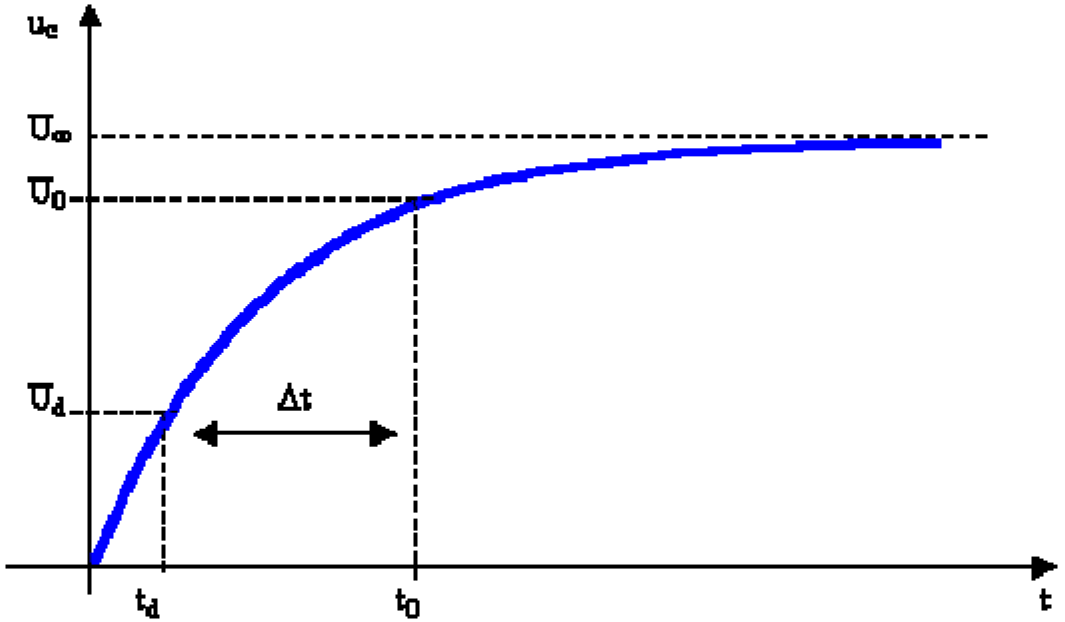
Ainsi, certains phénomènes électromagnétiques d'origine galactique peuvent être considérés comme du bruit dans les télécommunications mais sont les signaux d'intérêt pour les astrophysiciens.

Exemples

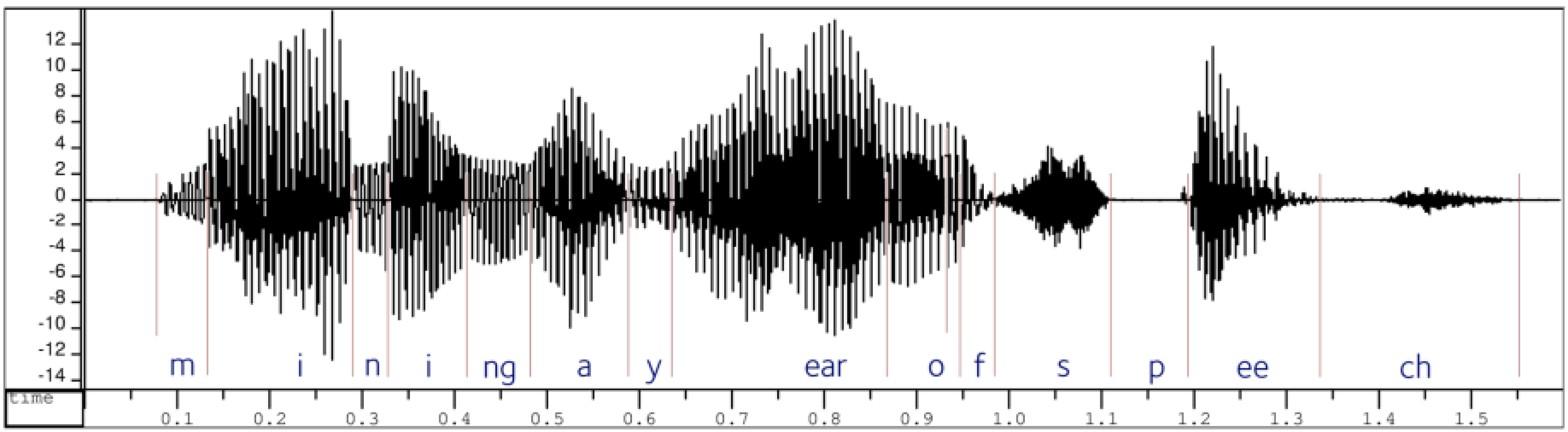
- Onde acoustique : courant délivré par un microphone (parole, musique etc.)
- Signaux biologiques : EEG (électroencéphalogramme), ECG (électrocardiogramme), EMG (électromyogramme)
- Tension aux bornes d'un condensateur en charge
- Signaux géophysiques: vibration sismique
- Finances: le cours de la bourse
- Images
- Vidéos
- Etc.

Exemples: charge d'un condensateur

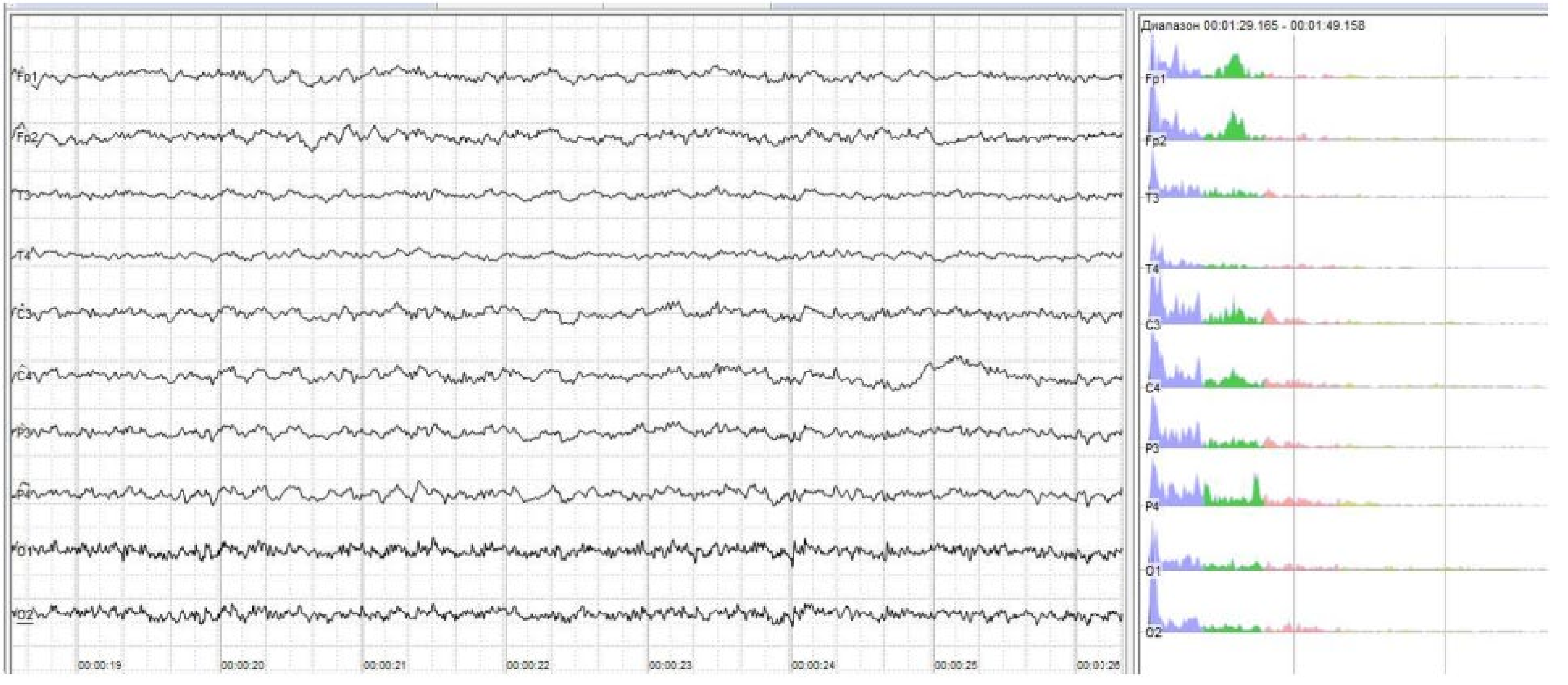




Exemples: signal de parole



Exemples: signal EEG



The sample of human EEG in resting state.
Left - EEG traces (horizontal - time in seconds; vertical - amplitudes, scale 100uV)
Right - power spectra of shown signals (vertical lines - 10 and 20Hz, scale is linear)

静息状态下的人类脑电图样本。
左：脑电图描记图（水平--时间--秒，垂直--振幅，比例100uV）
右：所示的信号的功率谱（垂直线--10和20 Hz，标度是线性的）

Exemples: vidéo

Problème fondamental en TS

- Un des problèmes fondamental en traitement du signal est de supprimer le bruit d'un signal. La difficulté de ce problème dépend en partie de la proportion entre le signal et le bruit (ceci est mesuré pour le rapport signal à bruit, RSB ou SNR pour signal to noise ratio)

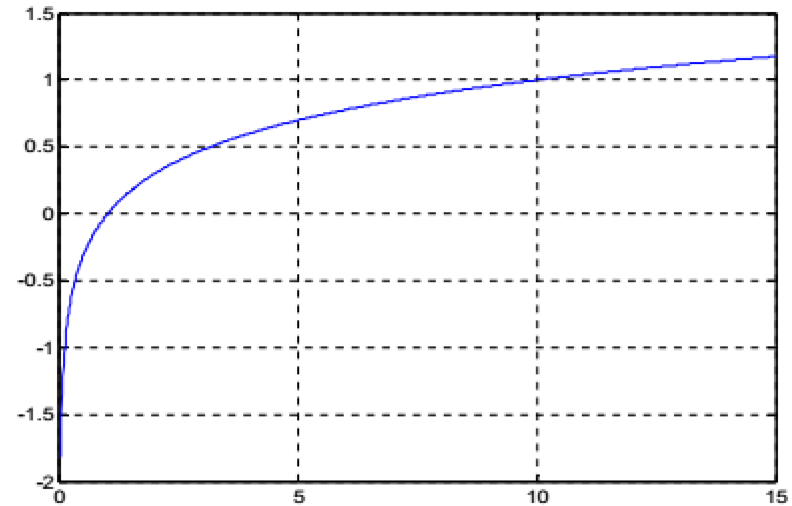
$$RSB = \frac{P_s}{P_B}$$

$$RSB_{dB} = 10\ log\left(\frac{P_s}{P_B}\right)$$

(log étant ici le logarithme décimal)

Rappel : fonction log

Pour $x > 0$, $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$



$\log(1) = 0$ et $\log(10) = 1$

Pour tout entier n: $\log(10^n) = n$

Pour tout réel > 0: $\log\left(\frac{1}{x}\right) = -\log(x)$

Pour tous réels x et y > 0 : $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$

Pour tout réel > 0 et tout entier n: $\log(x^n) = nlog(x)$

<u>De plus:</u>

Pour tous réels x et y > 0 : $\log(x) = \log(y) \quad \Leftrightarrow \quad x = y$

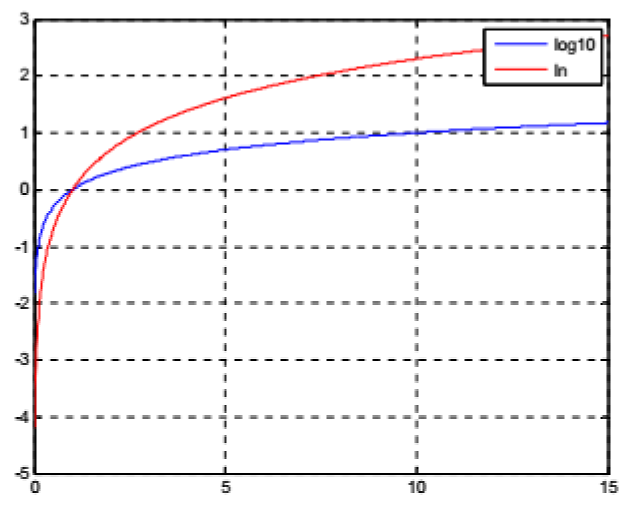
Pour tout réel > 0 et tout réel a, $\log(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad x = 10^a$

Rappel : fonction ln

- ln désigne le logarithme naturel ou népérien
- Le logarithme naturel est dit de base 'e' car ln(e)=1

La fonction logarithme népérien est la bijection réciproque de la fonction exponentielle.

C'est également la primitive définie sur les réels strictement positifs et qui s'annule en 1 de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x}$

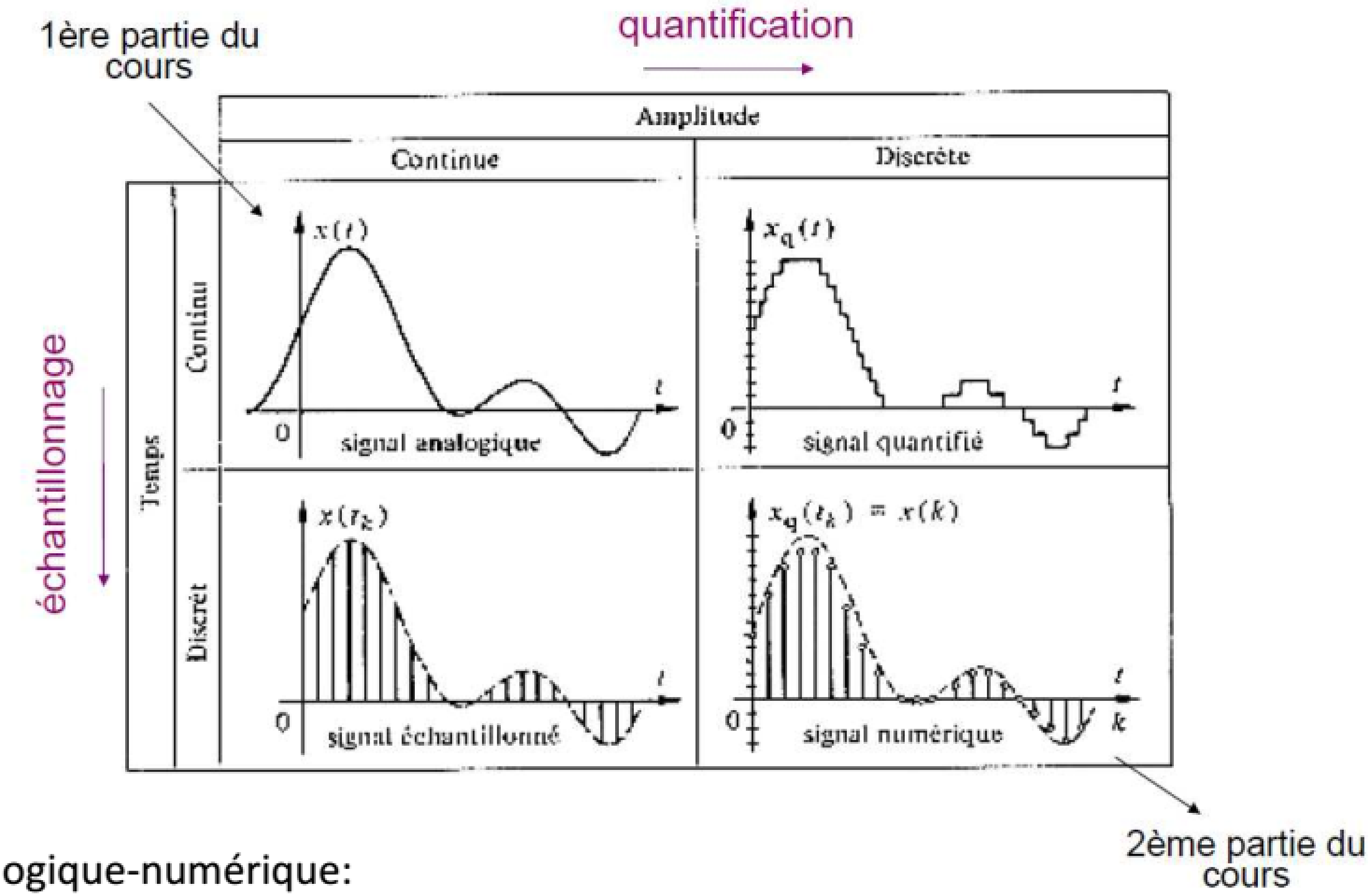


La théorie de l’information est l’ensemble des outils mathématiques qui permet de décrire la transmission de messages d’une source vers un destinataire.

La théorie du signal est l’ensemble des outils mathématiques qui permet de décrire les signaux et les bruits, par exemple, ceux émis par une source.

Le traitement du signal est l’ensemble des méthodes et des algorithmes qui permet d’élaborer ou d’interpréter les signaux porteurs d’information.

Actuellement, les méthodes de traitement du signal sont pour la quasi totalité numérique (sera abordé au cours de TS numérique).



Conversion analogique-numérique:

-Échantillonnage du signal (on prélève la valeur du signal avec un certain intervalle de temps, i.e. une certaine fréquence)

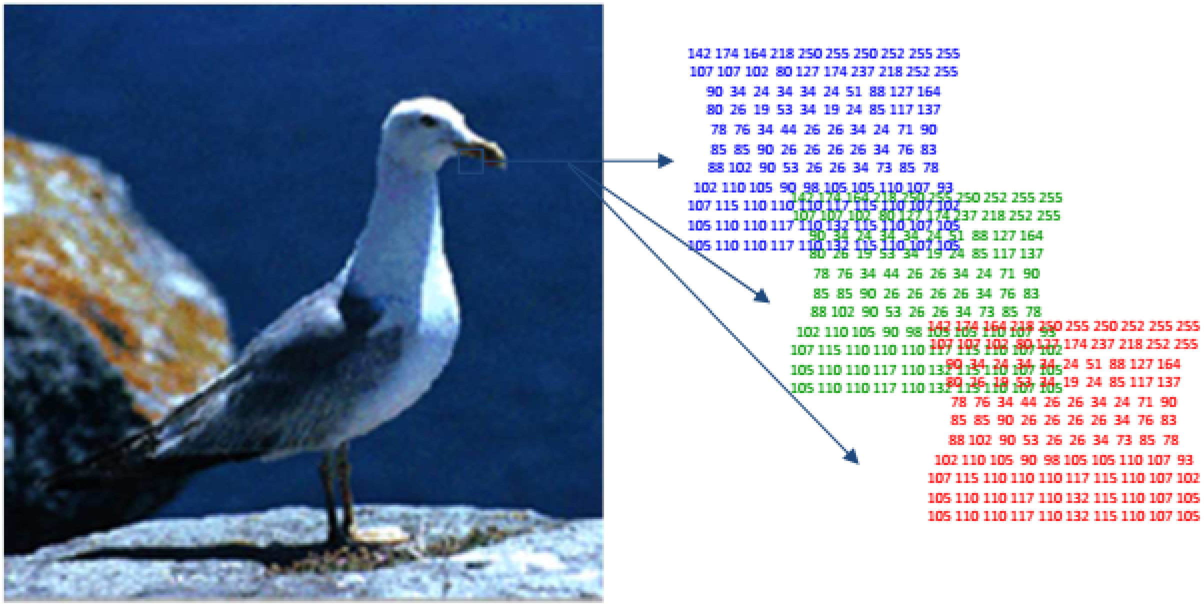
-Quantification du signal (une valeur numérique est donnée à chaque échantillon prélevé)

La qualité du signal numérique dépend :

-Du taux d'échantillonnage

-Du nombre de bits sur lequel on code les valeurs

Exemples: image couleur



3 plans couleur: Rouge, Vert Bleu

Chaque pixel est codé sur 8 bits (256 valeurs)

Références

- http://asi.insa-rouen.fr/enseignement/siteUV/ti/private/Cours1_TDS.pdf
- Cours de Christian Jutten
- Analyse et Traitement du signal Paul Gaillard et Régis Lengellé Technosup Ellipses.

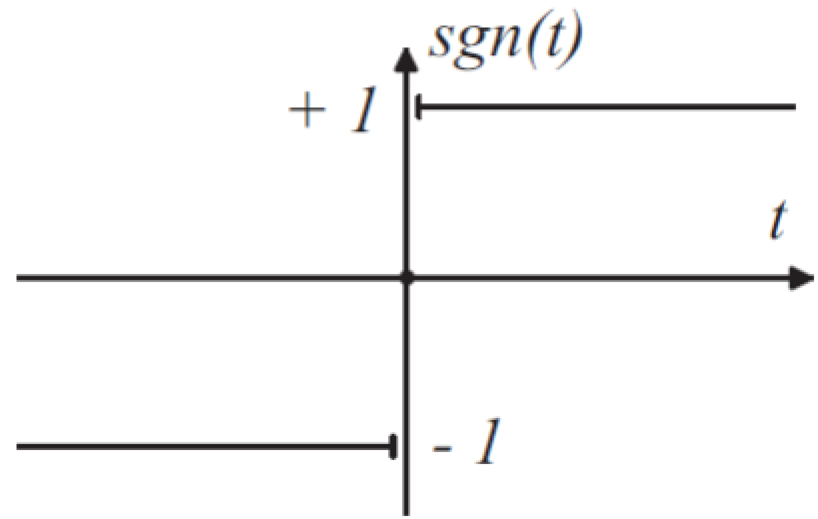
CHAPITRE 2
SIGNAUX, FONCTIONS ET OPERATEURS DE BASE
信号、功能和基本运算符

Signaux usuels

- <u>Fonction *signe:*</u>

La fonction signe, notée *sgn* est une fonction réelle de la variable réelle définie par:

$$\mathrm{sgn(t)} = \begin{cases} +1, \mathrm{si\ t} > 0 \\ -1, \mathrm{si\ t} < 0 \end{cases}$$



Usuellement, on prend:
$\mathrm{sgn}(0) = 0$

<u>Rq:</u> avec cette convention,
la fonction signe est impaire

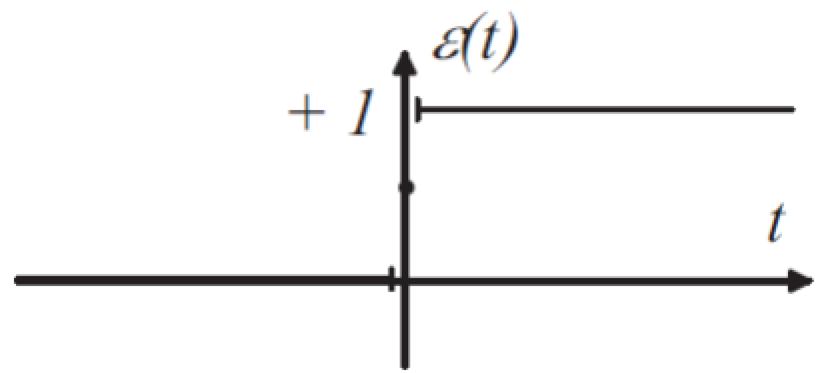
Signaux usuels

- <u>Fonction *échelon unité:*</u>

La fonction *échelon unité,* ou simplement *échelon* (ou de Heaviside), est une fonction réelle de la variable réelle définie par:

$$\varepsilon(\mathrm{t}) = \begin{cases} +1, \mathrm{si\ t} > 0 \\ 0, \mathrm{si\ t} < 0 \end{cases}$$

Et par convention,
$\varepsilon(0) = 1/2$



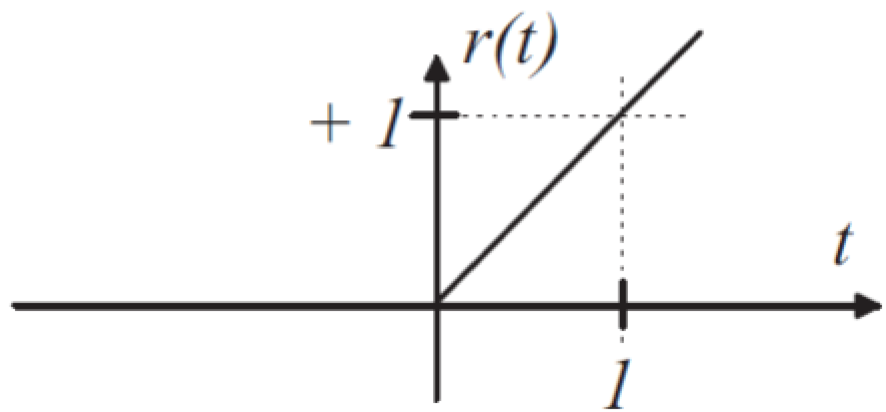
On montrera facilement que:
$\varepsilon(\mathrm{t}) = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(\mathrm{t}) + \frac{1}{2}$
$\mathrm{sgn}(\mathrm{t}) = 2\varepsilon(\mathrm{t}) - 1$

Signaux usuels

- <u>Fonction *rampe:*</u>

La fonction rampe, notée r, est une fonction réelle de la variable réelle définie par:

$$\mathrm{r(t)} = \int_{-\propto}^{t} \varepsilon(u)du$$



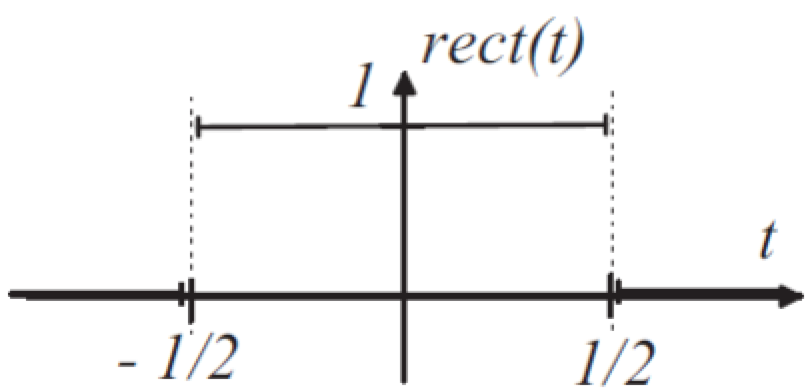
Signaux usuels

- <u>Fonction *rectangle* ou *porte:*</u>

La fonction rectangle, ou porte $\Pi(t)$, de largeur 1, est une fonction réelle de la variable réelle définie par:

$$\mathrm{rect(t)} = \varepsilon(\mathrm{t} + 1/2) - \varepsilon(\mathrm{t} - 1/2)$$

On remarque que l'aire de la fonction rectangle de largeur unité vaut 1

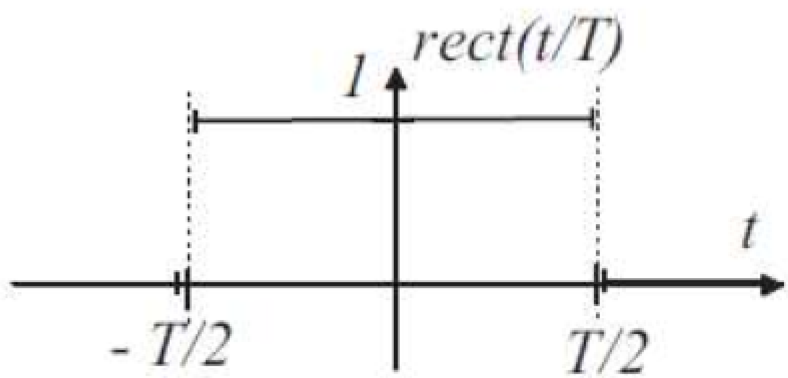


Signaux usuels

On peut également définir la fonction rectangle, ou fonction porte, de largeur T, fonction réelle de la variable réelle par:

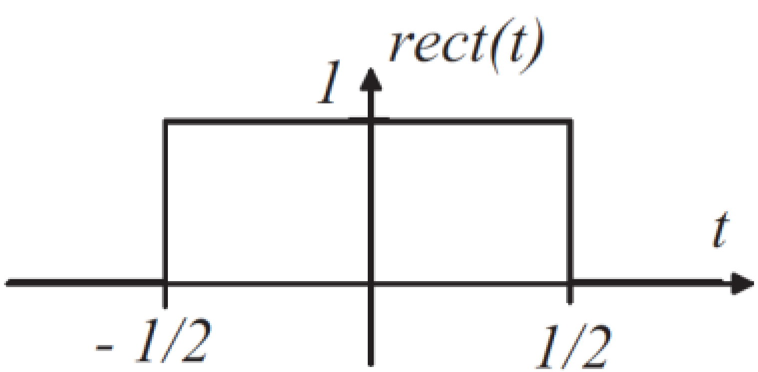
$$\mathrm{rect}_T(t) = \mathrm{rect}(t/T)$$

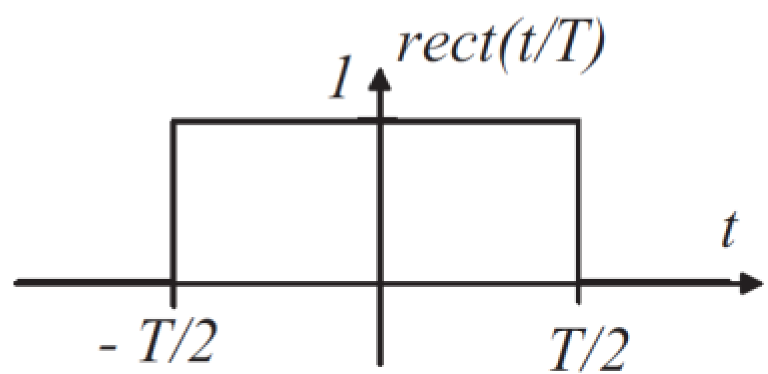
On remarque que l’aire de la fonction rectangle de largeur T vaut T.



