TD –Signaux et Systèmes
Traitement numérique du signal

1. Partie I – Rappels

Exercice 1: Jeu des correspondances

Trouver la correspondance entre les signaux temporels et leurs transformées de Fourier sur les Figure 1 et Figure 2. Justifiez vos choix.

On rappelle

$$tri = rect * rect$$

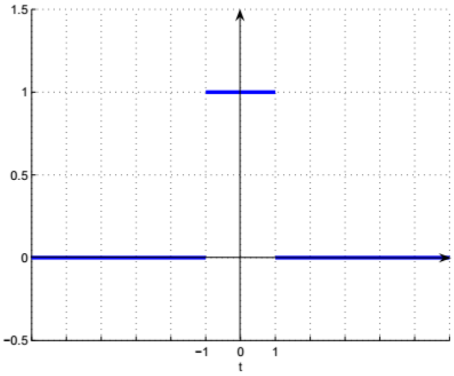
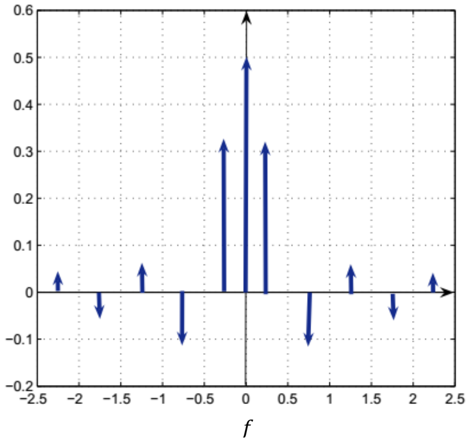
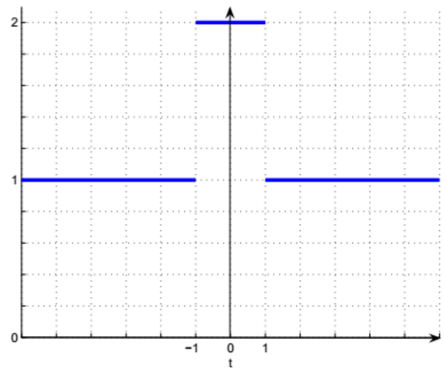
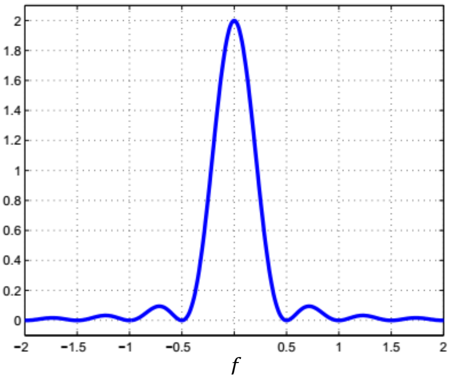
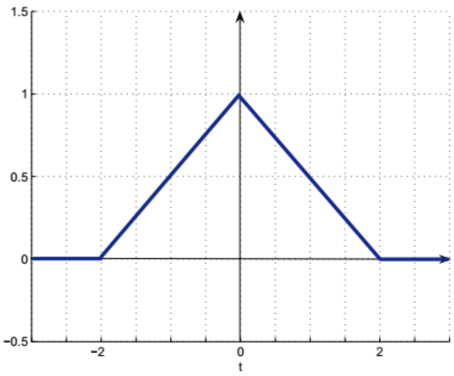
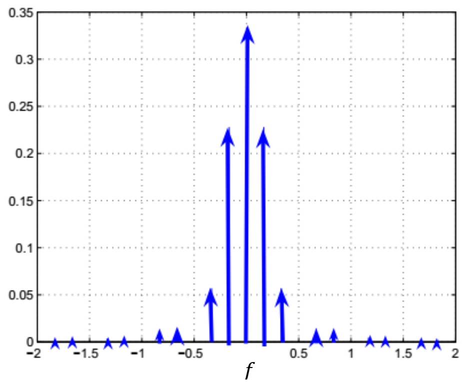
$x(t)$	$X(\nu)$
1 	**A** 
2 	**B** 
3 	**C** 

