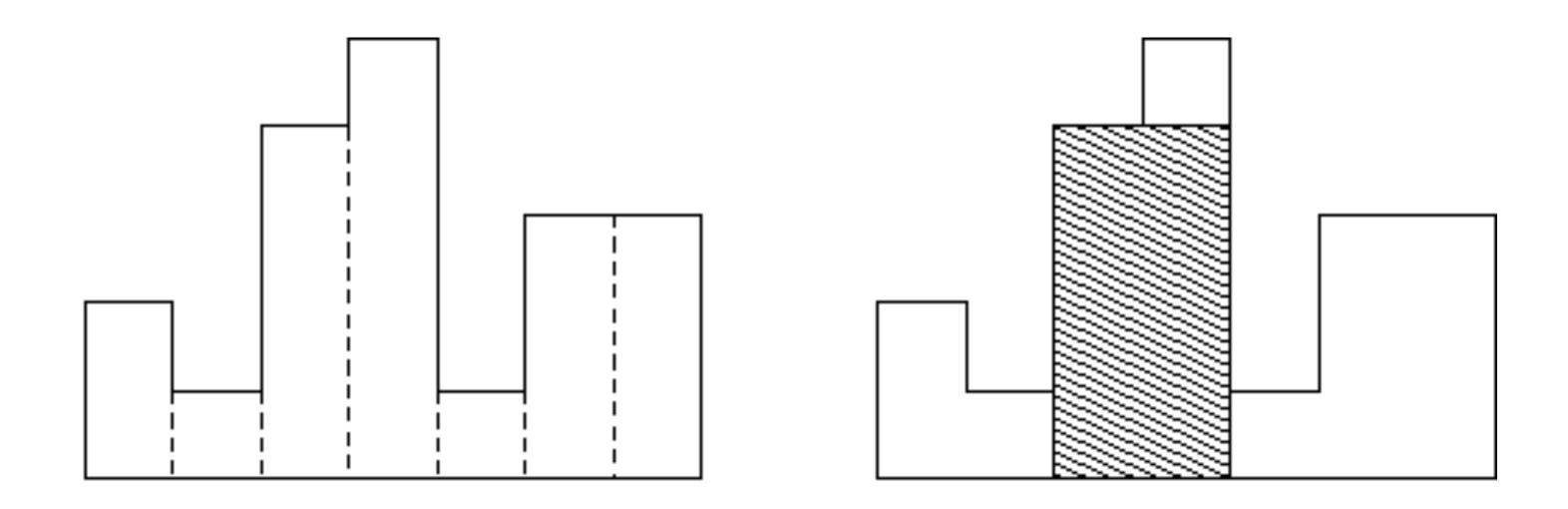
세그먼트 트리와 펜윅 트리 (연습)

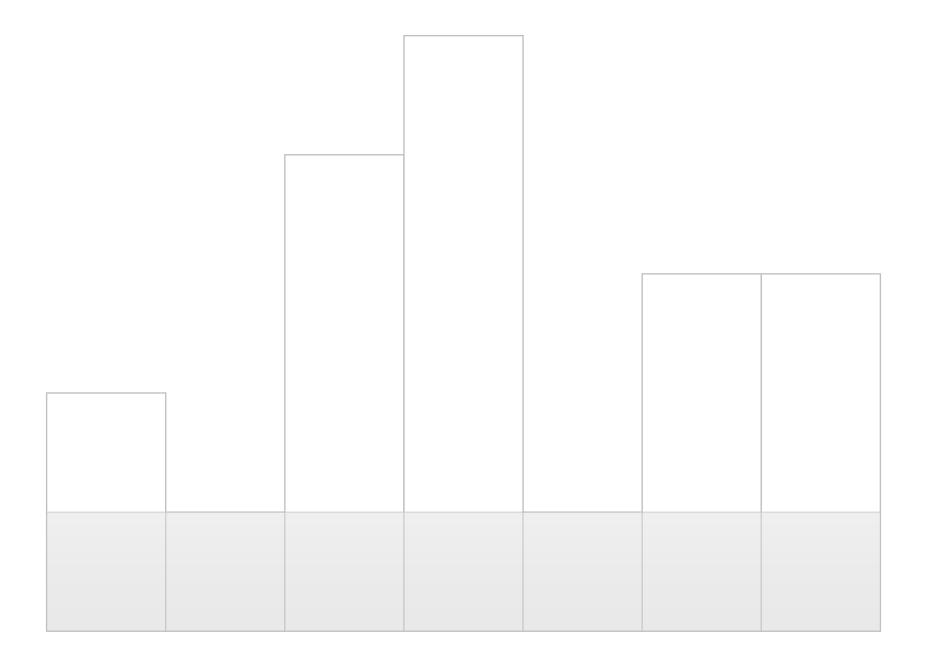
최백준 choi@startlink.io

최소값찾기

- N개의 히스토그램이 주어졌을 때, 가장 큰 직사각형을 찾는 문제
- $1 \le N \le 100,000$



- 가장 왼쪽 끝과 오른쪽 끝을 변으로 하는 가장 큰 직사각형의 높이는?
- 높이: 히스토그램에서 가장 높이가 낮은 막대의 높이



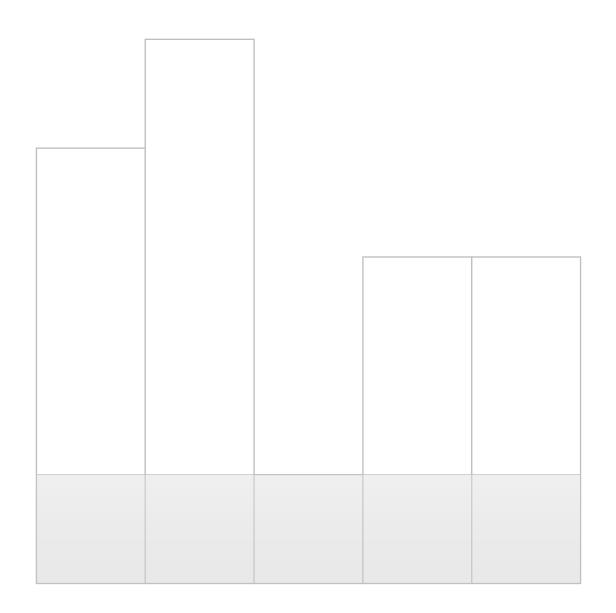
https://www.acmicpc.net/problem/6549

• 높이가 가장 낮은 막대의 번호를 m이라고 했을 때, 이 직사각형은 높이가 h[m]이면서 만들 수 있는 가장 큰 직사각형이다.

• 이제 m의 왼쪽과 오른쪽으로 나눠서 문제를 풀 수 있다.

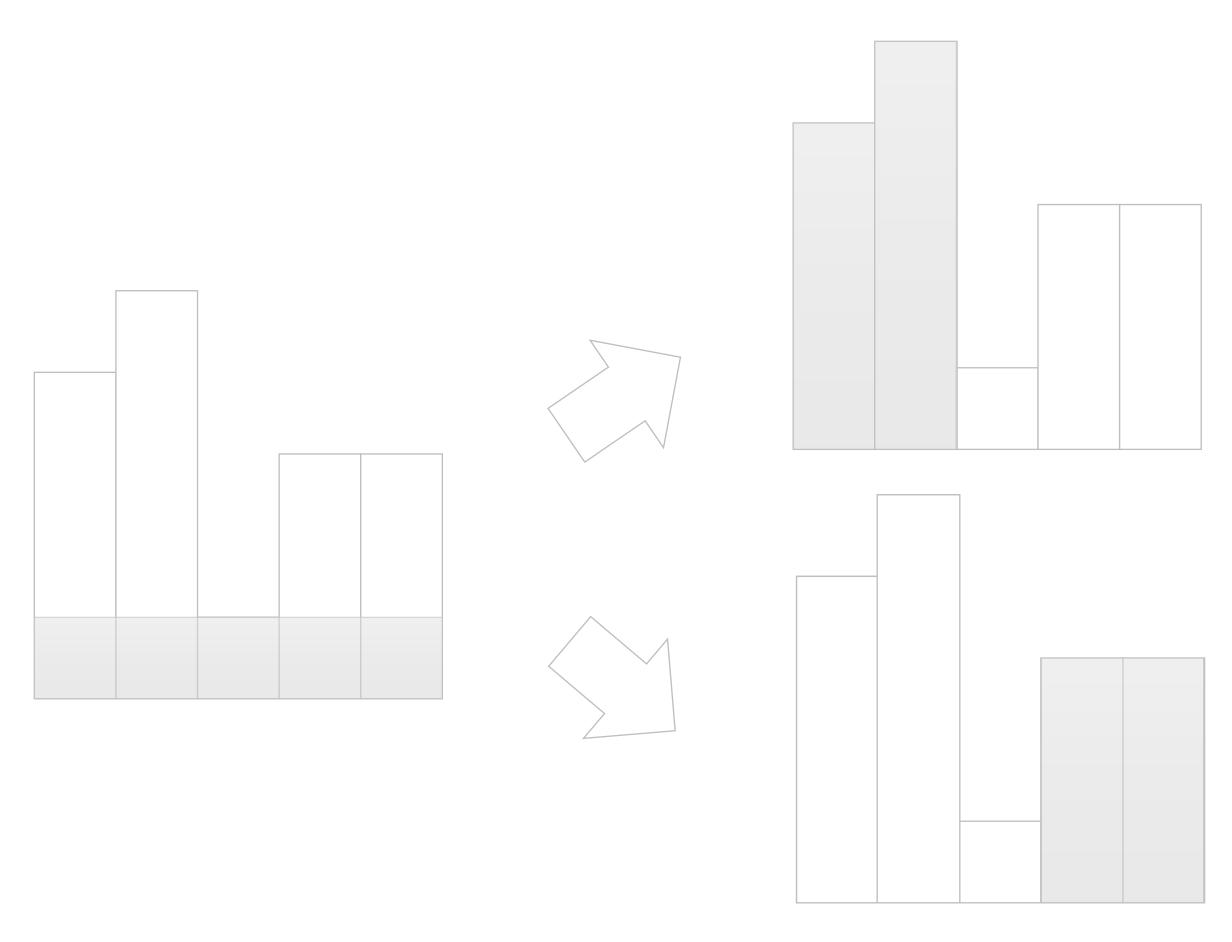
https://www.acmicpc.net/problem/6549

• 오른쪽 히스토그램에서 만들 수 있는 가장 큰 직사각형은 아래 그림과 같다



https://www.acmicpc.net/problem/6549

• 여기서 다시 높이가 가장 낮은 막대 m을 찾고 왼쪽과 오른쪽으로 나눠서 문제를 풀 수 있다



https://www.acmicpc.net/problem/6549

• 세그먼트 트리에 최소값의 위치를 저장해서 풀 수 있다.

