

形式语言与自动机课后习题答案

第二章

4. 找出右线性文法，能构成长度为 1 至 5 个字符且以字母为首的字符串。

答:  $G=\{N,T,P,S\}$

其中  $N=\{S,A,B,C,D\}$   $T=\{x,y\}$  其中  $x\in\{\text{所有字母}\}$   $y\in\{\text{所有的字符}\}$  P 如下:

$S\rightarrow x$   $S\rightarrow xA$   $A\rightarrow y$   $A\rightarrow yB$

$B\rightarrow y$   $B\rightarrow yC$   $C\rightarrow y$   $C\rightarrow yD$   $D\rightarrow y$

6. 构造上下文无关文法能够产生

$L=\{\omega / \omega \in \{a,b\}^* \text{ 且 } \omega \text{ 中 } a \text{ 的个数是 } b \text{ 的两倍}\}$

答:  $G=\{N,T,P,S\}$

其中  $N=\{S\}$   $T=\{a,b\}$  P 如下:

$S\rightarrow aab$   $S\rightarrow aba$   $S\rightarrow baa$

$S\rightarrow aabS$   $S\rightarrow aaSb$   $S\rightarrow aSab$   $S\rightarrow Saab$

$S\rightarrow abaS$   $S\rightarrow abSa$   $S\rightarrow aSba$   $S\rightarrow Saba$

$S\rightarrow baaS$   $S\rightarrow baSa$   $S\rightarrow bSaa$   $S\rightarrow Sbba$

7. 找出由下列各组生成式产生的语言（起始符为 S）

(1)  $S\rightarrow SaS$   $S\rightarrow b$

(2)  $S\rightarrow aSb$   $S\rightarrow c$

(3)  $S\rightarrow a$   $S\rightarrow aE$   $E\rightarrow aS$

答: (1)  $b(ab)^n / n \geq 0$  或者  $L=\{(ba)^nb / n \geq 0\}$

(2)  $L=\{a^ncb^n / n \geq 0\}$

(3)  $L=\{a^{2n+1} / n \geq 0\}$

第三章

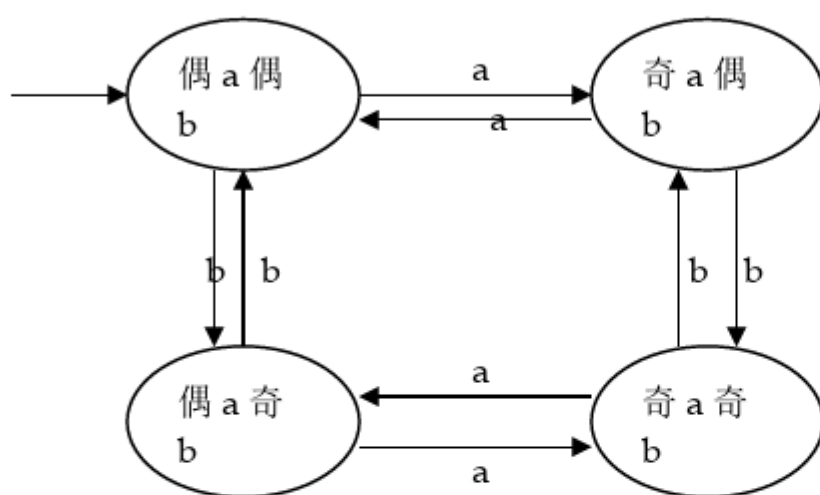
1. 下列集合是否为正则集，若是正则集写出其正则式。

(1) 含有偶数个 a 和奇数个 b 的  $\{a,b\}^*$  上的字符串集合

(2) 含有相同个数 a 和 b 的字符串集合

(3) 不含子串 aba 的  $\{a,b\}^*$  上的字符串集合

答: (1) 是正则集，自动机如下



(2) 不是正则集，用泵浦引理可以证明，具体见 17 题 (2)。

(3) 是正则集

先看  $L'$  为包含子串  $aba$  的  $\{a,b\}^*$  上的字符串集合

显然这是正则集，可以写出表达式和画出自动机。（略）

则不包含子串  $aba$  的  $\{a,b\}^*$  上的字符串集合  $L$  是  $L'$  的非。

根据正则集的性质， $L$  也是正则集。

4. 对下列文法的生成式，找出其正则式

(1)  $G = (\{S, A, B, C, D\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$ , 生成式  $P$  如下:

$S \rightarrow aA \quad S \rightarrow B$

$A \rightarrow abS \quad A \rightarrow bB$

$B \rightarrow b \quad B \rightarrow cC$

$C \rightarrow D \quad D \rightarrow bB$

$D \rightarrow d$

(2)  $G = (\{S, A, B, C, D\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$ , 生成式  $P$  如下:

$S \rightarrow aA \quad S \rightarrow B$

$A \rightarrow cC \quad A \rightarrow bB$

$B \rightarrow bB \quad B \rightarrow a$

$C \rightarrow D \quad C \rightarrow abB$

$D \rightarrow d$

答: (1) 由生成式得:

$$S=aA+B \text{ ①}$$

$$A=abS+bB \text{ ②}$$

$$B=b+cC \text{ ③}$$

$$C=D \text{ ④}$$

$$D=d+bB \text{ ⑤}$$

③④⑤式化简消去 CD，得到  $B=b+c(d+bB)$

$$\text{即 } B=cbB+cd+b \Rightarrow B=(cb)^*(cd+b) \text{ ⑥}$$

将②⑥代入①

$$S=aabS+ab(cb)^*(cd+b)+(cb)^*(cd+b) \Rightarrow S=(aab)^*(ab+\varepsilon)(cb)^*(cd+b)$$

(2) 由生成式得:

$$S=aA+B \text{ ①}$$

$$A=bB+cC \text{ ②}$$

$$B=a+bB \text{ ③}$$

$$C=D+abB \text{ ④}$$

$$D=dB \text{ ⑤}$$

由③得  $B=b^*a \text{ ⑥}$

$$\text{将⑤⑥代入④ } C=d+abb^*a=d+ab^*a \text{ ⑦}$$

$$\text{将⑥⑦代入② } A=b^*a+c(d+b^*a) \text{ ⑧}$$

$$\text{将⑥⑧代入① } S=a(b^*a+c(d+ab^*a))+b^*a$$

$$=ab^*a+acd+acab^*a+b^*a$$

5.为下列正则集，构造右线性文法:

(1){a,b}\*

(2)以 abb 结尾的由 a 和 b 组成的所有字符串的集合

(3)以 b 为首后跟若干个 a 的字符串的集合

(4) 含有两个相继 a 和两个相继 b 的由 a 和 b 组成的所有字符串集合

答: (1) 右线性文法  $G=(\{S\},\{a,b\},P,S)$

$$P: S \rightarrow aS \quad S \rightarrow bS \quad S \rightarrow \varepsilon$$

(2) 右线性文法  $G=(\{S\},\{a,b\},P,S)$

$$P: S \rightarrow aS \quad S \rightarrow bS \quad S \rightarrow abb$$

(3) 此正则集为 {ba\*}

右线性文法  $G=(\{S,A\},\{a,b\},P,S)$

$$P: S \rightarrow bA \quad A \rightarrow aA \quad A \rightarrow \varepsilon$$

(4) 此正则集为  $\{[a,b]^*aa[a,b]^*bb[a,b]^*, [a,b]^*bb[a,b]^*aa[a,b]^*\}$

右线性文法  $G=(\{S,A,B,C\},\{a,b\},P,S)$

$$P: S \rightarrow aS/bS/aaA/bbB$$

$$A \rightarrow aA/bA/bbC$$

$$B \rightarrow aB/bB/aaC$$

$$C \rightarrow aC/bC/\varepsilon$$

7. 设正则集为  $a(ba)^*$

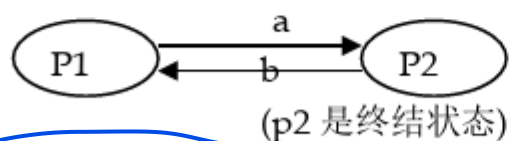
(1) 构造右线性文法

(2) 找出 (1) 中文法的有限自动机

答: (1) 右线性文法  $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$

$$P: S \rightarrow aA \quad A \rightarrow bS \quad A \rightarrow \varepsilon$$

(2) 自动机如下:



