# 다이나믹프로그래밍 3 (도전)

최백준 choi@startlink.io

- $N(1 \le N \le 2,000)$ 개의 음 아닌 정수들이 있다
- 이들 중 몇 개의 정수를 선택하여 나열하면 등차수열을 만들 수 있다
- 예를 들어 4, 3, 1, 5, 7이 있을 때 1, 3, 5, 7을 선택하여 나열하면 등차수열이 된다
- 이와 같이 했을 때, 등차수열의 길이가 최대 얼마까지 가능한지 알아내시오.

https://www.acmicpc.net/problem/1994

• D[i][j] = A[j]-A[i]를 공차로 하면서 만들 수 있는 가장 큰 등차수열의 길이

- D[i][j] = D[j][next] + 1 (next가 있는 경우, a[next] a[j] == a[j] a[i])
- next는 이분 탐색을 이용해서 구할 수 있다.

https://www.acmicpc.net/problem/1994

• 소스: http://codeplus.codes/3c0e616f319440e9afd182cb92790f9f

https://www.acmicpc.net/problem/1947

• N명의 사람이 서로 선물을 교환한다. 이 때, 자기 자신의 선물을 받는 경우는 없다.

- N명의 사람이 서로 선물을 교환한다. 이 때, 자기 자신의 선물을 받는 경우는 없다.
- N번째 사람이 i번 사람의 선물을 받고, i번 사람이 N번 사람의 선물을 받은 경우
  - 남은 사람의 수는 N-2명이기 때문에
  - D[N-2]
- i번 사람이 N번 사람의 선물을 받았는데, N번 사람이 다른 사람의 선물을 받은 경우
  - 남은 사람의 수는 N-1명이기 때문에,
  - D[N-1]

- N명의 사람이 서로 선물을 교환한다. 이 때, 자기 자신의 선물을 받는 경우는 없다.
- N번째 사람이 i번 사람의 선물을 받고, i번 사람이 N번 사람의 선물을 받은 경우
  - 남은 사람의 수는 N-2명이기 때문에
  - D[N-2]
- i번 사람이 N번 사람의 선물을 받았는데, N번 사람이 다른 사람의 선물을 받은 경우
  - 남은 사람의 수는 N-1명이기 때문에,
  - D[N-1]
- 가능한 i번 사람의 수는 N-1명이기 때문에 D[N] = (N-1)×(D[N-1]+D[N-2])

https://www.acmicpc.net/problem/1947

• 이 수열은 완전 순열 (Complete Permutation) 또는 교란 (Dearrangement) 이라고도 한다.

https://www.acmicpc.net/problem/1947

• 소스: http://codeplus.codes/b141c1853f2843dbbfac56ce8a7d8bcd

- 1부터 T(1≤T≤200)까지의 범위에 있는 수들이 총 A개 있다
- 이들 중 K개를 골라서 집합을 만들 때, 가능한 집합의 개수를 세려 한다
- 단, K의 범위는  $1 \le S \le K \le B \le A$ 로 한다
- 즉, 두 정수 S, B를 입력받아서 K=S일 경우, …, K=B일 경우의 집합의 개수를 모두 더하려고 한다.

- T = 3, 수 = 1, 1, 2, 2, 3인 경우
- K=1:{1},{2},{3}
- K=2: {1, 1}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 2}, {2, 3}
- $K=3: \{1, 1, 2\} \{1, 1, 3\} \{1, 2, 2\} \{1, 2, 3\} \{2, 2, 3\}$
- $K=4: \{1, 2, 2, 3\} \{1, 1, 2, 2\} \{1, 1, 2, 3\}$
- K=5: {1, 1, 2, 2, 3}
- S = 2, B = 3이면 정답은 10

- D[T][K] = 1부터 T까지의 수를 이용해서 크기가 K인 집합을 만드는 경우의 수
- D[T][K] += D[T-1][K-L] (L은 T를 몇 번 이용할 건지를 나타냄)

https://www.acmicpc.net/problem/2092

• 소스: http://codeplus.codes/bfaecc2cf89548139853e72b36a2fa5f

#### 땔린드롬경로

- N $\times$ N 행렬에 0부터 9까지 숫자가 적혀있다. N $\leq$  20
- 임의의 한 칸에서 시작해서 매번 인접(상하좌우, 대각선)한 칸 중 하나로 이동해서
- 총 L개의 칸을 이동한다. L ≤ 20
- 경로에 적힌 수를 나열한 것이 팰린드롬이 되는 경로의 개수를 구하는 문제

# 팰린드롬 경로

- D[N][x1][y1][x2][y2] = (x1,y1)에서 시작해서 (x2,y2)에서 도착하는 길이가 N인 팰린드롬 경로의 개수
- 길이가 1인 팰린드롬 경로
  - D[N][x][y][x][y] = 1
- 자기 자신은 1이기 때문
- 길이가 2인 팰린드롬 경로
  - D[N][x1][y1][x2][y2] = (A[x1][y1] == A[x2][y2])
  - 이때, (x1,y1)에서 (x2,y2)로 이동할 수 있어야 함

# 팰린드롬 경로

- D[N][x1][y1][x2][y2] += D[N-2][x3][y3][x4][y4]
  - 필요한 조건
  - A[x1][y1] == A[x2][y2]
  - (x1,y1), (x3,y3)은 인접해야 함
  - (x2,y2), (x4,y4)도 인접해야 함

