RMQ 세그먼트 트리

최대 합

펜윅 트리

최백준 choi@startlink.io

누적합

누적합

Prefix Sum

- 수열 A[1], A[2], ⋯, A[N]이 있을 때
- A[i] + ⋯ + A[j]를 구하는 문제
- S[i] = A[1] + A[2] + ⋯ + A[i]

크기가 N

RMQ

min(A[i], ..., A[j])

$S[i]=S[i-1]+A[i]$

k = i ~ j

sum += A[k];

누적합 → O(N)

$S[i]=\underbrace{A[1]+\cdots+A[i-1]}_{S[i-1]}+A[i]$

누적합

Prefix Sum

- A[i] + ⋯ + A[j]를 구하는 문제

- S[j] = A[1] + A[2] + ⋯ + A[i-1] + A[i] + ⋯ + A[j]
- S[i-1] = A[1] + A[2] + ⋯ + A[i-1]
- S[j] – S[i-1] = A[i] + ⋯ + A[j]

S[i] = (1~i) 합

A[i] + ⋯ + A[j]

S[j] = A[1] + ⋯ + A[j]

− S[i-1] = A[1] + ⋯ + A[i-1]

A[i] + ⋯ + A[j]

구간 합 구하기 4

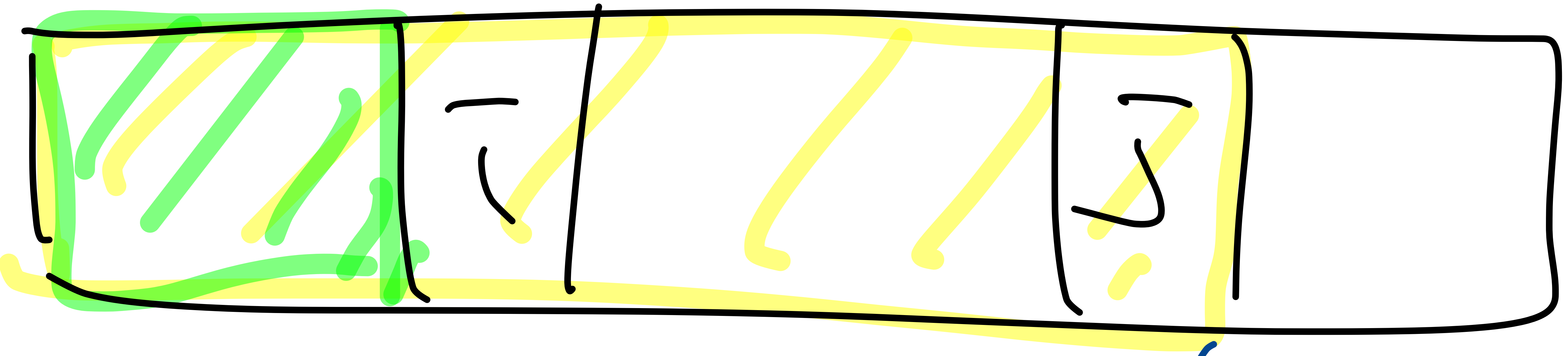
https://www.acmicpc.net/problem/11659

S[j] - S[i-1]

- 수 N개가 주어졌을 때, i번째 수부터 j번째 수까지 합을 구하는 문제

선처리 $\boxed{O(N)}$

쿼리 → $\boxed{O(1)}$



i~j 합

구간 합 구하기 4

https://www.acmicpc.net/problem/11659

- 소스: http://codeplus.codes/a14c5adf22764680872d18611ef53ddc

수들의 합 4

https://www.acmicpc.net/problem/2015

400억

- 크기가 N인 배열 A이 주어졌을 때, 부분합은 1 ≤ i ≤ j ≤ N인 정수 i, j에 대해 A[i] + ⋯ + A[j]
- N×(N+1)/2개의 부분합 중에서 합이 K인 것의 개수를 찾는 문제
- 1 ≤ N ≤ 200,000
- |K| ≤ 2,000,000,000
- -10,000 ≤ A[i] ≤ 10,000

i j O(1)

O(N) O(N) $O(N^2)$

수들의 합 4

https://www.acmicpc.net/problem/2015

- $A[i] + \cdots + A[j] == K$인 (i, j) 쌍의 개수를 찾는 문제이다.
- $O(N^2)$의 방법이 가능하지만, $N \leq 200{,}000$이다.

수들의 합 4

https://www.acmicpc.net/problem/2015

- A[i] + ⋯ + A[j] == K인 (i, j) 쌍의 개수를 찾는 문제이다.
- S[j] – S[i-1] == K인 (i, j) 쌍의 개수를 찾는 문제와 같다.
- 각각의 j에 대해서, i-1의 개수를 찾으면 된다.

[illegible]

수들의 합 4

4강

https://www.acmicpc.net/problem/2015

i	0	1	2	3	4
A[i]		2	-2	2	-2
S[i]	0	2	0	2	0

i-1

$A = 2, -2, 2, -2$

- K = 0인 경우
- S[j] – S[i-1] == K인 (i, j) 쌍의 개수를 찾는 문제
- j = 1: S[i-1] = S[j] – K = 2 (0개)
- j = 2: S[i-1] = S[j] – K = 0 (1개)
- j = 3: S[i-1] = S[j] – K = 2 (1개)
- j = 4: S[i-1] = S[j] – K = 0 (2개)

$O(N^2)$

2 -2 2 -2

$S[j] - S[i-1] = K = 0$

$2 - ? = 0$

수들의 합 4

$S[j] - S[i-1] = K$

https://www.acmicpc.net/problem/2015

답: $1+1+2$

i	0	1	2	3	4
A[i]		2	-2	2	-2
S[i]	0	2	0	2	0

- cnt[k] = S[i] == k인 i의 개수를 저장하면 된다.
- S[i] < 0이 될 수 있기 때문에, 배열을 사용할 수 없다.
- map을 사용한다.

cnt	0	2
	2	2

$2 - ? = 0$

$? = 2$

수들의 합 4

https://www.acmicpc.net/problem/2015

- 소스: http://codeplus.codes/09059c20ec554f08aac14afee3b39c30

나머지 합

https://www.acmicpc.net/problem/10986

- 수 N개 A[1], A[2], ..., A[N]이 주어진다.
- 연속된 부분 구간의 합이 M으로 나누어 떨어지는 구간의 개수를 구하는 문제
- 즉, A[i] + ... + A[j] (i ≤ j) 의 합이 M으로 나누어 떨어지는 (i, j) 쌍의 개수를 구해야 한다.

N $O(1)$ N $\cancel{O(N^2)}$

나머지 합

https://www.acmicpc.net/problem/10986

$S[j] - S[i-1] = K$

- S[i] = A[1] + ⋯ + A[i] 라고 하자
- A[i] + ⋯ + A[j] = S[j] – S[i-1]
- (A[i] + ⋯ + A[j]) % M = (S[j] – S[i-1]) % M

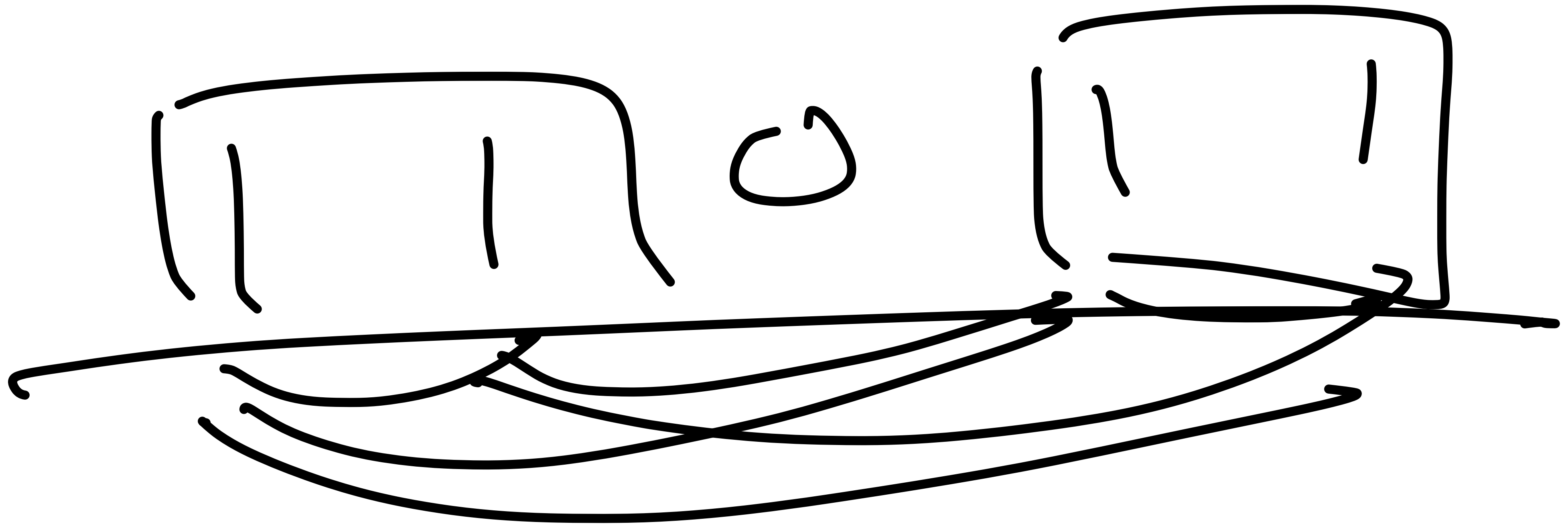
cnt[

- (A[i] + ⋯ + A[j]) % M == 0 인 것의 개수를 구해야 한다
- (S[j] – S[i-1]) % M == 0 와 같다
- 나눈 나머지가 0이 되려면
- S[j] % M == S[i-1] % M 이 되어야 한다

나머지 합

https://www.acmicpc.net/problem/10986

- 이 문제는
- S[j] % M == S[i-1] % M 이 되어야 한다
- 를 만족하는 (i, j) 쌍의 개수를 구하는 문제가 된다.
- cnt[k]를 S[i] % M == k 인 i의 개수라고 하면
- 0 ≤ k < M인 k에 대해서
- cnt[k] * (cnt[k] - 1) / 2 의 합을 구하면 된다.