Figure 1 - Exercice 1: Partie I

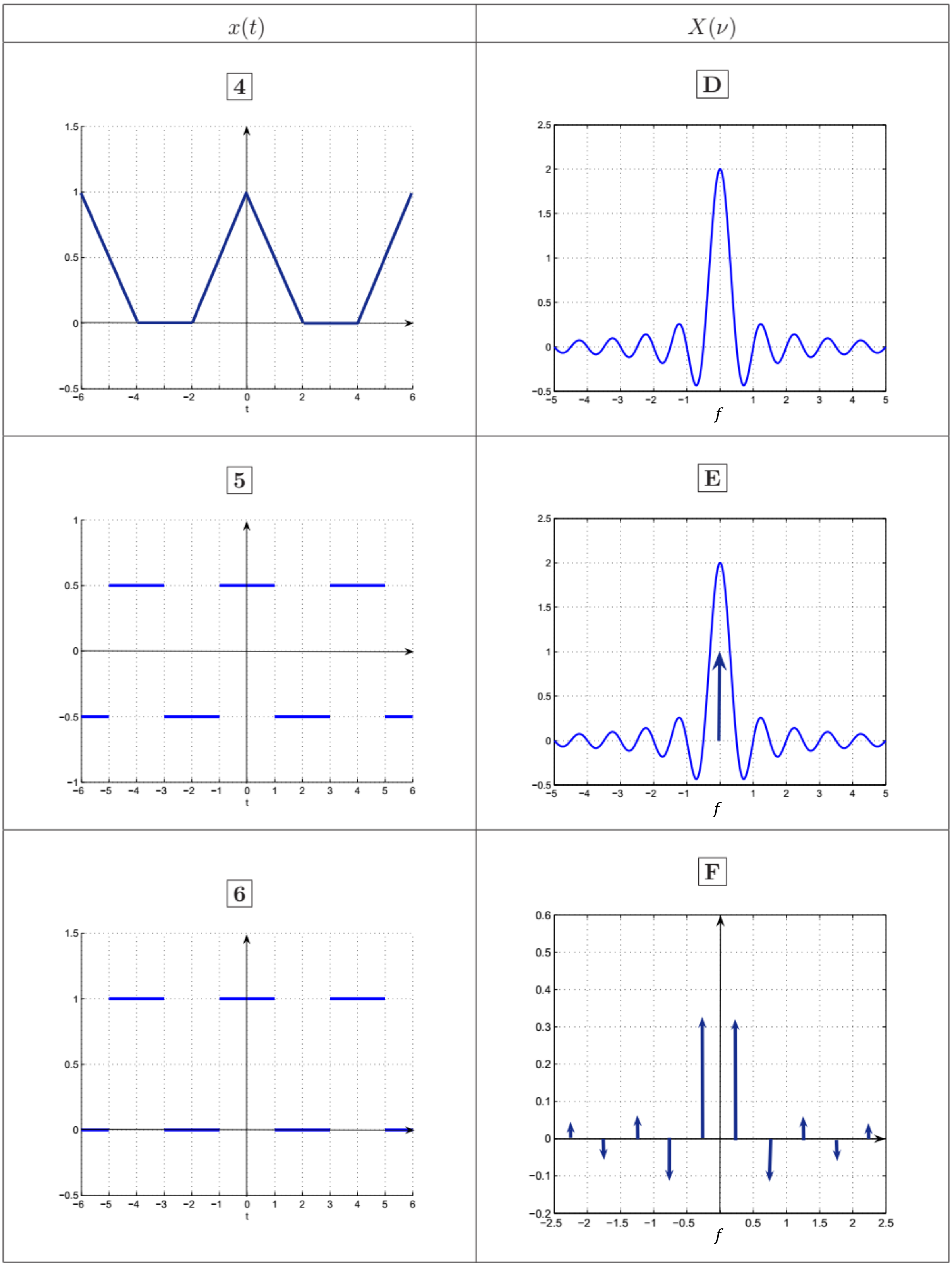


Figure 2 - Exercice 1: Partie II

Exercice 2: L'importance de la Transformée de Fourier

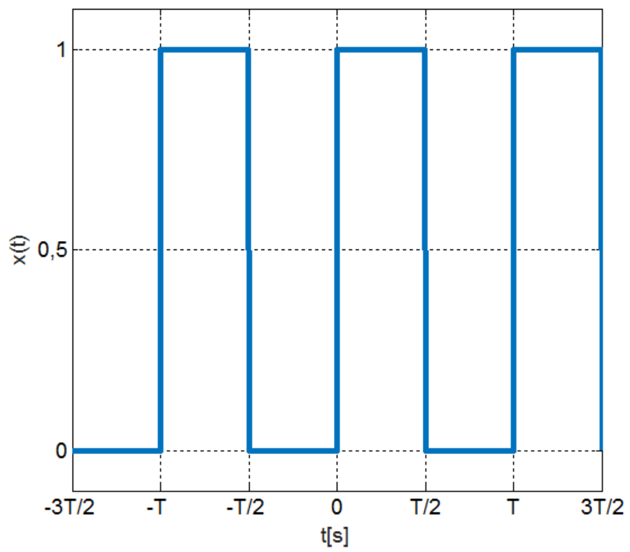


Figure 3 - Signal carré de fréquence $f_0 = 1/T$

Soit le signal périodique x de fréquence f_0 représenté sur la Figure 3.

On rappelle qu'un signal périodique peut s'écrire, suivant sa décomposition en série de Fourier :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi \mathrm{f_0 n t}}$$

Avec :

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt$$

$$\forall n \geq 1, \qquad a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt$$

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi f_0 n t} dt = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \; si \; n > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + jb_{-n}) \; si \; n < 0 \end{cases}$$

1. Calculer les coefficients a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Comment peut-on approximer x avec 2 sinus ? Avec 3 sinus ? Avec N sinus ?
3. En déduire les coefficients c_n.
4. En déduire la transformée de Fourier de x et en représenter le module.

Exercice 3: Propriétés de la Transformée de Fourier

1. Quelle est la transformée de Fourier de $rect$ (sans démonstration) ?