Signaux usuels

Classiquement, on visualise ces fonctions *rectangles* sans tenir compte des discontinuités :

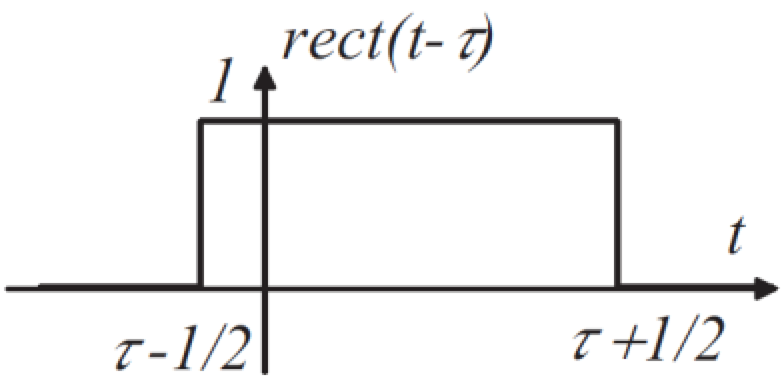


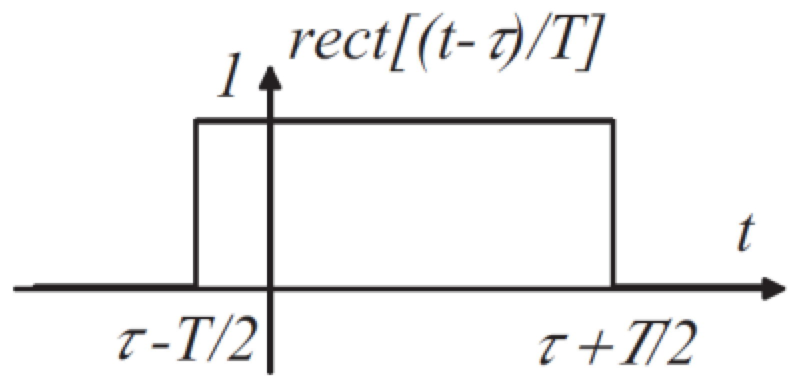


Signaux usuels

Une fonction rectangle de largeur unité translatée de –τ s'écrit simplement $rect(t-\tau)$ et de façon similaire une fonction rectangle de largeur T translatée de τ s'écrit:

$$\mathrm{rect}\left(\frac{\mathrm{t}-\tau}{\mathrm{T}}\right)$$





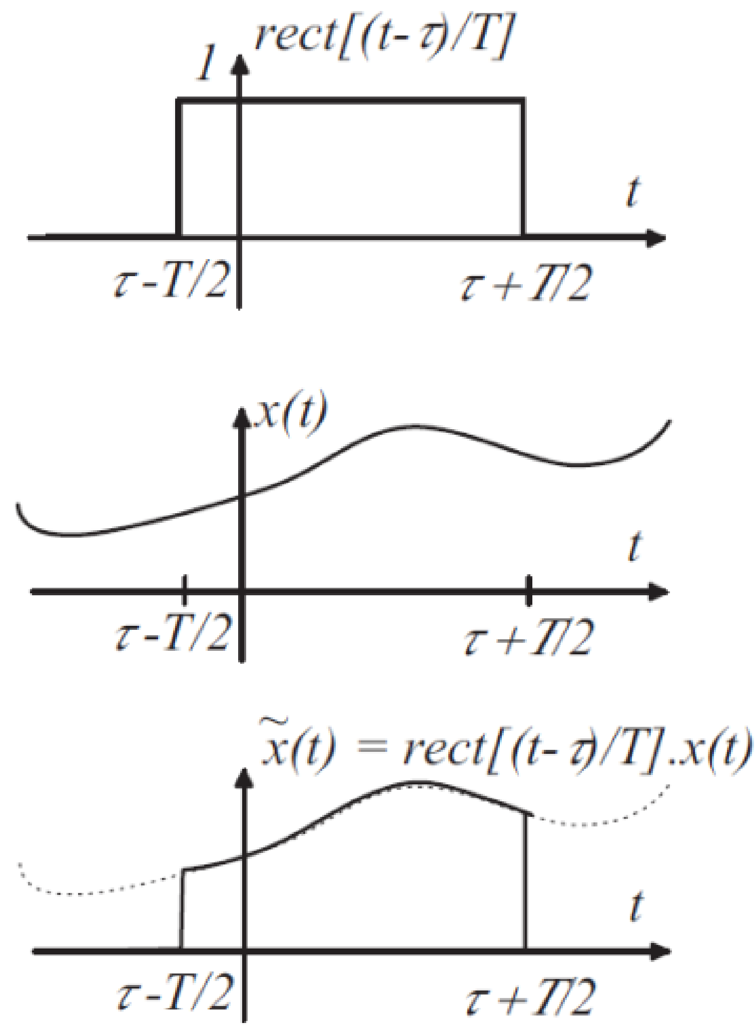
Signaux usuels

La fonction *rectangle* est très utile pour étudier un signal sur un intervalle

$$\tilde{x}(t) = x(t)\mathrm{rect}\left(\frac{t-\tau}{T}\right)$$

par définition de la fonction *rect*, $\tilde{x}(t)$ est égale à $x(t)$ sur l'intervalle $[t_1, t_2]$.

La fonction *rect* est également utilisée dans le domaine fréquentiel pour définir des filtres (passe-bas, passe-haut ou passe-bande).



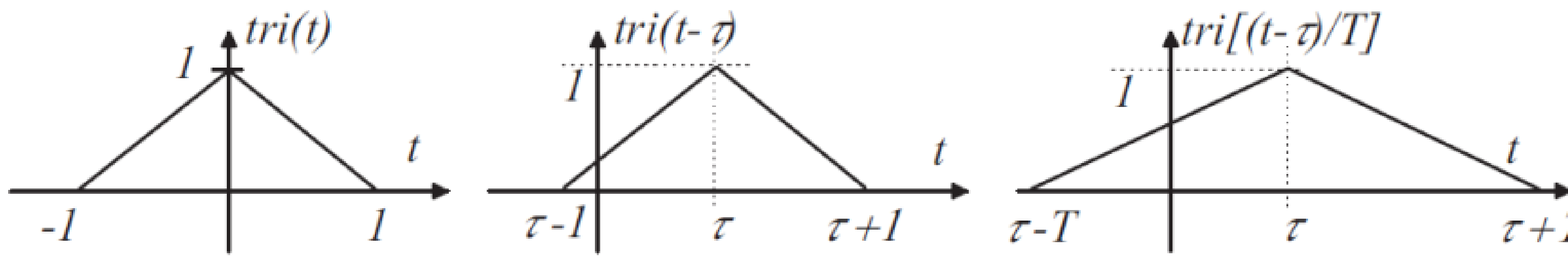
Signaux usuels

- <u>Fonction *triangle:*</u>

La fonction *triangle* unité, notée *tri*, est une fonction réelle de la variable réelle définie par:

$$\mathrm{tri(t)} = \begin{cases} 1 - |t| \ \text{ si } |t| \leq 1, \\ \quad 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

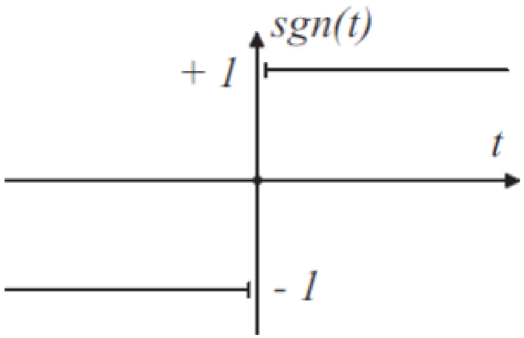
Notons que l'aire de la fonction triangle vaut 1 et que la largeur de son support vaut 2.

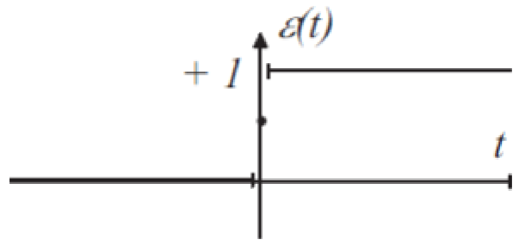


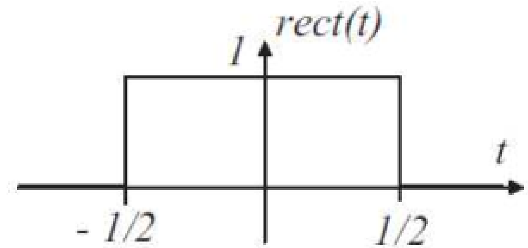
La fonction tri(t-τ) est une fonction tringle unité translatée de +τ

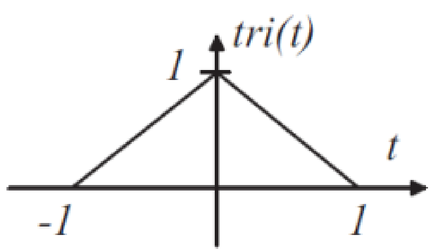
La fonction tri[(t- τ)/T] est une fonction triangle de largeur 2T (ou d'aire T) translatée de +τ.

Signaux usuels (résumé)









Impulsion de Dirac

- La notion de distribution est un complément mathématiques indispensable de la notion de fonction, notamment pour décrire des évènements infiniment brefs mais de puissance finie non nulle ou le phénomène d'échantillonnage.
- La distribution ou impulsion de Dirac, notée δ(t), vérifie:

$$\begin{cases} \delta(t) = 0, \text{si } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u) du = 1 \end{cases}$$

δ(t) peut être vue comme la limite des fonctions *rectangle* et *triangle:*

$$\begin{cases} \delta(t) = \lim\limits_{T \to 0} \frac{1}{T} \operatorname{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \\ \delta(t) = \lim\limits_{T \to 0} \frac{1}{T} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \end{cases}$$

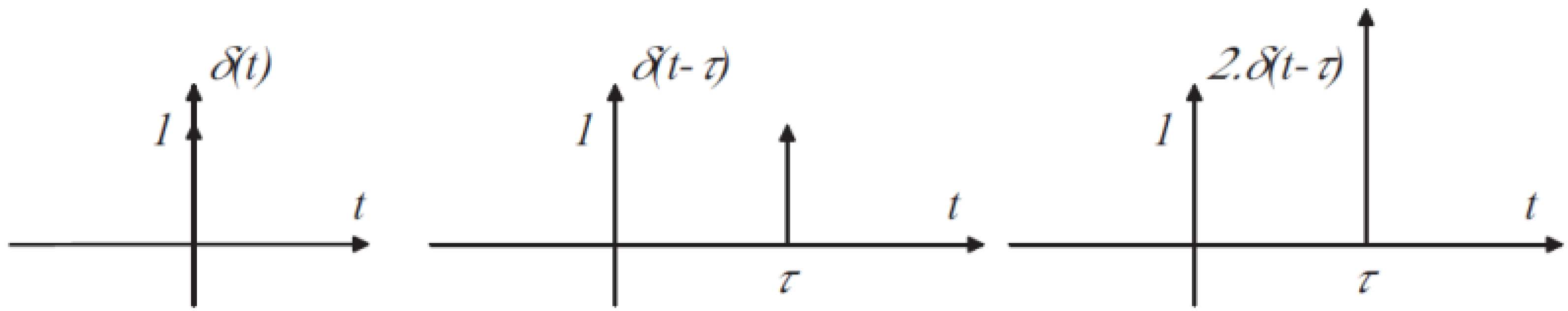
Impulsion de Dirac

- $\begin{cases} \delta(\mathrm{t}) = 0, \mathrm{si\ t} \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\mathrm{u})\mathrm{du} = 1 \end{cases}$

- <u>Remarque 1:</u> ceci est impossible (sous le pic l'aire ne peut être égale à 1)
- <u>Remarque 2:</u> l'énergie du Dirac est donc égale à 1
- <u>Remarque 3:</u> le Dirac peut-être vu comme la dérivée d'un échelon

Impulsion de Dirac

- <u>Représentation:</u>

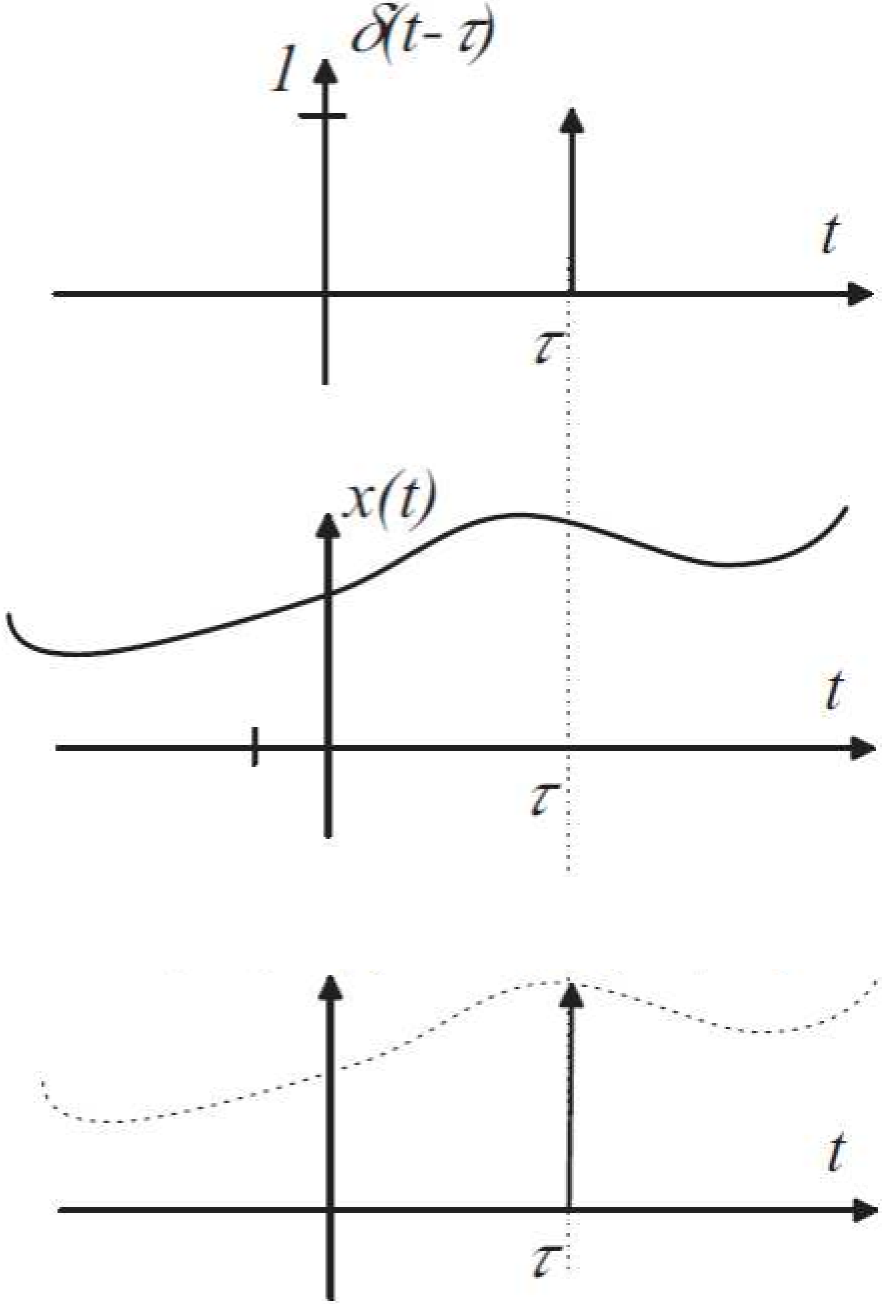


- <u>Produit d'une fonction par un Dirac:</u>

Le produit d'une fonction x(t) par une distribution de Dirac s'écrit:

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

En effet, la distribution est nulle partout sauf en t_0. Ainsi, ce produit permet de d'avoir accès à la valeur d'une fonction à un instant.



$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

Impulsion de Dirac

- <u>Peigne de Dirac:</u>

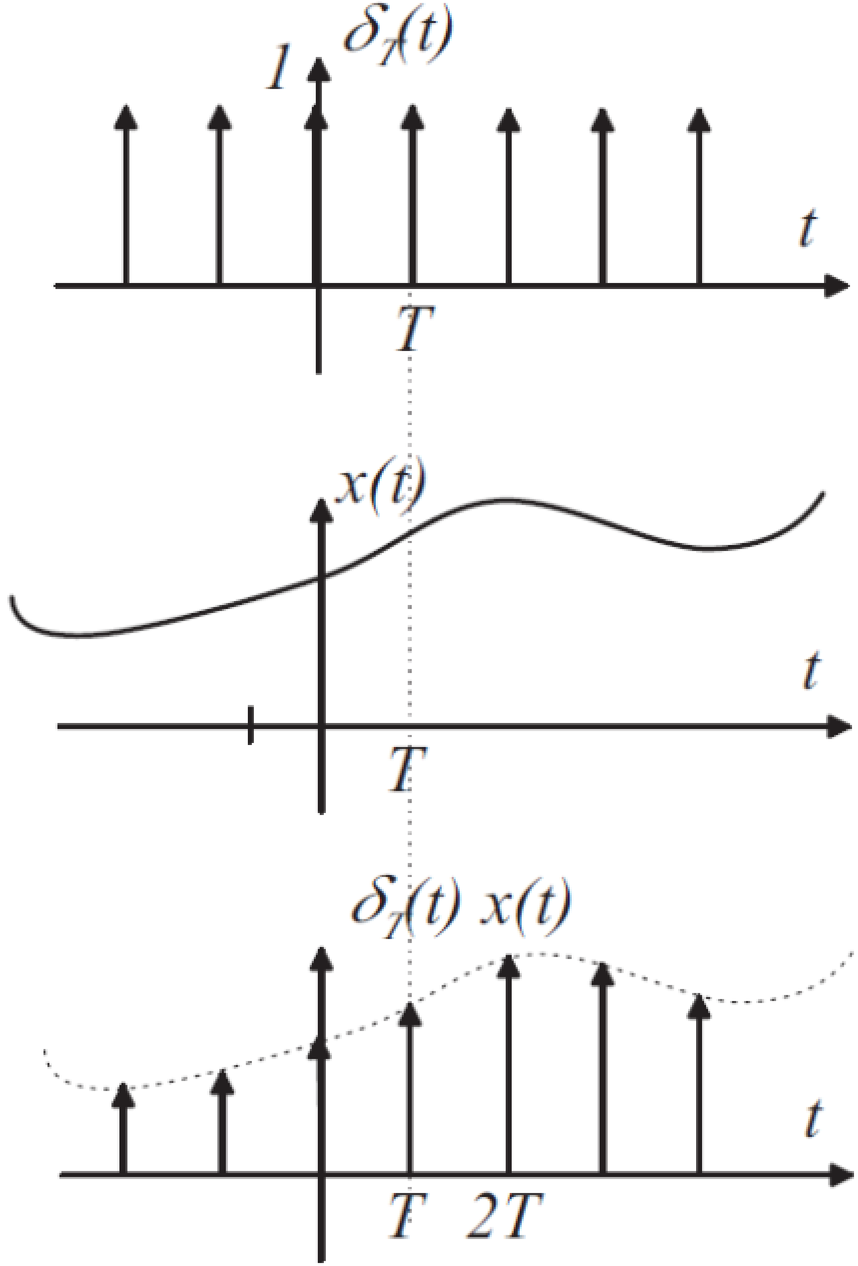
Pour échantillonner un signal avec une période d'échantillonnage régulière T, il est pratique de définir une suite d'impulsions de Dirac, périodique et de période T. Cette distribution, appelée *peigne de Dirac* et notée $\delta_T(t)$, est définie par:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

Pour échantillonner un signal $x(t)$ avec une période T, il suffit donc d'effectuer le produit de $x(t)$ par un *peigne de Dirac:*

$$x_e(t) = x(t)\delta_T(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

$$x_e(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT)\delta(t - kT)$$



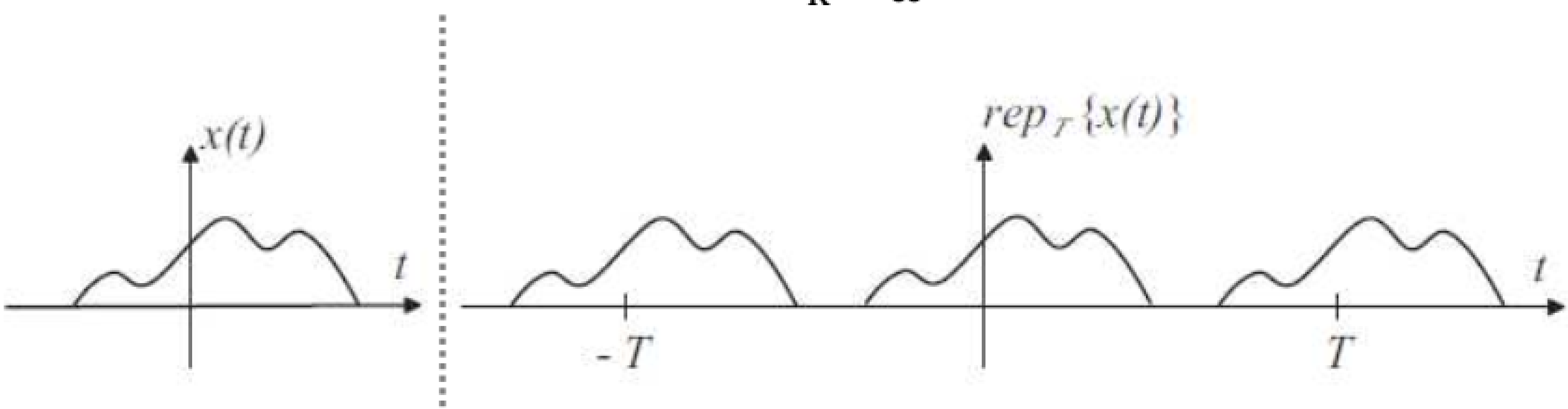
$\delta_T(t)$
1
t
T
x(t)
t
T
$\delta_T(t)\ x(t)$
t
T
2T

Divers

- <u>Périodisation d'un signal:</u>

A partir d'un morceau de signal de taille finie $x(t)$, on introduit aussi un opérateur de répétition $rep_T\{x(t)\}$ qui permet de périodiser un signal avec une période de répétition T:

$$\mathrm{rep_T\{x(t)\}} = \sum_{\mathrm{k}=-\infty}^{+\infty} \mathrm{x(t-kT)}$$



Divers

- <u>Fonction sinus cardinal:</u>

Cette fonction est très courante en traitement du signal où elle intervient comme la transformée de Fourier d'une fonction *rectangle*. Cette fonction *sinus cardinal*, notée $sinc(t)$, est définie par:

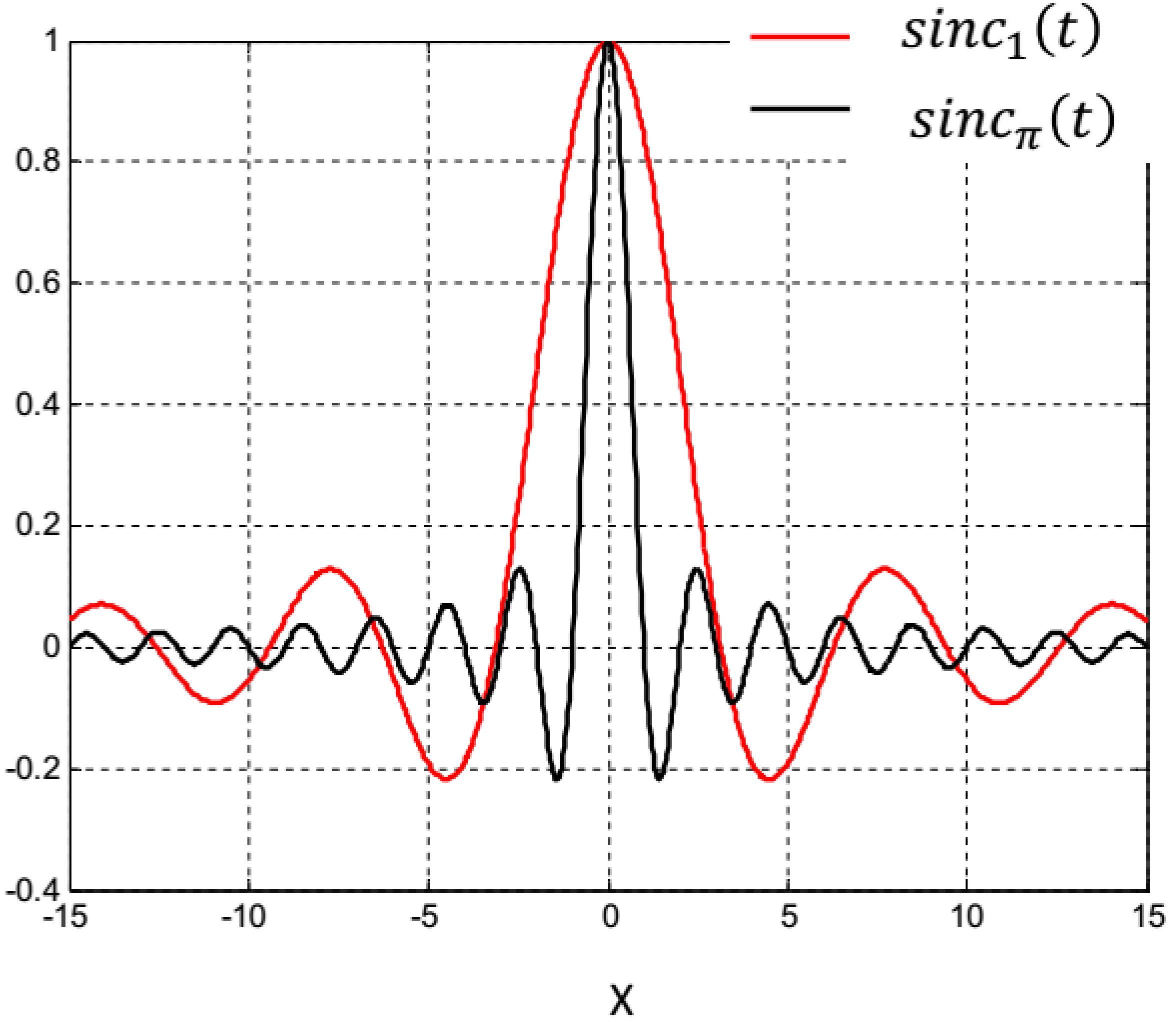
$$sinc_1(t) = \begin{cases} 1 & si\ t = 0 \\ \dfrac{\sin(t)}{t} & sinon \end{cases}$$

$$sinc_\pi(t) = \begin{cases} 1 & si\ t = 0 \\ \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t} & sinon \end{cases}$$

Par ailleurs, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}_1(\mathrm{t})\mathrm{dt} = \pi \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}_\pi(\mathrm{t})\mathrm{dt} = 1$$

Autres



Valeurs caractéristiques d'un signal

- Valeur moyenne:
  平均值
  $$\bar{x} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t)dt$$

- Valeur quadratique, ou <u>énergie</u>:
  能量
  $$W_x = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt$$

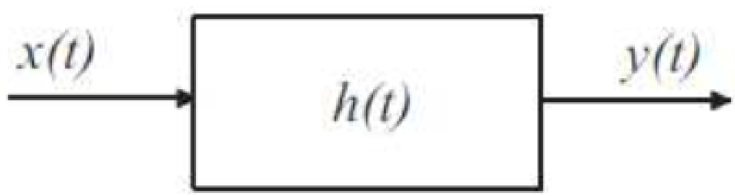
- Valeur quadratique moyenne, ou <u>puissance</u>:
  功率
  $$P_x = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt = \frac{W_x}{t_2 - t_1}$$

- Valeur efficace:
  有效值
  $$x_{eff} = \sqrt{P_x}$$

Produit de convolution

- <u>L'opérateur de convolution est très souvent utilisé</u>. Il est associé à l'opération de filtrage d'un signal $x(t)$ par un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$. La sortie du filtre, $y(t)$ vaut alors :

$$y(t) = x(t) * h(t)$$



$$\begin{aligned}(x * h)(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-v)h(v)dv \\ &= (h * x)(t)\end{aligned}$$

On reviendra sur la définition du produit de convolution en détail

Produit de convolution

- On retiendra que le produit de convolution est commutatif. Souvent en traitement du signal on note de façon pratique la convolution de 2 fonctions $x(t)$ et $h(t)$ sous la forme:

$$(x * h)(t) = x(t) * h(t)$$

La convolution d'un signal par la distribution de Dirac $\delta(t)$, on a:

$$\boxed{\delta(t) * h(t) = h(t)}$$

On remarque que $h(t)$ est la réponse du filtre excité par une impulsion de Dirac, d'où le nom de <u>réponse impulsionnelle du filtre</u> donné à h(t).

Signal and Systems
Part 1: Introduction au traitement du signal (TS)

信号与系统I 第二讲

冉磊
Xidian University

2020.09

Based on Prof. Nathalie GUYADER’ syllabus.

