

# Electromagnétisme - Notes de Cours

Hervé Tortel

# Table des matières

<b>1 Rappel mathématiques - Analyse vectorielle :</b>	<b>5</b>
1.1 Repérage d'un point dans l'espace : . . . . .	5
1.1.1 Système de coordonnées cartésiennes . . . . .	5
1.1.2 Système de coordonnées cylindriques . . . . .	5
1.1.3 Système de coordonnées sphériques . . . . .	8
1.2 Champs scalaires et champs de vecteurs : . . . . .	10
1.2.1 Champs scalaires . . . . .	10
1.2.2 Champs vectoriels . . . . .	10
1.2.3 représentation graphique d'un champ de vecteurs : . . . . .	11
1.2.4 Utilisation des champs de vecteurs . . . . .	11
1.3 Opérateurs gradient, divergence et rotationnel : . . . . .	12
1.3.1 Opérateur gradient . . . . .	12
1.3.2 Opérateur divergence . . . . .	12
1.3.3 Opérateur rotationnel . . . . .	13
1.4 Composition d'opérateur - Opérateurs Laplacien : . . . . .	13
1.4.1 Laplacien scalaire . . . . .	13
1.4.2 Laplacien vectoriel . . . . .	13
1.5 Théorèmes d'analyse vectorielle . . . . .	14
<b>2 Electrostatique</b>	<b>17</b>
2.1 Propriétés de la charge électrique . . . . .	17
2.2 Matériaux isolants et conducteurs . . . . .	17
2.3 Distribution de charges . . . . .	18
2.4 Interaction Coulombienne - Champ électrique . . . . .	18
2.4.1 Interaction Coulombienne . . . . .	18
2.4.2 Champ électrique . . . . .	19
2.5 Théorème de Gauss . . . . .	21
2.5.1 Notion d'angle solide . . . . .	21
2.5.2 Flux du champ électrique . . . . .	21
2.6 Potentiel électrostatique . . . . .	22
2.6.1 Interprétation du potentiel électrostatique . . . . .	23
2.7 Lignes de champ et équipotentielle . . . . .	24
2.7.1 Lignes de champ . . . . .	24
2.7.2 Ligne équipotentielle . . . . .	25
2.8 Equation de Laplace et equation de Poisson . . . . .	25

2.9	Conditions aux limites vérifiées par le champ électrique en présence d'une densité superficielle de charges . . . . .	25
2.9.1	Composante normale du champ électrique . . . . .	26
2.9.2	Composante tangentielle du champ électrique . . . . .	26
2.10	Symétries et invariances - Calcul de champ et de potentiel . . . . .	27
2.10.1	Utilisation des symétries . . . . .	27
2.10.2	Utilisation des invariances . . . . .	27
2.10.3	Calcul de champs et de potentiel . . . . .	28
2.11	Conducteurs et condensateurs électriques à l'équilibre . . . . .	28
2.11.1	Notion de conducteur et de densité de courant . . . . .	28
2.11.2	Propriétés des conducteurs à l'équilibre . . . . .	29
2.11.3	Conducteurs en influence partielle ou totale . . . . .	30
2.11.4	Condensateur . . . . .	30
2.12	Energie electrostatique . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Loi de conservation de la charge</b>	<b>33</b>
3.1	Densité de courant . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Magnétostatique</b>	<b>35</b>
4.1	Forces de Laplace - Induction magnétique . . . . .	35
4.1.1	Loi de Biot et Savart . . . . .	37
4.2	Lois fondamentales de la magnétostatique . . . . .	37
4.2.1	Principe de conservation du flux de l'induction magnétique . . . . .	37
4.2.2	Circulation du champ électrique - Théorème d'Ampère . . . . .	38
4.3	Lignes d'induction magnétique . . . . .	40
4.4	Conditions aux limites vérifiées par l'induction magnétique en présence d'une densité superficielle de courant . . . . .	41
4.4.1	Composante normale de l'induction magnétique . . . . .	41
4.4.2	Composante tangentielle de l'induction magnétique . . . . .	41
4.5	Potentiel vecteur . . . . .	42
4.5.1	Equation vérifiée par le potentiel vecteur . . . . .	42
4.5.2	Solution élémentaire du potentiel vecteur . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Induction électromagnétique</b>	<b>43</b>
5.1	Loi de Faraday et Phénomène d'induction . . . . .	43
5.1.1	Circuit mobile dans une induction magnétostatique . . . . .	43
5.1.2	Circuit immobile dans une induction magnétique variable . . . . .	44
5.2	Forme locale de la loi de Faraday . . . . .	45
5.3	Energie magnétostatique . . . . .	46
5.4	Inductance des circuits électriques . . . . .	47
5.4.1	Coefficient d'inductance mutuelle entre deux circuits . . . . .	47
5.4.2	Coefficient d'inductance propre . . . . .	48
5.4.3	Inductance mutuelle et propre de circuits réels . . . . .	49
5.4.4	Inductance d'un ensemble de deux circuits couplés . . . . .	49
5.4.5	Transformateurs . . . . .	50

<b>6 Equations de Maxwell dans le vide</b>	<b>53</b>
6.1 Théoème d'Ampère et loi de conservation de la charge en régime variable . . . . .	53
6.2 Modification du Théorème d'Ampère . . . . .	53
<b>7 Solution générale des équations de Maxwell : équation de propagation et potentiels retardés</b>	<b>55</b>
7.1 Equation de propagation vérifiée par <b>E</b> . . . . .	55
7.2 Equation de propagation vérifiée par <b>B</b> . . . . .	55
7.3 Passage des champs aux potentiels . . . . .	56
7.3.1 Equations liant les potentiels aux sources . . . . .	56
7.3.2 Jauge de Lorentz . . . . .	57
7.4 Solutions de l'équation non homogène - Potentiels retardés . . . . .	58
7.4.1 Les potentiels retardés : . . . . .	59
<b>8 Ondes planes dans le vide</b>	<b>61</b>
8.1 propagation des ondes planes : . . . . .	61
8.1.1 Propriétés des champs : . . . . .	61
8.1.2 Recherche d'une solution : . . . . .	63
<b>9 Equations de Maxwell en régime harmonique :</b>	<b>65</b>
9.1 Réécriture des équations de Maxwell : . . . . .	65
9.2 Retour sur les ondes planes en régime harmonique . . . . .	67
9.3 Relations entre <b>k</b> , $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ . . . . .	68
9.4 Polarisation des ondes planes : . . . . .	69
9.4.1 Cas où $\varphi = \pi$ ou $0$ . . . . .	70
9.4.2 Cas où $\varphi$ est différent de $0$ ou $\pi$ . . . . .	70
9.4.3 Cas où $E_{mx} = E_{my}$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . . . . .	71
<b>10 Champ électromagnétique créé par un dipôle infinitésimal</b>	<b>73</b>
10.1 Potentiels vecteur et scalaire produit par un dipôle oscillant . . . . .	73
10.1.1 Calcul du potentiel vecteur . . . . .	73
10.1.2 Calcul du potentiel scalaire . . . . .	74
10.2 Calcul des champs électromagnétiques rayonnés . . . . .	75
10.2.1 Champ rayonné à grande distance . . . . .	75
<b>11 Energie électromagnétique dans le vide</b>	<b>77</b>
11.1 Loi de conservation : . . . . .	77
11.1.1 Puissance fournie aux charges . . . . .	77
11.1.2 Théorème de Poynting . . . . .	77
11.1.3 Signification Physique . . . . .	78
11.2 Energie associée à une onde plane . . . . .	78
11.2.1 Théorème de Poynting . . . . .	78
11.2.2 Flux d'énergie associé à une onde plane . . . . .	79
11.3 Vecteur de Poynting en régime harmonique . . . . .	79

<b>12 Les diélectriques</b>	<b>81</b>
12.1 Champ créé par un milieu diélectrique polarisé . . . . .	82
12.2 Induction électrique . . . . .	84
12.3 Susceptibilité électrique . . . . .	85
<b>13 Les milieux magnétiques</b>	<b>87</b>
13.1 Induction créé par un milieu aimanté . . . . .	88
13.2 Le vecteur champ magnétique <b>H</b> . . . . .	88
13.3 Perméabilité relative . . . . .	89
<b>14 Equations de Maxwell dans les milieux</b>	<b>91</b>
14.1 Equations de Maxwell et relations constitutives . . . . .	91
14.2 Retour sur les conditions aux limites entre deux milieux . . . . .	92
14.3 Milieux matériels et régime harmonique . . . . .	92
14.3.1 Relations constitutives . . . . .	93
14.3.2 Conséquences de la causalité - Relations de Kramers-Kronig . . . . .	94
<b>15 Réflexion et Réfraction d'une onde plane en régime harmonique</b>	<b>95</b>
15.1 Propagation d'un onde plane dans un milieu linéaire homogène et isotrope . . . . .	95
15.2 Réflexion, Réfraction . . . . .	96
15.3 Découplage en ondes TE et TM d'un champ électromagnétique . . . . .	97
15.4 Interaction d'une onde plane avec un dioptre en polarisation TE . . . . .	97
15.5 Interaction d'une onde plane avec un dioptre en polarisation TM . . . . .	102

# Chapitre 1

## Rappel mathématiques - Analyse vectorielle :

Dans ce chapitre, nous allons aborder les principaux points de mathématiques et notamment ceux dont nous aurons besoin au cours de cet enseignement

### 1.1 Repérage d'un point dans l'espace :

#### 1.1.1 Système de coordonnées cartésiennes

Un point  $M$  de  $\mathbb{R}^3$  peut être repéré dans l'espace par ses trois coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  dans un système d'axe orthonormé.

Ainsi un point  $M(x, y, z)$  est relié aux 3 composantes du vecteur  $\mathbf{r}$  :

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$$

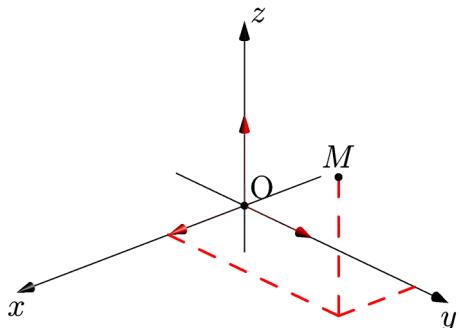


FIGURE 1.1 – Représentation d'un point dans un système de coordonnées cartésiennes

#### 1.1.2 Système de coordonnées cylindriques

Pour tenir compte des symétries éventuelles du problème il peut être avantageux d'utiliser des systèmes de coordonnées curvilignes. Ainsi dans un système de coordonnées cylindriques un point  $M$  de l'espace est repéré comme un point du cylindre droit à base circulaire dont l'axe de révolution est confondu avec l'axe  $Oz$  du repère cartésien.

Le point  $M$  est repéré par

- le rayon  $\rho$  du cylindre sur lequel il s'appuie.
- la distance  $z$  du point  $M$  au plan de référence ( $xOy$ ).
- $\phi$  l'angle correspondant à  $(Ox, OM')$  où  $M'$  est la projection sur ( $xOy$ ) de  $M$ .

Le point  $M$  dans un repère cylindrique aura donc comme coordonnées  $(\rho, \phi, z)$ .

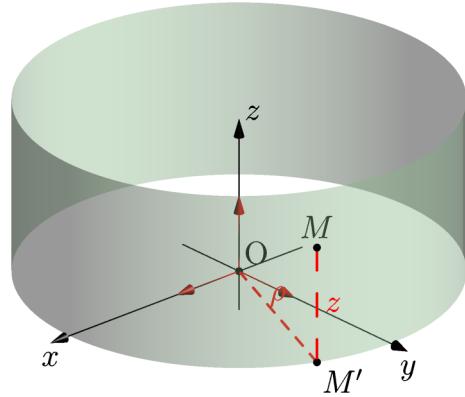


FIGURE 1.2 – Représentation d'un point dans un système de coordonnées cylindriques

On peut facilement trouver le changement permettant de passer des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos(\phi) \\ y &= \rho \sin(\phi) \\ z &= z \end{aligned}$$

Si on veut maintenant repérer un vecteur dont le point d'application est le point  $M(\rho, \phi, z)$ , on va "attacher" à ce point un système de coordonnées local  $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$ . Attention ce repère est local car il n'est pas identique pour tous les points de l'espace.

- $\mathbf{e}_\rho$  est un vecteur unitaire parallèle à  $\mathbf{OM}'$ .
- $\mathbf{e}_\phi$  est un vecteur unitaire dirigé dans le sens des  $\phi$  croissants perpendiculaire à  $\mathbf{e}_\rho$  et dans un plan parallèle au plan ( $xOy$ ).
- $\mathbf{e}_z$  est dans le sens des  $z$  croissants et est "identique" au  $\mathbf{e}_z$  du système de coordonnées cartésiennes.

### Changement de repère Cartésien - Cylindrique

On a :

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad (1.1)$$

$$= \rho \cos(\phi)\mathbf{e}_x + \rho \sin(\phi)\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad (1.2)$$

$$(1.3)$$

De plus :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\rho &= \frac{\frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \rho}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \rho} \right\|} \\ \mathbf{e}_\phi &= \frac{\frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \phi}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \phi} \right\|} \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

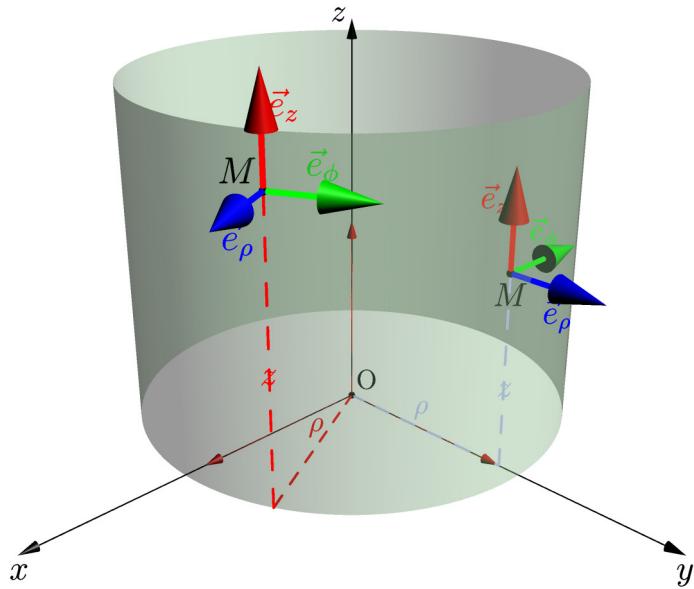


FIGURE 1.3 – Représentation d'un repère cylindrique pour différentes positions du point d'observation

D'où en appliquant les formules de dérivation à l'équation 1.1, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\rho &= \cos(\phi)\mathbf{e}_x + \rho \sin(\phi)\mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\phi &= -\sin(\phi)\mathbf{e}_x + \cos(\phi)\mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

On peut donc passer d'un repère cartésien à un repère cylindrique par le changement suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{T}} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix}$$

Les deux système de coordonnées sont orthonormés, on a donc :

$$\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{T}^t = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On se rend compte ainsi aisément que :

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\rho &= \mathbf{e}_x \text{ pour } \phi = 0 \\ \mathbf{e}_\rho &= \mathbf{e}_y \text{ pour } \phi = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

### 1.1.3 Système de coordonnées sphériques

Le point  $M$  dans un système de coordonnées sphériques aura donc comme coordonnées :

- $r$  Rayon de la sphère centré sur l'origine du repère et à laquelle le point  $M$  appartient.
- $\theta$  qui correspond à l' angle  $(Oz, \mathbf{OM})$
- $\varphi$  qui correspond à l'angle  $(Ox, \mathbf{OM}')$  où  $M'$  est la projection de  $M$  dans le plan  $(xOy)$ .

Attention ici  $\theta \in [0, \pi]$  et  $\varphi \in [0, 2\pi]$

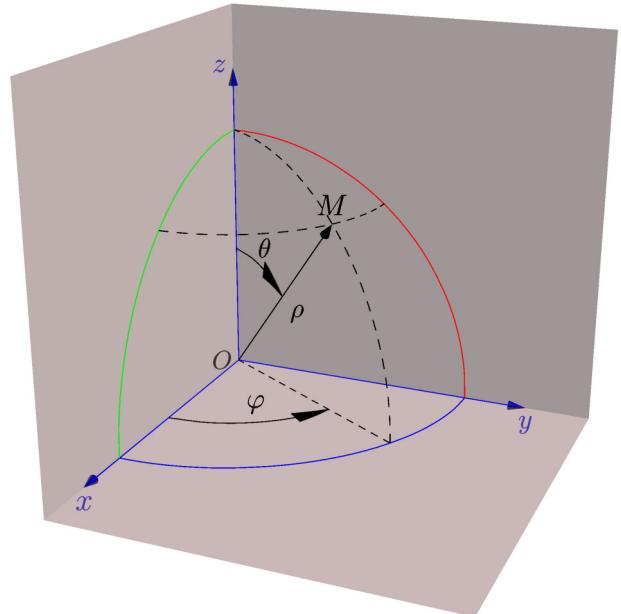


FIGURE 1.4 – Représentation d'un point dans un système de coordonnées sphériques

### Changement de repère cartésien - sphérique

Par projection sur le système de coordonnées cartésiennes, on trouve facilement les équations permettant de passer des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ y &= \rho \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ z &= \rho \cos(\theta) \end{aligned}$$

Si on veut maintenant repérer un vecteur dont le point d'application est le point  $M(\rho, \theta, \varphi)$  de même qu'en coordonnées cylindriques on va attacher à ce point un repère orthonormé local  $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$

- $\mathbf{e}_\rho$  est un vecteur unitaire colinéaire à  $\mathbf{OM}$ .
- $\mathbf{e}_\theta$  est un vecteur inclus dans le plan  $(OMM')$  dirigé suivant les  $\theta$  croissants.
- $\mathbf{e}_\varphi$  est un vecteur contenu dans le plan parallèle au plan  $(xOy)$  dirigé dans le sens des  $\varphi$  croissants et orthogonal au deux premiers vecteurs.

### Changement de repère Cartésien - Sphérique

On a :

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z \quad (1.4)$$

$$= \rho \sin(\theta) \cos(\varphi)\mathbf{e}_\rho + \rho \sin(\theta) \sin(\varphi)\mathbf{e}_\theta + \rho \cos(\theta)\mathbf{e}_\varphi \quad (1.5)$$

et de la même manière

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\rho &= \frac{\frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \rho}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \rho} \right\|} \\ \mathbf{e}_\theta &= \frac{\frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \theta}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \theta} \right\|} \\ \mathbf{e}_\varphi &= \frac{\frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \varphi}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial \varphi} \right\|}\end{aligned}$$

On peut donc passer d'un repère cartésien à un repère sphérique par le changement suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\varphi \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) & \sin(\theta) \sin(\varphi) & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) \cos(\varphi) & \cos(\theta) \sin(\varphi) & -\sin(\theta) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{T}} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix}$$

Les deux systèmes de coordonnées sont orthonormés, on a donc :

$$\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{T}^t = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) & \cos(\theta) \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & \cos(\theta) \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

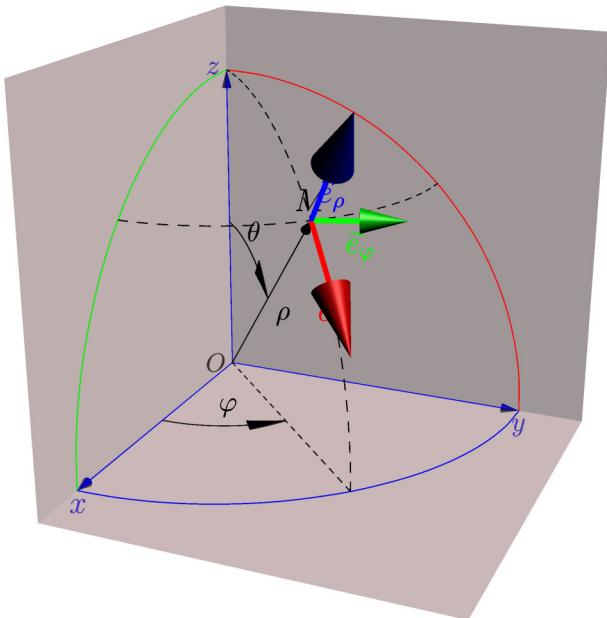


FIGURE 1.5 – Représentation du repère sphérique attaché au point  $M$

## 1.2 Champs scalaires et champs de vecteurs :

### 1.2.1 Champs scalaires

Un champ scalaire peut être vu comme une application de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  qui à un point  $M(x, y, z)$  dans un repère cartésien fait correspondre une grandeur physique qui peut être représenté par un scalaire (Tension, Potentiel, ...). /

$$M(x, y, z) \longrightarrow F(x, y, z)$$

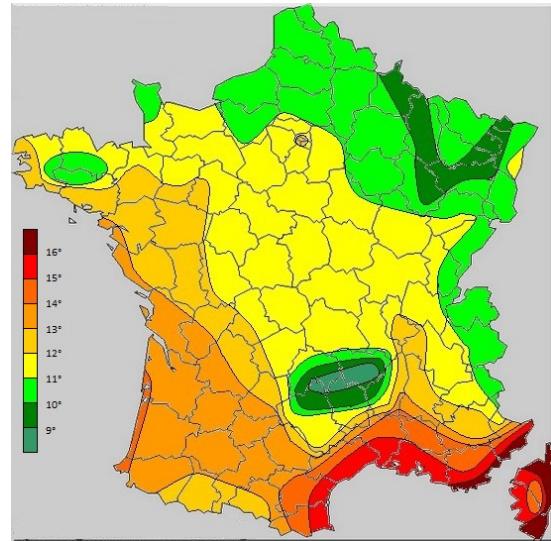


FIGURE 1.6 – Exemple de champ scalaire : Carte des températures moyenne en France

### 1.2.2 Champs vectoriels

Un champ vectoriel peut être vu d'une manière générale comme une application de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  qui à un point  $M(x, y, z)$  de l'espace fait correspondre un vecteur dont les composantes vont dépendre du point où elles sont évaluées. Ainsi, dans un repère cartésien orthonormé :

$$M(x, y, z) \longrightarrow \mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{e}_x + Q(x, y, z)\mathbf{e}_y + R(x, y, z)\mathbf{e}_z \quad (1.6)$$



FIGURE 1.7 – Exemple de champ scalaire : Carte des principaux vents en France

### 1.2.3 représentation graphique d'un champ de vecteurs :

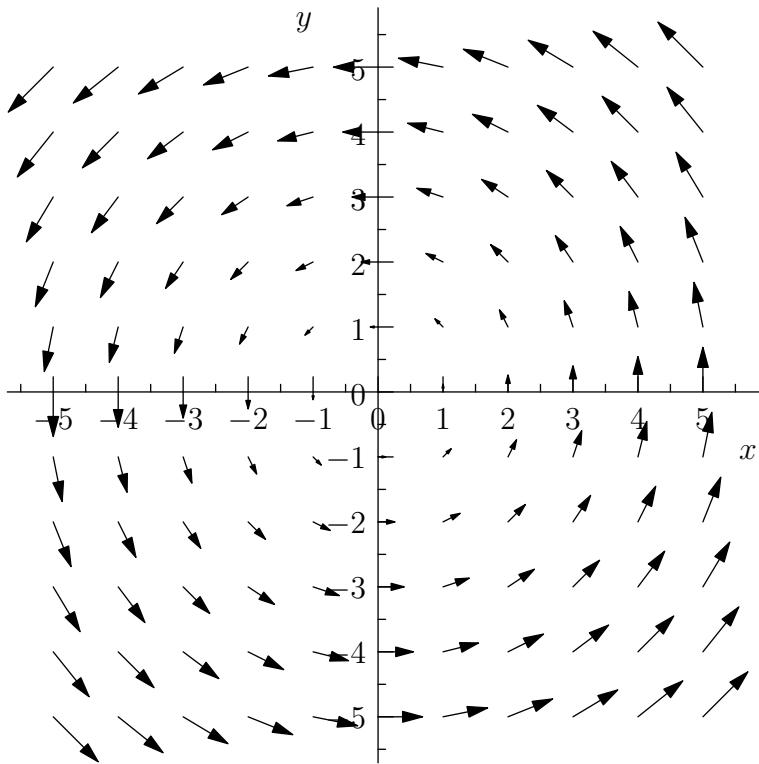


FIGURE 1.8 – Représentation du champ d'un champ de vecteur

### 1.2.4 Utilisation des champs de vecteurs

Les champs de vecteurs sont fréquemment utilisés dans le calcul de grandeurs scalaires.

#### Calcul d'intégrales de chemin

On considère un champ de vecteurs  $\mathbf{F}(M)$ , on appelle la circulation de  $\mathbf{F}$  le long du chemin  $\mathcal{C}$ , l'intégrale suivante :



#### Calcul d'une intégrale de chemin

$$\mathcal{I}_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(M) \cdot d\mathbf{l}$$

où  $M$  est un point courant au chemin  $\mathcal{C}$  considéré et  $d\mathbf{l}$  est un vecteur tangent à  $\mathcal{C}$  au point  $M$ .

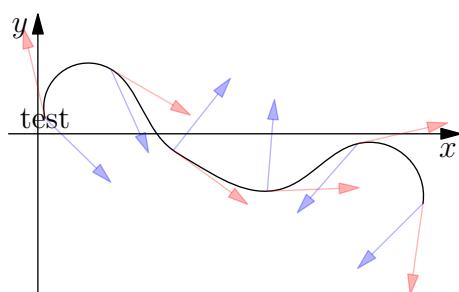


FIGURE 1.9 – Représentation d'un champ de vecteur de vecteur en bleu et de l'élément  $d\mathbf{l}$  (en rouge) le long du chemin où il est intégré

### Calcul de flux à travers une surface

On considère un champ de vecteurs  $\mathbf{F}(M)$ , on considère une surface  $\mathcal{S}$  fermée suffisamment régulière afin que l'on puisse définir une normale courante en chaque point de la surface. On appelle flux de  $\mathbf{F}$  à travers  $\mathcal{S}$  l'intégrale suivante :



#### Calcul d'un flux

$$\phi_{\mathcal{S}} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{F}(M) \cdot \mathbf{n} \, ds$$

## 1.3 Opérateurs gradient, divergence et rotationnel :

### 1.3.1 Opérateur gradient

Soit  $f(M)$  un champ scalaire, si  $df$  est la différentielle totale de  $f$  par rapport à une variation  $dM$  alors le gradient peut être défini de la manière suivante

$$df = \mathbf{grad}f \cdot dM$$

Cette définition du gradient est "intrinsèque", c'est à dire qu'elle donnera le même vecteur dans tous les référentiels orthonormés. Ses composantes vont changer avec le référentiel mais le vecteur ne changera pas.

Ainsi dans un système de coordonnées cartésiennes on obtient à partir de la définition 1.3.1 :



#### Expression du gradient

$$\mathbf{grad}f[M] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Toujours à partir de la définition intrinsèque on peut trouver l'expression des composantes du gradient en coordonnées cylindriques et sphériques :

En coordonnées sphériques :

$$\mathbf{grad}f[M] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

En coordonnées cylindriques :

$$\mathbf{grad}f[M] = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \rho} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

### 1.3.2 Opérateur divergence

On considère un champ de vecteurs  $\mathbf{F}(M)$ . Dans un système de coordonnées cartésiennes on définit le champ scalaire  $\text{div}\mathbf{F}[M]$  associé à  $\mathbf{F}(M)$  par l'application suivante :



#### Expression de la divergence

$$\text{div}\mathbf{F}[M] = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Dans les deux autres systèmes de coordonnées on obtiendra :

En coordonnées sphériques :

$$\text{div}\mathbf{F}[M] = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$$

En coordonnées cylindriques :

$$\text{div}\mathbf{F}[M] = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

### 1.3.3 Opérateur rotationnel

On considère un champ de vecteurs  $\mathbf{F}(M)$  dans un système de coordonnées cartésiennes. On associe à ce vecteur un vecteur rotationnel dans le même système de coordonnées de la manière suivante :



#### Expression du rotationnel

$$\text{rotF}[M] = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Un moyen mnémotechnique pour retrouver les composantes de l'opérateur rotationnel dans un système de coordonnées cartésiennes consiste à calculer le déterminant suivant



#### Apprendre à retrouver l'expression du rotationnel

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x - \left( -\frac{\partial F_x}{\partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z$$

Attention au signe '-' qui apparaît suivant la composante  $\mathbf{e}_y$  lors du développement du déterminant.