9. 对应图 (a) (b) 的状态转换图写出正则式。 (图略)

(1) 由图可知  $q_0 = aq_0 + bq_1 + a + \varepsilon$

$$q_1 = aq_2 + bq_1$$

$$q_0 = aq_0 + bq_1 + a$$

$$\Rightarrow q_1 = abq_1 + bq_1 + aaq_0 + aa$$

$$= (b+ab)q_1 + aaq_0 + aa$$

$$= (b+ab)^*(aaq_0 + aa)$$

$$\Rightarrow q_0 = aq_0 + b(b+ab)^*(aaq_0 + aa) + a + \varepsilon$$

$$= q_0(a + b(b+ab)^*aa) + b(b+ab)^*aa + a + \varepsilon$$

$$= (a + b(b+ab)^*aa)^*(b(b+ab)^*aa + a + \varepsilon)$$

$$= (a + b(b+ab)^*aa)^*$$

(3)  $q_0 = aq_1 + bq_2 + a + b$

$$q_1 = aq_0 + bq_2 + b$$

$$q_0 = aq_1 + bq_0 + a$$

$$\Rightarrow q_1 = aq_0 + baq_1 + bbq_0 + ba + b$$

$$= (ba)^*(aq_0 + bbq_0 + ba + b)$$

$$\Rightarrow q_2 = aaq_0 + abq_2 + bq_0 + ab + a$$

$$= (ab)^*(aaq_0 + bq_0 + ab + a)$$

$$\Rightarrow q_0 = a(ba)^*(a + bb)q_0 + a(ba)^*(ba + b) + b(ab)^*(aa + b)q_0 + b(ab)^*(ab + a) + a + b$$

$$= [a(ba)^*(a + bb) + b(ab)^*(aa + b)]^*(a(ba)^*(ba + b) + b(ab)^*(ab + a) + a + b)$$

10. 设字母表  $T = \{a, b\}$ , 找出接受下列语言的 DFA:

(1) 含有 3 个连续 b 的所有字符串集合

(2) 以 aa 为首的所有字符串集合

(3) 以 aa 结尾的所有字符串集合

答: (1)  $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \sigma, q_0, \{q_3\})$ , 其中  $\sigma$  如下:

	a	b
$q_0$	$q_0$	$q_1$
$q_1$	$q_0$	$q_2$
$q_2$	$q_0$	$q_3$
$q_3$	$q_3$	$q_3$

(2)  $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \sigma, q_0, \{q_2\})$ , 其中  $\sigma$  如下:

	a	b
$q_0$	$q_1$	$\Phi$
$q_1$	$q_2$	$\Phi$
$q_2$	$q_2$	$q_2$

(3)  $M = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \sigma, q_0, \{q_2\})$ , 其中  $\sigma$  如下:

	a	b
$q_0$	$q_1$	$q_0$
$q_1$	$q_2$	$q_0$
$q_2$	$q_2$	$q_0$

14 构造 DFA  $M_1$  等价于 NFA  $M$ , NFA  $M$  如下:

(1)  $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \sigma, q_0, \{q_3\})$ , 其中  $\sigma$  如下:

$$\sigma(q_0, a) = \{q_0, q_1\} \quad \sigma(q_0, b) = \{q_0\}$$

$$\sigma(q_1, a) = \{q_2\} \quad \sigma(q_1, b) = \{q_2\}$$

$$\sigma(q_2, a) = \{q_3\} \quad \sigma(q_2, b) = \Phi$$

$$\sigma(q_3, a) = \{q_3\} \quad \sigma(q_3, b) = \{q_3\}$$

(2)  $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \sigma, q_0, \{q_1, q_2\})$ , 其中  $\sigma$  如下:

$$\sigma(q_0, a) = \{q_1, q_2\} \quad \sigma(q_0, b) = \{q_1\}$$

$$\sigma(q_1, a) = \{q_2\} \quad \sigma(q_1, b) = \{q_1, q_2\}$$

$$\sigma(q_2, a) = \{q_3\} \quad \sigma(q_2, b) = \{q_0\}$$

$$\sigma(q_3, a) = \Phi \quad \sigma(q_3, b) = \{q_0\}$$

答: (1) DFA  $M_1 = (Q_1, \{a, b\}, \sigma_1, [q_0], \{[q_0, q_1, q_3], [q_0, q_2, q_3], [q_0, q_1, q_2, q_3]\})$

其中  $Q_1 = \{[q_0], [q_0, q_1], [q_0, q_1, q_2], [q_0, q_2], [q_0, q_1, q_2, q_3], [q_0, q_1, q_3], [q_0, q_2, q_3], [q_0, q_3]\}$

$\sigma_1$  满足

	a	b
[q <sub>0</sub> ]	[q <sub>0</sub> ,q <sub>1</sub> ]	[q <sub>0</sub> ]
[q <sub>0</sub> ,q <sub>1</sub> ]	[q <sub>0</sub> ,q <sub>1</sub> ,q <sub>2</sub> ]	[q <sub>0</sub> ,q <sub>2</sub> ]
[q <sub>0</sub> ,q <sub>1</sub> ,q <sub>2</sub> ]	[q <sub>0</sub> ,q <sub>1</sub> ,q <sub>2</sub> ,q <sub>3</sub> ]	[q <sub>0</sub> ,q <sub>2</sub> ]
[q <sub>0</sub> ,q <sub>2</sub> ]	[q <sub>0</sub> ,q <sub>1</sub> ,q <sub>3</sub> ]	[q <sub>0</sub> ]
[q <sub>0</sub> ,q <sub>1</sub> ,q <sub>2</sub> ,q <sub>3</sub> ]	[q <sub>0</sub> ,q <sub>1</sub> ,q <sub>2</sub> ,q <sub>3</sub> ]	[q <sub>0</sub> ,q <sub>2</sub> ,q <sub>3</sub> ]
[q <sub>0</sub> ,q <sub>1</sub> ,q <sub>3</sub> ]	[q <sub>0</sub> ,q <sub>1</sub> ,q <sub>2</sub> ,q <sub>3</sub> ]	[q <sub>0</sub> ,q <sub>2</sub> ,q <sub>3</sub> ]
[q <sub>0</sub> ,q <sub>2</sub> ,q <sub>3</sub> ]	[q <sub>0</sub> ,q <sub>1</sub> ,q <sub>3</sub> ]	[q <sub>0</sub> ,q <sub>3</sub> ]
[q <sub>0</sub> ,q <sub>3</sub> ]	[q <sub>0</sub> ,q <sub>1</sub> ,q <sub>3</sub> ]	[q <sub>0</sub> ,q <sub>3</sub> ]

(2) DFA  $M_1 = \{Q_1, \{a,b\}, \sigma_1, [q_0], \{[q_1], [q_3], [q_1,q_3], [q_0,q_1,q_2], [q_1,q_2], [q_1,q_2,q_3], [q_2,q_3]\}$   
 其中  $Q_1 = \{[q_0], [q_1,q_3], [q_1], [q_2], [q_0,q_1,q_2], [q_1,q_2], [q_3], [q_1,q_2,q_3], [q_2,q_3]\}$

