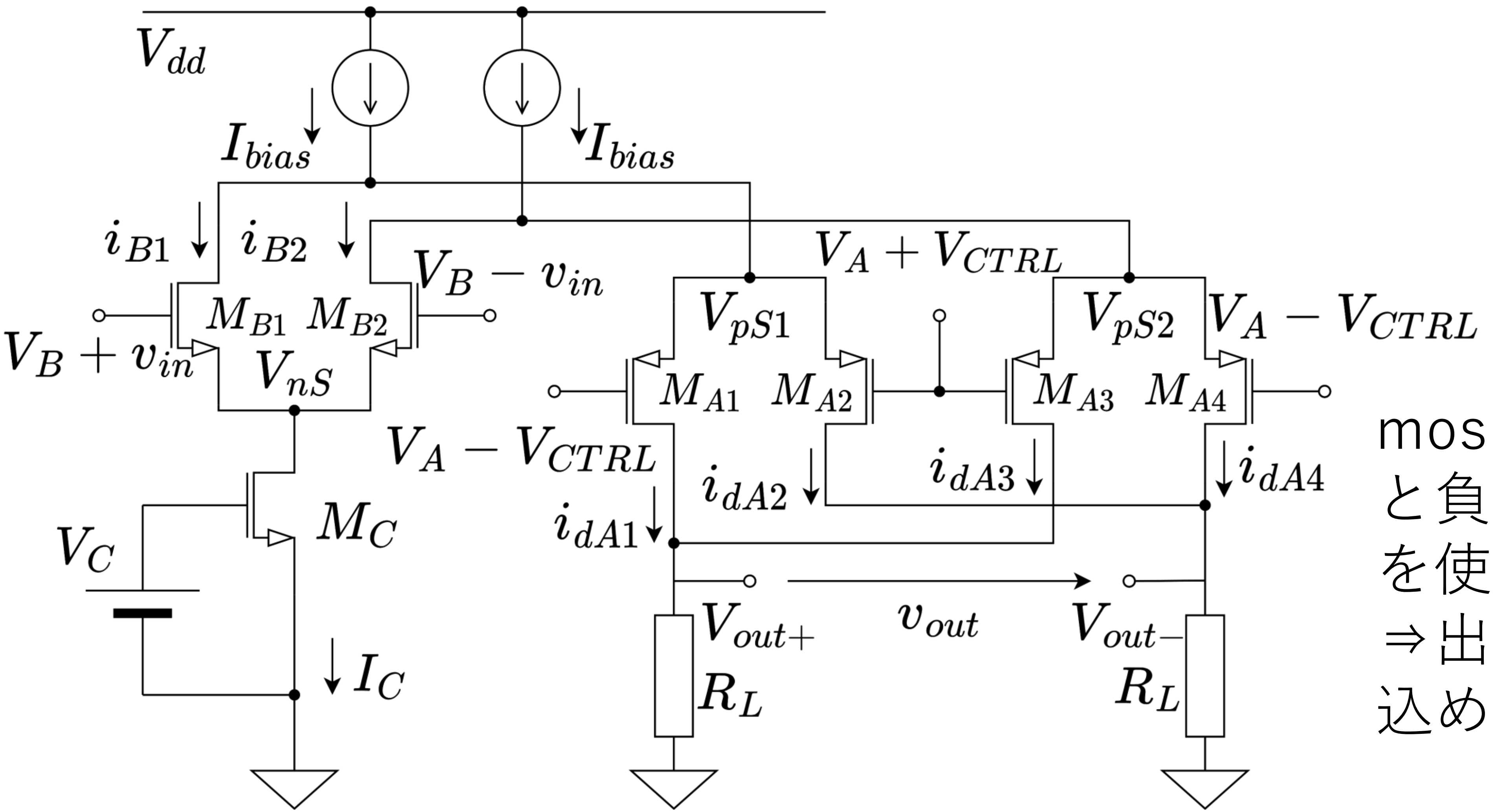
進捗報告
折り返し型ギルバート乗算回路の設計

2023/7/10　B4　小島 光

目的

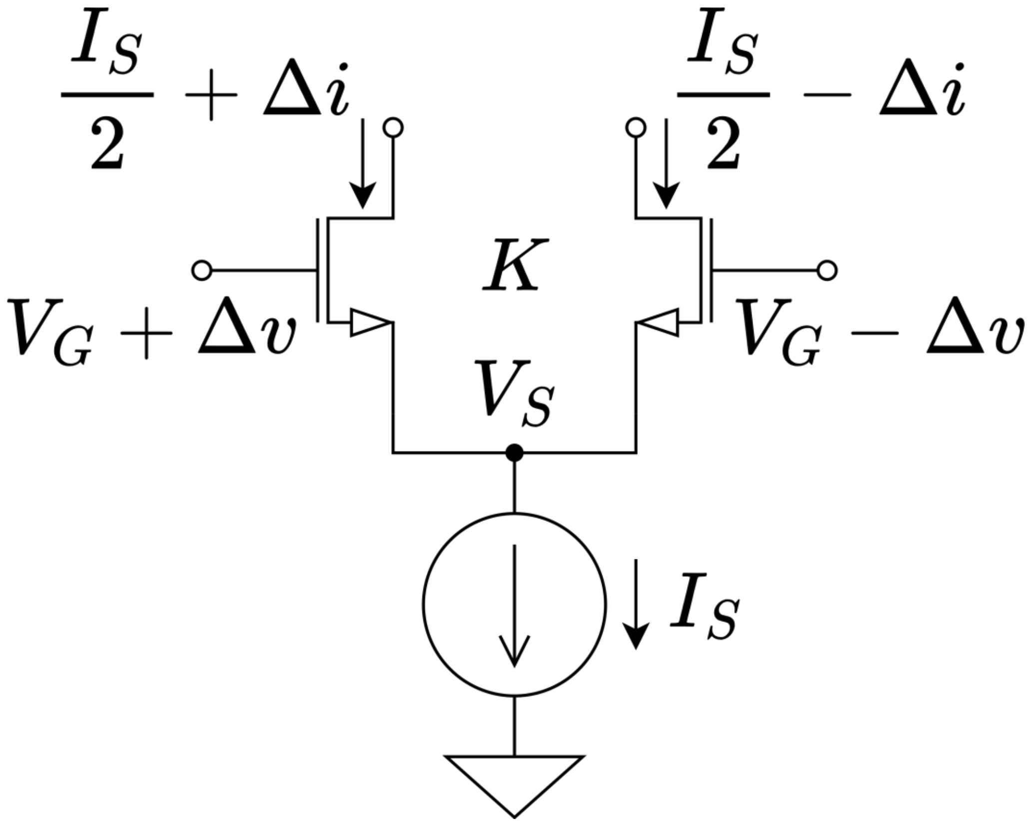
折り返し型のギルバート乗算回路を設計し、出力範囲の拡大を目指す。
設計の初期段階として、利得を求める。

折り返し型乗算回路の構成



mosトランジスタ2段と負荷抵抗で電源電圧を使う。
⇒出力範囲の拡大が見込める。

折り返し型乗算回路の利得計算
nmos差動対



$K \equiv \frac{\mu C_{ox}}{2} \cdot \frac{W}{L}$とすると

nmosのドレイン電流は二乗則より

$$\frac{I_S}{2}+\Delta i = K \cdot \{(V_G+\Delta v)-V_S-V_{th}\}^2$$

$$\frac{I_S}{2}-\Delta i = K \cdot \{(V_G-\Delta v)-V_S-V_{th}\}^2$$

両辺の平方根を取り、差をとると

$$\sqrt{\frac{I_S}{2}+\Delta i}-\sqrt{\frac{I_S}{2}-\Delta i} = \sqrt{K} \cdot 2\Delta v$$

折り返し型乗算回路の利得計算
nmos差動対

辺々を二乗すると

$$\frac{I_S}{2}+\Delta i-2\sqrt{\left(\frac{I_S}{2}\right)^2-(\Delta i)^2}+\frac{I_S}{2}-\Delta i=4K\Delta v^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{I_S}{2}\right)^2-(\Delta i)^2}=\frac{I_S}{2}-2K\Delta v^2$$

さらに辺々を二乗し、Δiについて解くと

$$\Delta i=\Delta v\cdot\{2K(I_S-2K\Delta v^2)\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\Delta v\cdot\left\{2KI_S\left(1-\frac{2K}{I_S}\cdot\Delta v^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

折り返し型乗算回路の利得計算
nmos差動対

$\Delta v \approx 0$としてマクローリン展開を行うと

$$\Delta i \approx \Delta v \cdot \sqrt{2KI_S} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2K}{I_S} \cdot \Delta v^2\right)$$