# 팰린드롬경로

https://www.acmicpc.net/problem/2172

• 소스: http://codeplus.codes/c5ca75218c6745c68930df41c0c2ed6c

#### 팰린<u>드롬</u> 보행

- 정점 N개로 이루어진 그래프가 주어지고, 간선에는 알파벳 소문자가 하나씩 쓰여 있다.
- 0번에서 1번으로 가는 그래프의 보행 중에서 길이가 가장 짧은 것을 찾는 문제
- 보행: 같은 정점, 간선을 여러 번 방문할 수 있는 경로
- N ≤ 20

- 간선으로 만들 수 있는 팰린드롬은 ab......ba 와 같은 형식이다.
- 꼭 첫 번째 글자와 마지막 글자가 같아야 한다.
- 첫 글자와 마지막 글자가 없어도 팰린드롬이 되어야 한다.

https://www.acmicpc.net/problem/12950

• 처음으로 골라야 하는 두 정점 a, b는  $0 \to a$ , b  $\to 1$  간선이 있고, 두 간선에 쓰여 있는 글자가 같아야 한다

- D[i][j] = i번 정점에서 시작해서 j번 정점으로 가는 팰린드롬 경로의 최소 길이
- i = j 이면 0
- i와 j 사이에 간선이 있으면 1