Soit le signal x défini par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = rect\left(\frac{t}{T_a}\right)$$

2. Représenter x.
3. Calculer la transformée de Fourier de x et la représenter.
4. Représenter $x(t-\tau)$ pour $\tau = 2s$ et $T_a = 5s$.
5. Calculer et représenter le module de la transformée de Fourier de $x(t-\tau)$pour $\tau = 2s$ et $T_a = 5s$.

Exercice 4: Détermination de la TF de fonctions particulières

1. Montrer que $\mathcal{F}[rect] = sinc$.

On peut démontrer que :

$$\mathcal{F}^{-1}[X] = \mathcal{F}^*[X^*]$$

2. En déduire que $\mathcal{F}[sinc] = rect$.
3. En déduire qu'avec $T_0 > 0$:

$$\mathcal{F}\left[sinc\left(\frac{t}{T_0}\right)\right](f) = T_0.rect(fT_0)$$

4. Nous avons vu en cours que $\mathcal{F}(e^{j2\pi k\frac{t}{T}}) = \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$. Démontrer cette affirmation.

Exercice 5: Calcul de Transformée de Fourier

Calculer la transformée de Fourier de la fonction x avec :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad x(t) = t^2 e^{-3t}\epsilon(t)$$

On rappelle

$$\begin{cases} \forall t > 0 & \epsilon(t) = 1 \\ \forall t < 0 & \epsilon(t) = 0 \end{cases}$$

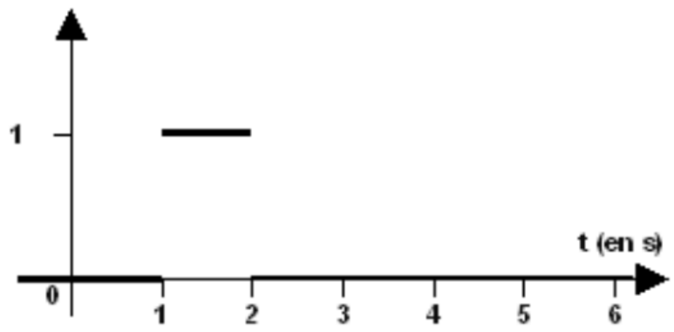
$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