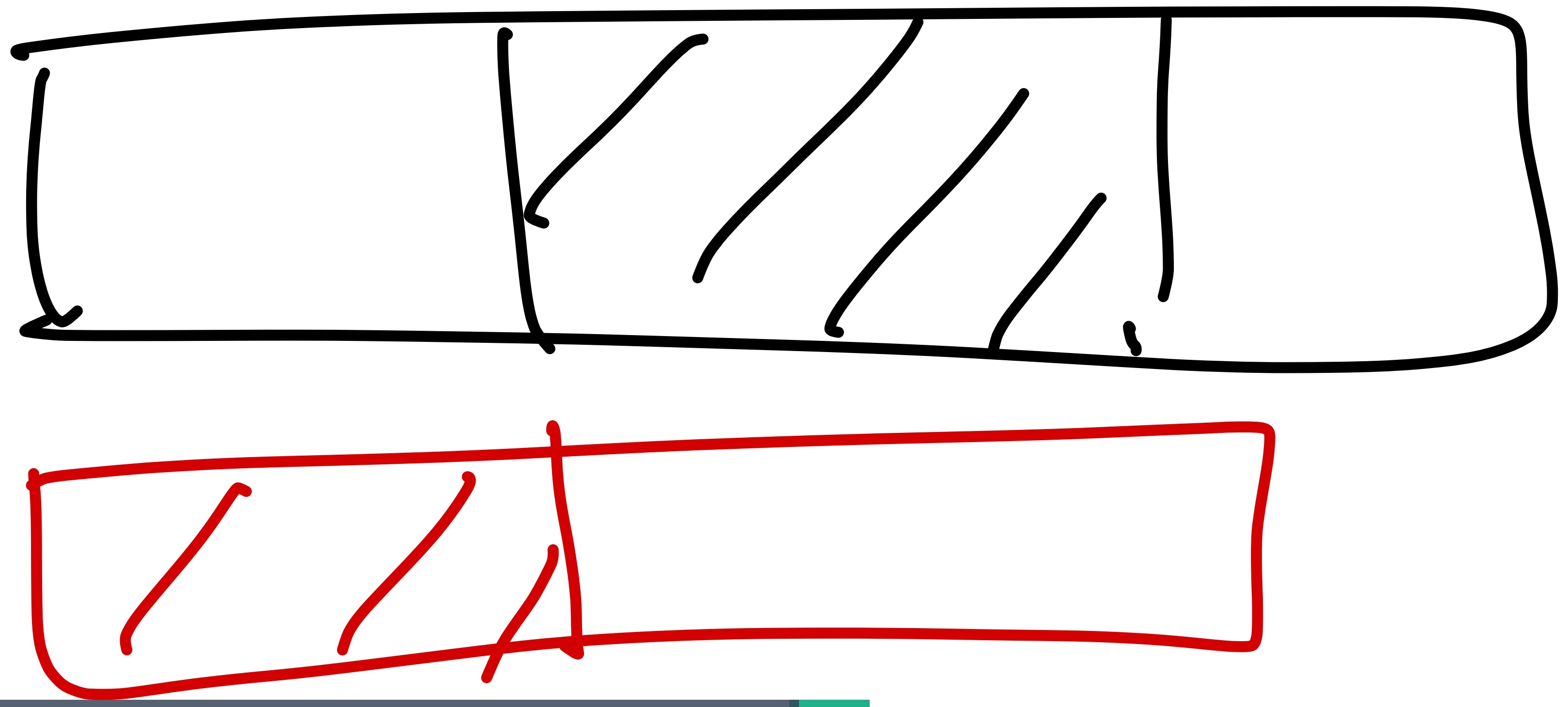


$\frac{4 \times 3}{2} = 6$

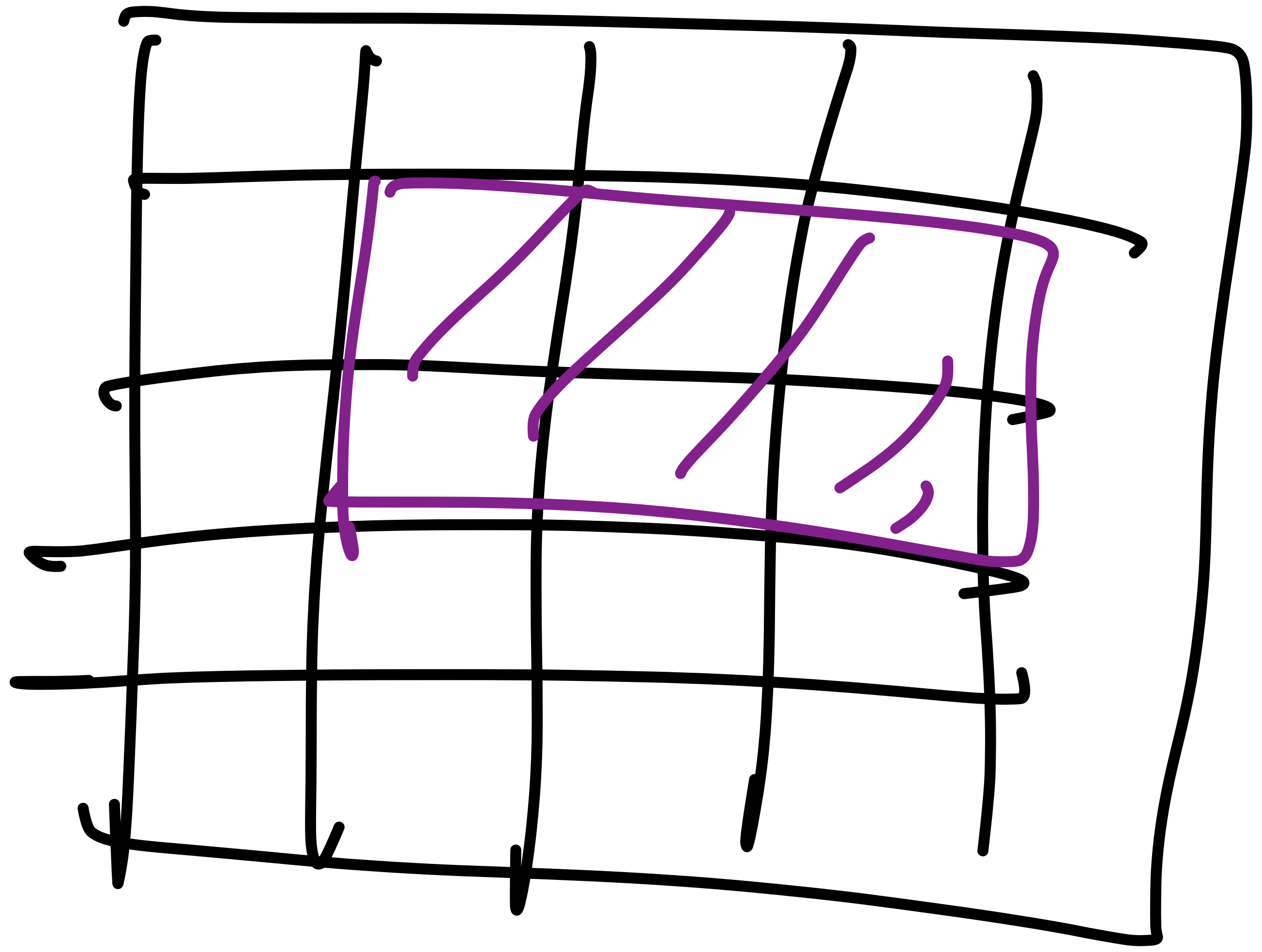
나머지 합

https://www.acmicpc.net/problem/10986

- 소스: http://codeplus.codes/f0d7a3e127b846b598ca2d0e4702a895



2차원 누적합



구간 합 구하기 5

https://www.acmicpc.net/problem/11660