## 1.4 Composition d'opérateur - Opérateurs Laplacien :

### 1.4.1 Laplacien scalaire

On considère un champ scalaire  $f$ , le laplacien scalaire de  $f$  est égal à :



#### Laplacien de $f$

$$\Delta f[M] = \text{div grad } f[M]$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes une simple combinaison d'opérateurs donne :



#### Expression dans un système de coordonnées cartésiennes

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

### 1.4.2 Laplacien vectoriel

On considère un champ vectoriel  $\mathbf{F}$  le laplacien vectoriel de  $\mathbf{F}$  est un champ de vecteurs défini par :



#### Laplacien vectoriel

$$\Delta \mathbf{F}[M] = \text{grad divF}[M] - \text{rot rotF}[M]$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes les composantes du laplacien vectoriel peuvent se mettre sous la forme :

$$\Delta \mathbf{F}[M] = \begin{pmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_y \\ \Delta F_z \end{pmatrix}$$

Cela correspond à l'application du laplacien scalaire sur chacune des composantes  $\mathbf{F}$ . Attention ceci n'est n'est vrai que dans un système de coordonnées cartésiennes.

## 1.5 Théorèmes d'analyse vectorielle

### Théorème de la divergence ou de Green-Ostrogradski

On considère un volume  $\mathcal{V}$  et une surface  $\mathcal{S}$  sous-tendu par  $\mathcal{V}$  le théorème de Green-Ostrogradski relie le flux d'un champ de vecteurs à travers  $\mathcal{S}$  avec la divergence de ce champ de vecteurs sur le volume  $\mathcal{V}$ .



#### Théorème de Green-Ostrogradski

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} d\tau$$

### Théorème de Stokes

On considère un contour fermé  $\mathcal{C}$  orienté et une surface  $S$  orienté venant s'appuyer sur  $\mathcal{C}$ . Le théorème de Stokes relie la circulation d'un champ de vecteurs  $\mathbf{F}$  sur  $\mathcal{C}$  au flux du rotationnel de cette même grandeur sur  $S$ .



#### Théorème de Stokes

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \operatorname{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} ds$$

### Divergence d'un rotationnel



#### Divergence d'un rotationnel

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F}[M] = 0$$

Si la divergence du rotationnel d'un champ de vecteur est identiquement nulle, on dit que ce champ de vecteur est à flux conservatif.

Réciproquement si  $\mathbf{F}$  est un champ à divergence nulle on peut l'exprimer comme le rotationnel d'un autre champ de vecteurs.



$$\operatorname{div} \mathbf{F}[M] = 0 \Leftrightarrow \mathbf{F}[M] = \operatorname{rot} \mathbf{A}[M]$$

### Rotationnel d'un gradient

Le rotationnel d'un gradient est identiquement nul. Réciproquement si le rotationnel d'un champ de vecteur est nul ce champ de vecteur peut être exprimé comme le gradient d'une fonction scalaire.



### Rotationnel d'un gradient

$$\text{rot grad} f[M] = \mathbf{0}$$

$$\text{rot F}[M] = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{F}[M] = \text{grad} f[M]$$



# Chapitre 2

## Electrostatique

On va voir dans ce chapitre les résultats essentiels obtenus en électrostatique.

On ne considérera donc que des charges au repos ou immobiles les unes par rapport aux autres.

### 2.1 Propriétés de la charge électrique

- La charge électrique peut être comptabilisée de deux manières : positive ou négative.
- Elle sera comptée négativement si des charges sont ajoutées et positivement si des charges sont enlevées.
- La charge électrique est une grandeur conservative (on ne peut pas créer *ex-nihilo* des charges électriques).
- La charge électrique est quantifiée et toute charge électrique est un multiple de la charge élémentaire d'un électron.
- La charge élémentaire d'un électron est comptée négativement par convention.



#### Charge élémentaire d'un électron

On a :

$$q_e = -1.6021 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Le Coulomb dans le système international vaut :

$$1\text{C} = 1\text{As}$$

Remarque Les atomes sont électriquement neutres, la matière est donc globalement neutre.

### 2.2 Matériaux isolants et conducteurs

Globalement la matière est électriquement neutre, ainsi l'électrisation d'un matériau correspond au déplacement de charges d'un matériau vers un autre. C'est cet excès ou ce manque de charges qui est responsable des phénomènes électrostatique.

Un matériau est dit conducteur parfait si les charges non compensées peuvent se déplacer librement à l'intérieur du matériau.

Un matériau sera un isolant parfait si les charges non compensées ne peuvent pas se déplacer à l'intérieur du matériau.

Les matériaux réels se situent entre ces deux limites et la plus ou moins bonne conductivité du matériau va refléter la facilité de déplacement des porteurs excédentaires à l'intérieur de celui-ci.

## 2.3 Distribution de charges

Bien que la quantité de charges soit quantifiée il est, à l'échelle macroscopique, impossible de les comptabiliser une par une dans des expériences de la vie courante.

Ainsi pour caractériser des systèmes macroscopiques on va utiliser la notion de densité de charges. Cette grandeur représente simplement une quantité de charges par unité de volume d'aire ou de longueur.

Type de densité	Expression	Unité
Volumique	$\rho = \frac{dq}{d\tau}$	Cm <sup>-3</sup>
Surfacique	$\sigma = \frac{dq}{ds}$	Cm <sup>-2</sup>
Linéïque	$\lambda = \frac{dq}{dl}$	Cm <sup>-1</sup>

Pour chacun des cas considérés, la grandeur mesurable qui est le nombre ou la quantité de charges totale présente sera déduite des différentes densités de la manière suivante :

Type de densité	Expression de la quantité de charges	Unité
Volumique	$\iiint_V \rho d\tau$	C
Surfacique	$\iint_S \sigma ds$	C
Linéïque	$\int_C \lambda dl$	C

## 2.4 Interaction Coulombienne - Champ électrique

### 2.4.1 Interaction Coulombienne

Charles de Coulomb établit en 1785 que la force subie par une charge électrique  $q_B$  et créée par une charge  $q_A$  est égale à :



#### Loi de Coulomb

On a :

$$\mathbf{F}_{A \rightarrow B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B \mathbf{u}_{AB}}{\|\mathbf{AB}\|^2}$$

单位方向

Réciproquement et afin de satisfaire au principe de l'action et de la réaction on aura :

$$\mathbf{F}_{B \rightarrow A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B \mathbf{u}_{BA}}{\|\mathbf{AB}\|^2} = -\mathbf{F}_{A \rightarrow B}$$

- Cette force agit selon l'axe défini par la droite passant par les deux points décrivant la position de la charge.
- Elle est proportionnelle à chacune des charges.
- Elle est inversement proportionnelle au carré de la distance qui sépare les deux charges.

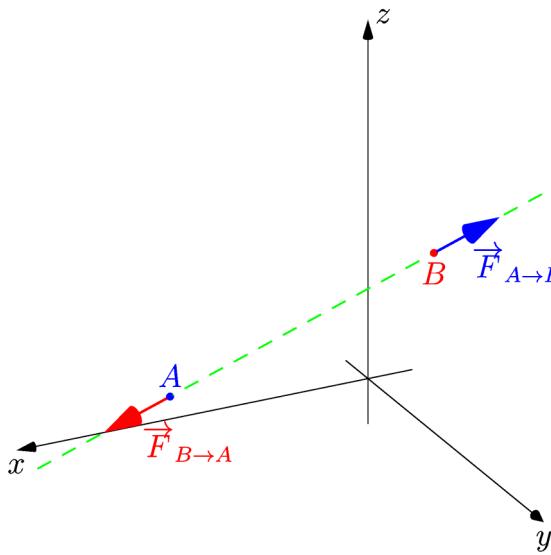


FIGURE 2.1 – Illustration de la force de Lorentz pour deux charges de signes identiques

$\varepsilon_0$  est une constante universelle qui s'appelle la permittivité du vide et dans le système international sa valeur numérique vaut :



### Valeur de $\varepsilon_0$

On a :

$$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \approx \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \quad [\text{C/Nm}^2] \text{ ou } [\text{F/m}]$$

On considère un système de  $N$  charges électriques ponctuelles dont la position dans l'espace est repérée par un ensemble de vecteurs  $\{\mathbf{r}_i\}$ , l'expérience montre que la force électrostatique  $\mathbf{F}_i$  subie par la charge  $q_i$  est égale à la résultante des forces électrostatiques  $\mathbf{F}_{ij}$  que subirait isolément la charge  $q_i$  en présence de chacune des autres charges  $q_j$  pour  $i \neq j$ . Autrement dit :

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ij}$$

Cette propriété est très importante, elle exprime le fait que dans le vide deux charges électriques agissent l'une sur l'autre d'une manière qui est indépendante de la présence éventuelle d'autres charges électriques.

## 2.4.2 Champ électrique

Le champ électrique créé par une particule chargée  $q_i$  située en  $\mathbf{r}_i$  et mesuré au point  $M$  peut être vu comme la force de Lorentz créée par  $q_i$  et agissant au point  $M$  sur une charge test ou d'épreuve unitaire. En d'autres termes :



### Expression du champ électrique

On a :

$$\mathbf{F}_{A \rightarrow M} = q_M \mathbf{E}_A[M] \quad \text{D'où} \quad \mathbf{E}_A[M] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_A \mathbf{u}_{AM}}{\|\mathbf{AM}\|^2}$$

De la linéarité de la force de Coulomb par rapport à la charge on en déduit la linéarité du champ

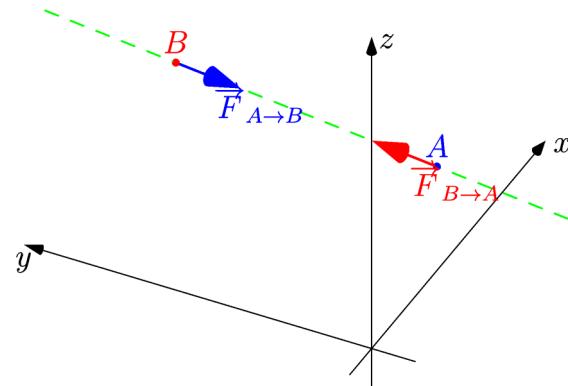


FIGURE 2.2 – Illustration de la force de Lorentz pour deux charges de signes contraires

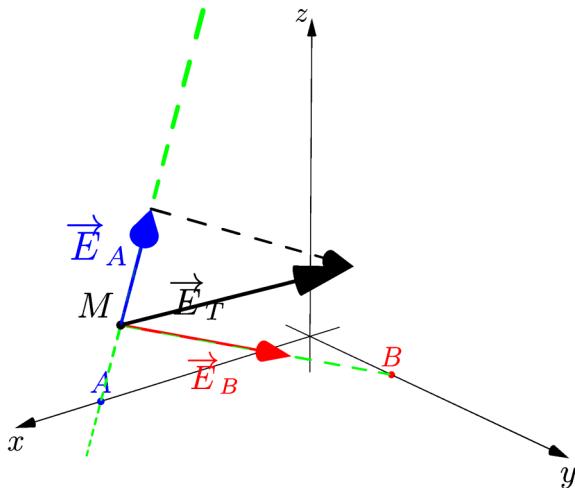


FIGURE 2.3 – Exemple d'additivité du champ électrique créé par deux charges ponctuelles

électrique crée par un ensemble de charges que celui-ci soit continu ou discret. Ainsi on a :

Type de charges	Expression du champ électrique
discrète	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_{M_i} \mathbf{u}_{M_i M}}{\ \mathbf{M}_i \mathbf{M}\ ^2}$
Volumique	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(M_i) \mathbf{u}_{M_i M}}{\ \mathbf{M}_i \mathbf{M}\ ^2} d\tau$
Surfacique	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(M_i) \mathbf{u}_{M_i M}}{\ \mathbf{M}_i \mathbf{M}\ ^2} ds$
Linéïque	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(M_i) \mathbf{u}_{M_i M}}{\ \mathbf{M}_i \mathbf{M}\ ^2} dl$

Des expressions précédentes il faut remarquer que le produit "densité par élément d'intégration" est une évaluation de la quantité de charges autour du point courant d'intégration  $M_i$ .

## 2.5 Théorème de Gauss

### 2.5.1 Notion d'angle solide

L'angle solide est le rapport entre la surface (en rose) de la projection d'un objet sur une sphère et le carré du rayon de celle-ci. Ici, l'objet dont est mesuré l'angle solide est le quadrilatère en bleu.

Pour calculer l'angle solide sous lequel on voit une portion de surface  $d\sigma$  à partir d'un point donné, on calcule la grandeur :

$$d\Omega = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{d}\sigma}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3}$$

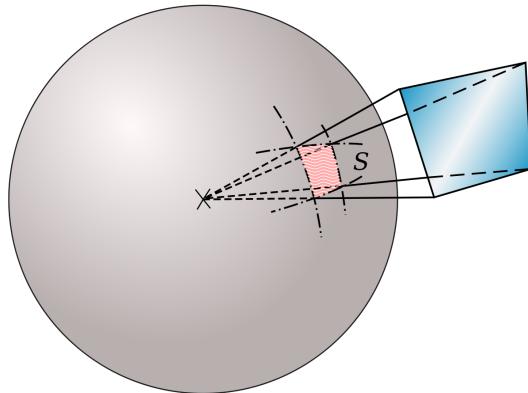


FIGURE 2.4 – Représentation d'un angle solide

On peut remarquer que la valeur de l'angle solide est positive ou négative suivant la valeur du produit scalaire au numérateur et peut être nul si l'élément de surface est orthogonal à la direction d'observation.



#### Intégration de l'angle solide

On considère une surface fermée  $\mathcal{S}$  délimitant un volume  $\mathcal{V}$ , on considère une normale extérieure  $\mathbf{n}$  à tout point de  $S$ , on montre que :

$$\int_{\mathcal{S}} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n} d\sigma}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^3} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x}_0 \notin \mathcal{V} \\ 4\pi & \text{si } \mathbf{x}_0 \in \mathcal{V} \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\nabla \frac{1}{R} = -\frac{R}{R^3} \quad \Delta \left( \frac{1}{R} \right) = -4\pi \delta$$

### 2.5.2 Flux du champ électrique

On appelle flux du champ électrique à travers une surface fermée  $\mathcal{S}$  la quantité :

$$\Phi = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} ds$$

Le vecteur  $\mathbf{n}$  est par convention la normale extérieure à la surface au point d'intégration considéré.

On considère une particule chargée placée dans le vide en un point  $O$  de l'espace. On considère une surface fermée contenant  $O$ , le flux du champ électrique à travers une portion de surface  $dS$  s'écrit :

$$d\Phi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} ds = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} ds}{r^3}$$

en identifiant par rapport à l'expression de l'angle solide  $d\Omega$  on aboutit à :

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

Ainsi le flux du champ électrique à travers  $S$  va se ramener à :

$$\Phi = \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} ds = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_S d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}$$

De part la linéarité du champ électrique vis à vis de la charge cette égalité peut se généraliser à une ensemble de charges et on obtient le théorème de Gauss :



### Théorème de Gauss

On considère une surface fermée  $\mathcal{S}$  contenant une quantité de charges  $Q_{int}$  alors le flux du champ électrique à travers  $\mathcal{S}$  est tel que :

$$\Phi = \iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} ds = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (2.2)$$

L'équation 2.2 est appelée expression intégrale du théorème de Gauss, on peut passer de cette expression à une expression locale en utilisant le théorème de Green-Ostrogradski et dans le cas où l'on est en présence d'un densité volumique de charges, on a :

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} ds = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{E} d\tau$$

et dans le cas d'une distribution volumique de charges, on a :

$$Q_{int} = \iiint_V \rho d\tau$$

On en déduit donc que :

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{E} d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho d\tau$$

Cette égalité étant vraie quel que soit  $V$  on aboutit à la forme locale du théorème de Gauss :



### Expression locale du théorème de Gauss

Le champ électrique créé par une densité volumique de charges vérifie l'expression :

$$\operatorname{div} \mathbf{E}[M] = \frac{\rho[M]}{\epsilon_0} \quad (2.3)$$

## 2.6 Potentiel électrostatique

Si on reprend l'expression du champ électrique donné par une distribution volumique de charges située dans un volume  $V$  et mesuré en un point  $M$ , on a :

$$\mathbf{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(M_i) \mathbf{u}_{M_i M}}{\|\mathbf{M}_i \mathbf{M}\|^2} d\tau$$

Or

$$\frac{\mathbf{u}_{M_i M}}{\|\mathbf{M}_i \mathbf{M}\|^2} = \frac{\mathbf{M}_i \mathbf{M}}{\|\mathbf{M}_i \mathbf{M}\|^3}$$

et on montre aisément que :

$$\frac{\mathbf{M}_i \mathbf{M}}{\|\mathbf{M}_i \mathbf{M}\|^3} = -\mathbf{grad}_M \left( \frac{1}{\|\mathbf{M}_i \mathbf{M}\|} \right)$$

Attention le gradient est pris ici par rapport aux coordonnées du point d'observation, ainsi on peut réécrire l'expression du champ électrique :

$$\mathbf{E}(M) = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{grad}_M \left( \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho(M_i)}{\|\mathbf{M}_i \mathbf{M}\|} d\tau \right)$$

Ici l'opérateur gradient a pu être sorti de l'intégrale puisque cette dernière porte sur les sources. Le rotationnel du gradient d'une fonction suffisamment régulière étant nul, il résulte qu'en électrostatique :



**En régime statique :**

$$\mathbf{rot E}[M] = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

Nous avons obtenu une expression où le champ électrique est obtenu en appliquant un opérateur gradient sur une fonction scalaire. On va définir cette fonction scalaire comme étant le potentiel scalaire  $V$  lié au champ électrique par



**Relation entre champ et potentiel électrostatique :**

$$\mathbf{E}[M] = -\mathbf{grad}V[M] \quad (2.5)$$

Ainsi le potentiel électrostatique créé par une distribution de charges et mesuré en un point  $M$  est donné par :



**Expression du potentiel électrostatique :**

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho(M_i)}{\|\mathbf{M}_i \mathbf{M}\|} d\tau \quad (2.6)$$

Les expressions du potentiel pour d'autres densités de charges se déduisent immédiatement du tableau précédent.

### 2.6.1 Interprétation du potentiel électrostatique

Le potentiel scalaire possède une interprétation physique. Considérons le travail accompli sur une charge test  $q$  pour la transporter d'un point  $A$  à un point  $B$  de l'espace en présence d'un champ électrique  $\mathbf{E}$  créé par d'autres charges immobiles.

La force agissant sur la particule est la force de Coulomb  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$  et donc le travail accompli entre  $A$  et  $B$  est :

$$W = - \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Ainsi

$$W = q \int_A^B \mathbf{grad}(V) \cdot d\mathbf{l} = q \int_A^B dV = q(V_B - V_A)$$

La grandeur  $qV$  peut être interprétée comme l'énergie potentielle de la charge test dans le champ électrique. On obtient de même que :

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_A - V_B$$

Il en découle que :

- La circulation du champ électrique entre deux points  $A$  et  $B$  ne dépend que de ces deux points et est indépendante du chemin suivi.

— Si le chemin est fermé, la circulation du champ électrique sera nulle.

NB : La loi des mailles n'est qu'une reformulation différente de la dernière remarque.

## 2.7 Lignes de champ et équipotentielle

### 2.7.1 Lignes de champ

On notera lignes du champ électrique  $\mathbf{E}$  une ligne qui accepte comme tangente en chacun de ces points  $M$ , le champ électrique en ce même point. Par convention on oriente les lignes de champs dans le même sens que celui du champ électrique.

L'intérêt de ces lignes est de pouvoir visualiser la "forme" du champ électrique dans une région donnée de l'espace.

Si on considère un segment élémentaire d'une ligne de champ en un point  $M$  puisque  $\mathbf{E}$  est tangent à cette ligne on doit avoir :

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

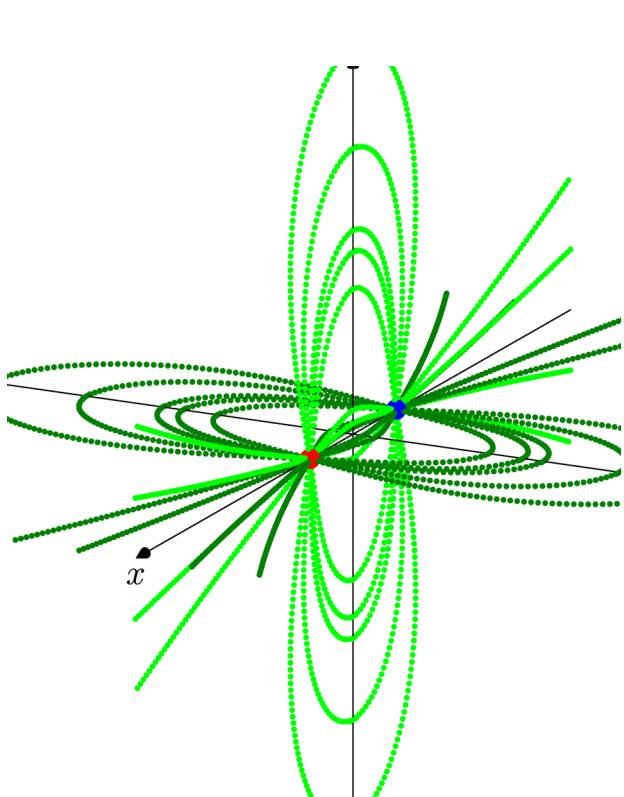


FIGURE 2.5 – Exemple de lignes de champs créées par deux charges électriques de signes opposés  $+q$  et  $-q$

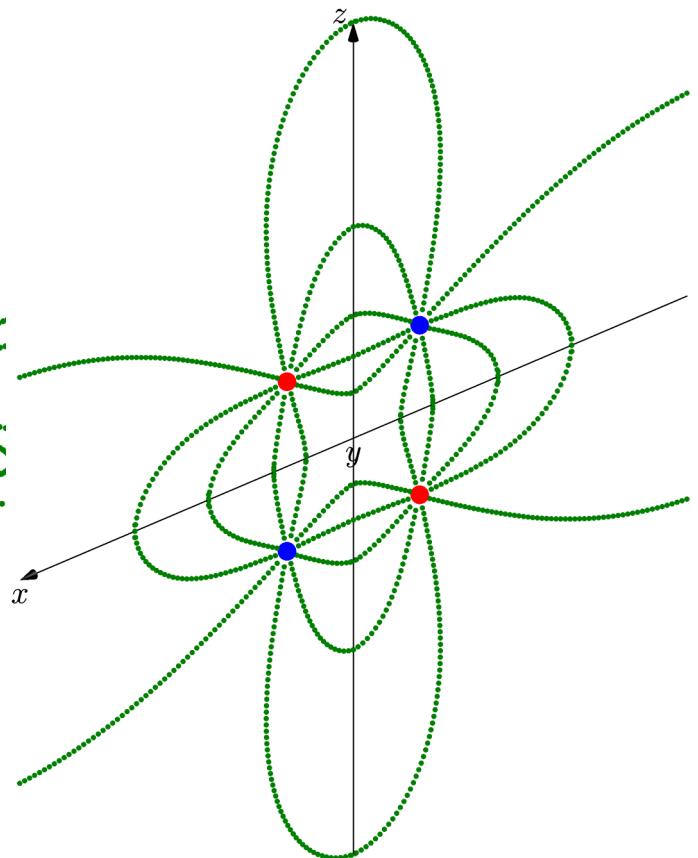


FIGURE 2.6 – Exemple de lignes de champs créées par quatre charges électriques réparties sur un carré

### 2.7.2 Ligne équipotentielle

On définit une ligne équipotentielle comme étant le lieu des points ayant même potentiel. Pour chercher les lignes équipotentielles on part de l'égalité :

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Or le long d'une ligne équipotentielle la variation de  $V$  est nulle d'où  $dV = 0$ . On en déduit donc que les lignes équipotentielles sont définies par des lignes telles que :

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Les lignes équipotentielles et les lignes de champ sont donc orthogonales entre elles en tout point.

## 2.8 Equation de Laplace et équation de Poisson

On a les relations locales suivantes :

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad}V \quad (2.8)$$

On injecte l'expression 2.8 dans l'équation 2.7 et on obtient l'équation de Poisson qui relie la densité de charges au potentiel :



**Équation de Poisson :**

$$\Delta V(M) + \frac{\rho}{\varepsilon_0}(M) = 0 \quad (2.9)$$

Il faut bien noter que cette équation est locale et qu'elle relie le potentiel électrostatique en un point à la densité volumique de charges qui crée ce potentiel en ce même point. Dans le cas où il n'y a pas de charges on aboutit à l'équation de Laplace :

$$\Delta V(M) = 0 \quad (2.10)$$

Attention cette équation ne signifie pas pour autant que  $V(M) = 0$  au point  $M$ .

## 2.9 Conditions aux limites vérifiées par le champ électrique en présence d'une densité surfacique de charges

On considère une surface  $\mathcal{S}$  placée dans le vide et portant une densité surfacique de charges  $\sigma$ . On va supposer que cette surface sépare l'espace en deux milieux 1 et 2. On se propose d'étudier comment la présence de la densité surfacique de charges va entraîner des modifications sur les composantes du champ électrique lors de la traversée entre les deux milieux.

On va supposer que l'on peut localement définir une normale que l'on va arbitrairement définir comme étant dirigée du milieu 1 vers le milieu 2. En un point  $M$  de la surface on a :

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{n}_{2 \rightarrow 1}$$

### 2.9.1 Composante normale du champ électrique

Autour du point  $M$  on va considérer un petit volume  $dV$  en forme de cylindre circulaire dont la génératrice est suivant  $\mathbf{n}$ . Le champ à l'intérieur du cylindre dans le cylindre 1 et 2 sera supposé constant et sera appelé  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{E}_2$ .

Si on applique le théorème de Gauss sur ce volume on a :

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} ds = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V dq$$

On obtient :

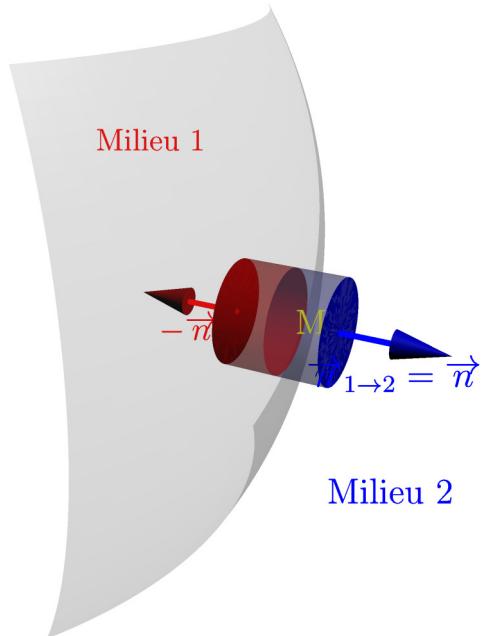
$$\Delta S \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2} + \Delta S \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n}_{2 \rightarrow 1} = \frac{\sigma \Delta S}{\varepsilon_0}$$

Du fait de la symétrie cylindrique le flux sur les "bords" des boîtes est nul. On aboutit à :



**Discontinuité de la composante normale**

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



En présence d'une densité surfacique de charges il y a discontinuité de la composante normale du champ électrique.

### 2.9.2 Composante tangentielle du champ électrique

On a vu 2.4 qu'en statique le champ électrique est irrotationnel. On a donc :

$$\iint_S \text{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} ds = 0$$

On va utiliser cette fois-ci le théorème de Stokes.

On prend une surface  $S$  s'appuyant sur un contour fermé  $\mathcal{C}$  et pour la surface considérée dans la figure adjacente. On a :

$$\iint_S \text{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = 0$$

On en déduit donc que :

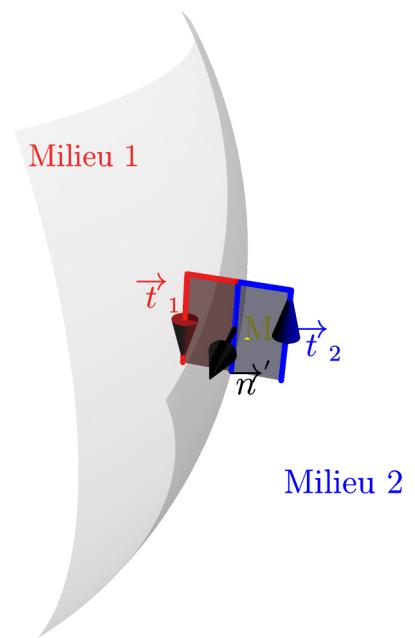
$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{t}_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{t}_2 = 0$$

La contribution sur chacun des bords s'annulant deux à deux à cause du changement de sens du vecteur tangent. On aboutit cette fois-ci à :



### Continuité de la composante tangentielle

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}$$



## 2.10 Symétries et invariances - Calcul de champ et de potentiel

### 2.10.1 Utilisation des symétries

On considère un système de charges réparties dans un volume. On va supposer que cette distribution possède un plan de symétrie  $\Pi$ . Ainsi à tout point  $P$  situé d'une part du plan il coïncide un point  $P'$  symétrique de ce dernier. Le champ créé en un point  $M$  du plan de symétrie par deux quantités de charges égales localisées en  $P$  et  $P'$  sera donc égal à :

$$\mathbf{dE}(M) = \mathbf{dE}_P(M) + \mathbf{dE}_{P'}(M)$$

Du fait du caractère radial du champ électrique, on a  $\mathbf{dE}(M)$  qui va appartenir au plan de symétrie  $\Pi$ . Donc dans le cas où une densité de charges possède un plan de symétrie, le champ électrique créé par cette distribution de charges en un point quelconque de ce plan sera contenu dans ce dernier.