2. Partie II – Signaux échantillonnés

Exercice 1:

Le signal continu ci-dessous est échantillonné avec la période d'échantillonnage T_s . Donner l'expression analytique du signal échantillonné pour :

$$T_s = 0.8s, T_s = 1.5s, T_s = 0.5s, T_s = 1s \ et \ T_s = 2s$$



Exercice 2:

On considère une fréquence d'échantillonnage fixée à 15 kHz. Représenter (sans calcul) le module du spectre des signaux suivants après échantillonnage, entre $-\frac{F_S}{2}$ et $\frac{F_S}{2}$:

1. Une composante sinusoïdale pure (sin ou cos) de fréquence 3.5 kHz d'amplitude 1, additionnée d'une composante sinusoïdale pure de fréquence 7 kHz et d'amplitude 2.
2. Un signal rectangulaire (ou porte) de durée 0.5 ms.
3. Un signal sinusoïdal à 10 kHz.

Dans les 3 cas, on précisera si le théorème de Shannon est respecté ou non.

Exercice 3:

Soit le signal $s(t)=a_0 + a_1.cos(2\pi f_1 t) + a_2.cos(2\pi.3f_1 t)$ avec f_1 = 20Hz, a_0=1, a_1=2 et a_2=1.

Le signal $s_e(t)$ est le signal $s(t)$ échantillonné avec une fréquence $F_S = 150\ Hz$.

1. Le signal $s(t)$ est-il périodique ? Si oui, de quelle période ? sinon, pourquoi ?
2. Justifier le choix de la fréquence d'échantillonnage.
3. Donner l'expression de $S(f)$ la transformée de Fourier de $s(t)$.
4. Donner l'expression de $S_e(f)$ la transformée de Fourier de $s_e(t)$.
5. Représenter sur le même graphe le module de $S(f)$ et de $S_e(f)$ entre $-F_S$ et F_S.
6. Expliquer les différences entre $S(f)$ et $S_e(f)$. Quel est l'effet de l'échantillonnage sur le spectre du signal ?
7. Tracer $S_e(f)$ dans le cas où $F_S = 100\ Hz$.

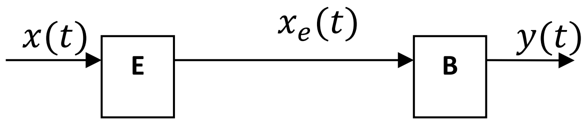
On échantillonne maintenant ($F_S = 150\ Hz$) le signal $s(t)$ simplement sur une période. On note $s_{we}(t)$ le signal résultant.

8. Donner l'expression de $S_{we}(f)$ sans faire l'application numérique.

9. Représenter *$S_{we}(f)$* sur le même graphique que précédemment.
10. Expliquer les différences entre *$S_e(f)$* et *$S_{we}(f)$*. A quoi sont-elles dues ?

Exercice 4:

On considère le système suivant :



E est un échantillonneur parfait qui produit des échantillons du signal d'entrée $x(t)$ à la fréquence d'échantillonnage F_S. Le signal $x_e(t)$ est la modélisation « idéale » dans le domaine temporel continu du signal échantillonné. *B* est un bloqueur d'ordre 0 (BOZ) : il maintient la valeur échantillonnée entre deux instants d'échantillonnage.

Soit $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$.

1. La condition de Shannon est respectée pour l'échantillonnage. Quelle est cette condition ?
2. Donner l'expression théorique de $y(t)$
3. Tracer les signaux $x(t), x_e(t)$ et $y(t)$.

Soient $X(f), X_e(f)$ et $Y(f)$ les spectres respectifs des signaux $x(t), x_e(t)$ et $y(t)$. Tracer ces 3 spectres en module en précisant les fréquences importantes.