- 2차원 배열에서 왼쪽 윗 칸이 (x1, y1), 오른쪽 아랫 칸이 (x2, y2) 인 직사각형에 들어있는 수의 합을 구하는 문제

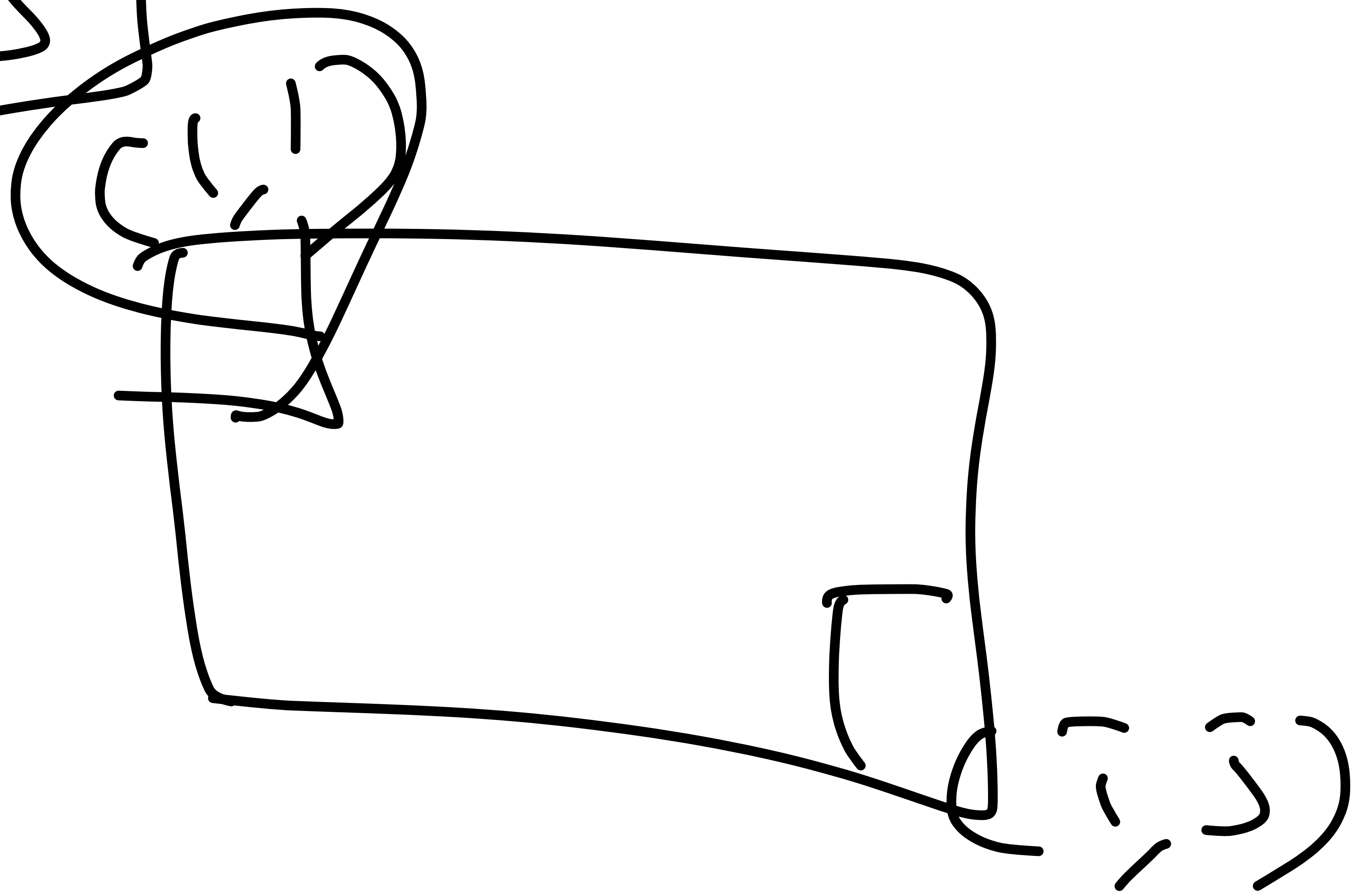
S[i] = S[i-1] + A[i]

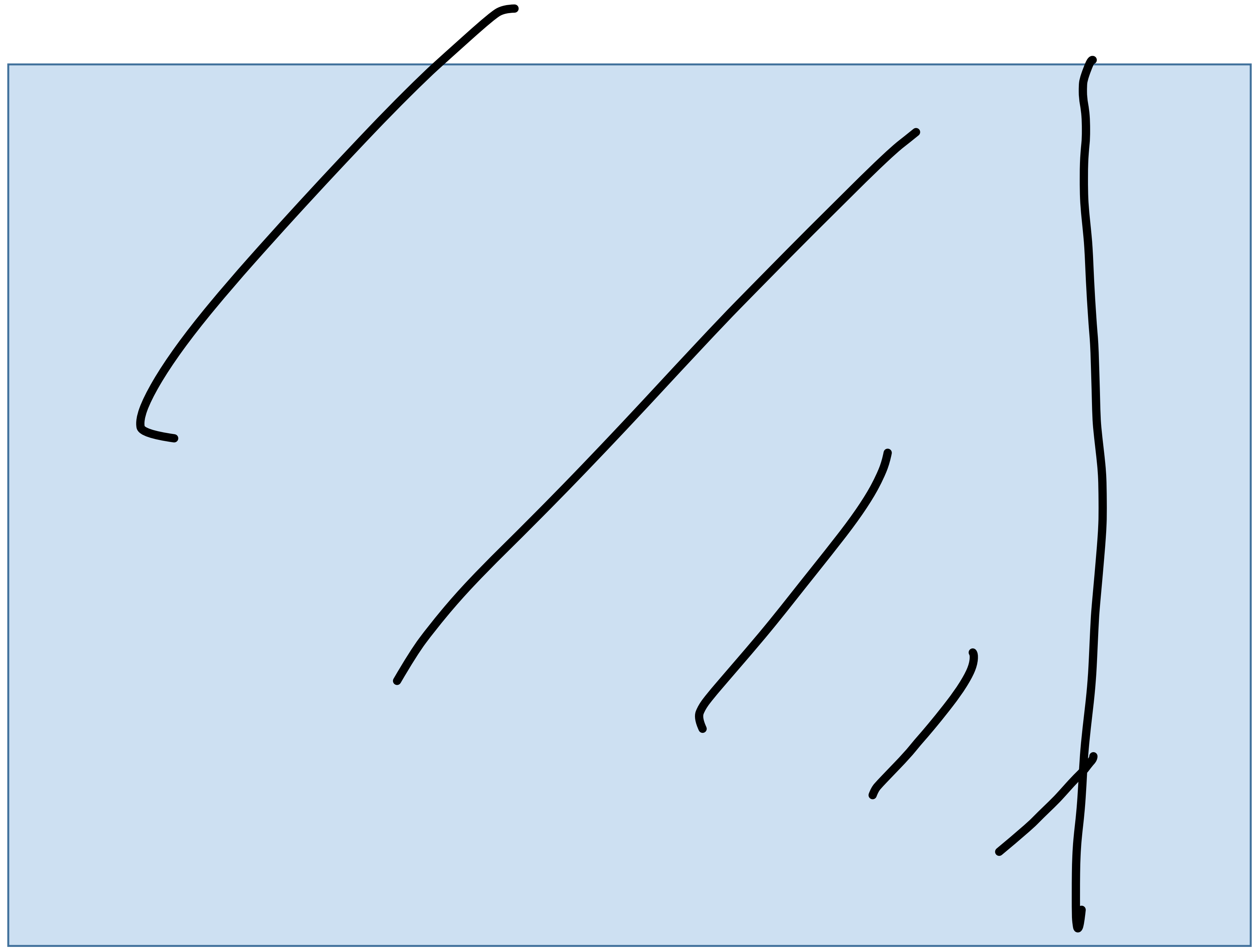
구간 합 구하기 5

https://www.acmicpc.net/problem/11660

- 합을 효율적으로 구하는 방법
- S[i][j] = (1, 1) ~ (i, j)까지 합
- S[i][j] = S[i-1][j] + S[i][j-1] – S[i-1][j-1] + A[i][j]