Si maintenant on considère une distribution de charges possédant un plan d'antisymétrie on en déduit aisément que le champ électrique créé par cette distribution et mesurée en un point de ce plan sera orthogonal à ce dernier.

### 2.10.2 Utilisation des invariances

Soit une répartition de charges, imaginons qu'une translation d'une longueur quelconque dans une direction privilégiée transforme la répartition en elle-même, alors le champ électrique sera identique en deux points déduits l'un de l'autre par la même translation.

On en déduira donc qu'une invariance de la distribution de charges, par translation suivant l'axe  $Oz$  par exemple, entraîne que le champ ne dépende pas de  $z$ .

De la même manière si une répartition de charges est invariante par rotation d'un angle  $\theta$  autour d'un axe  $Oz$ , les composants en coordonnées cylindriques de ce champ seront alors indépendantes de  $\theta$ . Ce type de propriété peut être résumé à l'aide du principe de Curie :



### Principe de Curie

Lorsque certaines causes produisent certains effets les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits. Lorsque certains effets produits révèlent une certaine dissymétrie, cette dissymétrie doit se retrouver dans les causes qui leur ont donné naissance. La réciproque de ces deux propositions n'est pas vraie : les effets produits peuvent être plus symétriques que les causes.

## 2.10.3 Calcul de champs et de potentiel

### Par calcul direct

On peut calculer le champ et le potentiel soit directement à partir de la relation liant la charge au champ ou au potentiel, il faudra pour cela trouver le bon élément d'intégration permettant de tenir compte au mieux de la symétrie du système.

### En utilisant le théorème de Gauss

Pour cela il faudra d'abord trouver pour un point quelconque  $M$  par analyse des symétries et des invariances quelle est la direction de  $\mathbf{E}(M)$ . Il faudra ensuite trouver une surface fermée qui devra passer par le point  $M$  pour utiliser ce théorème. Il faudra pour calculer correctement le champ que :

- La surface passe par  $M$ .
- que  $\mathbf{E}(M)$  soit orthogonal à cette surface sinon on perdra tout possibilité de connaître la composante tangentielle du champ puisque son produit scalaire avec la normale sera nul.

On se rend compte en fait qu'une bonne surface de Gauss est une surface équipotentielle pour le problème considéré. Il est donc nécessaire d'avoir une idée de la forme des équipotentielles avant de pouvoir en trouver leurs expressions.

## 2.11 Conducteurs et condensateurs électriques à l'équilibre

### 2.11.1 Notion de conducteur et de densité de courant

#### Conducteur électrique

On appelle conducteur tout corps possédant à l'échelle microscopique des porteurs de charges mobiles susceptibles de se déplacer dans tout le volume du matériau.

Ex : Cu, Ag Au sont des conducteurs électriques. Les solutions aqueuses sont aussi des conducteurs électriques.

#### Densité de courant-Loi d'Ohm

Les déplacements macroscopiques de charges dans un conducteur électrique sont appelés des courants. Pour les caractériser on introduit des grandeurs comme la densité volumique de courant électrique.

On va considérer une petite zone de l'espace du conducteur où le champ de vitesses des porteurs de charges est constant et vaut  $\mathbf{v}$ . A l'intérieur de cette région on considère une surface  $dS$  orthogonale à  $\mathbf{v}$ . Pendant une unité de temps  $dt$  les porteurs de charges contenus dans le volume  $d\tau = \|\mathbf{v}\|d\tau dt$  vont

traverser  $ds$ . Ainsi la quantité de charges  $\rho d\tau$  va traverser  $ds$ . On appelle densité de courant dans le volume la charge électrique traversant  $ds$  pendant  $dt$ .



### Densité de courant

On appelle  $\mathbf{j}$  la densité volumique de courant ou bien encore la densité de courant en volume la grandeur :

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} \text{ Am}^{-2}$$

Attention on parle ici de densité volumique ou en volume mais les unités de cette grandeur sont des  $\text{Am}^{-2}$ . Dans le cas de certains conducteurs, il existe une relation linéaire entre le champ électrique présent dans le matériau et la densité de courant en volume.



### Loi d'Ohm

On dit qu'un matériau est ohmique s'il vérifie

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

$\sigma$  s'appelle la conductivité ohmique est s'exprime en  $\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$  ou  $\text{Sm}^{-1}$  (Siemens par mètre). Attention ce n'est pas une loi fondamentale mais plutôt une loi de comportement, en effet cette loi implique une relation locale entre le champ électrique appliqué et la vitesse de porteurs. Elle implique aussi une réponse instantanée du milieu (modification de  $\mathbf{v}$  en fonction de  $\mathbf{E}$ ) nous verrons plus tard que cette relation n'est vérifiée pour certains matériaux qu'en statique ou à des fréquences de variation du champ électrique peu élevées.

## 2.11.2 Propriétés des conducteurs à l'équilibre

On dit qu'un conducteur est à l'équilibre s'il ne présente pas de déplacements **macroscopiques** de charges électriques au sein de son volume ou de sa surface.

Ainsi à l'intérieur d'un conducteur ohmique à l'équilibre on a :

$$\mathbf{j}_{int} = \mathbf{0} \implies \mathbf{E}_{int} = \mathbf{0}$$

en utilisant la forme locale du théorème de Gauss 2.3, on en déduit que :

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_{int} = 0 = \frac{\rho_{int}}{\epsilon_0} \implies \rho_{int} = 0$$

La densité volumique de charges dans un conducteur ohmique à l'équilibre est nulle.

### Cage de Faraday

A l'intérieur d'un conducteur à l'équilibre on a  $\mathbf{E}_{int} = \mathbf{0}$  comme  $\mathbf{E}_{int} = -\operatorname{grad} V_{int}$  on en déduit que  $V_{int} = \text{cste.}$

Ainsi si on crée une cavité dans un conducteur le potentiel à l'intérieur de celle-ci est forcément constant et le champ électrique dans la cavité sera nul. Ce dispositif permet d'isoler électriquement certaines régions de l'espace des fortes variations du champ électrique extérieur, c'est ce que l'on appelle une cage de Faraday.

### Capacité d'un conducteur

On appelle capacité d'un conducteur à l'équilibre la grandeur :

$$C = \left| \frac{Q}{V} \right|$$

où  $Q$  est la charge totale du conducteur et  $V$  est son potentiel. La capacité s'exprime en Farad F elle traduit la faculté d'un conducteur à emmagasiner des charges électriques lorsqu'il est porté à une potentiel donné.

### 2.11.3 Conducteurs en influence partielle ou totale

On considère un conducteur  $B$  isolé ne portant pas de charges étant donc à une potentiel nul. On approche de  $B$  un corps chargé positivement  $A$  des charges négatives vont apparaître sur la partie de  $B$  qui est en regard de  $A$  tandis que des charges positives apparaîtront sur l'autre face. Il va donc y avoir modification de la répartition des charges sur la surface de  $B$  mais ce dernier étant isolé la charge totale ne sera pas modifiée.



Le phénomène d'influence ne modifie pas la charge totale d'un conducteur isolé, mais modifie uniquement la répartition de cette charge sur sa surface et donc son potentiel.

Considérons maintenant que  $B$  soit relié à un réservoir de charges (un générateur ou la terre) permettant de le maintenir à un potentiel constant. Lorsque l'on approche maintenant le corps  $A$  chargé positivement, il apparaît un mouvement de charges négatives de la terre vers  $B$ .



Lorsqu'un conducteur est maintenu à un potentiel fixe, l'approche d'un autre conducteur ne va pas modifier son potentiel mais va modifier sa charge totale ainsi que la répartition de cette charge dans ce dernier.

L'influence totale apparaît lorsque le conducteur influencé  $B$  entoure le conducteur influençant  $A$ .

### 2.11.4 Condensateur

On appelle condensateur un ensemble de deux conducteurs à l'équilibre en influence totale de charges respectives  $+Q$  et  $-Q$ . Les conducteurs sont appelés les armatures du condensateur.



#### Capacité d'un condensateur

SI  $V_1$  et  $V_2$  sont les potentiels des armatures d'un condensateur et  $Q$  la charge d'une des deux armatures, on définit la capacité d'un condensateur par la relation :

$$C = \left| \frac{Q}{V_1 - V_2} \right|$$

Cette grandeur représente la capacité à stocker des charges pour une différence de potentiel appliquée entre les deux armatures.

## 2.12 Energie électrostatique

Nous avons vu au paragraphe 2.6.1 que le travail fourni à une charge ponctuelle  $q$  lorsqu'on la déplace dans un champ électrique créé par un autre système de charges est égal à :

$$W_{1 \rightarrow 2} = q(V(M_1) - V(M_2))$$



### Energie potentielle

On appelle énergie potentielle électrostatique d'une charge ponctuelle  $q$  placée en un point  $M$  où règne un potentiel électrostatique  $V$  la grangeur :

$$U(M) = qV(M)[\text{J}]$$

Si maintenant on considère un système de  $N$  charges ponctuelles en interaction les unes avec les autres. Une charge  $q_i$  donnée va subir le potentiel créé par les  $N - 1$  autres charges, et l'énergie propre d'un tel système est la somme des énergies de chacune des particules placées dans le champ créé par les  $N - 1$  autres particules. D'où :

$$U_p = \sum_{i=1}^N \sum_{j>i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (2.11)$$

$$= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (2.12)$$

Pour une distribution de charges continue l'énergie du système se mettra sous la forme :

$$U_p = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int_V \int_V \frac{\rho(M)\rho(M')}{\|\mathbf{M}\mathbf{M}'\|} dM dM'$$

En notant que dans l'équation précédente l'une des deux intégrales est simplement le potentiel scalaire :

$$U_p = \frac{1}{2} \int_V \rho(M)V(M) dM \quad (2.13)$$

L'énergie potentielle étant exprimé en fonction des positions des charges elle met l'accent sur l'interaction coulombienne entre ces différentes charges. Une autre approche consiste à privilégier le champ électrique comme étant porteur de l'énergie. En injectant l'équation de Poisson dans 2.13 on a :

$$U_p = -\frac{\epsilon_0}{2} \int_V V \operatorname{div} \operatorname{grad}(V) dM$$

En effectuant une intégration par parties on a :

$$U_p = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \|\operatorname{grad}(V)\|^2 dM = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \|\mathbf{E}\|^2 dM$$

La relation 2.12 ne contient aucune référence explicite à la densité de charges et l'énergie potentielle s'exprime par l'intégrale étendue à tout l'espace du carré du champ électrique. Son intégrande s'identifie donc alors naturellement à une densité d'énergie électrique :



### Densité d'énergie électrostatique

$$w = \frac{\epsilon_0}{2} \|\mathbf{E}\|^2 \quad (2.14)$$

Cette expression permet de concevoir intuitivement que les régions soumises à des champs électriques intenses renferment une grande quantité d'énergie.



# Chapitre 3

## Loi de conservation de la charge

Dans cette partie, nous allons relier la densité volumique de charges à la densité de courant en volume .

### 3.1 Densité de courant

On considère une densité volumique de charges  $\rho$  se déplaçant à la même vitesse  $\mathbf{v}$  on supposera de plus que ces particules sont identiques.

On a vu au chapitre précédent que l'on pouvait définir pour ces charges en mouvement une densité de courant en volume :

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$$

Soit une surface fermée  $\mathcal{S}$  à l'intérieur de cette densité volumique que l'on oriente suivant une normale extérieure , le flux de charges totale  $dQ$  qui va traverser  $surf\mathcal{S}$  pendant un temps  $dt$  sera égale à :

$$dQ = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS dt$$

La normale permet ici de compter positivement la quantité de charges sortante et négativement la quantité entrante.

Par ailleurs la quantité de charges totale contenu dans le volume  $\mathcal{V}$  délimité par  $\mathcal{S}$  est égale à :

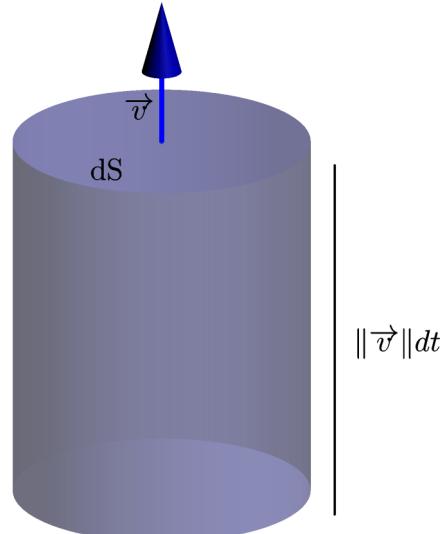
$$Q_{int}(t) = \iiint_{\mathcal{V}} \rho(t) d\tau$$

Ainsi entre deux instants  $t$  et  $t + dt$  la variation de quantité de charges pourra s'écrire :

$$\begin{aligned} Q(t + dt) - Q(t) &= \iiint_{\mathcal{V}} \rho(t + dt) d\tau - \iiint_{\mathcal{V}} \rho(t) d\tau \\ dQ &= \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dt d\tau \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$



Comme il ne peut pas y avoir apparition ou disparition spontanée de charges électriques, si la quantité de charges varie au cours du temps c'est qu'elle est correspond au flux de charges à travers  $\mathcal{S}$  pendant le même temps  $dt$ .

Ainsi, on obtient :

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = - \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS dt$$

Le signe - dans l'expression précédente est due au fait que la quantité de charges sortante de  $\mathcal{S}$  est comptée positivement alors qu'elle correspond à un déficit de charges dans  $\mathcal{V}$ . On établit, par l'intermédiaire du théorème de Green-Ostragradski, l'équation de continuité de la charge :



### Equation de continuité de la charge

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.1)$$

Cette loi fondamentale traduit le fait qu'il ne peut pas y avoir de transformation discontinue des charges électriques (par création ou annihilation) en un point de l'espace.

## Chapitre 4

# Magnétostatique

L'existence de courants stationnaires (indépendant du temps) entraîne l'apparition de champ magnétostatique. On va voir dans ce chapitre les principaux résultats obtenus dans ce domaine.

### 4.1 Forces de Laplace - Induction magnétique

On considère deux fils rectilignes parcouru par des courant  $I_1$  et  $I_2$  ces deux fils sont parallèles distants d'une longueur  $a$  et sont infinis (ou d'une longueur très grande par rapport à  $a$ ). On peut montrer que si les courants ont même sens la force par unité de longueur de fil exercé par 1 sur 2 est attractive et vaut :

$$\mathbf{F}_{12} = -\alpha \frac{I_1 I_2}{a} \mathbf{u}_r \quad (4.1)$$

$\alpha$  est une constante dont la valeur dépend du système d'unité choisi et dans le système international on a :

$$\alpha = \frac{\mu_0}{2\pi}$$

où  $\mu_0$  est la perméabilité du vide et est égale à :



## Perméabilité du vide

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Tm A}^{-1}$$

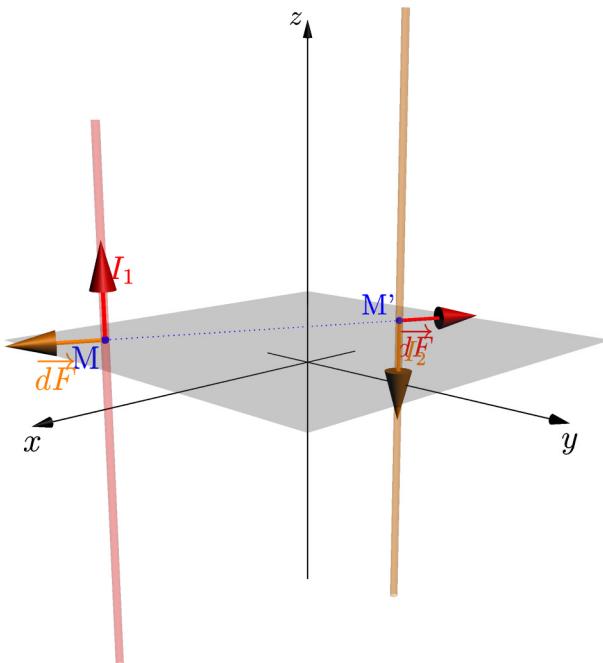


FIGURE 4.1 – Illustration de la force de Laplace pour deux conducteurs parallèles parcourus par des courants de sens opposé

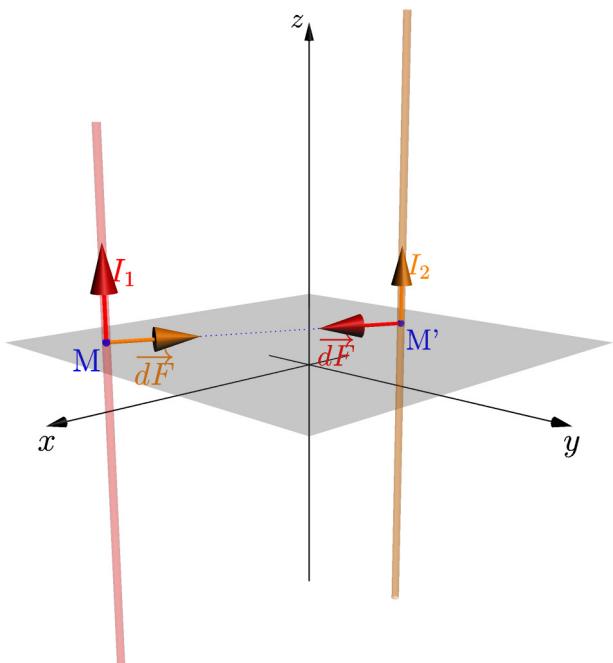


FIGURE 4.2 – Illustration de la force de Laplace pour deux conducteurs parallèles parcourus par des courants de même sens

On appelle induction magnétique le champ de vecteur **B** tel que la force **dF** subie par un conducteur **dl** parcouru par un courant *I* soit égale à :

$$\mathbf{dF} = I \mathbf{dl} \times \mathbf{B}$$

Cette force s'appelle la force de Laplace. L'unité de l'induction magnétique est le Tesla T.

### 4.1.1 Loi de Biot et Savart

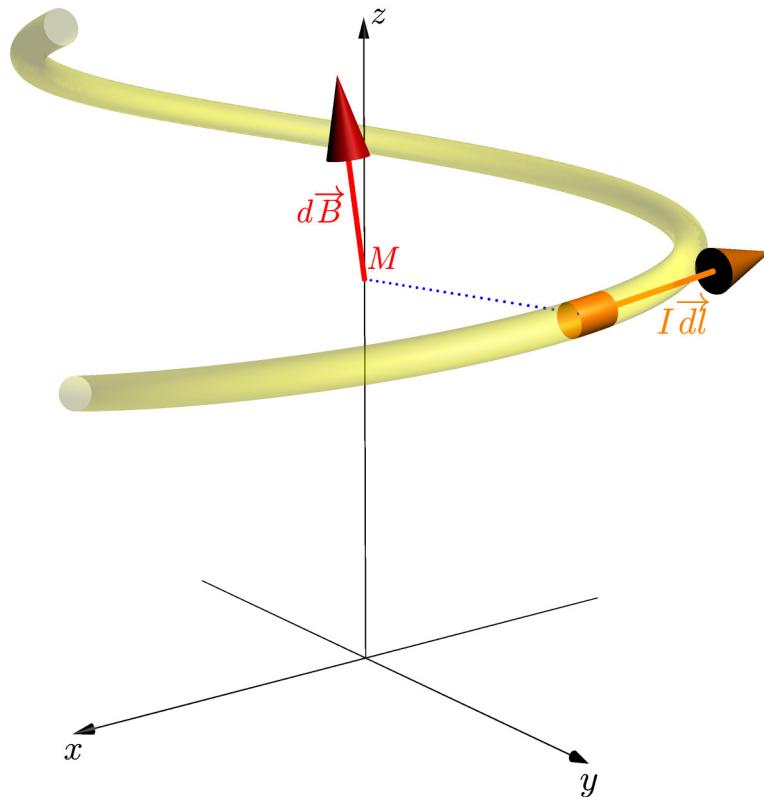
Cette loi permet de calculer l'induction magnétique créée par une portion de fil  $d\mathbf{l}$  localisée autour d'un point  $M'$  parcourue par un courant électrique d'intensité  $I$  et mesurée en un point  $M$ .



#### Loi de Biot et Savart

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{M}'\mathbf{M}}{\|\mathbf{M}'\mathbf{M}\|^3}$$

On peut à des fins mnémotechniques faire le parallèle ici avec l'expression reliant la charge électrique au champ électrostatique. Il faut par contre faire preuve d'une très grande prudence vis à vis de l'analogie entre ces expressions. En effet s'il a été démontré qu'une charge ponctuelle existait réellement il a aussi été démontré que le monopole magnétique n'existe pas.



C'est à dire que l'on ne peut pas considérer de manière isolé un élément de l'espace  $d\mathbf{l}$  dans lequel peut circuler un courant  $I$  cela reviendrait à considérer en effet une zone où des charges peuvent apparaître circuler sur une longueur infinitésimale puis disparaître et violerait ainsi le principe de conservation de la charge. Le calcul de l'induction magnétique passera donc nécessairement par une intégration spatiale de cet élément de circuit et ne pourra pas résulter de la seule existence d'un élément isolé.

Cette loi peut se généraliser à d'autres distributions de courants, ainsi dans le cas d'une densité surfacique de courant ou d'une densité de courant en volume on obtient :

$$d\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j}_s ds \times \mathbf{M}'\mathbf{M}}{\|\mathbf{M}'\mathbf{M}\|^3} \quad (4.2)$$

$$d\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{j}_v d\tau \times \mathbf{M}'\mathbf{M}}{\|\mathbf{M}'\mathbf{M}\|^3} \quad (4.3)$$

## 4.2 Lois fondamentales de la magnétostatique

### 4.2.1 Principe de conservation du flux de l'induction magnétique

On part de la loi de Biot et Savart, on a donc dans le cas d'une distribution volumique de courant :

$$\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_v d\tau \times \mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} d\mathbf{P}$$

Dans l'intégrande de l'expression précédente le terme  $\mathbf{j}_v d\tau$  ne dépend que du point courant d'intégration et est indépendant du point d'observation  $M$  on peut le voir comme étant un vecteur indépendant de  $M$ . Il est à noter que ceci est vrai quelle que soit la nature de la densité de courant considérée.

On va appliquer l'identité vectorielle :

$$\text{rot}[\psi \mathbf{A}] = \text{grad}(\psi) \times \mathbf{A} + \psi \text{rot}[\mathbf{A}]$$

en supposant que les opérateurs portent sur le point d'observation, on peut donc écrire que :

$$\frac{\mathbf{j}_v d\tau \times \mathbf{PM}}{\|\mathbf{PM}\|^3} = \text{rot} \left[ \frac{\mathbf{j}_v d\tau}{\|\mathbf{PM}\|} \right]$$

D'où :

$$\mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \left[ \int \frac{\mathbf{j}_v d\tau}{\|\mathbf{PM}\|} \, d\mathbf{P} \right] \quad (4.4)$$

La divergence du rotationnel d'un champ de vecteur étant toujours nulle on en déduit donc que :



### Divergence de l'induction magnétique

$$\text{div} \mathbf{B} = 0$$

On peut en déduire une expression sur le flux de l'induction  $\mathbf{B}$  : On appelle le flux de l'induction  $\mathbf{B}$  la grandeur à travers une surface  $\mathcal{S}$  la grandeur :

$$\Phi_{\mathcal{S}} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

On en déduit immédiatement à l'aide du théorème de Green-Ostrogradski :



### Flux de l'induction magnétique

Le flux de l'induction magnétique à travers une surface fermée  $\mathcal{S}$  est nul

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0$$

En conséquence les lignes d'induction magnétique se referment sur elles-mêmes.

## 4.2.2 Circulation du champ électrique - Théorème d'Ampère

On peut à partir de l'expression 4.4 calculer le rotationnel de  $\mathbf{B}$  au point d'observation. On a donc :

$$\text{rot} \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \left[ \text{rot} \left[ \int \frac{\mathbf{j}_v d\tau}{\|\mathbf{M}'\mathbf{M}\|} \, d\mathbf{M}' \right] \right]$$

on va utiliser cette fois-ci la relation :

$$\text{rot} \text{rot} \mathbf{F} = \text{grad} \text{div} \mathbf{F} - \Delta \mathbf{F}$$

On obtient donc :

$$\text{rot} \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad} \left[ \int \mathbf{j} \cdot \text{grad} \left[ \frac{1}{\|\mathbf{M}'\mathbf{M}\|} \right] \, d\tau \right] - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j} \Delta \left[ \frac{1}{\|\mathbf{M}'\mathbf{M}\|} \right] \, d\tau$$

Dans la première intégrale l'expression  $\text{div} \frac{\mathbf{j}}{\|\mathbf{M}'\mathbf{M}\|}$  a été transformée en utilisant l'indépendance des courants par rapport au point d'observation.

De la même manière dans la deuxième intégrale, le laplacien vectoriel portant sur la grandeur  $\frac{\mathbf{j}}{\|\mathbf{M}'\mathbf{M}\|}$  a pu être remplacé par le produit  $\mathbf{j} \Delta \left[ \frac{1}{\|\mathbf{M}'\mathbf{M}\|} \right]$  du fait de l'indépendance des courants par rapport au

point d'observation.

On a de plus :

$$\mathbf{grad} \frac{1}{\|\mathbf{M}'\mathbf{M}\|} = -\mathbf{grad}' \frac{1}{\|\mathbf{M}'\mathbf{M}\|}$$

En effectuant une intégration par parties sur la première intégrale et en admettant que :

$$\int \mathbf{j} \Delta \left[ \frac{1}{\|\mathbf{M}'\mathbf{M}\|} \right] d\tau = -4\pi \mathbf{j}(M)$$

on aboutit à :

$$\mathbf{rot} \mathbf{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{grad} \left[ \int \frac{div'(\mathbf{j})}{\|\mathbf{M}'\mathbf{M}\|} d\tau \right] + \mu_0 \mathbf{j}(M)$$

Du fait du caractère stationnaire des phénomène que l'on observe, on d'après l'équation de conservation de la charge :

$$div'(\mathbf{j}) = 0$$

On obtient finalement la forme locale du théorème d'Ampère :



### Théorème d'Ampère

$$\mathbf{rot}[\mathbf{B}][M] = \mu_0 \mathbf{j}[M] \quad (4.5)$$

En d'autres termes cette expression signifie que la densité de courant  $\mathbf{j}$  crée une induction magnétique qui va "s'enrouler" autour du courant.

En utilisant le théorème de Stokes on peut trouver cette expression de manière équivalente mais sous forme intégrale.

Si on considère une contour fermé  $\mathcal{C}$  d'une région de l'espace dans laquelle règne une induction magnétique  $\mathbf{B}$ , l'utilisation de l'équation 4.5 nous donne :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \mu_0 \int_{\mathcal{C}} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{l} \\ &= \mu_0 \iint_{\text{surf } S} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} ds \end{aligned}$$

où  $\text{surf } S$  est une surface orientée s'appuyant sur  $\mathcal{C}$ , l'orientation de  $\text{surf } S$  étant donnée par l'orientation de  $\mathcal{C}$ .



### Forme intégrale du théorème d'Ampère

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \iint_{\text{surf } S} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} ds \quad (4.6)$$

Dans le cas où l'on est en présence de  $N$  conducteurs filiformes entourés par le contour fermé  $\mathcal{C}$ , ces conducteurs étant parcourus par des courants d'intensité  $I_k$ , on obtient

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^N I_k$$

Les intensités sont comptabilisées ici de manière algébrique et l'orientation positive de  $I$  est donné par le sens de  $\mathcal{C}$ . On se rend compte que le théorème d'Ampère est l'analogie du théorème de Gauss et permet de déterminer l'expression de l'induction magnétique générée par une distribution de courant connaissant cette dernière. Comme pour le théorème de Gauss pour utiliser correctement 4.6 il faut arriver à "intuiter" la forme de l'induction magnétique afin de prendre un contour fermé qui soit en tous points tangents à cette grandeur.