$\sigma_1$  满足

	a	b
[q <sub>0</sub> ]	[q <sub>1</sub> ,q <sub>3</sub> ]	[q <sub>1</sub> ]
[q <sub>1</sub> ,q <sub>3</sub> ]	[q <sub>2</sub> ]	[q <sub>0</sub> ,q <sub>1</sub> ,q <sub>2</sub> ]
[q <sub>1</sub> ]	[q <sub>2</sub> ]	[q <sub>1</sub> ,q <sub>2</sub> ]
[q <sub>2</sub> ]	[q <sub>3</sub> ]	[q <sub>0</sub> ]
[q <sub>0</sub> ,q <sub>1</sub> ,q <sub>2</sub> ]	[q <sub>1</sub> ,q <sub>2</sub> ,q <sub>3</sub> ]	[q <sub>0</sub> ,q <sub>1</sub> ,q <sub>2</sub> ]
[q <sub>1</sub> ,q <sub>2</sub> ]	[q <sub>2</sub> ,q <sub>3</sub> ]	[q <sub>0</sub> ,q <sub>1</sub> ,q <sub>2</sub> ]
[q <sub>3</sub> ]	$\Phi$	[q <sub>0</sub> ]
[q <sub>1</sub> ,q <sub>2</sub> ,q <sub>3</sub> ]	[q <sub>2</sub> ,q <sub>3</sub> ]	[q <sub>0</sub> ,q <sub>1</sub> ,q <sub>2</sub> ]
[q <sub>2</sub> ,q <sub>3</sub> ]	[q <sub>3</sub> ]	[q <sub>0</sub> ]

15. 15. 对下面矩阵表示的  $\epsilon$ -NFA

	$\epsilon$	a	b	c
P(起始状态)	$\Phi$	{p}	{q}	{r}
q	{p}	{q}	{r}	$\Phi$
r(终止状态)	{q}	{r}	$\Phi$	{p}

(1) 给出该自动机接收的所有长度为 3 的串

(2) 将此  $\epsilon$ -NFA 转换为没有  $\epsilon$  的 NFA

答: (1) 可被接受的串共 23 个, 分别为 aac, abc, acc, bac, bbc, bcc, cac, cbc, ccc, caa, cab, cba, cbb, cca, ccb, bba, aba, acb, bca, bcb, bab, bbb, abb

(2)  $\epsilon$ -NFA:  $M = (\{p,q,r\}, \{a,b,c\}, \sigma, p, r)$  其中  $\sigma$  如表格所示。

因为  $\epsilon$ -closure(p) =  $\Phi$

则设不含  $\epsilon$  的 NFA  $M_1 = (\{p,q,r\}, \{a,b,c\}, \sigma_1, p, r)$

$$\sigma_1(p,a) = \sigma'(p,a) = \epsilon\text{-closure}(\sigma(\sigma'(p, \epsilon), a)) = \{p\}$$

$$\sigma_1(p,b) = \sigma'(p,b) = \epsilon\text{-closure}(\sigma(\sigma'(p, \epsilon), b)) = \{p, q\}$$

$$\sigma_1(p,c) = \sigma'(p,c) = \epsilon\text{-closure}(\sigma(\sigma'(p, \epsilon), c)) = \{p, q, r\}$$

$$\sigma_1(q,a)=\sigma'(q,a)=\varepsilon\text{-closure}(\sigma(\sigma'(q,\varepsilon),a))=\{p,q\}$$

$$\sigma_1(q,b)=\sigma'(q,b)=\varepsilon\text{-closure}(\sigma(\sigma'(q,\varepsilon),b))=\{p,q,r\}$$

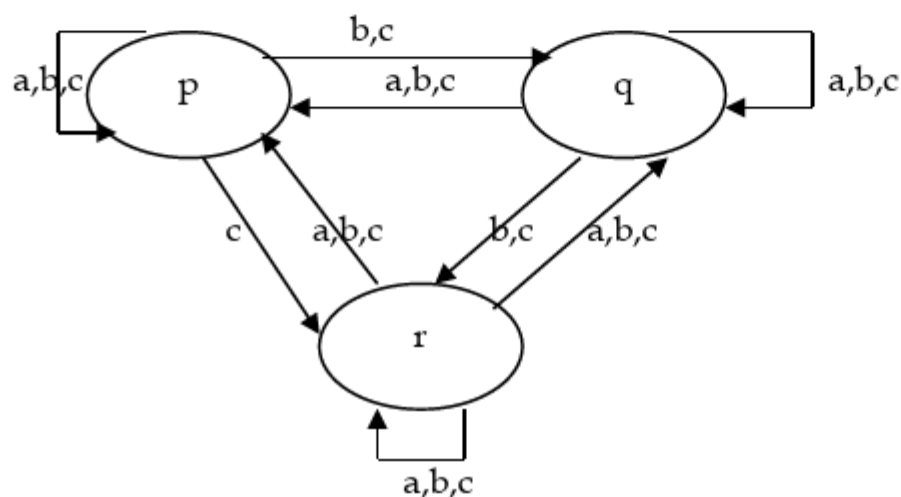
$$\sigma_1(q,c)=\sigma'(q,c)=\varepsilon\text{-closure}(\sigma(\sigma'(q,\varepsilon),c))=\{p,q,r\}$$

$$\sigma_1(r,a)=\sigma'(r,a)=\varepsilon\text{-closure}(\sigma(\sigma'(r,\varepsilon),a))=\{p,q,r\}$$

$$\sigma_1(r,b)=\sigma'(r,b)=\varepsilon\text{-closure}(\sigma(\sigma'(r,\varepsilon),b))=\{p,q,r\}$$

$$\sigma_1(r,c)=\sigma'(r,c)=\varepsilon\text{-closure}(\sigma(\sigma'(r,\varepsilon),c))=\{p,q,r\}$$

图示如下: (r 为终止状态)



16. 设 NFA  $M=(\{q_0,q_1\},\{a,b\},\sigma,q_0,\{q_1\})$ , 其中  $\sigma$  如下:

$$\sigma(q_0,a)=\{q_0,q_1\} \quad \sigma(q_0,b)=\{q_1\}$$

$$\sigma(q_1,a)=\Phi \quad \sigma(q_1,b)=\{q_0,q_1\}$$

构造相应的 DFA  $M_1$ , 并进行化简

答: 构造一个相应的 DFA  $M_1=\{Q_1,\{a,b\},\sigma_1,[q_0],\{[q_1],[q_0,q_1]\}$

其中  $Q_1=\{[q_0],[q_1],[q_0,q_1]\}$

$\sigma_1$  满足

	a	b
$[q_0]$	$[q_0,q_1]$	$[q_1]$
$[q_1]$	$\Phi$	$[q_0,q_1]$
$[q_0,q_1]$	$[q_0,q_1]$	$[q_0,q_1]$

由于该 DFA 已是最简, 故不用化简

17. 使用泵浦引理, 证明下列集合不是正则集:

(1) 由文法  $G$  的生成式  $S \rightarrow aSbS/c$  产生的语言  $L(G)$

(2)  $\{\omega / \omega \in \{a,b\}^* \text{ 且 } \omega \text{ 有相同个数的 } a \text{ 和 } b\}$

(3)  $\{a^k c a^k / k \geq 1\}$

(4)  $\{\omega \omega / \omega \in \{a, b\}^*\}$

证明: (1) 在  $L(G)$  中,  $a$  的个数与  $b$  的个数相等

假设  $L(G)$  是正则集, 对于足够大的  $k$  取  $\omega = a^k (cb)^k c$

令  $\omega = \omega_1 \omega_0 \omega_2$

因为  $|\omega_0| > 0$   $|\omega_1 \omega_0| \leq k$  存在  $\omega_0$  使  $\omega_1 \omega_0^i \omega_2 \in L$

所以对于任意  $\omega_0$  只能取  $\omega_0 = a^n$   $n \in (0, k)$

则  $\omega_1 \omega_0^i \omega_2 = a^{k-n} (a^n)^i (cb)^k c$  在  $i$  不等于 0 时不属于  $L$

与假设矛盾。则  $L(G)$  不是正则集

(2) 假设该集合是正则集, 对于足够大的  $k$  取  $\omega = a^k b^k$

令  $\omega = \omega_1 \omega_0 \omega_2$

因为  $|\omega_0| > 0$   $|\omega_1 \omega_0| \leq k$  存在  $\omega_0$  使  $\omega_1 \omega_0^i \omega_2 \in L$

所以对于任意  $\omega_0$  只能取  $\omega_0 = a^n$   $n \in (0, k)$

则  $\omega_1 \omega_0^i \omega_2 = a^{k-n} (a^n)^i b^k$  在  $i$  不等于 0 时  $a$  与  $b$  的个数不同, 不属于该集合