S[i][j]
=



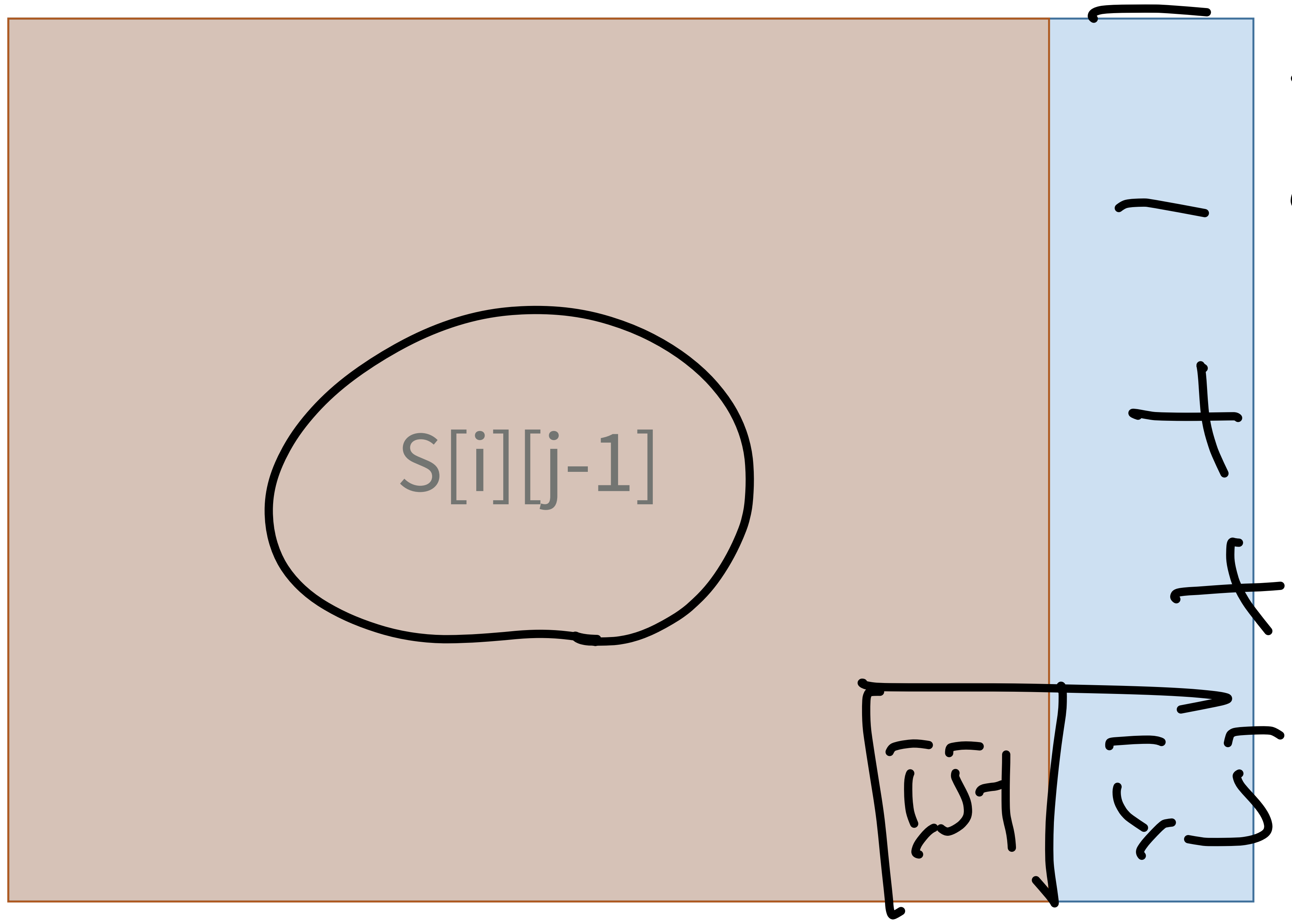


구간 합 구하기 5

https://www.acmicpc.net/problem/11660

- 합을 효율적으로 구하는 방법
- S[i][j] = (1, 1) ~ (i, j)까지 합
- S[i][j] = S[i-1][j] + S[i][j-1] – S[i-1][j-1] + A[i][j]

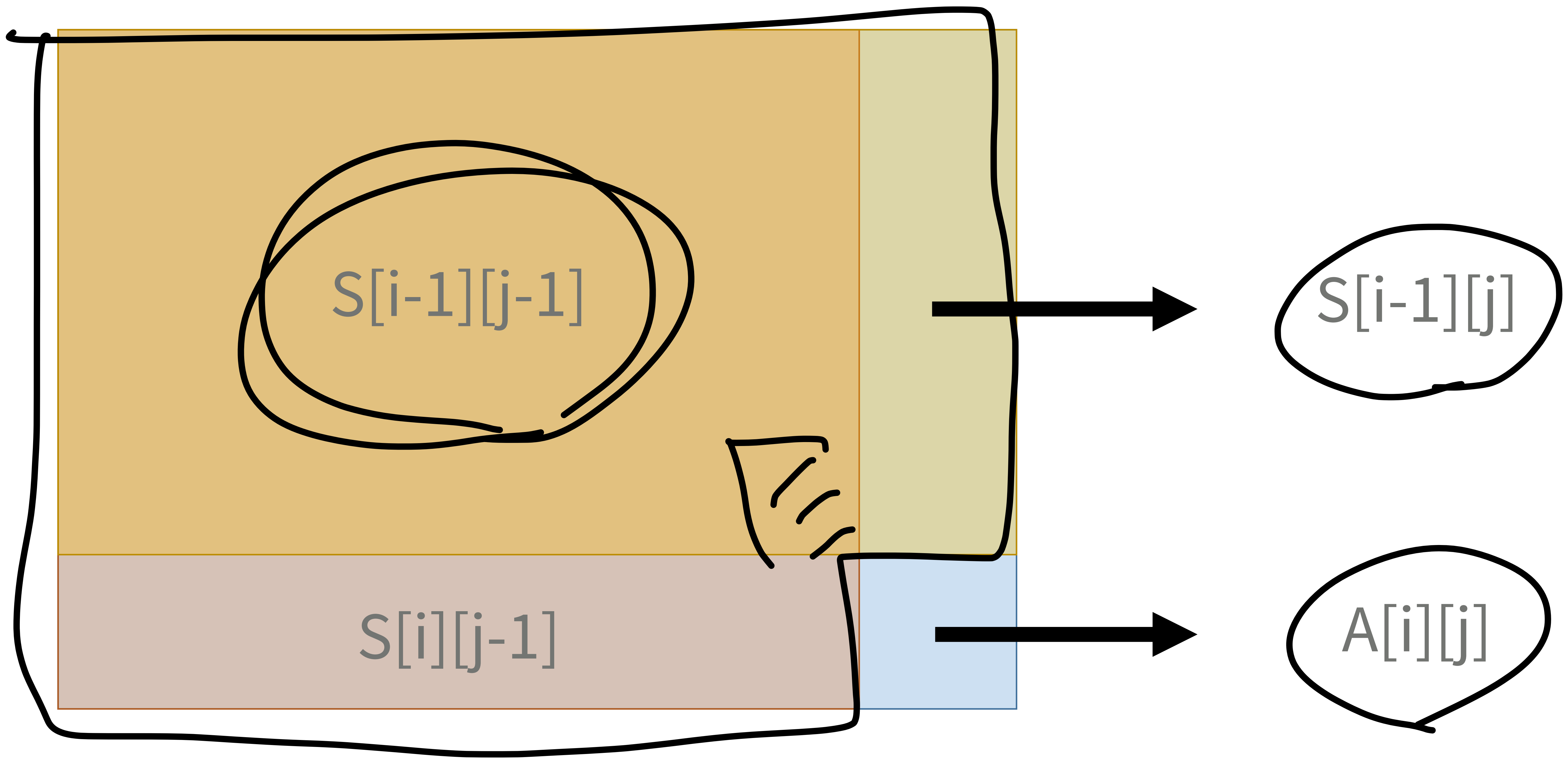
S[i][j][k]
= S[i-1][j][k]
+ S[i][j-1][k]
+ S[i][j][k-1]
− S[i-1][j-1][k]
− S[i-1][j][k-1]
− S[i][j-1][k-1]
+ S[i-1][j-1][k-1]
+ A[i][j][k]



구간 합 구하기 5

https://www.acmicpc.net/problem/11660

- 합을 효율적으로 구하는 방법
- S[i][j] = (1, 1) ~ (i, j)까지 합
- S[i][j] = S[i-1][j] + S[i][j-1] – S[i-1][j-1] + A[i][j]



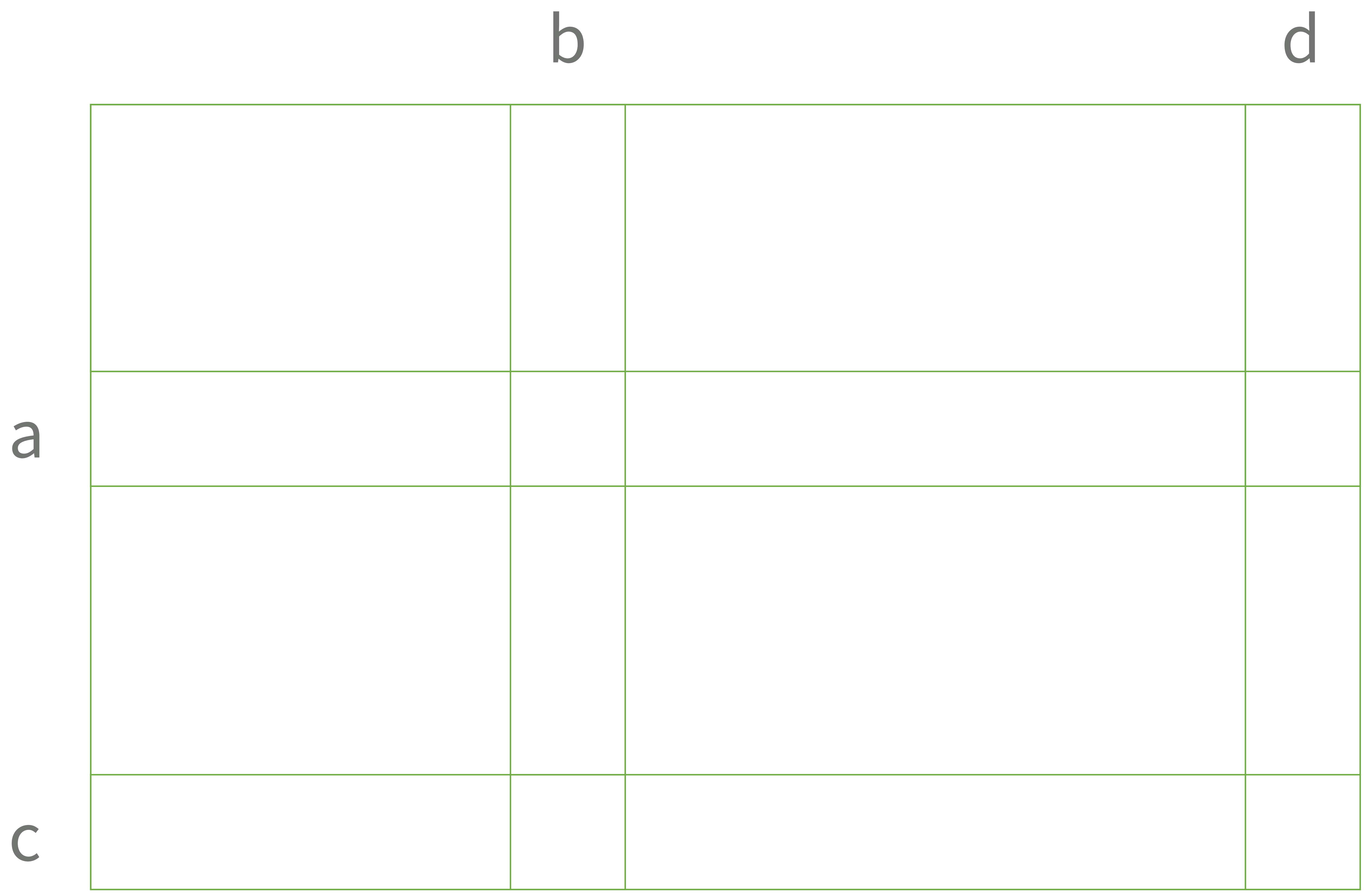
구간 합 구하기 5

① i ~ j

S[j] - S[i-1]