微小量の二乗を無視すると

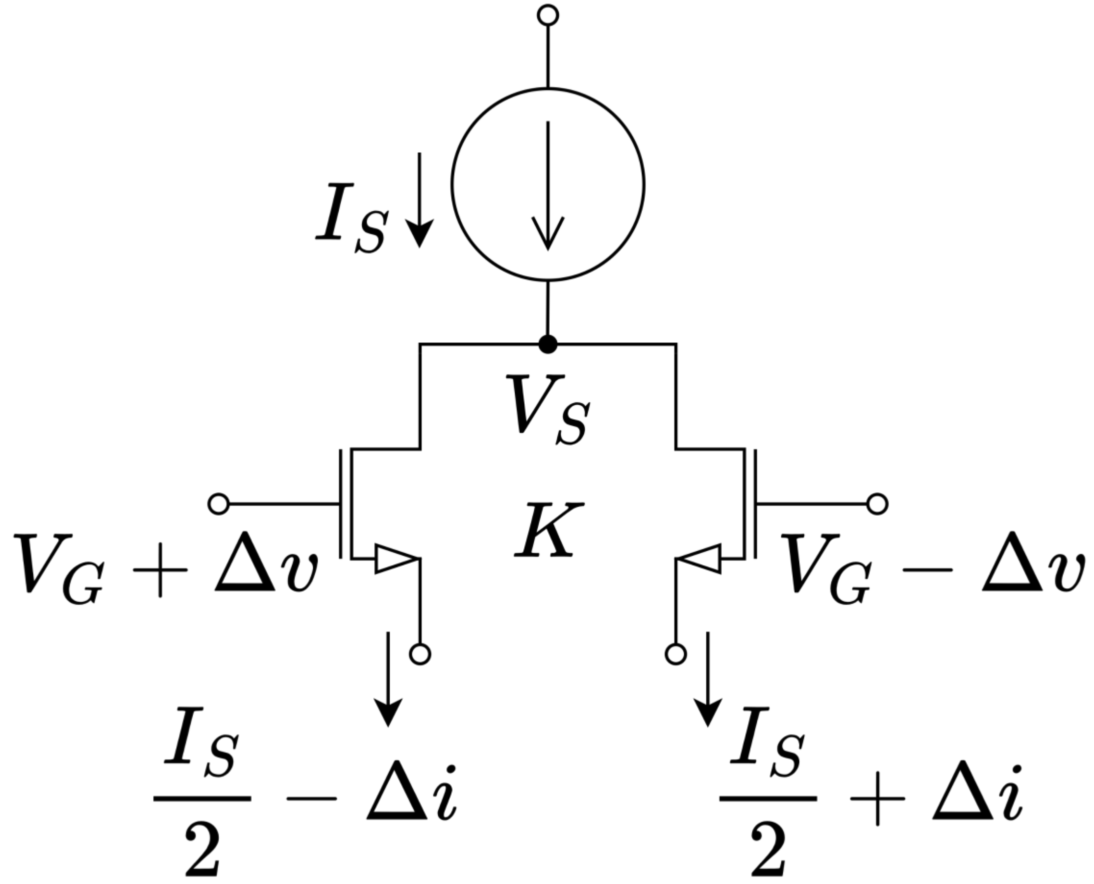
$$\Delta i \approx \Delta v \cdot \sqrt{2KI_S}$$

従って、nmosのドレイン電流は

$$\frac{I_S}{2} + \Delta i = \frac{I_S}{2} + \Delta v \cdot \sqrt{2KI_S} \equiv f_n(\Delta v, I_S, K) \qquad (1)$$

と表せる。

折り返し型乗算回路の利得計算
pmos差動対



nmosのドレイン電流は二乗則より

$$\frac{I_S}{2} + \Delta i = K \cdot \left\{V_S - (V_G - \Delta v) - V_{th}\right\}^2$$

$$\frac{I_S}{2} - \Delta i = K \cdot \left\{V_S - (V_G + \Delta v) - V_{th}\right\}^2$$

両辺の平方根を取り、差をとると

$$\sqrt{\frac{I_S}{2} + \Delta i} - \sqrt{\frac{I_S}{2} - \Delta i} = \sqrt{K} \cdot 2\Delta v$$

折り返し型乗算回路の利得計算
pmos差動対

辺々を二乗すると

$$\frac{I_S}{2}+\Delta i-2\sqrt{\left(\frac{I_S}{2}\right)^2-(\Delta i)^2}+\frac{I_S}{2}-\Delta i=4K\Delta v^2$$

$$\sqrt{\left(\frac{I_S}{2}\right)^2-(\Delta i)^2}=\frac{\mathrm{I_S}}{2}-2K\Delta v^2$$