https://www.acmicpc.net/problem/12950

- D[i][j] = i번 정점에서 시작해서 j번 정점으로 가는 팰린드롬 경로의 최소 길이
- 이제 두 정점 a, b를 찾는다

•  $i \rightarrow a \rightarrow ... \rightarrow b \rightarrow j$ 

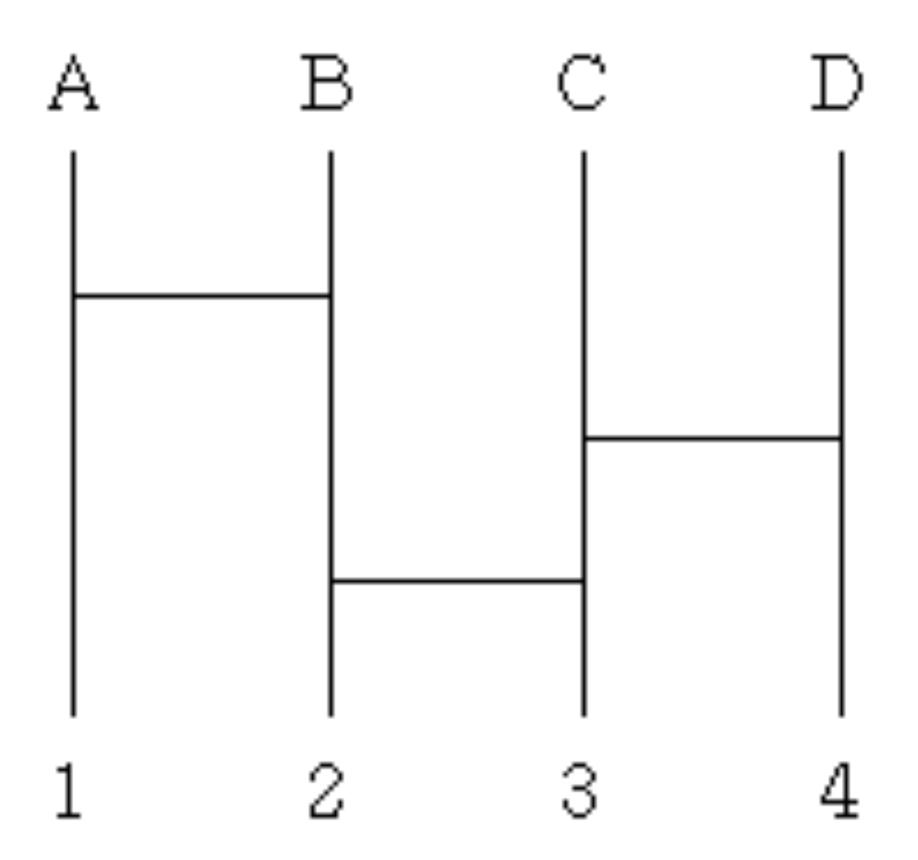
• 이렇게 되면 D[a][b] + 2 가 최소 길이가 된다

# 팰린<u>드</u>롬 보행

https://www.acmicpc.net/problem/12950

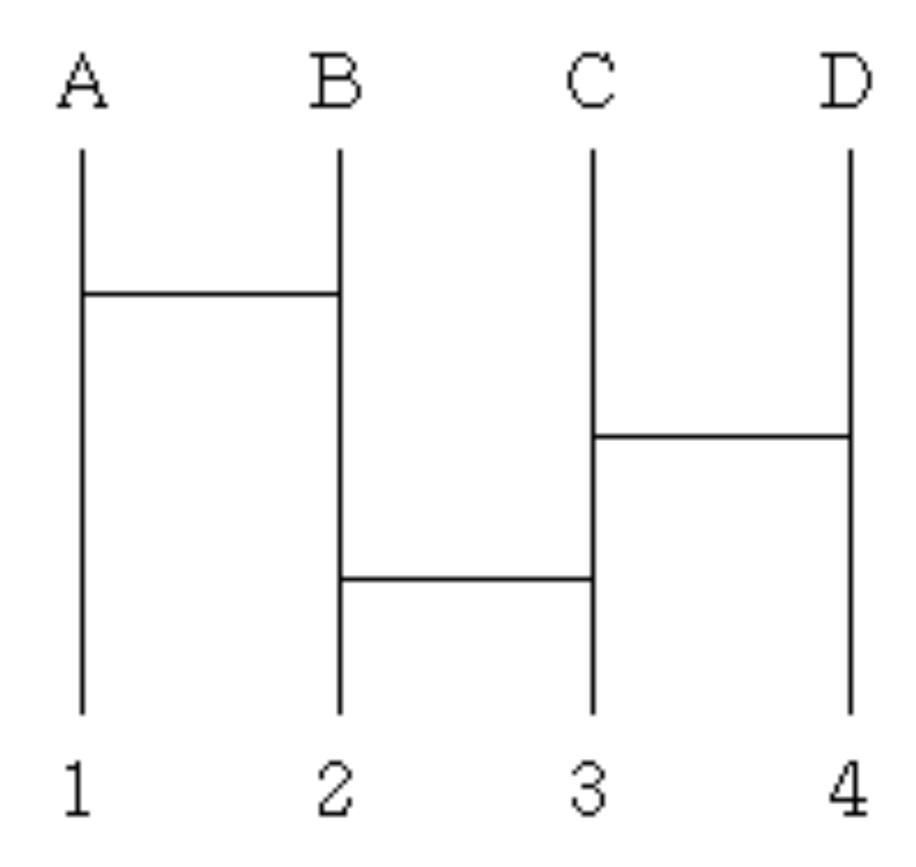
• 소스: http://codeplus.codes/2539bfcd377c4f60b1a038052aaeeda6

- 세로선은 N개, 가로선은 M개
- a번째 위치에서 b번째 위치로 갈 수 있게 하기 위해
- 조작하는 최소 비용
- 가로선을 지우는건 비용 X
- 그리는건 비용 Y



https://www.acmicpc.net/problem/2008

• D[i][j] = i번째 가로선 까지 고려했을 때 start에서 j를 가는 최소 비용



```
for (int i=0; i<m; i++) {
    if (i == start) {
        d[0][i] = 0;
    } else {
        d[0][i] = abs(start - i) * add;
    }
}</pre>
```

- 이전에 있던 위치를 k라고 했을 때
- j == k 인데, 가로선이 j나 j+1에 위치한 경우

```
if (k == j && (a[i] == k || a[i]+1 == k)) {
    if (d[i][j] > d[i-1][k] + del) {
        d[i][j] = d[i-1][k] + del;
    }
}
```

- 이전에 있던 위치를 k라고 했을 때
- 가로선이 j와 k 사이에 위치한 경우

```
else if ((k <= a[i] && a[i] <= j-1) || (j <= a[i] && a[i] <= k-1))
{
    if (d[i][j] > d[i-1][k] + (abs(k-j)-1)*add) {
        d[i][j] = d[i-1][k] + (abs(k-j)-1)*add;
    }
}
```

- 이전에 있던 위치를 k라고 했을 때
- 가로선이 j와 k 사이에 위치하지 않은 경우

```
else {
    if (d[i][j] > d[i-1][k] + abs(k-j)*add) {
        d[i][j] = d[i-1][k] + abs(k-j)*add;
    }
}
```

https://www.acmicpc.net/problem/2008

• 소스: http://codeplus.codes/5c8d7d57d736405e8019ccfc09dd3792

## 같은 탑

- N개의 조각이 주어졌을 때, 두 개의 탑을 만든다  $N \le 50$
- 이때, 두 탑의 높이를 같게 만드려고 한다.
- 가능한 탑의 높이 중 최대값을 구하는 문제
- 모든 조각의 높이의 합은 500,000을 넘지 않는다

#### 같은 탑

- 모든 조각의 높이의 합은 500,000을 넘지 않는다
- 즉, 두 탑의 최대 높이는 500,000/2 = 250,000 이다.

https://www.acmicpc.net/problem/1126

• 각각의 조각에 대해서 다음과 같은 세 가지를 결정할 수 있다.

