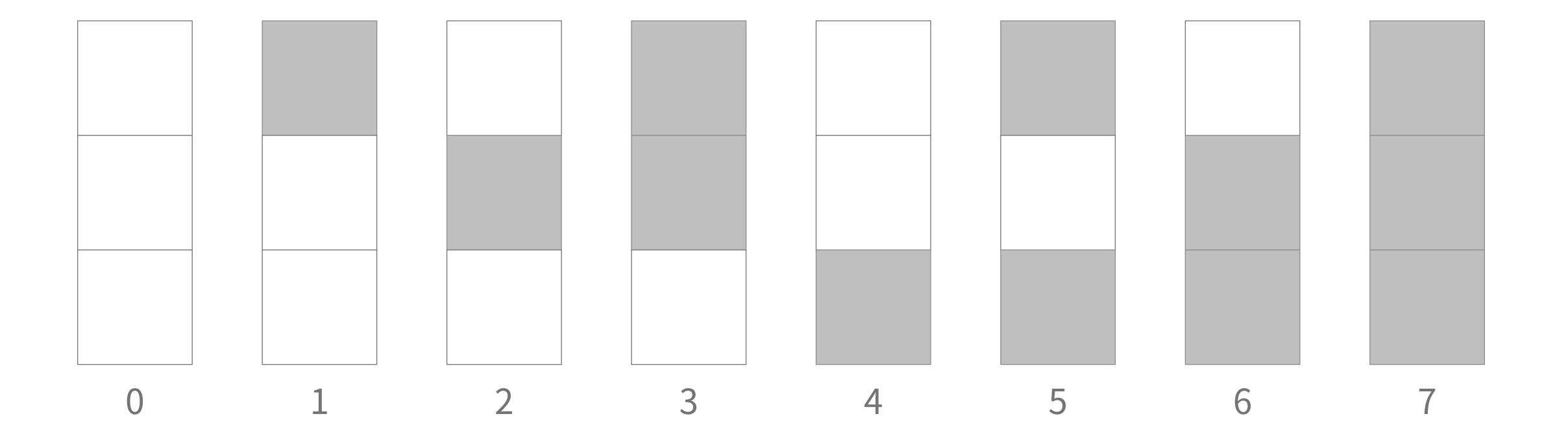
다이나믹 프로그래밍 4

최백준 choi@startlink.io

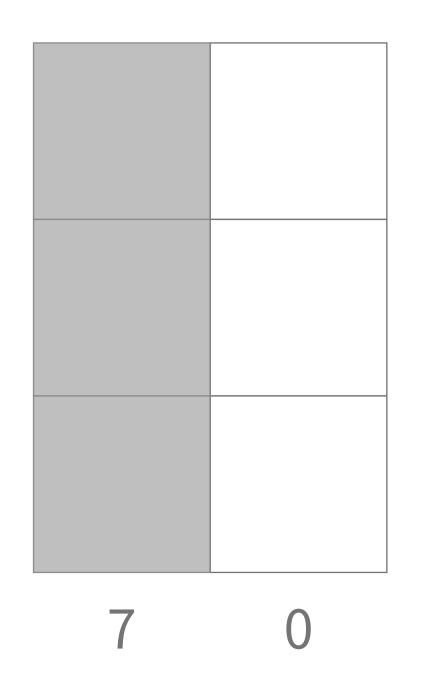
상태다이나믹

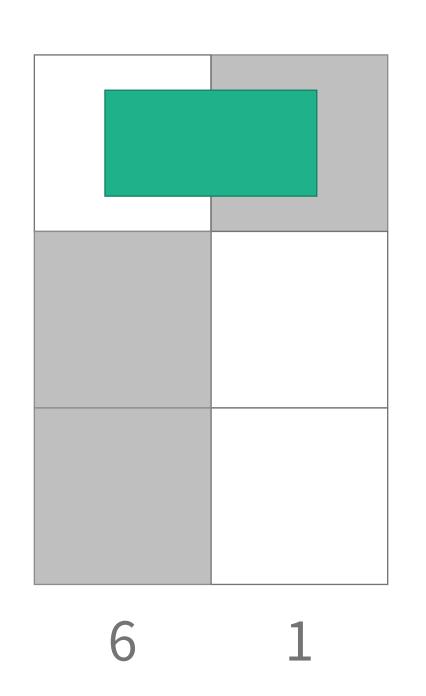
- 3×N을 1×2, 2×1로 채우는 방법의 수
- D[i][j] = 3×i를 채우는 방법의 수, i열의 상태는 j
- 마지막에 올 수 있는 가능한 경우의 수 (회색: 채워져 있는 칸)