### 4.3 Lignes d'induction magnétique

Voici quelques exemples de calcul de lignes d'induction magnétique générées par une ou des boucles de courant :

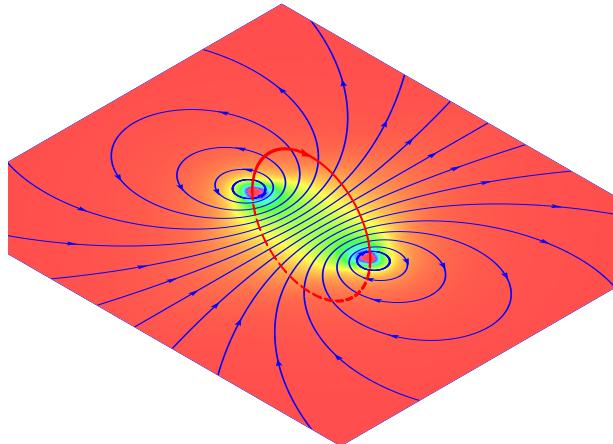


FIGURE 4.3 – Lignes d'induction magnétique créées par une spire

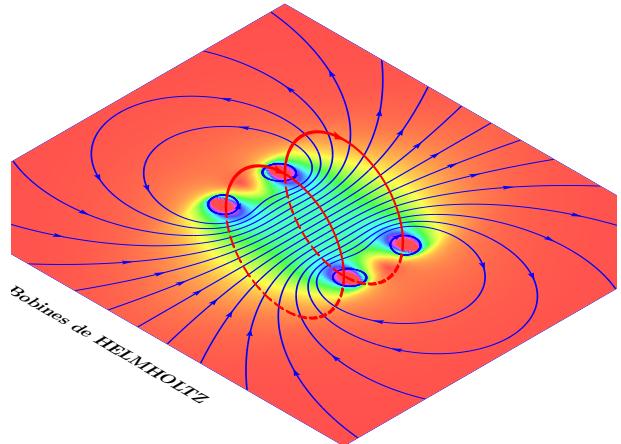


FIGURE 4.4 – Lignes d'induction magnétique créées par une bobine de Helmholtz

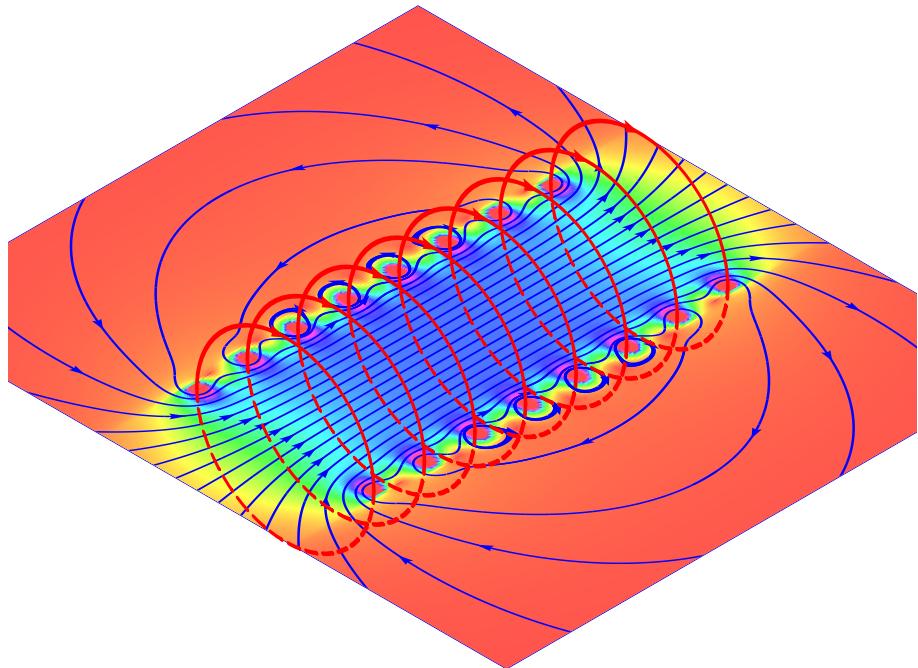


FIGURE 4.5 – Lignes d'induction magnétique créées par solénoïde

## 4.4 Conditions aux limites vérifiées par l'induction magnétique en présence d'une densité surfacique de courant

On va considérer une surface  $\mathcal{S}$  placée dans le vide et portant une densité surfacique de courant  $\mathbf{j}_s$ . On va supposer que cette surface sépare le vide en deux milieux 1 et 2. On va, comme dans le paragraphe ..., se proposer d'établir comment la présence de cette densité surfacique va modifier les composantes tangentielles ou normales de l'induction magnétique.

On va supposer que l'on peut localement définir une normale que l'on va arbitrairement dirigé du milieu 1 vers le milieu 2. En un point  $M$  de la surface on a :

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{n}_{2 \rightarrow 1}$$

La méthode de traitement utilisée est strictement identique à celle utilisée dans le paragraphe ..

### 4.4.1 Composante normale de l'induction magnétique

On va partir de l'équation :

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

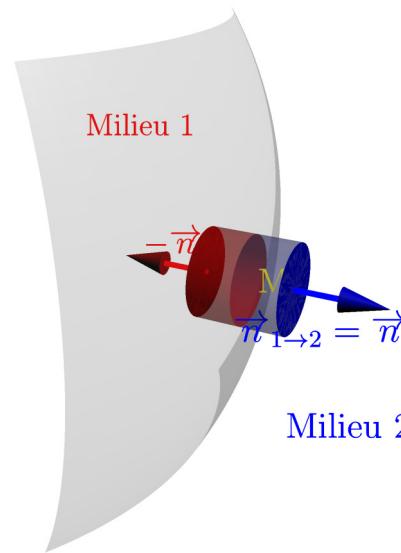
et autour d'un point  $M$  sur la surface on va considérer un petit volume cylindrique, en utilisant le théorème de Green-Ostrogradski on obtient :

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0$$

D'où :

$$\Delta S \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_{1 \rightarrow 2} + \Delta S \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_{2 \rightarrow 1} = 0$$

On aboutit à :



**Continuité de la composante normale de l'induction magnétique**

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$$

### 4.4.2 Composante tangentielle de l'induction magnétique

On va utiliser cette fois-ci :

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_s$$

On va prendre une surface  $\mathcal{S}$  s'appuyant sur un contour fermé  $\mathcal{C}$ , on a

$$\iint_{\mathcal{S}} \operatorname{rot} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_0 \, ds = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_M^N \mathbf{j}_s \cdot (\mathbf{n}_0 \times d\mathbf{l})$$

Après quelques manipulations d'analyse vectorielle, on aboutit à :



**Discontinuité de la composante tangentielle de l'induction magnétique**

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = \mu_0 \mathbf{j}_s$$

## 4.5 Potentiel vecteur

En tout point  $M$  de l'espace on sait que :

$$\operatorname{div}(\mathbf{B}) = 0$$

on peut en déduire qu'en tout point de l'espace l'induction magnétique "dérive" d'un potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  tel que :



### Potentiel vecteur

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

Ce potentiel vecteur joue un rôle similaire au potentiel électrostatique  $V$  pour le champ électrique. On peut remarquer que n'importe quel potentiel  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{A}'$  défini par :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad}[\psi]$$

où  $\psi$  est une fonction scalaire ayant de bonnes propriétés de régularité, donneront la même induction magnétique  $\mathbf{B}$ . On a donc le choix de prendre un potentiel vecteur qui pourra simplifier les équations. Ce choix s'appelle condition de jauge.

### 4.5.1 Equation vérifiée par le potentiel vecteur

A partir de l'équation 4.5 on introduit  $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ , d'où :

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (4.7)$$

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (4.8)$$

On va imposer une condition supplémentaire sur le potentiel vecteur, en le choisissant tel que  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ . Cette condition de jauge particulière s'appelle la jauge de Coulomb. On aboutit à l'équation relation le potentiel vecteur aux sources :



### Equation vérifiée par le potentiel vecteur

$$\Delta \mathbf{A} + \mu_0 \mathbf{j} = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

Cette équation peut être vu comme comme le "pendant" en magnétostatique de l'équation de Poisson pour l'électrostatique.

### 4.5.2 Solution élémentaire du potentiel vecteur

Par analogie avec l'expression relation le potentiel électrostatique à une densité de charges on peut trouver une expression de  $\mathbf{A}$  pour une distribution élémentaire de courant. En effet on peut, dans un système de coordonnées cartésiennes projeter l'équation 4.9 sur chacune des composantes et on obtient ainsi pour la composante suivant  $Ox$

$$\Delta A_x + \mu_0 j_x = 0$$

Une solution de ce problème en espace libre peut être trouvée par analogie avec 2.6.1. On aboutit à :

$$\mathbf{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{j}_v d\tau}{\|\mathbf{M}' \mathbf{M}\|}$$

## Chapitre 5

# Induction électromagnétique

On va aborder dans cette partie les régimes variables au cours du temps et l'on va se rendre compte que les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  ne peuvent plus être traités séparément comme il a été fait jusqu'à présent en magnétostatique et électrostatique

### 5.1 Loi de Faraday et Phénomène d'induction

En électrostatique, une charge  $q$  placée dans un champ électrique  $\mathbf{E}$  subit une force :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

si maintenant cette charge est mobile et qu'elle se déplace à une vitesse  $\mathbf{v}$  dans un champ  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  dans un repère donné cette charge subira la force de Lorentz :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5.1)$$

Cette force se décompose en une partie indépendante de la vitesse et une force proportionnelle au produit  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . Si ce mouvement de charges se produit dans un conducteur il peut se créer une tension une tension aux bornes de ce dernier. C'est Faraday en 1831 qui fit les premières observations quantitatives liant des champs électriques et magnétiques dépendant du temps. Il remarqua qu'un courant transitoire apparaît dans un circuit lorsque :

- On allume ou on éteint le courant circulant dans un circuit adjacent.
- Quand on déplace, relativement au premier circuit, le circuit adjacent parcouru par un courant constant.
- Quand on introduit un aimant dans le circuit ou quand on l'en fait sortir.

Ainsi un courant n'apparaît que s'il y a variation du courant dans le circuit adjacent ou s'il y a mouvement relatif des deux circuits. Faraday attribua le courant transitoire à une variation du flux d'induction magnétique à travers le circuit.

#### 5.1.1 Circuit mobile dans une induction magnétostatique

Soit  $\Gamma$  un circuit électrique filiforme orienté de manière arbitraire. Ce circuit est plongé dans un champ d'induction magnétique  $\mathbf{B}$  créé par des courants stationnaires. On déplace  $\Gamma$  dans ce champ d'induction.

Un porteur de charge libre présent dans le conducteur aura une vitesse de la forme  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  où

- $\mathbf{u}$  est la vitesse de déplacement du porteur dans le circuit  $\Gamma$ , ce dernier étant filiforme  $\mathbf{u}$  est porté par la tangente à  $\Gamma$ .

- $\mathbf{v}$  est la vitesse d'entrainement du circuit au point où se trouve le porteur.

En l'absence de champ électrique le porteur subit une force liée à l'induction magnétique :  $q(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{B} = q\mathbf{E}_m$  où  $\mathbf{E}_m$  joue le rôle d'un champ électrique, ce champ s'appellera champ électromoteur d'induction. La force électromotrice d'induction sera donc égale à la circulation de  $\mathbf{E}_m$  sur  $\Gamma$ .

$$e = \int_{\Gamma} \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{l} = \int_{\Gamma} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} + \int_{\Gamma} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

Le produit mixte qui figure dans la première intégrale est nul puisque  $\mathbf{u}$  et  $d\mathbf{l}$  sont colinéaires.

Il reste donc :

$$e = \int_{\Gamma} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\Gamma} (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) \cdot \mathbf{B}$$

La grandeur  $\mathbf{v} \times d\mathbf{l}$  définit un vecteur normal à la fois au contour  $\Gamma$  ainsi qu'au vecteur vitesse  $\mathbf{v}$  de déplacement du circuit. Cette grandeur est donc normale à la surface défini par le déplacement de  $\Gamma$ , on en déduit :

$$e = - \int_{\Gamma} (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) \cdot \mathbf{B} = - \frac{d\Phi_c}{dt}$$

où  $\Phi_c$  est le flux coupé par le circuit  $\Gamma$  pendant le temps  $dt$  du fait de son déplacement dans le champ d'induction. En d'autres termes cette variation de flux caractérise la variation de flux qui résulte du mouvement de  $\Gamma$  dans le champ  $\mathbf{B}$  fixe.

### 5.1.2 Circuit immobile dans une induction magnétique variable

Le même circuit  $\Gamma$  est maintenant fixe par contre l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  varie dans le temps (par exemple les courants créant  $\mathbf{B}$  varient dans le temps. L'expérience montre alors que  $\Gamma$  est encore le siège d'un courant induit, traduisant le déplacement de charges à l'intérieur du conducteur. On peut caractériser ce déplacement de charges par une force électromotrice :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

où  $\frac{d\Phi}{dt}$  correspond à la variation du flux d'induction magnétique à travers  $\Gamma$  résultant de la variation temporelle de  $\mathbf{B}$ .

Cette force électromotrice ne peut plus résulter de l'action de l'induction magnétique sur les porteurs de charges. En effet, le circuit étant immobile la vitesse  $\mathbf{v}$  est nulle et il reste donc l'unique terme de la force de Lorentz  $q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$  or puisque  $\mathbf{u}$  est en tout point de  $\Gamma$  tangent à  $d\mathbf{l}$  alors la circulation de cette force sur le contour  $\Gamma$  sera nulle.

On en déduit donc que si les porteurs libres sont entraînés dans l'élément de circuit c'est qu'une force électrique est apparue, produite par un champ électrique  $\mathbf{E}$  dont la source provient de la variation temporelle de l'induction  $\mathbf{B}$ . On a donc :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Il existe donc une dépendance de l'ensemble ( $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ ) vis à vis du repère utilisé pour le décrire :

- Dans le repère où  $\Gamma$  est mobile,  $\mathbf{E}$  est nul et seul  $\mathbf{B} \neq 0$ .

- Dans le repère où  $\Gamma$  est fixe, si  $\mathbf{B}$  varie dans le temps alors il apparaît un champ électrique.

Les effets de variation de flux avec le temps peuvent se superposer ainsi si  $\frac{d\Phi}{dt}$  est la dérivée totale du flux par rapport au temps alors la fém d'induction est donnée par la loi de Faraday :

**Loi de Faraday**

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (5.2)$$

**5.2 Forme locale de la loi de Faraday**

On considère un circuit  $\Gamma$  maintenu fixe de sorte que  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  soient définis dans le même référentiel. On considère une surface  $\mathcal{S}$  quelconque s'appuyant sur  $\Gamma$ , l'application de la loi de Faraday donne :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{surf\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} ds$$

Dans le membre de droite on peut permute la dérivation par rapport au temps et l'intégration par rapport aux coordonnées spatiales et si  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$  désigne la dérivée de l'induction magnétique par rapport au temps en un point fixe, on aboutit à :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\iint_{\mathcal{S}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} ds \quad (5.3)$$

$$\iint_{\mathcal{S}} \text{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} ds = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} ds \quad (5.4)$$

La surface  $\mathcal{S}$  et le contour  $\Gamma$  étant supposé quelconque l'égalité des intégrales implique celle des intégrandes. D'où la relation locale liant en régime variable, l'induction magnétique et le champ électrique :

**Forme locale de la loi de Faraday**

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.5)$$

**Quelques remarques**

- On peut tenter de donner une interprétation géométrique de la loi de Faraday : En effet le champ d'induction variable  $\mathbf{B}$  va créer un champ électrique qui en tout point de l'espace où ces deux grandeurs existent va s'enrouler autour de  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ . En d'autres termes le champ électrique ainsi créé aura comme axe de rotation  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ .
- Le champ électrique qui a été considéré ici au sein d'un circuit filiforme peut aussi très bien apparaître dans des conducteurs massifs ou bien encore dans le vide, ainsi une charge ponctuelle placée dans une induction magnétique  $\mathbf{B}$  variable dans le temps sera soumise à la force de Coulomb où le champ  $\mathbf{E}$  sera généré par  $\mathbf{B}$ .
- L'induction  $\mathbf{B}$  restant à flux conservatif (on a toujours  $\text{div} \mathbf{B} = 0$ ) même en régime non stationnaire, on peut continuer à définir un potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  tel que :

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$$

En reprenant l'équation 5.5 on a :

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot} \left[ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right]$$

D'où :

$$\text{rot} \left[ \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = \mathbf{0}$$

C'est donc la grandeur  $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$  qui dérive d'un potentiel scalaire  $V$ . Ainsi

$$\mathbf{E} = -\text{grad}(V) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

On en déduit donc que le champ électrique créé par variation temporelle de l'induction magnétique ne dérive pas que d'un seul potentiel scalaire, et donc que ce n'est plus un champ Coulombien.

### 5.3 Energie magnétostatique

Jusqu'à présent nous n'avons pas parlé d'énergie magnétostatique. La raison est que l'établissement de courants stationnaires et des champs d'induction magnétostatiques associés fait intervenir une période transitoire durant laquelle on passe de courant nul à des courant établis en régime permanent. Ces courants variables entraînent des variations temporelles de l'induction et induisent des forces électromotrices obligeant les sources à fournir un travail supplémentaire pour établir un régime permanent. L'énergie du champ étant par définition le travail total accompli pour créer ce champ il est donc nécessaire de le prendre en compte.

Soit une particule de charge  $q$  ayant une vitesse  $\mathbf{v}$  participant au transport des courants étudiés, plongée dans un champ électromagnétique elle va subir la force de Lorentz 5.1 :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Le régime restera stationnaire si l'extérieur exerce sur la charge une force  $\mathcal{F} = -\mathbf{F}$ . Pendant le temps  $dt$  la particule se sera déplacée de  $\mathbf{v}dt$  et donc la force extérieure devra fournir un travail égal à :

$$dW = \mathcal{F} \cdot \mathbf{v}dt = -q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}dt$$

La force magnétique, perpendiculaire à la vitesse, ne travaille pas. Seule la force liée à la force électrique doit être compensée. Dans un volume  $d\tau$  on trouve  $nd\tau$  particules donc le travail fourni par l'extérieur au niveau de  $d\tau$  pendant  $dt$  est :

$$dW = -nqv \cdot \mathbf{E}dt = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}dt d\tau$$

On aboutit finalement à :

$$\frac{dW}{dt} = - \iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d\tau$$

Le volume  $\mathcal{V}$  est le volume dans lequel s'effectue le déplacement de charges. Le champ électrique est le champ électrique créé par le phénomène d'induction on a donc les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \text{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{dW}{dt} = \iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} d\tau \quad (5.6)$$

Une autre forme de l'énergie magnétique du système peut être trouvée en utilisant le théorème d'Ampère. En reprenant l'équation 5.6 on a :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{\mu_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \text{rot} \mathbf{B} d\tau$$

En utilisant l'identité vectorielle :

$$\text{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \text{rot} \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \text{rot} \mathbf{G} \quad (5.7)$$

l'équation précédente se réécrit :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{\mu_0} \iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{B} \cdot \text{rot} \left[ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] d\tau - \frac{1}{\mu_0} \iiint_{\mathcal{V}} \text{div} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right) d\tau$$

On peut étendre le volume  $\mathcal{V}$  à l'infini puisqu'en dehors de ce volume le courant est nul. Ainsi en utilisant le théorème de Green- Ostrogradski on a :

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{\mu_0} \iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{B} \cdot \text{rot} \left[ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] d\tau - \frac{1}{\mu_0} \iint_{\mathcal{S}} \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right) \cdot \mathbf{n} ds$$

où la surface  $\mathcal{S}$  délimite le volume  $\mathcal{V}$ . A très grande distance, le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  et l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  varient respectivement en  $\frac{1}{r^2}$  et  $\frac{1}{r^3}$ . L'intégrale sur la surface tend donc vers 0 lorsque celle-ci s'éloigne à l'infini. Il reste donc :

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{1}{\mu_0} \iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{B} \cdot \text{rot} \left[ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] d\tau \\ &= \frac{1}{\mu_0} \iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\tau \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})}{\partial t} d\tau \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \frac{d}{dt} \left[ \iiint_{\mathcal{V}} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} \right] d\tau \end{aligned}$$

Ainsi pour une configuration initiale où tous les courants sont nuls, l'énergie magnétique que le système a acquis entre l'état initial et l'état permanent est donc égale à :



### Energie magnétostatique

$$W = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} d\tau \quad (5.8)$$

Il en découle que l'intégrande de cette égalité peut être assimilée à une densité d'énergie magnétique :



### Densité d'énergie magnétostatique

$$w_m = \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \quad (5.9)$$

## 5.4 Inductance des circuits électriques

### 5.4.1 Coefficient d'inductance mutuelle entre deux circuits

Considérons deux circuits  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  parcourus par des courants  $I_1$  et  $I_2$ . On caractérise l'interaction magnétique entre ces deux circuits par le flux de l'induction magnétique créé par l'un des circuits

à travers l'autre. Ainsi  $\Phi_{21}$  le flux de l'induction magnétique créé par  $\mathbf{B}_1$  à travers une surface  $S_2$  s'appuyant sur  $C_2$ .

On a :

$$\Phi_{21} = \iint_{S_2} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{s}_2$$

De plus  $\mathbf{B}_1$  est associé au potentiel vecteur  $\mathbf{A}_1$  donc il en découle :

$$\Phi_{21} = \iint_{S_2} \text{rot}[\mathbf{A}_1] \cdot d\mathbf{s}_2 = \int_{C_2} \mathbf{A}_1[M_2] \cdot dl_2$$

En introduisant la solution élémentaire du potentiel vecteur donnée par l'équation on arrive à :

$$\Phi_{21} = \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_2} \int_{C_1} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{\|\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2\|} \right] I_1 \quad (5.10)$$

Le terme entre crochets de l'équation 5.10 ne dépend que de la géométrie du système étudié et lie le courant  $I_1$  au flux de  $\mathbf{B}_1$  à travers  $C_2$ . Ce terme sera appelé inductance mutuelle entre les deux circuits.



### Inductance mutuelle

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_2} \int_{C_1} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{\|\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2\|} \quad [H] \quad (5.11)$$

Quelques remarques :

- Du fait de l'expression symétrique de cette inductance on en déduit immédiatement que :

$$M_{21} = M_{12}$$

- Le signe de l'inductance mutuelle dépend des orientations des courants dans les circuits.
- On peut généraliser cette grandeur à un ensemble de  $n$  circuits. En effet si on considère un circuit  $C_i$ , les flux dus à l'ensemble des autres circuits  $C_j$  à travers  $i$  sont des grandeurs algébriques scalaires qui s'additionnent et on en déduit naturellement que :

$$\Phi_i = \sum_{j \neq i} \Phi_{ij} = \sum_{j \neq i} M_{ij} I_j$$

où les  $M_{ij}$  sont les inductances mutuelles entre les circuits  $i$  et  $j$ . Cette propriété est très utile pour calculer des inductances mutuelles dans le cas de solénoïdes en interaction.

### 5.4.2 Coefficient d'inductance propre

De la même manière que l'on a défini l'induction mutuelle comme l'influence de l'induction magnétique créé par une portion de circuit sur un autre circuit, on peut définir l'inductance propre comme l'influence de l'induction magnétique créé par une portion de circuit sur le circuit lui-même. En représentant l'expression de l'équation 5.11, on a :



### Inductance propre

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_1} \frac{dl_1 \cdot dl_2}{\|\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2\|} \quad [H] \quad (5.12)$$

Quelques remarques :

- L'inductance propre d'un circuit ne dépend que de sa géométrie.
- On ne peut pas calculer l'inductance propre en gardant l'approximation de circuit filiformes à cause de la divergence de  $\frac{1}{\|\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2\|}$ ,  $M_1$  et  $M_2$  pouvant être ici confondus. Il faudra considérer le circuit comme un ensemble de tubes de courant et ne plus négliger la section du conducteur.

### 5.4.3 Inductance mutuelle et propre de circuits réels

L'approximation des circuits filiformes est insuffisante dans le calcul des inductances propres d'un circuit. Il est donc utile d'établir l'inductance mutuelle et propre dans le cas de circuits dont on ne peut négliger la section transverse, on peut montrer que l'inductance mutuelle entre deux circuits lorsque l'on est en présence d'une densité de courant en volume est égale à :

$$M = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{I_1 I_2} \int_{\mathcal{V}_1} \int_{\mathcal{V}_2} \frac{\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2}{\|\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2\|} dv_1 dv_2$$

Dans le cas du calcul d'un inductance propre on va obtenir :

$$L = \frac{1}{I^2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dv$$

On peut réécrire l'expression précédente en considérant que la densité de courant en volume est nulle à l'extérieur du conducteur et étendre l'intégrale à tout l'espace, à l'aide du théorème d'Ampère et d'une formule d'analyse vectorielle on arrive à :

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{I^2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dv \\ &= \frac{1}{I^2} \int_{\mathcal{V}} \text{rot} \left[ \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right] \cdot \mathbf{A} dv \\ &= \frac{1}{I^2} \left[ \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot \text{rot} \mathbf{A} dv - \int_{\mathcal{V}} \text{div} \left( \mathbf{A} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) dv \right] \end{aligned}$$

En utilisant le théorème de Green-Ostrogradski on obtient :

$$L = \frac{1}{I^2} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} dv - \frac{1}{I^2} \int_{\mathcal{S}} \left( \mathbf{A} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) \cdot \mathbf{n} ds$$

$\mathcal{S}$  est la surface fermée qui délimite  $\mathcal{V}$ , cette surface est d'extension infinie, on admettra qu'à grande distance la distribution stationnaire de courant est équivalente à un dipôle magnétique et  $\mathbf{A}$  décroît en  $\frac{1}{r^2}$  et  $\mathbf{B}$  décroît en  $\frac{1}{r^3}$ , l'intégrale sur la surface tendra donc vers 0. Finalement, l'inductance propre peut se réécrire de la manière suivante :

$$L = \frac{1}{I^2} \int_{\text{espace}} \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0} dv$$

On a donc bien une grandeur qui est positive.

### 5.4.4 Inductance d'un ensemble de deux circuits couplés

On considère deux circuits  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ , le flux  $\Phi_1$  à travers  $\mathcal{C}_1$  est égal à :

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M I_2$$

De même pour le circuit  $\mathcal{C}_2$  on a de manière symétrique :

$$\Phi_2 = L_2 I_2 + M I_1$$

Ces relations linéaires par rapport au courant peuvent être mises sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}}_{[L]} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Alors que les inductances propres sont des grandeurs positives, le signe du coefficient de  $M$  dépend de l'orientation des courants dans chacun des circuits. On peut tout de même démontrer que le déterminant de la matrice  $[L]$  est positif.

Nous allons considérer la quantité positive ou nulle, dans laquelle  $x$  est une grandeur réelle quelconque :

$$\frac{1}{\mu_0} \int \left( \frac{\mathbf{B}_1}{I_1} + x \frac{\mathbf{B}_2}{I_2} \right)^2 dv = \frac{1}{I_1^2} \int \frac{\|\mathbf{B}_1\|^2}{\mu_0} dv + \frac{x^2}{I_2^2} \int \frac{\|\mathbf{B}_2\|^2}{\mu_0} dv + \frac{2x}{I_1 I_2} \int \frac{\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_2}{\mu_0} dv$$

En remplaçant par l'expression des inductances on obtient l'équation suivante :

$$L_2 x^2 + 2Mx + L_1 \geq 0$$

Il en résulte donc que l'équation du second degré en  $x$  avec  $L_2$  et  $L_1$  positifs :

$$L_2 x^2 + 2Mx + L_1 = 0$$

ne possède pas de racines réelles.

Son discriminant est donc négatif ou nul. D'où :

$$\det[L] = L_1 L_2 - M^2 \geq 0 \text{ et } |M|(L_1 L_2)^{\frac{1}{2}}$$

On introduit alors le coefficient de couplage magnétique entre les deux circuits :

$$k = \frac{M}{(L_1 L_2)^{\frac{1}{2}}}$$

Cette valeur varie entre 0 et 1. Le couplage sera dit serré si  $k \simeq 1$ . En pratique si  $k = 1$  toutes les lignes du champ créé par  $\mathcal{C}_1$  traverseront  $\mathcal{C}_2$ .