- 첫 번째 탑에 조각을 올려놓는다
- 두 번째 탑에 조각을 올려놓는다
- 조각을 탑 위에 올려놓지 않는다

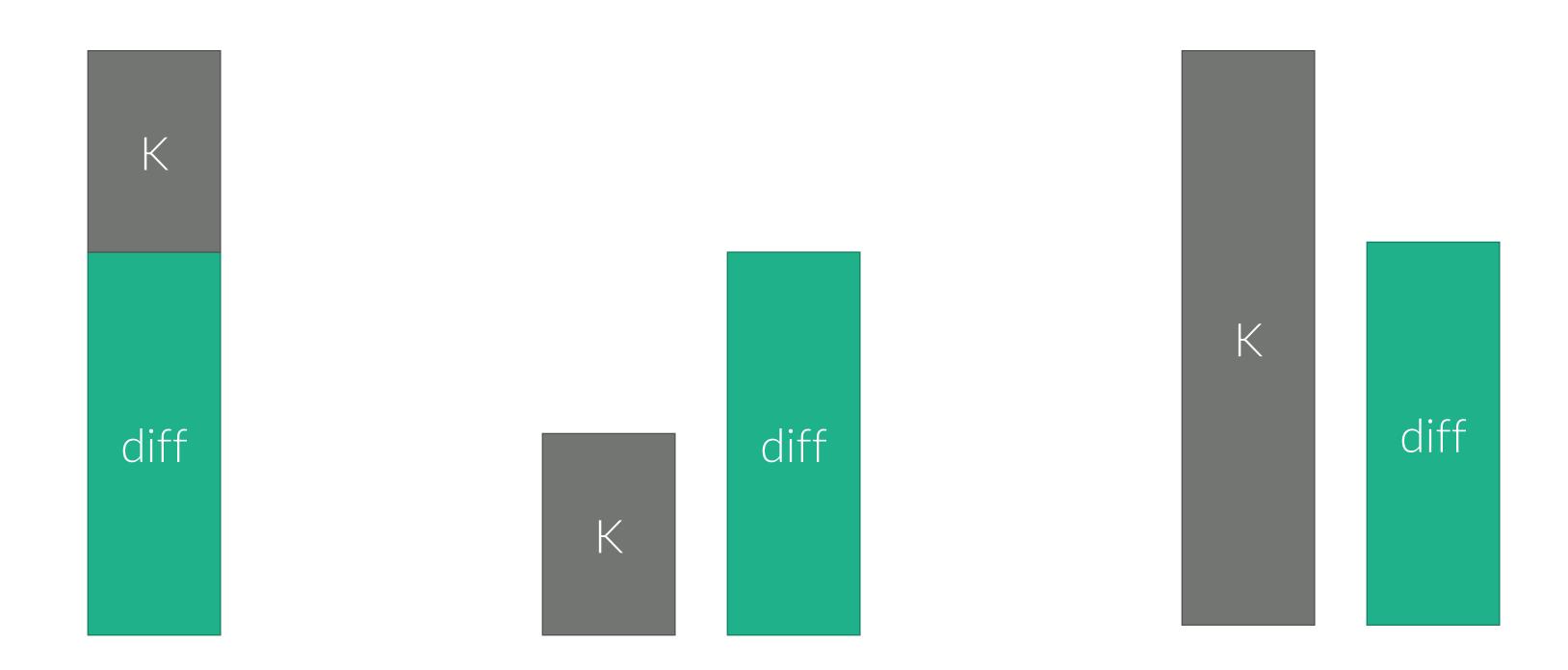
https://www.acmicpc.net/problem/1126

• 문제를 일반화 할 수 있다

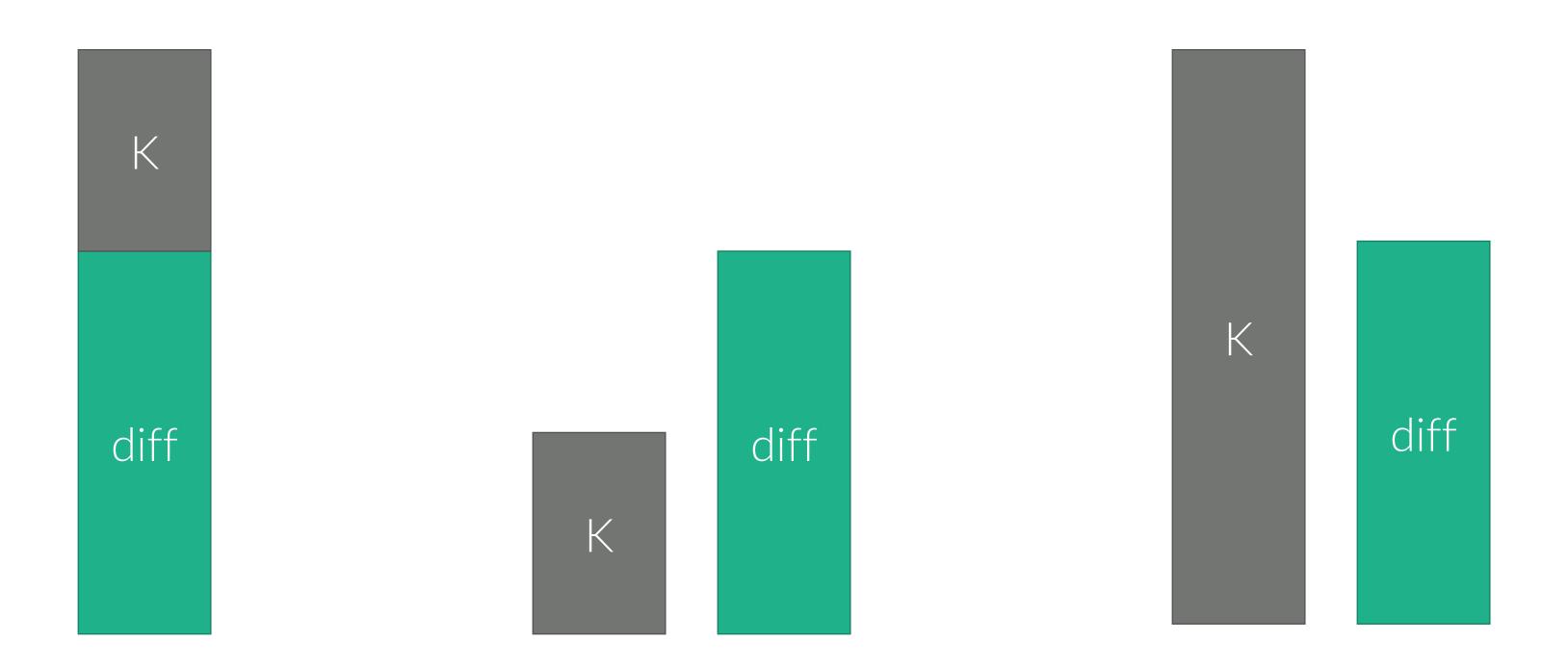
- 탑 하나의 높이는 diff이고, 또 다른 탑의 높이는 0이다.
- 여기서, 조각을 적절히 놓아서 만들 수 있는 가장 큰 두 탑의 높이
- 이 때, 두 탑의 높이는 같아야 한다.