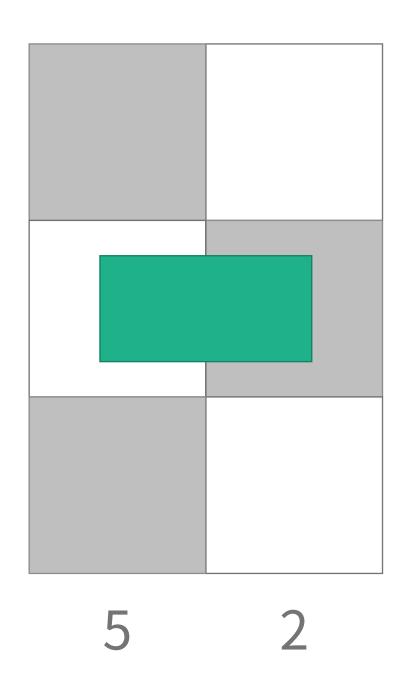


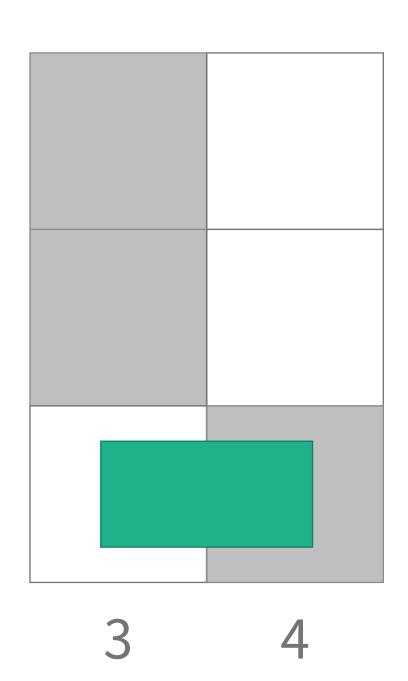
https://www.acmicpc.net/problem/2133

• i열을 채울 때, i-1에 빈 칸이 있으면 안된다



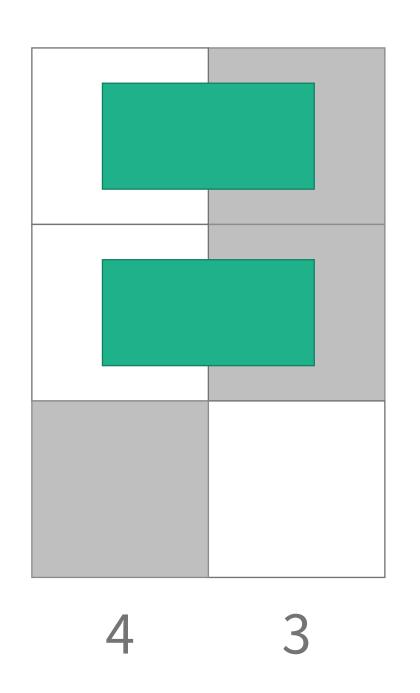


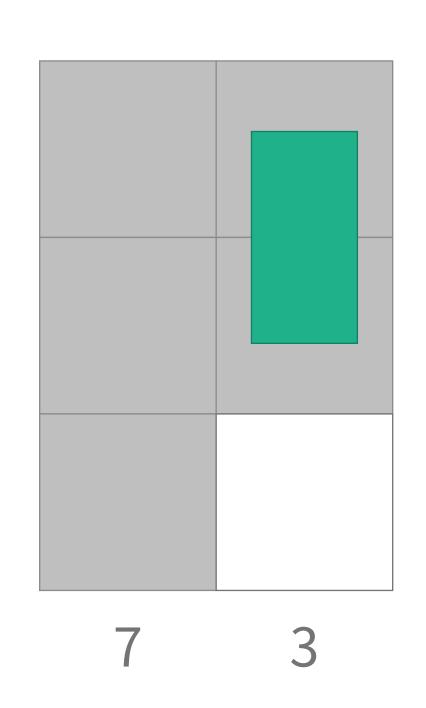


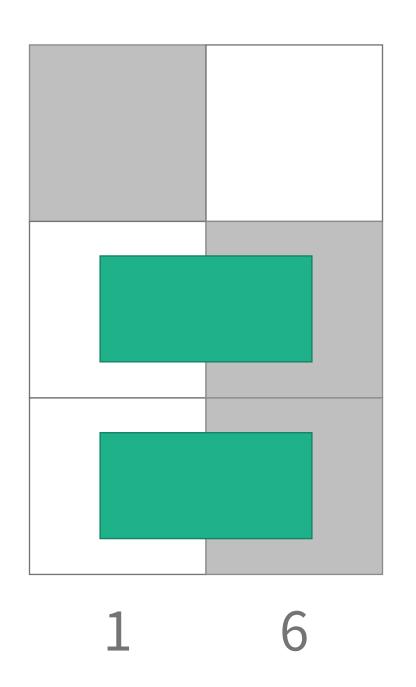


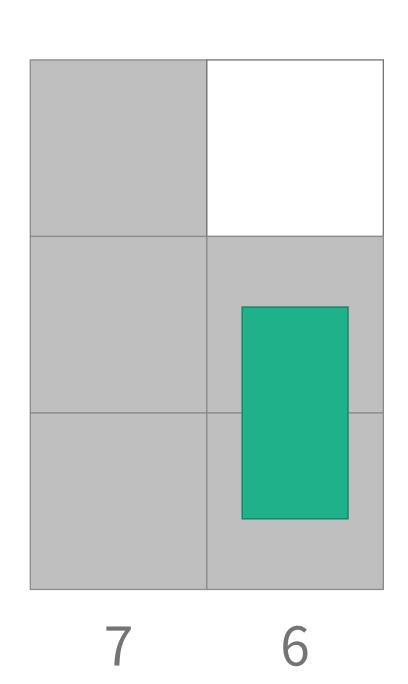
https://www.acmicpc.net/problem/2133

• i열을 채울 때, i-1에 빈 칸이 있으면 안된다



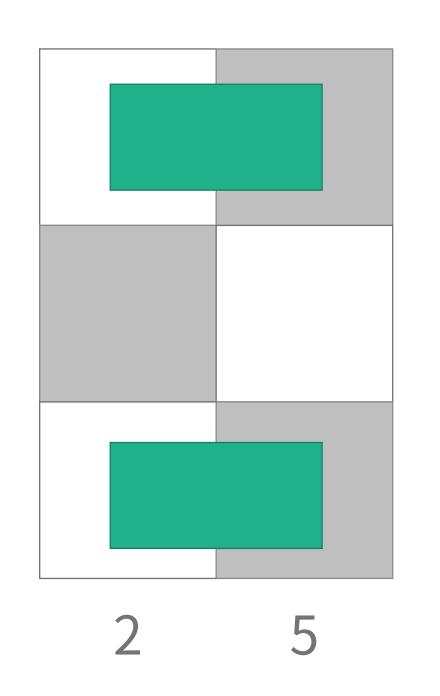


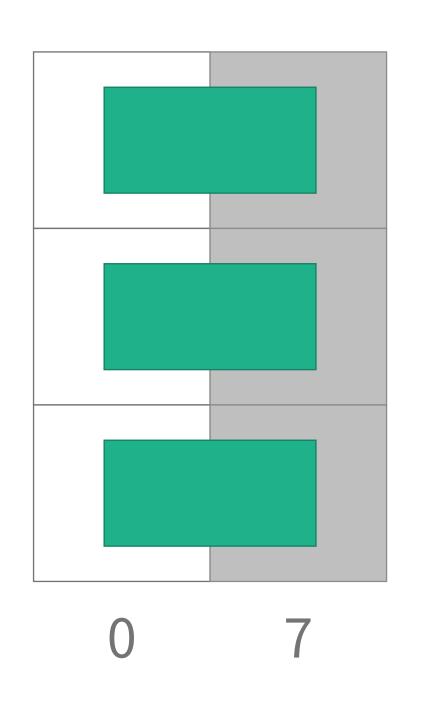


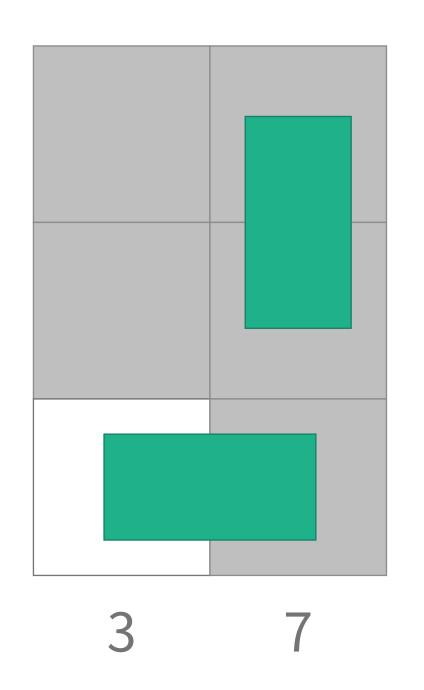


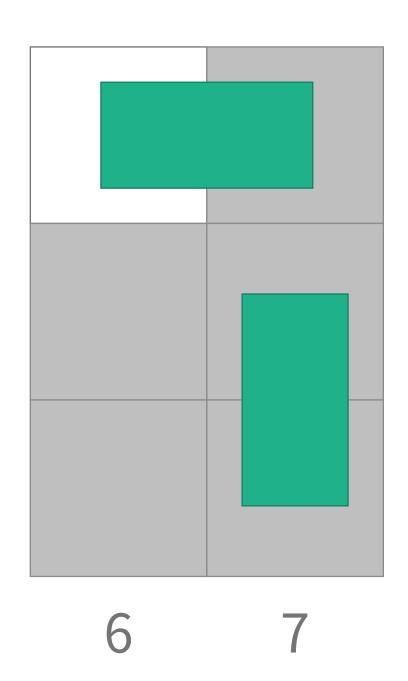
https://www.acmicpc.net/problem/2133

• i열을 채울 때, i-1에 빈 칸이 있으면 안된다









•
$$D[i][0] = D[i-1][7]$$

•
$$D[i][1] = D[i-1][6]$$

•
$$D[i][2] = D[i-1][5]$$

•
$$D[i][4] = D[i-1][3]$$

•
$$D[i][3] = D[i-1][4] + D[i-1][7]$$

•
$$D[i][6] = D[i-1][1] + D[i-1][7]$$

•
$$D[i][5] = D[i-1][2]$$

•
$$D[i][7] = D[i-1][0] + D[i-1][3] + D[i-1][6]$$

```
D[0][7] = 1;
for (int i=1; i<=n; i++) {
    D[i][0] = D[i-1][7];
    D[i][1] = D[i-1][6];