与假设矛盾。则该集合不是正则集

(3) 假设该集合是正则集, 对于足够大的  $k$  取  $\omega = a^k c a^k$

令  $\omega = \omega_1 \omega_0 \omega_2$

因为  $|\omega_0| > 0$   $|\omega_1 \omega_0| \leq k$  存在  $\omega_0$  使  $\omega_1 \omega_0^i \omega_2 \in L$

所以对于任意  $\omega_0$  只能取  $\omega_0 = a^n$   $n \in (0, k)$

则  $\omega_1 \omega_0^i \omega_2 = a^{k-n} (a^n)^i c a^k$  在  $i$  不等于 0 时  $c$  前后  $a$  的个数不同, 不属于该集合

与假设矛盾。则该集合不是正则集

(4) 假设该集合是正则集, 对于足够大的  $k$  取  $\omega \omega = a^k b a^k b$

令  $\omega \omega = \omega_1 \omega_0 \omega_2$

因为  $|\omega_0| > 0$   $|\omega_1 \omega_0| \leq k$  存在  $\omega_0$  使  $\omega_1 \omega_0^i \omega_2 \in L$

所以对于任意  $\omega_0$  只能取  $\omega_0 = a^n$   $n \in (0, k)$

则  $\omega_1 \omega_0^i \omega_2 = a^{k-n} (a^n)^i b a^k b$  在  $i$  不等于 0 时不满足  $\omega \omega$  的形式, 不属于该集合

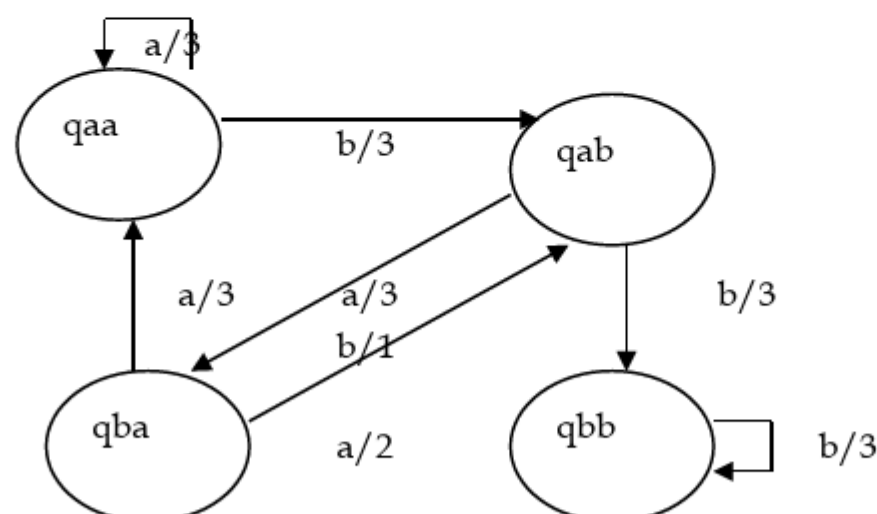
与假设矛盾。则该集合不是正则集

## 18. 构造米兰机和摩尔机

对于  $\{a, b\}^*$  的字符串, 如果输入以  $bab$  结尾, 则输出 1; 如果输入以  $bba$  结尾, 则输出 2; 否则输出 3。

答: 米兰机:

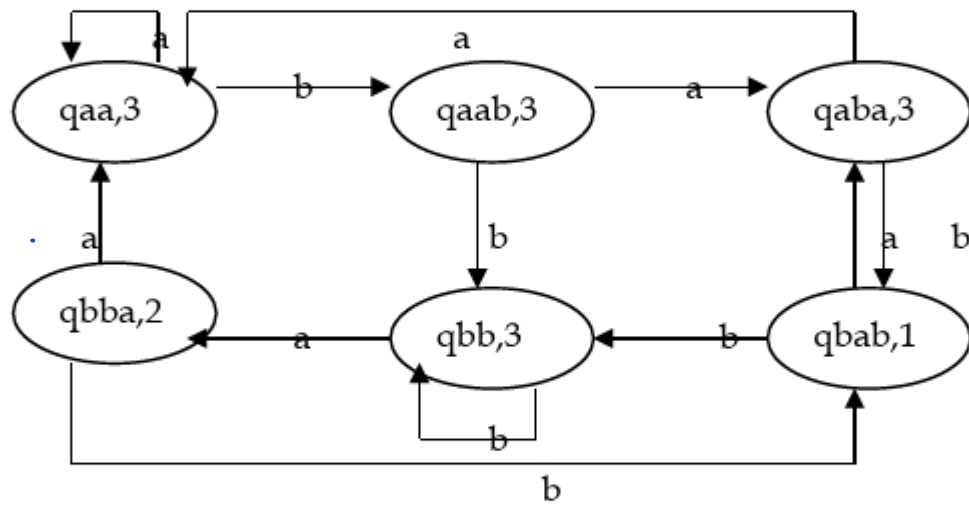
说明状态  $qaa$  表示到这个状态时, 输入的字符串是以  $aa$  结尾。其他同理。







摩尔机，状态说明同米兰机。



## 第四章

10. 把下列文法变换为无  $\varepsilon$  生成式、无单生成式和没有无用符号的等价文法:

$$S \rightarrow A_1 \mid A_2, A_1 \rightarrow A_3 \mid A_4, A_2 \rightarrow A_4 \mid A_5, A_3 \rightarrow S \mid b \mid \varepsilon, A_4 \rightarrow S \mid a, A_5 \rightarrow S \mid d \mid \varepsilon$$

解: (1) 由算法 3, 变换为无  $\varepsilon$  生成式:

$$N' = \{ S, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \}$$

$$G_1 = ( \{ S_1, S, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \}, \{ a, b, d \}, P_1, S_1 ) , \text{其中生成式 } P_1 \text{ 如下:}$$

$$S_1 \rightarrow \varepsilon \mid S,$$

$$S \rightarrow A_1 \mid A_2,$$

$$A_1 \rightarrow A_3 \mid A_4,$$

$$A_2 \rightarrow A_4 \mid A_5,$$

$$A_3 \rightarrow S \mid b,$$

$$A_4 \rightarrow S \mid a,$$

$$A_5 \rightarrow S \mid d,$$

(2) 由算法 4, 消单生成式:

$$N_{S1} = \{ S_1, S, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \},$$

$$N_S = N_{A1} = N_{A2} = N_{A3} = N_{A4} = N_{A5} = \{ S, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \},$$

运用算法 4, 则  $P_1$  变为:

$$S1 \rightarrow a \mid b \mid d \mid \varepsilon,$$

$$S \rightarrow a \mid b \mid d,$$

$$A_1 \rightarrow a \mid b \mid d,$$

$$A_2 \rightarrow a \mid b \mid d,$$

$$A_3 \rightarrow a \mid b \mid d,$$

$$A_4 \rightarrow a \mid b \mid d,$$

$$A_5 \rightarrow a \mid b \mid d$$

(3) 由算法 1 和算法 2, 消除无用符号, 得到符合题目要求的等价文法:

$G_1 = (\{S_1\}, \{a, b, d\}, P_1, S_1)$ , 其中生成式  $P_1$  为:  $S_1 \rightarrow a \mid b \mid d \mid \varepsilon$ .

11. 设 2 型文法  $G = (\{S, A, B, C, D, E, F\}, \{a, b, c\}, P, S)$ , 其中  $P$ :

$$S \rightarrow ASB \mid \varepsilon; A \rightarrow aAS \mid a; B \rightarrow SBS \mid A \mid bb$$

试将  $G$  变换为无  $\varepsilon$  生成式, 无单生成式, 没有无用符号的文法, 再将其转换为 Chomsky 范式.