https://www.acmicpc.net/problem/11660

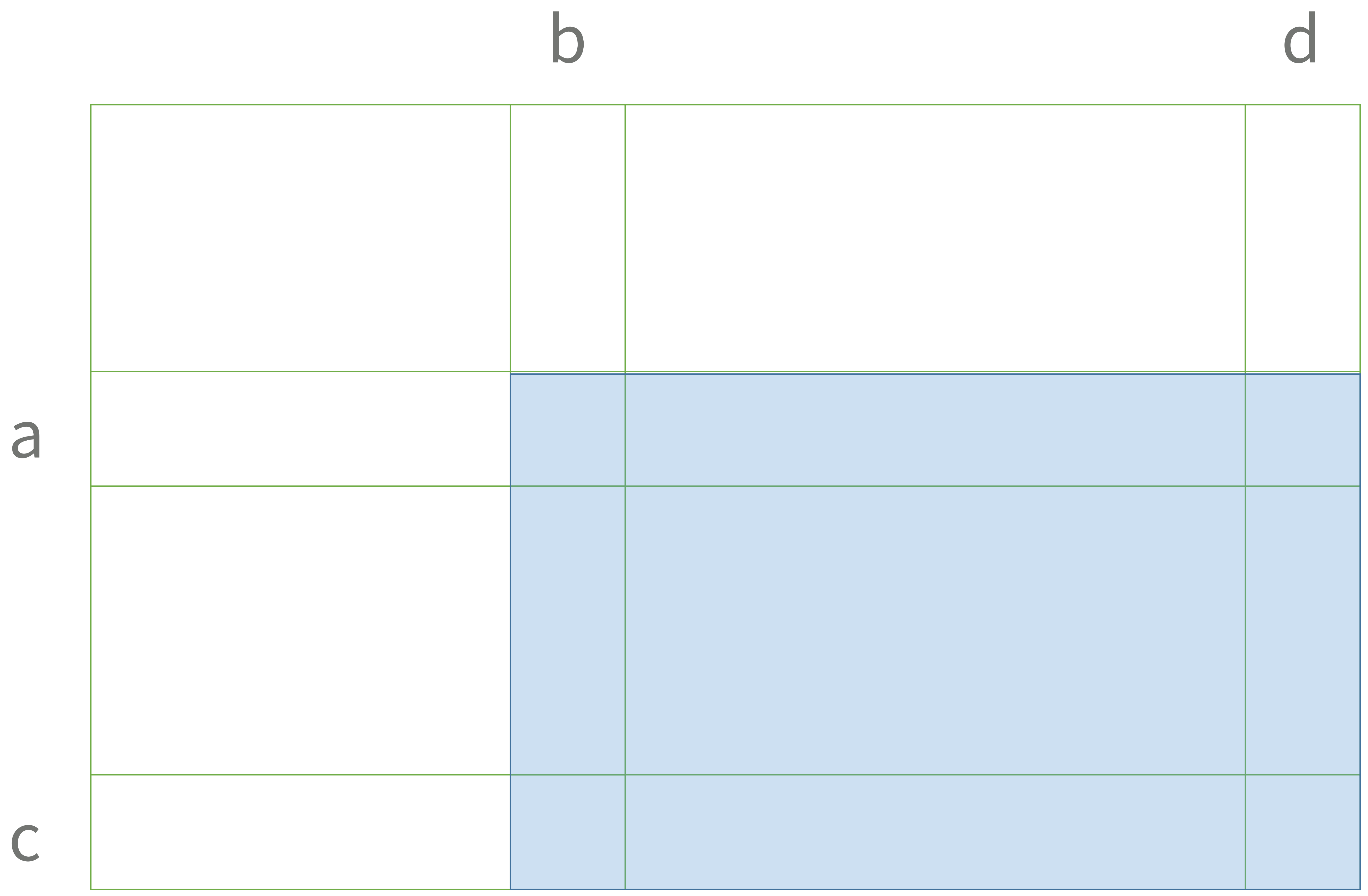
- (a,b) ~ (c,d) 합 구하기



구간 합 구하기 5

https://www.acmicpc.net/problem/11660

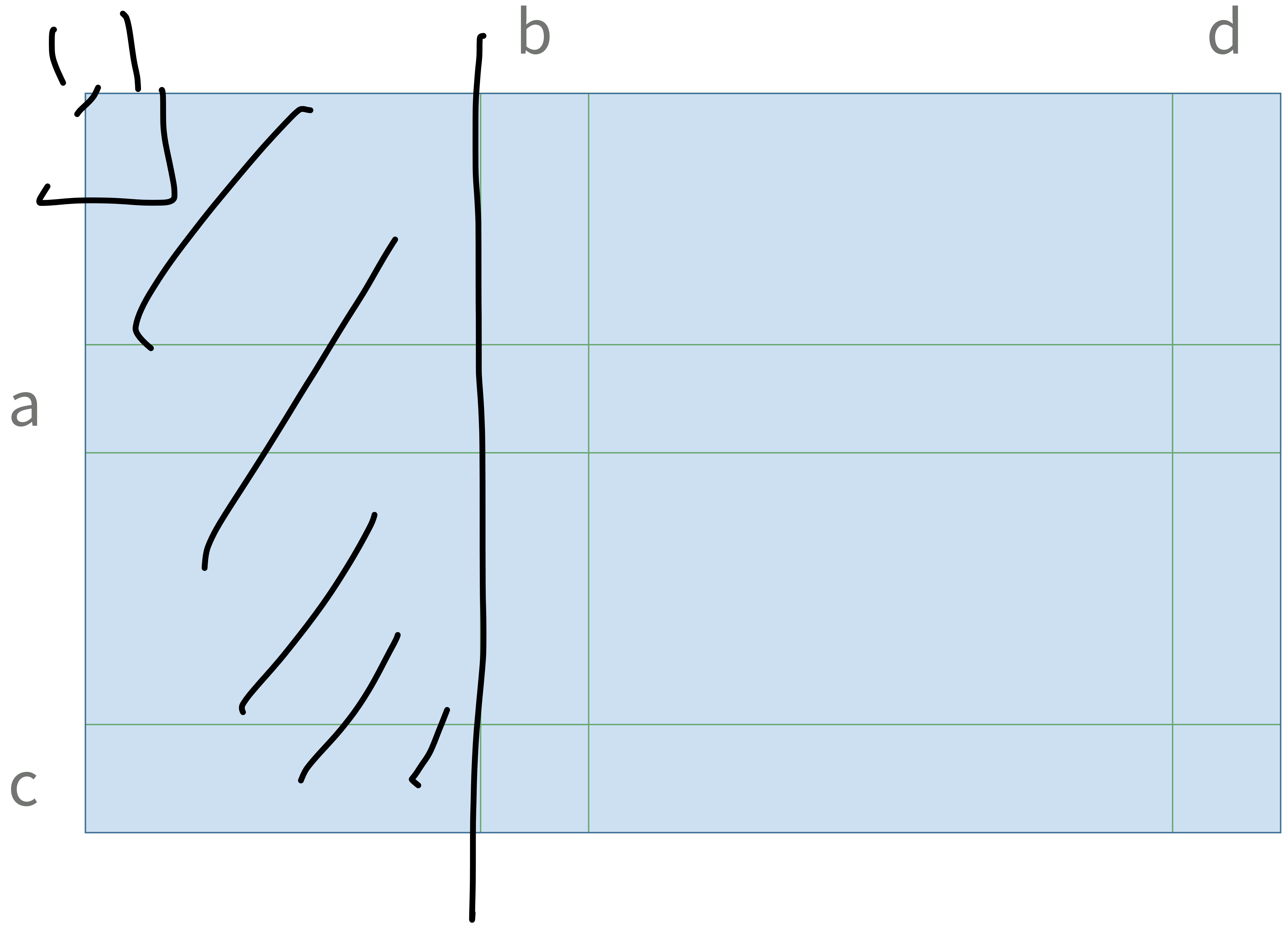
- (a,b) ~ (c,d) 합 구하기



구간 합 구하기 5

https://www.acmicpc.net/problem/11660