https://www.acmicpc.net/problem/6549

• 소스: http://codeplus.codes/a789f9ee9b1b48a48df70fbc15b4b163

- 길이가 N인 수열 A가 있고, 다음 두 가지 쿼리가 있다. $2 \le N \le 100,000$
 - 1 i v: A_i를 v로 바꾼다
 - 2 l $r: l \le i < j \le r$ 을 만족하는 모든 $A_i + A_j$ 중에서 최댓값을 출력
- 쿼리 M개를 수행해야 한다. $1 \le M \le 100,000$

- 만약 쿼리가 다음과 같다면 세그먼트 트리를 이용할 수 있다.
- 길이가 N인 수열 A가 있고, 다음 두 가지 쿼리가 있다. $2 \le N \le 100,000$
 - 1 i v: A_i를 v로 바꾼다
 - 2 $l r: l \le i \le r$ 을 만족하는 모든 A_i 중에서 최댓값을 출력
- 쿼리 M개를 수행해야 한다. $1 \le M \le 100,000$
- 이를 이용해 원래 문제를 해결할 수 있다.

- 세그먼트 트리에 최댓값이 아니고, 최댓값의 위치를 저장했다고 하자
- $1 \le i \le r$ 에서 최댓값의 위치가 p라고 한다면
- $l \le j < p$ 에서 최댓값의 위치 pl
- $p < j \le r$ 에서 최댓값의 위치 pr을 찾고
- max(a[p] + a[pl], a[p] + a[pr])을 비교해보면 된다.

https://www.acmicpc.net/problem/17408

• 소스: http://codeplus.codes/45e2a30db1ee444387d9e31a67e60e04

합구하기

- N개로 이루어진 수열 A[1], A[2], ···, A[N]이 있을 때
- Swap이 총 몇 번 발생하는지 알아내는 문제
- $321 \rightarrow 231 \rightarrow 213 \rightarrow 123 (3 \forall)$

https://www.acmicpc.net/problem/1517

• A = [10, 1, 5, 2, 3]

10	1	5	2	3	1	10	5	2	3
1	10	5	2	3	1	5	10	2	3
1	5	10	2	3	1	5	2	10	3
1	5	2	10	3	1	5	2	3	10

https://www.acmicpc.net/problem/1517

• A = [10, 1, 5, 2, 3]

1	5	2	3	10	1	5	2	3	10
1	5	2	3	10	1	2	5	3	10
1	2	5	3	10	1	2	3	5	10

i=2

- 이 문제는 수열에서 inversion의 개수를 세는 문제이다.
- inversion: A[i] > A[j] (i < j)
- 이 문제는 공장 문제와 같은 방식으로 해결할 수 있다.
- 공장: A[i] < A[j] 이면서 B[i] > B[j]인 (i, j) 쌍을 개수를 찾는 문제
- 버블 소트: i < j 이면서 A[i] > A[j]인 (i, j) 쌍의 개수를 찾는 문제

https://www.acmicpc.net/problem/1517

• 소스: http://codeplus.codes/801d5dc3078d4d939bf4e3979be0b879

日보소트

- 첫 번째 단계에서 숫자 1의 위치를 찾는다. 그 다음 바로 앞의 숫자와 위치를 바꾸어가면서, 1이 제일 앞에 오게 바꾼다.
- 두 번째 단계에서는 숫자 N의 위치를 찾는다. 그 다음 바로 뒤의 숫자와 위치를 바꾸어가면서, N이 제일 마지막에 오게 바꾼다.
- 세 번쨰 단계은 숫자 2의 위치를 찾은 후에, 바로 앞의 숫자와 위치를 바꾸어가면서, 두 번째 위치에 오게 바꾼다.
- 네 번째 단계은 숫자 N-1의 위치를 찾은 다음에, 바로 뒤의 숫자와 위치를 바꾸면서, 뒤에서 2번째 위치에 오게 바꾼다.
- 다섯 번째 단계도 위와 같은 식으로 하면 되고 이를 N번 반복하는 것이다.

터보소트

https://www.acmicpc.net/problem/3006

1단계

트리	1	1	1	1	1	1	1
입력된 배열	5	4	3	7	1	2	6
정렬된 배열	5	4	3	7	1	2	6
바뀐 배열	1	5	4	3	7	2	6

日보소트

https://www.acmicpc.net/problem/3006

• 2단계

트리	1	1	1	1	0	1	1
입력된 배열	5	4	3	7	1	2	6
정렬된 배열	1	5	4	3	7	2	6
		l					
바뀐 배열	1	5	4	3	2	6	7

터보소트

https://www.acmicpc.net/problem/3006

• 3단계

트리	1	1	1		0	1	1
입력된 배열	5	4	3	7	1	2	6
정렬된 배열	1	5	4	3	2	6	7
바뀐 배열	1	2	5	4	3	6	7

터보소트

https://www.acmicpc.net/problem/3006

• 소스: http://codeplus.codes/5436ffd159aa4417a56543c40f92b358

- 이번 문제에서 살펴볼 스케줄러는 라운드 로빈 스케줄러이다
- 총 작업은 N개가 있으며, 0번부터 N-1번까지 번호가 매겨져 있다
- 스케줄러는 각 작업을 0번 작업부터 순서대로 한 번에 1초씩 실행시킨다
- 모든 작업을 순서대로 실행시킨 후에는 다시 0번 작업부터 실행을 시작한다
- 이 때, 완료된 작업이 있으면, 그 작업은 앞으로 실행시키지 않는다.
- 각 작업을 수행해야하는 시간이 주어졌을 때, 각 작업이 언제 완료되는지 구하는 문제

- 작업이 8, 1, 3, 6, 3, 8 인 경우
- 먼저 완료 되는 순서부터 살펴본다.

소요 시간	8	1	3	6	3	8
----------	---	---	---	---	---	---

- 작업이 8, 1, 3, 6, 3, 8 인 경우
- 먼저 완료 되는 순서부터 살펴본다.

소요 시간	8	1	3	6	3	8
시간 1	1	2	3	4	5	6
시간 2	7		8	9	10	11
시간 3	12		13	14	15	16
시간 4	17			18		19
시간 5	20			21		22
시간 6	23			24		25
시간 7	26					27
시간 8	28					29

- 작업이 8, 1, 3, 6, 3, 8 인 경우
- 먼저 완료 되는 순서부터 살펴본다.
- 총지난시간=0
- 남은 작업의 개수 = 6

소요 시간	8	1	3	6	3	8
완료	5	1	2	4	3	6

- 모든 작업을 1초씩 실행시키는데 걸리는 시간 = 총 지난 시간 + 남은 작업의 개수 * 1 = 6
- 2번 작업이 완료되는 시간 = 6 (3~6번 작업 중에 완료되지 않은 작업의 개수) = 2

- 작업이 8, 1, 3, 6, 3, 8 인 경우
- 먼저 완료 되는 순서부터 살펴본다.
- 총지난시간=6
- 남은 작업의 개수 = 5

모는 삭업을 3조씩	실행시키는데 걸리는 시간 = 총 지난 시간 + 남은 작업의 개수 * (3-1) = 16

- 3번 작업이 완료되는 시간 = 16 (4~6번 작업 중에 완료되지 않은 작업의 개수) = 13
- 5번 작업이 완료되는 시간 = 16 (6~6번 작업 중에 완료되지 않은 작업의 개수) = 15

소요 시간	8	1	3	6	3	8
완료	5	1	2	4	3	6

- 작업이 8, 1, 3, 6, 3, 8 인 경우
- 먼저 완료 되는 순서부터 살펴본다.
- 총지난시간 = 16
- 남은 작업의 개수 = 3

소요 시간	8	1	3	6	3	8
완료	5	1	2	4	3	6

- 모든 작업을 6초씩 실행시키는데 걸리는 시간 = 총 지난 시간 + 남은 작업의 개수 * (6-3) = 25
- 4번 작업이 완료되는 시간 = 25 (5~6번 작업 중에 완료되지 않은 작업의 개수) = 24