解: (1) 由算法 3, 变换为无  $\varepsilon$  生成式:

$$N' = \{S\}$$

由  $S \rightarrow ASB$  得出  $S \rightarrow ASB \mid AB$ ,

由  $A \rightarrow aAS$  得出  $A \rightarrow aAS \mid aA$ ,

由  $B \rightarrow SBS$  得出  $B \rightarrow SBS \mid SB \mid BS \mid B$ ,

由  $S \in N'$  得出  $S_1 \rightarrow \varepsilon \mid S$ ,

因此无  $\varepsilon$  的等效文法  $G_1 = (\{S_1, S, A, B\}, \{a, b, d\}, P_1, S_1)$ , 其中生成式  $P_1$  如下:

$$S_1 \rightarrow \varepsilon \mid S,$$

$$S \rightarrow ASB \mid AB,$$

$$A \rightarrow aAS \mid aA \mid a,$$

$$B \rightarrow SBS \mid SB \mid BS \mid B \mid A \mid bb,$$

(2) 由算法 4, 消单生成式:

$$N_{S_1} = \{S_1, S\}, N_S = \{S\}, N_A = \{A\}, N_B = \{A, B\}$$

由于  $S \rightarrow ASB \mid AB \in P$  且不是单生成式, 故  $P_1$  中有  $S_1 \rightarrow \varepsilon \mid ASB \mid AB$ ,

同理有  $S \rightarrow ASB \mid AB, A \rightarrow aAS \mid aA \mid a, B \rightarrow SBS \mid SB \mid BS \mid aAS \mid aA \mid a \mid bb$ ,

因此生成的无单生成式等效文法为

$G_1 = (\{S_1, S, A, B\}, \{a, b\}, P_1, S_1)$ , 其中生成式  $P_1$  如下:

$$S_1 \rightarrow \varepsilon \mid ASB \mid AB,$$

$$S \rightarrow ASB \mid AB,$$

$$A \rightarrow aAS \mid aA \mid a,$$

$$B \rightarrow SBS \mid SB \mid BS \mid aAS \mid aA \mid a \mid bb,$$

(3) 由算法 1 和算法 2, 消除无用符号(此题没有无用符号);

(4) 转化为等价的 Chomsky 范式的文法:

将  $S \rightarrow ASB$  变换为  $S \rightarrow AC, C \rightarrow SB$ ,

将  $S \rightarrow ASB$  变换为  $S \rightarrow AC$ ,

将  $A \rightarrow aAS \mid aA$  变换为  $A \rightarrow ED \mid EA, D \rightarrow AS, E \rightarrow a$ ,

将  $B \rightarrow SBS \mid aAS \mid aA \mid a \mid bb$ , 变换为  $B \rightarrow CS \mid ED \mid EA \mid FF, F \rightarrow b$ ,

(5) 由此得出符合题目要求的等价文法:

$G_1 = (\{S_1, S, A, B, C, D\}, \{a, b\}, P_1, S_1)$ , 其中生成式  $P_1$  如下:

$$S_1 \rightarrow \varepsilon \mid AC \mid AB,$$

$$S \rightarrow AC \mid AB,$$

$$A \rightarrow ED \mid EA \mid a,$$

$$B \rightarrow CS \mid SB \mid BS \mid ED \mid EA \mid a \mid FF,$$

$$C \rightarrow SB,$$

$$D \rightarrow AS,$$

$$E \rightarrow a,$$

$$F \rightarrow b.$$

15. 将下列文法变换为等价的 Greibach 范式文法:

$$(1) S \rightarrow DD \mid a, D \rightarrow SS \mid b$$

解: 将非终结符排序为  $S, D, S$  为低位,  $D$  为高位,

(1) 对于  $D \rightarrow SS$ , 用  $S \rightarrow DD \mid a$  代入得  $D \rightarrow DDS \mid aS \mid b$ ,

用引理 4.2.4, 变化为  $D \rightarrow aS \mid b \mid aSD' \mid bD', D' \rightarrow DS \mid DSD'$ ,

(2) 将  $D$  生成式代入  $S$  生成式得  $S \rightarrow aSD \mid bD \mid aSD'D \mid bD'D \mid a$ ,

(3) 将  $D$  生成式代入  $D'$  生成式得

$$D' \rightarrow aSS \mid bS \mid aSD'S \mid bD'S \mid aSSD' \mid bSD' \mid aSD'SD' \mid bD'SD',$$

(4) 由此得出等价的 Greibach 范式文法:

$G_1 = (\{S, D, D'\}, \{a, b\}, P_1, S)$ , 其中生成式  $P_1$  如下:

$$S \rightarrow aSD \mid bD \mid aSD'D \mid bD'D \mid a,$$

$$D \rightarrow aS \mid b \mid aSD' \mid bD',$$

$$D' \rightarrow aSS \mid bS \mid aSD'S \mid bD'S \mid aSS D' \mid bS D' \mid aSD'S D' \mid bD'S D'.$$

$$(2) \quad A_1 \rightarrow A_3b \mid A_2a, A_2 \rightarrow A_1b \mid A_2A_2a \mid b, A_3 \rightarrow A_1a \mid A_3A_3b \mid a$$

解: (1) 转化为等价的 Chomsky 范式的文法:

$$A_1 \rightarrow A_3A_4 \mid A_2A_5,$$

$$A_2 \rightarrow A_1A_4 \mid A_2A_6 \mid b,$$

$$A_3 \rightarrow A_1A_5 \mid A_3A_7 \mid a,$$

$$A_4 \rightarrow b,$$

$$A_5 \rightarrow a,$$

$$A_6 \rightarrow A_2A_5,$$

$$A_7 \rightarrow A_3A_4,$$

(2) 转化为等价的 Greibach 范式的文法:

将非终结符排序为  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ ,  $A_1$  为低位  $A_5$  为高位,

①对于  $A_2 \rightarrow A_1A_4$ , 用  $A_1 \rightarrow A_3A_4 \mid A_2A_5$  代入得  $A_2 \rightarrow A_3A_4A_4 \mid A_2A_5A_4 \mid A_2A_6 \mid b$ ,

用引理 4.2.4, 变化为

$$A_2 \rightarrow A_3A_4A_4 \mid b \mid A_3A_4A_4A_2' \mid bA_2',$$

$$A_2' \rightarrow A_5A_4A_2' \mid A_6A_2' \mid A_5A_4 \mid A_6,$$

②对于  $A_3 \rightarrow A_1A_5$ , 用  $A_1 \rightarrow A_3A_4 \mid A_2A_5$  代入得  $A_3 \rightarrow A_3A_4A_5 \mid A_2A_5A_5 \mid A_3A_7 \mid a$ ,

$A_3$  生成式右边第一个字符仍是较低位的非终结符, 将  $A_2$  生成式代入  $A_3$  生成式得

$$A_3 \rightarrow A_3A_4A_5 \mid A_3A_4A_4A_5A_5 \mid bA_5A_5 \mid A_3A_4A_4A_2'A_5A_5 \mid bA_2'A_5A_5 \mid A_3A_7 \mid a,$$

用引理 4.2.4, 变化为

$$A_3 \rightarrow bA_5A_5 \mid bA_2'A_5A_5 \mid a \mid bA_5A_5A_3' \mid bA_2'A_5A_5A_3' \mid aA_3',$$

$$A_3' \rightarrow A_4A_5 \mid A_4A_4A_5A_5 \mid A_4A_4A_2'A_5A_5 \mid A_7 \mid A_4A_5A_3' \mid A_4A_4A_5A_5A_3' \mid A_4A_4A_2'A_5A_5A_3' \mid A_7A_3',$$

③对于  $A_6 \rightarrow A_2A_5$ , 将  $A_2$  生成式代入  $A_6$  生成式得

$$A_6 \rightarrow A_3A_4A_4A_5 \mid bA_5 \mid A_3A_4A_4A_2'A_5 \mid bA_2'A_5,$$

$A_6$  生成式右边第一个字符仍是较低位的非终结符, 将  $A_3$  生成式代入  $A_6$  生成式得

$$\begin{aligned} A_6 \rightarrow & bA_5A_5A_4A_4A_5 \mid bA_2'A_5A_5A_4A_4A_5 \mid aA_4A_4A_5 \mid bA_5A_5A_3'A_4A_4A_5 \mid \\ & bA_2'A_5A_5A_3'A_4A_4A_5 \mid aA_3'A_4A_4A_5 \mid bA_5A_5A_4A_4A_2'A_5 \mid bA_2'A_5A_5A_4A_4A_2'A_5 \\ & \mid aA_4A_4A_2'A_5 \mid bA_5A_5A_3'A_4A_4A_2'A_5 \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4A_4A_2'A_5 \mid \\ & aA_3'A_4A_4A_2'A_5 \mid bA_2'A_5 \mid bA_5, \end{aligned}$$