    D[i][2] = D[i-1][5];
    D[i][4] = D[i-1][3];
    D[i][3] = D[i-1][4] + D[i-1][7];
    D[i][6] = D[i-1][1] + D[i-1][7];
    D[i][5] = D[i-1][2];
    D[i][7] = D[i-1][0] + D[i-1][3] + D[i-1][6];
```

https://www.acmicpc.net/problem/2133

• 소스: http://codeplus.codes/5a614cdff44d4cd9a84612b1ad292515

- 도시 1번부터 N번까지 있을 때
- 어느 한 도시에서 출발해서 N개의 도시를 거쳐 다시 원래 도시로 돌아오는 순회 여행 경로
- 비용의 최소값
- N ≤ 16

https://www.acmicpc.net/problem/2098

• D[S][i] = 도시를 방문한 상태가 S이고, 현재 있는 위치가 i일때 최소값

- 시작 도시는 1로 고정한다.
- $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$
- $2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2$
- 모두 같기 때문

https://www.acmicpc.net/problem/2098

• 상태를 사용할 수 있는 이유

- 1 → 4까지 정답이
- 1 → 2 → 3 → 4 라고 하자.
- 그러면, $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ 가 더 크다면, 방문한 도시의 집합은 같기 때문에 필요없는 값이 된다.
- 1 → 5로 갈 때 4에서 가는 경우라면
- $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 57$
- 1 → 3 → 2 → 4 → 5보다 무조건 최소값이다

https://www.acmicpc.net/problem/2098

• D[S][i] = 도시를 방문한 상태가 S이고, 현재 있는 위치가 i일때 최소값