- 작업이 8, 1, 3, 6, 3, 8 인 경우
- 먼저 완료 되는 순서부터 살펴본다.
- 총 지난 시간 = 25
- 남은 작업의 개수 = 2

소요 시간	8	1	3	6	3	8
완료	5	1	2	4	3	6

- 모든 작업을 8초씩 실행시키는데 걸리는 시간 = 총 지난 시간 + 남은 작업의 개수 * (8-6) = 29
- 1번 작업이 완료되는 시간 = 29 (2~6번 작업 중에 완료되지 않은 작업의 개수) = 28
- 6번 작업이 완료되는 시간 = 29 (7~6번 작업 중에 완료되지 않은 작업의 개수) = 29

https://www.acmicpc.net/problem/12016

• 소스: http://codeplus.codes/994d65465f7648819bcc4a872c4faa58

- 1번부터 N번까지 번호가 매겨져 있는 N개의 나무가 있다
- i번 나무는 좌표 X[i]에 심는다
- 1번 나무를 심는 비용은 없다
- 각각의 나무를 심는데 드는 비용은 현재 심어져있는 모든 나무 까지 거리의 합
- 만약 3번 나무를 심는다면, 1번 나무와의 거리 + 2번 나무와의 거리가 3번 나무를 심는데 드는 비용
- 2번 나무부터 N번 나무까지를 심는 비용의 곱을 구하는 문제

- BIT를 2개 써서 푸는 문제
- 좌표 제한 L = 200,000
- cnt[i] = 좌표 i에 심어져 있는 나무의 개수
- dist[i] = cnt[i] × i (i에 심어져 있는 좌표의 합)

- 나무를 tree[i]에 심는다
- CL = sum(cnt, 1, x[i]-1) 개가 왼쪽에
- 좌표가 x0에 있는 나무와의 거리는 x[i] x0
- 거리의 합
- $CL \times x[i] sum(all x0) = CL \times x[i] sum(dist, 1, x[i]-1)$

- 나무를 tree[i]에 심는다
- CR = sum(cnt, x[i]+1, L) 개가 오른쪽에
- 거리의 합
- sum(dist, x[i]+1, L) CR \times x[i]

나무심기

- 나무를 tree[i]에 심는다
- 비용
- $x[i] \times (sum(cnt, 1, x[i]-1) sum(cnt, x[i]+1, L))$
- + sum(dist, x[i]+1, L) sum(dist, 1, x[i]-1)

나무심기

https://www.acmicpc.net/problem/1280

• 소스: http://codeplus.codes/6e19da105c434400807a014c9f00ed2e

https://www.acmicpc.net/problem/5012

• i < j < k 이면서 A[i] > A[j] > A[k] 인 쌍의 개수를 구하는 문제

- 7578번 공장 문제와 비슷하다
- 공장: i < j 이면서 A[i] > A[j] 쌍의 개수를 찾는 문제
- BIT를 이용해서 각각의 j마다 A[i] > A[j]인 쌍의 개수를 구했다.

- i < j < k 이면서 A[i] > A[j] > A[k] 쌍의 개수를 찾는 문제
- BIT를 이용해서 각각의 j마다 A[i] > A[j]인 쌍의 개수를 구해서 tree2에 저장한다.
- tree2에서 각각의 k마다 A[i] > A[j] > A[k]인 쌍의 개수를 구한다.

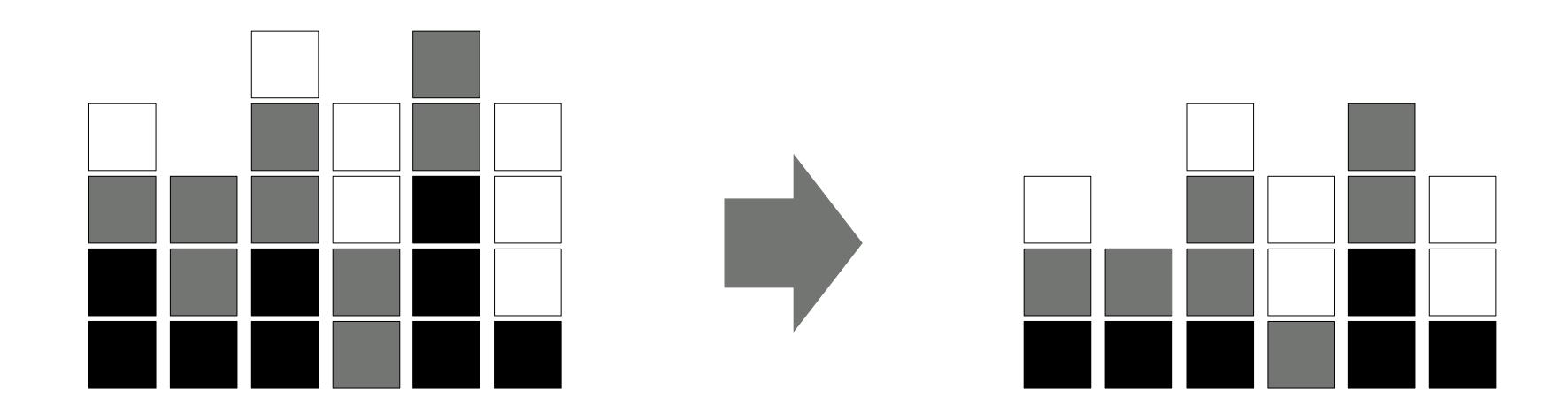
https://www.acmicpc.net/problem/5012

• 소스: http://codeplus.codes/1201872e4195453aba622046bd36546c

- 맥주캔은 검은색, 회색, 흰색으로 총 3가지 종류가 있고, N개의 열에 쌓았다. $1 \le N \le 30$ 만
- 쌓은 순서는 검은색, 회색, 흰색의 순서이다.
- 높이를 정해서 공기총을 발사하면, 해당 높이의 캔이 모두 바깥으로 떨어지고, 위에 있는 캔이 그대로 한 칸 내려온다.
- 검은색은 1점, 회색은 2점, 흰색은 5점
- 각 높이를 쏠 때마다 얻을 수 있는 점수를 구하는 문제
- 공기총의 발사 횟수 ≤ 300,000
- 모든 + $\leq 10^6$

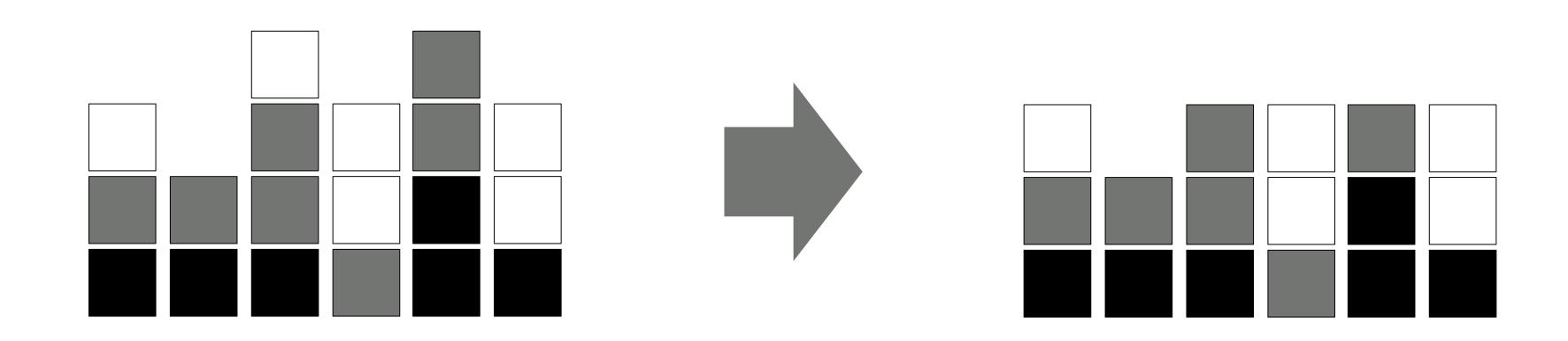
https://www.acmicpc.net/problem/1273

• 2번 높이를 총으로 쏜 경우 (점수: 12)



https://www.acmicpc.net/problem/1273

• 4번 높이를 총으로 쏜 경우 (점수: 7)

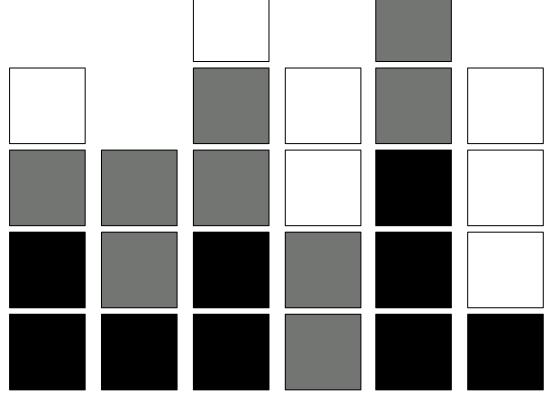


- B[i], G[i], W[i]를 i번 열에 있는 검정색, 회색, 흰색 캔의 개수
- X_i[h] = i번 열의 높이 h에 있는 캔의 점수
- X[h] = 높이 h에 총을 발사했을 때 얻는 점수
- $X[h] = \Sigma X_i[h] (1 \le i \le N) 으로 구할 수 있다.$
- 매번 X[h]를 구하는 것은 너무 비효율적이다.