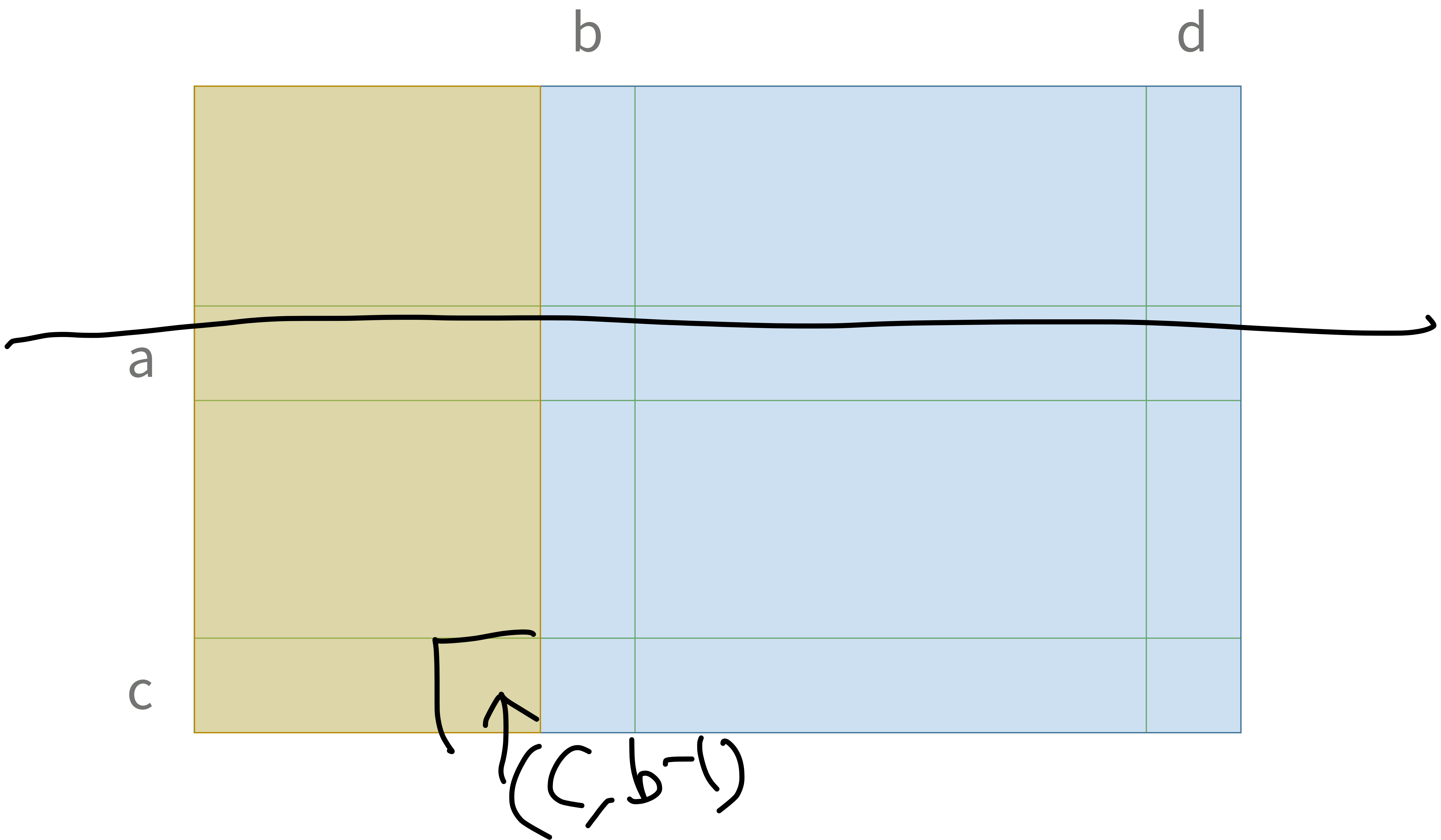
- S[c][d]



구간 합 구하기 5

https://www.acmicpc.net/problem/11660

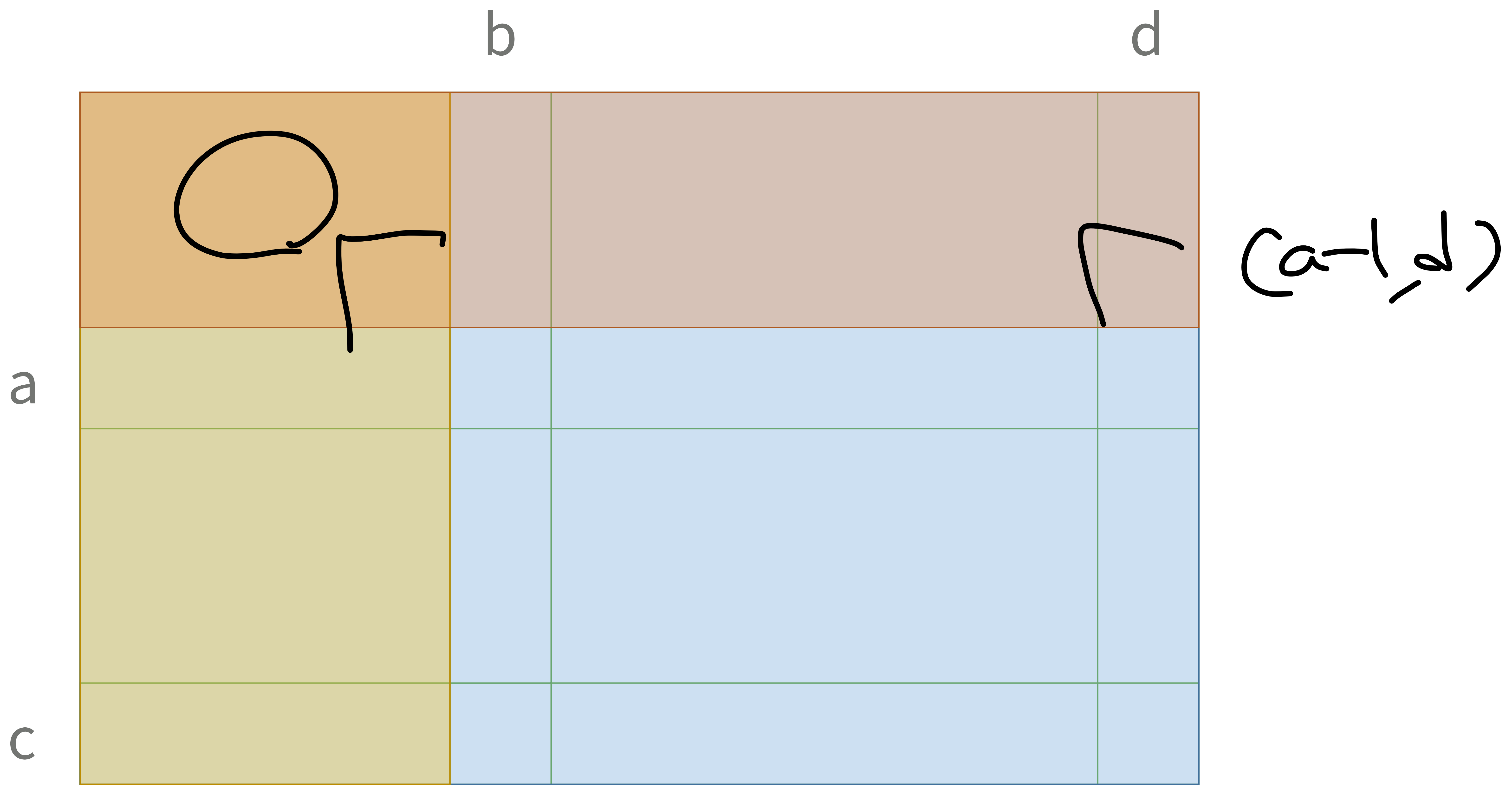
- S[c][d] – S[c][b-1]



구간 합 구하기 5

https://www.acmicpc.net/problem/11660

- S[c][d] – S[c][b-1] – S[a-1][d]