④对于  $A_7 \rightarrow A_3A_4$ , 将  $A_3$  生成式代入  $A_7$  生成式得

$$\begin{aligned} A_7 \rightarrow & bA_5A_5A_4 \mid bA_2'A_5A_5A_4 \mid aA_4 \mid bA_5A_5A_3'A_4 \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4 \mid \\ & aA_3'A_4, \end{aligned}$$

⑤将  $A_5, A_6$  生成式代入  $A_2'$  生成式得

$$\begin{aligned} A_2' \rightarrow & aA_4A_2' \mid bA_5A_5A_4A_4A_5A_2' \mid bA_2'A_5A_5A_4A_4A_5A_2' \mid aA_4A_4A_5A_2' \mid \\ & bA_5A_5A_3'A_4A_4A_5A_2' \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4A_4A_5A_2' \mid aA_3'A_4A_4A_5A_2' \mid \\ & bA_5A_5A_4A_4A_2'A_5A_2' \mid bA_2'A_5A_5A_4A_4A_2'A_5A_2' \mid aA_4A_4A_2'A_5A_2' \mid \\ & bA_5A_5A_3'A_4A_4A_2'A_5A_2' \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4A_4A_2'A_5A_2' \mid aA_3'A_4A_4A_2'A_5A_2' \mid \\ & bA_2'A_5A_2' \mid bA_5A_2' \mid aA_4 \mid bA_5A_5A_4A_4A_5 \mid bA_2'A_5A_5A_4A_4A_5 \mid aA_4A_4A_5 \mid \\ & bA_5A_5A_3'A_4A_4A_5 \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4A_4A_5 \mid aA_3'A_4A_4A_5 \mid bA_5A_5A_4A_4A_2'A_5 \mid \\ & bA_2'A_5A_5A_4A_4A_2'A_5 \mid aA_4A_4A_2'A_5 \mid bA_5A_5A_3'A_4A_4A_2'A_5 \mid \\ & bA_2'A_5A_5A_3'A_4A_4A_2'A_5 \mid aA_3'A_4A_4A_2'A_5 \mid bA_2'A_5 \mid bA_5, \end{aligned}$$

将  $A_4, A_7$  生成式代入  $A_3'$  生成式得

$$\begin{aligned} A_3' \rightarrow & aA_5 \mid aA_4A_5A_5 \mid aA_4A_2'A_5A_5 \mid aA_5A_3' \mid aA_4A_5A_5A_3' \mid aA_4A_2'A_5A_5A_3' \\ & \mid bA_5A_5A_4 \mid bA_2'A_5A_5A_4 \mid aA_4 \mid bA_5A_5A_3'A_4 \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4 \mid aA_3'A_4 \mid \\ & bA_5A_5A_4A_3' \mid bA_2'A_5A_5A_4A_3' \mid aA_4A_3' \mid bA_5A_5A_3'A_4A_3' \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4A_3' \\ & \mid aA_3'A_4A_3', \end{aligned}$$

(3) 由此得出等价的 Greibach 范式文法:

$G_1 = (\{S, D, D'\}, \{a, b\}, P_1, S)$ , 其中生成式  $P_1$  如下:

$$A_1 \rightarrow A_3A_4 \mid A_2A_5,$$

$$A_2 \rightarrow A_3A_4A_4 \mid b \mid A_3A_4A_4A_2' \mid bA_2',$$

$$A_3 \rightarrow bA_5A_5 \mid bA_2'A_5A_5 \mid a \mid bA_5A_5A_3' \mid bA_2'A_5A_5A_3' \mid aA_3',$$

$$A_4 \rightarrow b,$$

$$A_5 \rightarrow a,$$

$$A_6 \rightarrow bA_5A_5A_4A_4A_5 \mid bA_2'A_5A_5A_4A_4A_5 \mid aA_4A_4A_5 \mid bA_5A_5A_3'A_4A_4A_5 \mid$$

$$bA_2'A_5A_5A_3'A_4A_4A_5 \mid aA_3'A_4A_4A_5 \mid bA_5A_5A_4A_4A_2'A_5 \mid bA_2'A_5A_5A_4A_4A_2'A_5 \\ \mid aA_4A_4A_2'A_5 \mid bA_5A_5A_3'A_4A_4A_2'A_5 \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4A_4A_2'A_5 \mid \\ aA_3'A_4A_4A_2'A_5 \mid bA_2'A_5 \mid bA_5,$$

$$A_7 \rightarrow bA_5A_5A_4 \mid bA_2'A_5A_5A_4 \mid aA_4 \mid bA_5A_5A_3'A_4 \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4 \mid \\ aA_3'A_4,$$

$$A_2' \rightarrow aA_4A_2' \mid bA_5A_5A_4A_4A_5A_2' \mid bA_2'A_5A_5A_4A_4A_5A_2' \mid aA_4A_4A_5A_2' \mid \\ bA_5A_5A_3'A_4A_4A_5A_2' \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4A_4A_5A_2' \mid aA_3'A_4A_4A_5A_2' \mid \\ bA_5A_5A_4A_4A_2'A_5A_2' \mid bA_2'A_5A_5A_4A_4A_2'A_5A_2' \mid aA_4A_4A_2'A_5A_2' \mid \\ bA_5A_5A_3'A_4A_4A_2'A_5A_2' \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4A_4A_2'A_5A_2' \mid aA_3'A_4A_4A_2'A_5A_2' \mid \\ bA_2'A_5A_2' \mid bA_5A_2' \mid aA_4 \mid bA_5A_5A_4A_4A_5 \mid bA_2'A_5A_5A_4A_4A_5 \mid aA_4A_4A_5 \mid \\ bA_5A_5A_3'A_4A_4A_5 \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4A_4A_5 \mid aA_3'A_4A_4A_5 \mid bA_5A_5A_4A_4A_2'A_5 \mid \\ bA_2'A_5A_5A_4A_4A_2'A_5 \mid aA_4A_4A_2'A_5 \mid bA_5A_5A_3'A_4A_4A_2'A_5 \mid \\ bA_2'A_5A_5A_3'A_4A_4A_2'A_5 \mid aA_3'A_4A_4A_2'A_5 \mid bA_2'A_5 \mid bA_5,$$

$$A_3' \rightarrow aA_5 \mid aA_4A_5A_5 \mid aA_4A_2'A_5A_5 \mid aA_5A_3' \mid aA_4A_5A_5A_3' \mid aA_4A_2'A_5A_5A_3' \\ \mid bA_5A_5A_4 \mid bA_2'A_5A_5A_4 \mid aA_4 \mid bA_5A_5A_3'A_4 \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4 \mid aA_3'A_4 \mid \\ bA_5A_5A_4A_3' \mid bA_2'A_5A_5A_4A_3' \mid aA_4A_3' \mid bA_5A_5A_3'A_4A_3' \mid bA_2'A_5A_5A_3'A_4 \\ A_3' \mid aA_3'A_4A_3'.$$

20. 设文法  $G$  有如下得生成式:  $S \rightarrow aDD$ ,  $D \rightarrow aS \mid bS \mid a$ , 构造等价的下推自动机.

解: 根据  $P_{162-163}$  的算法,构造下推自动机  $M$ ,使  $M$  按文法  $G$  的最左推导方式工作.