• D[N][diff] = 조각이 N개 남았고, 높은 탑의 높이가 diff

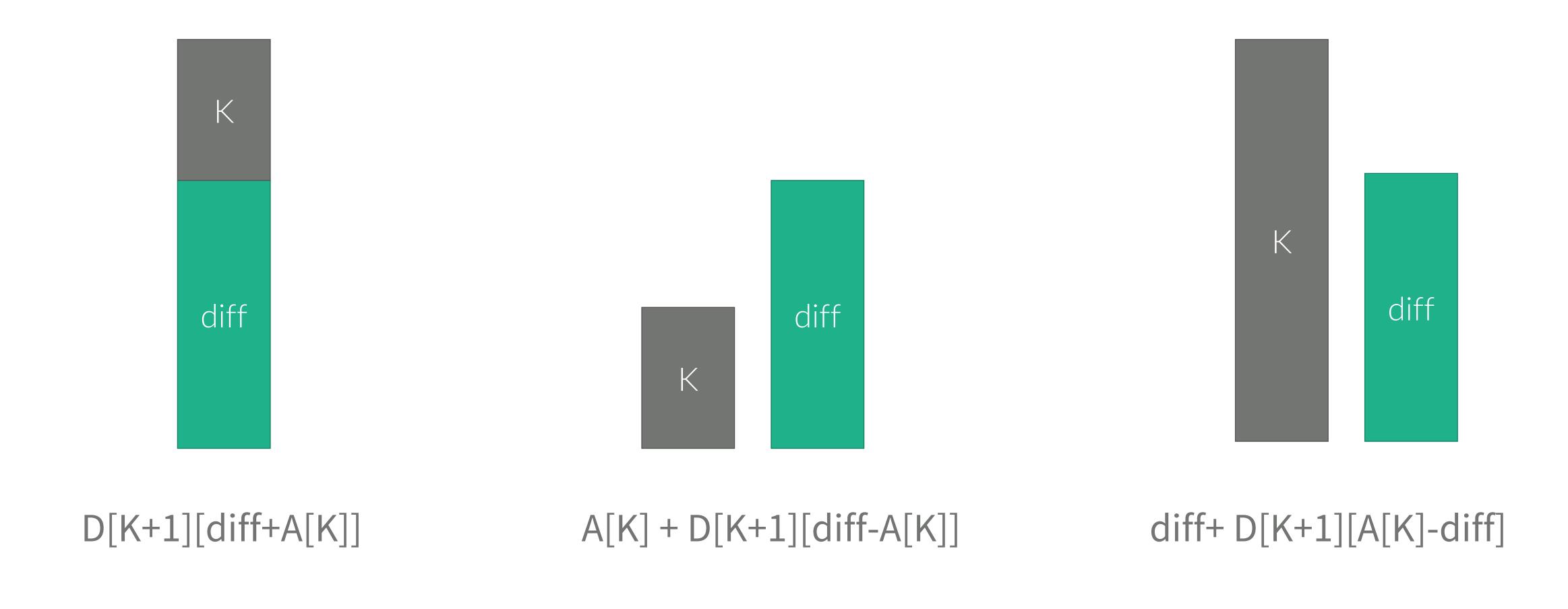
- 탑 하나의 높이는 diff이고, 또 다른 탑의 높이는 0이다.
- 조각의 높이는 K이다.



- 블럭을 diff인 탑에 놓는 경우
- 블럭을 0인 탑에 놓는 경우



## 같은 탑



https://www.acmicpc.net/problem/1126

• 소스: http://codeplus.codes/98bcc4eb1bbc42449b41333ae18c2181

## 경로찾기

- N×M 크기의 직사각형 도시에 오락실이 C개 있다.
- (1, 1)에서 출발해서 (N, M)에 도착하는 방법 중에서 오락실을 0개, 1개, …, C개 방문하고 도착하는 경우의 수를 구하는 문제
- 오락실 번호는 증가하는 순으로만 갈 수 있다.
- (r, c)에서 갈 수 있는 칸은 (r+1, c), (r, c+1) 이다.