- D[S][i] = D[S2][j] + A[j][i]
- S2 = S에서 i를 뺀 값
- i는 S에는 포함되어 있어야 하고, S2에는 포함되어 있지 않아야 한다
- j는 S에 포함되어 있어야 한다
- 초기값
 - D[1][0] = 0
 - 나머지 = MAX
- 정답
 - min(D[(1<<N)-1][i] + A[i][0])

```
d[1][0] = 0;
for (int i=0; i<(1<<n); i++) {
    for (int j=1; j<n; j++) {
        if (i&(1<<j)) {
            for (int k=0; k<n; k++) {
                if (k!=j && (i&(1<<k)) && a[k][j]) {
                    d[i][j] = min(d[i][j],d[i-(1<<j)][k]+a[k][j]);
```

https://www.acmicpc.net/problem/2098

• 소스: http://codeplus.codes/82b935b9bc5b484999fdd1a833dc7bb1

- D[S2][j] = D[S][i] + A[i][j]
- S2 = S에서 j를 더한 값
- i는 S에는 포함되어 있어야 하고, S2에는 포함되어 있지 않아야 한다
- j는 S2에 포함되어 있어야 한다
- 초기값
 - D[1][0] = 0
 - 나머지 = MAX
- 정답
 - min(D[(1<<N)-1][i] + A[i][0])

```
d[1][0] = 0;
for (int i=0; i<(1<<n); i++) {
    for (int j=0; j<n; j++) {
        if (i&(1<<j)) {
            for (int k=0; k<n; k++) {
                if (k!=j && !(i&(1<<k)) && a[j][k]) {
                    d[i|(1<<k)][k] = min(d[i|(1<<k)][k],d[i][j]+a[j][k]);
```