- B[i], G[i], W[i]를 i번 열에 있는 검정색, 회색, 흰색 캔의 개수
- X_i[h] = i번 열의 높이 h에 있는 캔의 점수
- X[h] = 높이 h에 총을 발사했을 때 얻는 점수
- $X[h] = \Sigma X_i[h] (1 \le i \le N) 으로 구할 수 있다.$
- $Y_i[h] = X_i[h] X_i[h-1]$
- Y_i[h]는 0을 제외하면 4가지 서로 다른 값을 가질 수 있다.
 - 검회흰: 1, 3
 - 검흰: 1, 4
 - 회흰: 2, 3
 - 흰:5

- B[i], G[i], W[i]를 i번 열에 있는 검정색, 회색, 흰색 캔의 개수
- X_i[h] = i번 열의 높이 h에 있는 캔의 점수
- X[h] = 높이 h에 총을 발사했을 때 얻는 점수
- $X[h] = \Sigma X_i[h] (1 \le i \le N) 으로 구할 수 있다.$
- $Y_i[h] = X_i[h] X_i[h-1]$
- $X_i[h] = \Sigma Y_i[j] (1 \le j \le h)$
- $Y[h] = \Sigma Y_i[h]$ (1 $\leq i \leq N$)라면 Y[h]를 효율적으로 구할 수 있다.
- Y_i[h]의 값이 변하는 i는 1, B[i]+1, B[i]+G[i]+1, B[i]+G[i]+W[i]+1 이기 때문

- B[i], G[i], W[i]를 i번 열에 있는 검정색, 회색, 흰색 캔의 개수
- X_i[h] = i번 열의 높이 h에 있는 캔의 점수
- X[h] = 높이 h에 총을 발사했을 때 얻는 점수
- $X[h] = \Sigma X_i[h] (1 \le i \le N) 으로 구할 수 있다.$
- $Y_i[h] = X_i[h] X_i[h-1]$
- $X_i[h] = \Sigma Y_i[j] (1 \le j \le h)$
- $Y[h] = \Sigma Y_i[h] (1 \le i \le N)$
- $X[h] = \Sigma X_i[h]$ $(1 \le i \le N) = \Sigma \Sigma Y_i[j]$ $(1 \le i \le N)$ $(1 \le j \le h) = \Sigma Y[j]$ $(1 \le j \le h) = X[h-1] + Y[h]$



i	1	2	3	4	5	6
B[i]	2	1	2	0	3	1
G[i]	1	2	2	2	2	0
W[i]	1	0	1	2	0	3

h	1	2	3	4	5
X ₁ [h]	1	1	2	5	
X ₂ [h]	1	2	2		
X ₃ [h]	1	1	2	2	5
X ₄ [h]	2	2	5	5	
X ₅ [h]	1	1	1	2	2
X ₆ [h]	1	5	5	5	
X[h]	7	12	17	19	7

h	1	2	3	4	5	6
Y ₁ [h]	1	0	1	3	-5	0
Y ₂ [h]	1	1	0	-2	0	0
Y ₃ [h]	1	0	1	0	3	-5
Y ₄ [h]	2	0	3	0	-5	0
Y ₅ [h]	1	0	0	1	0	-2
Y ₆ [h]	1	4	0	0	-5	0
Y[h]	7	5	5	2	-12	-7

https://www.acmicpc.net/problem/1273

• i = 1

Γ

i	1	2	3	4	5	6
B[i]	2	1	2	0	3	1
G[i]	1	2	2	2	2	0
W[i]	1	0	1	2	0	3

h	1	2	3	4	5
X ₁ [h]	1	1	2	5	
X ₂ [h]	1	2	2		
X ₃ [h]	1	1	2	2	5
X ₄ [h]	2	2	5	5	
X ₅ [h]	1	1	1	2	2
X ₆ [h]	1	5	5	5	
X[h]	7	12	17	19	7

h	1	2	3	4	5	6
Y ₁ [h]	1	0	1	3	-5	0
Y ₂ [h]	1	1	0	-2	0	0
Y ₃ [h]	1	0	1	0	3	-5
Y ₄ [h]	2	0	3	0	-5	0
Y ₅ [h]	1	0	0	1	0	-2
Y ₆ [h]	1	4	0	0	-5	0
Y[h]	7	5	5	2	-12	-7



https://www.acmicpc.net/problem/1273

• i = 4

Г

i	1	2	3	4	5	6
B[i]	2	1	2	0	3	1
G[i]	1	2	2	2	2	0
W[i]	1	0	1	2	0	3

h	1	2	3	4	5
X ₁ [h]	1	1	2	5	
X ₂ [h]	1	2	2		
X ₃ [h]	1	1	2	2	5
X ₄ [h]	2	2	5	5	
X ₅ [h]	1	1	1	2	2
X ₆ [h]	1	5	5	5	
X[h]	7	12	17	19	7

h	1	2	3	4	5	6
Y ₁ [h]	1	0	1	3	-5	0
Y ₂ [h]	1	1	0	-2	0	0
Y ₃ [h]	1	0	1	0	3	-5
Y ₄ [h]	2	0	3	0	-5	0
Y ₅ [h]	1	0	0	1	0	-2
Y ₆ [h]	1	4	0	0	-5	0
Y[h]	7	5	5	2	-12	-7

- Y[i]를 만들고, 이를 이용해 X[i]를 만들 수 있다.
- 트리를 이용해 원하는 높이를 찾을 수 있다.
- tree[i] = i번째 높이가 있으면 1, 없으면 0



https://www.acmicpc.net/problem/1273

• 소스: http://codeplus.codes/dc96ed5846e54169a19bc03ddc91b4b2

K번째 찾기

- N개의 수가 주어졌을 때, 길이가 K인 연속 부분 수열 N-K+1개의 중앙값을 구하는 문제
- $1 \le N \le 250,000$
- 0 ≤ + ≤ 65535