## 경로 찾기

https://www.acmicpc.net/problem/1513

• D[i][j][k][len] = (1, 1)에서 (i, j)에 오락실 len개를 방문해서도착하는 방법의 수 (마지막으로 방문한 오락실: k)

#### 경로찾기

- D[i][j][k][len] = (1, 1)에서 (i, j)에 오락실 len개를 거쳐서 도착하는 방법의 수 (마지막으로 방문한 오락실: k)
- (i, j)가 오락실인 경우
- d[i-1][j][0][len-1] + d[i][j-1][0][len-1] + d[i-1][j][1][len-1] +
  d[i][j][1][len-1] + ... + d[i-1][j][k-1][len-1] + d[i][j-1][k1][len-1]

#### 경로 찾기

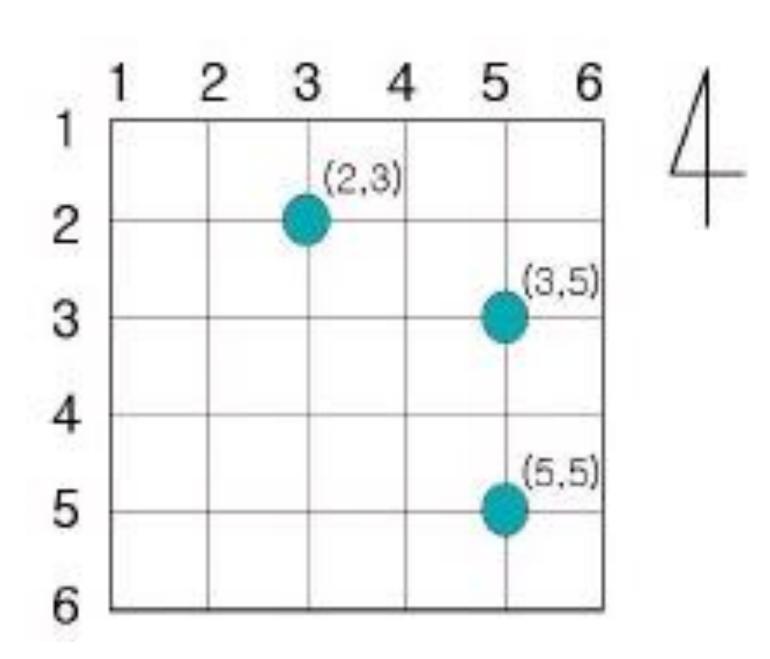
- D[i][j][k][len] = (1, 1)에서 (i, j)에 오락실 len개를 거쳐서 도착하는 방법의 수 (마지막으로 방문한 오락실: k)
- (i, j)가 오락실이 아닌 경우
- d[i-1][j][k][len] + d[i][j-1][k][len]

# 경로 찾기

https://www.acmicpc.net/problem/1513

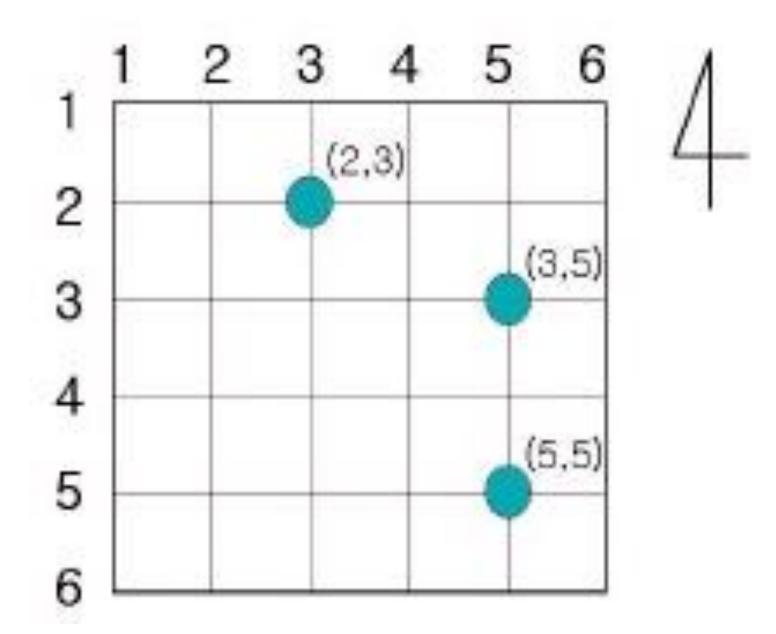
• 소스: http://codeplus.codes/a85dfed2f7c0413da6c6a46d81b9f5b8

- N개의 동서방향 도로, 남북방향 도로가 있다.  $5 \le N \le 1,000$
- 경찰차 1은 (1, 1), 경찰차 2는 (N, N)에 있다.
- 사건이 일어나면 두 경찰차 중 하나가 이동해야 한다.
- 이동하는 거리의 최소값을 구하는 문제
- 사건의 발생 순서가 (3, 5), (5, 5), (2, 3) 라면 정답 = 9