구간 합 구하기 5

https://www.acmicpc.net/problem/11660

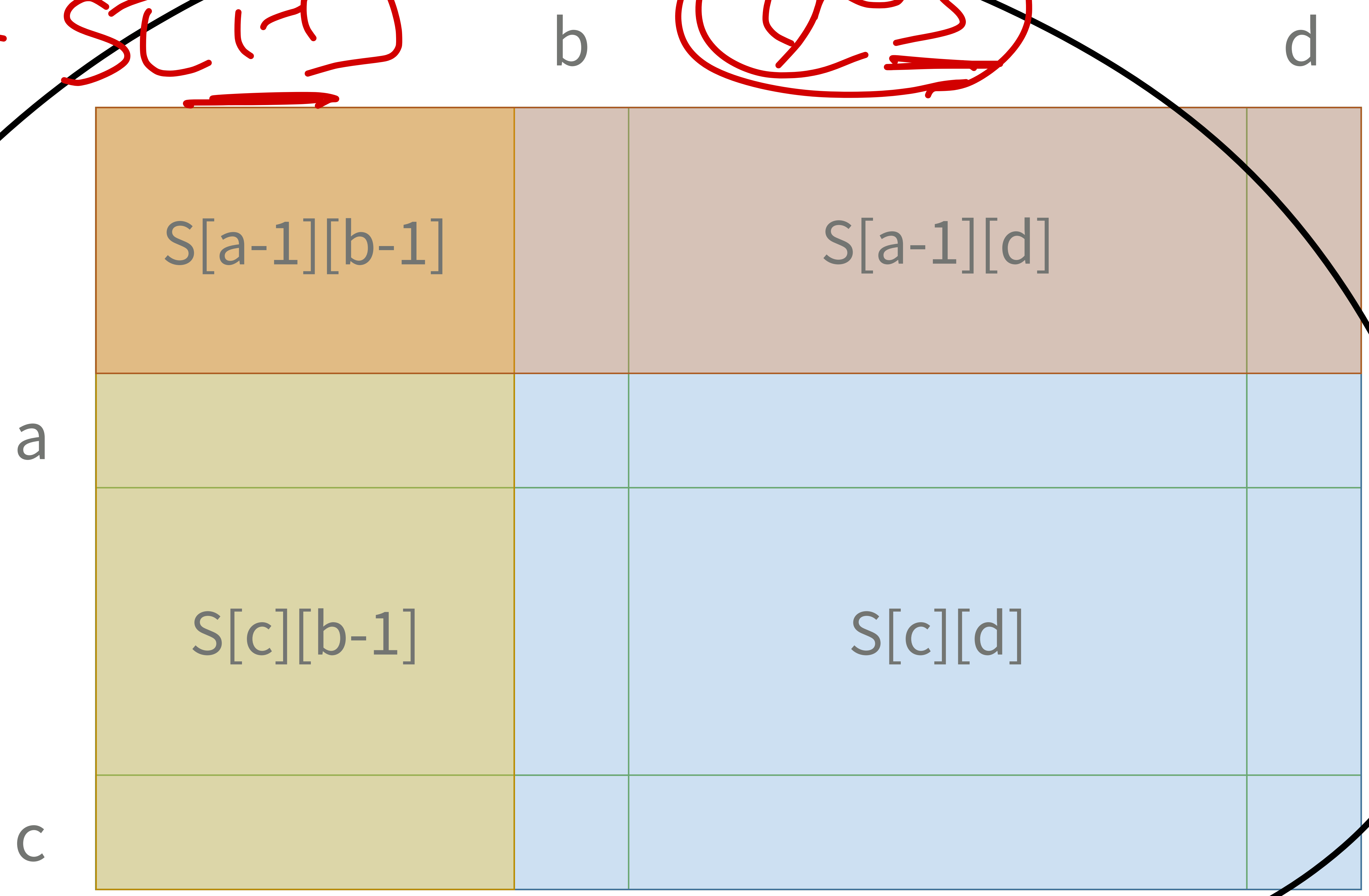
- S[c][d] – S[c][b-1] – S[a-1][d] + S[a-1][b-1]

(a,b)

(c,d)

S[5] - S[1-1]

(1~5)



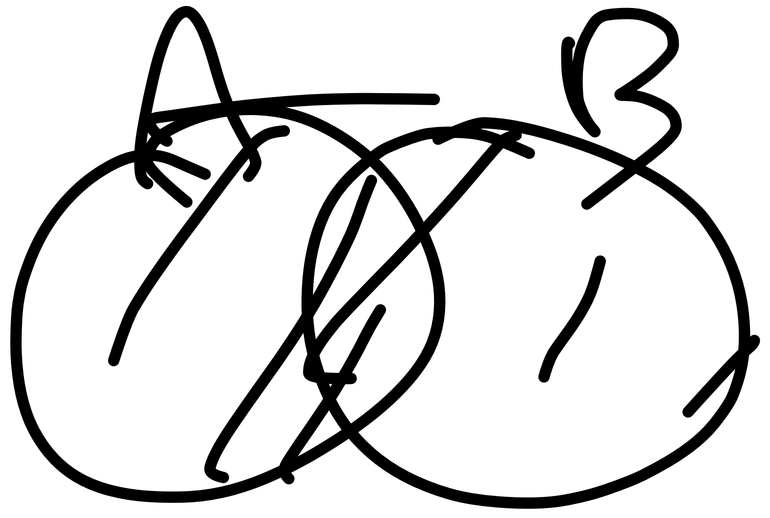
구간 합 구하기 5

(a,b,c) ~ (d,e,f)

https://www.acmicpc.net/problem/11660

- 소스: http://codeplus.codes/2a423621e6ee4a05aa24002afa123f68

S[d][e][f] - S[a-1][e][f]
− S[d][b-1][f]
− S[d][e][c-1]
+ S[a-1][b-1][f]
+ S[a-1][e][c-1]
+ S[d][b-1][c-1]
− S[a-1][b-1][c-1]



$$n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

Fenwick Tree

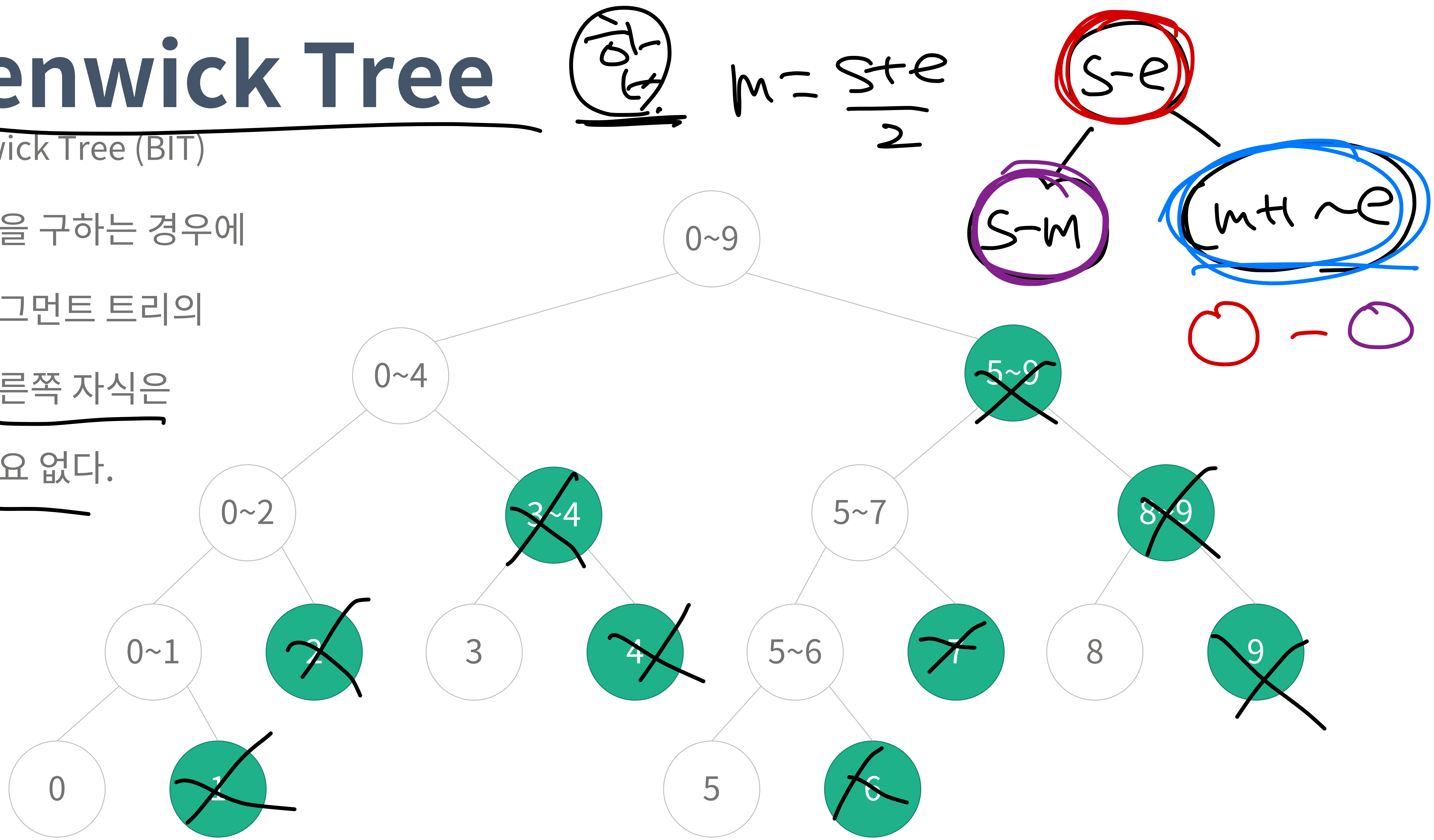
$$n(A)+n(B)+n(C)$$
$$-\ n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)$$
$$+\ n(A\cap B\cap C)$$

Inclusion
Exclusion
Principle

Fenwick Tree

Fenwick Tree (BIT)

- 합을 구하는 경우에
- 세그먼트 트리의
- 오른쪽 자식은
- 필요 없다.