https://www.acmicpc.net/problem/9426

• 세그먼트 트리를 만들고

- N개의 수가 주어졌을 때, 길이가 K인 연속 부분 수열 N-K+1개의 중앙값을 구하는 문제
- N = 7, K = 3인 경우

A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]
	트리에 넣음					

- N개의 수가 주어졌을 때, 길이가 K인 연속 부분 수열 N-K+1개의 중앙값을 구하는 문제
- N = 7, K = 3인 경우

A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]
뻐고	그대로		넣고			

- N개의 수가 주어졌을 때, 길이가 K인 연속 부분 수열 N-K+1개의 중앙값을 구하는 문제
- N = 7, K = 3인 경우

A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]
	빼고	그대로		넣고		

- N개의 수가 주어졌을 때, 길이가 K인 연속 부분 수열 N-K+1개의 중앙값을 구하는 문제
- N = 7, K = 3인 경우

A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]
		뻐고	그대로		넣고	

- N개의 수가 주어졌을 때, 길이가 K인 연속 부분 수열 N-K+1개의 중앙값을 구하는 문제
- N = 7, K = 3인 경우

A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]
			빼고	그대로		넣고

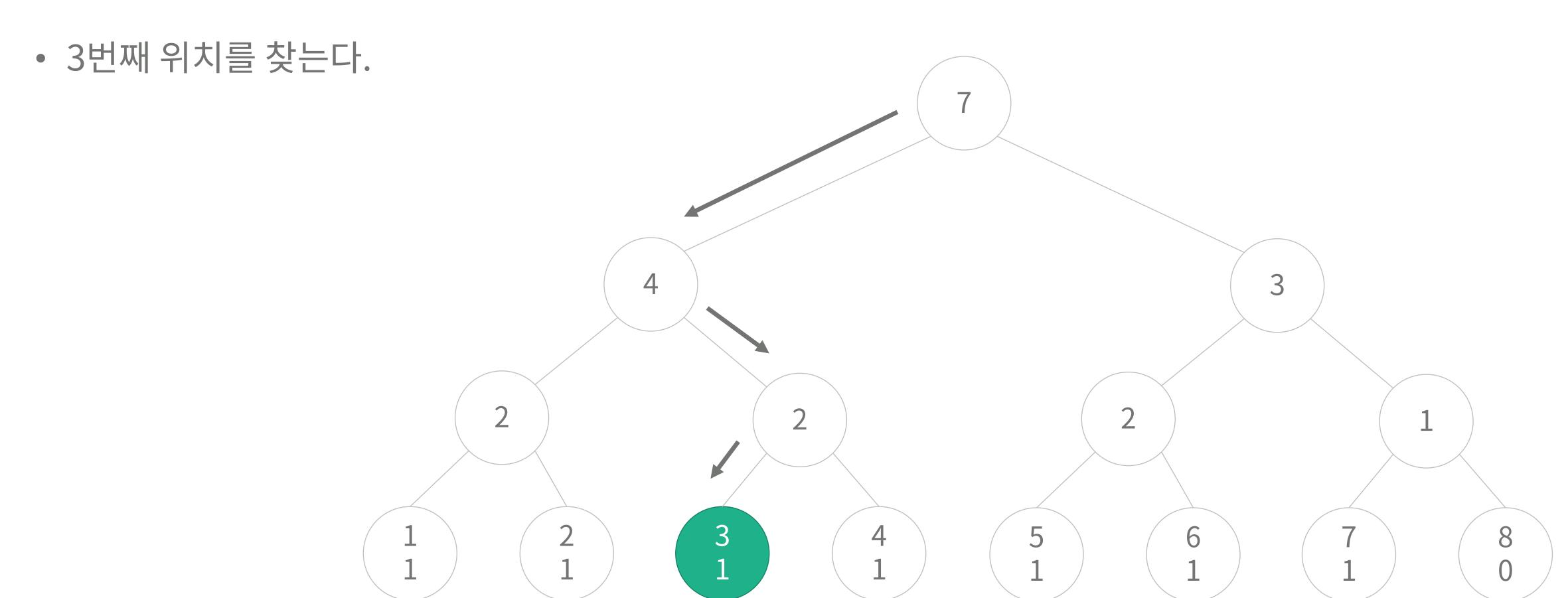
https://www.acmicpc.net/problem/9426

• 소스: http://codeplus.codes/263aaea9722b4948a15260a619f3a6bc

- N과 K가 주어졌을 때, 요세푸스 순열을 구하는 문제
- N = 7, K = 3
- <3, 6, 2, 7, 5, 1, 4>

https://www.acmicpc.net/problem/1168

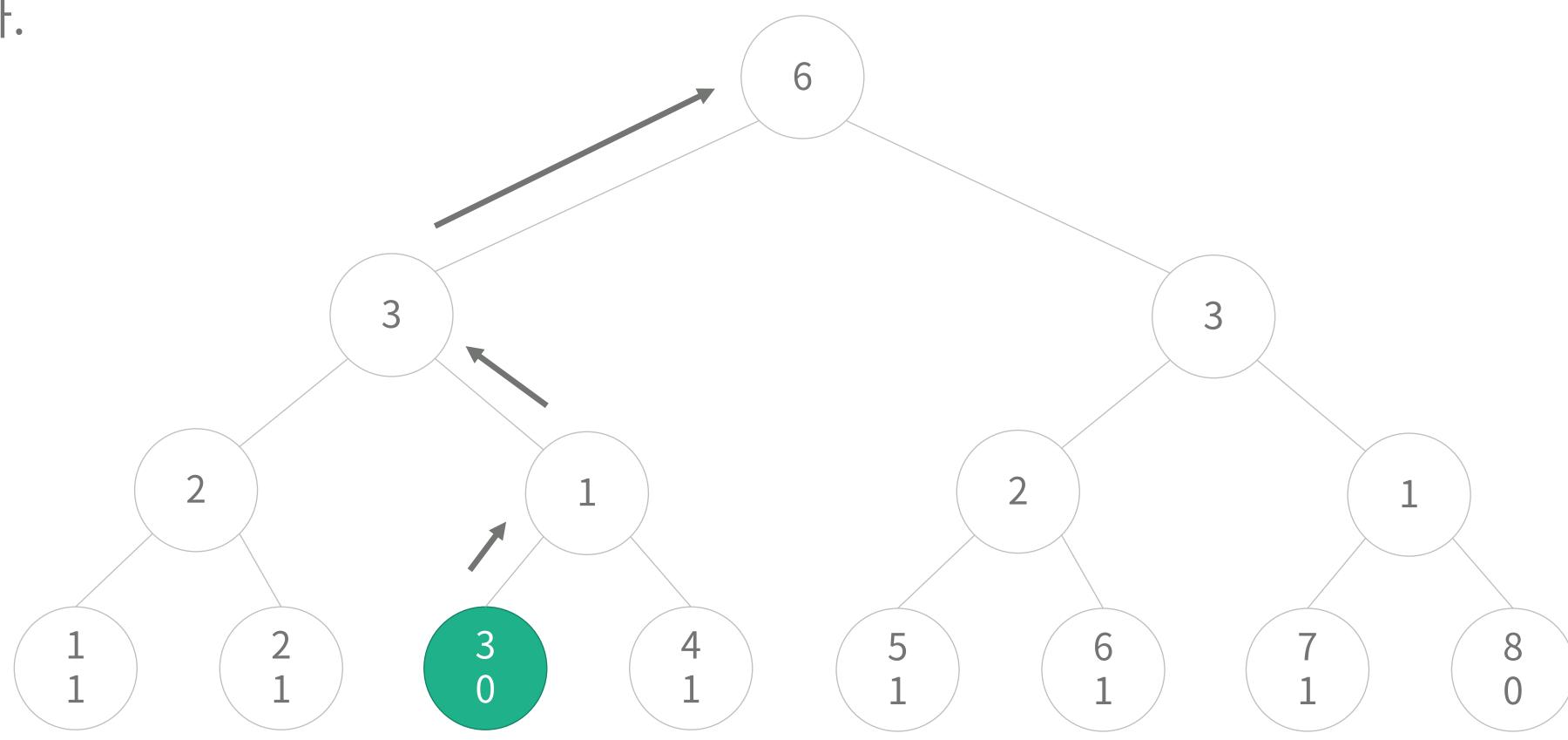
• N = 7, K = 3



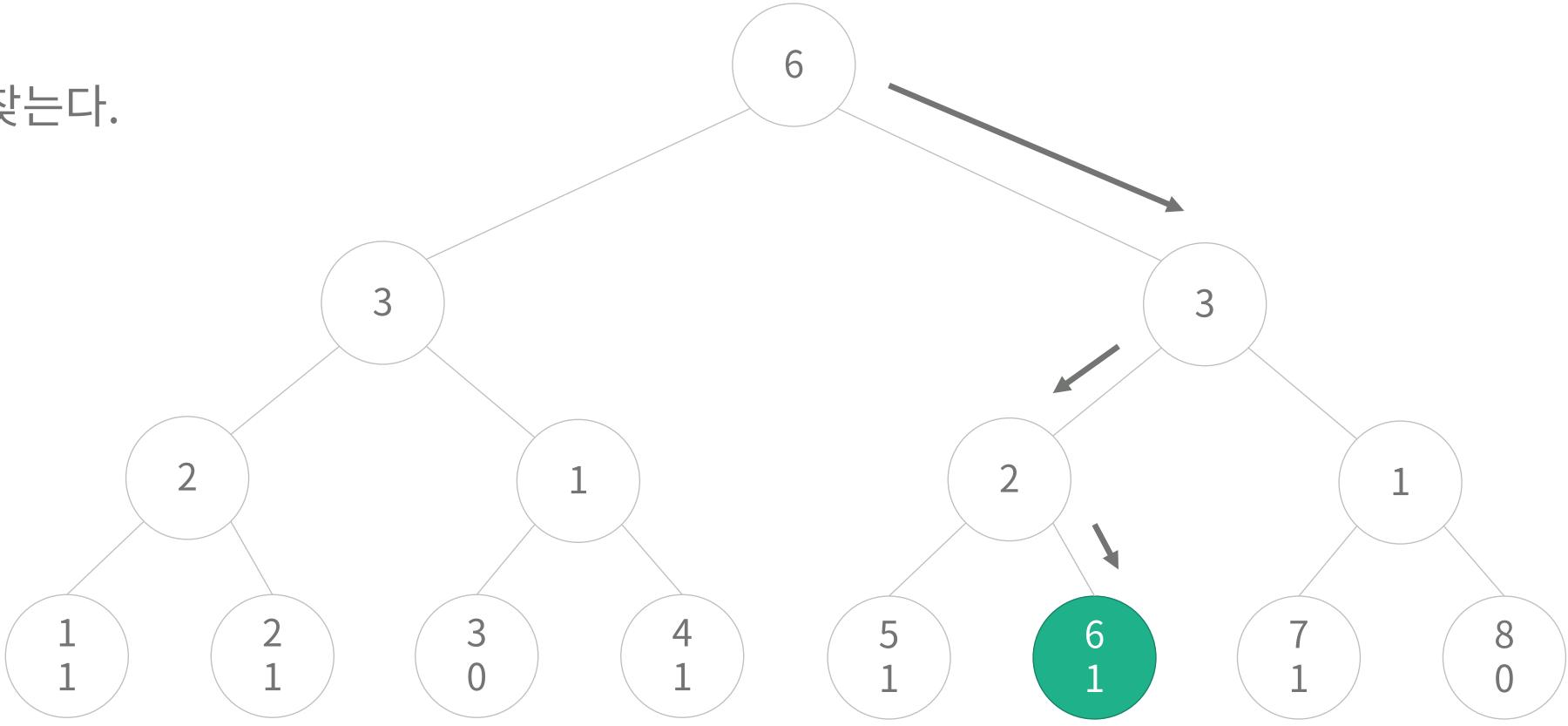
https://www.acmicpc.net/problem/1168

• N = 7, K = 3

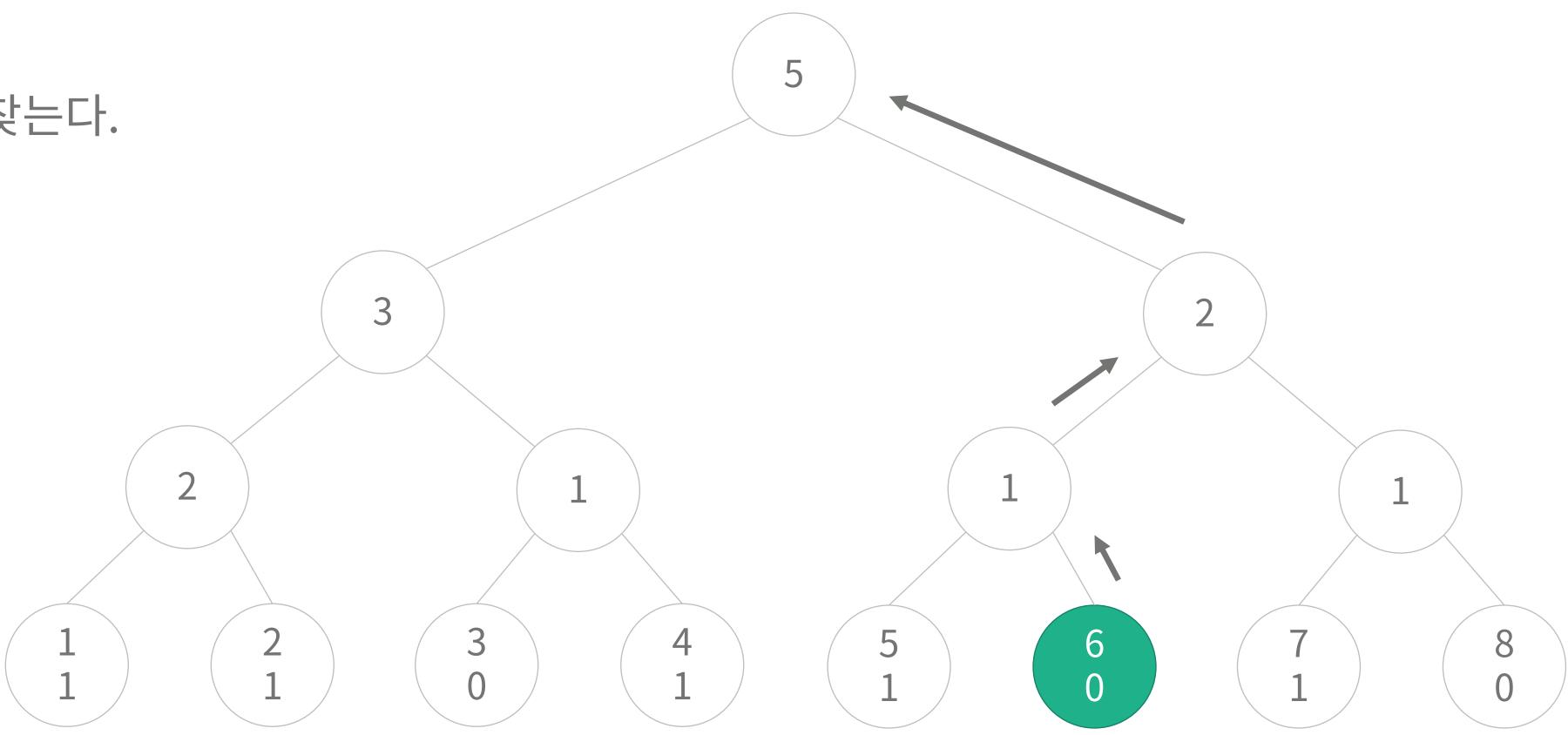




- N = 7, K = 3
- 1~3까지 합 = 2
- 2+3=5번째 위치를 찾는다.

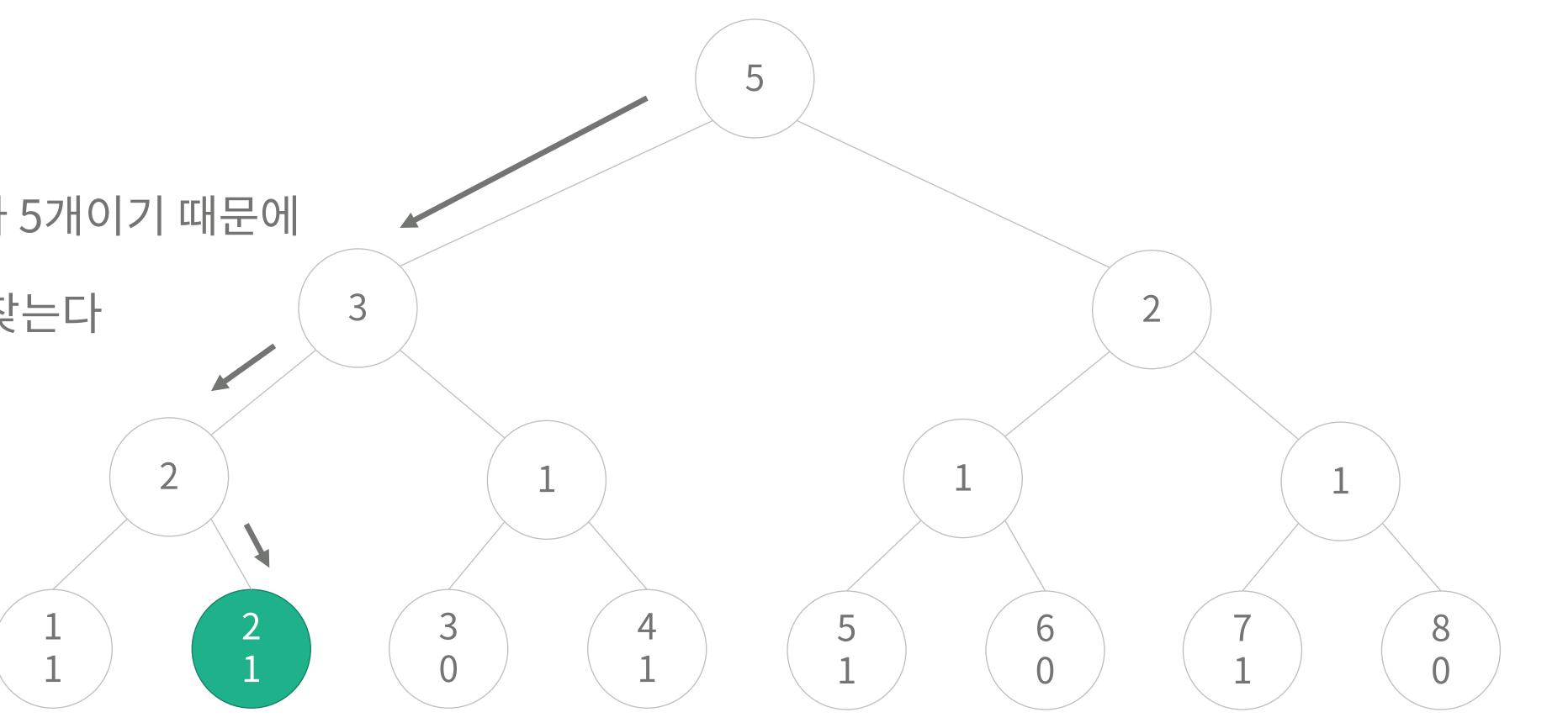


- N = 7, K = 3
- 1~3까지 합 = 2
- 2+3=5번째 위치를 찾는다.



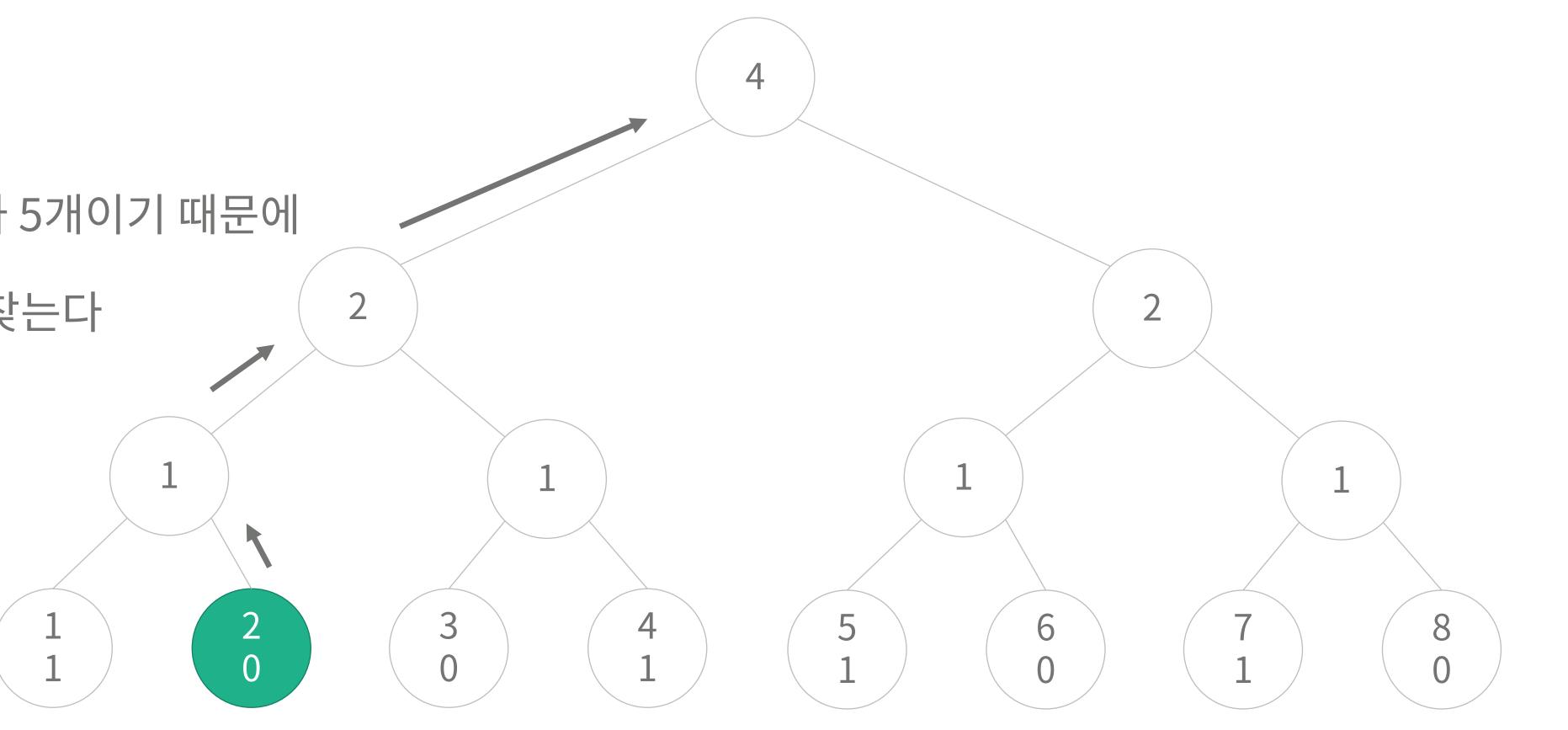
- N = 7, K = 3
- 1~6까지 합 = 4
- 4+3 = 7번째 위치
- 남아있는 수의 개수가 5개이기 때문에