回顾

- Chapitre 1 – Introduction
- Chapitre 2 – Signaux et opérations de base
- Chapitre 3 – Classification des signaux
- Chapitre 4 – Signaux déterministes
- Chapitre 5 – Filtrage

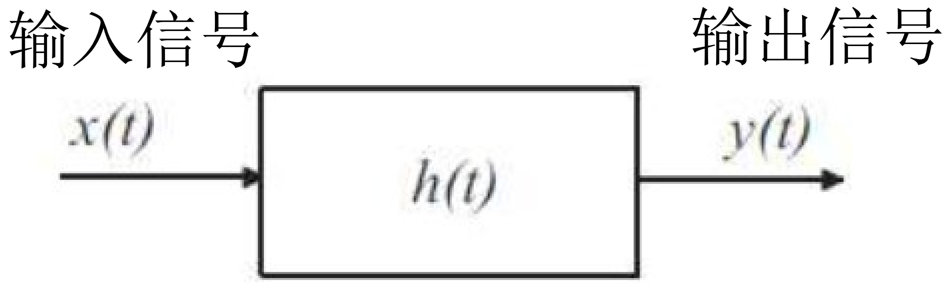
- 简介
- 信号及其基本操作
- 信号分类
- 确定性信号
- 滤波

➢ **信号：信息的载体—时间的函数**

1. 连续，离散 $x(t)$ $x(kT)$ $x(k)$
2. 周期，非周期 $f(t)=f(t+mT)$ 最小T
3. 能量，功率

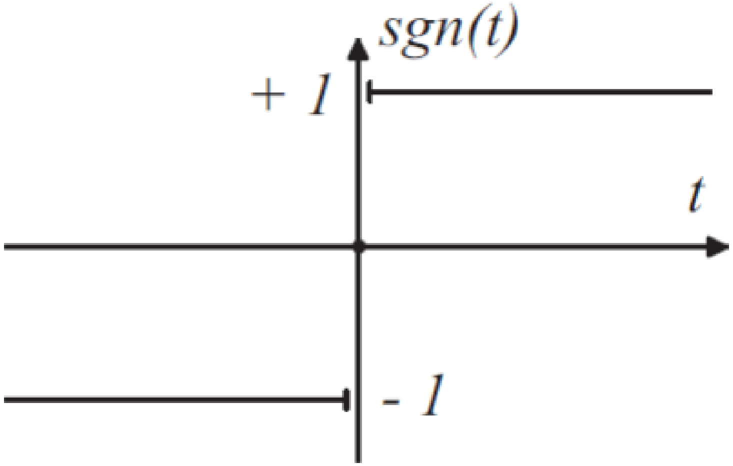
➢ **系统：若干相互关联的事物组合而成具有特定功能的整体**

1. 线性 $T\{a*f1(t)+b*f2(t)\}=a*T\{f1(t)\}+b*T\{f2(t)\}$
2. 时不变 若$T\{f(t)\}=y(t)$, $T\{f(t-\tau)\}=y(t-\tau)$

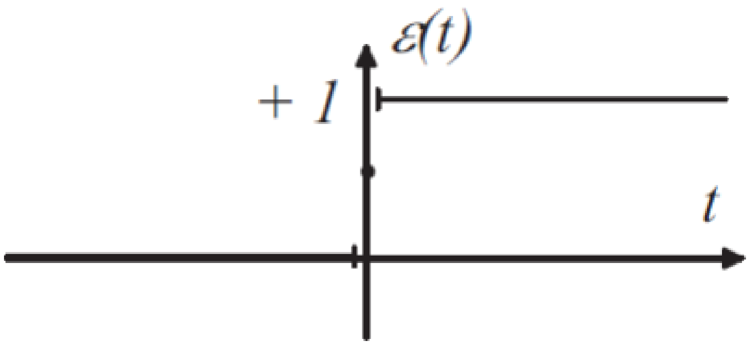


系统的特性—冲激响应

Fonction *signe*

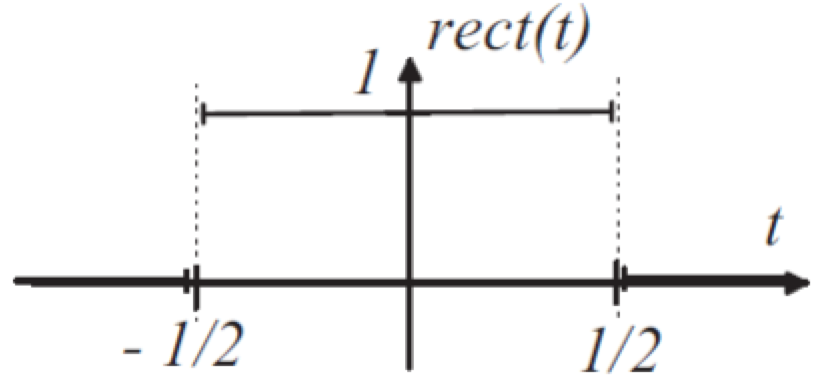


Fonction *échelon* unite

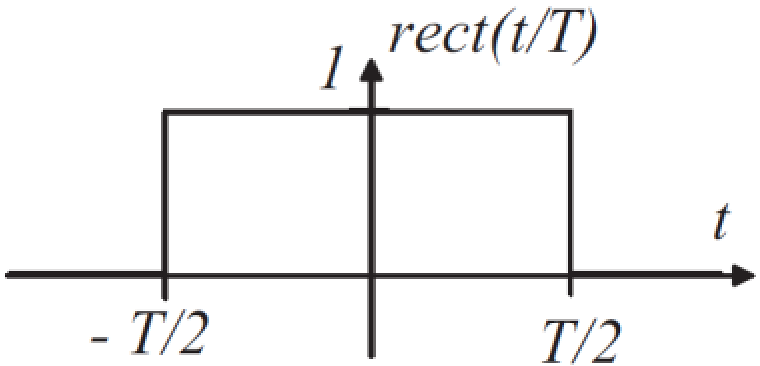


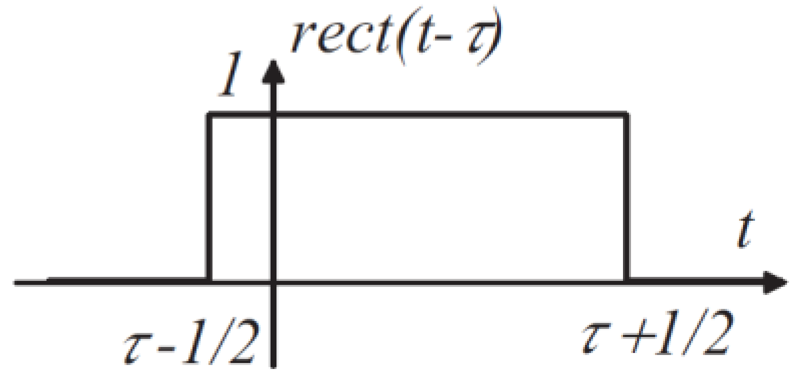
$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(t) + \frac{1}{2}$$
$$\mathrm{sgn}(t) = 2\varepsilon(t) - 1$$

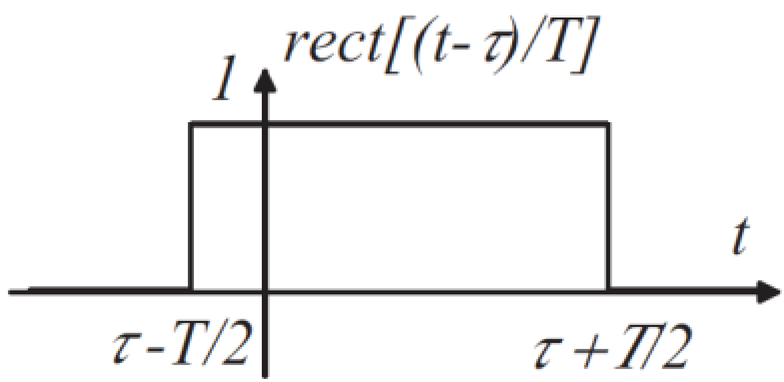
Fonction *rectangle* ou *porte*



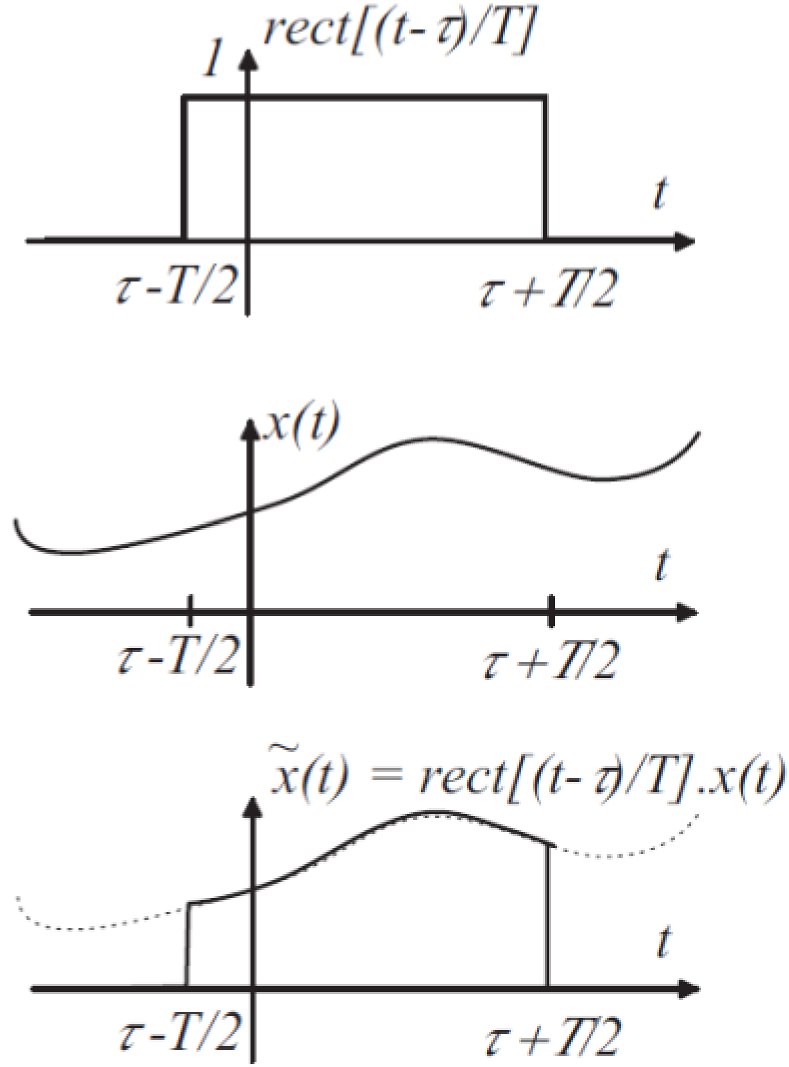
$$\mathrm{rect}(t) = \varepsilon(t + 1/2) - \varepsilon(t - 1/2)$$







La fonction *rectangle* est très utile pour étudier un signal sur un intervalle

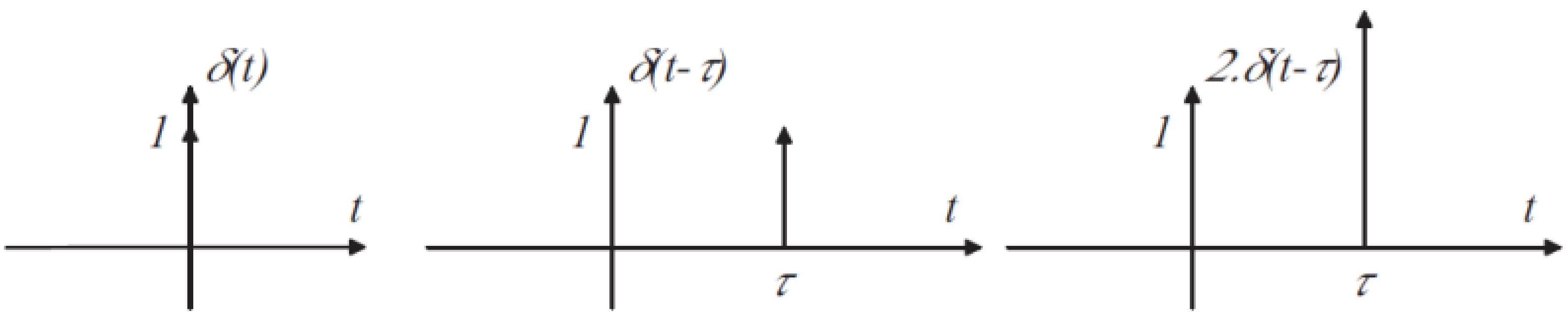


$$\tilde{x}(t) = x(t)\mathrm{rect}\left(\frac{t-\tau}{T}\right)$$

Impulsion de Dirac
狄拉克脉冲
单位冲激函数

$$\begin{cases} \delta(t) = 0, \text{si } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u)du = 1 \end{cases}$$

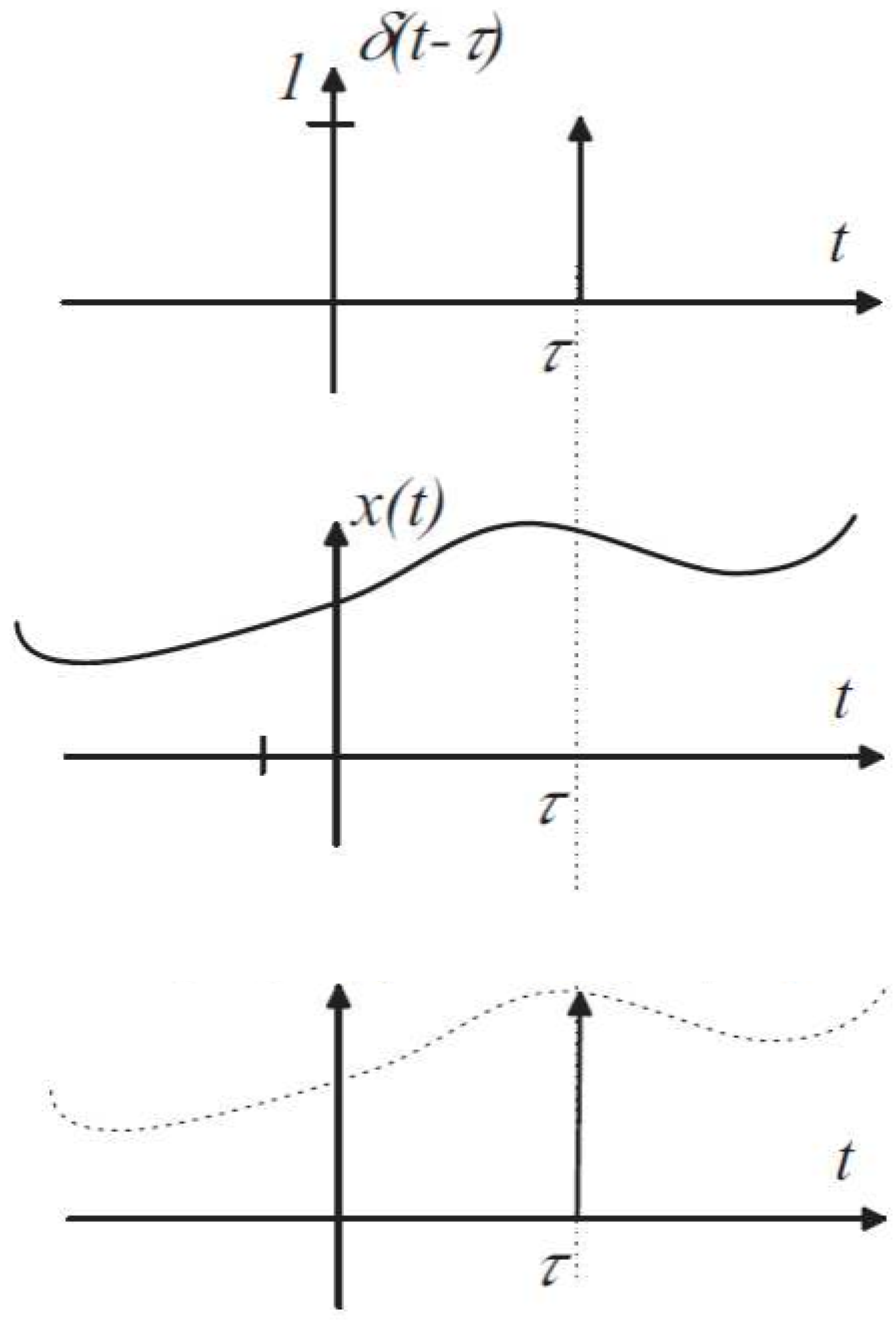
$$\begin{cases} \delta(t) = \lim_{T\to 0} \frac{1}{T} \text{tri}\left(\frac{t}{T}\right) \\ \delta(t) = \lim_{T\to 0} \frac{1}{T} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \end{cases}$$



Produit d'une fonction par un Dirac

冲激函数的乘法

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$



$$\int_{-\infty}^{t} \delta(u)du = \varepsilon(t)$$

$$\varepsilon(t)' = \delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{t} \varepsilon(u)du = ?$$

$$\int_{-\infty}^{t} u\varepsilon(u)du = ?$$

énergie
能量

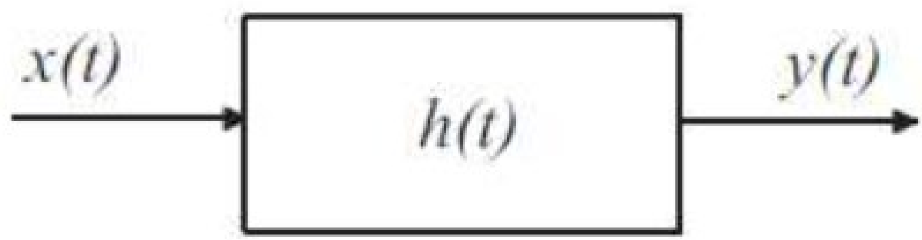
$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

puissance
功率

$$P_x = \lim_{T \to = \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt$$

Produit de convolution

- L'opérateur de convolution est très souvent utilisé. Il est associé à l'opération de filtrage d'un signal $x(t)$ par un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$. La sortie du filtre, $y(t)$ vaut alors :



$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \cdot h(t-u) du$$

$$= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \cdot x(t-u) du$$

- On retiendra que le produit de convolution est commutatif. Souvent en traitement du signal on note de façon pratique la convolution de 2 fonctions $x(t)$ et $h(t)$ sous la forme:

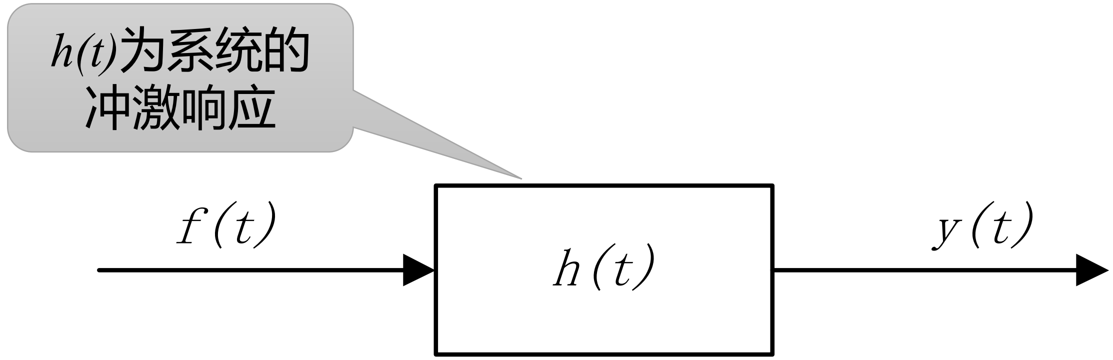
$$(x * h)(t) = x(t) * h(t)$$

La convolution d'un signal par la distribution de Dirac $\delta(t)$, on a:

$$\boxed{\delta(t) * h(t) = h(t) * \delta(t) = h(t)}$$

$$y(t) = \delta(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) \cdot h(t-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) \cdot h(t)du = h(t)$$

$$= h(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \cdot \delta(t-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot \delta(t-u)du = h(t)$$



$$\delta(t) \Rightarrow h(t)$$

时不变性： $$\delta(t-\tau) \Rightarrow h(t-\tau)$$

齐次性： $$f(\tau)\delta(t-\tau) \Rightarrow f(\tau)\,h(t-\tau)$$

叠加性： $$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \;\|\; y_{\mathrm{f}}(t)$$

$$y_f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t)*h(t)$$

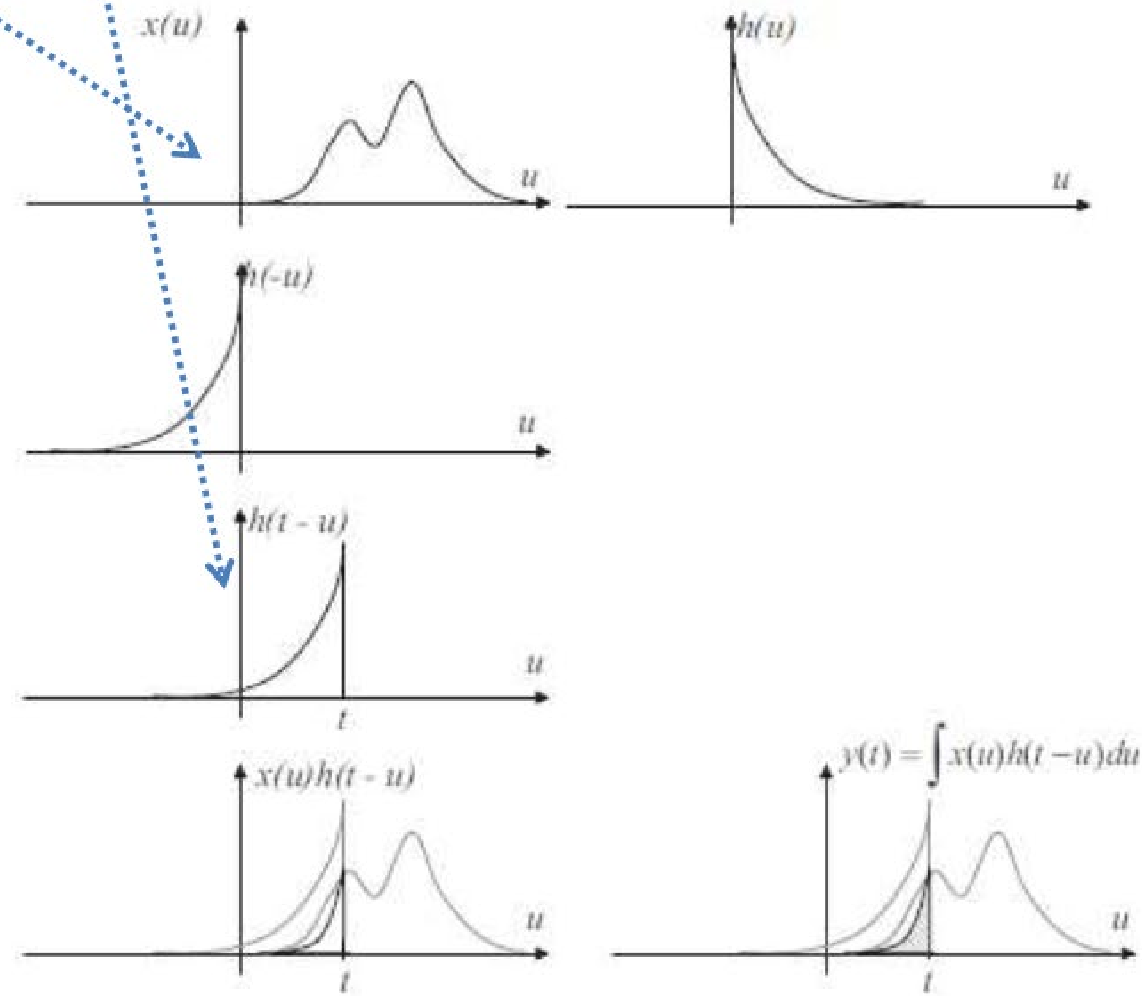
Application du produit de convolution

A gauche: image originale
Au milieu: convolution par une gaussienne d'écart-type 2
A droite: convolution par une gaussienne d'écart-type 5 (visuellement plus le noyau de convolution est large (écart type de la gaussienne) plus l'image est floue

Equivalent filtrage passe-bas

Produit de convolution: illustration
卷积：图解

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du$$



Produit de convolution: propriétés
卷积的性质
—交换律、结合律、分配律

- Commutatif:

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$

- Associatif:

$$x(t) * \big(y(t) * z(t)\big) = \big(x(t) * y(t)\big) * z(t)$$

- Distributif par rapport à l'addition:

$$x(t) * \big(y(t) + z(t)\big) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$$

On va ici détailler les étapes dans le calcul de la convolution de la fonction rectangle avec elle-même:

$$rect(t) = \begin{cases} 1 \quad si \quad -\dfrac{1}{2} < t < \dfrac{1}{2} \\ 0 \qquad\qquad sinon \end{cases}$$

1. on commence par écrire le produit de convolution

$$rect(t) * rect(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} rect(u) rect(t-u) du$$

2. on représente la fonction *rect(u)*

3. on représente la fonction *rect(-u)* (il suffit d'effectuer une symétrie de la courbe représentative de la fonction par rapport à l'axe des ordonnées (on se place dans un repère orthonormé). On dit qu'on a effectué un « retournement » de la fonction

写出函数*rect(-u)*（与原函数关于纵轴对称）即对函数进行"翻转"

4. on représente la fonction *rect(t-u)* et on translate la fonction de t (t est fixé mais quelconque)

写出函数*rect(t-u)*，时间平移，（t是固定的，可能为任意值）

5. on effectue le produit de deux fonctions rect pour les différentes valeurs de t. Cela revient donc à faire « glisser » la fonction *rect(t-u)* le long de l' axe des u. Pour chaque position, c' est-à-dire chaque position de u, on visualise la valeur de la convolution qui se trouve être l' aire sous la courbe représentant la produit de *rect(u)* et *rect(t-u)*

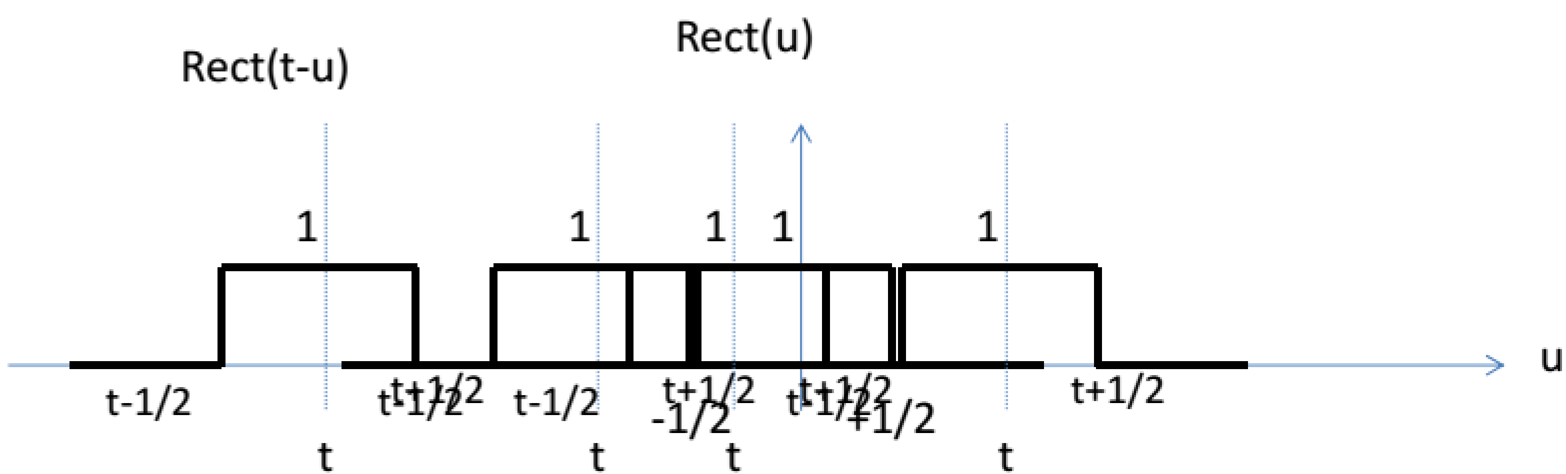
计算不同t值的两个门函数乘积的结果，即让门函数*rect(t-u)*沿*u*轴滑动，然后求出2个函数*rect(u)*和*rect(t-u)*乘积结果的积分。

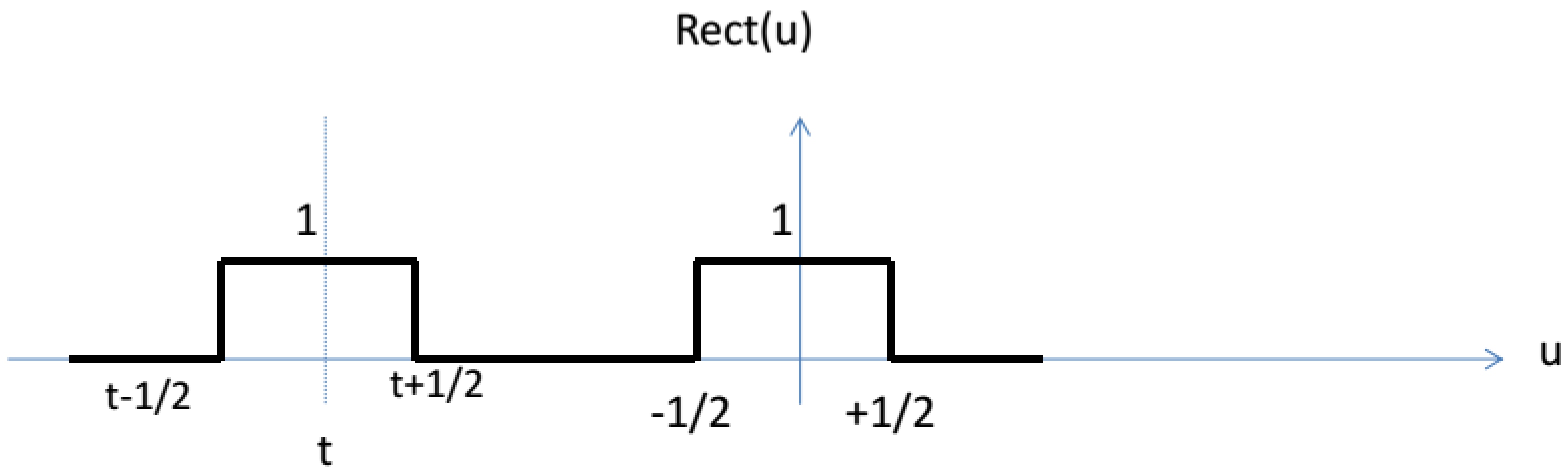
$$rect(t) * rect(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} rect(u) rect(t-u) du$$

$$rect(u) = 1 \; si - 1/2 < u < 1/2$$

$$\begin{aligned} rect(t-u) = 1 \; si \quad & -1/2 < t-u < 1/2 \\ si \quad & t - 1/2 < u < t + 1/2 \end{aligned}$$

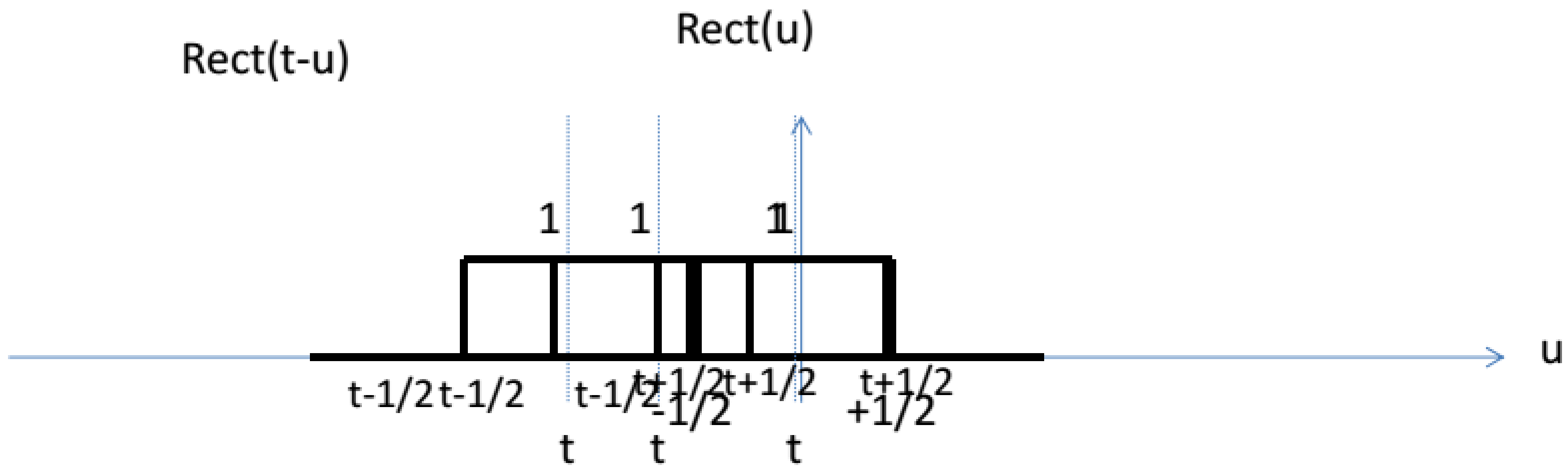
On fait glisser la fonction pour plusieurs valeurs de t