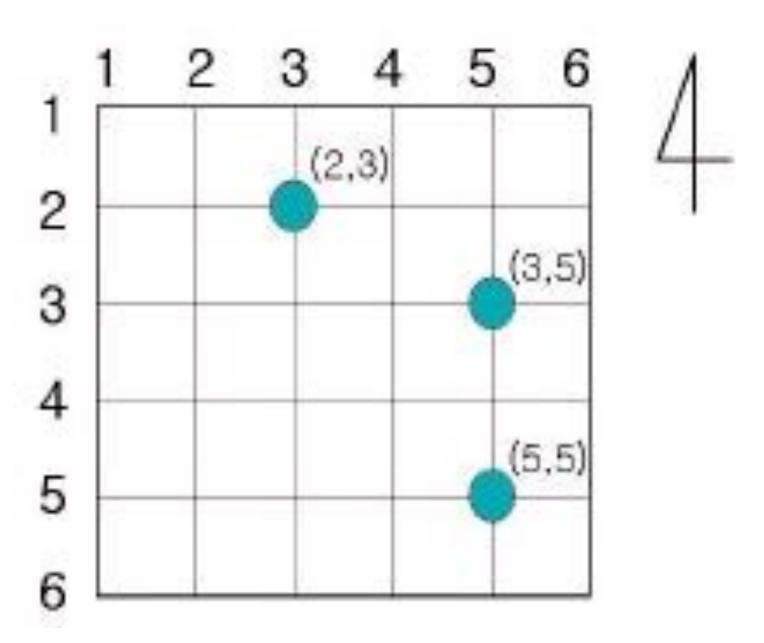


https://www.acmicpc.net/problem/2618

• D[i][j] = 1번 경찰차가 i, 2번 경찰차가 j에 있을 때, 이동하는 거리의 최소값



- D[i][j] = 1번 경찰차가 i, 2번 경찰차가 j에 있을 때, 이동하는 거리의 최소값
- i와 j중에서 최대값은 마지막으로 발생한 사건의 번호이다



- D[i][j] = 1번 경찰차가 i, 2번 경찰차가 j에 있을 때, 이동하는 거리의 최소값
- i와 j중에서 최대값은 마지막으로 발생한 사건의 번호이다
- 1번 경찰차가 i에 있을 때
  - 2번 경찰차가 i-1에 있는 경우
  - i-1이 아닌 다른 곳(j)에 있는 경우로 나눌 수 있다.

- D[i][j] = 1번 경찰차가 i, 2번 경찰차가 j에 있을 때, 이동하는 거리의 최소값
- 1번 경찰차가 i에 있을 때
- 1. 2번 경찰차가 i-1에 있는 경우 (D[i][i-1])
  - 1번 경찰차는 j에 있어야 한다.
- 2. 2번 경찰차가 i-1이 아닌 다른 곳 (j)에 있는 경우 (D[i][j])
  - 1번 경찰차는 반드시 i-1에 있어야 한다.

- D[i][j] = 1번 경찰차가 i, 2번 경찰차가 j에 있을 때, 이동하는 거리의 최소값
- 1번 경찰차가 i에 있을 때
- 1. 2번 경찰차가 i-1에 있는 경우 (D[i][i-1])
  - 1번 경찰차는 j에 있어야 한다. (D[j][i-1])
- 2. 2번 경찰차가 i-1이 아닌 다른 곳 (j)에 있는 경우 (D[i][j])
  - 1번 경찰차는 반드시 i-1에 있어야 한다. (D[i-1][j])

- D[i][j] = 1번 경찰차가 i, 2번 경찰차가 j에 있을 때, 이동하는 거리의 최소값
- 1번 경찰차가 i에 있을 때
- 1. 2번 경찰차가 i-1에 있는 경우 (D[i][i-1])
  - 1번 경찰차는 j에 있어야 한다. (D[j][i-1] + dist[j][i])
- 2. 2번 경찰차가 i-1이 아닌 다른 곳 (j)에 있는 경우 (D[i][j])
  - 1번 경찰차는 반드시 i-1에 있어야 한다. (D[i-1][j] + dist[i-1][i])

https://www.acmicpc.net/problem/2618

- D[i][j] = 1번 경찰차가 i, 2번 경찰차가 j에 있을 때, 이동하는 거리의 최소값
- 1번 경찰차가 i에 있을 때
- 1. 2번 경찰차가 i-1에 있는 경우 (D[i][i-1])
  - 1번 경찰차는 j에 있어야 한다. (D[j][i-1] + dist[j][i])
- 2. 2번 경찰차가 i-1이 아닌 다른 곳 (j)에 있는 경우 (D[i][j])
  - 1번 경찰차는 반드시 i-1에 있어야 한다. (D[i-1][j] + dist[i-1][i])

• 2번 경찰차에 대해서도 비슷한 처리를 하면 된다.

https://www.acmicpc.net/problem/2618

• 소스: http://codeplus.codes/bf154207d1c5421482817af7ab5e89c4

- 막대 N개를 가지고 있다. 이 막대를 이용해 만들 수 있는 가장 큰 직사각형의 넓이를 구하는 문제
- $4 \le N \le 16$ , 막대의 길이  $\le 10$
- 가지고 있는 막대의 길이가 1, 3, 3, 4, 5, 7라면
- 3 두 개와 5, 그리고 1과 4를 붙여 5를 만들면 3×5 크기의 직사각형을 만들 수 있다.

https://www.acmicpc.net/problem/1801

• D[i][L1][L2][L3][L4] = A[1]~A[i]의 막대를 이용해서 L1, L2, L3, L4를 만들 수 있는가?