3. Partie III – Signaux numériques et TFD

Exercice 1:

On considère de nouveau le signal $s(t)=a_0 + a_1.cos(2\pi f_1 t) + a_2.cos(2\pi.3f_1 t)$ avec f_1 = 20Hz, a_0=1, a_1=2 et a_2=1.

Le signal $s_e(t)$ est le signal $s(t)$ échantillonné avec une fréquence $F_s = 150Hz$. Les échantillons sont acquis par un ordinateur pendant une durée $T_a = 100\ ms$.

1. Donner l'expression de tous les échantillons s_k.
2. Donner l'expression de $S(f)$ la transformée de Fourier de $s(t)$.
3. Donner l'expression de $S_e(f)$ la transformée de Fourier de $s_e(t)$.
4. Représenter sur le même graphe le module de $S(f)$ et de $S_e(f)$ entre $-F_s$ etF_s.
5. Représenter la TFD S_n.

Toujours en échantillonnant à la même fréquence ($150\ Hz$), la durée d'acquisition est cette fois de $T_a = 110\ ms$.

6. Reprendre la question 5.

Exercice 2: Zero padding

On cherche à estimer la transformée de Fourier d'un signal $x(t) = cos(2\pi f_0 t)$, avec $f_0 = 1\ Hz$. On a vu en cours qu'on ne pouvait pas la calculer de manière exacte à partir d'un nombre fini de points.

On fait l'acquisition de x sur une durée T_a. On note ce signal x_1.

1. Quelle est la transformée de Fourier de x ?
2. Représenter le signal x_1.
3. Quelle est la transformée de Fourier théorique de x_1 dont on fait l'acquisition ? Tracer sur un graphique le module de cette transformée de Fourier.

Pour calculer numériquement des points de cette transformée de Fourier, on utilise la TFD, par l'intermédiaire de la FFT, sur Matlab par exemple. N échantillons de x ont été acquis tous les T_s. La durée d'acquisition est ainsi $T_a = NT_s$.

4. Rappeler la définition de la TFD.
5. Quelle est la résolution fréquentielle de la TFD (=quel est l'intervalle fréquentiel entre 2 points) ?
6. Pour $T_a = 10s$, représenter sur un même graphique le module de la transformée de Fourier théorique du signal échantillonné et les points de la TFD. Qu'en concluez-vous ?

On peut améliorer la résolution fréquentielle en utilisant une technique appelée « zero padding ». Cette méthode consiste à construire un signal $x_1{}'(k)$ qui vaut $x_1(k)$ sur ses N premiers échantillons, et 0 sur les suivants (L échantillons en tout), puis d'en calculer sa TFD.

On notera L le nombre d'éléments de $x_1'(k)$.

7. Sur un même graphe, représenter $x_1(k)$ et $x_1{}'(k)$.
8. Montrer que la TFD de $x'_1(k)$ est le calcul de points de la transformée de Fourier de $x_1(t)$.
9. Quelle est la résolution fréquentielle de la TFD de $x_1{}'(k)$?

10. Pour $L = 2N$, représenter sur le graphique de la question 6 les points de cette nouvelle TFD. Qu'en concluez-vous ?

Dans Matlab, vous avez la possibilité de faire du zero padding avec $fft(x, L)$. On rappelle que la FFT est un algorithme de calcul de la TFD optimisé pour un nombre étant une puissance de 2.

11. Si on veut une résolution fréquentielle d'au moins $1\ mHz$, avec $T_s = 1\ ms$, quelle valeur choisiriez-vous pour L ?

Exercice 3: Equation aux différences

Le comportement d'un système linéaire invariant (SLIT) est caractérisé par l'équation aux différences :

$$y_n - 1.2y_{n-1} + 0.3y_{n-2} = 2.10^{-3}x_n + 0.5x_{n-1}$$

1. Calculer la fonction de transfert $H(z)$ du système.
2. Calculer les 5 premiers éléments de la réponse impulsionnelle h_k du système.
3. Calculer la réponse fréquentielle du système.