设  $M = (Q, T, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ , 其中

$$Q = \{ q_0, q_f \},$$

$$T = \{ a, b \},$$

$$\Gamma = \{ a, b, D, S \},$$

$$Z_0 = S,$$

$$F = \{ q_f \},$$

$\delta$  定义如下:

$$\delta(q_0, \varepsilon, S) = \{(q_0, aDD)\},$$

$$\delta(q_0, \varepsilon, D) = \{(q_0, aS), (q_0, bS), (q_0, a)\},$$

$$\delta(q_0, a, a) = \{(q_0, \varepsilon)\},$$

$$\delta(q_0, \varepsilon, \varepsilon) = \{(q_f, \varepsilon)\}.$$

21. 给出产生语言  $L = \{ a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \text{ 且 } i = j \text{ 或者 } j = k \}$  的上下文无关文法. 你给出的文法是否具有二义性? 为什么?

解:  $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{a, b, c\}, P, S)$

$$P: S \rightarrow AD \mid EB, A \rightarrow aAb \mid \varepsilon, B \rightarrow bBc \mid \varepsilon, D \rightarrow cD \mid \varepsilon, E \rightarrow aE \mid \varepsilon$$

文法具有二义性。

因为当句子  $\omega$  中  $a, b, c$  个数相同时, 对于  $\omega$  存在两个不同的最左(右)推导。

如  $abc \in L$ , 存在两个不同的最左推导  $S \Rightarrow AD \Rightarrow aAbD \Rightarrow abD \Rightarrow abcC \Rightarrow abc$  及  $S \Rightarrow EB \Rightarrow aEB \Rightarrow aB \Rightarrow abBc \Rightarrow abc$ 。

22. 设下推自动机  $M = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{Z_0, X\}, \delta, q_0, Z_0, \Phi)$ , 其中  $\delta$  如下:

$$\delta(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}, \delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_0, \varepsilon)\}, A$$

$$\delta(q_0, b, X) = \{(q_0, XX)\}, \delta(q_1, b, X) = \{(q_1, \varepsilon)\},$$

$$\delta(q_0, b, X) = \{(q_1, X)\}, \delta(q_1, a, Z_0) = \{(q_0, Z_0)\},$$

试构造文法  $G$  产生的语言  $L(G) = L(M)$ .

解: 在  $G$  中,  $N = \{[q_0, Z_0, q_0], [q_0, Z_0, q_1], [q_0, X, q_0], [q_0, X, q_1], [q_1, Z_0, q_0], [q_1, Z_0, q_1], [q_1, X, q_0], [q_1, X, q_1]\}$ .

(1)  $S$  生成式有

$$S \rightarrow [q_0, Z_0, q_0],$$

$$S \rightarrow [q_0, Z_0, q_1],$$

根据  $\delta(q_0, b, Z_0) = \{(q_0, XZ_0)\}$ , 则有

$$[q_0, Z_0, q_0] \rightarrow b[q_0, X, q_0][q_0, Z_0, q_0],$$

$$[q_0, Z_0, q_0] \rightarrow b[q_0, X, q_1][q_1, Z_0, q_0],$$

$$[q_0, Z_0, q_1] \rightarrow b[q_0, X, q_0][q_0, Z_0, q_1],$$

$$[q_0, Z_0, q_1] \rightarrow b[q_0, X, q_1][q_1, Z_0, q_1],$$

因为有  $\delta(q_0, b, X) = \{(q_0, XX)\}$ , 则有

$$[q_0, X, q_0] \rightarrow b[q_0, X, q_0][q_0, X, q_0],$$

$$[q_0, X, q_0] \rightarrow b[q_0, X, q_1][q_1, X, q_0],$$

$$[q_0, X, q_1] \rightarrow b[q_0, X, q_0][q_0, X, q_1],$$

$$[q_0, X, q_1] \rightarrow b[q_0, X, q_1][q_1, X, q_1],$$

因为有  $\delta(q_0, a, X) = \{(q_1, X)\}$ , 则有

$$[q_0, X, q_0] \rightarrow a[q_1, X, q_0],$$

$$[q_0, X, q_1] \rightarrow a[q_1, X, q_1],$$

因为  $\delta(q_1, a, Z_0) = \{(q_0, Z_0)\}$ , 则有

$$[q_1, Z_0, q_0] \rightarrow a[q_0, Z_0, q_0],$$

$$[q_1, Z_0, q_1] \rightarrow a[q_0, Z_0, q_1],$$

因为  $\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_0, \varepsilon)\}$ , 则有

$$[q_0, Z_0, q_0] \rightarrow \varepsilon,$$

因为  $\delta(q_1, b, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$ , 则有

$$[q_1, X, q_1] \rightarrow \varepsilon$$

- (2) 利用算法 1 和算法 2, 消除无用符号后, 得出文法  $G$  产生的语言  $L(G) = \{N, T, P, S\}$  其中  $N = \{S, [q_0, Z_0, q_0], [q_1, Z_0, q_0], [q_1, X, q_1], [q_0, X, q_1]\}$ ,  $T = \{a, b\}$ , 生成式  $P$  如下:

$$S \rightarrow [q_0, Z_0, q_0],$$

$$[q_0, Z_0, q_0] \rightarrow b[q_0, X, q_1] [q_1, Z_0, q_0],$$

$$[q_0, X, q_1] \rightarrow b[q_0, X, q_1] [q_1, X, q_1],$$

$$[q_0, X, q_1] \rightarrow a[q_1, X, q_1],$$

$$[q_1, Z_0, q_0] \rightarrow a[q_0, Z_0, q_0],$$

$$[q_0, Z_0, q_0] \rightarrow \varepsilon,$$

$$[q_0, Z_0, q_0] \rightarrow \varepsilon.$$

23. 证明下列语言不是上下文无关语言:

- (1)  $\{a^n b^n c^m \mid m \leq n\}$ ;

证明: 假设  $L$  是上下文无关语言, 由泵浦引理, 取常数  $p$ , 当  $\omega \in L$  且  $|\omega| \geq p$  时, 可取

$$\omega = a^p b^p c^p, \text{ 将 } \omega \text{ 写为 } \omega = \omega_1 \omega_2 \omega_0 \omega_3 \omega_4, \text{ 同时满足 } |\omega_2 \omega_0 \omega_3| \leq p$$

(1)  $\omega_2$  和  $\omega_3$  不可能同时分别包含  $a$  和  $c$ , 因为在这种情况下, 有  $|\omega_2 \omega_0 \omega_3| > p$ ;

(2) 如果  $\omega_2$  和  $\omega_3$  都只包含  $a$  (或  $b$ ), 即  $\omega_2 \omega_0 \omega_3 = a^j$  (或  $b^j$ ) ( $j \leq p$ ), 则当  $i \neq 1$  时,  $\omega_1 \omega_2^i \omega_0 \omega_3^i \omega_4$  中会出现  $a$  的个数与  $b$  的个数不等;

如果  $\omega_2$  和  $\omega_3$  都只包含  $c$ , 即  $\omega_2 \omega_0 \omega_3 = c^j$  ( $j \leq p$ ), 当  $i$  大于 1 时,  $\omega_1 \omega_2^i \omega_0 \omega_3^i \omega_4$  中会出现  $c$  的个数大于  $a$  的个数 (或  $b$  的个数);

(3) 如果  $\omega_2$  和  $\omega_3$  分别包含  $a$  和  $b$  (或  $b$  和  $c$ ), 当  $i=0$  时  $\omega_1 \omega_2^i \omega_0 \omega_3^i \omega_4$  中会出现  $a$ ,  $b$  的个数小于  $c$  的个数 (或  $a, b$  个数不等)

这些与假设矛盾, 故  $L$  不是上下文无关语言.

- (2)  $\{a^k \mid k \text{ 是质数}\}$ ;



证明: 假设  $L$  是上下文无关语言, 由泵浦引理, 取常数  $p$ , 当  $\omega \in L$  且  $|\omega| \geq p$  时, 可取

$\omega = a^k$  ( $k \geq p$  且  $k \neq 1$ ), 将  $\omega$  写为  $\omega = \omega_1 \omega_2 \omega_0 \omega_3 \omega_4$ , 同时满足

$|\omega_2 \omega_0 \omega_3| \leq p$ , 且

$|\omega_2 \omega_3| = j \geq 1$ , 则当  $i = k+1$  时,  $|\omega_1 \omega_2^i \omega_0 \omega_3^i \omega_4| = k + (i-1) * j = k + k * j = k * (1+j)$ ,  $k * (1+j)$  至少包含因子  $k$  且  $k \neq 1$ , 因此必定不是质数, 即  $\omega_1 \omega_2^i \omega_0 \omega_3^i \omega_4$  不属于  $L$ .