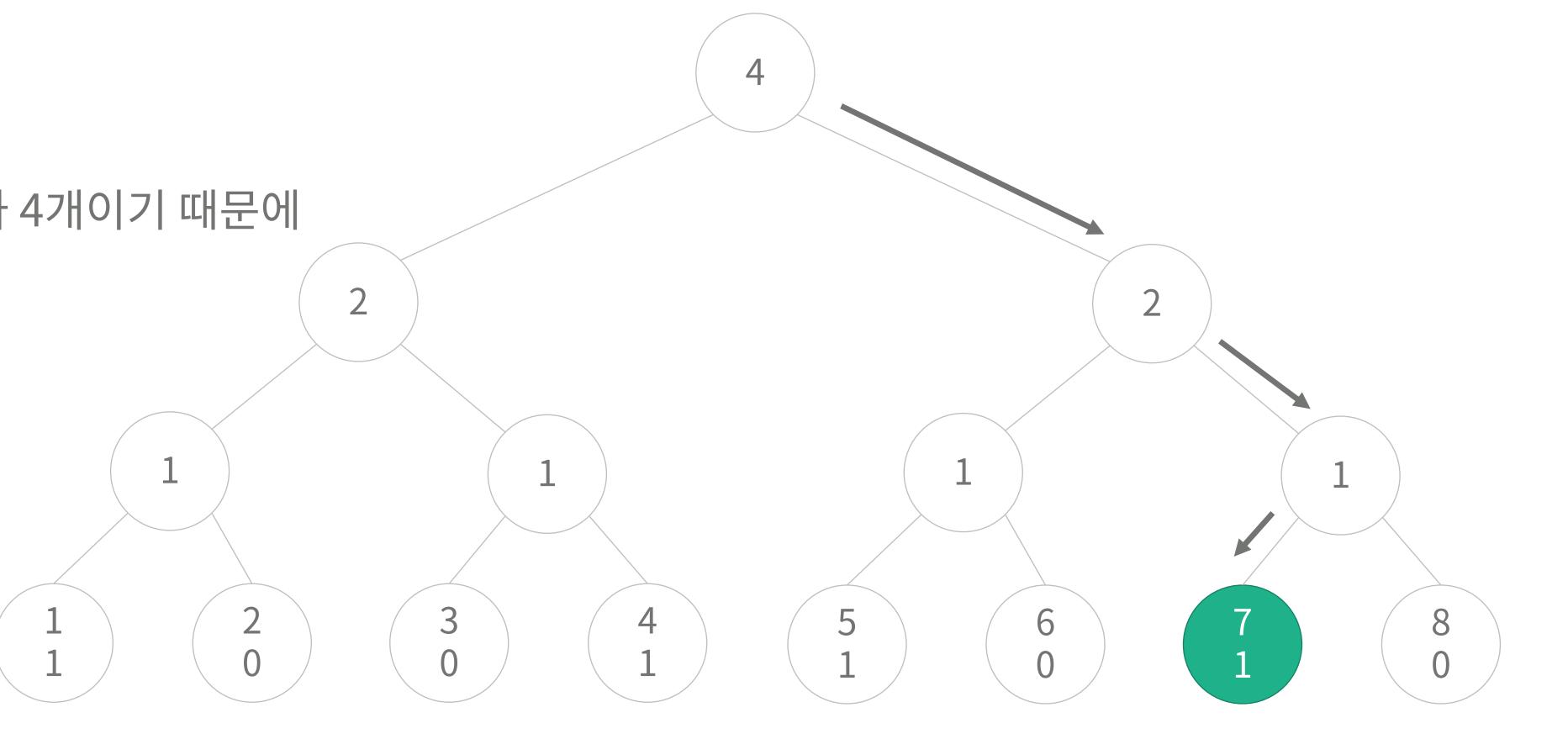


- N = 7, K = 3
- 1~6까지 합 = 4
- 4+3 = 7번째 위치
- 남아있는 수의 개수가 5개이기 때문에

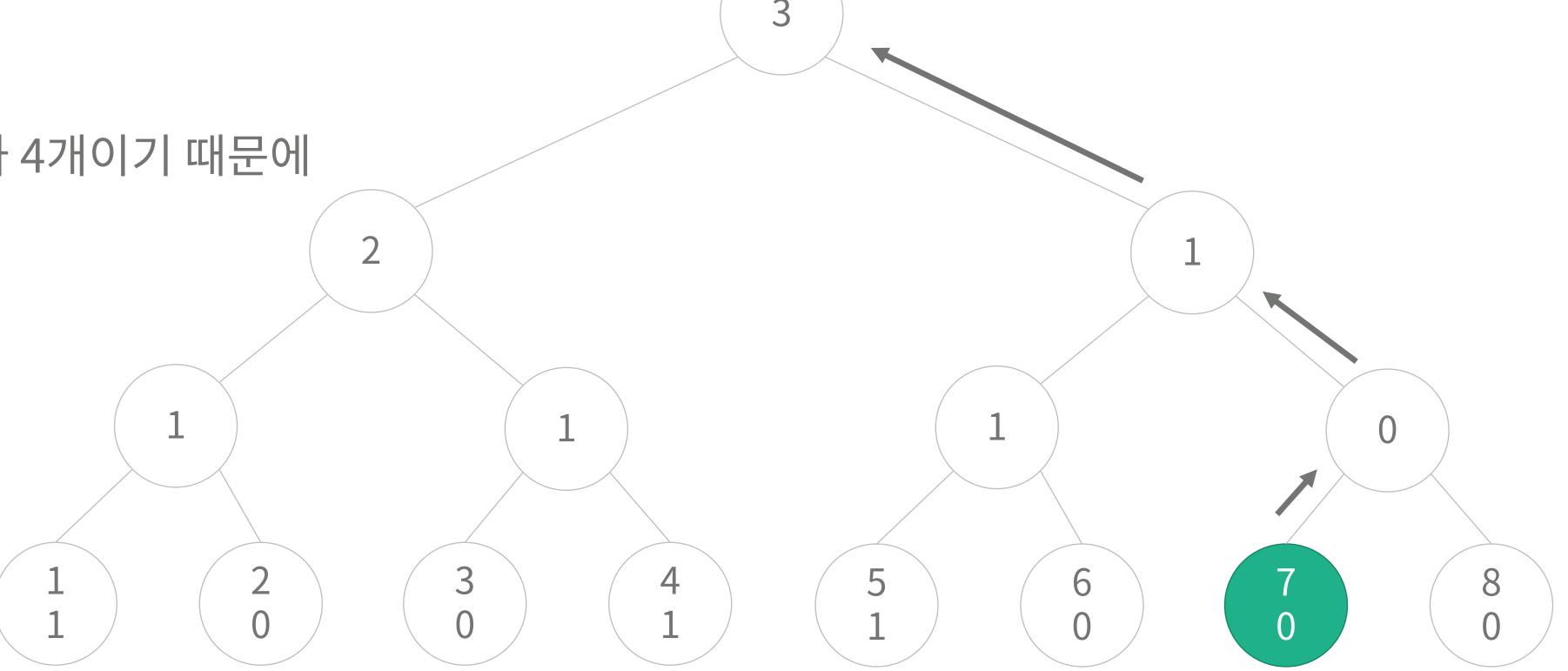




- N = 7, K = 3
- 1~2까지 합 = 1
- 1+3 = 4번째 위치
- 남아있는 수의 개수가 4개이기 때문에
- 찾을 수 있다.

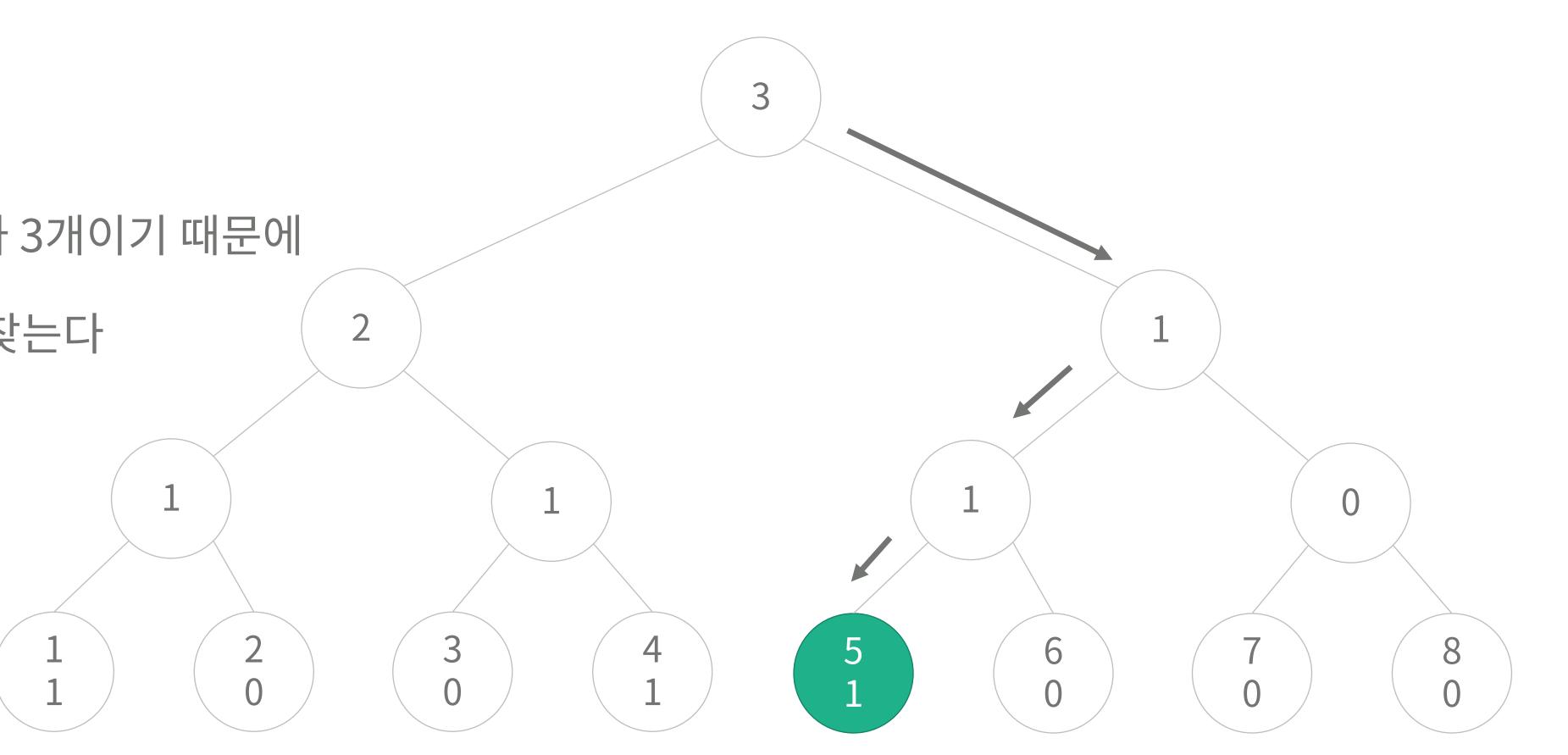


- N = 7, K = 3
- 1~2까지 합 = 1
- 1+3 = 4번째 위치
- 남아있는 수의 개수가 4개이기 때문에
- 찾을 수 있다.