#### 5.4.5 Transformateurs

Dans un transformateur deux circuits, en général électriquement isolés, sont bobinés de telle sorte qu'un couplage magnétique soit maximal entre les deux circuits. Pour ce faire on utilise un matériau en fer doux permettant de canaliser les lignes d'induction magnétique. L'un des enroulements, le primaire, est alimenté par une source de tension  $v_1(t)$  et parcouru par un courant  $I_1(t)$ .  $r_1$  est la résistance ohmique de l'enroulement et  $\Phi_1$  est le flux total qui le traverse. Ces grandeurs vérifient :

$$u_1(t) = r_1 I_1(t) + \frac{d\Phi_1}{dt}$$

Pour l'enroulement secondaire il apparaît, du fait de l'induction, un courant  $I_2(t)$  et aux bornes de l'enroulement on mesure une tension  $u_2(t)$  vérifiant :

$$u_2(t) = r_2 I_2(t) + \frac{d\Phi_2}{dt}$$

En général les enroulements ont une résistance interne très faible de telle sorte que  $r_1 I_1(t) \ll \frac{d\Phi_1}{dt}$  et  $r_2 I_2(t) \ll \frac{d\Phi_2}{dt}$ . Les équations se réduisent à :

$$\begin{cases} \frac{d\Phi_1}{dt} = L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \\ \frac{d\Phi_2}{dt} = L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{1}{L_1} \left( u_1 - M \frac{dI_2}{dt} \right) = \frac{1}{M} \left( u_2 - L_2 \frac{dI_2}{dt} \right)$$

D'où :

$$u_2 = \frac{M}{L_1} u_1 + \left( \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1} \right) \frac{dI_2}{dt}$$

En supposant que le couplage entre les deux circuits est parfait, c'est à dire  $|M| \simeq (L_1 L_2)^{\frac{1}{2}}$ , on obtient finalement le rapport des tensions :

$$\frac{u_2(t)}{u_1(t)} \simeq \frac{M}{L_1}$$

Si on considère deux solénoïdes constitués respectivement de  $N_1$  et  $N_2$  spires, dans le cas où l'on considère un fonctionnement à vide du transformateur ,le flux à travers une section des solénoïdes est le même en supposant que le couplage soit parfait . Ce flux est proportionnel au courant  $I_1(t)$  et le flux total traversant le solénoïde 1 est égal à  $N_1\Phi$  tandis que celui qui traverse le second solénoïde est  $N_2\Phi$ . D'où

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{N_1\Phi}{I_1} \\ M &= \frac{N_2\Phi}{I_1} \end{aligned}$$

On en tire la loi approchée du rapport des tensions entre le primaire et le secondaire du transformateur :

$$\frac{u_2(t)}{u_1(t)} \simeq \frac{N_2}{N_1}$$

Ainsi dans un transformateur idéal, le rapport des tensions est égal au rapport des nombres de spires entre le secondaire et le primaire.

Il est à noter qu'il est indispensable que les transformateurs soient utilisés en régime variable sous peine de détériorer le matériel.



## Chapitre 6

# Equations de Maxwell dans le vide

On va aborder dans cette partie l'énoncé des équations de Maxwell qui vont nous permettre ensuite ensuite de rendre compte des phénomènes de propagation des ondes électromagnétiques.

### 6.1 Théorème d'Ampère et loi de conservation de la charge en régime variable

Dans le cadre d'un régime stationnaire, la densité de charges  $\rho$  est constante au cours du temps, soit  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ . En tout point du système la loi de conservation de la charge s'écrit :

$$\operatorname{div}(\mathbf{j}) = 0$$

Le théorème d'Ampère relie l'induction à la densité de courant :

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j}$$

D'où

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0}\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{B}) = 0$$

Théorème d'Ampère et loi de conservation sont bien cohérents en régime stationnaire.  
En régime variable, on en vu que la loi de conservation de la charge imposait :

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

et ceci est en contradiction avec le théorème d'Ampère énoncé jusqu'à présent.

### 6.2 Modification du Théorème d'Ampère

Le théorème de Gauss :

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

se généralise aux régimes variables car le flux du champ électrique à travers une surface fermée ne dépend pas de l'état du mouvement des charges. On peut donc remplacer  $\rho$  par  $\varepsilon_0\operatorname{div}\mathbf{E}$  dans l'équation de continuité de la charge. On a lors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = \operatorname{div}\left(\mathbf{j} + \varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) = 0$$

Ainsi en régime variable le vecteur  $(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t})$  est à flux conservatif. En régime variable, le théorème d'Ampère sera remplacé par l'équation de Maxwell-Ampère :



### Equation de Maxwell-Ampère

$$\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Remarques :

- Le terme  $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  est homogène à une densité de courant volumique.
- C'est un terme qui comme  $\mathbf{j}$ , terme correspondant à une conduction effective d'électricité par des porteurs de charges, est une source pour l'induction magnétique.
- Ce terme supplémentaire a été baptisé par Maxwell *courant de déplacement* mais ne correspond pas à un déplacement de charges dans le milieu.

On aboutit ainsi aux quatre équations de Maxwell, liant dans le vide les champs ( $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ ) aux sources qui les ont créées :



### Equations de Maxwell dans le vide

$$\text{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (6.1)$$

$$\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (6.2)$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (6.3)$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (6.4)$$

Les deux équation 6.2 et 6.1 vont relier les champs aux sources qui les créent. Les deux équations 6.3 et 6.4 vont structurer les propriétés des champs entre eux.

Le problème va donc consister maintenant à calculer les six composantes des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  en tout point de l'espace et pour tout temps en fonction des sources qui les ont créées. On peut essayer tout d'abord de résoudre ces équations en  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  séparément.

## Chapitre 7

# Solution générale des équations de Maxwell : équation de propagation et potentiels retardés

Si l'on souhaite déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{B}$ , on peut transformer les équations de Maxwell qui sont des équations couplant ces deux à des équations où seul  $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{B}$  va apparaître.

### 7.1 Equation de propagation vérifiée par $\mathbf{E}$

On va partir de 6.3 :

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

On va appliquer l'opérateur rotationnel sur les deux membres de cette équation :

$$\begin{aligned}\text{rot rot} \mathbf{E} &= -\text{rot} \left[ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \mathbf{B}\end{aligned}$$

L'équation 6.2 va maintenant être utilisée dans le membre de droite de l'expression précédente. Le membre de droite va donc être égal à :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left[ \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right]$$

En regroupant tous les termes on aboutit finalement à l'équation liant  $\mathbf{E}$  aux densités de charges et de courant qui créent les champs :

$$\Delta \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} \text{grad}(\rho) + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \quad (7.1)$$

### 7.2 Equation de propagation vérifiée par $\mathbf{B}$

De manière tout à fait symétrique on peut trouver une équation reliant l'induction magnétique aux sources qui ont créé ce champ. Cette fois-ci on le point de part sera l'équation de 6.2 à laquelle on va

appliquer de part et d'autre l'opérateur rotationnel et en suite utiliser l'équation de 6.3 afin de n'avoir plus que l'induction **B** comme grandeur inconnue dans le problème. On aboutit à :

$$\Delta \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \text{rot} \mathbf{j} \quad (7.2)$$

Remarques :

- Une analyse dimensionnelle permet de vérifier que la quantité  $\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$  est homogène au carré d'une vitesse. C'est la vitesse de propagation de l'onde électromagnétique dans le vide on la notera  $c$ .



### Célérité du champ électromagnétique

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2.997924580 \times 10^8 \quad [\text{ms}^{-1}]$$

- L'opérateur  $\Delta \cdot - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \cdot}{\partial t^2}$  est appelé l'opérateur d'Alembertien et est noté :

$$\Delta \cdot - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \cdot}{\partial t^2} = \square \cdot$$

- On peut noter que nous sommes passés d'un système d'équations différentielles couplées du premier ordre à deux équations découpées mais où des dérivées secondes spatiales et temporelles sont apparues.
- On pourra enfin remarquer la forme similaire des équations vérifiées par **E** et **B**.

Les seconds membre de chacune des équations 7.2 et 7.1 ne sont pas très aisés à manipuler dans le cas où l'on considère un espace dans lequel sont contenues des sources. Une autre manière de procéder, dans laquelle des potentiels scalaires et vectoriels sont introduits permet de "faciliter" la résolution des équations de Maxwell.

## 7.3 Passage des champs aux potentiels

Nous avons déjà vu que les champs **E** et **B** peuvent s'exprimer en fonction de potentiels scalaires  $V$  et **A** par les relations :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \text{rot} \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\text{grad} V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

La première équation traduit la conservation du flux de l'induction magnétique tandis que la seconde est une réécriture de la loi de Faraday.

On a de plus remarqué que les potentiels  $V$  et **A** ainsi définis ne sont pas uniques et que l'on peut leur imposer une condition supplémentaire qui va garantir l'unicité du couple de potentiel choisi. Cette condition s'appelle une condition de jauge. Nous allons établir une condition de jauge permettant de simplifier grandement les équations liant les potentiels aux sources et qui est très utilisée en électromagnétisme, la condition de jauge de Lorentz.

### 7.3.1 Equations liant les potentiels aux sources

On va tout d'abord établir les équations générales liant les potentiels aux densités de courant et de charges créant les champs. En partant de l'équation 6.3 et exprimant **E** et **B** en fonction des potentiels

on a :

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}\mathbf{B} &= \mu_0\mathbf{j} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \\ \mathbf{rot}[\mathbf{rot}[\mathbf{A}]] &= \mu_0\mathbf{j} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[ -\mathbf{grad}V - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right]\end{aligned}$$

En développant le double rotationnel et en permutant les dérivées spatiales et temporelles on aboutit finalement à une équation vérifiée par le couple  $(\mathbf{A}, V)$  :

$$\Delta\mathbf{A} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{j} + \mathbf{grad} \left[ \operatorname{div}\mathbf{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right] \quad (7.3)$$

De manière équivalente en partant de l'équation 6.1 on peut trouver une équation différentielle vérifiée par  $V$ .

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{div} \left[ -\mathbf{grad}V - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right] &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

En ajoutant de chaque côté de cette expression la grandeur  $\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$ , on aboutit à :

$$\Delta V - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \operatorname{div}\mathbf{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right] \quad (7.4)$$

On peut remarquer que le membre de droite de chacune des équations 7.3 et 7.4 sont similaires. Elles restent cependant dans le cas général couplées. On va utiliser maintenant une condition de jauge permettant de découpler ces deux équations.

### 7.3.2 Jauge de Lorentz

Soit  $(\mathbf{A}, V)$  un couple de potentiel donnant un champ  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ . Ce couple de potentiel n'est pas défini de manière unique, en effet le potentiel vecteur est défini au gradient d'une fonction scalaire  $\Psi$  près puisque :

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot}\mathbf{A} = \mathbf{rot}[\mathbf{A} + \mathbf{grad}\Psi]$$

Le couple  $(\mathbf{A}', V')$  devant donner le même champ  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  on peut en déduire une relation liant  $V$  à  $V'$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\mathbf{grad}V - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \\ &= -\mathbf{grad}V - \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{A}' - \mathbf{grad}\Psi] \\ &= -\mathbf{grad}[V - \frac{\partial\Psi}{\partial t}] - \frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t}\end{aligned}$$

Par identification on trouve donc que :

$$V' = V - \frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

On va donc définir une condition de jauge entre les deux potentiels permettant de simplifier les équations 7.3 et 7.4.

**Jauge de Lorentz**

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (7.5)$$

On admettra qu'un telle condition de jauge peut toujours être satisfaite dans le vide. On obtient donc les équations vérifiées par le couple de potentiel  $(\mathbf{A}, V)$  dans le cas d'une jauge de Lorentz :

**Équations vérifiées par les potentiels**

$$\Delta \mathbf{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (7.6)$$

$$\Delta V - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (7.7)$$

## 7.4 Solutions de l'équation non homogène - Potentiels retardés

En posant  $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$  et en projetant  $\mathbf{A}$  su les axes d'un repère cartésien, on est amené à résoudre une équation différentielle du type :

$$\square U = f \quad (7.8)$$

où  $U$  désigne une des trois composantes de  $\mathbf{A}$  ou le potentiel scalaire et  $f$  désigne soit une des trois composantes de  $-\mu_0 \vec{j}$  soit  $-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ .

Pour résoudre l'équation 7.8, il faut connaître la fonction de Green de l'espace libre tridimensionnel dans le domaine temporel, c'est à dire qu'il faut trouver la fontion  $g$  solution de l'équation :

$$-\square g = \delta(\mathbf{r})\delta(t) \quad (7.9)$$

La fonction  $U$  sera alors égale u produit de convolution de  $f$  avec  $g$ . Le calcul de la fonction de green ne sera pas détaillé ici et nécessite l'utilisation de notions liées à la transformée de Fourier et à l'intégration de fonctions dan le plan complexe. On admettra donc le résultat. On retiendra cependant qu'il existe mathématiquement deux fonctions de Green possibles solutions de 7.9 :

$$g^{ret}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi r} \delta(t - \frac{r}{c}) \quad (7.10)$$

$$g^{adv}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi r} \delta(t + \frac{r}{c}) \quad (7.11)$$

Remarques : La fonction de Green 7.11 est aussi appelée fonction de Green avancée. En effet on cherche la solution de l'équation de propagation en un point  $\mathbf{r}$  de l'espace où un pulse d'une durée infinitésimale est émis à l'origine d'un repère cartésien et la grandeur  $\delta(t + \frac{r}{c})$  sera différente de zéro lorsque l'argument c'est à dire  $t + \frac{r}{c}$  sera égal à 0. La distance  $r$  entre la source et le récepteur étant positive le seul temps possible permettant d'annuler l'argument sera donc égal à  $t = -\frac{r}{c}$ . Si mathématiquement cette solution est acceptable, on se retrouve donc confronté à un problème physique puisqu'ici le signal serait reçu avant qu'il ne soit émis. Cette solution ne sera donc pas retenu. On ne retiendra donc que la fonction de Green retardé pour l'éqaution de propagation des ondes :

**Fonction de Green retardée**

$$g^{ret}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi r} \delta(t - \frac{r}{c})$$

Interprétation physique : La fonction de green retardée peut être interprétée comme une bulle de

savon qui commencerait à se gonfler à  $t = 0$  et de rayon croissant  $r = ct$ .

Le fait que ce pulse soit localisé spatialement est lié au caractère tridimensionnel de l'espace considéré et explique entre autres phénomènes le fait qu'un flash lumineux n'est vu que pour une durée égale à la durée de son émission et avec un retard proportionnel à la distance séparant l'observateur de l'appareil photographique.

#### 7.4.1 Les potentiels retardés :

Si on en revient au calcul des potentiels  $\mathbf{A}$  et  $V$  dans une jauge de Lorentz, on a :

$$V^{ret}(\mathbf{r}, t) = \left[ g^{ret} \star \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right] (\mathbf{r}, t) \quad (7.12)$$

et

$$\mathbf{A}^{ret}(\mathbf{r}, t) = [g^{ret} \star \mu_0 \mathbf{j}] (\mathbf{r}, t) \quad (7.13)$$

D'où :



#### Potentiels retardés

$$\Phi^{ret}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}{c})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d\mathbf{r}' \quad (7.14)$$

$$\mathbf{A}^{ret}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}{c})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d\mathbf{r}' \quad (7.15)$$

$$(7.16)$$

Considérons un domaine de l'espace  $\Omega$  où les charges sont réparties, supposons de plus que ces charges apparaissent à l'instant  $t = 0$  et disparaissent à l'instant  $t = \tau$ . Considérons un observateur placé en un point  $M$  de l'espace, avec  $D_{min}$  et  $D_{max}$  étant respectivement les distances minimales et maximales entre l'observateur et le domaine où apparaissent les charges.

- Entre l'instant  $t = 0$  et  $t = \frac{D_{min}}{c}$ , il n'existe pas de points dans  $\Omega$  vérifiant  $t - \frac{D_{min}}{c} = 0$ , donc les potentiels  $\Phi$  et  $\mathbf{A}$  seront nuls ainsi que les champs qui en découlent.
- Entre l'instant  $t = \frac{D_{min}}{c}$  et  $t = \frac{D_{max}}{c} + \tau$ , les potentiels seront non nuls, et il existera un champ électromagnétique en  $M$ .
- Au delà de  $t = \frac{D_{max}}{c} + \tau$ , les potentiels seront à nouveau nuls, ainsi que les champs qui en découlent.

Ainsi le point  $M$  est informé de ce qu'il se passait au point  $M'$  avec un retard  $\frac{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}{c}$ . D'où le nom de potentiels retardés.

Ainsi ce phénomène de propagation se fait avec une vitesse  $c$ . On pourra de plus constater que dans le vide quelle que soit la fréquence du signal émis elles se propagent toutes à la même vitesse.



# Chapitre 8

## Ondes planes dans le vide

Toute solution des équations de Maxwell qui est finie continue en tout point d'un domaine homogène de l'espace représente un champ électromagnétique possible. Nous avons vu dans le chapitre précédent comment nous pouvions relier les sources aux champs par l'intermédiaire des potentiels scalaires et vecteurs. On se propose ici d'étudier les solutions les plus simples des équations de Maxwell c'est à dire celles qui dépendent du temps et d'une seule variable d'espace et sans qu'elles soient reliées à des sources. Les facteurs caractérisant la propagation de ces champs élémentaires déterminent pour une large part la propagation des champs que l'on rencontre dans des problèmes plus complexes. Nous allons étudier dans le chapitre suivant la propagation des ondes planes se déplaçant dans le vide et sans se préoccuper de la nature des sources qui auraient pu engendrer de tels champs.

### 8.1 propagation des ondes planes :

Nous supposerons que nous sommes dans le vide dans un espace sans source ni courant, les équations de Maxwell peuvent alors s'écrire :

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (8.1)$$

$$\text{div}(\mathbf{E}) = 0 \quad (8.2)$$

$$\text{rot}\mathbf{B} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (8.3)$$

$$\text{div}(\mathbf{B}) = 0 \quad (8.4)$$

On va chercher des solutions de ce système qui dépendent du temps et d'une coordonnée  $u$  mesurée le long d'un axe dont la direction est définie par la direction  $\mathbf{n}$ .

Notre hypothèse implique que les vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont, à chaque instant, constants en direction et en amplitude dans n'importe quel plan à  $\mathbf{n}$ . Ces plans sont définis par l'équation :

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (8.5)$$

#### 8.1.1 Propriétés des champs :

Les champs sont de la forme :

$$\mathbf{E} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}(u, t) \quad (8.6)$$

$$\mathbf{B} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B}(u, t) \quad (8.7)$$

ainsi les dérivées partielles par rapport à un groupe de coordonnées rectangulaires peuvent être mises sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x} = n_x \frac{\partial}{\partial u} \quad (8.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = n_y \frac{\partial}{\partial u} \quad (8.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = n_z \frac{\partial}{\partial u} \quad (8.10)$$

$$(8.11)$$

L'opérateur gradient se réécrit :

$$\mathbf{grad} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (8.12)$$

$$= (\mathbf{i} n_x + \mathbf{j} n_y + \mathbf{k} n_z) \frac{\partial}{\partial u} \quad (8.13)$$

$$= \mathbf{n} \frac{\partial}{\partial u} \quad (8.14)$$

En effectuant le même raisonnement, on obtient pour les opérateurs **rot** et **div** :

$$\mathbf{rot}* = \mathbf{n} \wedge \frac{\partial*}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(\mathbf{n} \wedge *) \quad (8.15)$$

$$\mathbf{div}* = \mathbf{n} \cdot \frac{\partial*}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}(\mathbf{n} \cdot *) \quad (8.16)$$

On peut réécrire les équations de Maxwell en tenant compte des relations précédentes :

$$\mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (8.17) \qquad \qquad \qquad \mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial u} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (8.19)$$

$$\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u} = 0 \quad (8.18) \qquad \qquad \qquad \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial u} = 0 \quad (8.20)$$

On résoud ce système en dérivant d'abord 8.17 par rapport à  $u$  puis en le multipliant vectoriellement par  $\mathbf{n}$ , on dérive ensuite 8.19 par rapport à  $t$ . Il vient :

$$\mathbf{n} \times \left( \mathbf{n} \times \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial u^2} \right) = \mathbf{n} \left( \mathbf{n} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial u^2} \right) - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial u^2} \quad (8.21)$$

$$= -\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial u^2} \quad (8.22)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t \partial u} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (8.23)$$

En éliminant  $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{B}$  de ce système d'équations on obtient une équation vérifiée par  $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{B}$  :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial u^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (8.24)$$

Puisque  $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u})$  est identiquement nul, il découle de 8.17 que :  $\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ . Compte tenu de 8.20 on obtient :

$$\mathbf{n} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dt + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial u} du \right) = \mathbf{n} \cdot d\mathbf{B} = 0 \quad (8.25)$$

On en conclut donc qu'une variation de la composante de  $\mathbf{B}$  par rapport à  $u$  ou  $t$  est incompatible avec l'hypothèse d'un champ constant à tout instant dans des plans perpendiculaires à l'axe porté

par  $\mathbf{n}$ . L'équation 8.25 admet la possibilité d'un champ statique dans l'axe des  $u$  mais puisque nous ne considérerons que des champs variables, nous poserons :

$$\mathbf{B}_u = 0 \quad (8.26)$$

Par le même raisonnement, on obtient :

$$\mathbf{n} \cdot \left( \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad (8.27)$$

En combinant cette équation avec 8.18, on aboutit à :

$$\mathbf{n} \cdot d\mathbf{E} = 0 \quad (8.28)$$

Comme pour  $\mathbf{B}$  on peut en déduire qu'il n'existe de composante suivant la direction de propagation pour le champ électrique. On a donc prouvé que le champ électromagnétique est transversal. Les vecteurs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{E}$  soumis à la condition 8.6 sont situés dans des plans transverses à l'axe des  $u$ .

### 8.1.2 Recherche d'une solution :

On va chercher maintenant les relations que doivent vérifier les composantes de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  afin de satisfaire les équations de Maxwell. On va introduire maintenant un nouveau système de coordonnées rectangulaires  $(u, v, w)$  dont l'origine coïncide avec celui du système  $(x, y, z)$  et dont l'axe  $u$  est dirigé suivant  $\mathbf{n}$ . Les composantes de  $\mathbf{E}$  dans ce nouveau système d'axe sont  $E_v, E_w$  et  $E_u = 0$ .  $E_v, E_w$  vérifient tous deux l'équation 8.24 qui peut être résolue en séparant les variables de temps et d'espace.

$$E_v = f_1(u)f_2(t) \quad (8.29)$$

On obtient :

$$\frac{1}{f_1} \frac{d^2 f_1}{du^2} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{f_2} \frac{d^2 f_2}{dt^2} = -k^2 \quad (8.30)$$

Le terme  $-k^2$  est une constante de séparation. La solution générale de l'équation en  $f_1$  est :

$$f_1(u) = A \exp^{iku} + B \exp^{-iku} \quad (8.31)$$

A et B sont des constantes complexes. Pour la fonction  $f_2$  nous choisirons la solution particulière :

$$f_2(t) = C \exp^{-pt} \quad (8.32)$$

$p$  devant satisfaire l'équation :

$$p^2 + \frac{k^2}{\mu_0 \varepsilon_0} = 0 \quad (8.33)$$

Il existe donc une relation entre  $p$  et la constante de séparation  $k$ , ainsi en fixant la valeur de l'une l'autre est déterminée. On peut tirer une solution particulière de la forme :

$$E_v = E_{1v} \left( \exp^{iku-pt} \right) + E_{2v} \left( \exp^{-iku-pt} \right) \quad (8.34)$$

De même pour l'autre composante rectangulaire :

$$E_w = E_{1w} \left( \exp^{iku-pt} \right) + E_{2w} \left( \exp^{-iku-pt} \right) \quad (8.35)$$

En combinant ces deux dernières équations, on obtient finalement :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \left( \exp^{iku-pt} \right) + \mathbf{E}_2 \left( \exp^{-iku-pt} \right) \quad (8.36)$$

Le champ magnétique  $\mathbf{B}$  satisfait la même équation il peut donc aussi se mettre sous la forme :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \left( \exp^{iku-pt} \right) + \mathbf{B}_2 \left( \exp^{-iku-pt} \right) \quad (8.37)$$

Il faut ensuite déterminer les relations entre les composantes de  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{E}$ . Pour cela, on va dériver  $\mathbf{E}$  par rapport à  $u$  et  $\mathbf{B}$  par rapport au temps. On obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial u} = ik\mathbf{E}_1 \left( \exp^{iku-pt} \right) - ik\mathbf{E}_2 \left( \exp^{-iku-pt} \right) \quad (8.38)$$

En introduisant ces dérivées dans l'équation 8.17

$$(ik\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 - p\mathbf{B}_1) \left( \exp^{iku-pt} \right) - (ik\mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 + p\mathbf{B}_2) \left( \exp^{-iku-pt} \right) = 0 \quad (8.39)$$

Les coefficients des exponentielles doivent s'annuler de manière indépendante, ce qui conduit à :

$$\mathbf{B}_1 = \frac{ik}{p} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 \quad (8.40)$$

$$\mathbf{B}_2 = -\frac{ik}{p} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 \quad (8.41)$$

$$(8.42)$$

Exprimé en coordonnées rectangulaires, on obtient :

$$B_{1v} = -\frac{ik}{p} E_{1w} \quad (8.43)$$

$$B_{2v} = +\frac{ik}{p} E_{2w} \quad (8.44)$$

$$(8.45)$$

$$B_{1w} = +\frac{ik}{p} E_{1w} \quad (8.46)$$

$$B_{2w} = -\frac{ik}{p} E_{2w} \quad (8.47)$$

$$(8.48)$$

Puisque  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ , il suit que  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ . Les vecteurs électrique et magnétique des champs ainsi définis sont orthogonaux entre eux et à la direction de propagation.

## Chapitre 9

# Équations de Maxwell en régime harmonique :

Les équations de Maxwell sont linéaires par rapport aux sources dans le vide et nous verrons un peu plus tard que pour une fréquence donnée et dans le cas de l'étude matériau linéaire, une source à une fréquence donnée dans le vide donnera un champ ayant cette même fréquence.  
L'utilisation de la transformation de Fourier et du théorème de superposition permettra de décomposer toute onde électromagnétique en composantes de Fourier chacune des composantes correspondra à une onde monochromatique

### 9.1 Réécriture des équations de Maxwell :

Si nous supposons que la densité de charges et de courant peuvent maintenant s'exprimer de la manière suivante :

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \phi(\mathbf{r})) \quad (9.1)$$

où  $\rho_0(\mathbf{r})$  est une fonction réelle et

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}_0(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \phi(\mathbf{r})) \quad (9.2)$$

alors on peut aisément montrer que les potentiels vecteurs et scalaires  $\mathbf{A}$  et  $V$  ainsi que les champs électromagnétiques qui en découlent peuvent se mettre sous la forme :

$$\Gamma(\mathbf{r}, t) = \Gamma_0(\mathbf{r}, t) \cos(\omega t + \psi(\mathbf{r})) \quad (9.3)$$

On parle dans ce cas là de champs harmoniques et de pulsation  $\omega$ . On va associer à ces fonctions réelles et de période  $\frac{2\pi}{\omega}$  une amplitude complexe de la manière suivante :

$$S = S_+(s(t)) = \left( s(t) + i s \left( t - \frac{\pi}{2\omega} \right) \right) \exp^{-i\omega t} \quad (9.4)$$

ou bien

$$S = S_-(s(t)) = \left( s(t) - i s \left( t - \frac{\pi}{2\omega} \right) \right) \exp^{i\omega t} \quad (9.5)$$

Si l'on préfère directement travailler avec la transformée de Fourier des signaux, on pourra constater

que :

$$S_+(s(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \exp^{-i\omega t} dt \quad (9.6)$$

$$S_-(s(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \exp^{i\omega t} dt \quad (9.7)$$

(9.8)

Dans le premier cas on dit que l'on adopte une dépendance temporelle en  $\exp^{i\omega t}$ , dans le deuxième cas on parlera de dépendance temporelle en  $\exp^{-i\omega t}$ . Supposons que  $s$  s'écrive sous la forme :

$$s(t) = a \cos(\omega t + \phi) \quad (9.9)$$

L'amplitude complexe  $S_+$  associée à  $s$  en supposant une dépendance temporelle en  $\exp^{i\omega t}$  est :

$$\begin{aligned} S_+ &= S_+(s(t)) = a \exp(i\phi) \\ S_- &= S_-(s(t)) = a \exp(-i\phi) \end{aligned}$$

En régime harmonique, on peut associer aux sources comme aux champs une amplitude complexe. Cette dernière sera représentée par une fonction complexe ne dépendant que des variables d'espace. Inversement, il est très facile de retrouver  $s$  à partir de  $S$  : Par exemple

$$[s(t) - iS_-(t - \frac{\pi}{2\omega})] = S_- \exp^{-i\omega t} \quad (9.10)$$

D'où comme  $s$  est réel :

$$\begin{aligned} s(t) &= \operatorname{Re}(S_+ \exp^{i\omega t}) \\ s(t) &= \operatorname{Re}(S_- \exp^{-i\omega t}) \end{aligned}$$

Les deux opérateurs sont linéaires et par exemple :

$$S_- \left( \frac{ds(t)}{dt} \right) = -i\omega S_-(s(t)) \quad (9.11)$$

Attention

$$S_+ \left( \frac{ds(t)}{dt} \right) = +i\omega S_+(s(t)) \quad (9.12)$$

Si  $\mathfrak{L}$  est un opérateur agissant uniquement sur les variables d'espace alors :

$$S_- (\mathfrak{L}(s(\mathbf{r}, t))) = \mathfrak{L}\{S_-(s(\mathbf{r}, t))\} \quad (9.13)$$

Si  $\mathcal{E}, \mathcal{B}$  sont les vecteurs complexes associés aux grandeurs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ , alors les quatre équations de Maxwell se réécrivent, dans le vide, de la manière suivante :



### Équations de Maxwell dans le vide (dépendance en $-i\omega t$ )

$$\operatorname{rot} \mathcal{E} = i\omega \mathcal{B} \quad (9.14)$$

$$\operatorname{div}(\mathcal{E}) = \frac{\mathcal{R}}{\varepsilon_0} \quad (9.15)$$

$$\operatorname{rot} \mathcal{B} = \mu_0 | - i\omega \varepsilon_0 \mu_0 \mathcal{E} \quad (9.16)$$

$$\operatorname{div}(\mathcal{B}) = 0 \quad (9.17)$$

Remarques :

- Avant d'écrire les équations vérifiées par les amplitudes complexes des champs en régime harmonique il est absolument impératif de définir une dépendance temporelle étant donnée qu'elle va modifier les signes de deux des quatre équations de Maxwell.
- La variable temps n'apparaît plus dans les équations de Maxwell en régime harmonique ainsi que dans les amplitudes complexes des champs, par contre on ne manipule plus de grandeurs réelles mais des grandeurs complexes, les différences de temps d'arrivée apparaissant comme des différences de phase entre les signaux.
- En régime harmonique, c'est à dire pour un signal émetteur ayant une fréquence unique, on suppose de manière implicite que le signal a été émis depuis des temps infiniment reculés et sera de durée infini, il emplit donc tout l'espace.