这与假设矛盾, 故  $L$  不是上下文无关语言.

(3) 由  $a, b, c$  组成的字符串且是含有  $a, b, c$  的个数相同的所有字符串.

证明: 假设  $L$  是上下文无关语言, 由泵浦引理, 取常数  $p$ , 当  $\omega \in L$  且  $|\omega| \geq p$  时, 可取

$\omega = a^k b^k c^k$  ( $k \geq p$ ), 将  $\omega$  写为  $\omega = \omega_1 \omega_2 \omega_0 \omega_3 \omega_4$ , 同时满足  $|\omega_2 \omega_0 \omega_3| \leq p$

(1)  $\omega_2$  和  $\omega_3$  不可能同时分别包含  $a$  和  $c$ , 因为在这种情况下, 有  $|\omega_2 \omega_0 \omega_3| > p$ ;

(2) 如果  $\omega_2$  和  $\omega_3$  都只包含  $a$  ( $b$  或  $c$ ), 即  $\omega_2 \omega_0 \omega_3 = a^j$  ( $b^j$  或  $c^j$ ) ( $j \leq p$ ), 则当  $i \neq 1$  时,  $\omega_1 \omega_2^i \omega_0 \omega_3^i \omega_4$  中会出现  $a, b, c$  的个数不再相等;

(3) 如果  $\omega_2$  和  $\omega_3$  分别包含  $a$  和  $b$  ( $b$  和  $c$ ),  $\omega_1 \omega_2^i \omega_0 \omega_3^i \omega_4$  中会出现  $a, b$  的个数与  $c$  的不等;

这些与假设矛盾, 故  $L$  不是上下文无关语言.

24. 设  $G$  是 Chomsky 范式文法, 存在  $\omega \in L(G)$ , 求在边缘为  $\omega$  的推导树中, 最长的路径长度与  $\omega$  的长度之间的关系.

解: 设边缘为  $\omega$  的推导树中, 最长路径长度为  $n$ , 则它与  $\omega$  的长度之间的关系为

$|\omega| \leq 2^{n-1}$ .

因为由 Chomsky 范式的定义可知, Chomsky 范式文法的推导树都是二叉树, 在最长路径长度为  $n$  的二叉推导树中, 满二叉树推出的句子长度最长, 为  $2^{n-1}$ , 因此  $\omega$  的长度与其推导树的最长路径长度  $n$  的关系可以用上式表示.

25. 设计 PDA 接受下列语言 (注意: 不要求为确定的)

(1)  $\{0^m 1^n \mid m \leq n\}$ ;

解: 设 PDA  $M = (Q, T, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ , 其中

$Q = \{q_0, q_1, q_f\}$ ,

$T = \{0, 1\}$ ,

$\Gamma = \{0, 1, Z_0\}$ ,

$F = \{q_f\}$ ,

$\delta$  定义如下:

$\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, Z_0)\}$ ,

$\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, 0Z_0)\}$ ,

$\delta(q_0, 0, 0) = \{(q_0, 00)\}$ ,

$$\delta(q_0, 1, Z_0) = \{(q_f, \varepsilon)\},$$

$$\delta(q_0, 1, 0) = \{(q_1, \varepsilon)\},$$

$$\delta(q_1, 1, 0) = \{(q_1, \varepsilon)\},$$

$$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_f, \varepsilon)\}$$

$$\delta(q_1, 1, Z_0) = \{(q_f, \varepsilon)\}$$

$$\delta(q_f, 1, \varepsilon) = \{(q_f, \varepsilon)\}$$

$$(2) \{0^m 1^n \mid m \geq n\};$$

解：设 PDA  $M = (Q, T, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ , 其中

$$Q = \{q_0, q_1, q_f\},$$

$$T = \{0, 1\},$$

$$\Gamma = \{0, 1, Z_0\},$$

$$F = \{q_f\},$$

$\delta$  定义如下:

$$\delta(q_0, \varepsilon, Z_0) = \{(q_1, Z_0)\},$$

$$\delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, 0Z_0)\},$$

$$\delta(q_0, 0, 0) = \{(q_0, 00)\},$$

$$\delta(q_0, 1, 0) = \{(q_1, \varepsilon)\},$$

$$\delta(q_1, 1, 0) = \{(q_1, \varepsilon)\},$$

$$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = \{(q_f, \varepsilon)\},$$

$$\delta(q_1, \varepsilon, 0) = \{(q_f, \varepsilon)\}$$

$$\delta(q_f, 1, \varepsilon) = \{(q_f, \varepsilon)\}$$

$$(3) \{0^m 1^n 0^m \mid n \text{ 和 } m \text{ 任意}\};$$

解：设 PDA  $M = (Q, T, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ , 其中

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_f\},$$

$$T = \{0, 1\},$$

$$\Gamma = \{0, 1, Z_0\},$$

$$F = \{ q_f \},$$

$\delta$  定义如下:

$$\delta ( q_0, 0, Z_0 ) = \{ ( q_0, 0Z_0 ) \},$$

$$\delta ( q_0, 0, 0 ) = \{ ( q_0, 00 ), ( q_0, \varepsilon ) \},$$

$$\delta ( q_0, 1, Z_0 ) = \{ ( q_3, \varepsilon ) \},$$

$$\delta ( q_3, 1, \varepsilon ) = \{ ( q_3, \varepsilon ) \},$$

$$\delta ( q_3, \varepsilon, \varepsilon ) = \{ ( q_f, \varepsilon ) \},$$

$$\delta ( q_0, 1, 0 ) = \{ ( q_1, 0 ) \},$$

$$\delta ( q_1, 1, 0 ) = \{ ( q_1, 0 ) \},$$

$$\delta ( q_1, 0, 0 ) = \{ ( q_2, \varepsilon ) \},$$

$$\delta ( q_2, 0, 0 ) = \{ ( q_2, \varepsilon ) \},$$

$$\delta ( q_2, \varepsilon, Z_0 ) = \{ ( q_f, \varepsilon ) \},$$

$$\delta ( q_0, \varepsilon, Z_0 ) = \{ ( q_f, \varepsilon ) \}$$

## ➤ 第五章

1. 考虑如下的图灵机  $M = ( \{q_0, q_1, q_f\}, \{0,1\}, \{0,1,B\}, \delta, q_0, B, \{ q_f \} )$ , 其中  $\delta$  定义为:

$$\delta ( q_0, 0 ) = \{ ( q_1, 1, R ) \}, \quad \delta ( q_1, 1 ) = \{ ( q_0, 0, R ) \}, \quad \delta ( q_1, B ) = \{ ( q_f, B, R ) \},$$

非形式化但准确地描述该图灵机的工作过程及其所接受的语言.

- 解: 开始时,  $M$  的带上从左端起放有字符串  $0(10)^i$  ( $i \geq 0$ ), 后跟无限多个空白符  $B$ .  $M$  的第一次动作先读到第一个  $0$ , 并改写为  $1$ ; 然后右移, 如果找到第一个  $1$ , 则改写为  $0$ , 并继续向右寻找下一个  $0$ , 这样重复进行. 当向右寻找  $1$  的时候, 找到一个空白符  $B$ , 则结束. 该图灵机所接受的语言  $L(M) = \{ 0(10)^i \mid i \geq 0 \}$

您的评论 \*感谢支持，给文档评个星吧！

写点评论支持下文档

240

[发布评论](#)

[暂无评论](#)

评价文档:

分享到:

[QQ空间](#)[新浪微博](#) [微信](#)

扫二维码，快速分享到微信朋友圈

文档可以转存到百度网盘啦！

转为pdf格式

转为其他格式 >

VIP专享文档格式自由转换

下载券

立即下载

加入VIP

免券下载