https://www.acmicpc.net/problem/2098

• 소스: http://codeplus.codes/41dd9bd8e0bf43f68cdb0e30eca96678

- N이 주어질 때, 길이가 N이면서 0에서 9가 모두 등장하는 계단 수가 총 몇 개 있는지 구하기
- $1 \le N \le 100$

쉬운계단수

- 인접한 자리의 차이가 1이 나는 수를 계단 수라고 한다
- 예: 45656
- 길이가 N인 계단 수의 개수를 구하는 문제

쉬운계단수

- D[i][j] = 길이가 i이가 마지막 숫자가 j인 계단 수의 개수
- D[i][j] = D[i-1][j-1] + D[i-1][j+1]

https://www.acmicpc.net/problem/1562

• D[N][M][S] = 길이가 N이고, M으로 끝나는 계단수, 지금까지 나온 수의 집합: S

- D[N+1][M+1][S | (1<<(M+1))] += D[N][M][S]
- D[N+1][M-1][S | (1<<(M-1))] += D[N][M][S]

https://www.acmicpc.net/problem/1562

• 소스: http://codeplus.codes/680c93a9e91743b18142c733cef586d5

- 이 문제는 계단수 이기 때문에, 상태 S를 범위로 나타낼 수 있다.
- D[N][M][L][R] = 길이가 N이고, M으로 끝나는 계단수, 지금까지 나온 수: L~R

https://www.acmicpc.net/problem/1562

• 소스: http://codeplus.codes/0defb3cf202d4593ae999f8a2d3396f5

- N행 M열 직사각형 교실에서 시험을 보려고 한다.
- 최대 몇 명의 학생이 시험을 볼 수 있는가?
- $1 \le N, M \le 10$

X		X
X	사람	X

https://www.acmicpc.net/problem/1014

• D[i][j] = i번 행의 상태가 j일 때, 앉을 수 있는 학생의 수

X		X
X	사람	X

- D[i][j] = i번 행의 상태가 j일 때, 앉을 수 있는 학생의 수
- D[i][j] = max(D[i-1][k] + (j 상태에 있는 학생의 수))
 - k와 j에서 서로 못 앉는 자리가 있으면 안됨

X		X
X	사람	X

https://www.acmicpc.net/problem/1014

• 소스: http://codeplus.codes/332e1e62f2c2480db4a4e75fc6088596

- $N \times M$ 격자판을 2×1 크기의 도미노로 채우는 방법의 수
- $1 \leq N, M \leq 14$

https://www.acmicpc.net/problem/1648

• D[num][s] = num번 칸을 채울 것이고, num번 칸부터 M개의 상태가 s일 때, 경우의 수

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17

- D[num][s] = num번 칸을 채울 것이고, num번 칸부터 M개의 상태가 s일 때, 경우의 수
- i = 7인 경우 상태 s가 나타내는 범위 7~12번 칸 (M개 칸)

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17

- D[num][s] = num번 칸을 채울 것이고, num번 칸부터 M개의 상태가 s일 때, 경우의 수
- num = 7인 경우 상태 s가 나타내는 범위 7~12번 칸 (M개 칸)
- s = 4인 경우: 4는 2진수로 000100(2) 이다. 따라서, 9번 칸만 이미 채워져 있는 상태

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17

- D[num][s] = num번 칸을 채울 것이고, num번 칸부터 M개의 상태가 s일 때, 경우의 수
- num = 7인 경우 상태 s가 나타내는 범위 7~12번 칸 (M개 칸)
- s = 5인 경우: 5는 2진수로 000101(2) 이다. 따라서, 7, 9번 칸이 이미 채워져 있는 상태

	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17

- D[num][s] = num번 칸을 채울 것이고, num번 칸부터 M개의 상태가 s일 때, 경우의 수
- num = 7인 경우 상태 s가 나타내는 범위 7~12번 칸 (M개 칸)
- s = 13인 경우: 13은 2진수로 001101(2) 이다. 따라서, 7, 9, 10번 칸이 이미 채워져 있는 상태