## 9.2 Retour sur les ondes planes en régime harmonique

Nous allons revenir à l'étude des propriétés des ondes planes dans le vide en régime harmonique. Dans le cas qui nous intéresse, on a le paramètre  $p$  défini dans l'équation 8.32 qui est égal à  $i\omega$ . Ainsi l'amplitude complexe des champs associés au champ électrique  $\mathbf{E}$  s'écrit :

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) = \mathcal{E}_1 \exp^{iku} + \mathcal{E}_2 \exp^{-iku} \quad (9.18)$$

de même pour la composante complexe associée au vecteur  $\mathbf{B}$  :

$$\mathcal{B}(\mathbf{r}) = \mathcal{B}_1 \exp^{iku} + \mathcal{B}_2 \exp^{-iku} \quad (9.19)$$

$k$  est relié à  $\omega$  par l'intermédiaire de la relation 8.33 et qui ici donne :



### Relation de dispersion dans le vide

$$k = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{\omega}{c} \quad (9.20)$$

Ces champs sont donc la somme d'amplitudes complexes associées à des ondes planes monochromatiques se déplaçant vers les  $u > 0$  et les  $u < 0$ . Supposons que l'on ne considère que la propagation suivant  $u$ . Introduisons le vecteur  $\mathbf{k}$  par :

$$\mathbf{k} = k \mathbf{n} \quad (9.21)$$

On a par simple application du produit scalaire dans une répère orthonormé :

$$ku = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$$

L'amplitude complexe du champ électrique associé à une onde plane se propageant suivant  $\mathbf{k}$  peut donc s'écrire :

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) = \mathcal{E}_1 \exp^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

On en déduit donc aisément que  $\mathcal{E}$  est une fonction périodique de l'espace suivant la direction de propagation puisque pour tout entier  $n$  on a :

$$\mathcal{E}(\mathbf{r} + n \frac{2\pi}{k} \mathbf{k}) = \mathcal{E}(\mathbf{r})$$

La fonction  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  est une fonction doublement périodique puisqu'il existe un réel  $\lambda$  tel que :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r} + \lambda \mathbf{k}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (9.22)$$

$\lambda$  est appelée période spatiale ou longueur d'onde.

Il existe bien sur un réel  $T$  appelé période temporelle et si  $\nu$  est la fréquence du signal, on a les égalités :



### Relations importantes

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (9.23)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (9.24)$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad (9.25)$$

## 9.3 Relations entre $\mathbf{k}$ , $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$

On a :

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) = \mathcal{E}_1 \exp^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (9.26)$$

et

$$\operatorname{div}(\mathcal{E}(\mathbf{r})) = \exp^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \operatorname{div}(\mathcal{E}_1) + \operatorname{grad}\{\exp^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\} \mathcal{E}_1 \quad (9.27)$$

On peut facilement montrer que :

$$\operatorname{grad}\{\exp^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\} = i\mathbf{k} \exp^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (9.28)$$

D'où :

$$i \exp^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{k} \cdot \mathcal{E}_1 = 0 \quad \text{d'où} \quad \mathbf{k} \cdot \mathcal{E}_1 = 0 \quad (9.29)$$

De la même manière à partir de l'équation 9.14 et après manipulation du rotationnel, on obtient :

$$i\omega \mathcal{B}_1 = i\mathbf{k} \times \mathcal{E}_1 \quad (9.30)$$

Ce qui nous amène à :

$$\mathcal{B}_1 = \frac{\mathbf{k} \times \mathcal{E}_1}{\omega} = \frac{\mathbf{n} \times \mathcal{E}_1}{c} \quad (9.31)$$

On en déduit donc qu'en régime harmonique, une onde plane peut être caractérisée par sa direction de propagation  $\mathbf{k}$ , le vecteur complexe champ électrique  $\mathcal{E}$  et le vecteur complexe induction magnétique  $\mathcal{B}$ .



### Relations entre $\mathbf{k}$ , $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$

Dans le vide, les vecteurs les vecteurs  $\mathbf{k}$ ,  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{B}$  forment un trièdre direct et on a la relation :

$$\mathcal{B} = \frac{\mathbf{k} \times \mathcal{E}}{\omega} = \frac{\mathbf{n} \times \mathcal{E}}{c} \quad (9.32)$$

Remarques :

- On peut remarquer que cette relation est aussi vérifiée dans le vide pour les champs dans le domaine temporel.
- Attention ici, lors de l'utilisation de l'expression précédente, le vecteur  $\mathbf{k}$  n'est pas un vecteur normé.

## 9.4 Polarisation des ondes planes :

Nous venons de voir que pour une onde plane en régime harmonique, le champ électrique et l'induction magnétique étaient perpendiculaires entre eux à tout instant, ils sont constants à un temps donné dans n'importe quel plan orthogonal à la direction de propagation et ils sont transverses à la direction de propagation. L'état de polarisation d'une onde sera défini en chaque point  $\mathbf{r}$  par la trajectoire d'un point  $P$  vérifiant :

$$\mathbf{OP}(t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (9.33)$$

Il est important de noter que d'une manière générale, l'état de polarisation peut changer d'un point à l'autre de l'espace. Pour déterminer le lieu de  $P$ , il faut éliminer la composante variable  $\phi = ku - \omega t$  entre les différentes composantes  $E_v$  et  $E_w$  du champ. Sans perte de généralité, on peut considérer une onde plane se propageant suivant la direction  $Oz$ . Ainsi on a :

$$\mathbf{k} = k\mathbf{e}_z$$

Les champs électromagnétiques ( $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ ) sont alors contenus dans les plans  $z = cste$  et dans le repère orthonormé  $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ , on peut écrire les composantes de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  de la manière suivante :

$$\mathbf{E} \begin{pmatrix} E_{mx} \cos(kz - \omega t) \\ E_{my} \cos(kz - \omega t + \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Afin de ne pas alourdir l'écriture l'origine des phases a été choisie de telle sorte que  $\varphi_x = 0$  et nous allons nous placer à une valeur de  $z$  donnée et fixée. Nous allons éliminer le temps entre les composantes du champ électrique. Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} E_x &= E_{mx} \cos(\omega t) \\ E_y &= E_{my} \cos(\omega t) \cos(\varphi) + \sin(\omega t) \sin(\varphi) \end{aligned}$$

qui peut se réécrire :

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{mx} & 0 \\ E_{my} \cos(\varphi) & E_{my} \sin(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

On peut aisément en déduire l'expression de l'amplitude complexe du champ électrique :

$$\mathcal{E} \begin{vmatrix} E_{mx} \\ E_{my} \exp(i\varphi) \\ 0 \end{vmatrix}$$

on en déduit donc le rapport des amplitudes complexes des composantes du champ électrique :

$$r = \frac{\mathcal{E}_{my}}{\mathcal{E}_{mx}} = |r| \exp(i\varphi) = \frac{E_{my}}{E_{mx}} \exp(i\varphi) \quad (9.34)$$

Nous allons revenir au régime temporel et nous ferons ensuite le lien entre les amplitudes complexes du champ électrique et l'état de polarisation de l'onde incidente. Afin de pouvoir décrire le mouvement de l'extrémité du champ électrique il faut inverser la matrice  $Q$ . Après calculs on obtient :

$$Q^{-1} = \frac{1}{E_{mx} E_{my} \sin(\varphi)} \begin{bmatrix} E_{my} \sin(\varphi) & 0 \\ -E_{my} \cos(\varphi) & E_{mx} \end{bmatrix}$$

Pour pouvoir écrire l'équation que vérifie le lieu de  $P$  sur une période de manière générale il faut d'abord traiter le cas où la matrice  $Q$  n'est pas inversible cela se produit lorsque  $\varphi = \pi$  ou  $0$  ainsi que lorsque une des composantes  $E_{mx}, E_{my}$  est nulle.

#### 9.4.1 Cas où $\varphi = \pi$ ou $0$

$$\varphi = 0$$

Les deux composantes sont en phase On obtient l'équation :

$$\left( \frac{E_x}{E_{mx}} - \frac{E_y}{E_{my}} \right)^2 = 0$$

D'où

$$Ey = \left( \frac{E_{mx}}{E_{my}} \right) E_x$$

$$\varphi = \pi$$

Les deux composantes sont en opposition de phase On obtient l'équation :

$$\left( \frac{E_x}{E_{mx}} + \frac{E_y}{E_{my}} \right)^2 = 0$$

D'où

$$Ey = - \left( \frac{E_{mx}}{E_{my}} \right) E_x$$

Pour ces deux valeurs de la phase, le champ électrique garde une direction fixe dans l'espace. On dit que l'onde est polarisée rectilignement ou bien que la polarisation est rectiligne. On se rend compte que dans ce cas là le rapport des amplitudes complexes du champ électrique  $r$  9.34 est un nombre réel pur.

De manière triviale si une des composantes du champ est nulle alors obligatoirement le vecteur champ électrique ne pouvant évoluer que suivant une seule composante, la polarisation sera également rectiligne.

#### Illustration d'une polarisation rectiligne

#### 9.4.2 Cas où $\varphi$ est différent de $0$ ou $\pi$

Quelques manipulations mathématiques nous permettent d'aboutir à :

$$\frac{E_y}{E_{my}} = \frac{E_x}{E_{mx}} \cos(\varphi) + \left( 1 - \frac{E_x^2}{E_{mx}^2} \right)^{\frac{1}{2}} \sin(\varphi)$$

Cette égalité peut se réécrire de manière à faire apparaître de manière plus explicite l'équation d'une conique :

$$\frac{E_y^2}{E_{my}^2} + \frac{E_x^2}{E_{mx}^2} - 2 \frac{E_x E_y}{E_{mx} E_{my}} \cos(\varphi) = \sin(\varphi)^2$$

Dans le cas général on retrouve l'équation d'une ellipse, on parlera alors de polarisation elliptique et le sens de parcours de l'ellipse au cours du temps va déterminer la nature de la polarisation droite ou gauche. On fait donc intervenir le vecteur  $\frac{d\mathbf{OP}}{dt}$  est si :

- $(\mathbf{OP} \times \frac{d\mathbf{OP}}{dt}) \cdot \mathbf{e}_z > 0$  on dira que l'onde est polarisée elliptiquement à gauche, dans ce cas là  $\varphi \in ]0, \pi[$ . On parle aussi de polarisation positive.
- $(\mathbf{OP} \times \frac{d\mathbf{OP}}{dt}) \cdot \mathbf{e}_z < 0$  on dira que l'onde est polarisée elliptiquement à droite et dans ce cas là  $\varphi \in ]\pi, 2\pi[$ . On parle dans ce cas de polarisation négative.

Si on regarde le rapport des amplitudes complexes du champs électrique, cette grandeur est un nombre complexe quelconque.

### Illustration d'une polarisation elliptique

#### 9.4.3 Cas où $E_{mx} = E_{my}$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$

SI on réinjecte ces grandeurs dans l'équation de la conique, on retrouve l'équation d'un cercle de rayon  $E_{mx}$ . On parlera alors dans ce cas là de polarisation circulaire gauche si  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  et droite si  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ . Le nombre  $r$  est ici imaginaire pur.

### Illustration d'une polarisation circulaire



# Chapitre 10

## Champ électromagnétique créé par un dipôle infinitésimal

Jusqu'à présent nous avons vu comment nous pouvions relier de manière formelle les champs électromagnétiques rayonnées par des charges ou des courants à ces sources par l'intermédiaire des potentiels vecteurs. Nous avons vu de plus une solution particulière des équations de Maxwell pouvant exister dans un milieu ne contenant ni charges ni de courant. On se propose d'étudier dans ce chapitre la forme des champs générés par une structure simple qui est le dipôle de Hertz.

Cette étude est importante car vous verrez dans le futur que le champ rayonné par des antennes peut se ramener à la superposition de champs produits par un ensemble de dipôles oscillants.

Nous verrons de plus à la fin de ce chapitre que le champ rayonné par ce dipôle peut être approché par une structure d'onde plane.

### 10.1 Potentiels vecteur et scalaire produit par un dipôle oscillant

On considère un système de deux charges électriques opposées  $+q$  située au point  $M_1$  et  $-q$  située au point  $M_2$ . Ces deux charges sont distantes de  $a$ . On va choisir une repère orthonormé et l'axe  $z$  sera tel que  $\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 = a\mathbf{e}_z$ , on va supposer de plus la charge  $q$  varie au cours du temps par l'établissement du courant  $i(t)$  variant le long de l'axe  $Oz$  entre les charges. La loi de conservation de la charge se traduit ici par l'égalité  $i = \frac{dq}{dt}$ . On se propose dans ce qui suit de calculer le champ électromagnétique en un point  $M$  de l'espace tel que  $\|\mathbf{OM}\| >> a$ , cette approximation va permettre d'assimiler le doublet à un dipôle avec un moment dipolaire égal à  $\mathbf{p} = qae_z$ . On va calculer en premier lieu les potentiels scalaire et vecteur créés par cette distribution. On va tout d'abord calculer le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ , le potentiel scalaire  $V$  se déduisant de la condition de jauge de Lorentz.

#### 10.1.1 Calcul du potentiel vecteur

Le calcul de  $\mathbf{A}$  va se faire à partir de l'expression 7.6. On a donc :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{e}_z \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{i \left( t - \frac{\|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\|}{c} \right)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} dz$$

où  $\mathbf{r} = \|\mathbf{OM}\|$  et  $\mathbf{r}' = \|\mathbf{OM}'\|$  les point  $M$  et  $M'$  correspondant respectivement au point d'observation et d'intégration sur la source.

Afin de simplifier le calcul de l'intégrale on va procéder à deux simplifications :

- La première va consister à négliger les dimensions de l'élément rayonnant par rapport à la distance à laquelle est située le point d'observation en d'autres termes on va supposer que  $a \ll r$  et donc le dénominateur dans l'équation précédente va être approximé par :

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| \approx \|\mathbf{r}\| = r$$

- En régime variable, l'intensité varie d'un point à un autre de la source, si l'on suppose que la source émet un rayonnement monochromatique on peut lui associer une longueur d'onde  $\lambda$  on va supposer de plus dans ce cas que la taille de l'émetteur est très inférieure à la longueur d'onde spatiale associée au rayonnement de la source, dans le cas d'un régime temporel on peut considérer l'ensemble du spectre des fréquences ainsi que l'ensemble des longueurs d'onde associées à ce spectre et supposer que la taille de l'émetteur sera toujours inférieure à la plus petite longueur d'onde du spectre émis. Cette approximation revient donc à négliger le déphasage qui existe entre les différents éléments émetteurs infinitésimaux constituant la source. Ainsi :

$$t - \frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}{c} \approx t - \frac{\|\mathbf{r}\|}{c} = t - \frac{r}{c}$$

On obtient, dans ce cadre d'approximation pour le potentiel vecteur :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} a \frac{i(t - \frac{r}{c})}{r} \mathbf{e}_z$$

Or  $i(t)$  est liée au moment dipolaire par l'intermédiaire de la loi de conservation de la charge :

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{1}{a} \frac{dp}{dt}$$

il vient :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \frac{dp}{dt'} \mathbf{e}_z \quad \text{avec} \quad t' = t - \frac{r}{c}$$

en posant  $\dot{p} = \frac{dp}{dt'}$



### Potentiel vecteur pour un dipôle de Hertz

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \dot{p} \frac{1}{r} \mathbf{e}_z \quad (10.1)$$

#### 10.1.2 Calcul du potentiel scalaire

Pour calculer  $V$  on va appliquer la jauge de Lorentz 7.5

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

On va utiliser :

$$\operatorname{div}(f \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} f + f \operatorname{div} \mathbf{u}$$

avec

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}_z \quad \text{et} \quad f = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \dot{p}$$

D'où

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{\dot{p} (t - \frac{r}{c})}{r^2} + \frac{\ddot{p} (t - \frac{r}{c})}{r} \right) (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_r)$$

Après multiplication par  $c^2$  et intégration par rapport à  $t$  on aboutit finalement à :



### Potentiel scalaire pour un dipôle de Hertz

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{p}{r^2} + \frac{\dot{p}}{rc} \right] (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_r) \quad (10.2)$$

## 10.2 Calcul des champs électromagnétiques rayonnés

Les champs ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ) vont être dérivés des potentiels par l'intermédiaire des relations  $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$  et  $\mathbf{E} = -\mathbf{grad} V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ . Etant donné la symétrie du problème posé et la dépendance radiale des potentiels, un bon système de coordonnées pour effectuer les calculs est le système sphérique. Ces calculs ne seront pas exposés ici et on aboutit à :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sin(\theta) \left( \frac{\dot{p}}{r^2} + \frac{\ddot{p}}{rc} \right) \mathbf{e}_\varphi \quad (10.3)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2 \cos(\theta) \left( \frac{p}{r^3} + \frac{\dot{p}}{r^2 c} \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sin(\theta) \left( \frac{p}{r^3} + \frac{\dot{p}}{r^2 c} + \frac{\ddot{p}}{rc^2} \right) \mathbf{e}_\theta \quad (10.4)$$

### 10.2.1 Champ rayonné à grande distance

A grande distance, c'est à dire pour  $r \gg \lambda$  où  $\lambda$  est la plus grande longueur d'onde spatiale correspondant à la plus petite fréquence contenue dans le signal incident, on ne va garder dans l'expression des champs rayonnés que les termes en  $\frac{1}{r}$ , on obtient alors :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sin(\theta) \left( \frac{\ddot{p}}{rc} \right) \mathbf{e}_\varphi \quad (10.5)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sin(\theta) \left( \frac{\ddot{p}}{rc^2} \right) \mathbf{e}_\theta \quad (10.6)$$

- Contrairement au champ électrique produit par un dipôle electrostatique, qui varie comme  $\frac{1}{r^3}$  le champ électromagnétique créé par un dipôle de Hertz varie comme  $\frac{1}{r}$  à grande distance.
- Les champs sont proportionnels à  $\ddot{p}$  et donc à l'accélération de la particule rayonnante, en régime harmonique l'amplitude des champs rayonnés sera donc proportionnel à  $\omega^2$ .
- on peut vérifier que pour un point  $M$  donné, le trièdre  $\mathbf{e}_r, \mathbf{E}, \mathbf{B}$  est un trièdre direct et les champs sont transverses à  $\mathbf{r}$ .
- Les amplitudes des champs vérifient de plus la propriété :  $\|\mathbf{B}\| = \frac{\mathbf{E}}{c}$ .



A grande distance, le champ électromagnétique rayonné par un dipôle de Hertz possède une structure locale d'onde plane.

Attention à ne pas oublier qu'il ne s'agit que de l'observation d'un phénomène dans une zone limitée de l'espace alors que la propagation occupe ce dernier complètement.



# Chapitre 11

## Energie électromagnétique dans le vide

Nous allons dans ce chapitre aborder la notion d'électromagnétique associée aux champs.

### 11.1 Loi de conservation :

#### 11.1.1 Puissance fournie aux charges

Considérons une distribution de charges, dans le vide, caractérisée par une densité volumique de charges  $\rho$  et une densité de courant en volume  $\mathbf{j}$ . On va considérer de plus les champs  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  correspondants. Les charges d'un élément de volume  $d\tau$  sont soumises à la force de Lorentz et la force magnétique étant perpendiculaire à la vitesse elle ne travaille pas pendant le déplacement des charges. On a donc :

$$\delta P = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} d\tau$$

En intégrant sur le volume on obtient la puissance totale fournie à l'ensemble des charges par les sources du champ électromagnétique :

$$P = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} d\tau$$

Nous allons réécrire cette égalité afin de faire apparaître des grandeurs plus explicites.

#### 11.1.2 Théorème de Poynting

L'équation 6.2 permet d'exprimer  $\mathbf{j}$  en fonction des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ . D'où :

$$\begin{aligned}\mathbf{j} &= \text{rot} \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \mathbf{E}) \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} &= \mathbf{E} \cdot \text{rot} \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \mathbf{E}) \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} &= \mathbf{E} \cdot \text{rot} \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_0 \frac{\|\mathbf{E}\|^2}{2} \right)\end{aligned}$$

On va de plus développer le premier terme du membre de gauche de l'équation précédente en utilisant une formule d'analyse vectorielle :

$$\text{div} \left( \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right) = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot \text{rot}(\mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot \text{rot} \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right)$$

En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday 6.3, on aboutit finalement à :

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = -\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_0 \frac{\|\mathbf{E}\|^2}{2} + \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2\mu_0} \right)$$

On obtient l'égalité de Poynting :



### Identité de Poynting

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_0 \frac{\|\mathbf{E}\|^2}{2} + \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2\mu_0} \right) + \operatorname{div} \mathbf{P} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \quad \text{ou} \quad \mathbf{P} = \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \quad (11.1)$$

#### 11.1.3 Signification Physique

Le vecteur  $\mathbf{P}$  est appelé vecteur de Poynting.

Nous pouvons remarquer que  $\mathbf{P}$  a la dimension d'une énergie divisée par une aire et un temps. Ensuite, si on reprend l'expression précédente et qu'on l'intègre sur un volume  $\mathcal{V}$ . On a :

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_0 \frac{\|\mathbf{E}\|^2}{2} + \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2\mu_0} \right) d\tau + \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{P} d\tau = - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} d\tau \quad (11.2)$$

Le premier terme de l'équation, si le volume  $\mathcal{V}$  est choisi fixe au cours du temps

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_0 \frac{\|\mathbf{E}\|^2}{2} + \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2\mu_0} \right) d\tau = \frac{dE_{champ}}{dt}$$

correspond à la variation instantanée de la densité d'énergie électromagnétique dans le volume  $\mathcal{V}$ . Cette grandeur peut être vue comme la somme des deux grandeurs associées au champ électriques et magnétiques que l'on a déjà rencontrées par ailleurs 2.14 et 5.9.

Le dernier terme de l'égalité

$$\int_{\mathcal{V}} -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} d\tau = \frac{dE_{meca}}{dt}$$

correspond à la conversion d'énergie électromagnétique en énergie mécanique ou en chaleur. On peut considérer ce terme comme étant un accroissement de l'énergie des particules chargées dans le volume. La conservation de l'énergie nous amène donc à :

$$\frac{d(E_{meca} + E_{champ})}{dt} = - \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{P} d\tau = - \int_{\mathcal{S}} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} ds$$

Ainsi on en déduit que la somme de la variation d'énergie électromagnétique et mécanique à l'intérieur de  $\mathcal{V}$  est égale au flux sortant de  $\mathbf{P}$  à travers  $\mathcal{S}$  (un flux sortant entraînant une diminution d'énergie d'où le signe  $-$  qui apparaît dans l'équation).

## 11.2 Energie associée à une onde plane

### 11.2.1 Théorème de Poynting

On considère un domaine de l'espace au sein duquel il n'y a ni charges ni courant et on suppose qu'il existe une onde électromagnétique  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ , le théorème de Poynting établi au paragraphe précédent s'écrit localement

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon_0 \frac{\|\mathbf{E}\|^2}{2} + \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2\mu_0} \right) = -\operatorname{div} \mathbf{P} \quad (11.3)$$

Par intégration sur un volume  $\mathcal{V}$  on peut en déduire une relation entre la variation d'énergie électromagnétique contenue dans  $\mathcal{V}$  et la puissance rayonnée vers l'extérieur de  $\mathcal{V}$  par :

$$\int_{\mathcal{V}} \left( \varepsilon_0 \frac{\|\mathbf{E}\|^2}{2} + \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2\mu_0} \right) d\tau = \frac{dE_{champ}}{dt} = -P_{rayonne}$$

où  $P_{rayonne}$  est la puissance rayonnée par l'onde électromagnétique à travers la surface  $\mathcal{S}$  délimitant  $\mathcal{V}$  et est égale au flux du vecteur de Poynting à travers  $\mathcal{S}$

$$P_{rayonne} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} ds$$

Dans le vide une variation d'énergie électromagnétique dans un volume donné implique donc nécessairement un rayonnement électromagnétique à travers la surface de ce volume.

### 11.2.2 Flux d'énergie associé à une onde plane

Dans le cas d'une onde plane on a la relation :

$$\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \frac{\mathbf{E}}{c}$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire suivant la direction de propagation. La densité d'énergie électromagnétique s'écrit :

$$\varepsilon_0 \frac{\|\mathbf{E}\|^2}{2} + \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{2\mu_0} = \varepsilon_0 \|\mathbf{E}\|^2 = \frac{\|\mathbf{B}\|^2}{\mu_0}$$

L'énergie est donc équirépartie entre les termes électrique et d'induction magnétique. Le vecteur de Poynting a pour expression :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \\ &= \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{E}}{\mu_0 c} \\ &= \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \|\mathbf{E}\|^2 \mathbf{n} \end{aligned}$$

Le vecteur de Poynting représente donc un courant d'énergie électromagnétique qui s'écoule dans la direction de propagation à la vitesse  $c$ .

## 11.3 Vecteur de Poynting en régime harmonique

Les résultats vus précédemment sont valables en régime harmonique mais ces grandeurs ne s'expriment pas simplement en fonction des amplitudes complexes des champs associés aux champs réels, on va donc calculer la moyenne sur une période temporelle du vecteur de Poynting afin de simplifier le calcul. On a par définition du vecteur de Poynting :

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0}$$

En utilisant les amplitudes complexes cette égalité s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \frac{1}{\mu_0} \operatorname{Re} (\mathcal{E} \exp^{-i\omega t}) \times \operatorname{Re} (\mathcal{B} \exp^{-i\omega t}) \\ &= \frac{1}{4\mu_0} [\mathcal{E} \exp^{-i\omega t} + \mathcal{E}^* \exp^{i\omega t}] \times [\mathcal{B} \exp^{-i\omega t} + \mathcal{B}^* \exp^{i\omega t}] \\ &= \frac{1}{4\mu_0} [\mathcal{E} \times \mathcal{B} \exp^{-2i\omega t} + \mathcal{E}^* \times \mathcal{B}^* \exp^{2i\omega t} + \mathcal{E} \times \mathcal{B}^* + \mathcal{E}^* \times \mathcal{B}]\end{aligned}$$

On en déduit donc que la moyenne temporelle de  $\mathbf{P}$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{P} dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{4\mu_0} [\mathcal{E} \times \mathcal{B} \exp^{-2i\omega t} + \mathcal{E}^* \times \mathcal{B}^* \exp^{2i\omega t} + \mathcal{E} \times \mathcal{B}^* + \mathcal{E}^* \times \mathcal{B}] dt \\ &= \frac{1}{4\mu_0} [\mathcal{E} \times \mathcal{B}^* + \mathcal{E}^* \times \mathcal{B}] \\ &= \operatorname{Re} \left[ \mathcal{E} \times \frac{\mathcal{B}^*}{2\mu_0} \right]\end{aligned}$$

En régime harmonique et dans le vide, le débit moyen d'énergie à travers une surface  $\mathcal{S}$  est égal au flux de la partie réelle d'un vecteur que l'on appellera vecteur de Poynting complexe :



### Vecteur de Poynting complexe

$$\mathcal{P} = \mathcal{E} \times \frac{\mathcal{B}^*}{2\mu_0} \quad (11.4)$$

# Chapitre 12

## Les diélectriques

Jusqu'à présent nous n'avons discuté des propriétés des champs que dans le vide. Dans ce milieu les charges sont libres, c'est à dire que sous l'action des d'un champ électrique ces charges peuvent être réparties dans l'espace de façon discrète ou continue. Nous savons qu'il existe une classe de substances appelées diélectriques dans lesquelles les charges ne sont pas mobiles ou le sont très peu. Dans ces milieux les électrons sont liés aux atomes et les seuls mouvements possibles, sous l'action d'un champ électrique externe sont de petits déplacements, en général très faibles par rapport aux dimensions atomiques autour de la position d'équilibre. Les électrons sont ainsi déplacés en sens contraire de celui du champ tandis que les charges positives (noyaux atomiques) sont déplacés dans le sens du champ. Les propriétés d'un matériau diélectrique pourraient être décrites à l'aide des éléments de théorie que nous avons vu jusqu'à présent et décrire chaque atome en termes de charges, ce type de formalisme n'est cependant pas adapté lorsque l'on veut décrire le comportement d'un milieu diélectrique globalement neutre et en interaction avec un champ électromagnétique.