さらに辺々を二乗し、Δiについて解くと

$$\Delta i=\Delta v\cdot\left\{2KI_S\left(1-\frac{2K}{I_S}\Delta v^2\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

折り返し型乗算回路の利得計算
pmos差動対

$\Delta v \approx 0$としてマクローリン展開を行うと

$$\Delta i \approx \Delta v \cdot \sqrt{2KI_S} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2K}{I_S} \Delta v^2\right)$$

微小量の二乗を無視すると

$$\Delta i \approx \Delta v \cdot \sqrt{2KI_s}$$

従って、pmosのドレイン電流は

$$\frac{I_S}{2} - \Delta i \approx \frac{I_S}{2} - \Delta v \cdot \sqrt{2KI_s} \equiv f_p(\Delta v, I_S, K) \qquad (2)$$

と表せる。

折り返し型乗算回路の利得計算
各部の電流

$$f_n(\Delta v, I_S, K) = \frac{I_S}{2} + \Delta v \cdot \sqrt{2KI_S} \qquad (1)$$

$$f_p(\Delta v, I_S, K) = \frac{I_S}{2} - \Delta v \cdot \sqrt{2KI_S} \qquad (2)$$

(1)式、(2)式より

$$i_{B1} = f_n(v_{in}, I_C, K_n) = \frac{I_C}{2} + v_{in} \cdot \sqrt{2K_nI_C}$$

$$i_{B2} = f_n(-v_{in}, I_C, K_n) = \frac{I_C}{2} - v_{in} \cdot \sqrt{2K_nI_C}$$

$$i_{A1} = f_p\left(-V_{CTRL}, I_{bias} - i_{B1}, K_p\right) = \frac{I_{bias} - i_{B1}}{2} + \mathrm{V_{CTRL}} \cdot \sqrt{2K_p(I_{bias} - i_{B1})}$$

$$i_{A2} = f_p(V_{CTRL}, I_{bias} - i_{B1}, K_p) = \frac{I_{bias} - i_{B1}}{2} - \mathrm{V_{CTRL}} \cdot \sqrt{2K_p(I_{bias} - i_{B1})}$$

$$i_{A3} = f_p(V_{CTRL}, I_{bias} - i_{B2}, K_p) = \frac{I_{bias} - i_{B2}}{2} - \mathrm{V_{CTRL}} \cdot \sqrt{2K_p(I_{bias} - i_{B2})}$$

$$i_{A4} = f_p\left(-V_{CTRL}, I_{bias} - i_{B2}, K_p\right) = \frac{I_{bias} - i_{B2}}{2} + \mathrm{V_{CTRL}} \cdot \sqrt{2K_p(I_{bias} - i_{B2})}$$

ただし、$K_n \equiv \frac{\mu_n C_{ox}}{2} \cdot \frac{W}{L}$、$K_p \equiv \frac{\mu_p C_{ox}}{2} \cdot \frac{W}{L}$である。

折り返し型乗算回路の利得計算
各部の電流

$$i_{A1} = f_p(-V_{CTRL}, I_{bias} - i_{B1}, K_p)$$
$$= \frac{I_{bias} - i_{B1}}{2} + V_{CTRL} \cdot \sqrt{2K_p} \cdot \sqrt{I_{bias} - i_{B1}}$$

ここで、

$$\sqrt{I_{bias} - i_{B1}} = \sqrt{I_{bias} - \frac{I_C}{2} - v_{in} \cdot \sqrt{2K_n I_C}}$$
$$= \sqrt{\frac{2I_{bias} - I_C}{2}} \cdot \left(1 - \frac{2\sqrt{2K_n I_C}}{2I_{bias} - I_C} \cdot v_{in}\right)^{\frac{1}{2}}$$

折り返し型乗算回路の利得計算
各部の電流

$v_{in} \approx 0$としてマクローリン展開を行うと

$$\sqrt{I_{bias} - i_{B1}} \approx \sqrt{\frac{2I_{bias} - I_C}{2}} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2K_n I_C}}{2I_{bias} - I_C} \cdot v_{in}\right)$$

従って

$$i_{A1} = \frac{2I_{bias} - I_C - 2v_{in}\sqrt{2K_n I_C}}{2} + V_{CTRL}\sqrt{K_p(2I_{bias} - I_C)} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2K_n I_C}}{2I_{bias} - I_C} \cdot v_{in}\right)$$