	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17

- D[num][s] = num번 칸을 채울 것이고, num번 칸부터 M개의 상태가 s일 때, 경우의 수
- num = 7인 경우 상태 s가 나타내는 범위 7~12번 칸 (M개 칸)
- s = 0인 경우: 0은 2진수로 000000(2) 이다. 따라서, 모두 비어있는 상태

	1	2	3	4	5		
6	7	8	9	10	11		
12	13	14	15	16	17		

- 왜 M개를 저장할까?
- num번 칸에 블럭을 놓는 경우에 항상 num번 칸이 왼쪽 또는 위가 되게 놓기 때문

	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17

	1	2	3	4	5		
6	7	8	9	10	11		
12	13	14	15	16	17		

https://www.acmicpc.net/problem/1648

• 상태 s에서 이미 1로 되어있는 곳은 아래 그림과 같이 위에서 채웠다는 의미

0	1	2	3	4	5		
6	7	8	9	10	11		
12	13	14	15	16	17		

- 블럭을 놓을 수 없는 경우
- 7이 이미 채워져 있는 경우
- 상태 s를 이진수로 나타냈을 때, 마지막 비트가 1인 경우 ((s & 1) == 1)
- 이런 경우에는 채울 수 없기 때문에, 다음 칸을 채워야 함
- s를 오른쪽으로 한 비트 shift 해야함 D[num+1][s>>1]

	1	2	3	4	5		
6	7	8	9	10	11		
12	13	14	15	16	17		

	1	2	3	4	5			
6	7	8	9	10	11			
12	13	14	15	16	17			

- 블럭을 놓을 수 있는 경우 (1x2를 놓는 경우)
- s & 1 과 s & 2 모두 0이어야 함
- 이 때, 가장 오른쪽 칸인지 아닌지 확인하는 절차도 필요
- D[num+2][s >> 2]

	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17

	1	2	3	4	5		
6	7	8	9	10	11		
12	13	14	15	16	17		

- 블럭을 놓을 수 있는 경우 (2x1를 놓는 경우)
- 현재 칸이 비어있으면 항상 가능함
- D[num+1][(s >> 1) | (1 << (M-1))]

	1	2	3	4	5		
6	7	8	9	10	11		
12	13	14	15	16	17		

	1	2	3	4	5		
6	7	8	9	10	11		
12	13	14	15	16	17		

- 올바르게 채웠는지는 어떻게 확인할까?
- N×M번째 칸이 존재한다고 가정
- N×M번째 칸에서 상태가 S이면 올바르게 채운 것!

	1	2	3	4	5	
6	7	8	9	10	11	
12	13	14	15	16	17	
18						

44

격자판채우기

https://www.acmicpc.net/problem/1648

• 소스: http://codeplus.codes/53b943d072564fa19fc27369f73d8db8

4블릭

- 1블럭의 크기는 1×1, 점수는 1점
- 4블럭의 점수는 2×2, 점수는 16점
- 1블럭이 일부 채워진 N×M 크기의 보드가 주어졌을 때, 점수의 최대값을 구하는 문제
- $1 \le N \le 10, 1 \le M \le 25$

			1		1		1	1	1	1	1	1	1
	1				1		4	1	4	1	4	1	4

4블릭

```
if (a[i][j] == '1') {
    return ans = go(index+1, state >> 1) + 1;
ans = go(index+1, state>>1);
if ((state & 1) == 0) {
    ans = max(ans, go(index+1, state>>1) + 1);
if (i != n-1 && j != m-1 && (state & 1) == 0 && (state & 2) == 0) {
    if (a[i][j+1] == '.' && a[i+1][j] == '.' && a[i+1][j+1] == '.') {
        ans = max(ans, go(index+2, (state>>2) | (1<<(m-1)) | (1<<(m-1))
(2))) + (16);
```