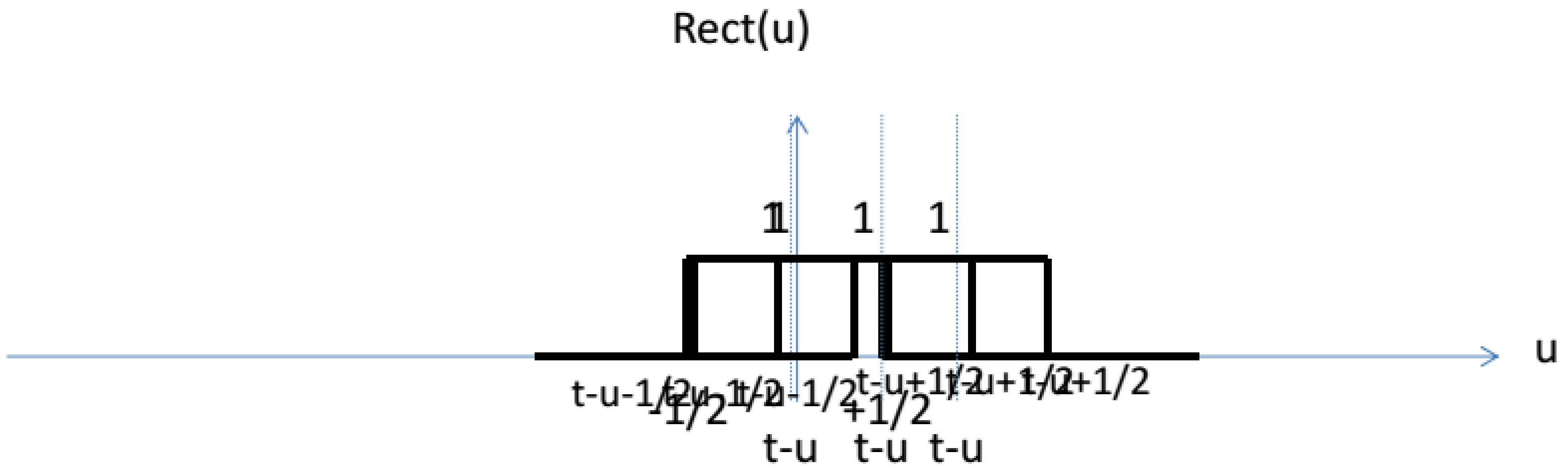
- <u>Si t<-1:</u>

$$rect(t) * rect(t) = 0$$



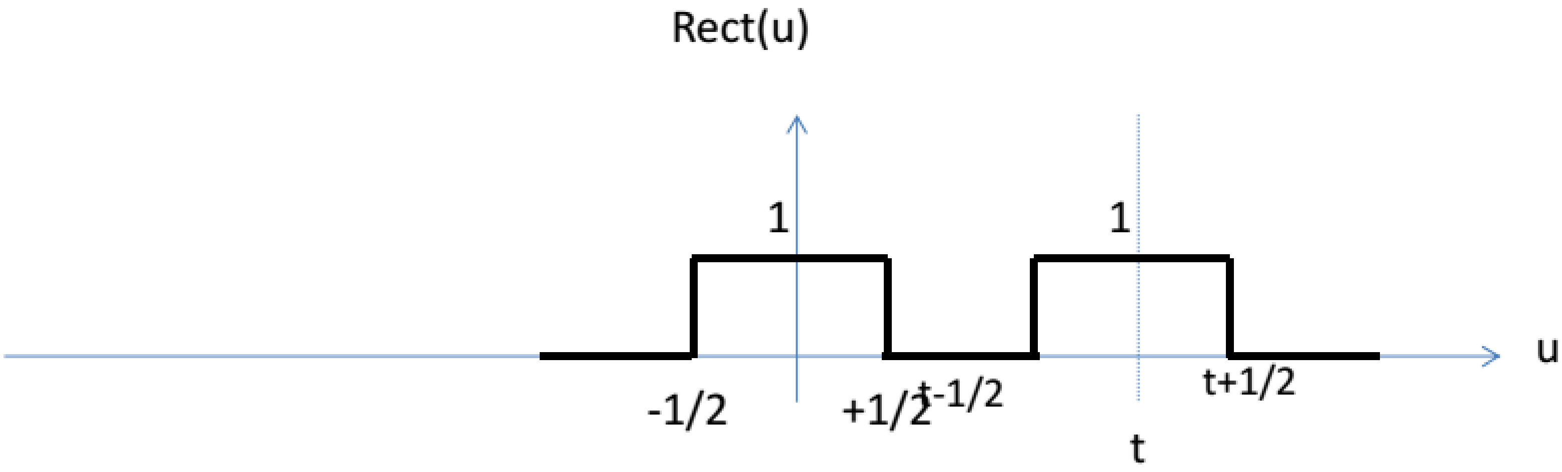
- <u>Si -1<t<0:</u>

$$rect(t) * rect(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} du = 1 + t$$



- <u>Si 0<t<1:</u>

$$rect(t) * rect(t) = \int_{t-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} du = 1 - t$$



- <u>Si t>1:</u>

$$rect(t) * rect(t) = 0$$

Résultat: $rect(t) * rect(t)$=

- Si t < -1:

$$rect(t) * rect(t) = 0$$

- Si -1 < t < 0:

$$rect(t) * rect(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} du = 1 + t$$

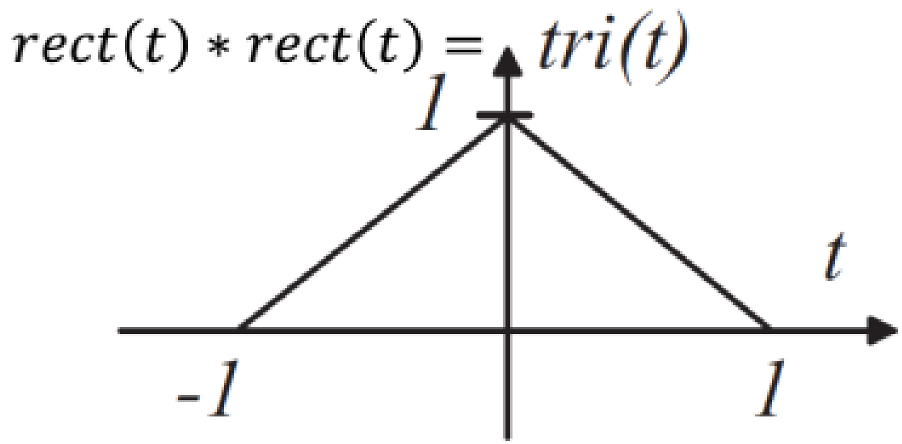
- Si 0 < t < 1:

$$rect(t) * rect(t) = \int_{t-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} du = 1 - t$$

- Si t > 1:

$$rect(t) * rect(t) = 0$$

On trace enfin le résultat, c’ est-à-dire la fonction de convolution en fonction des valeurs de t (soit en fonction des 4 intervalles précédemment définis)



Finalement :

$$rect(t) * rect(t) = \begin{cases} 1 - |t| & si \ -1 < t < 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

- Calculer et tracer la convolution de f et g:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ \ si \ -1 \leq x < 3 \\ \quad 0 \quad \ sinon \end{cases}$$

$$\mathrm{g}(x) = \begin{cases} x/2 \ \ si \ 0 \leq x \leq 2 \\ \quad 0 \quad \ sinon \end{cases}$$

- Si t < -1:

$$f(x) * g(x) = 0$$

- Si -1 < t < 1:

$$f(x) * g(x) = \int_0^{1+x} \frac{u}{2} du = \frac{1}{4}(1 + x)^2$$

- Si 1 < t < 3:

$$f(x) * g(x) = \int_0^{2} \frac{u}{2} du = 1$$

- Si 3 < t < 5:

$$f(x) * g(x) = \int_{x-3}^{2} \frac{u}{2} du = \frac{1}{4}(-x^2 + 6x - 5)$$

- Si t > 5:

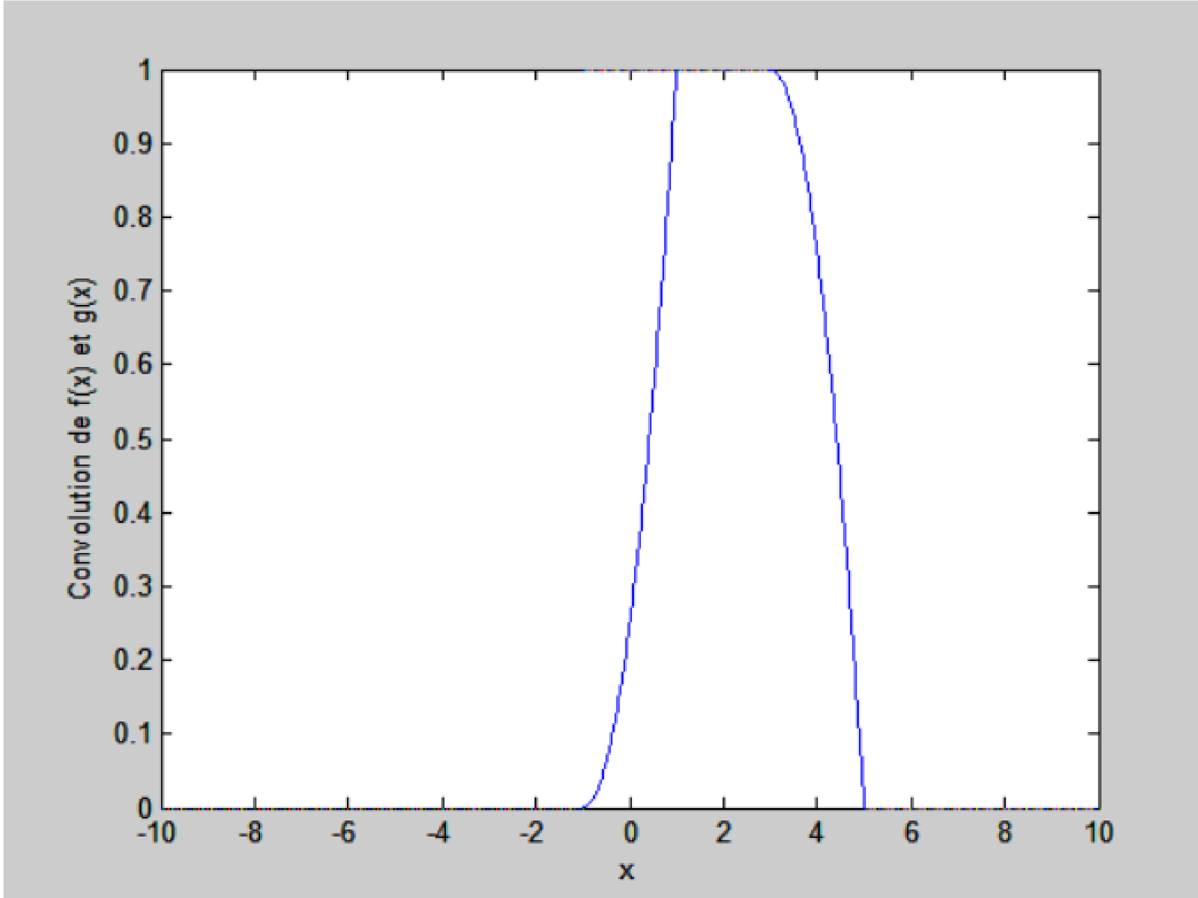
$$f(x) * g(x) = 0$$

Tracé du résultat de la convolution en utilisant Matlab
使用MATLAB绘制卷积的结果

Ici on choisit de prendre 100 valeurs dans l'intervalle mais c'est arbitraire!

```
>> x1=linspace(-10,-1,100); res1=0;
>> x2=linspace(-1,1,100); res2=1/4*(1+x2).^2;
>> x3=linspace(-1,3,100); res3=1;
>> x4=linspace(3,5,100); res4=1/4*(-x4.^2+6*x4-5);
>> x5=linspace(5,10,100); res5=0;
>> figure;plot(x1,res1);
>> hold on; plot(x2,res2);plot(x3,res3);plot(x4,res4);plot(x5,res5);
>> xlabel('x');ylabel('Convolution de f(x) et g(x)')
```

Les lignes de code sont écrites directement dans la fenêtre de commande (command window of Matlab)



Remarque 1: On peut ensuite améliorer la qualité de la figure, par exemple en augmentant la taille de la courbe….
Remarque 2: la solution proposée ici n’est qu’un exemple; on peut faire tout à fait autrement….

卷积的计算

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$(x * h)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-v)h(v)dv$$
$$= (h * x)(t)$$

步骤：先反折，再平移，后积分

关键：正确区分积分区间！

Signal and Systems
Part 1: Introduction au traitement du signal (TS)

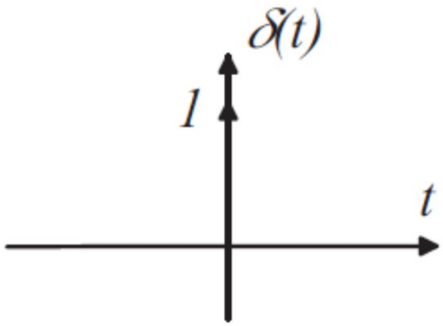
冉磊

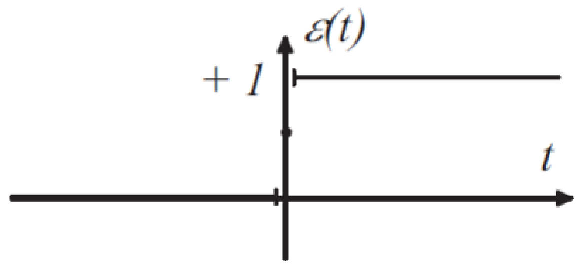
Xidian University

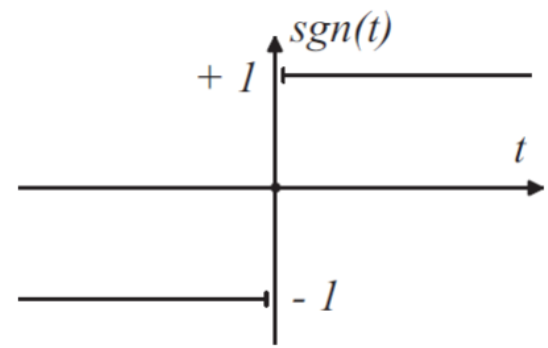
2020-09

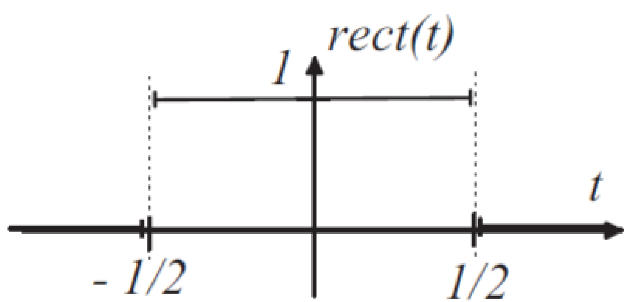
Based on Prof. Nathalie GUYADER’ syllabus.

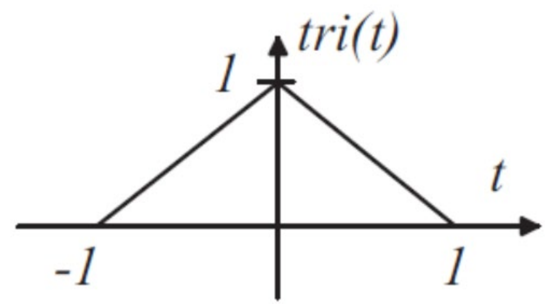
回顾





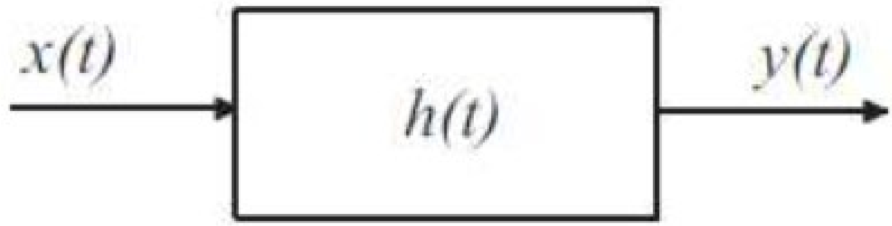






$$rect(t) * rect(t) = tri(t)$$

Produit de convolution



系统的冲激响应

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) \cdot h(t-u)du$$

$$= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \cdot x(t-u)du$$

Produit de convolution: propriétés

- Commutatif:

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$

- Associatif:

$$x(t) * \big(y(t) * z(t)\big) = \big(x(t) * y(t)\big) * z(t)$$

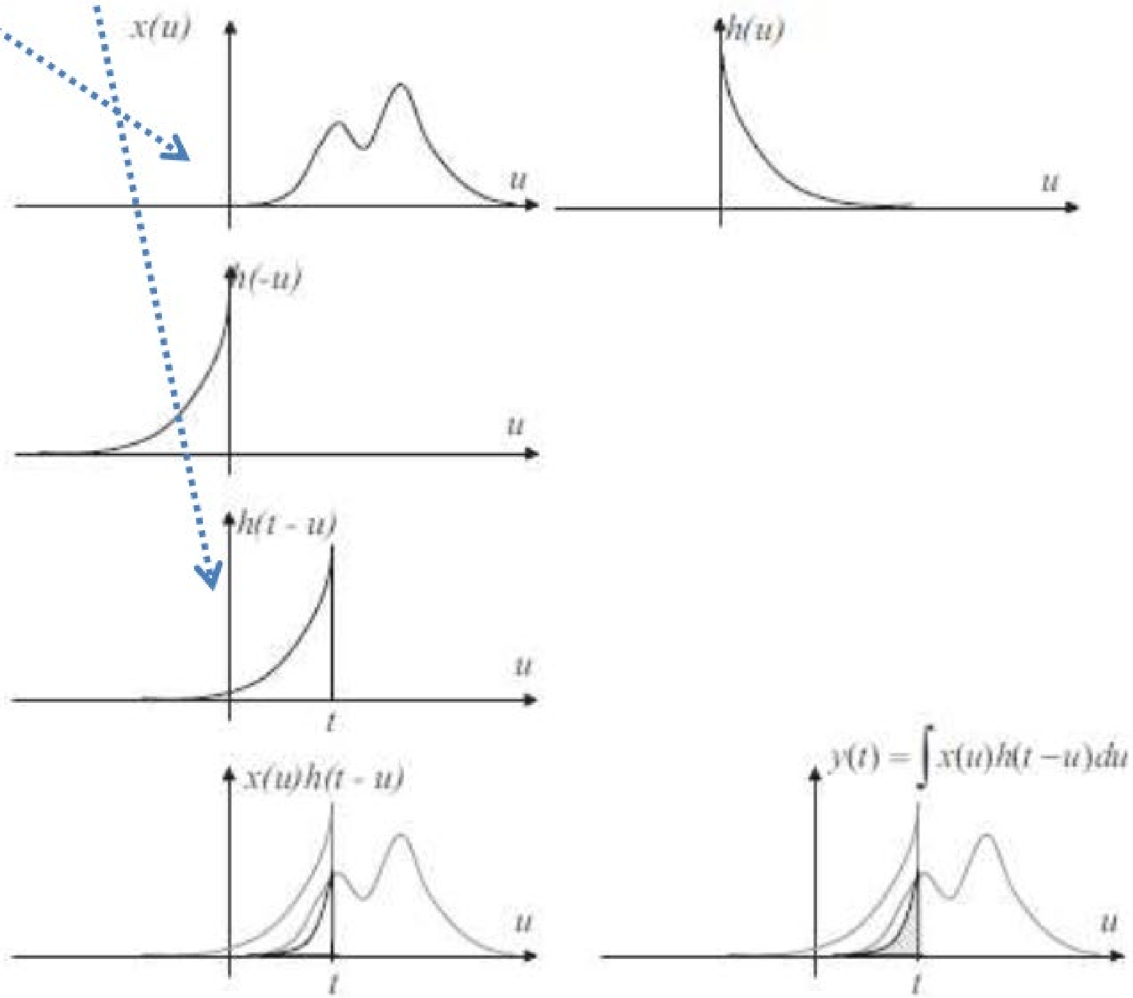
- Distributif par rapport à l'addition:

$$x(t) * \big(y(t) + z(t)\big) = x(t) * y(t) + x(t) * z(t)$$

$$\delta(t) * h(t) = h(t) * \delta(t) = h(t)$$

Produit de convolution: illustration

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du$$



- Il est important de rédiger les exercices

- La solution est important mais le raisonnement est encore plus important!

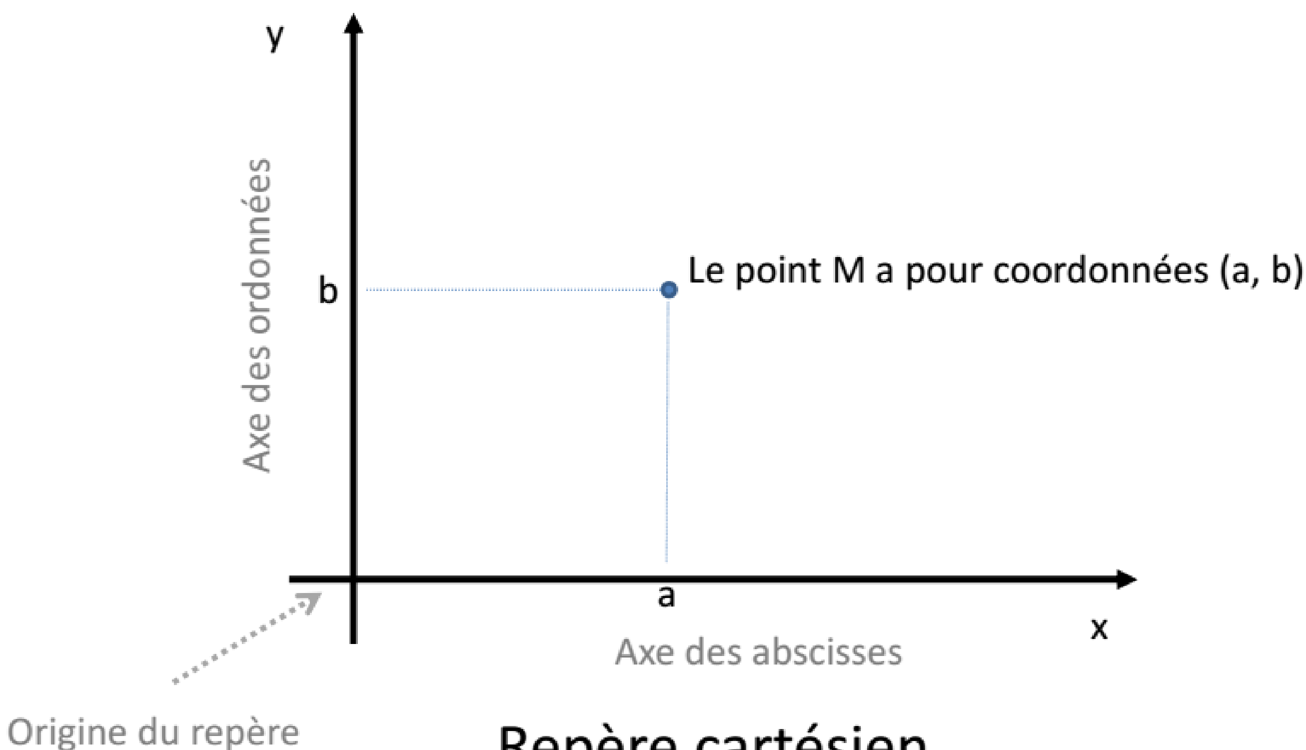
  解决的办法是重要的，但更重要的是，推理

- Nous avons besoin (en examen par exemple) de comprendre votre raisonnement, de comprendre comment vous avez obtenu le résultat…

  我们需要（例如考试）理解你的推理，理解你的结果

Suite aux questions…

- $\int_a^b f(x)dx$ se lit: “intégrale de a à b de f de x dx



Repère cartésien

Encore :

$$\delta(t) * h(t) = h(t) * \delta(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\delta(t-u)du$$

Or $\delta(t-u) = 0\ partout\ sauf\ pour\ u = t$

Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\delta(t-u)du$$

= $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\delta(t-u)du = h(t)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-u)du$

On fait un changement de variable: on pose $l = t - u$

donc $dl = -du$

$$h(t)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-u)du = h(t)\int_{+\infty}^{-\infty} \delta(l)(-dl) = h(t)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(l)dl}_{=1}$$

CHAPITRE 3
CLASSIFICATION DES SIGNAUX

Ce chapitre considère différentes propriétés des signaux. Ces propriétés seront très importantes pour la classification de signaux et, en conséquence, leur modélisation athématiques, les opérations possibles, la définition de mesures adaptées etc.

本章研究信号的不同属性。这些属性对信号分类非常重要。主要有数学建模、可能的运算、合适的度量方法等。

Modèle

Les modèles de signaux sont des représentations mathématiques qui reposent sur des hypothèses simplificatrices (parfois fausses) mais permettant d'effectuer des calculs théoriques.

Par exemple, une impulsion de Dirac n'est physiquement pas réalisable mais elle est très pratique pour représenter une impulsion de durée très brève. Un signal sinusoïdal n'est pas réalisable car un signal produit par un système physique réel ne peut pas exister de $-\infty$ à $+\infty$.

Le modèle est donc, une approximation de la réalité dans lequel on considère les propriétés importantes dans le contexte de l'étude.

L'intérêt du modèle dépend donc de la qualité de l'approximation et de sa facilité d'emploi, dans un contexte donné.

Classes de signaux

On peut classer les signaux selon différentes approches, ce qui induit des recouvrements entre les classes définies.

Par exemple, on peut considérer:

– le caractère déterministe (certain) ou aléatoire des signaux
  确定信号和随机信号

– le caractère énergétique: signaux à énergie finie ou à puissance moyenne finie ——能量特征：能量有限信号和功率有限信号

– le caractère continu ou discret du signal *x(t)*, c'est-à-dire de son argument t (échantillonnage) ou de sa valeur (quantification) (cf. chapitre d'introduction) ----连续或者离散信号

– le caractère spectral (représentation fréquentielle): signaux basse ou haute fréquence, large bande, bande étroite; signaux blancs ou en 1/f, etc. ----频谱特征：低频、高频；宽带、窄带

La dimension des signaux:

- Signaux 1D (exemple du signal reçu par un microphone)

一维信号（如接收信号的麦克风）

- Signaux 2D (exemple du signal reçu par microphone stéréophonique ou exemple d’une image)

二维信号（如接收信号的立体声麦克风或图像的例子）

- Signaux 3D (exemple d’une image volumique en imagerie par résonance magnétique (IRM), exemple d’une image hyperspectrale $I(x,y, f)$ ou séquence d’images $I(x,y,t)$)

三维信号（如磁共振成像，如高光谱图像或图像序列

- Signaux N-D typiquement reçus par un réseau de capteurs(réseaux d’antennes ou de microphones)

N维信号：通常接收信号的传感器网络（或麦克风阵列天线）

Signaux certains ou aléatoires

- Un signal est certain (ou déterministe) s’il peut être décrit par un modèle mathématiques

- Un signal est aléatoire si son évolution est imprévisible ; il ne peut être décrit que par des grandeurs et des méthodes statistiques

- La somme (ou le produit) d’un signal aléatoire et d’un signal déterministe est un signal aléatoire

A l’intérieur de chacune de ces deux grandes classes on peut définir d’autres propriétés. Pour les signaux déterministes, on considère:
在这两个大类中，我们可以定义其他属性。对于确定性信号：

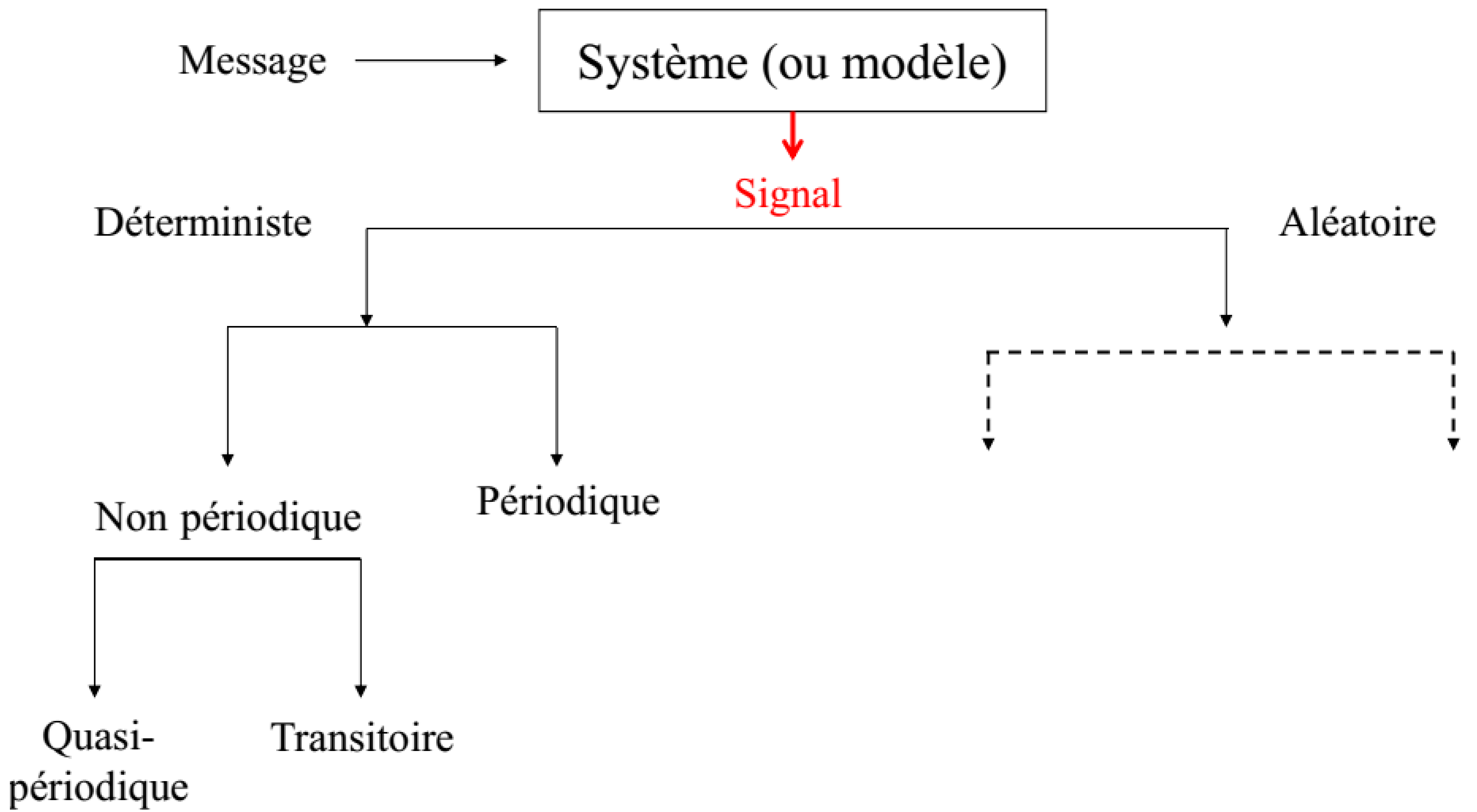
- les signaux périodiques ou non périodiques--周期和非周期
- les signaux périodiques peuvent être sinusoïdaux ou pseudo-aléatoires--周期信号可以是正弦或者伪随机
- les signaux non-périodiques peuvent être quasi-périodique ou transitoires --非周期信号可以是准周期的或瞬态的