これを$h(v_{in}, -V_{CTRL})$とおき、$v_{in} \approx 0$でマクローリン展開を行う。

折り返し型乗算回路の利得計算
各部の電流

$$h(0) = \frac{2I_{bias} - I_C}{4} + V_{CTRL}\sqrt{K_p(2I_{bias} - I_C)}$$

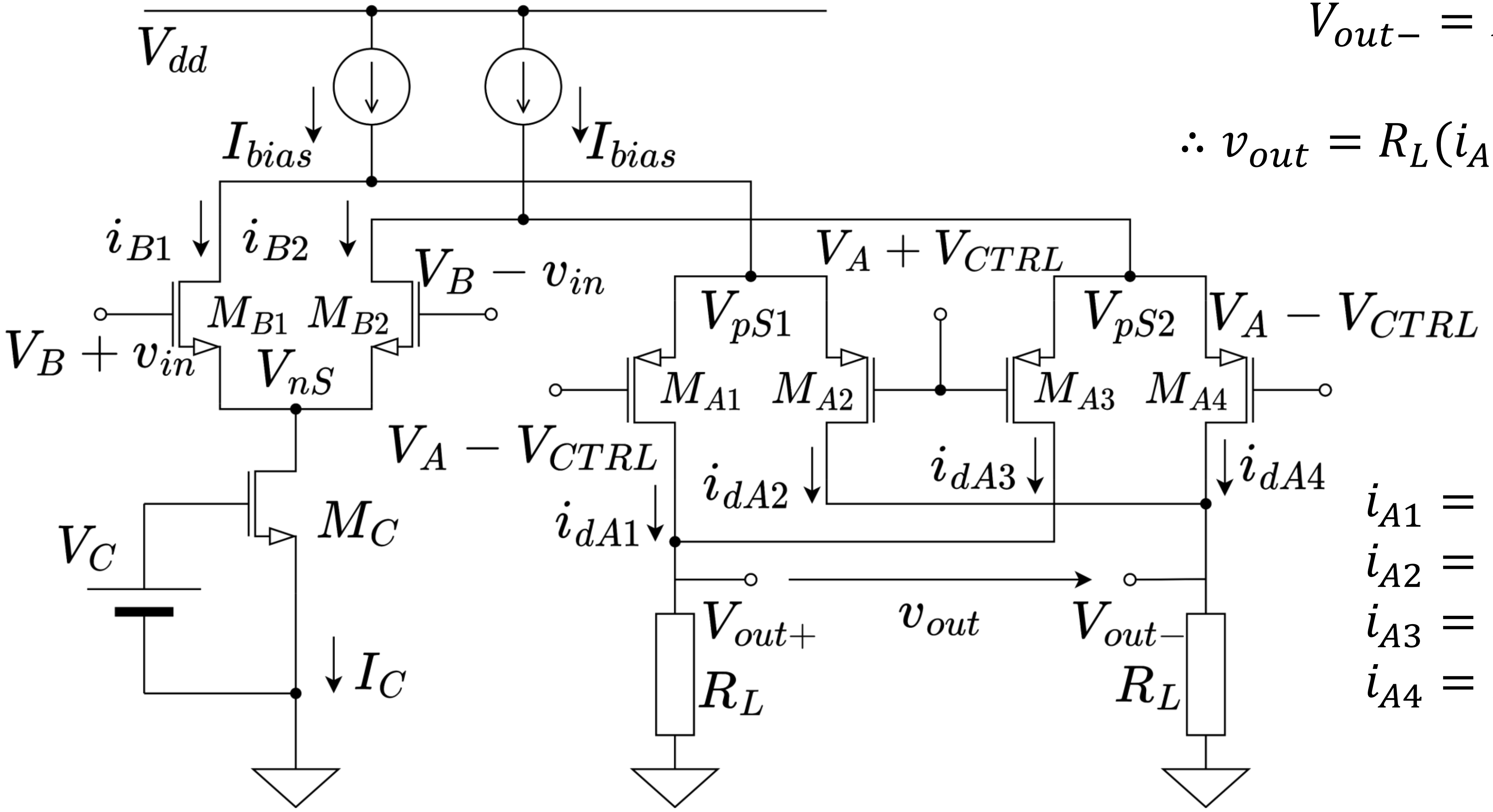
$$\frac{dh(v_{in})}{dv_{in}} = -\frac{\sqrt{2K_nI_C}}{2} - V_{CTRL} \cdot \frac{\sqrt{K_pK_nI_C(2I_{bias} - I_C)}}{2I_{bias} - I_C}$$