4블럭

https://www.acmicpc.net/problem/14389

• 소스: http://codeplus.codes/765f67db770548799f71e1c893f99726

- 윤호는 L-모양으로 생긴 타일을 매우 많이 가지고 있다.
- 윤호는 동혁이의 체스판에 다음 조건을 만족시키면서 타일을 체스판 위에 올려 놓으려고 한다.
 - 모든 타일은 회전 시킬 수 있다. (90, 180, 270도)
 - 모든 타일은 체스판 위의 세 칸을 덮어야 한다.
 - 타일은 겹치면 안된다.
 - 말이 이미 올려져있는 칸은 타일이 덮을 수 없다.
 - 타일의 꼭지점 칸(두 정사각형과 붙어있는 칸)은 체스판의 검정 칸을 덮어야 한다.
- 윤호가 놓을 수 있는 타일의 최대 개수를 구하는 문제
- 체스판의 크기: $R \times C$ ($1 \le R \le 4, 1 \le C \le 47$)

```
// BW
// W.
if (j+1 < m \&\& i+1 < n) {
    if ((state&2) == 0 && a[i][j+1] == '.' && a[i+1][j] == '.') {
        ans = max(ans, go(index+2, (state>>2) | (1<<(m-2))) + 1);
// WB
// .W
if (j+1 < m \&\& i+1 < n) {
    if ((state&2) == 0 && a[i][j+1] == '.' && a[i+1][j+1] == '.') {
        ans = max(ans, go(index+2, (state>>2) | (1<<(m-1))) + 1);
```

```
// .W
// WB
if (j-1) = 0 \&\& i+1 < n {
    if ((state&(1<<(m-1))) == 0 && a[i+1][j-1] == '.' && a[i+1][j] == '.') {
        ans = max(ans, go(index+1, (state>>1) | (1<<(m-1)) | (1<<(m-2))) + 1);
// W.
// BW
if (i+1 < n \&\& j+1 < m) {
    if (a[i+1][j] == '.' && a[i+1][j+1] == '.') {
        ans = max(ans, go(index+2, (state>>2) | (1<<(m-1)) | (1<<(m-2))) + 1);
```

https://www.acmicpc.net/problem/12960

• 소스: http://codeplus.codes/bed3885b9945440f812b421629c6f4ad

- N \times M 크기의 바닥이 있다. (1 \leq N, M \leq 10)
- 바닥을 직사각형 모양의 타일로 가득 채우려고 한다.
- 타일의 크기는 1×k (k는 임의의 양의 정수)
- 최소 타일 개수를 구하는 문제

- D[i][state] = i행의 상태가 state일 때, 타일의 최소 개수
- D[i][state] = min(D[i-1][prev_state] + (i번 행에 새로 놓는 타일의 개수)

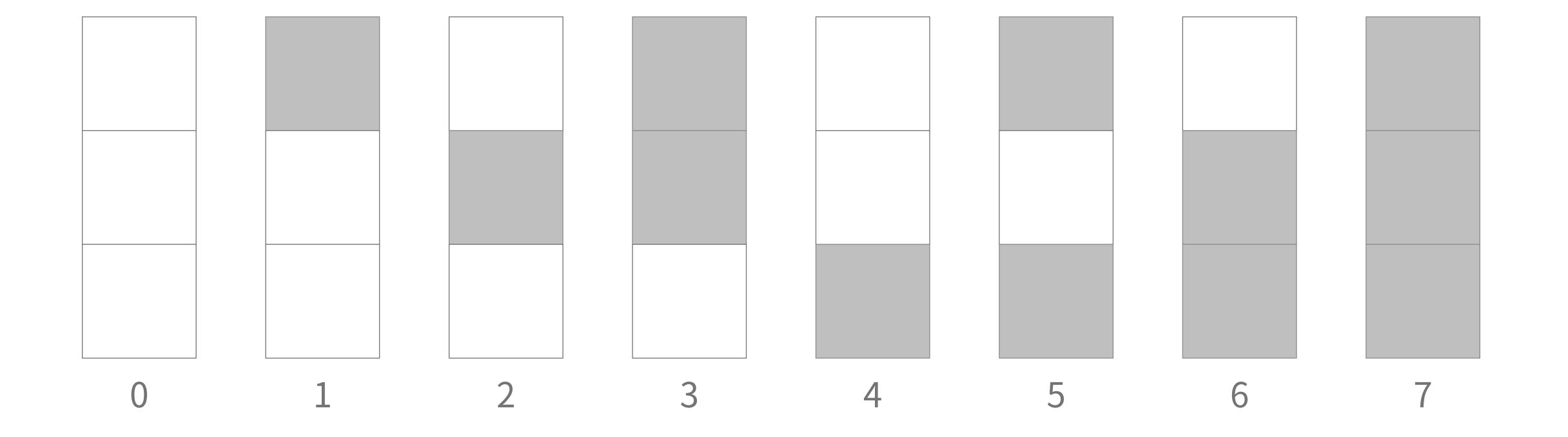
```
int cnt = 0; int last = -100;
// 0 : -, 1: |
for (int k=0; k<m; k++) {
    if (a[i][k] == '#') continue;
    if (cur & (1<<k)) {
        if (i-1 == 0) cnt++;
        else if ((prev & (1<<k)) == 0) cnt++;
        else if (a[i-1][k] == '#') cnt++;
    } else {
        if (last+1 != k) cnt++;
       last = k;
```

https://www.acmicpc.net/problem/14390

• 소스: http://codeplus.codes/3e51d3d9a81944a7a9d95b787453025a

행렬과 다이나믹

- $3 \times N$ 을 1×2 , 2×1 로 채우는 방법의 수 $(1 \le N \le 10^{18})$
- D[i][j] = 3×i를 채우는 방법의 수, i열의 상태는 j
- 마지막에 올 수 있는 가능한 경우의 수 (회색: 채워져 있는 칸)