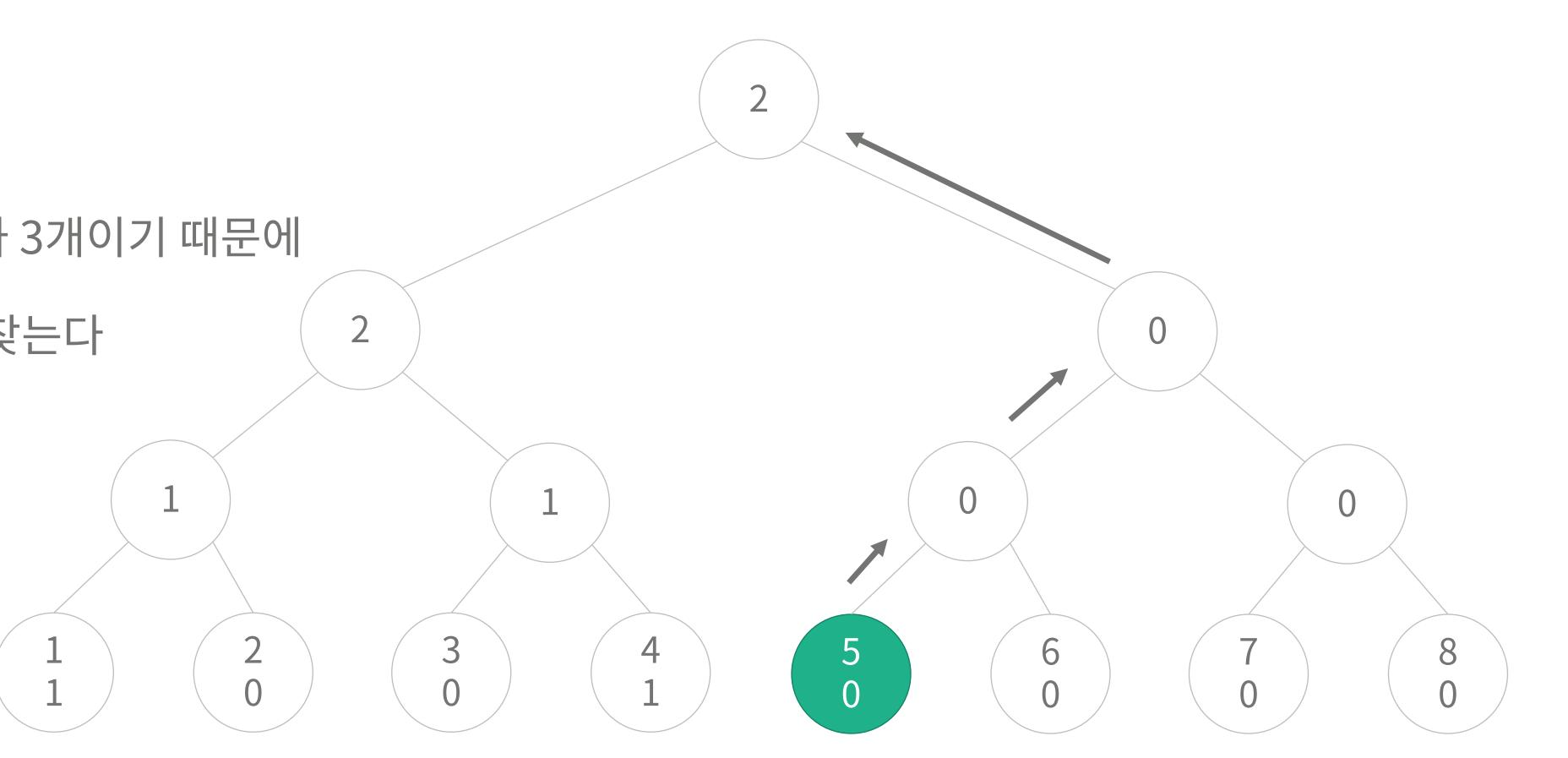
- N = 7, K = 3
- 1~7까지 합 = 3
- 3+3 = 6번째 위치
- 남아있는 수의 개수가 3개이기 때문에





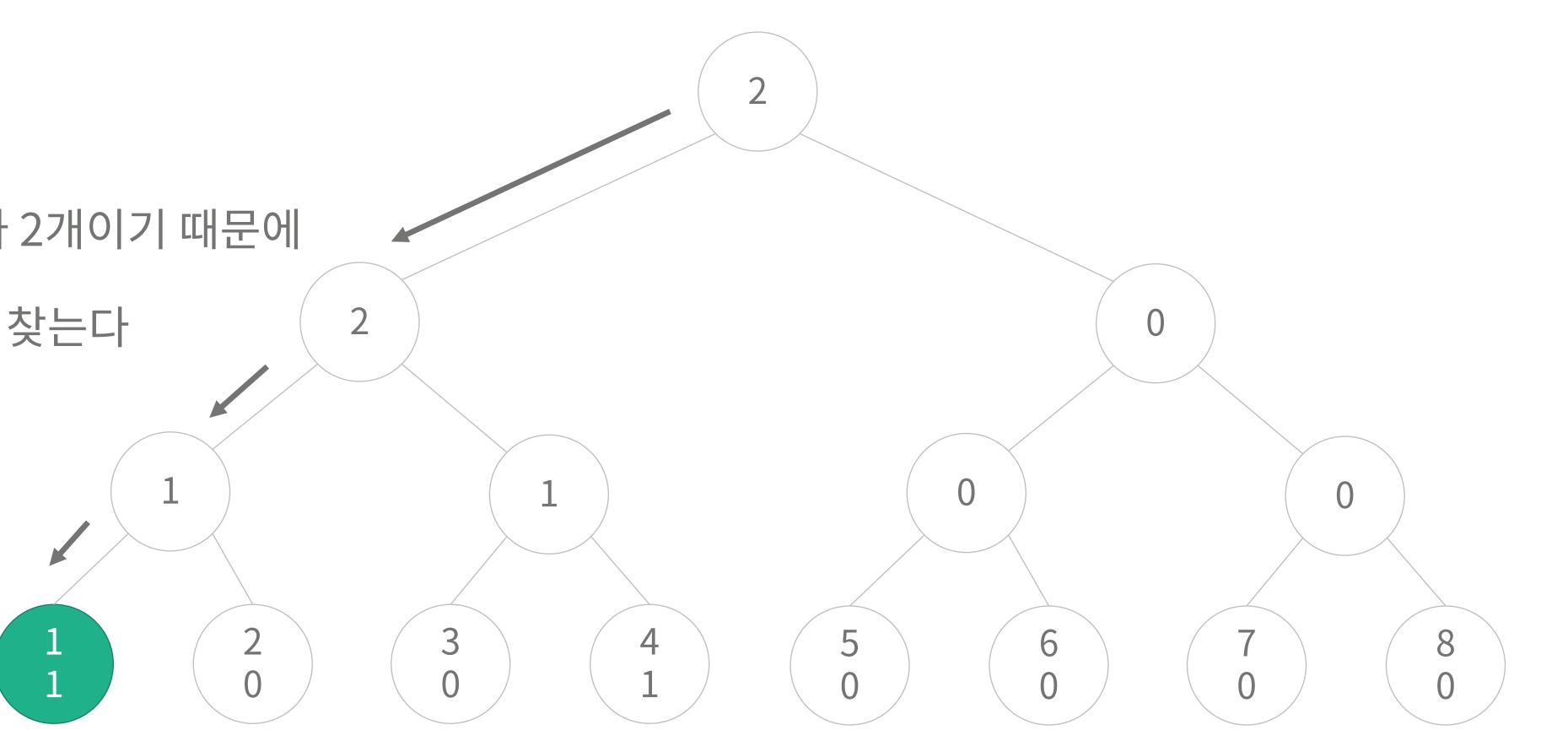
- N = 7, K = 3
- 1~7까지 합 = 3
- 3+3 = 6번째 위치
- 남아있는 수의 개수가 3개이기 때문에





- N = 7, K = 3
- 1~5까지 합 = 2
- 2+3 = 5번째 위치
- 남아있는 수의 개수가 2개이기 때문에





https://www.acmicpc.net/problem/1168

• 소스: http://codeplus.codes/9658c61ea2234b18833f1692a6d891d1