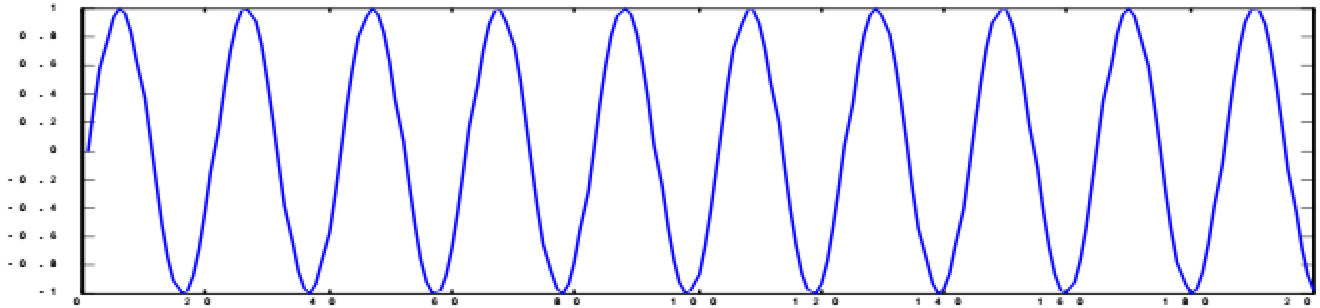
Pour les signaux aléatoires, on peut définir:
对于随机信号，我们可以定义：

- les signaux stationnaires ou non—是否为平稳信号
- les signaux stationnaires peuvent être périodiques ou non --平稳信号可能是周期的，也可能是非周期的

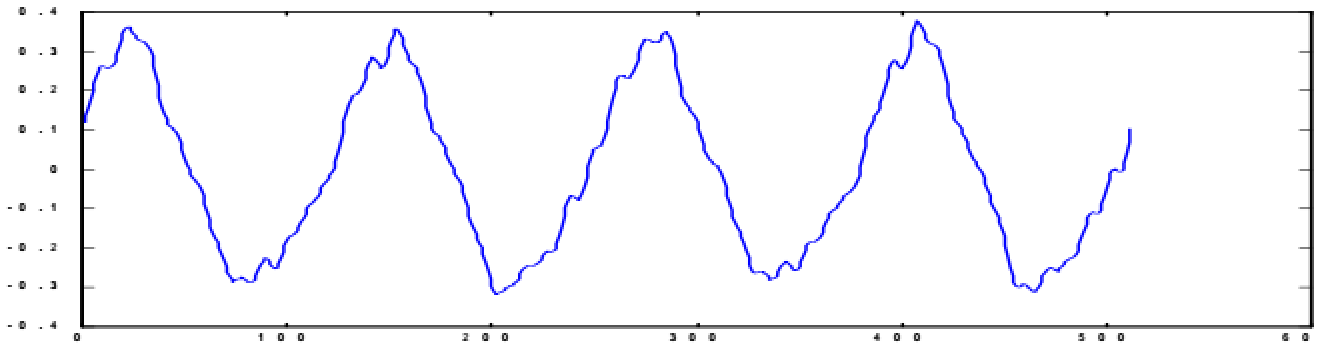
Remarque: les propriétés statistiques d’un signal aléatoire stationnaire sont indépendantes du temps
注：平稳随机信号的统计特性是时间独立的

Signaux certains ou aléatoires

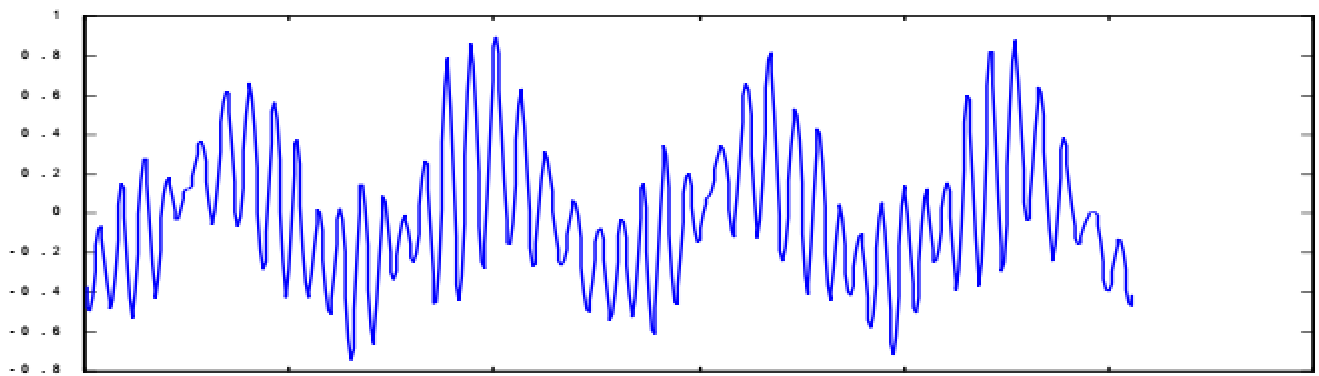




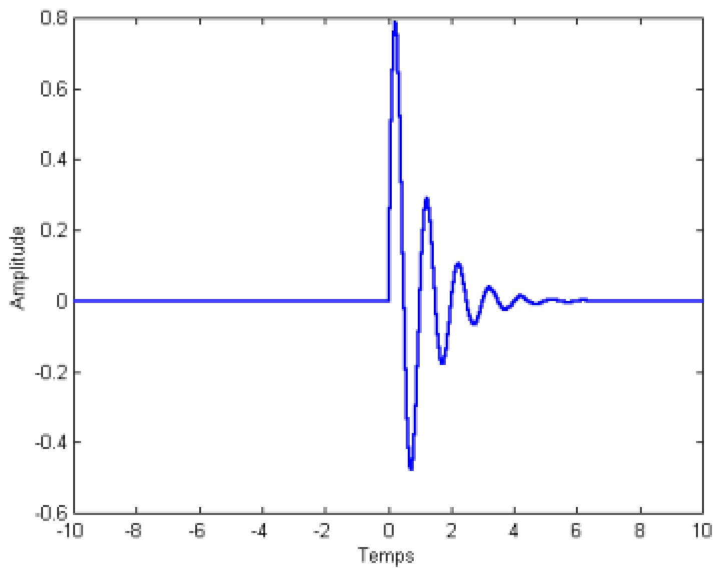
Signal périodique

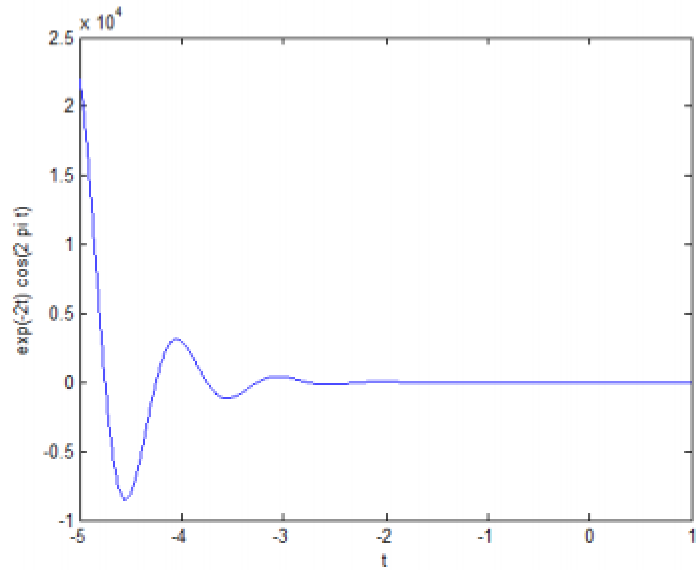


Signal quasi-périodique



Signal quasi-périodique





Signaux transitoires

Signaux déterministes périodiques

- Comme déjà précisé ces signaux peuvent être modélisés par des fonctions mathématiques
- **Un signal $x(t)$ est périodique** s'il existe un réel T > 0 tel que:

$$x(t) = x(t + kT), \forall k \in Z \ (entiers\ naturels)$$

Si T est le plus petit entier qui satisfait l'équation ci-dessus alors T est appelée la période ou période fondamentale du signal.

Cette période fondamentale T définit donc la durée d'un cycle complet de $x(t)$. L'inverse de la période fondamentale est appelé « fréquence fondamentale » du signal périodique; elle décrit combien de fois le signal périodique se reproduit par seconde. On peut écrire:

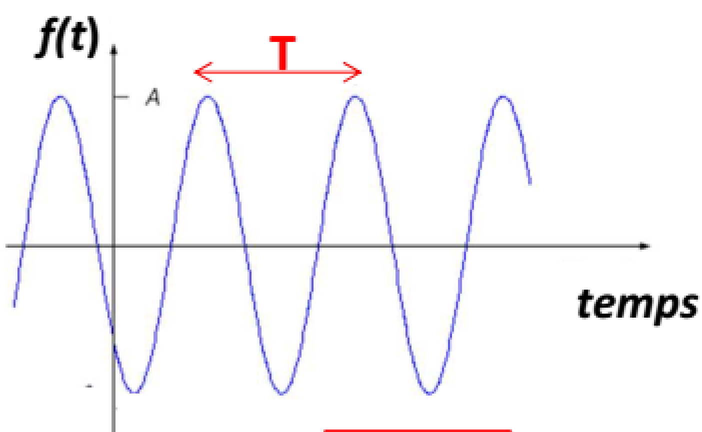
$$f = \frac{1}{T}$$

La fréquence est mesurée en Hertz (Hz) ou en cycles par seconde. La fréquence angulaire (ou pulsation) mesurée en radians par seconde est définie par :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Signaux déterministes périodiques

Exemple de la fonction périodique cosinus (x)



f(t) **est un signal qui est fonction du temps**

$$\boxed{f(t) = A\cos(\omega t + \theta)}$$

A = amplitude du signal

ω = pulsation du signal

θ = angle de phase du signal

f = fréquence $\boxed{\omega = 2\pi f}$ $\rightarrow$ $\boxed{f = \dfrac{\omega}{2\pi}}$ $\rightarrow$ $\boxed{T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{2\pi}{\omega} = \text{période du signal}}$

Signaux déterministes périodiques

<u>Remarque:</u> il est souvent commode de représenter le signal réel sinusoïdal:

$$x(t) = A sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

par la partie imaginaire d'une fonction exponentielle complexe:

$$\mathrm{z}(t) = A\ exp\left(j\frac{2\pi}{T}t\right)$$

L'intérêt de cette notation réside dans les propriétés de calcul de la fonction exponentielle.

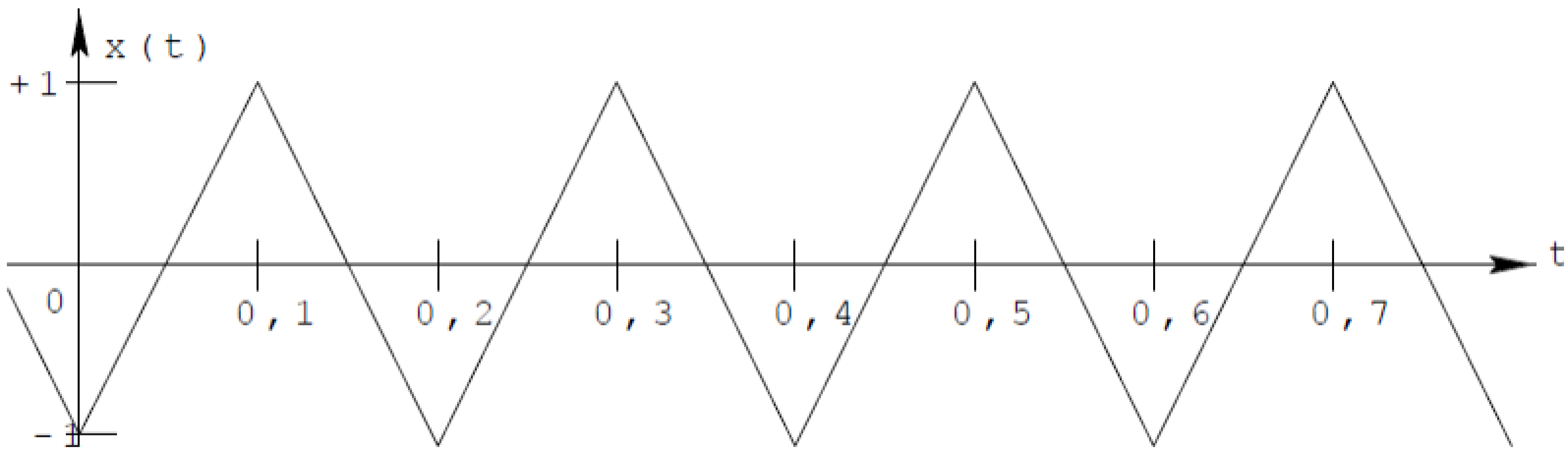


Figure: Signal périodique triangulaire

Exercice:

Quelle est sa fréquence fondamentale? Et sa pulsation fondamentale?

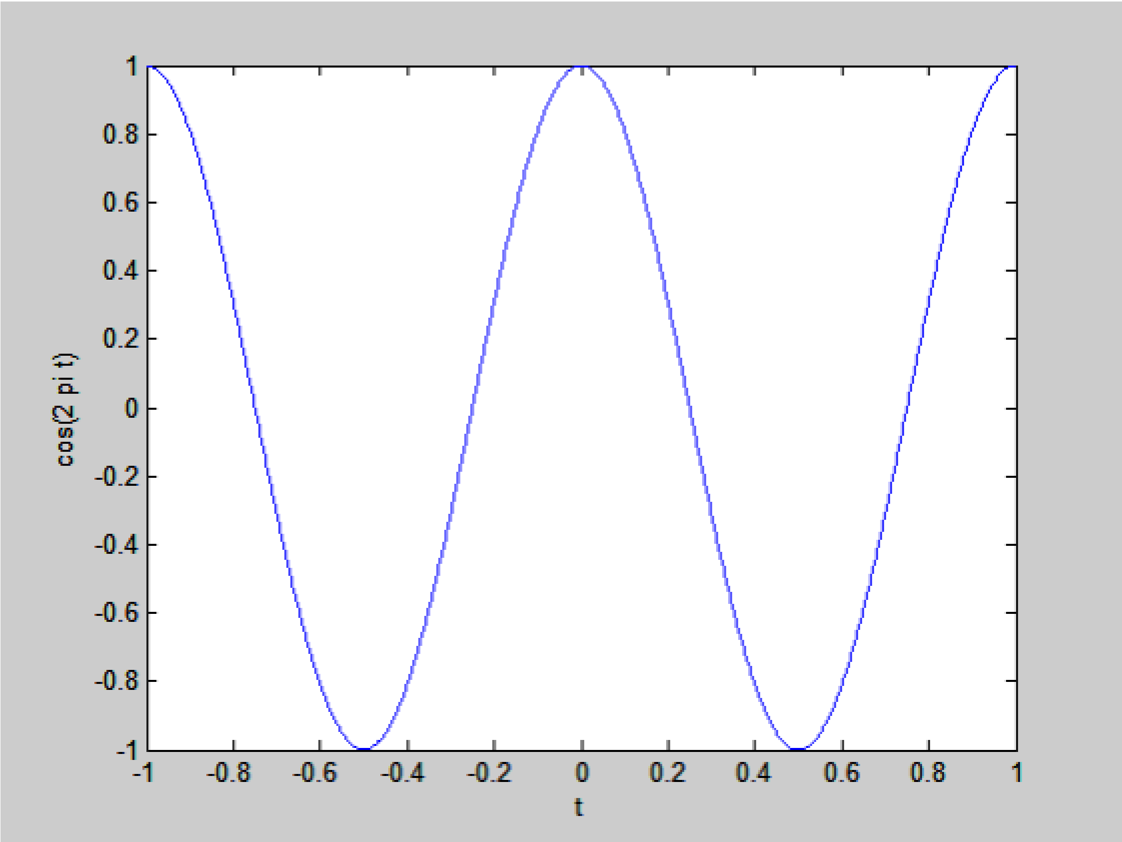
- Déterminer si les signaux sont périodiques et donner leur période fondamentale :

1/ $x(t) = \cos(2\pi t)$

2/ $x(t) = \cos^2(2\pi t)$

3/ $x(t) = e^{-2t}\cos(2\pi t)$

- On trace $x(t) = \cos(2\pi t)$

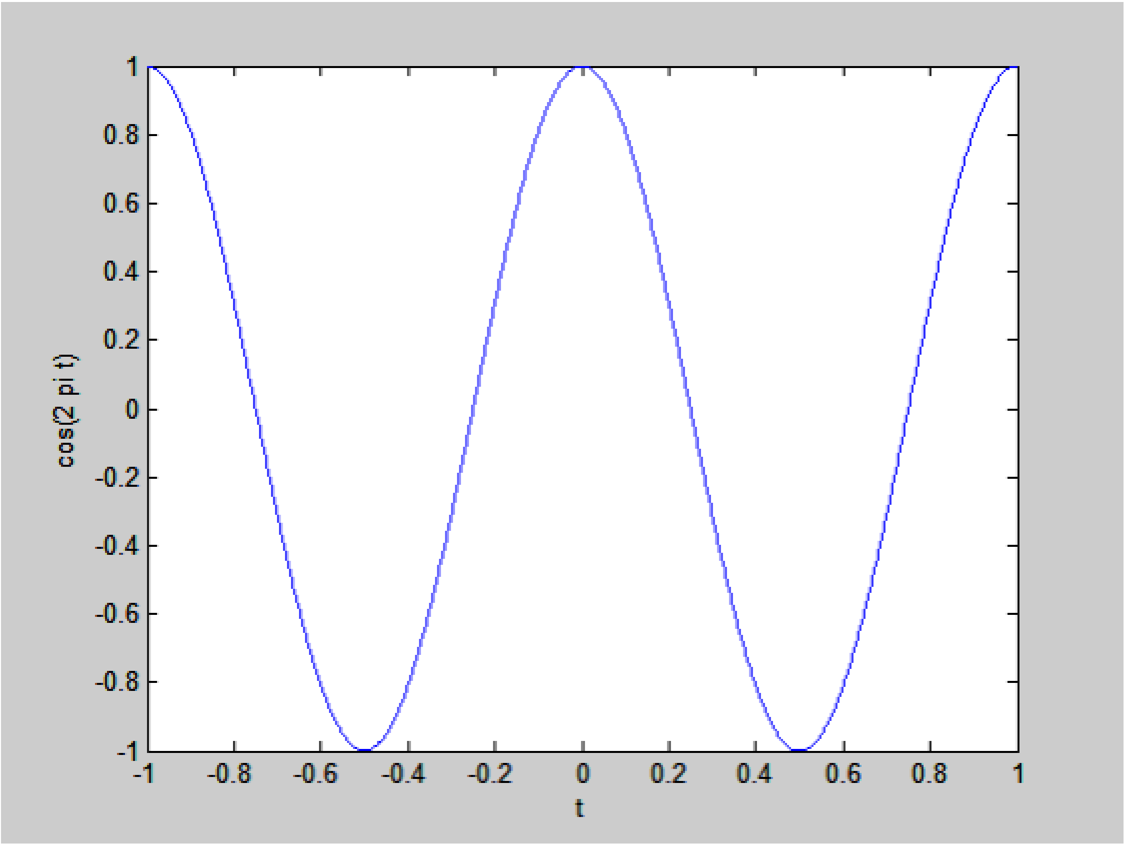



```
>> % ligne de codes Matlab

>> t=linspace(-1,1,1000);
>> x=cos(2*pi*t);
>> plot(t,x);
>> xlabel('t');
>> ylabel('cos(2 pi t)');
```

Périodique?
Période = ?
Fréquence=?

- On trace $x(t) = \cos(2\pi t)$

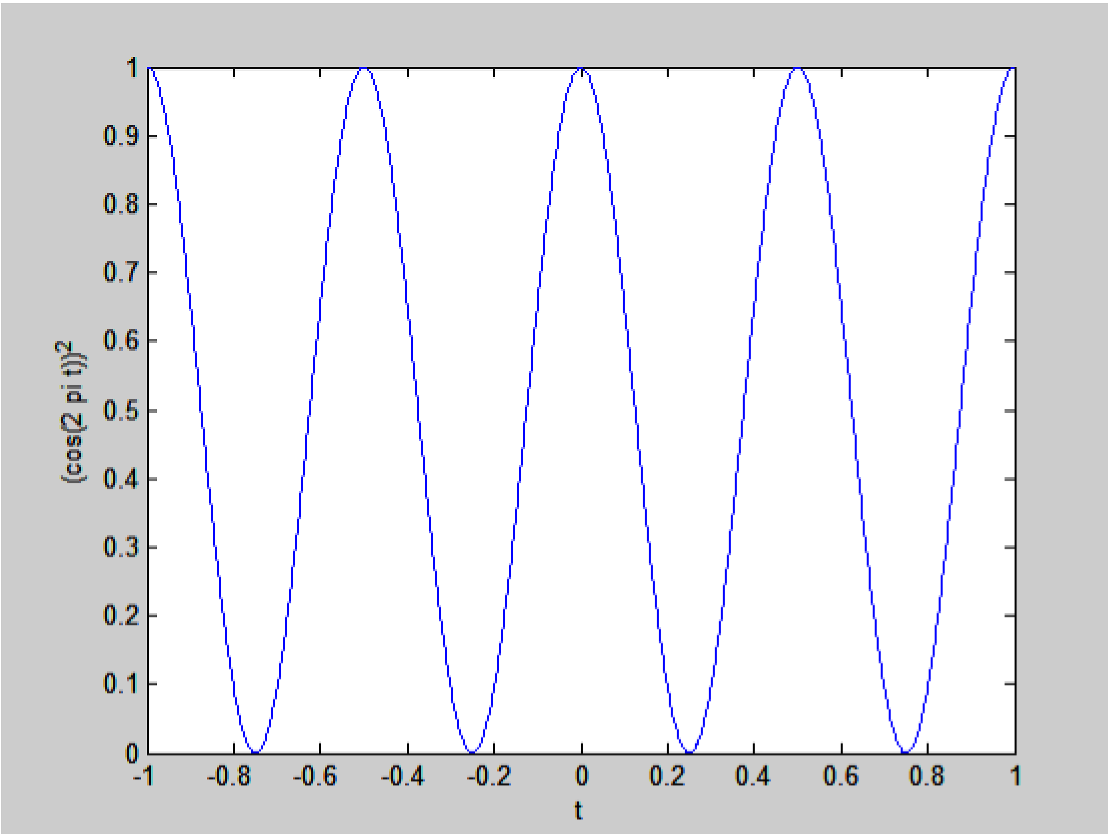


Périodique : OUI

Période = 1 seconde (s)

Fréquence= 1 hertz (Hz)

- On trace $x(t) = \cos^2(2\pi t)$

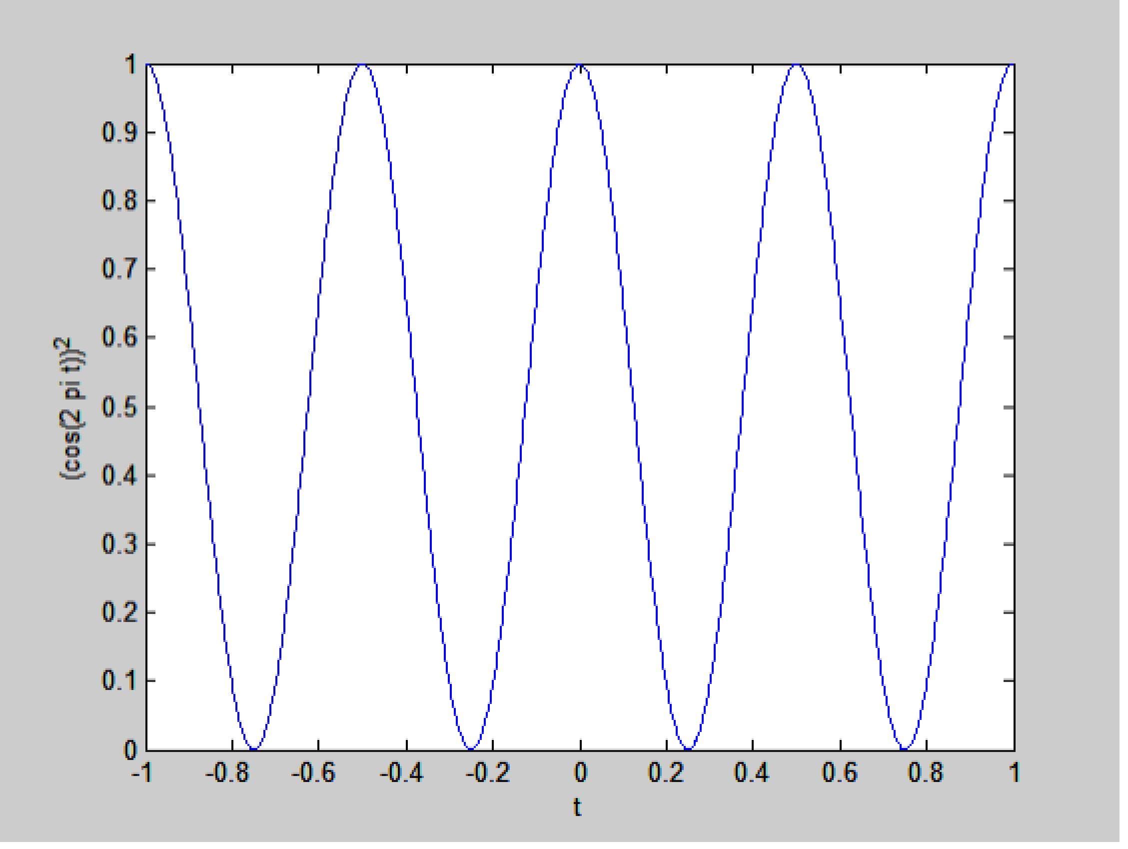



```
>> % ligne de codes Matlab

>> t=linspace(-1,1,1000);
>> x=(cos(2*pi*t)).^2;
>> plot(t,x);
>> xlabel('t');
>> ylabel(‘(cos(2 pi t))^2');
```

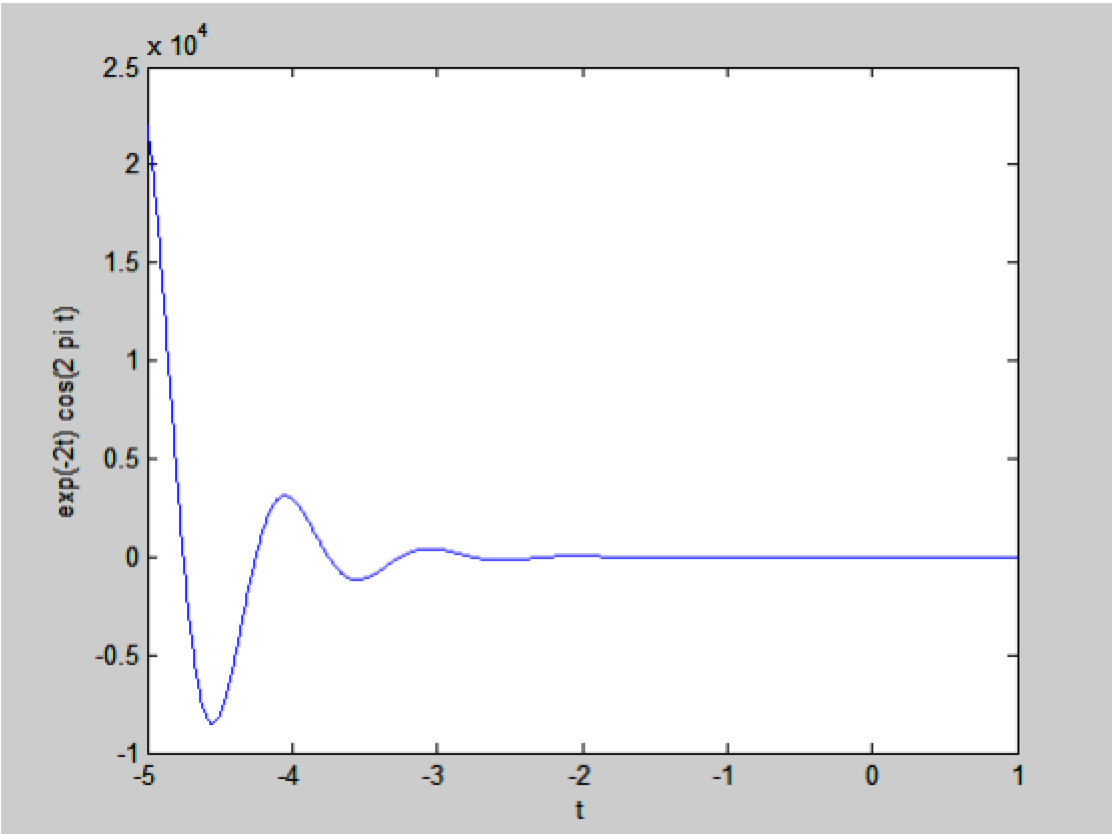
Périodique?
Période = ?
Fréquence=?