•
$$D[i][0] = D[i-1][7]$$

•
$$D[i][1] = D[i-1][6]$$

•
$$D[i][2] = D[i-1][5]$$

•
$$D[i][4] = D[i-1][3]$$

•
$$D[i][3] = D[i-1][4] + D[i-1][7]$$

•
$$D[i][6] = D[i-1][1] + D[i-1][7]$$

•
$$D[i][5] = D[i-1][2]$$

•
$$D[i][7] = D[i-1][0] + D[i-1][3] + D[i-1][6]$$

```
[ D[i][0] ]
         [ 0 0 0 0 0 0 1 ] [ D[i-1][0] ]
            [ 0 0 0 0 0 0 1 0 ] [ D[i-1][1] ]
[ D[i][1] ]
[ D[i][2] ]
            [ 0 0 0 0 0 1 0 0 ] [ D[i-1][2] ]
[ D[i][3] ]
            [ 0 0 0 0 1 0 0 1 ] [ D[i-1][3] ]
          = [ 0 0 0 1 0 0 0 0 ] \times [ D[i-1][4] ]
[ D[i][4] ]
[ D[i][5] ]
                                 [ D[i-1][5] ]
             \bigcirc \bigcirc
                         0 0
                 1 0
                      \odot
                       \odot
[ D[i][6] ]
                       0 0 1 ] [ D[i-1][6] ]
             0 1 0 0
                      \odot
```

https://www.acmicpc.net/problem/13976

• 소스: http://codeplus.codes/593bc03934d545feae8b152bf5ab2354

- A_0, A_1, x, y 가 주어졌을 때, A_N 을 구하는 문제
- $A_N = x \times A_{N-1} + y \times A_{N-2}$
- $1 \le x, y \le 99, 0 \le N < 10^8$

•
$$A_N = x \times A_{N-1} + y \times A_{N-2}$$

$$\bullet \begin{pmatrix} A_N \\ A_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_{N-1} \\ A_{N-2} \end{pmatrix}$$

•
$$1 \le x, y \le 99, 0 \le N < 10^8$$

•
$$A_N = x \times A_{N-1} + y \times A_{N-2}$$

$$\bullet \begin{pmatrix} A_N \\ A_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_{N-1} \\ A_{N-2} \end{pmatrix}$$

$$\bullet \begin{pmatrix} A_N \\ A_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_{N-1} \\ A_{N-2} \end{pmatrix}$$

•
$$1 \le x, y \le 99, 0 \le N < 10^8$$

•
$$A_N = x \times A_{N-1} + y \times A_{N-2}$$

$$\bullet \ \begin{pmatrix} A_N \\ A_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_{N-1} \\ A_{N-2} \end{pmatrix}$$

$$\bullet \begin{pmatrix} A_N \\ A_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_{N-1} \\ A_{N-2} \end{pmatrix}$$

$$\bullet \begin{pmatrix} A_N \\ A_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{N-1} \times \begin{pmatrix} A_1 \\ A_0 \end{pmatrix}$$

•
$$1 \le x, y \le 99, 0 \le N < 10^8$$

https://www.acmicpc.net/problem/14440

• 소스: http://codeplus.codes/144e71630e534a9eb56991aff493a231

- $A_N = x \times A_{N-1} + y \times A_{N-2}$
- 항상 이전 두 개의 값에 의존하기 때문에, 두 개을 이용해서 주기를 찾을 수 있다.

https://www.acmicpc.net/problem/14440

•
$$x = 9$$
, $y = 4$, $A_0 = 51$, $A_1 = 33$

• 51, 33, 1, 41, 73, 21, 81, 13, 41, 21, 53, 61, 61, 93, 81, 1, 33, 1, 41, 73, 21, 81

•
$$x = 9$$
, $y = 4$, $A_0 = 51$, $A_1 = 33$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
51	33	1	41	73	21	81	13	41	21	53	61	61	93	81	1	33	1	41	73	21	81	13	41	21

https://www.acmicpc.net/problem/14440

•
$$x = 9$$
, $y = 4$, $A_0 = 51$, $A_1 = 33$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	. 33																							

주기 = 15

https://www.acmicpc.net/problem/14440

• 소스: http://codeplus.codes/1d8f46acc09d4a28a3843da773a563c7