- D[i][L1][L2][L3][L4] = 1
- if
- D[i-1][L1][L2][L3][L4] == 1 or
- D[i-1][L1-A[i]][L2][L3][L4] == 1 or
- D[i-1][L1][L2-A[i]][L3][L4] == 1 or
- D[i-1][L1][L2][L3-A[i]][L4] == 1 or
- D[i-1][L1][L2][L3][L4-A[i]] == 1

#### 60

# 직사각형 만들기

- 필요한 공간의 크기
- 16 × 80 × 80 × 80 × 80

- 가장 앞의 i는 의미가 없다.
- D[L1][L2][L3][L4] = L1, L2, L3, L4를 만들 수 있는가?

https://www.acmicpc.net/problem/1801

• L1 == L2, L3 == L4인 L1, L2, L3, L4 중에서 L1×L3의 최대값이 정답

- 소스 1: <a href="http://codeplus.codes/0d9a3ab22a1e402bb9e8a6430ce57c86">http://codeplus.codes/0d9a3ab22a1e402bb9e8a6430ce57c86</a>
- 소스 2: <a href="http://codeplus.codes/f058c4d68c604840bd2cda26258f405d">http://codeplus.codes/f058c4d68c604840bd2cda26258f405d</a>

- 크기가 N인 수열 S가 주어진다. 이 때, 한 개 이상을 선택했을 때, 선택한 수의 최대공약수가 1이 되는 것의 개수를 구하는 문제
- $1 \le N \le 100, 1 \le S[i] \le 100,000$

https://www.acmicpc.net/problem/1750

• D[N][G] = N번째 수 까지 있을 때, 최대 공약수가 G가 되는 것의 개수

- D[i][A[i]] = 1
- i번째를 선택하지 않는 경우
- i번째를 선택하는 경우

- D[i][A[i]] = 1
- i번째를 선택하지 않는 경우
  - D[i] += D[i-1][j]
- i번째를 선택하는 경우
  - D[i][gcd(j, A[i])] += D[i-1][j]

- 정답은?
- D[n][1]

https://www.acmicpc.net/problem/1750

• 소스: http://codeplus.codes/d5b71896c024461aaddcc56b39bd109e

- 사이클 그래프 C<sub>n</sub>이 주어졌을 때, 매칭의 개수를 구하는 문제
- 매칭: 공통 정점을 갖지 않는 간선의 집합

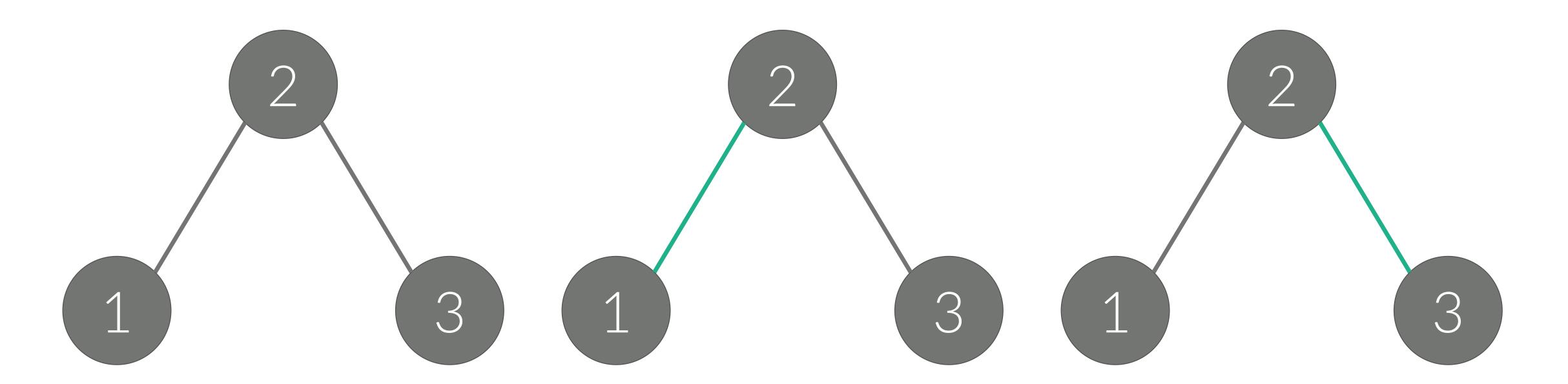
https://www.acmicpc.net/problem/3644

• 먼저, 직선 그래프에서 문제를 풀어보고, 매칭의 개수를 Fn이라고 한다.

•  $F_2 = 2$ 



- 먼저, 직선 그래프에서 문제를 풀어보고, 매칭의 개수를 Fn이라고 한다.
- $F_3 = 3$



• 
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

- 사이클 그래프  $C_n$  에서 매칭의 개수  $(L_n)$ 를 구해보자
- (n, 1) 간선을 사용하지 않는 경우: F<sub>n</sub>
- (n, 1) 간선을 사용하는 경우: F<sub>n-2</sub>
- $L_n = F_n + F_{n-2} = L_{n-1} + L_{n-2}$
- L<sub>n</sub> = Lucas Number

https://www.acmicpc.net/problem/3644

• 소스: http://codeplus.codes/cc5339bd6e91474d9fda3f4b3319cd16