Nous allons donc voir dans ce chapitre comment nous pouvons décrire, de manière satisfaisante vis à vis du champ électromagnétique, un matériau diélectrique et comment les propriétés des matériaux vont être prises en compte dans les équations.

Nous allons nous intéresser en premier lieu à l'interaction d'un **champ électrostatique** avec un milieu diélectrique.

### Comportement microscopique de la matière

L'objectif, ici, n'est certainement pas de parfaitement décrire le comportement d'un atome soumis à un champ électrostatique mais d'en dégager des "lois" de comportement.

On considère un atome isolé et nous allons supposer que cet atome est sphérique, il est constitué d'un nuage électronique de charge totale  $-Q$  de forme sphérique et centré autour d'un noyau de charge totale  $+Q$ . Si on considère un point d'observation  $M$  situé à grande distance par rapport aux dimensions de l'atome, le champ électrique produit en  $M$  par l'atome complet est égal à :

$$\mathbf{E}_{+Q} + \mathbf{E}_{-Q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \mathbf{0}$$

Ainsi le champ électrique est nul. Si maintenant on applique un champ externe  $\mathbf{E}_{ext}$  le nuage électronique et le noyau vont respectivement se déplacer en sens inverse et dans le sens de  $\mathbf{E}_{ext}$ . Ainsi le centre des charges positives et négatives ne va plus coïncider et vu de  $M$  l'atome va apparaître comme un ensemble de deux charges distantes de  $\delta$  l'une de l'autre. Au point  $M$  au champ  $\mathbf{E}_{ext}$  viendra se

superposer le champ créé par ce dipôle électrique  $\mathbf{E}_d$ . On a donc :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{ext} + \mathbf{E}_d$$

En l'absence d'atome le champ au point  $M$  est celui du champ externe, la présence de l'atome a modifié le champ externe, ce même champ a induit un moment dipolaire au sein de l'atome, ce moment dipolaire va bien sur dépendre du champ  $\mathbf{E}_{ext}$ . Parmi les différents types de milieu on va notamment rencontrer :

- des milieux pour lesquels les molécules vont avoir un barycentre des charges positives qui va coïncider avec le barycentre des charges négatives, ces molécules sont dites non polaires, les moments dipolaires sont induits par le champ appliqué et on parle dans ce cas là de *polarisation électronique*.
- des milieux pour lesquels les barycentres des charges ne coïncident pas au niveau moléculaire (molécules asymétriques telles que l'eau ou le monoxyde de carbone). Ces molécules sont naturellement polarisées cependant l'agitation thermique oriente de manière aléatoire ces moments dipolaires et ils n'en résulte pas un champ électrique. L'action d'un champ extérieur va tendre à orienter ces moments dipolaires dans le sens du champ, c'est ce que l'on appelle la *polarisation d'orientation*.
- des milieux solides qui ont une structure cristalline de type réseau ionique et pour lesquels un champ externe va déplacer dans le sens du champ les ions positifs et les ions négatifs dans le sens opposé.

### Le vecteur polarisation électrique

On va considérer une substance diélectrique occupant un volume  $\mathcal{V}$ . On va se placer à une échelle de mesure intermédiaire par rapport à l'échelle macroscopique. On va considérer qu'un point de mesure pour le phénomène que l'on cherche à caractériser peut être considéré d'un point de vue atomique comme un volume  $\Delta v$  contenant un grand nombre de molécules. Ainsi si le diélectrique est polarisé chaque molécule va posséder un moment dipolaire  $\mathbf{p}_{mol}$ . On va définir le vecteur polarisation électrique comme la somme des moments dipolaires contenus dans  $\Delta v$  par unité de volume, ainsi :

$$\mathbf{P} = \frac{\sum_i \mathbf{p}_{mol}}{\Delta v}$$

Les moments dipolaires étant exprimés en Cm,  $\mathbf{P}$  a la même unité qu'une densité surfacique de charges. On va chercher à calculer les champs électriques et les potentiels créés par un diélectrique polarisé et voir comment ce matériau "physique" peut être remplacé par des distributions de charges placées dans le vide et donnant le même champ.

## 12.1 Champ créé par un milieu diélectrique polarisé

On va considérer un volume de diélectrique  $\mathcal{V}$  caractérisé par une polarisation  $\mathbf{P}$ . On se propose de calculer le champ créé par ce volume en un point  $M$  situé à l'extérieur de  $\mathcal{V}$ . On va pour cela calculer le potentiel électrostatique créé par  $\mathcal{V}$  et en déduire le champ électrique. La distance d'observation étant beaucoup plus grande que l'échelle "intermédiaire" pour laquelle on considère une variation de  $\mathbf{P}$ , le potentiel électrostatique créé par le moment dipolaire  $\Delta \mathbf{p}$  associé à  $\Delta v$  est égal à :

$$\delta V_d = \frac{\Delta \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

qui peut se réécrire :

$$\delta V_d = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Delta v$$

Ainsi le potentiel créé par le volume de diélectrique est égal à :

$$V_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_r}{r^2} d\tau$$

On va utiliser une formule d'analyse vectorielle, et on montre que :

$$\frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_r}{r^2} = \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{P}}{r}\right) - \frac{\operatorname{div}(\mathbf{P})}{r}$$

On peut donc réécrire l'expression du potentiel :

$$V_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{P}}{r}\right) d\tau - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\operatorname{div}(\mathbf{P})}{r} d\tau \quad (12.1)$$

La première intégrale peut se réécrire en utilisant le théorème de Green-Ostrogradski :

$$V_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{S}} \left( \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}}{r} \right) ds - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\operatorname{div}(\mathbf{P})}{r} d\tau \quad (12.2)$$

D'un point de vue dimensionnalité  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$  s'exprime en  $\text{Cm}^{-2}$  et  $\operatorname{div}(\mathbf{P})$  en  $\text{Cm}^{-3}$ . Ainsi  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$  peut être assimilé à une densité surfacique de charges et  $\operatorname{div}(\mathbf{P})$  une densité volumique de charges. On va donc parler de densité de charges liées :

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \\ \rho_p &= -\operatorname{div}(\mathbf{P}) \end{aligned}$$

D'où :

$$V_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho_p}{r} d\tau + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{S}} \frac{\sigma_p}{r} ds \quad (12.3)$$

On en déduit immédiatement que :

$$\mathbf{E}_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho_p}{r^2} d\tau \quad \mathbf{e}_r + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{S}} \frac{\sigma_p}{r^2} ds \quad \mathbf{e}_r \quad (12.4)$$

Ainsi nous venons de démontrer que les effets électrostatiques de la polarisation sont équivalents à ceux d'une distribution de charges électriques caractérisée par une densité surfacique et volumique de charges définies à partir du vecteur polarisation électrique.

Les résultats que nous venons d'obtenir à l'aide de manipulations mathématiques correspondent à de réelles densités de charges. Ainsi l'existence d'une densité surfacique de charges est due au fait que des charges apparaissent sur les surfaces du diélectrique qui ne sont pas parallèles au vecteur polarisation  $\mathbf{P}$ .

En ce qui concerne la densité volumique de charges de polarisation, on va considérer un volume  $\delta V_d$  possédant des densités de charges positives et négatives  $\rho^+$  et  $\rho^-$  avant qu'il ne soit polarisé par un champ électrique extérieur. Du fait de la neutralité de  $\delta V_d$  avant polarisation on va avoir :

$$\rho^+ + \rho^- = 0$$

Lorsque le diélectrique est polarisé, les charges positives sont déplacées dans le sens du champ électrique d'une grandeur  $\boldsymbol{\delta}$  et suivant  $-\boldsymbol{\delta}$  pour les charges négatives.

Si  $\delta S_d$  représente la surface fermée délimitant  $\delta V_d$ , si  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure à  $\delta S_d$  alors l'augmentation de la quantité de charges positives dans  $\delta V_d$  sera égale à :

$$-\int_{\delta S_d} \rho^+ \boldsymbol{\delta}^+ \cdot \mathbf{n} ds$$

(le signe - ) est lié à la convention d'orientation de la normale. De même l'augmentation de la quantité de charges négative sera égale, elle, à :

$$-\int_{\delta S_d} \rho^- \boldsymbol{\delta}^- \cdot \mathbf{n} ds$$

L'augmentation de la charge totale à l'intérieur du volume s'écrira :

$$-\int_{\delta S_d} \rho^+ [\boldsymbol{\delta}^+ - \boldsymbol{\delta}^-] \cdot \mathbf{n} ds$$

En utilisant le théorème de la divergence, on aboutit à :

$$-\int_{\delta V_d} \operatorname{div} (\rho^+ [\boldsymbol{\delta}^+ - \boldsymbol{\delta}^-]) d\tau$$

On reconnaît immédiatement à l'intérieur de la divergence le vecteur polarisation  $\mathbf{P}$ . Cette densité de charges volumiques de polarisation est donc lié au déplacement relatif des charges de signes opposés sous l'influence du champ électrique.

Jusqu'à présent nous avons supposé que le point  $M$  se situait à l'extérieur du diélectrique, on peut montrer que les égalités 12.3 et 12.4 restent vraies lorsque le point où est évalué potentiel ou le champ est situé à l'intérieur du diélectrique.

En résumé, lorsqu'un matériau diélectrique est soumis à l'action d'un champ électrique externe, il se polarise. Cette polarisation  $\mathbf{P}$  va créer à son tour un champ électrique supplémentaire en tout point de l'espace et pour calculer ce champ le diélectrique "matériel" peut être remplacé par une densité surfacique de charges ainsi qu'une densité volumique de charges placées dans le vide, on se replace alors dans le contexte de l'électrostatique du vide.

Pour un point d'observation donné, le champ électrique total qui sera mesuré sera égal à :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{ext} + \mathbf{E}_d$$

De même le potentiel électrostatique s'écrira

$$V = V_{ext} + V_d$$

## 12.2 Induction électrique

On vient de voir qu'à l'intérieur d'un diélectrique le champ et potentiel électrique pouvaient être calculés comme dans le vide en substituant au matériau une densité de charges surfacique et volumique liées à la polarisation.

On va considérer un diélectrique à l'intérieur duquel se trouve une densité de charges créant le champ électrostatique qui va polariser le milieu. Cette densité de charges pourra être appelée densité de charges vraies ou densité de charges libres. En tout point du diélectrique, on peut écrire l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Ici  $\rho$  va être la somme de la densité de charges libres plus la densité de charges de polarisation :

$$\rho = \rho_{libre} + \rho_p$$

D'où :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\mathbf{E} &= \frac{\rho_{libre} + \rho_p}{\varepsilon_0} \\ &= \frac{\rho_{libre} - \operatorname{div}\mathbf{P}}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_{libre}$$

On va poser par définition :



### Vecteur induction électrique

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (12.5)$$

Ce vecteur peut s'appeler aussi vecteur déplacement électrique. On en déduit la relation locale en électrostatique :



### Relation vérifiée par le vecteur induction électrique

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho_{libre} \quad (12.6)$$

L'équation 14.1 est valide à la fois pour le vide ou des milieux matériels puisque dans le vide  $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ . On en déduit immédiatement que pour un point  $M$  de l'espace où il n'existe pas de charges libres et quelle que soit la nature du milieu considéré, on a :

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$$

Le vecteur induction électrique va contenir la signature du milieu à l'endroit duquel il est évalué.

## 12.3 Susceptibilité électrique

Nous avons montré dans le paragraphe précédent que l'introduction du vecteur inducteur induction électrique permettait de tenir des propriétés électriques du matériau en englobant la polarisation de la matière sous l'influence d'un champ électrique extérieur. Nous avons vu de plus que la polarisation électrique  $\mathbf{P}$  était une grandeur liée macroscopique au champ électrique macroscopique présent à l'intérieur du matériau. Une telle relation va correspondre donc à la signature (par rapport au champ électrique) du matériau. Il faut donc caractériser la relation liant  $\mathbf{E}$  à  $\mathbf{P}$ .

Les observations expérimentales indiquent que pour la plupart des substances diélectriques, la polarisation  $\mathbf{P}$  est nulle lorsque le champ  $\mathbf{E}$  macroscopique est nul.

Le champ externe appliqué est dans la plupart des cas d'une amplitude qui est très faible par rapport au champ électrostatiques intenses qui règnent à l'intérieur des molécules. Ainsi ce champ produit va apparaître comme une perturbation des champs interatomiques et on va pouvoir effectuer un développement de Taylor de chacune des composantes de  $\mathbf{P}$  en fonction de chacune des composantes du champ  $\mathbf{E}$ . Ainsi dans un repère cartésien orthonormé, on aura :

$$P_i = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f_i}{\partial E_j} E_j + \dots$$

Dans la grande majorité des applications on pourra se limiter au développement à l'ordre 1. On obtient donc la relation matricielle :

$$\mathbf{P} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{E}$$

$\bar{\mathbf{A}}$  est une matrice et on parle dans ce cas là de milieux linéaires.

Attention toutefois dans le cadre de l'utilisation de sources de fortes puissances le caractère non linéaire des matériaux devra être pris en compte et est utilisé pour, par exemple, créer des systèmes doubleurs de fréquence.

Dans le cas général les vecteurs  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{E}$  ne sont pas colinéaires et sont dépendant du point où est évaluée la polarisation.

$\mathbf{P}$  et  $\varepsilon_0\mathbf{E}$  ayant même dimension, on va écrire :



### Milieu linéaire

$$\mathbf{P}(M) = \varepsilon_0 \bar{\chi}(M) \mathbf{E}(M)$$

$\bar{\chi}(M)$  est appelée susceptibilité électrique du matériau

Dans le cas où le matériau est homogène alors pour tout point à l'intérieur du matériau :



### Milieu homogène

$$\bar{\chi}(M) = \bar{\chi}$$

Dans le cas où  $\mathbf{P}$  est colinéaire à  $\mathbf{E}$  quelle que soit l'orientation de  $\mathbf{E}$  alors le tenseur  $\bar{\chi}$  peut se réduire à un scalaire. On peut lier ainsi l'induction électrique au champ électrique macroscopique :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}$$

en posant

$$\varepsilon_r = 1 + \chi$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

On obtient :



### Lien entre induction électrique et champ électrique

$$\mathbf{D}(M) = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}(M) \quad (12.7)$$

Remarques :

- Les grandeurs  $\varepsilon$  et  $\varepsilon_r$  sont respectivement appelés permittivité et permittivité relative du milieu.
- $\varepsilon$  est une grandeur qui a la même dimension que la permittivité du vide.
- $\varepsilon_r$  est une grandeur positive supérieure à 1.
- **Les relations établies ici l'ont été dans le cadre de l'électrostatique.** Nous verrons que pour des régimes variables la relation entre  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$  n'est pas qu'une simple multiplication.

# Chapitre 13

## Les milieux magnétiques

Nous avons étudié dans le chapitre précédent, l'influence d'un champ électrostatique extérieur sur le comportement des moments dipolaires existants ou induits à l'intérieur d'un matériau et comment ceux-ci pouvaient influencer le champ électrique total et comment on pouvait caractériser un matériau d'un point de vue diélectrique.

Un atome est constitué d'un certain nombre d'électrons en mouvement autour du noyau (mouvement orbital) ainsi que d'un mouvement propre de rotation sur eux-mêmes (mouvement de spin de l'électron), ces différents mouvements de charges créent des boucles de courant auxquelles nous pouvons associer des dipôles magnétiques. En absence de courant de conduction dans un matériau (c'est à dire de mouvement collectif de charges) il existe tout de même des courants "atomiques" susceptibles de créer un champ d'induction magnétique. L'étude de ce chapitre va consister à brièvement relater les propriétés magnétiques de la matière lorsqu'elles sont soumises à une induction magnétique.

Une induction magnétique externe agissant sur des dipôles magnétiques associés à des charges individuelles ou des systèmes de charges tend à les aligner collectivement.

La substance est dite *aimantée*.

Du fait de cet alignement la matière va produire elle-même une induction magnétique qui va s'ajouter au champ existant et le modifier. On va trouver trois grands types d'aimantation :

- Le diamagnétisme qui concerne tous les matériaux atomiques et voit l'apparition d'une induction magnétique opposée au champ qui l'a créé.
- Le paramagnétisme concerne les matériaux pour lesquels les atomes possèdent un moment dipolaire magnétique qui va tendre à s'aligner avec l'application d'un champ externe.
- Le ferromagnétisme concerne aussi les matériaux pour lesquels les atomes possèdent un moment dipolaire magnétique qui va tendre à s'aligner avec l'application d'un champ externe, cependant l'induction magnétique créé par l'alignement des dipôles pourra être de plusieurs ordres de grandeur que le champ d'induction appliqué.

### Le vecteur aimantation

Comme pour l'étude des diélectriques, on va considérer un volume de matière macroscopique (contenant un grand nombre d'atomes mais suffisamment petit pour l'observateur pour pouvoir le considérer comme ponctuel). Chaque atome peut être considéré comme un dipôle magnétique de moment dipolaire  $\mathbf{m}$ . On va définir le vecteur aimantation comme étant la somme des moments dipolaires magnétiques par unité de volume  $\Delta v$ . Il vient :

$$\mathbf{M} = \frac{\sum_i \mathbf{m}}{\Delta v} = \frac{\Delta \mathbf{m}}{\Delta v}$$

On va calculer l'induction magnétique créé par le volume de matériau aimanté en un point  $M$  extérieur au volume

### 13.1 Induction créée par un milieu aimanté

Le potentiel vecteur créé par un dipôle magnétique  $\Delta\mathbf{m}$  est égal à :

$$\delta\mathbf{A}_a = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\Delta\mathbf{m} \times \mathbf{e}_r}{r^2}$$

En utilisant la définition du vecteur aimantation, on a :

$$\delta\mathbf{A}_a = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{e}_r}{r^2} \Delta v$$

Le potentiel vecteur créé par le volume de matériau est donc égal à :

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_a &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{e}_r}{r^2} \Delta v \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{M} \times \mathbf{grad} \left( \frac{1}{r} \right) \Delta v\end{aligned}$$

On peut réécrire cette grandeur en utilisant des formules d'analyse vectorielle et on obtient :

$$\mathbf{A}_a = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{rot} \mathbf{M}}{r} \Delta v + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{n}}{r} ds \quad (13.1)$$

Une analyse aux dimensions nous permet de remarquer que  $\mathbf{rot} \mathbf{M}$  s'exprime en  $\text{Am}^{-2}$ , densité de courant en volume, tandis que  $\mathbf{M} \times \mathbf{n}$  est en  $\text{Am}^{-1}$ , densité de courant surfacique. On va donc définir les grandeurs :

$$\begin{aligned}\mathbf{j}_M &= \mathbf{M} \times \mathbf{n} \\ \mathbf{J}_M &= \mathbf{rot} \mathbf{M}\end{aligned}$$

Le potentiel vecteur au point d'observation s'écrit alors :

$$\mathbf{A}_a = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{J}_M}{r} \Delta v + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{\mathbf{j}_M}{r} ds \quad (13.2)$$

Nous venons de montrer que les effets en magnétostatique de l'aimantation sont équivalents à ceux d'une distribution de courant caractérisée par une distribution en volume et en surface en relation avec le vecteur aimantation défini précédemment. On en déduit immédiatement l'expression de  $\mathbf{B}_a$  :

$$\mathbf{B}_a = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\mathbf{J}_M \times \mathbf{e}_r}{r^2} \Delta v + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{\mathbf{j}_M \times \mathbf{e}_r}{r^2} ds \quad (13.3)$$

### 13.2 Le vecteur champ magnétique $\mathbf{H}$

On considère un milieu aimanté. L'aimantation pouvant être provoquée par une induction magnétique externe ou par des courants de conduction circulant dans le milieu même. L'induction magnétique totale s'écrit :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{(\mathbf{J}_{libre} + \mathbf{J}_M) \times \mathbf{e}_r}{r^2} \Delta v + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} \frac{(\mathbf{j}_{libre} + \mathbf{j}_M) \times \mathbf{e}_r}{r^2} ds \quad (13.4)$$

On considère un contour orienté  $\mathcal{C}$  sur lequel vient s'appuyer une surface  $\mathcal{S}$ . Le contour et la surface étant entièrement contenus dans le milieu aimanté. Le théorème d'Ampère nous donne :

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_t = \mu_0 \int_{\mathcal{S}} (\mathbf{J}_{libre} + \mathbf{J}_M) \cdot \mathbf{n} ds$$

Dans le membre de droite de l'égalité précédente le contour se trouvant entièrement dans le milieu aimanté seules les contributions des densités de courant en volume doivent être prises en compte. En utilisant le théorème de Stokes, l'égalité précédente se réécrit :

$$\int_{\mathcal{S}} (\text{rot} \mathbf{B} - \mu_0 \text{rot} \mathbf{M} - \mu_0 \mathbf{J}_{libre}) \cdot \mathbf{n} ds = 0$$

La surface étant quelconque la fonction intégrée est donc nulle on obtient donc :

$$\text{rot} \left( \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}$$

On définit le vecteur champ magnétique  $\mathbf{H}$



### Vecteur Champ magnétique

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad \text{Am}^{-1} \quad (13.5)$$

L'induction magnétique dans le milieu aimanté s'écrit donc en fonction du champ magnétique et de l'aimantation :

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

Le théorème d'Ampère pour des milieux s'écrit donc de la manière suivante :



### Théorème d'Ampère

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_{libre} \quad (13.6)$$

L'aimantation du milieu est contenue dans la définition de  $\mathbf{H}$  donnée dans 13.5.

## 13.3 Perméabilité relative

La relation 13.5 fait le lien entre les vecteurs  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{M}$  mais pour connaître  $\mathbf{H}$  il faut au moins une relation supplémentaire entre deux de ces vecteurs. Pour les milieux diamagnétiques et paramagnétiques, l'expérience montre qu'il existe une relation linéaire entre  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{H}$ .

On peut donc écrire :

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

où  $\chi_m$  est appelée susceptibilité magnétique.

Contrairement à la susceptibilité électrique qui est une grandeur toujours positive,  $\chi_m$  peut être positive ou négative.

- Si  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{H}$  sont dans le même sens, l'induction magnétique est augmentée en présence du milieu. On est en présence d'un milieu paramagnétique et  $\chi_m > 0$ .
- Si  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{H}$  sont en sens inverses l'un de l'autre, l'induction magnétique est diminuée en présence du milieu. On a à faire à un milieu diamagnétique et  $\chi_m < 0$ .

On peut pour ces milieux définir une relation linéaire entre  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \\ &= \mu_0\mathbf{H} + \mu_0\chi_m\mathbf{H}\end{aligned}$$

en posant :

$$\mu_r = 1 + \chi_m\mu = \mu_0\mu_r$$

on obtient :



### Lien entre induction magnétique et champ magnétique

$$\mathbf{B}(M) = \mu_0\mu_r\mathbf{H}(M) \quad (13.7)$$

Remarques :

- Les grandeurs  $\mu$  et  $\mu_r$  sont respectivement la perméabilité et la perméabilité relative du milieu.
- La perméabilité relative est une grandeur sans dimension.
- **Comme pour la polarisation des diélectriques les relations établies ici l'ont étées dans les cadre des régimes permanents.**

Nous n'avons pas parlé des matériaux ferromagnétiques. Dans ce type de matériaux on peut toujours relier l'aimantation  $\mathbf{M}$  à  $\mathbf{H}$  mais la susceptibilité va dépendre cette fois-ci de  $\mathbf{H}$ . L'une des principales caractéristiques de ces matériaux est que  $\chi_m$  est beaucoup plus grande en valeur absolue que 1 et donc en conséquent la perméabilité est beaucoup importante que celle du vide. Ces propriétés sont intensivement utilisées par exemple pour créer des aimants très puissants.

## Chapitre 14

# Equations de Maxwell dans les milieux

Jusqu'au chapitre 11 de ce document nous n'avons considéré que les propriétés des champs électromagnétiques solutions des équations de Maxwell lorsque les sources et les courants étaient placées dans un milieu homogène qui est le vide. Au vu des deux chapitres précédents nous avons vu qu'il était possible de prendre en compte la polarisation ou l'aimantation d'un milieu physique en introduisant les vecteurs induction électriques  $\mathbf{D}$  et le champ magnétique  $\mathbf{H}$  ainsi que les relations liant  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{H}$  à  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{E}$ .

### 14.1 Equations de Maxwell et relations constitutives

On peut donc réécrire les équations de Maxwell en régime temporel pour les milieux de la manière suivante :



#### Équations de Maxwell dans les milieux

$$\text{div}\mathbf{D} = \rho \quad (14.1)$$

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (14.2)$$

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (14.3)$$

$$\text{div}\mathbf{B} = 0 \quad (14.4)$$

Dans les chapitres précédents nous avons vu que dans le cadre de l'électrostatique ou de la magnétostatique nous avons pu établir une relation entre  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{H}$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(M) &= \varepsilon_0 \chi_e(M) \mathbf{E}(M) \\ \mathbf{M}(M) &= \mu_0 \chi_m(M) \mathbf{H}(M) \end{aligned}$$

Si l'on étend cette propriété au domaine temporel c'est dire si l'on suppose que les relations entre les grandeurs précédentes peuvent aussi se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(M, t) &= \varepsilon_0 \chi_e(M) \mathbf{E}(M, t) \\ \mathbf{M}(M, t) &= \mu_0 \chi_m(M) \mathbf{H}(M, t) \end{aligned}$$

on parlera alors de milieu parfait.

Admettre qu'un milieu est parfait, c'est admettre que la réponse du milieu à l'excitation électrique par exemple est instantanée. Ce phénomène si l'on considère qu'il est dû à une réorganisation des charges électriques ne peut pas être considéré comme instantanée sauf pour des fréquences de variation

du champ excitateur très faible. Il faut donc remplacer cette simple multiplication par une opération permettant d'exprimer que  $\mathbf{P}$  soit linéaire par rapport à  $\mathbf{E}$  et que la polarisation soit dépendante de la valeur du champ à l'instant  $t$  mais aussi garde une mémoire des valeurs précédentes de  $E$ . Le matériau peut donc être vu comme un filtre linéaire vis à vis du champ électrique ou du champ magnétique. Ainsi pour des matériaux réels on va définir une relation entre  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  de la manière suivante :

$$\mathbf{P}(M, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} g_e(\tau) \mathbf{E}(M, t - \tau) d\tau \quad (14.5)$$

$$\mathbf{M}(M, t) = \mu_0 \int_{-\infty}^{\infty} g_m(\tau) \mathbf{H}(M, t - \tau) d\tau \quad (14.6)$$

La polarisation ou l'aimantation apparaissent donc comme produit de convolution de la fonction de transfert du milieu par les champs  $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{H}$ .

La polarisation ou l'aimantation respectent le critère de causalité c'est dire qu'ils ne peuvent pas exister avant le champ qui leur a donné naissance. C'est à dire ici que  $\mathbf{E}(M, t - \tau)$  pour  $t - \tau > t$  ne doit pas influencer la valeur de  $\mathbf{P}(M, t)$ , on en déduit donc que  $g_e$  ou  $g_m$  sont des fonctions nulles pour  $\tau < 0$ . On parlera donc de fonction de transfert à support positif. On aboutit finalement aux relations :

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0(\delta + g_e) \star \mathbf{E} \quad (14.7)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\delta + g_m) \star \mathbf{H} \quad (14.8)$$

Remarques :

- En régime temporel, la relation liant  $\mathbf{D}$  à  $\mathbf{E}$  et celle liant  $\mathbf{B}$  à  $\mathbf{H}$  n'est plus une simple multiplication comme en électrostatique ou en magnétostatique.
- On retrouve  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{B}$  par produit de convolution de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  avec les "fonctions d'appareil" du milieu.
- Du fait de la causalité des phénomènes de polarisation ou d'aimantation, ces fonctions d'appareil sont à support positif.

## 14.2 Retour sur les conditions aux limites entre deux milieux

A partir des équations de Maxwell, il est légitime de se poser la question de la continuité des composantes des champs électromagnétiques ( $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{B}$ ) à la traversée entre deux milieux possédant à l'interface une densité surfacique de courant ou de charges.

On en déduit immédiatement d'après les conditions aux limites que nous avons obtenus en électrostatique ou en magnétostatique et à partir des équations de Maxwell ci-dessus que :



### Conditions aux limites

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma \quad (14.9)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad (14.10)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad (14.11)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{j}_s \quad (14.12)$$

## 14.3 Milieux matériels et régime harmonique

Un signal temporel peut toujours être décomposé par l'intermédiaire de la transformée de Fourier en une somme de signaux multifréquences. Nous allons traiter le cas d'un signal mono fréquence mais

les résultats trouvés ici pourront s'étendre à des signaux multifréquences.