$$= -\sqrt{2K_nI_C}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{K_p}{2I_{bias} - I_C}} \cdot V_{CTRL}\right)$$

$$\therefore h(v_{in}, -V_{CTRL}) \approx \frac{\partial h(0, -V_{CTRL})}{\partial v_{in}} \cdot v_{in} + h(0, -V_{CTRL})$$

$$= -\sqrt{2K_nI_C}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{K_p}{2I_{bias} - I_C}} \cdot V_{CTRL}\right) \cdot v_{in} + \frac{2I_{bias} - I_C}{4} + V_{CTRL}\sqrt{K_p(2I_{bias} - I_C)}$$

折り返し型乗算回路の利得計算
各部の電流



$$V_{out+} = R_L(i_{A1} + i_{A3})$$
$$V_{out-} = R_L(i_{A2} + i_{A4})$$

$$\therefore v_{out} = R_L(i_{A1} - i_{A2} + i_{A3} - i_{A4})$$

$$i_{A1} = h(+v_{in}, -V_{CTRL})$$
$$i_{A2} = h(+v_{in}, +V_{CTRL})$$
$$i_{A3} = h(-v_{in}, +V_{CTRL})$$
$$i_{A4} = h(-v_{in}, -V_{CTRL})$$

折り返し型乗算回路の利得計算
各部の電流

$$h(v_{in}, -V_{CTRL}) = -\sqrt{2K_n I_C}\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{K_p}{2I_{bias} - I_C}} \cdot V_{CTRL}\right) \cdot v_{in} + \frac{2I_{bias} - I_C}{4} + V_{CTRL}\sqrt{K_p(2I_{bias} - I_C)}$$

i_{A1}~i_{A4}はv_{in}とV_{CTLR}の符号が変わるだけなので簡便のため

$$A = -\sqrt{2K_n I_C}, B = \sqrt{\frac{K_p}{2I_{bias} - I_C}}, C = \frac{2I_{bias} - I_C}{4}, D = \sqrt{K_p(2I_{bias} - I_C)}$$

と置けば

$$h(v_{in}, -V_{CTRL}) = A \cdot \left(\frac{1}{2} + B \cdot V_{CTRL}\right) \cdot v_{in} + C + D \cdot V_{CTRL}$$

と表せる。

折り返し型乗算回路の利得計算
各部の電流

$$
\begin{aligned}
&i_{A1} - i_{A2} + i_{A3} - i_{A4} \\
&= h(v_{in}, -V_{CTRL}) - h(v_{in}, V_{CTRL}) + h(-v_{in}, V_{CTRL}) - h(-v_{in}, -V_{CTRL}) \\
&= A \cdot \left(\frac{1}{2} + B \cdot V_{CTRL}\right) \cdot v_{in} + C + D \cdot V_{CTRL} \\
&\quad -A \cdot \left(\frac{1}{2} - B \cdot V_{CTRL}\right) \cdot v_{in} - C + D \cdot V_{CTRL} \\
&\quad -A \cdot \left(\frac{1}{2} - B \cdot V_{CTRL}\right) \cdot v_{in} + C - D \cdot V_{CTRL} \\
&\quad +A \cdot \left(\frac{1}{2} + B \cdot V_{CTRL}\right) \cdot v_{in} - C - D \cdot V_{CTRL}
\end{aligned}
$$

整理すると

$$
i_{A1} - i_{A2} + i_{A3} - i_{A4} = 4AB \cdot V_{CTRL} \cdot v_{in}
$$

折り返し型乗算回路の利得計算
各部の電流

$A = -\sqrt{2K_n I_C}, B = \sqrt{\frac{K_p}{2I_{bias} - I_C}}$より

$$i_{A1} - i_{A2} + i_{A3} - i_{A4} = 4AB \cdot V_{CTRL} \cdot v_{in}$$
$$= -4\sqrt{\frac{2K_p K_n I_C}{2I_{bias} - I_C}} \cdot V_{CTRL} \cdot v_{in}$$

したがって、全体の利得は

$$R_L \cdot (i_{A1} - i_{A2} + i_{A3} - i_{A4}) = -4R_L\sqrt{\frac{2K_p K_n I_C}{2I_{bias} - I_C}} \cdot V_{CTRL} \cdot v_{in}$$

と、求めることができた。

まとめ

- 折り返し型の利得が求められた。
- 次週すべてが飽和領域で動作するよう設計・シミュレーションをする