- On trace $x(t) = \cos^2(2\pi t)$



Périodique : OUI
Période = 0,5 seconde (s)
Fréquence= 2 hertz (Hz)

- On trace $x(t) = e^{-2t}\cos(2\pi t)$

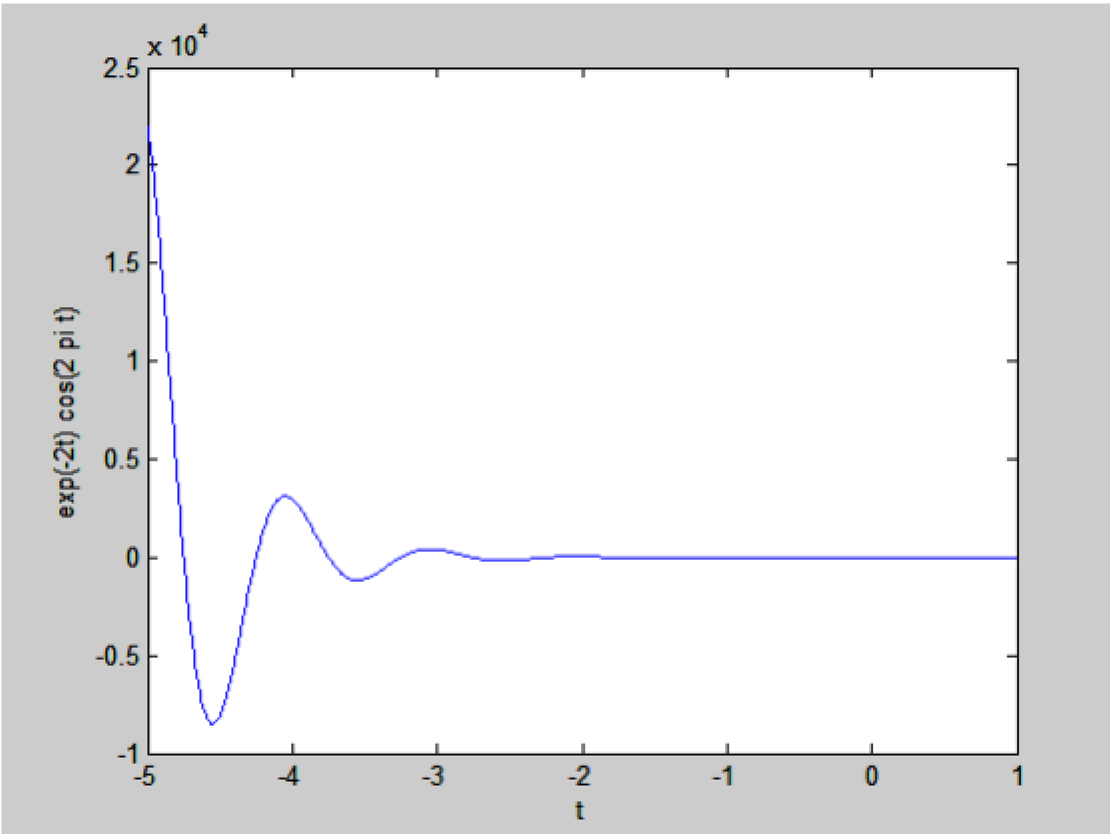



```
>> % ligne de codes Matlab

>> t=linspace(-5,1,1000);
>> x=exp(-2*t).*cos(2*pi*t);
>> plot(t,x);
>> xlabel('t');
>> ylabel('exp(-2t) cos(2 pi t)');
```

Périodique ?
Période ?
Fréquence ?

- On trace $x(t) = e^{-2t}\cos(2\pi t)$

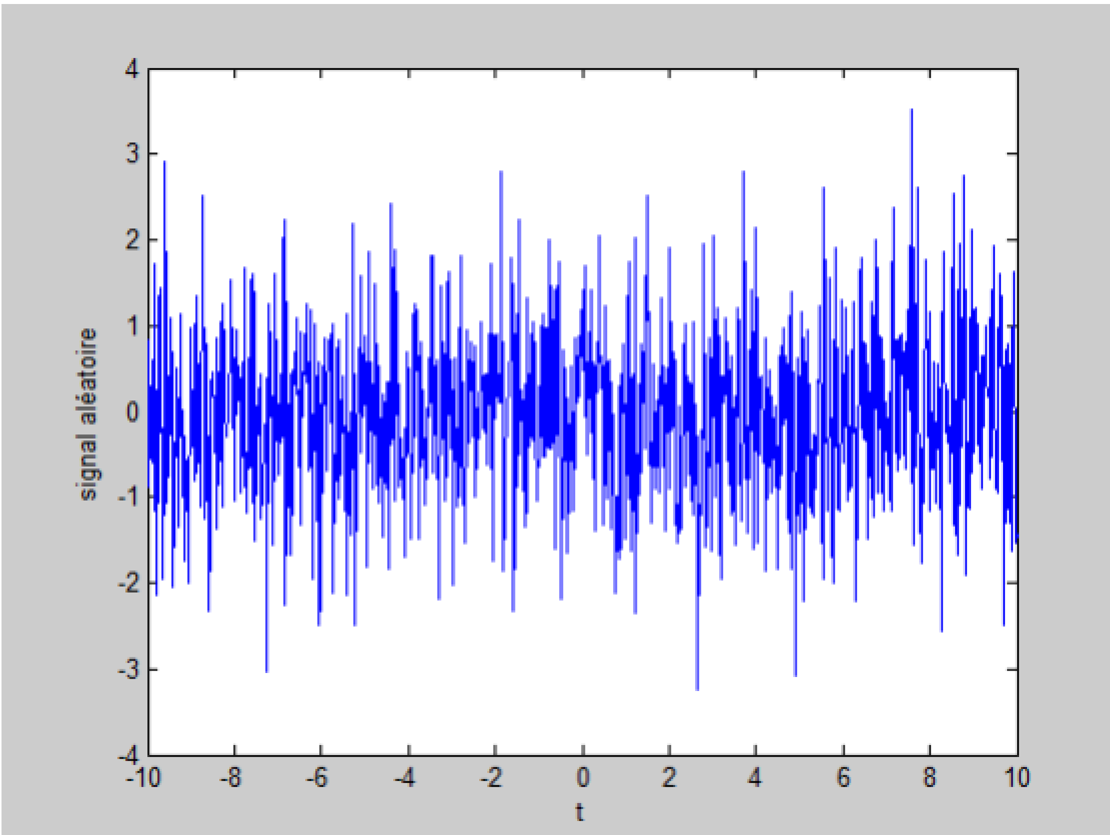


Périodique : NON

~~Période ?~~

~~Fréquence ?~~

Signaux aléatoires




```
>> % ligne de codes Matlab

>> t=linspace(-10,10,1000);
>> x=randn(1,1000);
>> figure;plot(t,x);
>> xlabel('t');
>> ylabel('signal aléatoire');
```

Energie et puissance

信号分类的能量有限或功率有限是相互排斥的：

- La classification des signaux en énergie finie ou puissance finie est mutuellement exclusive :

  - un signal à énergie finie est un signal à puissance nulle

  - un signal à puissance finie a une énergie infinie

  一个能量有限信号是一个零功率信号
  一个功率有限信号具有无穷的能量

- Les signaux à support borné sont généralement à énergie finie.

有限区间的信号通常是能量有限

Signaux à énergie finie

Un signal est à énergie finie si l'intégrale suivante existe:

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

C'est-à-dire si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$$

Exercice:

Calculer l'énergie de $x(t) = rect\left(\frac{t}{\Delta}\right)$

Réponse:

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|2\, dt = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} dt = \Delta$$

Sa puissance moyenne est donc nulle

Signaux à puissance moyenne finie

Un signal $x(t)$ défini sur R est à puissance moyenne finie sur cet intervalle si:

$$0 < P_x = \lim_{T \to = \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt < +\infty$$

La définition exclut le cas des signaux à puissance moyenne nulle qui correspond à des signaux à énergie finie.

Signaux à puissance moyenne finie

Exercice:

Le signal $x(t) = \sin(\omega t)$ est-il à puissance moyenne finie?

$$Px = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} sin^2(\omega t)dt$$

Réponse:

$$Px = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T/2}^{T/2} (1 - \cos(\omega t))dt = \frac{1}{2}$$

En revanche le signal n’est pas à énergie finie

Rappels

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$
$$2\sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$$
$$2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$$

$$\cos(2x) = 1 - 2sin^2(x) = 2cos^2(x) - 1 = cos^2(x) - sin^2(x)$$
$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

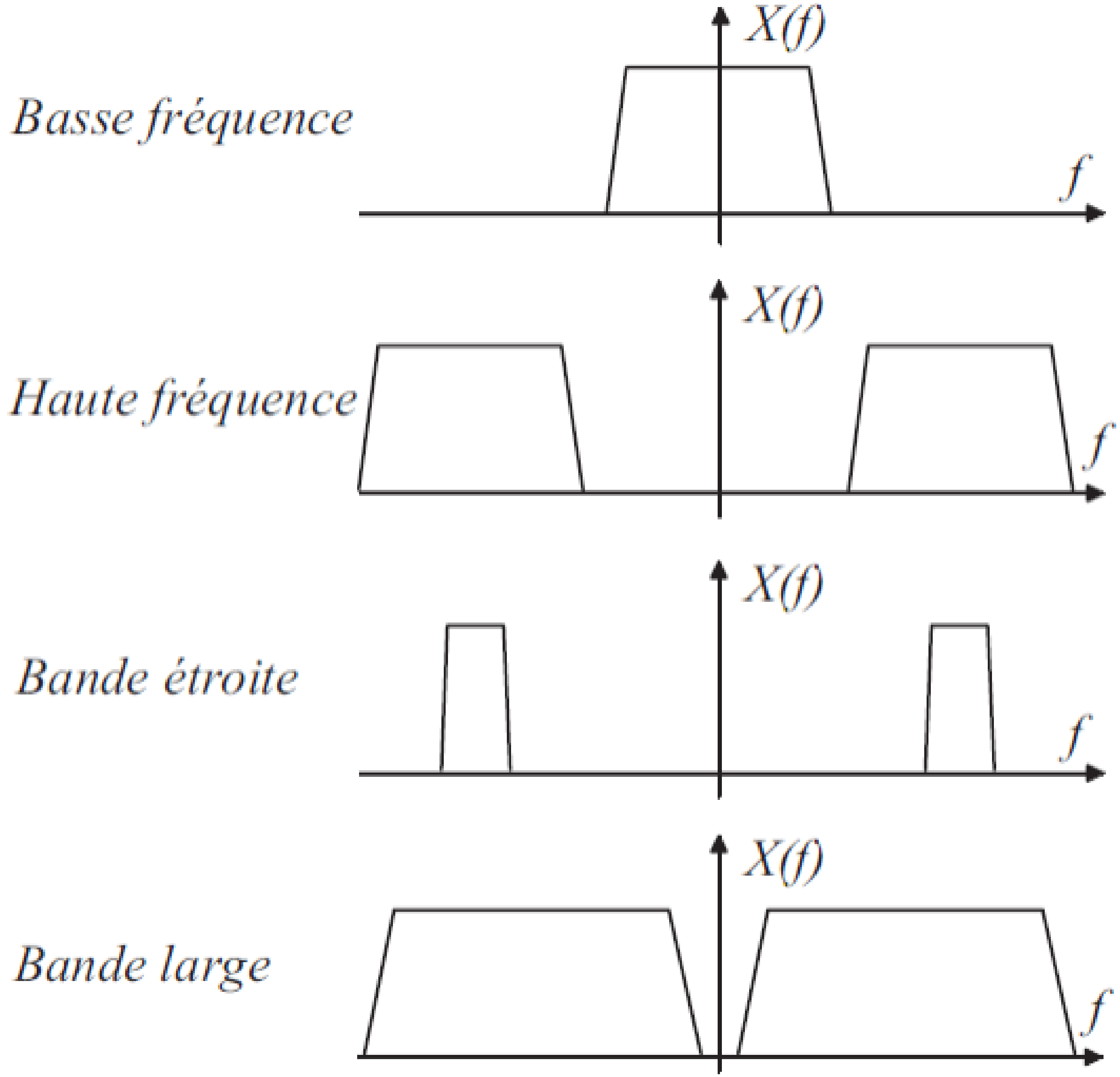
$$\sin^2(x) + cos^2(x) = 1$$
$$\sin^2(x) - cos^2(x) = -\cos(2x)$$

Fonctions	**Dérivées**
cos(x)	-sin(x)
sin(x)	cos(x)

Classification spectrale

L'analyse spectrale par Transformée de Fourier (TF) conduit à considérer le spectre des signaux c'est-à-dire leur représentation dans le domaine fréquentiel comme une représentation duale équivalente d'un point de vue de l'information contenue.

En physique, la **fréquence** est le nombre de fois qu'un phénomène périodique se reproduit par unité de mesure du temps.


Basse fréquence
Haute fréquence
Bande étroite
Bande large
X(f)
f

Autres propriétés

- **Parité d'un signal**

Un signal $x(t)$ est pair si $x(t) = x(-t)$; il est impair si $x(t) = -x(-t)$. On peut toujours décomposer un signal en la somme d'un signal pair et d'un signal impair: ----信号总是可以分解为偶信号和奇信号

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t)$$

$$\begin{cases} x_p(t) = \dfrac{x(t) + x(-t)}{2} \\ x_i(t) = \dfrac{x(t) - x(-t)}{2} \end{cases}$$

Autres propriétés

- <u>Causalité:</u> un signal $x(t)$ est causal s'il est nul pour toute valeur négative de t

<u>Remarque:</u> un signal causal s'obtient facilement en multipliant un signal quelconque part $\varepsilon(t)$ (la fonction échelon)

Classes de signaux

- le caractère déterministe (certain) ou aléatoire des signaux
  确定信号和随机信号：确定信号的**周期、频率、角频率**
- le caractère énergétique: signaux à énergie finie ou à puissance moyenne finie
  能量特征：能量有限信号和功率有限信号
- le caractère spectral (représentation fréquentielle): signaux basse ou haute fréquence, large bande, bande étroite; signaux blancs ou en 1/f, etc.
  频谱特征：低频、高频；宽带、窄带
- Pair/impair: 奇偶性
- Causalité: 因果性
- le caractère continu ou discret du signal *x(t)*, c’est-à-dire de son argument t (échantillonnage) ou de sa valeur (quantification) (cf. chapitre d’introduction)
  连续或者离散信号

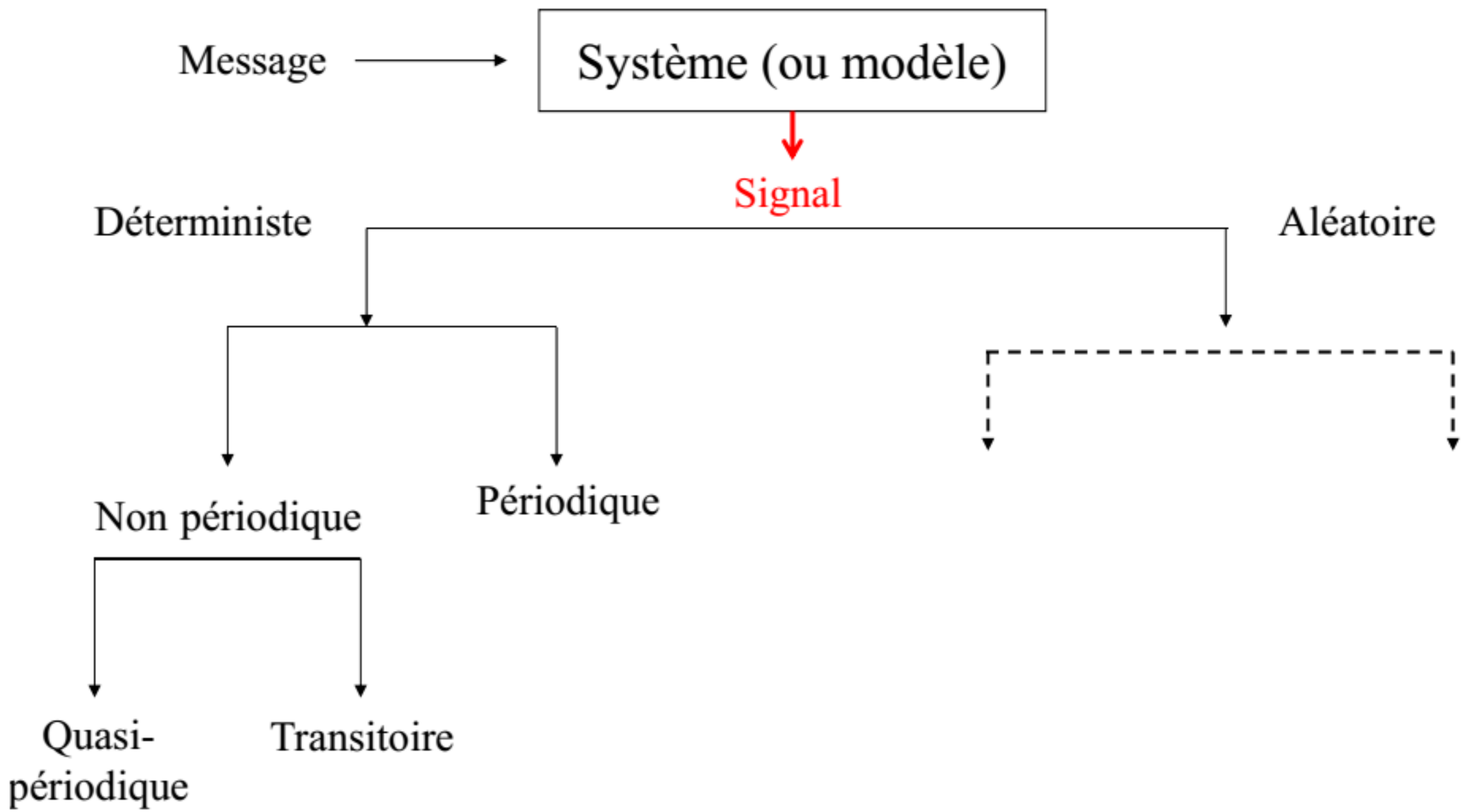
Signal and Systems
Part 1: Introduction au traitement du signal (TS

冉磊
Xidian University

2020.09

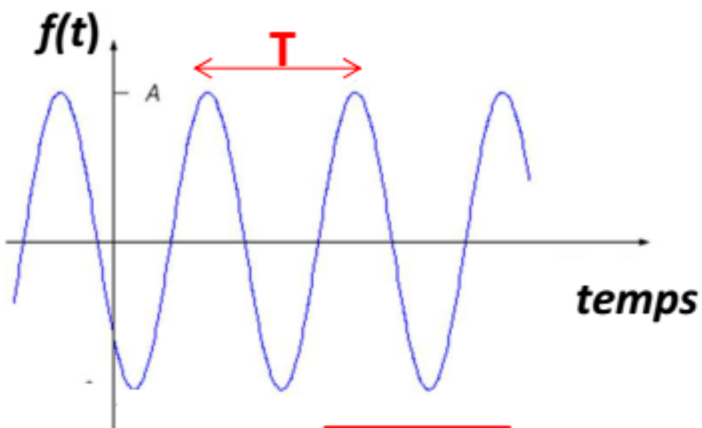
Based on Prof. Nathalie GUYADER’ syllabus.

Signaux certains ou aléatoires



Signaux déterministes périodiques

Exemple de la fonction périodique cosinus (x)



f(t) **est un signal qui est fonction du temps**

$$\boxed{f(t) = A\cos(\omega t + \theta)}$$

A = amplitude du signal

ω = pulsation du signal

θ = angle de phase du signal

f = fréquence $\boxed{\omega = 2\pi f} \rightarrow \boxed{f = \dfrac{\omega}{2\pi}} \rightarrow \boxed{T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{2\pi}{\omega} = \text{période du signal}}$

Signaux déterministes périodiques

Remarque: il est souvent commode de représenter le signal réel sinusoïdal:

$$x(t) = Asin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

par la partie imaginaire d'une fonction exponentielle complexe:

$$\mathrm{z}(t) = A\,exp\left(j\frac{2\pi}{T}t\right)$$

L'intérêt de cette notation réside dans les propriétés de calcul de la fonction exponentielle.

Signaux à énergie finie

Un signal est à énergie finie si l’intégrale suivante existe:

$$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

C’est-à-dire si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < +\infty$$

Signaux à puissance moyenne finie

Un signal $x(t)$ défini sur R est à puissance moyenne finie sur cet intervalle si:

$$0 < P_x = \lim_{T \to = \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt < +\infty$$

La définition exclut le cas des signaux à puissance moyenne nulle qui correspond à des signaux à énergie finie.

Signaux à puissance moyenne finie

Exercice:

Le signal $x(t) = \sin(\omega t)$ est-il à puissance moyenne finie?

$$Px = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} sin^2(\omega t) dt$$

Réponse:

$$Px = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} (1 - \cos(\omega t)) dt = \frac{1}{2}$$

En revanche le signal n’est pas à énergie finie

Transformée de Fourier

Soit un signal certain $x(t)$, sa transformée de Fourier (TF) est une fonction complexe de la variable réelle f définie par:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft)\, dt$$

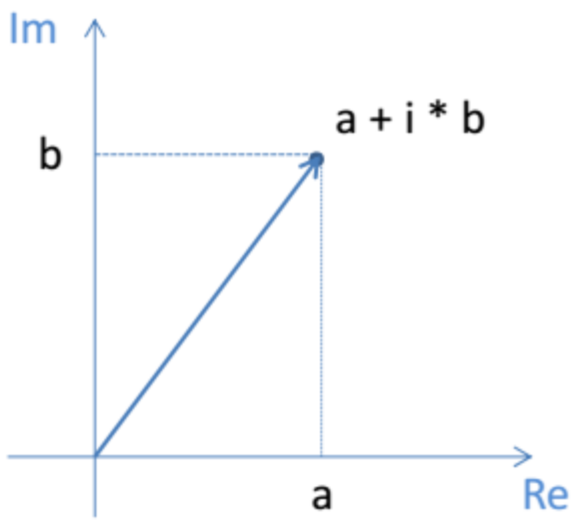
Notations:

On utilise les lettres minuscules (par exemple x ou y) pour désigner les signaux en fonction du temps t et les lettres majuscules (par exemple X ou Y) pour désigner les transformées de Fourier (TF) des signaux et donc les signaux en fonction de la fréquence f.

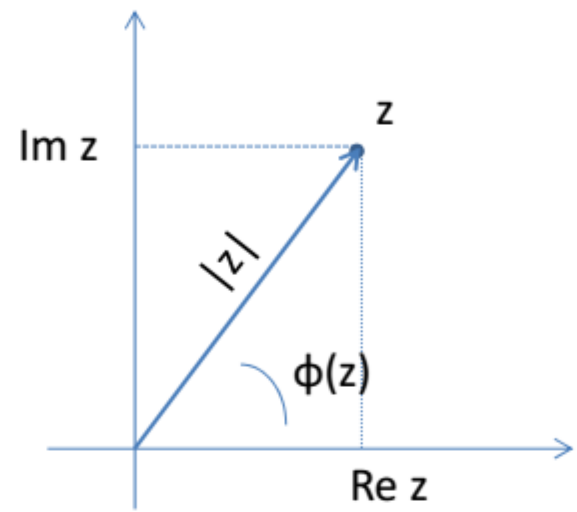
Remarque:

On utilise la notation $\exp(-j2\pi ft)$ qui est équivalente à $e^{-j2\pi ft}$

Rappel: Nombre complexe

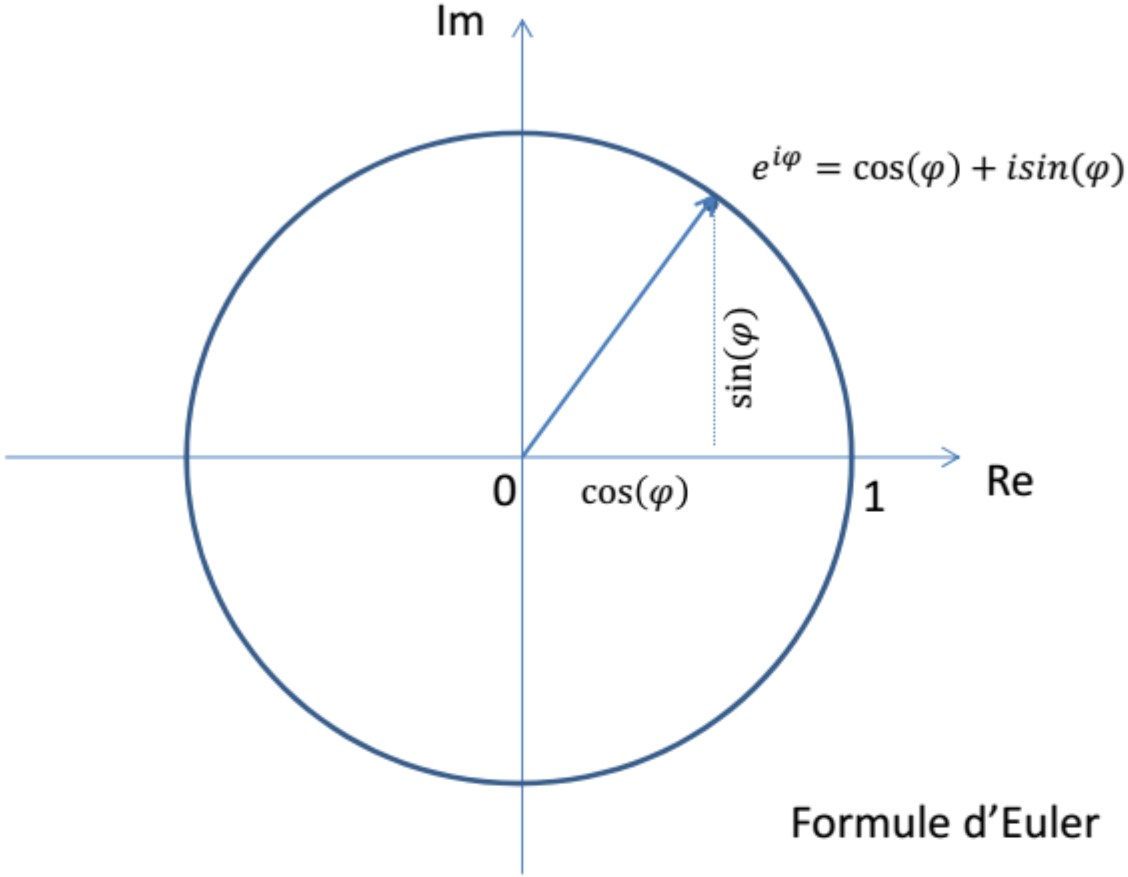


Forme cartésienne
d'un nombre complexe



Représentation géométrique
d'un nombre complexe

Rappel: Nombre complexe



Formule d'Euler

<u>Remarque:</u> dans le cours « Signal et systèmes » et « Fondements en électronique analogique », on utilise la notation j au lieu de i (pour ne pas confondre avec la notation i d'un courant électrique)

Transformée de Fourier

Soit un signal certain $x(t)$, sa transformée de Fourier (TF) est une fonction complexe de la variable réelle f définie par:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t)\, dt$$

Avec, le module:

$$|X(f)| = \sqrt{X(f)X^*(f)} = \sqrt{Re(X(f))^2 + Im(X(f))^2}$$

et la phase:

$$\varphi(X(f)) = arctg\left(\frac{Im(X(f))}{Re(X(f))}\right)$$

On parle également de spectre d'amplitude et de spectre de phase

Transformée de Fourier

Soit un signal certain $x(t)$, sa transformée de Fourier (TF) est une fonction complexe de la variable réelle f définie par:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t)\, dt$$

On appelle transformée de Fourier inverse (TF^{-1}):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \exp(j2\pi f t)\, df$$

Remarques:

- La TF existe si $x(t)$ est une fonction bornée et absolument intégrale donc si $\int |x(t)| dt$ existe
- La dimension de la variable f est $[t]^{-1}$ si $x(t)$ est une fonction de t

Dans la suite, on s'intéressera dans un premier temps uniquement au cas des signaux à énergie finie

Propriétés de la TF

Soient 2 signaux $x(t)$ et $y(t)$ admettant pour TF $X(f)$ et $Y(f)$, on peut alors facilement vérifier les propriétés suivantes:

1/ Linéarité:

$ax(t) + by(t)$ a pour TF $aX(f) + bY(f)$

2/ Parité:

Signal : $x(t)$	TF : $X(f)$
实偶 Réel paire	Réelle paire 实偶
实奇 Réel impaire	Imaginaire impaire 虚奇
虚偶 Imaginaire paire	Imaginaire paire 虚偶
虚奇 Imaginaire impaire	Réelle impaire 实奇

On démontrera que la TF d'une fonction, réelle et paire, est réelle et paire:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-j2\pi ft)\,dt$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{0} x(t)\exp(-j2\pi ft)\,dt + \int_{0}^{+\infty} x(t)\exp(-j2\pi ft)\,dt$$

Changement de variable y = - t

$$X(f) = \int_{+\infty}^{0} x(-y)\exp(j2\pi fy)\,(-dy) + \int_{0}^{+\infty} x(t)\exp(-j2\pi ft)\,dt$$

$$X(f) = \int_{0}^{+\infty} x(-y)\exp(j2\pi fy)\,dy + \int_{0}^{+\infty} x(t)\exp(-j2\pi ft)\,dt$$

Or x est une fonction paire

$$X(f) = \int_{0}^{+\infty} x(y)\exp(j2\pi fy)\,dy + \int_{0}^{+\infty} x(t)\exp(-j2\pi ft)\,dt$$

On pose y = t

$$X(f) = \int_{0}^{+\infty} x(t)\exp(j2\pi ft)\,dt + \int_{0}^{+\infty} x(t)\exp(-j2\pi ft)\,dt$$

Or :

$$exp(j2\pi ft) = \cos(2\pi ft) + jsin(2\pi ft)$$

Ainsi:

$$X(f) = \int_0^{+\infty} x(t)\exp(j2\pi ft)\,dt\ + \int_0^{+\infty} x(t)\exp(-j2\pi ft)\,dt$$

$$X(f) = \int_0^{+\infty} x(t)(\cos(2\pi ft) + jsin(2\pi ft)\,)\,dt$$
$$+ \int_0^{+\infty} x(t)(\cos(-2\pi ft) + jsin(-2\pi ft)\,)\,dt$$

Or, *cos* est une fonction paire et *sin* est une fonction impaire

$$X(f) = 2\int_0^{+\infty} x(t)\cos(2\pi ft)\,dt$$

$X(f)$ est paire en effet : $X(-f) = X(f)$

On démontrera de même que la TF d'une fonction réelle et impaire est imaginaire et impaire:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) \, dt$$

$$X(f) = \int_{0}^{+\infty} x(-y) \exp(j2\pi f y) \, dy \; + \int_{0}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) \, dt$$

Or, x est une fonction impaire

$$X(f) = \int_{0}^{+\infty} -x(y) \exp(j2\pi f y) \, dy \; + \int_{0}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t) \, dt$$

$$X(f) = -2j \int_{0}^{+\infty} x(t) \sin(2\pi f t) \, dt$$

$X(f)$ est impaire en effet : $X(-f) = -X(f)$

Propriétés de la TF

<u>3/ TF d'un signal réel:</u>

La TF **d'un signal réel** $x(t)$ est une fonction complexe $X(f)$ telle que:

- son module $|X(f)|$ est une fonction paire de f
- sa phase $\varphi(X(f))$ est une fonction impaire de f

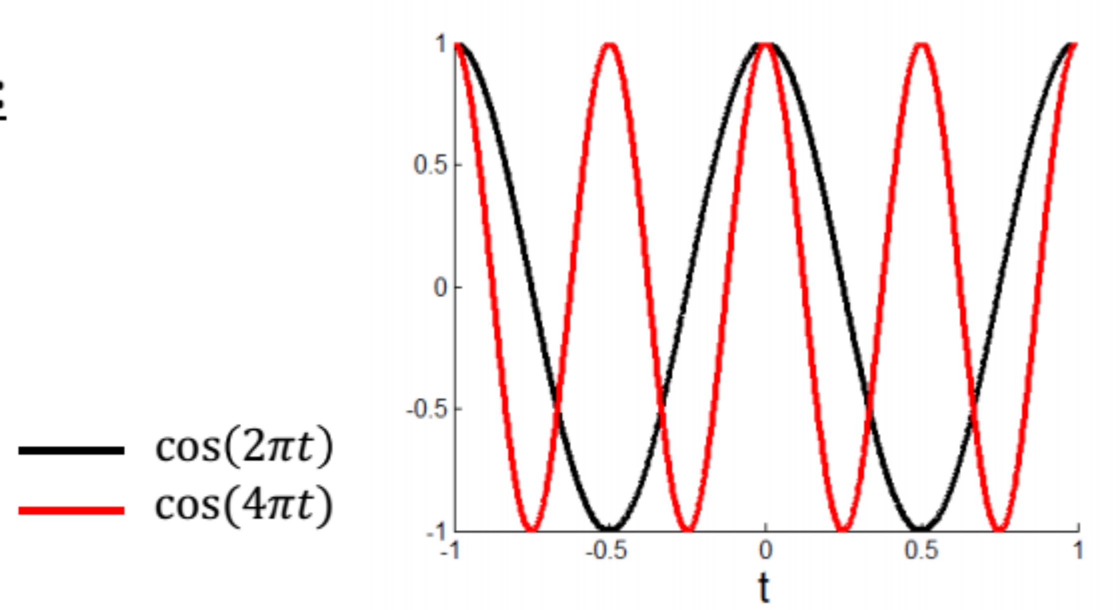
<u>4/ Complexe conjugué:</u>

$x^*(t)$ a pour TF $X^*(-f)$

Propriétés de la TF

5/ Changement d'échelle:

$x(at)$ a pour TF $\frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$




```
>> t=linspace(-1,1,1000);
>> y=cos(2*pi*t);
>> g=cos(2*pi*2*t);
>> figure;hold on;
>> plot(t,y,'k');
>> plot(t,g,'r');
>> xlabel('t','FontSize',14);
```

On peut noter le cas particulier :

$x(-t)$ qui a pour TF $X(-f)$

à montrer….