Comme nous l'avons fait dans le vide nous pouvons associer l'amplitude complexe des champs électromagnétiques aux grandeurs réelles par le biais des transformations  $S_+$  ou  $S_-$  définies au chapitre 9. On va donc à une fréquence donnée considérer les amplitudes complexes des champs  $\mathcal{E}, \mathcal{B}, \mathcal{H}, \mathcal{D}$ , en supposant que l'ait choisi une dépendance temporelle en  $-i\omega t$ , on aura :



### Equations de Maxwell pour les milieux

$$\text{rot} \mathcal{E} = i\omega \mathcal{B} \quad (14.13)$$

$$\text{div}(\mathcal{D}) = \mathcal{R} \quad (14.14)$$

$$\text{rot} \mathcal{H} = -i\omega_0 \mathcal{D} \quad (14.15)$$

$$\text{div}(\mathcal{B}) = 0 \quad (14.16)$$

A ces quatre équations il faut rajouter les conditions aux limites que vérifient les amplitudes complexes des champs à l'interface entre les milieux :



### Conditions aux limites

$$\mathbf{n} \cdot (\mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_1) = \mathfrak{S} \quad (14.17)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) = 0 \quad (14.18)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathcal{B}_2 - \mathcal{B}_1) = 0 \quad (14.19)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_1) = \mathbf{j}_s \quad (14.20)$$

#### 14.3.1 Relations constitutives

Nous avons vu au paragraphe que pour des milieux matériels, les milieux agissaient comme un filtre linéaire et on a les relations :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0(\delta + g_e) \star \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\delta + g_m) \star \mathbf{H}$$

Le passage aux amplitudes complexes des champs peut se faire grâce à la transformée de Fourier des différents signaux en prenant soin de noter que le produit de convolution qui apparaît dans les deux équations précédentes va devenir un produit simple pour un signal à une fréquence donnée. On obtient :

$$\mathcal{D} = \mathfrak{F}[\epsilon_0(\delta + g_e)] \mathcal{E}$$

$$\mathcal{B} = \mathfrak{F}[\mu_0(\delta + g_m)] \mathcal{H}$$

Si on nomme  $\epsilon(\nu)$  et  $\mu(\nu)$  la permittivité et la perméabilité associées au transformées de Fourier de la permittivité et des perméabilités réelles des milieux . On obtient les relations constitutives en régime harmonique :



### Relations constitutives en régime harmonique

$$\mathcal{D} = \epsilon(\nu) \mathcal{E} \quad (14.21)$$

$$\mathcal{B} = \mu(\nu) \mathcal{H} \quad (14.22)$$

Remarques

- On se rend compte que l'on peut traiter les milieux matériels en régime harmonique comme nous les avons traités en régime permanent et ce sans approximation.

- Les relations de proportionnalité liant  $\mathcal{E}$  à  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{H}$  à  $\mathcal{B}$  sont des relations entre amplitudes complexes des champs et pour une fréquence donnée.
- Les grandeurs  $\varepsilon(\nu)$  et  $\mu(\nu)$  sont des grandeurs complexes et sont des fonctions dépendantes de la fréquence. On parlera dans ce cas là de milieu dispersif

### 14.3.2 Conséquences de la causalité - Relations de Kramers-Kronig

La fonction de transfert du milieu doit être à support positif si l'on veut respecter la causalité entre le champ et la polarisation. Cette propriété entraîne par le biais de la transformée de Fourier des propriétés à la permittivité et la perméabilité complexe du milieu. On ne s'intéressera qu'à la permittivité mais le même raisonnement peut être menée pour la perméabilité.

Ainsi l'on suppose que :

$$\varepsilon(\nu) = \varepsilon_0(\varepsilon'_r(\nu) + \varepsilon''_r(\nu))$$

alors on peut montrer que :

$$\begin{aligned}\varepsilon'_r(\nu) &= 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f \varepsilon''_r(f)}{f^2 - \nu^2} df \\ \varepsilon''_r(\nu) &= \frac{2\nu}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \varepsilon'_r(f)}{f^2 - \nu^2} df\end{aligned}$$

A partir de cette égalité mathématique on peut en déduire des propriétés physiques importantes :

- Les parties réelles et imaginaires de la permittivité sont liées entre elles.
- Il faut connaître la variation de la partie réelle ou imaginaire sur l'ensemble du spectre pour en déduire l'autre valeur.
- Si  $\varepsilon'_r$  varie en fonction de la fréquence alors nécessairement il apparaît une partie imaginaire différente de 0.
- La réciproque est vraie aussi.
- On verra un peu plus loin que la partie imaginaire de la permittivité reflète l'absorption d'énergie par le matériau.
- On peut donc dire que tout matériau dispersif est dissipatif et tout matériau dissipatif est dispersif.
- On peut se poser la question de savoir s'il existe un matériau non absorbant pour toute les fréquences. On se rend compte d'après les expressions précédentes que dans ce cas là on doit avoir nécessairement  $\varepsilon'_r(\nu) = 1$ . Ainsi le seul matériau non dissipatif et non dispersif est le vide.

## Chapitre 15

# Réflexion et Réfraction d'une onde plane en régime harmonique

Nous allons nous intéresser dans ce chapitre au comportement d'une onde électromagnétique plane en régime harmonique lorsqu'elle rencontre au cours de sa propagation, une interface plane séparant deux matériaux. Nous allons tout d'abord nous intéresser au cas de l'onde plane se propageant dans un milieu homogène. On se contentera dans ce chapitre de travailler avec des milieux pour lesquels la perméabilité est supposée égale à celle du vide. C'est à dire :

$$\begin{aligned}\mu_r(\nu) &= 1 \\ \mu &= \mu_0\end{aligned}$$

### 15.1 Propagation d'un onde plane dans un milieu linéaire homogène et isotrope

Nous allons nous intéresser dans cette section à la structure d'une onde plane se propageant dans un milieu homogène. En reprenant les équation de Maxwell pour les milieux et en supposant que nous soyons dans un milieu l.h.i. sans sources ni courants on obtient très facilement l'équation de propagation vérifié par  $\mathcal{E}$  ou  $\mathcal{H}$ .

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r(\nu)\mathcal{E} &= \mathbf{0} \\ \Delta\mathcal{H} + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r(\nu)\mathcal{H} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Une solution générale de type onde plane progressive monochromatique pouvant être mise sous la forme :

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) = \mathcal{E}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

peut exister à condition que le vecteur  $\mathbf{k}$  vérifie la condition :

$$\left[ \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r(\nu) \right] \mathcal{E}_0 = \mathbf{0}$$

Ainsi les solutions d'amplitude non nulles sont telles que :

$$\underline{\mathbf{k}^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r(\nu) = 0$$

Il faut noter ici que  $\underline{\mathbf{k}^2}$  représente le carré scalaire de  $\mathbf{k}$  et non le module au carré de  $\mathbf{k}$ . Ainsi si l'onde se propage suivant la direction  $\mathbf{e}_z$  le vecteur d'onde complexe  $\mathbf{k}$  pourra s'écrire :

$$\mathbf{k} = (k' + ik'')\mathbf{e}_z$$

et les grandeurs  $k'$  et  $k''$  devront vérifier :

$$\begin{aligned} k'^2 - k''^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon'_r(\nu) \\ 2k^2 k'' &= \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon''_r(\nu) \end{aligned}$$

La solution pour le champ électrique s'écrira alors :

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}) = \mathcal{E}_0 \exp^{-k''z} \exp^{ik'z}$$

Ainsi l'onde plane n'a pas une amplitude constante lors de sa propagation, elle diminue exponentiellement et cet amortissement est lié à la partie imaginaire du vecteur d'onde complexe.

## 15.2 Réflexion, Réfraction

On considère deux milieux linéaires homogènes et isotropes. Ces deux milieux remplissent deux demi-espaces :  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Le demi espace défini par  $y > 0$  correspond au milieu  $\Omega_1$  tandis que  $y < 0$  correspond au milieu  $\Omega_2$ . Ce système s'appelle un dioptrre.

On considère une onde monochromatique plane polarisée de manière quelconque et de pulsation  $\omega$ . Cette onde se propage dans le milieu 1 suivant le vecteur  $k_i$  et fait un angle  $\theta_i$  avec l'axe  $Oy$  qui est suivant la normale à l'interface. On appellera cette onde l'onde incidente. On constate alors deux phénomènes :

- A la traversée du dioptrre l'onde est déviée, une onde se propage dans le milieu 2, c'est le phénomène de réfraction de la lumière.
- Une partie de la lumière est renvoyée dans le milieu 1 c'est le phénomène de réflexion de la lumière.

On se propose dans cette partie d'établir les relations qui peuvent exister entre les champs incidents, réfléchis et transmis.

Le système étant invariant par rotation autour de  $Oy$ , on peut choisir un repère orthonormé pour lequel le vecteur d'onde incident ne possède pas de composante suivant l'axe  $Oz$ . Ainsi il peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{A}_i \exp^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}$$

avec

$$\mathbf{k}_i \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{r1}} \begin{vmatrix} \sin(\theta_1) \\ -\cos(\theta_1) \\ 0 \end{vmatrix}$$

où  $\mathcal{A}_i$  est l'amplitude complexe du champ incident. On se propose de déterminer le champ électromagnétique  $\mathcal{E}, \mathcal{H}$  qui s'établit en présence du dioptrre.

### 15.3 Découplage en ondes TE et TM d'un champ électromagnétique

Le problème que l'on s'est posé est indépendant de l'axe  $z$ . On suppose qu'aucun des matériaux est anisotrope. Il faudra chercher des champs qui ne dépendent pas de l'axe  $z$ . On va réécrire les équations de Maxwell en régime harmonique :

$$\begin{aligned}\mathbf{rot} \mathcal{E} &= i\omega\mu_0 \mathcal{H} \\ \mathbf{rot} \mathcal{H} &= -i\omega\varepsilon \mathcal{E}\end{aligned}$$

Ce système d'équation couplées est *a priori* comporte 6 équations à 6 inconnues. On peut réécrire ce système d'équations pour les six composantes du champ en tenant de l'invariance suivant  $z$  des champs :

$$\frac{\partial \cdot}{\partial z} = 0$$

On aboutit ainsi à deux systèmes d'équations découpées couplant  $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{H}_z$  et  $\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y, \mathcal{E}_z$ .

- On appellera polarisation TE ou  $E//$  tous les champs tels  $\mathcal{E}_z \neq 0$ .
- On appellera polarisation TM ou  $H//$  tous les champs tels  $\mathcal{H}_z \neq 0$ .

**Attention cette définition dépend des références.** Le problème complet se découpe en deux sous problèmes indépendants l'un de l'autre, toute onde plane pouvant se décomposer comme la somme d'une onde plane polarisée TE et d'une onde plane polarisée TM.

### 15.4 Interaction d'une onde plane avec un dioptre en polarisation TE

On considère une onde plane de pulsation  $\omega$  est polarisée rectilignement suivant  $Oz$ . On peut écrire le champ incident de la manière suivante :

$$\mathcal{E}_{inc} = u_{inc}(x, y) \mathbf{e}_z = A_{inc} \exp^{i(\alpha_{inc}x - \beta_{inc}y)} \mathbf{e}_z$$

$A_{inc}$  est un nombre définissant l'amplitude du champ incident. On va chercher un champ électrique de la forme suivante :

$$\mathcal{E} = u(x, y) \mathbf{e}_z$$

Le problème se ramène donc à trouver une fonction  $u$  de deux variables  $x$  et  $y$ , qui soit telle que  $\mathcal{E}$  soit solution de l'équation de Helmholtz dans chacune des milieux et que les conditions de continuité des champs soient vérifiés à l'interface entre les deux milieux.

Le système d'équations que doivent vérifier les composantes  $\mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y, \mathcal{E}_z$  s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y} & = & i\omega\mu_0 \mathcal{H}_x \\ \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x} & = & i\omega\mu_0 \mathcal{H}_y \\ \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial y} & = & -i\omega\varepsilon \mathcal{E}_z \end{array} \right.$$

Si on note :

$$\begin{aligned}u_{|1} &= u(x, y) & y > 0 \\ u_{|2} &= u(x, y) & y < 0\end{aligned}$$

Alors  $u_{|i}$  vérifie l'équation :

$$\Delta u_{|i} + k_i^2 u_{|i} = 0 \tag{15.1}$$

en posant  $k_i^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{r|i}$  et  $\Delta$  est le laplacien scalaire en dimension deux,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ . Il est nécessaire de définir pour les deux milieux un "champ diffracté". Ce champ est le résultat de l'interaction entre l'onde incidente et le dioptre. Ainsi :

$$u^d = \begin{cases} u_{|1}^d = u_{|1} - u_{inc} \\ u_{|2}^d = u_{|2} \end{cases}$$

Il faut rajouter de plus une condition d'onde sortante pour le champ diffracté. Etant donné la définition choisie, on va supposer que le champ diffracté pour le milieu 1 se propage vers les  $y > 0$  tandis que le champ diffracté pour le milieu 2 se propage vers les  $y < 0$ . On va chercher une solution générale de ce problème de la forme suivante :

$$u_{|i} = \exp^{i\alpha_i x} U_{|i}(y) \quad i \in 1, 2$$

en injectant l'expression précédente dans l'équation 15.8 on aboutit à l'équation vérifiée par  $U_{|i}$  :

$$\frac{\partial^2 U_{|i}}{\partial y^2} + (k_i^2 - \alpha_i^2) U_{|i} = 0$$

Pour le milieu 1 le terme  $k_1^2 - \alpha_1^2$  est positif donc la racine carré de ce nombre ne pose pas de problème. On posera par contre :

$$\beta_2 = \begin{cases} \sqrt{k_2^2 - \alpha_2^2} & \text{si } \alpha_2 \leq k_2 \\ i\sqrt{\alpha_2^2 - k_2^2} & \text{si } \alpha_2 \geq k_2 \end{cases}$$

Une solution générale pour  $U_{|i}$  peut s'écrire :

$$U_{|i}(y) = A_i^+ \exp^{i\beta_i y} + A_i^- \exp^{-i\beta_i y}$$

où les constantes  $A_i^+$  et  $A_i^-$  sont des constantes arbitraires. Pour chacun des milieux l'amplitude  $u_{|i}(x, y)$  pourra se mettre sous la forme :

$$u_{|i}(x, y) = A_i^+ \exp^{i(\alpha_i x + \beta_i y)} + A_i^- \exp^{i(\alpha_i x - \beta_i y)}$$

L'objectif maintenant est à partir du problème physique que l'on s'est donné de trouver les relations entre les différents coefficients.

On se rend facilement compte que pour chaque milieu la solution générale est la superposition de deux ondes planes l'une se propageant vers les  $y > 0$  (le terme  $A_i^+ \exp^{i(\alpha_i x + \beta_i y)}$  tandis que l'autre terme correspond à une solution se propageant vers les  $y < 0$  (le terme  $A_i^- \exp^{i(\alpha_i x - \beta_i y)}$ )).

Etant donné que nous avons supposé (par le biais du fait expérimental) que dans le milieu 2 l'onde se propageait depuis l'interface vers les  $y < 0$  on en déduit que :

$$\begin{aligned} u_{|1}(x, y) &= A_1^+ \exp^{i(\alpha_1 x + \beta_1 y)} + A_1^- \exp^{i(\alpha_1 x - \beta_1 y)} \\ u_{|2}(x, y) &= A_2^- \exp^{i(\alpha_2 x - \beta_2 y)} \end{aligned}$$

On peut de plus identifier  $A_1^-$  comme étant égal à  $A_{inc}$ . Il faut chercher maintenant à relier les différents coefficients et ceci va pouvoir être fait grâce aux conditions aux limites vérifiées par le champ électromagnétique à l'interface entre les deux milieux.

### Continuité de la composante tangentielle de $\mathcal{E}$

Les conditions aux limites sur  $\mathcal{E}$  nous imposent que :

$$\mathbf{n} \times [\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1]_{y=0} = \mathbf{0}$$

On prend  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_y$ , d'où

$$\mathbf{e}_y \times [u_{|2}(x, y=0) - u_{|1}(x, y=0)] \mathbf{e}_z = \mathbf{0}$$

qui peut se réécrire :

$$[u_{|2}(x, y=0) - u_{|1}(x, y=0)] \mathbf{e}_e = \mathbf{0}$$

On aboutit à

$$\exp^{i\alpha_1 x} U_{|1}(y=0) = \exp^{i\alpha_2 x} U_{|2}(y=0)$$

Cette égalité est une égalité entre deux fonctions dépendant de  $x$  et on a donc :

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

et

$$U_{|1}(y=0) = U_{|2}(y=0)$$

La fonction  $U$  est continue à l'interface entre les deux milieux.

Si  $\theta_2$  est l'angle entre la normale  $-\mathbf{e}_y$  et le vecteur d'onde  $\mathbf{k}_2$  alors  $\mathbf{k}_2$  peut s'écrire :

$$\mathbf{k}_2 \begin{vmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{r2}} \begin{vmatrix} \sin(\theta_2) \\ -\cos(\theta_2) \\ 0 \end{vmatrix}$$

En posant  $n_1 = \sqrt{\varepsilon_{r1}}$  et  $n_2 = \sqrt{\varepsilon_{r2}}$ , la condition  $\alpha_1 = \alpha_2$  peut se réécrire :



#### Relations de descartes

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon_{r1}} \sin(\theta_1) &= \sqrt{\varepsilon_{r2}} \sin(\theta_2) \\ n_1 \sin(\theta_1) &= n_2 \sin(\theta_2) \end{aligned}$$

De la continuité de  $U_{|i}$  en  $y=0$  et des relations de descartes, on en déduit une première relation liant les coefficients :

$$A_1^+ + A^{inc} = A_2^- \quad (15.2)$$

SI l'on veut relier les amplitudes des champs réfléchis et transmis au champ incident il faut une deuxième relation. On va établir celle-ci à partir de la continuité de la composante tangentielle de  $\mathcal{H}$  puisque nous avons supposé qu'il n'y avait pas de densité de courant de surface entre les deux milieux.

### Continuité de la composante tangentielle de $\mathcal{H}$

Les conditions aux limites sur  $\mathcal{H}$  nous imposent :

$$\mathbf{n} \times [\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_1]_{y=0} = \mathbf{0}$$

Comme nous avons exprimé le champ  $\mathcal{E}$  nous allons obtenir  $\mathcal{H}$  à partie de l'équation de Maxwell :

$$\mathbf{rot} \mathcal{E} = i\omega\mu_0 \mathcal{H}$$

Etant donné l'expression du champ  $\mathcal{E}$ , on en déduit après calculs que :

$$\mathcal{H} = \frac{-i}{\omega\mu_0} \mathbf{grad}u \times \mathbf{e}_z \quad (15.3)$$

En prenant comme tout à l'heure  $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_y$ , on aboutit à l'égalité :

$$\left[ \frac{\partial u_{|2}}{\partial y} - \frac{\partial u_{|1}}{\partial y} \right]_{y=0} \mathbf{e}_z = \mathbf{0}$$

D'où :

$$\frac{\partial u_{|1}}{\partial y}(y=0) = \frac{\partial u_{|2}}{\partial y}(y=0)$$

On en déduit donc que :

$$\frac{\partial U_{|1}}{\partial y}(y=0) = \frac{\partial U_{|2}}{\partial y}(y=0)$$

**La dérivée de la fonction  $U(y)$  est aussi continue à la traversée de l'interface.**

On obtient :

$$\beta_1(A_1^+ - A^{inc}) = -\beta_2 A_2^- \quad (15.4)$$

### Coefficients de Fresnel

En combinant les équations 15.2 et 15.4 on obtient le système linéaire suivant :

$$\beta_2 = \begin{cases} \beta_1(A_1^+ - A^{inc}) = -\beta_2 A_2^- \\ A_1^+ + A^{inc} = A_2^- \end{cases}$$

On va poser par définition :

$$\begin{aligned} r_{TE} &= \frac{A_1^+}{A^{inc}} \\ t_{TE} &= \frac{A_2^-}{A^{inc}} \end{aligned}$$

Le système linaire se réécrit :

$$\beta_2 = \begin{cases} 1 + r_{TE} = t_{TE} \\ 1 + r_{TE} = -\frac{\beta_2}{\beta_1} t_{TE} \end{cases}$$

Ce système peut être résolu et on obtient finalement l'expression des coefficients de Fresnel en polarisation TE :



#### Coefficients de Fresnel en polarisation TE

$$r_{TE} = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 + \beta_2} \quad (15.5)$$

$$t_{TE} = \frac{2\beta_1}{\beta_1 + \beta_2} \quad (15.6)$$

Remarques :

- Le coefficient de transmission ne peut s'annuler que pour  $\beta_1 = k_1 \cos(\theta_1) = 0$  c'est à dire pour  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ .
- Le coefficient de réflexion ne peut s'annuler que pour  $\beta_1 = \beta_2$ , il n'y a alors plus de diopstre.

- Si  $\beta_2$  est un nombre imaginaire pur alors il existe  $\tilde{\beta}_2 = i\beta_2$ , dans ce cas le coefficient de réflexion peut se mettre sous la forme :

$$r_{TE} = \frac{\beta_1 - i\tilde{\beta}_2}{\beta_1 + i\tilde{\beta}_2}$$

Ainsi le coefficient de réflexion est le quotient de deux nombres complexes conjugués, d'où  $|r_{TE}|^2 = 1$ . Dans ce cas là on aura  $t_{TE} \neq 0$  c'est à dire qu'il existera un champ non nul dans le milieu 2 alors que  $|r_{TE}|^2 = 1$ .

Ce phénomène se produit lorsque :

$$k_2^2 \leq \alpha_1^2$$

c'est à dire :

$$\varepsilon_{r_2} \leq \varepsilon_{r_1} \sin^2 \theta_{inc}$$

C'est à dire pour un angle d'incidence tel que :

$$\sin \theta_{inc} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1}}} \quad (15.7)$$

Cet angle correspond à l'angle limite et ce phénomène ne peut exister que dans le cas où le milieu 2 est moins réfringeant que le milieu 1.

Les coefficients définissent les amplitudes des champs électriques et transmis connaissant l'amplitude du champ incident. On peut définir des coefficients de réflexion et de transmission en énergie à l'aide du flux du vecteur de Poynting associée à l'onde incidente l'onde réfléchie et l'onde transmise. Ainsi on définit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{inc} &= \frac{1}{2} \Re[\mathcal{E}_{inc} \times \mathcal{H}_{inc}^*] \\ \mathcal{P}_r &= \frac{1}{2} \Re[\mathcal{E}_r \times \mathcal{H}_r^*] \\ \mathcal{P}_t &= \frac{1}{2} \Re[\mathcal{E}_t \times \mathcal{H}_t^*] \end{aligned}$$

Les puissances rayonnées par chacune de ces ondes prises séparément à travers une surface d'aire  $\mathcal{S}$  située en  $y = 0$  seront égales à :

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{inc} &= \mathcal{P}_{inc}(y=0) \cdot \mathbf{n} \cdot \mathcal{S} \\ \mathfrak{P}_r &= \mathcal{P}_r(y=0) \cdot \mathbf{n} \cdot \mathcal{S} \\ \mathfrak{P}_t &= \mathcal{P}_t(y=0) \cdot \mathbf{n} \cdot \mathcal{S} \end{aligned}$$

On peut définir à partir de ces expressions les coefficients de réflexion et de transmission en énergie :

$$R = -\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}_{inc}} \quad \text{et} \quad T = \frac{\mathfrak{P}_t}{\mathfrak{P}_{inc}}$$

Après développement des calculs on obtient :



### Coefficients de réflexion et transmission en énergie

$$R_{TE} = |r_{TE}|^2 \quad \text{et} \quad T_{TE}^2 = \frac{\beta_2}{\beta_1} |t_{TE}|^2$$

$$R + T = 1$$

Remarques :

- Dans le cas où il n'y a pas de pertes d'énergie l'énergie du champ incident se retrouve dans le champ réfléchi et transmis.

## 15.5 Interaction d'une onde plane avec un dioptre en polarisation TM

Les composantes  $\mathcal{H}_z, \mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y$  vérifient les équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial y} &= -i\omega\varepsilon\mathcal{E}_x \\ \frac{\partial \mathcal{H}_z}{\partial x} &= i\omega\varepsilon\mathcal{E}_y \\ \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial y} &= i\omega\mu_0\mathcal{H}_z \end{cases}$$

On va chercher un champ magnétique qui va s'écrire de la manière suivante :

$$\mathcal{H} = u(x, y)\mathbf{e}_z$$

Si on note :

$$\begin{aligned} u_{|1} &= u(x, y) & y > 0 \\ u_{|2} &= u(x, y) & y < 0 \end{aligned}$$

Alors  $u_{|i}$  vérifie aussi pour cette polarisation l'équation :

$$\Delta u_{|i} + k_i^2 u_{|i} = 0 \quad (15.8)$$

en posant  $k_i^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{r_{|i}}$ . Les conditions d'onde sortantes sont identiques au cas TE, donc la solution générale va s'écrire :

$$\begin{aligned} u_{|1}(x, y) &= A_1^+ \exp^{i(\alpha_1 x + \beta_1 y)} + A_1^- \exp^{i(\alpha_1 x - \beta_1 y)} \\ u_{|2}(x, y) &= A_2^- \exp^{i(\alpha_2 x - \beta_2 y)} \end{aligned}$$

### Ce qui change par rapport au cas TE

Ce qui va être modifié par rapport au cas de polarisation TE, ce sont les conséquences de l'imposition des conditions aux limites à l'interface entre les deux milieux.

### Continuité de la composante tangentielle de $\mathcal{H}$

Les conditions aux limites sur  $\mathcal{H}$  imposent :

$$\mathbf{n} \times [\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_1]_{y=0} = \mathbf{0}$$

Cette fois-ci cela va entraîner la continuité de  $U$  en  $y = 0$ . On aura donc :

$$U_{|1}(y = 0) = U_{|2}(y = 0)$$

et toujours

$$\alpha_1 = \alpha_2$$



Les relations de Fresnel sont aussi vérifiées pour la polarisation TM

### Continuité de la composante tangentielle de $\mathcal{E}$

Les conditions aux limites sur  $\mathcal{E}$  imposent :

$$\mathbf{n} \times [\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1]_{y=0} = \mathbf{0}$$

Cette fois-ci cela va entraîner la **discontinuité** de  $\frac{\partial U}{\partial y}$  en  $y = 0$ . En effet on a :

$$\mathbf{rot} \mathcal{H} = -i\omega \varepsilon \mathcal{E}$$

Ainsi

$$\mathbf{n} \times [\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1]_{y=0} = - \left[ \frac{1}{\varepsilon_{r_2}} \frac{\partial u_{|2}}{\partial y} - \frac{1}{\varepsilon_{r_1}} \frac{\partial u_{|1}}{\partial y} \right]_{y=0} \mathbf{e}_z = \mathbf{0}$$

Dans ce cas de polarisation c'est la grandeur  $\frac{1}{\varepsilon_r} \frac{\partial u}{\partial y}$  qui est continue et non  $\frac{\partial u}{\partial y}$ . On aura donc :

$$\frac{1}{\varepsilon_{r_1}} \frac{\partial U_{|1}}{\partial y}(y=0) = \frac{1}{\varepsilon_{r_2}} \frac{\partial U_{|2}}{\partial y}(y=0)$$

On va poser par définition :

$$\begin{aligned} r_{TM} &= \frac{A_1^+}{A^{inc}} \\ t_{TM} &= \frac{A_2^-}{A^{inc}} \end{aligned}$$

Le système linaire obtenu à partir des conditions aux limites s'écrit :

$$\begin{cases} 1 + r_{TM} = t_{TM} \\ \frac{\beta_1}{\varepsilon_{r_1}} (1 + r_{TM}) = \frac{\beta_2}{\varepsilon_{r_2}} t_{TM} \end{cases}$$

On obtient les relations de Fresnel en polarisation TM



#### Coefficients de Fresnel en polarisation TM

$$r_{TM} = \frac{\frac{\beta_1}{\varepsilon_{r_1}} - \frac{\beta_2}{\varepsilon_{r_2}}}{\frac{\beta_1}{\varepsilon_{r_1}} + \frac{\beta_2}{\varepsilon_{r_2}}} \quad (15.9)$$

$$t_{TM} = \frac{2 \frac{\beta_1}{\varepsilon_{r_1}}}{\frac{\beta_1}{\varepsilon_{r_1}} + \frac{\beta_2}{\varepsilon_{r_2}}} \quad (15.10)$$

Remarques :

- Comme pour la polarisation TE, le coefficient de transmission ne peut s'annuler que pour  $\beta_1 = k_1 \cos(\theta_1) = 0$  c'est à dire pour  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ .
- Contrairement au cas TE, il existe un angle d'incidence noté  $\theta_b$  pour lequel la réflexion s'annule. Cet angle est encore appelé angle de Brewster. Cet angle est tel que :

$$\tan \theta_b = \sqrt{\frac{\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1}}} \quad (15.11)$$