On écrit la TF de $x(-t)$; par définition:

$$\text{TF}\,\{x(-t)\} \;=\int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)\exp(-j2\pi f t)\,dt$$

Changement de variable y = - t

$$\text{TF}\,\{x(-t)\} = \int_{+\infty}^{-\infty} x(y)\exp(j2\pi f y)\,(-dy)$$

$$\text{TF}\,\{x(-t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(y)\exp(-j2\pi(-f)y)\,dy$$

D'où:

$$\text{TF}\,\{x(-t)\} = X(-f)$$

Propriétés de la TF

<u>6/ Translation sur t:</u> à montrer!

$x(t-\tau)$ a pour TF $X(f)\exp(-j2\pi f\tau)$

On écrit la TF de $x(t-\tau)$; par définition:

$$\text{TF}\left\{x(t-\tau)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)\exp(-j2\pi ft)\,dt$$

Changement de variable $y = t - \tau$

$$\text{TF}\left\{x(t-\tau)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(y)\exp(-j2\pi f(y+\tau))\,dy$$

$$\text{TF}\left\{x(t-\tau)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(y)\exp(-j2\pi fy - j2\pi f\tau)\,dy$$

$$\text{TF}\left\{x(t-\tau)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(y)\exp(-j2\pi fy)\exp(-j2\pi f\tau)\,dy$$

$$\text{TF}\left\{x(t-\tau)\right\} = \exp(-j2\pi f\tau)\int_{-\infty}^{+\infty} x(y)\exp(-j2\pi fy)\,dy$$

D’où:

$$\text{TF}\left\{x(t-\tau)\right\} = X(f)\exp(-j2\pi f\tau)$$

Propriétés de la TF

7/ Translation ou modulation sur f:

$x(t)\exp(j2\pi f_0 t)$ a pour TF $X(f-f_0)$

8/ Dérivation par rapport à la variable t:

$\frac{d^n}{dt^n}x(t)$ a pour TF $(j2\pi f)^n X(f)$

9/ Intégration de la variable t:

$\int_{-\infty}^{t} x(u)du$ a pour TF $\frac{1}{j2\pi f}X(f)$, si $\int_{+\infty}^{-\infty} x(u)du = 0$

Exemples de TF

- On va maintenant calculer la TF de 2 signaux à énergie finie…..

TF: Impulsion à décroissance exponentielle

On considère le signal $x(t) = \frac{1}{\tau} exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \varepsilon(t)$

Ce signal représente la décharge d'un condensateur de capacité C dans une résistance R (telle que RC = τ) mais ce signal correspond également à la réponse d'un filtre passe-bas de premier ordre (filtre R-C) à une impulsion de Dirac.

TF de $x(t)$ (à montrer):

$$X(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f\tau}$$

Représentation de $X(f)$:

$X(f)$ est une fonction complexe que l'on peut représenter par son module et sa phase.

Le module est calculé par la définition:

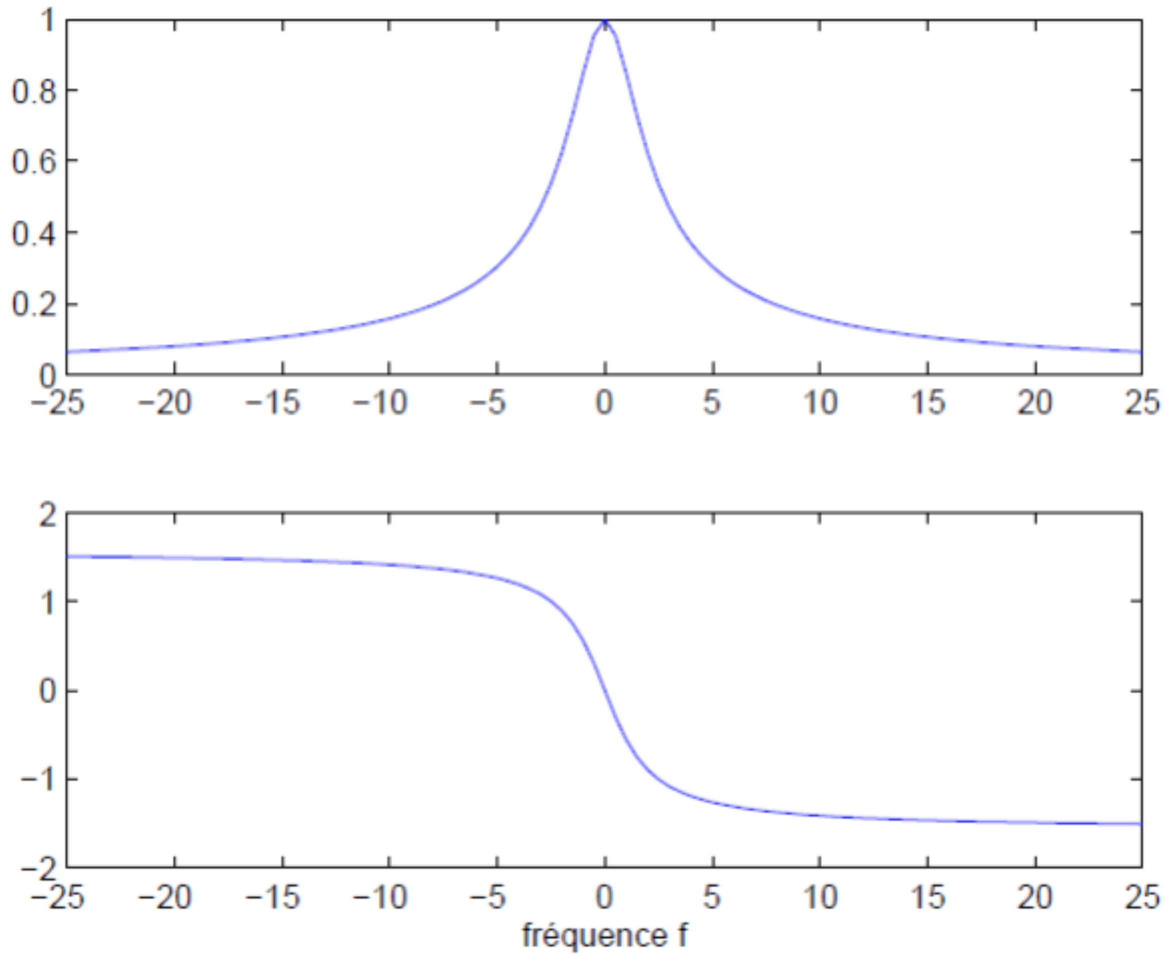
$$|X(f)| = \sqrt{X(f)X^*(f)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f\tau)^2}}$$

c'est une fonction paire de f.

L'argument par définition est égal à:

$$\varphi\big(X(f)\big) = -artan(2\pi f\tau)$$

c'est une fonction impaire de f.



En haut: module de la TF
En bas: phase de la TF

On retiendra que pour un signal réel le module de la TF est pair et la phase de la TF est impaire.

TF: Fonction rectangle

- On considère le signal $x(t) = rect\left(\frac{t}{T}\right)$

TF de $x(t)$ (à montrer):

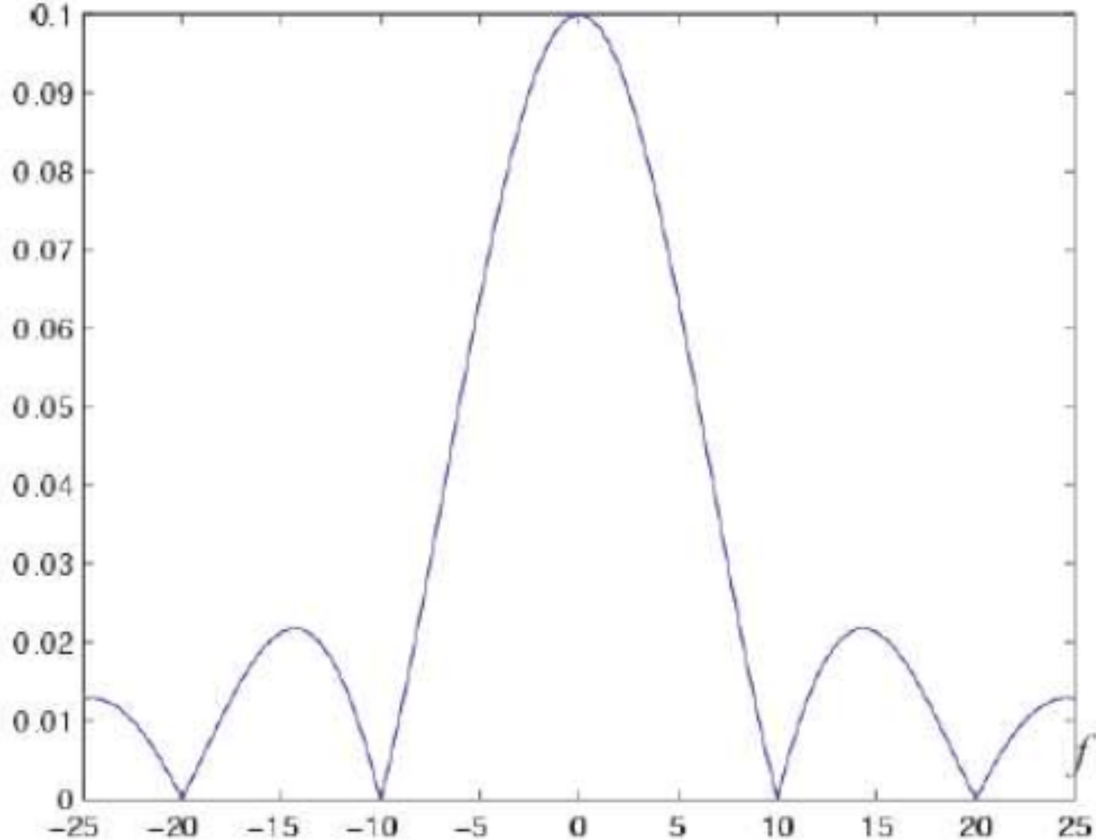
$$X(f) = Tsinc(fT)$$

Représentation de $X(f)$:

La TF étant réelle le module n'est autre que la valeur absolue:

$$|X(f)| = T|sinc(fT)|$$

En ce qui concerne la phase rappelons que c'est une fonction impaire


0.1
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
−25
−20
−15
−10
−5
0
5
10
15
20
25
f

Module de X(f)

Théorème de Plancherel

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux admettant respectivement pour TF $X(f)$ et $Y(f)$

$x(t) * y(t)$ a pour TF $X(f)Y(f)$

On pourra démontrer à titre d'exercice ce résultat

Théorème de Plancherel (2)

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux admettant respectivement pour TF $X(f)$ et $Y(f)$

$x(t)\,y(t)$ a pour TF $X(f) * Y(f)$

Théorème de Parseval

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux admettant par TF $X(f)$ et $Y(f)$ alors:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)df$$

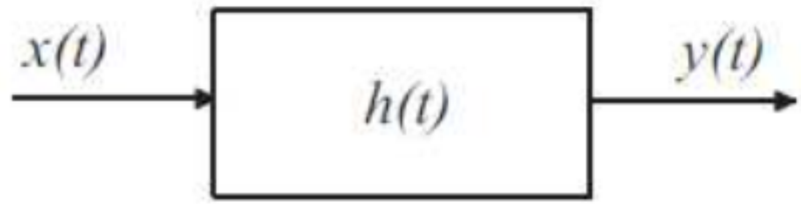
Et dans le cas particulier où $y(t)$=$x(t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Ce théorème indique que l'énergie est conservée dans les représentations en temps et en fréquence.

Ce théorème sera redémontré à titre d'exercice.

Application du théorème en filtrage



Soit un filtre de réponse impulsionnelle (réponse à un dirac) $h(t)$. La réponse au signal $x(t)$ est le signal $y(t)$:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

La TF de $y(t)$ peut être calculée soit directement à partir de $y(t)$ soit par le théorème de Plancherel (si les TF de $x(t)$ et de $h(t)$ sont connues):

$$Y(f) = X(f)H(f)$$

Démonstration du théorème de Plancherel

Posons $z(t) = x(t) * y(t)$

Par définition, $z(t)$ a pour TF $Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t) \exp(-j2\pi f t)\, dt$

Or, par définition du produit de convolution:

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) y(t-u) du$$

D'où

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(u) y(t-u) du \right) \exp(-j2\pi f t)\, dt$$

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} y(t-u) \exp(-j2\pi f t)\, dt \right)}_{\mathrm{TF}\{y(t-u)\}} du$$

Démonstration du théorème de Plancherel

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, TF\{y(t-u)\} du$$

$$Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, Y(f) \exp(-j2\pi f u) du$$

$$Z(f) = Y(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \exp(-j2\pi f u) du$$

Et donc:

$$Z(f) = Y(f) X(f)$$

$$\Rightarrow TF\{x(t) * y(y)\} = TF\{x(t)\} \times TF\{y(t)\}$$

Théorème de Parseval

Soient $x(t)$ et $y(t)$ *2 s*ignaux admettant pour TF $X(f)$ et $Y(f)$ alors:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)df$$

Et dans le cas particulier où $y(t) = x(t)$*:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Ce théorème indique que l'énergie est conservée dans les représentations en temps et en fréquence.

Ce théorème sera redémontré à titre d'exercice (cf. TD n°4) .

Remarque: $y^*(t)$désigne le conjugué de $y(t)$

Démonstration du théorème de Parseval

On calcule $I = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) Y^*(f) df$

On sait que $Y^*(f)$ est la TF de $y^*(-t)$; on peut donc écrire :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y^*(-t) \exp(-j2\pi f t)\, dt \right] df$$

On pose $u = -t$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y^*(u) \exp(j2\pi f u)\, du \right] df$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(u) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \exp(j2\pi f u)\, df \right]}_{TF^{-1}\{X(f)\}} du$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} y^*(u) x(u) du$$

Signal and Systems
Part 1: Introduction au traitement du signal (TS)

冉磊

Xidian University

2020.09

Based on Prof. Nathalie GUYADER’ syllabus.

Transformée de Fourier

Soit un signal certain *x(t),* sa transformée de Fourier (TF) est une fonction complexe de la variable réelle *f* définie par:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-j2\pi f t)\,dt$$

On appelle **transformée de Fourier inverse** (TF^{-1}):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\exp(j2\pi f t)\,df = TF^{-1}\{X(f)\}$$

Le module:

$$|X(f)| = \sqrt{X(f)X^*(f)} = \sqrt{Re(X(f))^2 + Im(X(f))^2}$$

Et la phase (ou l'argument)

$$\varphi(X(f)) = arctg\left(\frac{Im(X(f))}{Re(X(f))}\right)$$

On parle également de spectre d'amplitude et de spectre de phase

幅度谱 相位谱

Propriétés de la TF

	Fonction (représentation temporelle)	Transformée de Fourier (représentation fréquentielle)
Linéarité	线性 $ax(t) + by(t)$	$aX(f) + bY(f)$
Conjugué	共轭 $x^*(t)$	$X^*(-f)$
Changement d'échelle 尺度变换	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X\left(\frac{f}{a}\right)$
Inversion axe t 时间反折	$x(-t)$	$X(-f)$
Translation sur t	时移 $x(t-\tau)$	$X(f)\exp(-j2\pi f\tau)$
Translation sur f	频移 $x(t)\exp(j2\pi f_0 t)$	$X(f-f_0)$
Dérivation	微分 $\frac{d^n}{dt^n}x(t)$	$(j2\pi f)^n X(f)$
Intégration	积分 $\int_{-\infty}^{t} x(u)du$	$\frac{1}{j2\pi f}X(f)$, si $\int_{+\infty}^{-\infty} x(u)du = 0$
Parité 奇偶性	Réelle paire 实偶 Réelle impaire 实奇 Imaginaire paire 虚偶 Imaginaire impaire 虚奇	实偶 Réelle paire 虚奇 Imaginaire impaire 虚偶 Imaginaire paire 实奇 Réelle impaire

Théorème de Plancherel

Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux admettant respectivement pour TF $X(f)$ et $Y(f)$:

$x(t) * y(t)$ a pour TF $X(f)Y(f)$

$x(t)\, y(t)$ a pour TF $X(f) * Y(f)$

Théorème de Parseval

Soient $x(t)$ et $y(t)$ *2 s*ignaux admettant pour TF $X(f)$ et $Y(f)$ alors:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)df$$

Et dans le cas particulier où $y(t) = x(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Ce théorème indique que l'énergie est conservée dans les représentations temporelle et fréquentielles

Fonction de corrélation des **signaux à énergie finie**

能量有限信号的相关函数

Soient $x(t)$ et $y(t)$ 2 signaux à énergie finie, on appelle fonction d'**intercorrélation** entre $x(t)$ et $y(t)$:

$$\boxed{\Gamma_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t-\tau) dt}$$

Autocorrélation:

Soit $x(t)$ un signal à énergie finie, on appelle fonction d'autocorrélation de $x(t)$:

$$\boxed{\Gamma_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x^*(t-\tau) dt}$$

Remarque : vous trouverez également souvent la notation $R_{xy}(\tau)$ pour la fonction d'intercorrélation.

Propriétés de l'autocorrélation

$$\Gamma_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

On retiendra que la fonction d'autocorrélation en $\tau = 0$ d'un signal est égale à l'énergie du signal.

Remarque:

La fonction d'autocorrélation $\Gamma_{xx}(\tau)$ est bornée par l'énergie du signal $x(t)$ et son module est maximum en $\tau = 0$.

Corrélation - Convolution

注意：卷积和相关都是对变量进行积分，功能非常类似

Attention: aux variables d'intégration et aux variables des fonctions de convolution et de corrélation. L'écriture de ces fonctions est proche !

卷积：积分变量是颠倒的，实现2个函数的相互作用（滤波）

Dans la convolution, t reste la variable et une des fonctions est *renversée* ($y(t-u)$) par rapport à la variable d'intégration u. Elle formalise l'interaction (filtrage) entre les fonctions $x(t)$ et $y(t)$.

Dans la corrélation, le décalage τ est la variable de la fonction de corrélation. Elle **mesure la ressemblance entre les fonctions** $x(t)$ et $y(t)$ selon le décalage τ .

相关：相关函数的自变量是 τ ，主要测量2个函数的相似程度

Corrélation - Convolution

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt$$

Changement de variable t = u (pour revenir à la notation classique que nous avons utilisé pour définir la convolution)

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y^*(u-\tau)du$$

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)y^*(-(\tau-u))du$$

$$\boxed{\Gamma_{xy}(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau)}$$

La corrélation et la convolution sont donc 2 fonctions différentes sauf dans le cas particulier de la convolution de fonctions réelles et paires.

Exercice

Lors du TD n°5 nous calculerons la fonction de convolution et la fonction d'intercorrélation de $x(t)$ avec $y(t)$

$x(t) = \exp(-at)\varepsilon(t)$

et

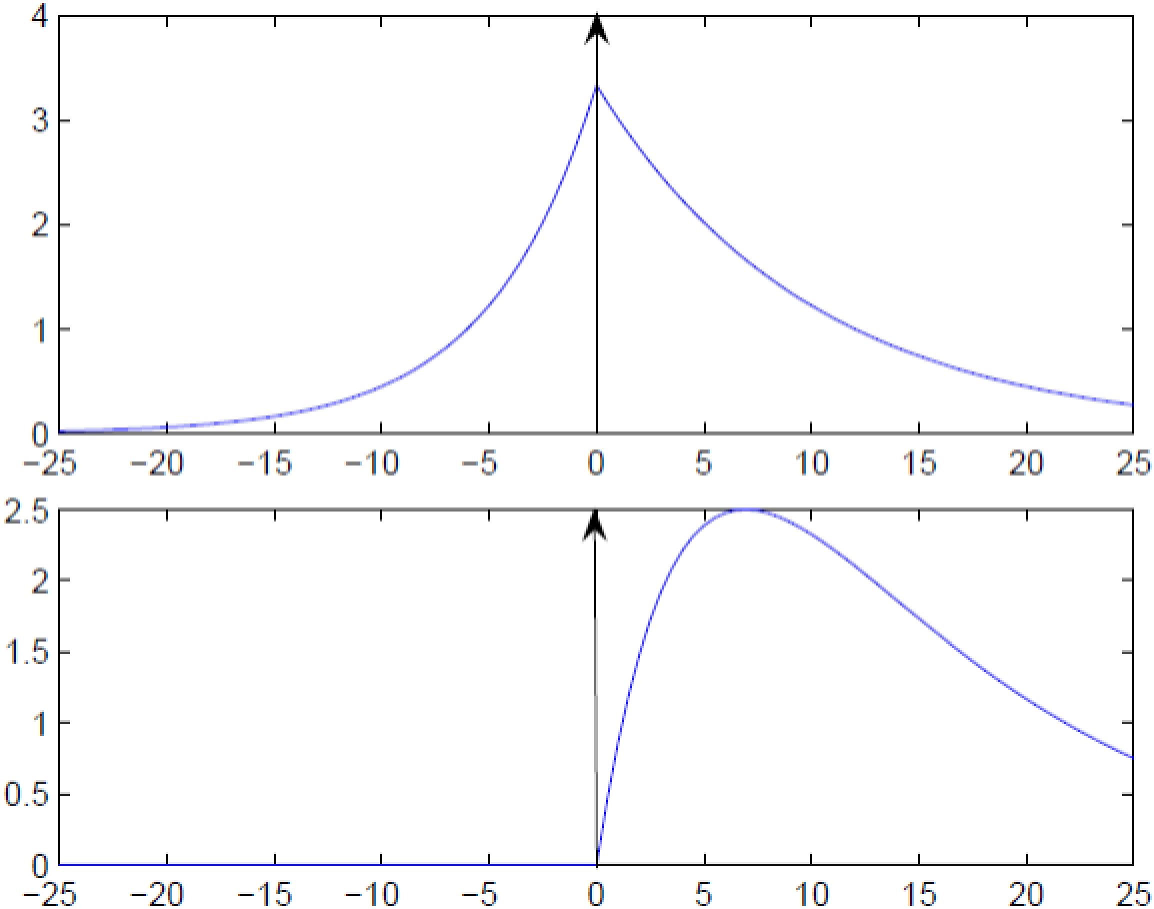
$\mathrm{y}(t) = \exp(-2at)\varepsilon(t)$

avec a > 0

Exercice

Fonction d'intercorrélation

Fonction de convolution



能量谱密度

Densité spectrale d'énergie (DSE)

Soient $x(t)$ un signal à énergie finie et $\Gamma_{xx}(\tau)$ sa fonction d'autocorrélation, on appelle **densité spectrale d'énergie** la fonction notée $S_{xx}(f)$. Elle correspond à la TF de la fonction d'autocorrélation:

$S_{xx}(f) = TF\{\Gamma_{xx}(\tau)\}$ 能量谱密度是自相关函数的傅里叶变换

$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{xx}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau)\, d\tau$ et

$S_{xx}(f) = TF\{x(\tau) * x^*(-\tau)\}$

$S_{xx}(f) = TF\{x(\tau)\}\, TF\{x^*(-\tau)\}$

Or $x^*(t)$ a pour TF $X^*(-f)$

$S_{xx}(f) = X(f)X^*(f)$

D'où le résultat:

$$\boxed{S_{xx}(f) = |X(f)|^2}$$

Densité spectrale d'énergie

$$S_{xx}(f) = |X(f)|^2$$

该表达式表明，能量谱密度对应于信号在频域上的能量

Cette expression montre que la densité spectrale d'énergie $S_{xx}(f)$ est l'énergie du signal à la fréquence f.

En utilisant le théorème de Parseval on peut écrire :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E_x$$

互能量谱密度
Densité interspectrale d’énergie

Soient $x(t)$ et $y(t)$ 2 signaux à énergie finie et $\Gamma_{xy}(\tau)$ leur fonction d’intercorrélation, on appelle **densité interspectrale d’énergie** la fonction notée $S_{xy}(f)$.

Elle correspond à la TF de la fonction d’intercorrélation:

互能量谱密度是互相关函数的傅里叶变换

$$S_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{xy}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau)\, d\tau$$

$$\boxed{S_{xy}(f) = X(f)Y^*(f)}$$

Cas des distributions

Transformées de Fourier classiques des distributions:

$$TF\{\delta(t)\} = 1$$
$$TF\{k\} = k\delta(f)$$
$$TF\{\delta(t - t_0)\} = \exp(-j2\pi f t_0)$$
$$TF\{\exp(j2\pi f_0 t)\} = \delta(f - f_0)$$

Remarque: ces TF se redémontrent facilement soit en écrivant directement la TF des signaux, soit en passant par la TF inverse (TF^{-1})

TF classiques (cf. TDs n°4 et n°5)

Signal	Transformée de Fourier
$rect\left(\frac{t}{T}\right)$	$\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} = T\ sinc(fT)$
$tri\left(\frac{t}{T}\right)$	$T\ sinc^2(fT)$
$\exp(-\pi t^2)$	$\exp(-\pi f^2)$
$\frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\varepsilon(t)$	$\frac{1}{1 + j2\pi f\tau}$

<u>Remarque: </u>on pourra retenir : « *Une fonction large en temps (représentation temporelle) est étroite en fréquence (représentation fréquentielle) et inversement* »

功率有限信号

Cas des **signaux à puissance moyenne finie**

On s'intéresse au cas particulier des signaux à puissance moyenne finie (signaux ayant une énergie infinie).

Ces signaux vérifient (cf. Chapitre 3):

$$0 < P_x = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt < +\infty$$

Quoique ces signaux soient physiquement non réalisables (puisqu'ils ont une énergie infinie) leur représentation mathématiques est simple et utile.

虽然这些信号是物理上不存在的（因为他们的能量无限）却是简单而有用的数学表示

Cas des signaux à puissance moyenne finie

Tout signal $x(t)$ peut s'écrire sous la forme:

$$x(t) = x_0(t) + \bar{x}$$

Avec

$\bar{x}$ la valeur moyenne du signal $x(t)$ 信号的平均值

$x_0(t)$ le signal de moyenne nulle 零均值的信号

En dérivant $x(t)$ on obtient:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dx_0(t)}{dt} = {x_0}'(t)$$

D'où l'écriture:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} {x_0}'(u)d\mathrm{u} + \bar{x}$$

Avec $\bar{x}$ qui joue le rôle d'une constante d'intégration

Cas des signaux à puissance moyenne finie

D'après la propriété d'intégration de la TF: 根据傅里叶变换的积分特性

$$TF\left\{\int_{-\infty}^{t} x(u)du\right\} = \frac{1}{j2\pi f}X(f)$$

On obtient alors, pour un signal $x(t) = \int_{-\infty}^{t} x_0'(u)du\ + \bar{x}$

$$TF\{x(t)\} = TF\left\{\int_{-\infty}^{t} x_0'(u)\mathrm{d}u\ + \bar{x}\right\} = TF\left\{\int_{-\infty}^{t} x_0'(u)\mathrm{d}u\right\} + TF\{\bar{x}\}$$

$$\boxed{TF\{x(t)\} = \frac{1}{j2\pi f}TF\{x_0'(t)\} + \ \bar{x}\delta(f)}$$

阶跃函数的傅里叶变换

TF d'un échelon ε(t)

Soit $x(t) = \varepsilon(t)$. On peut écrire la fonction sous la forme $\bar{x} + x_0(t)$

Le signal $x(t)$ peut se décomposer comme:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} x_0{}'(u)\mathrm{d}u + \bar{x}$$

$$TF\{x(t)\} = \frac{1}{j2\pi f} TF\{x_0{}'(t)\} + TF\{\bar{x}\}$$

Que vaut $x_0{}'(t)$?

阶跃函数的傅里叶变换

TF d'un échelon ε(t)

Ainsi $x'_0(t) = \delta(t)$

On obtient alors:

$$TF\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{j2\pi f} TF\{\delta(t)\} + TF\{\bar{x}\}$$

Or $\bar{x} = \frac{1}{2}$

$$\boxed{TF\{\varepsilon(t)\} = \frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)}$$

符号函数的傅里叶变换

TF de la fonction sgn(t)

Soit $x(t) = sgn(t)$.

Cette fonction est à moyenne nulle ($\bar{x} = 0$) et $x(t) = x_0(t)$.

On calcule la dérivée $x'_0(t) = 2\delta(t)$ (saut d'amplitude 2t en t=0);

d'où le résultat:

$$TF\{sgn(t)\} = \frac{1}{j2\pi f} TF\{2\delta(t)\}$$

$$\boxed{TF\{sgn(t)\} = \frac{1}{j\pi f}}$$

功率有限信号的相关

Corrélation des signaux à puissance moyenne finie

$$\boxed{\Gamma_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)y^*(t-\tau)dt}$$

On a également:

$$\Gamma_{xx}(0) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)x^*(t)dt$$

$$\Gamma_{xx}(0) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt \ = P_x$$

La valeur de l'autocorrélation en 0 est la puissance moyenne du signal $x(t)$ 自相关函数的0时刻的值就是信号的平均功率

功率谱密度
Densité spectrale de puissance

Soit $x(t)$ un signal à puissance moyenne finie, on appelle densité spectrale de puissance (DSP) la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation: 功率谱密度是自相关函数的傅里叶变换

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{xx}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau)\, d\tau$$

Pour les signaux à énergie finie on a montré que:

$$S_{xx}(f) = X(f)X^*(f) = |X(f)|^2$$

Dans le cas des signaux à puissance moyenne finie: NON!

Densité spectrale de puissance

功率谱密度

Soit $x(t)$ un signal à puissance moyenne finie, on note

$x(t,T) = x(t)rect\left(\frac{t}{T}\right)$

la portion du signal de largeur T centrée sur l'origine et $TF\{x(t,T)\} = X(f,T)$. Ainsi, le signal $x(t,T)$ est un signal à énergie finie dont on peut calculer la densité spectrale d'énergie:

$$S_{xx}(f,T) = |X(f,T)|^2$$

D'après le théorème de Parseval on peut écrire:

$$P_x = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df$$

$$P_x = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t,T)|^2 dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(f,T)|^2 df$$

D'où:

$$\boxed{S_{xx}(f)df = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} |X(f,T)|^2}$$

小结

	Signaux à énergie finie	Signaux à puissance moyenne finie
		$x(t) = x_0(t) + \bar{x}$ $x(t) = \int_{-\infty}^{t} x_0{}'(u)du \ + \bar{x}$
Transformée de Fourier (TF)	$X(f) = TF\{x(t)\}$ $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j2\pi f t)\, dt$	$X(f) = TF\{x(t)\}$ $TF\{x(t)\} = \frac{1}{j2\pi f} TF\{x_0{}'(t)\} + \bar{x}\delta(f)$
Intercorrélation	$\Gamma_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t-\tau) dt$	$\Gamma_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) y^*(t-\tau) dt$
Autocorrélation	$\Gamma_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x^*(t-\tau) dt$	$\Gamma_{xx}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) x^*(t-\tau) dt$
Densité spectrale	$S_{xx}(f) = TF\{\Gamma_{xx}(\tau)\}$ $S_{xx}(f) = \|X(f)\|^2$	$S_{xx}(f)df = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \|X(f,T)\|^2$

Signal and Systems
Part 1: Introduction au traitement du signal (TS)

冉磊

Xidian University

2020.09

Based on Prof. Nathalie GUYADER’ syllabus.

回顾

相关、卷积

Corrélation / Convolution

Définition de la corrélation: $\Gamma_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t-\tau) dt$

Définition de la convolution: $x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) y(t-u) du$

$$\Gamma_{xy}(\tau) = x(\tau) * y^*(-\tau)$$

回顾

	Signaux à énergie finie	Signaux à puissance moyenne finie
		$x(t) = x_0(t) + \bar{x}$ $x(t) = \int_{-\infty}^{t} x_0{}'(u)du \ + \bar{x}$
Transformée de Fourier (TF)	$X(f) = TF\{x(t)\}$ $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-j2\pi ft)\,dt$	$X(f) = TF\{x(t)\}$ $TF\{x(t)\} = \frac{1}{j2\pi f} TF\{x_0{}'(t)\} + \bar{x}\delta(f)$
Intercorrélation	$\Gamma_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt$	$\Gamma_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)y^*(t-\tau)dt$
Autocorrélation	$\Gamma_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt$	$\Gamma_{xx}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)x^*(t-\tau)dt$
Densité spectrale	$S_{xx}(f) = TF\{\Gamma_{xx}(\tau)\}$ $S_{xx}(f) = \|X(f)\|^2$	$S_{xx}(f)df = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\|X(f,T)\|^2$

常用信号傅里叶变换

	Signal	Transformée de Fourier
Signaux à énergie finie	$rect\left(\frac{t}{T}\right)$	$\frac{\sin(\pi f T)}{\pi f} = T\ sinc(fT)$
	$tri\left(\frac{t}{T}\right)$	$T\ sinc^2(fT)$
	$\exp(-\pi t^2)$	$\exp(-\pi f^2)$
	$\frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\varepsilon(t)$	$\frac{1}{1+j2\pi f\tau}$
Distributions	$\delta(t)$	1
	k	$k\delta(f)$
	$\delta(t-t_0)$	$\exp(-j2\pi f t_0)$
	$\exp(j2\pi f_0 t)$	$\delta(f-f_0)$
Signaux à puissance moyenne finie	$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{j2\pi f}+\frac{1}{2}\delta(f)$
	$sgn(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$

周期信号
Cas des **signaux périodiques**

周期信号的傅里叶变换
Transformée de Fourier d'un signal périodique

Soit $x(t)$ un signal périodique de période T, on peut le développer en **séries de Fourier:** 傅里叶级数

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n exp\left(j2\pi \frac{n}{T} t\right)$$

傅里叶级数分解

Rappel Décomposition en séries de Fourier

每个周期信号都可以分解成无穷多个三角函数的和

Soit f une fonction T- périodique . D'après Fourier tout signal périodique se décompose en somme infinie de sinusoïdes. On a alors:

$$f(t) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) + b_n \sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Avec

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt \quad \text{et} \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\, cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) dt\,, n \geq 1$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right) dt\,, n \geq 1$$

a_0 représente la valeur moyenne du signal (sur une période) et les a_n et b_n sont appelés les coefficients de Fourier.

a_0表示信号的平均值 a_n, b_n表示傅里叶级数的系数

傅里叶级数分解
Rappel Décomposition en séries de Fourier

Soit $x(t)$ une fonction T- périodique . D’après Fourier tout signal périodique se décompose en somme infinie d’exponentielles complexes. On a alors: 每个周期信号都可分解成无限个复指数函数和

$$x(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, exp\left(jn\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Avec

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t) \, exp\left(-jn\frac{2\pi}{T}t\right) dt$$

Cas des signaux périodiques

周期信号

On a donc:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n exp\left(j2\pi\frac{n}{T}t\right)$$

dont la TF s'écrit:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(f - f_n)$$

avec $f_n = n/T$ et

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)exp\left(-j2\pi\frac{n}{T}t\right)dt = \frac{1}{T}X\left(\frac{n}{T}, T\right)$$

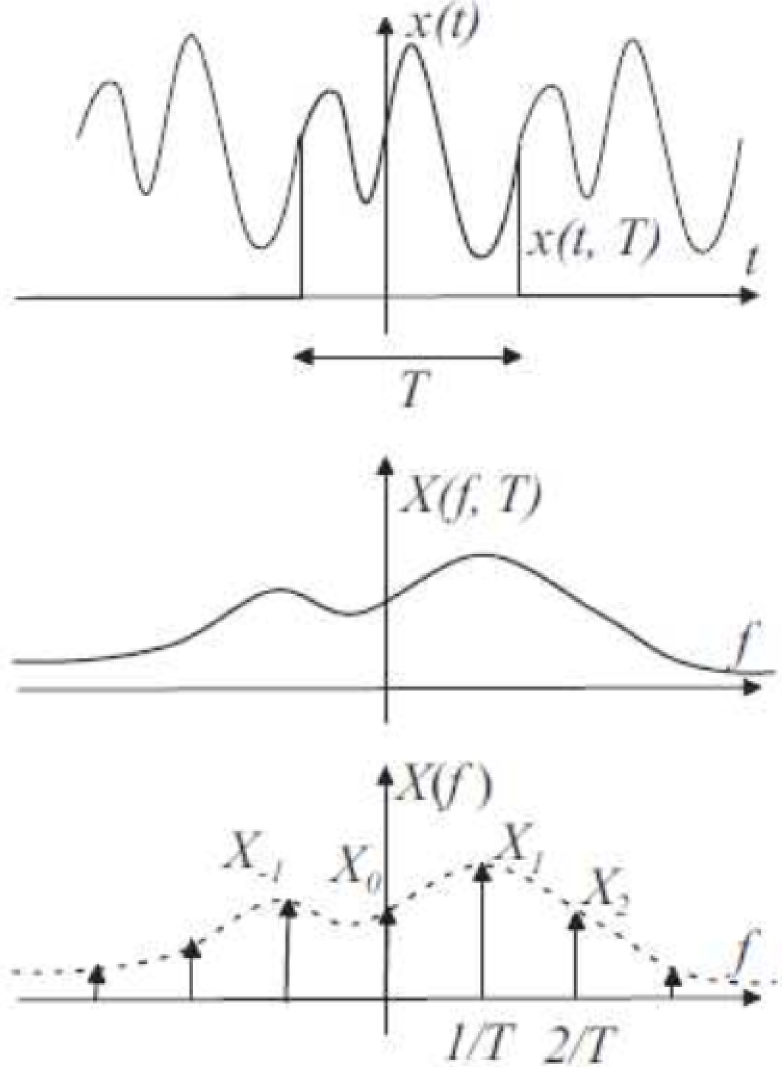
On remarque que la coefficient c_n n'est autre que la transformée de Fourier d'une période du signal à la fréquence $f_n = n/T$

Cas des **signaux périodiques**

Ainsi le spectre d'un signal périodique de période T est un spectre de raies localisées aux fréquences $f_n = n/T$ et d'amplitude

$$X_n = X(f, T)\delta(f - f_n)/T$$

离散频谱



冲激串的傅里叶变换
TF d'un peigne de Dirac

Soit $\delta_T(t)$ le peigne de Dirac de période T:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

Cette fonction est périodique et son développement en séries de Fourier (complexe)s'écrit:

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp(j2\pi f_n t)$$

avec $f_n = n/T$ et:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \delta_T(t)\exp(-j2\pi f_n t)\,dt$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \delta_T(t)\exp(0)\,dt$$

$$c_n = \frac{1}{T}$$

TF d’un peigne de Dirac

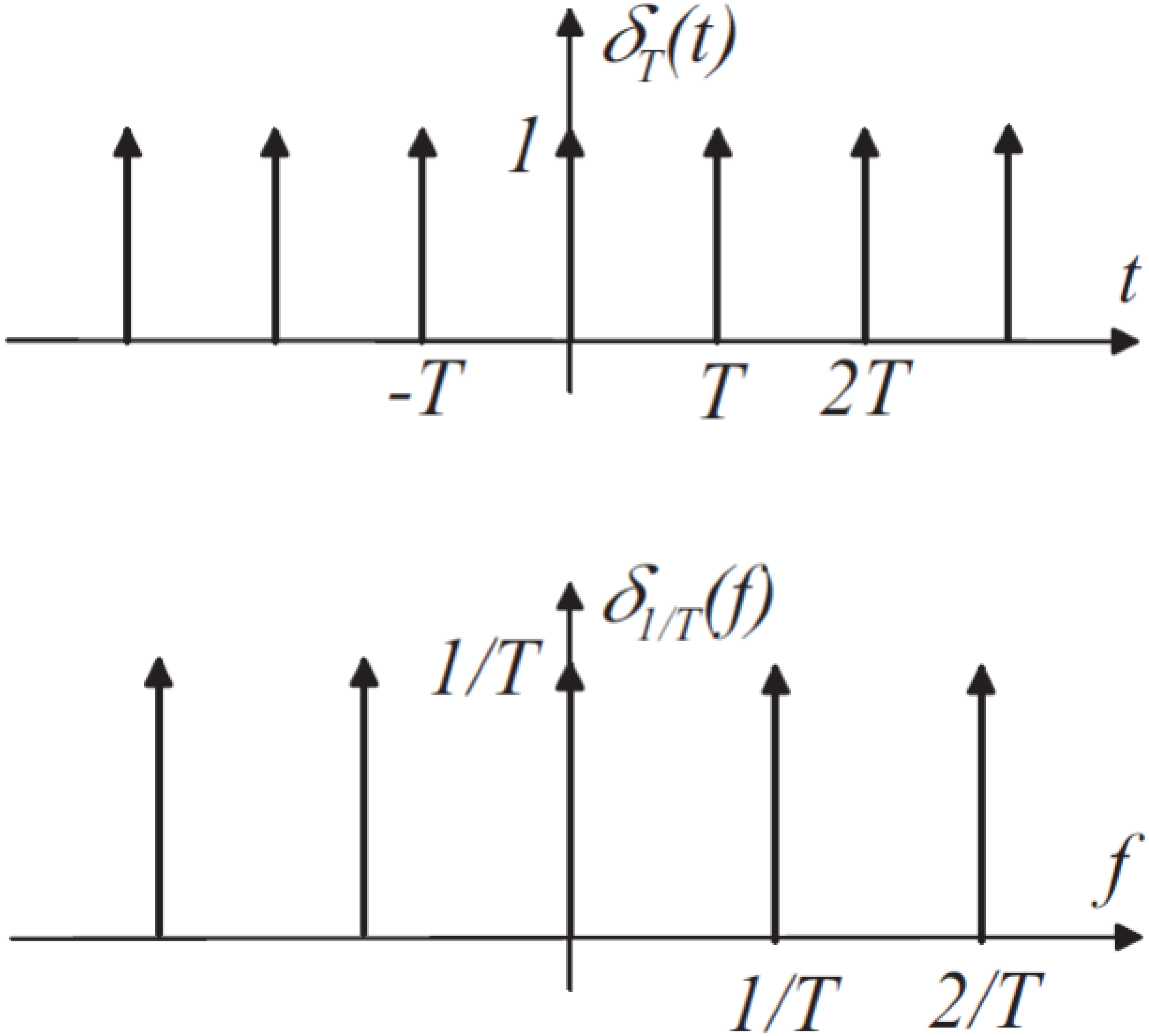
$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(j2\pi f_n t)$$

La transformée de Fourier est alors :

$$TF\{\delta_T(t)\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n/T) = \frac{1}{T} \delta_{\frac{1}{T}}(f)$$

La transformée de Fourier d’un peigne de Dirac de période T est un peigne de Dirac de période 1/T

周期为T的冲激串的傅里叶变换为周期为1/T的冲激串



$\delta_T(t)$
1
t
-T
T
2T
$\delta_{1/T}(f)$
1/T
f
1/T
2/T

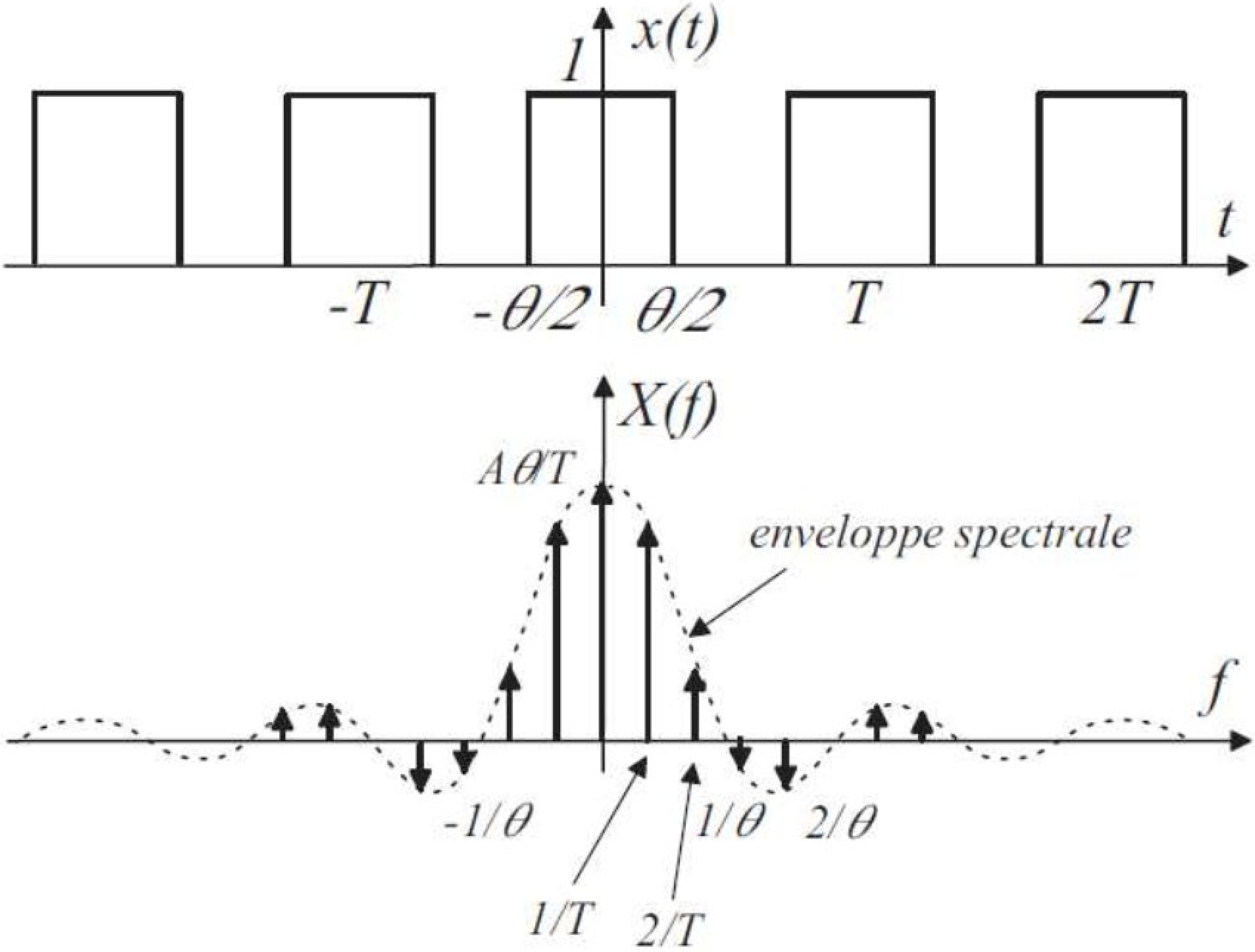
方波的傅里叶变换
Exemple TF du signal carré périodique

On considère le signal carré périodique:

$$x(t) = rep_T\left\{A\, rect\left(\frac{t}{\theta}\right)\right\} = Arect\left(\frac{t}{\theta}\right) * \delta_T(t)$$

La transformée de Fourier s'écrit:

$$X(f) = A\theta\, sinc(\theta f)\, \frac{1}{T}\delta_{\frac{1}{T}}(f)$$



x(t)
1
t
-T
-θ/2
θ/2
T
2T
X(f)
A θ/T
enveloppe spectrale
f
-1/θ
1/θ
2/θ
1/T
2/T

周期信号的傅里叶变换

TF de signaux périodiques classiques

On va ici reprendre le calcul des TFs des signaux cosinus et sinus :

$x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ avec $f_0 = \frac{1}{T_0}$

et

$x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$ avec $f_0 = \frac{1}{T_0}$

On a alors:

$$TF\{\cos(2\pi f_0 t)\} = TF\left\{\frac{1}{2}(\ \exp(j2\pi f_0 t) + \exp(-j2\pi f_0 t)\ )\right\}$$

$$TF\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2}(TF\{\exp(j2\pi f_0 t)\} + TF\{\exp(-j2\pi f_0 t)\})$$

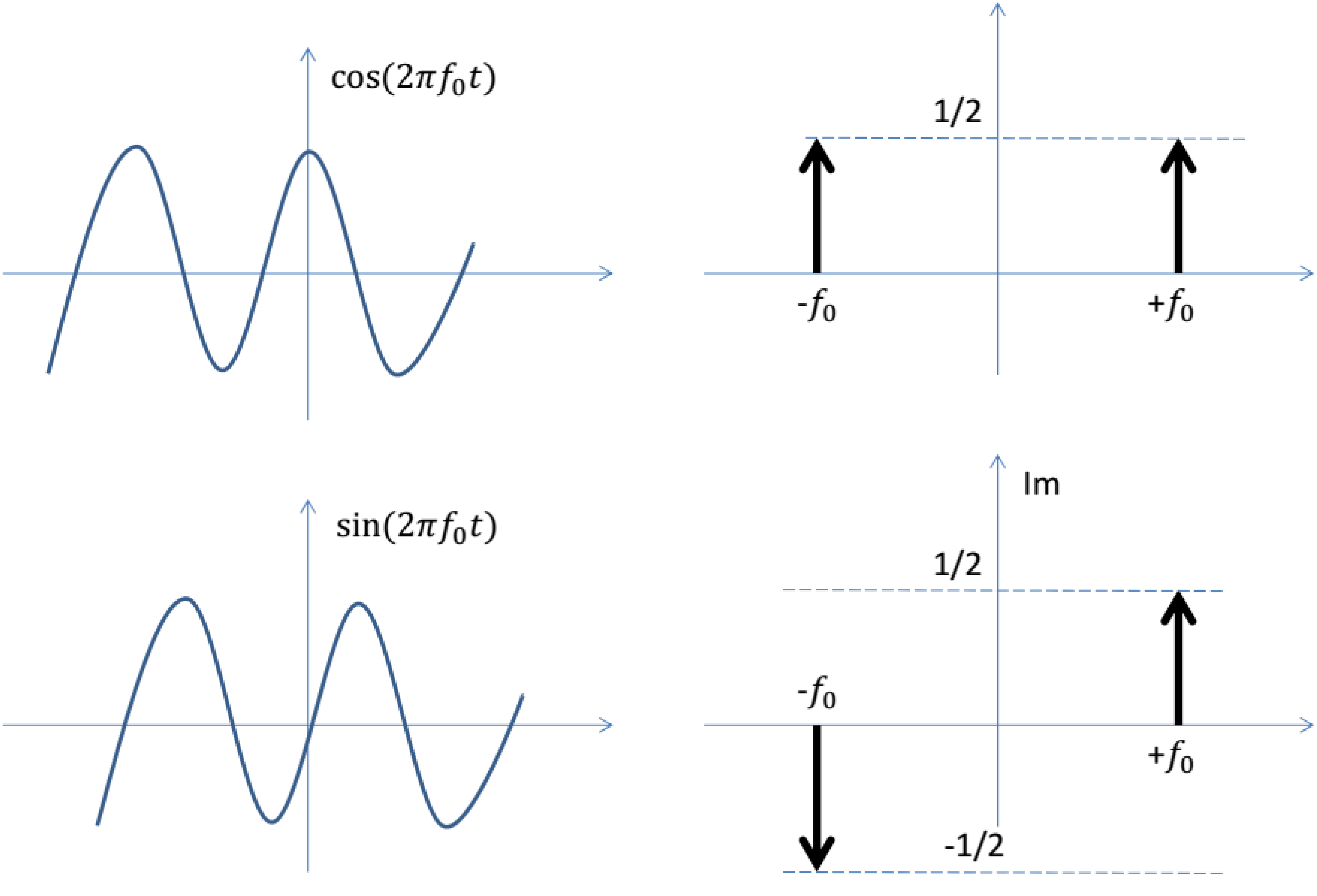
$$TF\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2}(TF\{\exp(j2\pi f_0 t)\} + TF\{\exp(-j2\pi f_0 t)\})$$

$$TF\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2}(\ \delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\ )$$

Et

$$TF\{sin(2\pi f_0 t)\} = TF\left\{\frac{1}{2j}(\ \exp(j2\pi f_0 t) - \exp(-j2\pi f_0 t)\ )\right\}$$

$$TF\{\sin(2\pi f_0 t)\} = \frac{j}{2}(\ \delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)\ )$$



$\cos(2\pi f_0 t)$
1/2
$-f_0$
$+f_0$
$\sin(2\pi f_0 t)$
Im
1/2
$-f_0$
$+f_0$
-1/2

Calculer la TF de:

$$rect\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_0 t)$$

Calculer la TF de:

$$rect\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_0 t)$$

On sait que $TF\left\{rect\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = Tsinc(fT)$

De plus $\cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}(\exp(j2\pi f_0 t) + \exp(-j2\pi f_0 t))$

D'où

$$\begin{aligned} TF\left\{rect\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_0 t)\right\} \\ &= \frac{1}{2}TF\left\{rect\left(\frac{t}{T}\right)\exp(j2\pi f_0 t)\right\} + \frac{1}{2}TF\left\{rect\left(\frac{t}{T}\right)\exp(-j2\pi f_0 t)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\Big(Tsinc\big((f - f_0)T\big) + Tsinc\big((f + f_0)T\big)\Big) \end{aligned}$$

等周期的周期信号的互相关函数
Fonction de corrélation de signaux périodiques de même période

On reprend la définition de la fonction d'intercorrélation de signaux à puissance moyenne finie:

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \lim_{\Delta \to +\infty} \frac{1}{\Delta} \int_{-\Delta/2}^{+\Delta/2} x(t) y^*(t-\tau) dt$$

Pour des signaux périodiques de période T, le calcul de la limite est inutile. Il suffit donc d'intégrer sur une seule période:

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} x(t) y^*(t-\tau) dt$$

Puisque les signaux sont périodiques on peut les développer en séries de Fourier

由于信号是周期性的可进行傅里叶级数分解

Fonction de corrélation de signaux périodiques de même période

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_k exp\left(j2\pi\frac{k}{T}t\right)$ avec $X_k = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)exp\left(-j2\pi\frac{k}{T}t\right)dt$

$y(t) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} Y_l exp\left(j2\pi\frac{l}{T}t\right)$ avec $Y_l = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} y(t)exp\left(-j2\pi\frac{l}{T}t\right)dt$

D'où la fonction d'intercorrélation:

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_k exp\left(j2\pi\frac{k}{T}t\right) Y^*{}_l exp\left(-j2\pi\frac{l}{T}(t-\tau)\right)dt$$

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_k Y^*{}_l exp\left(j2\pi\frac{l}{T}\tau\right)\int_{-T/2}^{+T/2} exp\left(j2\pi\frac{k-l}{T}t\right)dt$$

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_k Y^*{}_l exp\left(j2\pi\frac{l}{T}\tau\right)\int_{-T/2}^{+T/2} exp\left(j2\pi\frac{k-l}{T}t\right)dt$$

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} X_k Y^*{}_l exp\left(j2\pi\frac{l}{T}\tau\right) T \;\; sinc(k-l)$$

等周期的周期信号的互相关函数
Fonction de corrélation de signaux périodiques de même période

Or $sinc(k-l) = \frac{\sin(\pi(k-l))}{\pi(k-l)} = \begin{cases} 1 & si\ k = l \\ 0 & si\ k \neq l \end{cases}$

D'où le résultat:

$$\Gamma_{xy}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n {Y^*}_n exp\left(j2\pi \frac{n}{T}\tau\right)$$

周期信号的自相关函数
Fonction d'autocorrélation de signaux périodiques de même période

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n X^*{}_n exp\left(j2\pi\frac{n}{T}\tau\right)$$

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 exp\left(j2\pi\frac{n}{T}\tau\right)$$

功率谱密度
Densité spectrale de puissance

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 exp\left(j2\pi \frac{n}{T}\tau\right)$$

En prenant la TF:

$$S_{xx}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

avec $X_n = \frac{1}{T} TF\{x(t,T)\}$=$\frac{1}{T} X(f,T)\delta(f - \frac{n}{T})$

Ainsi

$$S_{xx}(f) = \frac{1}{T^2} |X(f,T)|^2 \delta_{\frac{1}{T}}(f)$$

Pour un signal périodique de période T la densité spectrale de puissance est donc un spectre de raies situées aux fréquences $f_n = \frac{n}{T}$ et d'enveloppe $\frac{1}{T^2} |X(f,T)|^2$

互功率谱密度
Densité interspectrale de puissance

$$S_{xy}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n {Y^*}_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Que l'on peut écrire à l'aide du peigne de Dirac: 写成冲激串的形式:

$$S_{xy}(f) = \frac{1}{T^2} X(f,T) Y^*(f,T) \delta_{\frac{1}{T}}(f)$$

CHAPITRE 5 NOTION DE FILTRAGE
滤波

线性时不变系统的滤波

Le filtrage des systèmes linéaires continus et invariants dans le temps (stationnaires). Le filtrage consiste à atténuer certains signaux et à en laisser ”passer” d’autres.
滤波就是抑制特定信号并让其他的信号通过

Cette sélection s’opère bien évidemment en fonction des caractéristiques du signal recherchées en sortie.
当然，这个选择的依据就是想要输出的信号的特性

Un filtre modifie (ou filtre) certaines parties d’un signal d’entrée dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel.
滤波器在时域和频域都能改变输入信号的特定部分

滤波应用例子：
雷达信号

2 grandes familles de filtres

数字滤波器主要基于集成电路，如FPGA和DSP

- Les filtres numériques réalisés à partir de structure intégrée microprogrammable (DSP)
- Les filtres analogiques réalisés à partir de composants passifs (résistance, inductance, condensateur) ou actifs.

模拟滤波器主要基于被动器件（电阻、电感、电容）和有源器件（运放）

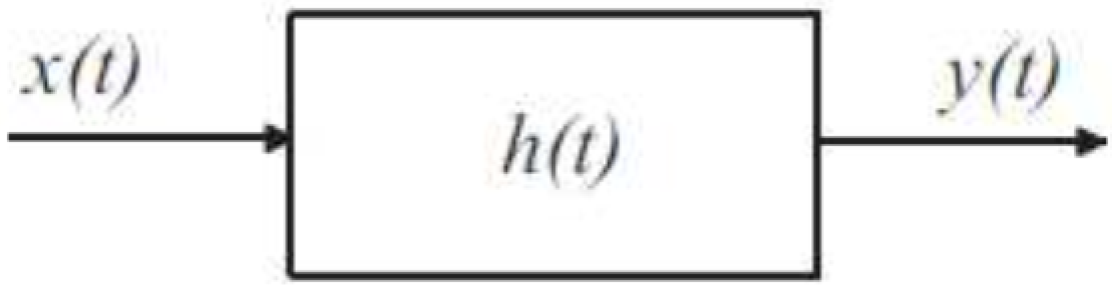
表征
Caractérisation

一种表征滤波器的方法是获取冲激响应$h(t)$，即输入冲激函数，得到输出信号，此时输入信号的频率特性为冲激函数的傅里叶变换即1。

Un moyen de caractériser un filtre est sa réponse impulsionnelle $h(t)$, c'est-à-dire le signal en sortie du filtre lorsque le signal d'entrée est une impulsion de Dirac, c'est-à-dire lorsque toutes les fréquences sont présentes à son entrée ($TF\{\delta(t)\} = 1$).

Un autre moyen de caractériser un filtre est de fournir sa fonction de transfert $H(f)$, qui peut être obtenue en divisant le spectre fréquentiel du signal de sortie avec celui du signal de l'entrée du filtre.

另一种表征滤波器的方法是获取传输函数$H(f)$，它可以通过将输出信号的频谱除以输入信号的频谱得到。



Soit un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$. La réponse au signal $x(t)$ est le signal $y(t)$:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

La TF de $y(t)$ peut être calculée soit directement à partir de $y(t)$ soit par le <u>théorème de Plancherel</u> (si les TF de $x(t)$ et de $h(t)$ sont connues):

$$Y(f) = X(f)H(f)$$