Fenwick Tree

Fenwick Tree (BIT)

- L(i): i를 2진수로 나타냈을 때, 가장 마지막 1이 나타내는 값
- $3 = 1\mathbf{1}_2$
- $5 = 10\mathbf{1}_2$
- $6 = 1\mathbf{1}0_2$
- $8 = \mathbf{1}000_2$
- $9 = 100\mathbf{1}_2$
- $10 = 10\mathbf{1}0_2$
- $11 = 101\mathbf{1}_2$
- $12 = 1\mathbf{1}00_2$
- $16 = \mathbf{1}0000_2$

$L(i) =$

$O(\lg i)$

$6 = 110_2$

$\boxed{2^1 = 2}$

$L(6) = 2$

$9 = 1001_2$

$\to 2^0 = 1$

$L(9) = 1$

$16 = 10000_2$

$2^4 = 16$

$L(16) = 16$

Fenwick Tree

Fenwick Tree (BIT)

마지막 1

- $-num = \sim num + 1$
- $num = 100110101110101\boxed{1}00000000000$
- $\sim num = 011001010001010\boxed{0}11111111111$ +1
- $-num = 011001010001010\boxed{1}00000000000$
- $num \ \& \ -num = \boxed{000000000000000}100000000000$

&

0

0

$\boxed{\sim num} + 1$

$= -num$

$L(i) = i \ \& \ -i$

Fenwick Tree

Fenwick Tree (BIT)

Tree[i] = i까지 L(i)개의 합

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
L(i)	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	16

L(12)=4

Tree[12] = A[9] + ... + A[12]

Fenwick Tree

Fenwick Tree (BIT)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	16

Fenwick Tree

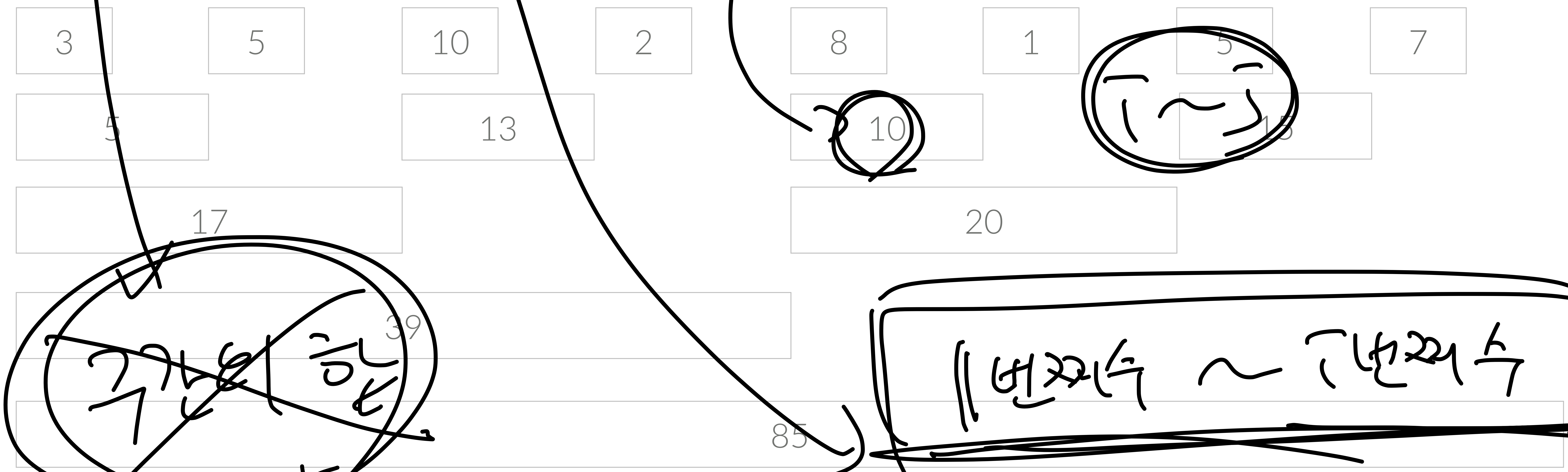
~~Fenwick Tree (BIT)~~

$10 = 1010_2 \to 2$

$L(10) = 2$

$Tree[10] = A[10] + A[9]$

A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]	A[9]	A[10]	A[11]	A[12]	A[13]	A[14]	A[15]	A[16]
3	2	5	7	10	3	2	7	8	2	1	9	5	10	7	4



$[i \sim j]$

구간의 합

i번째 수 ~ j번째 수

Fenwick Tree

Fenwick Tree (BIT)

- $A[1] + \cdots + A[13]$을 구하려면
- $13 = 1101_2$
- $tree[1101_2] + tree[1100_2] + tree[1000_2]$

T → 이진수 길이 lg T

$\boxed{(\lg N)}$

$13 = 1101_2$

$L(13) = 1$

$tree[13] = \boxed{A[13]}$

$12 = 1100_2$

$L(12) = 4$

$tree[12] = \boxed{A[9] + \cdots + A[12]}$

$8 = 1000_2$

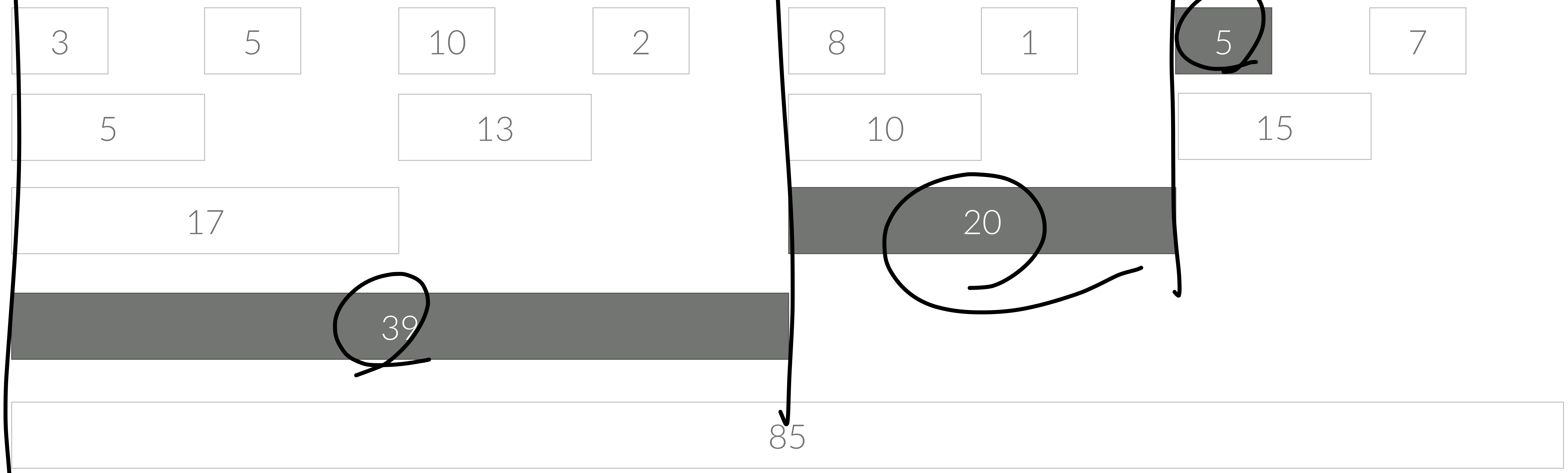
$L(8) = 8$

$tree[8] = \boxed{A[1] + \cdots + A[8]}$

Fenwick Tree

Fenwick Tree (BIT)

A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]	A[9]	A[10]	A[11]	A[12]	A[13]	A[14]	A[15]	A[16]
3	2	5	7	10	3	2	7	8	2	1	9	5	10	7	4



Fenwick Tree

Fenwick Tree (BIT)

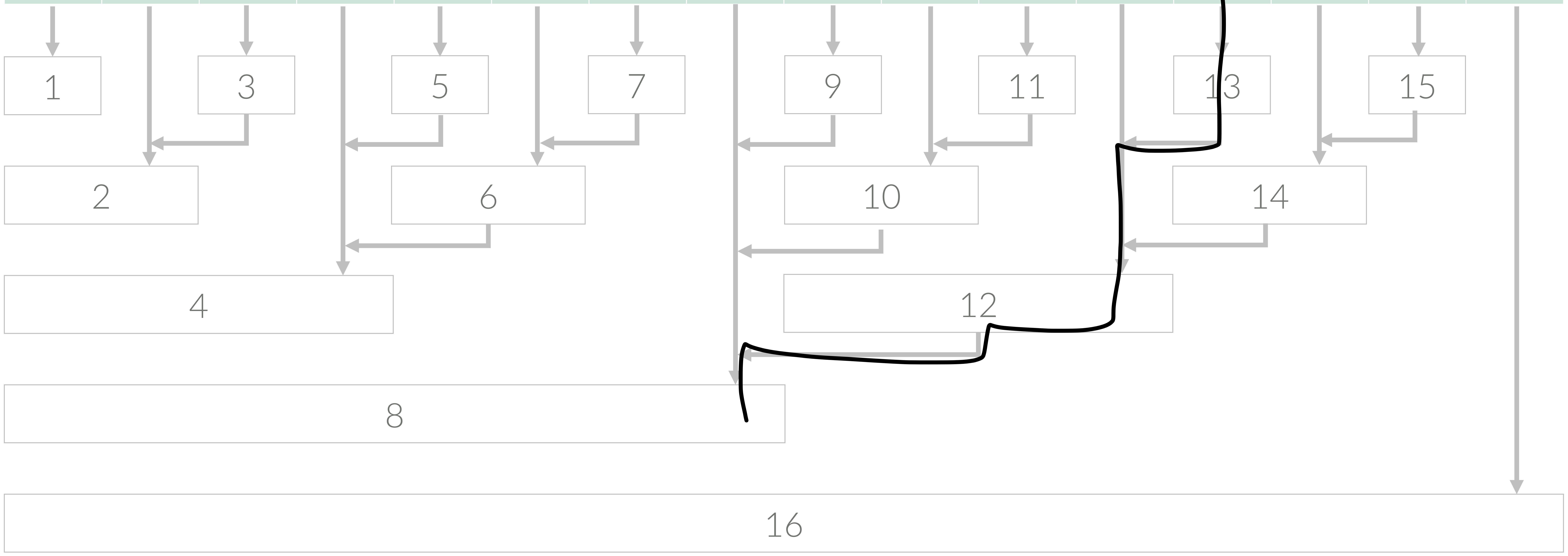
```
int sum(int i) {
    int ans = 0;
    while (i > 0) {
        ans += tree[i];
        i -= (i & -i);
    }
    return ans;
}
```

A[1] + ⋯ + A[i]

Fenwick Tree

Fenwick Tree (BIT)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	1	4	1	2	1	8	1	2	1	4	1	2	1	16



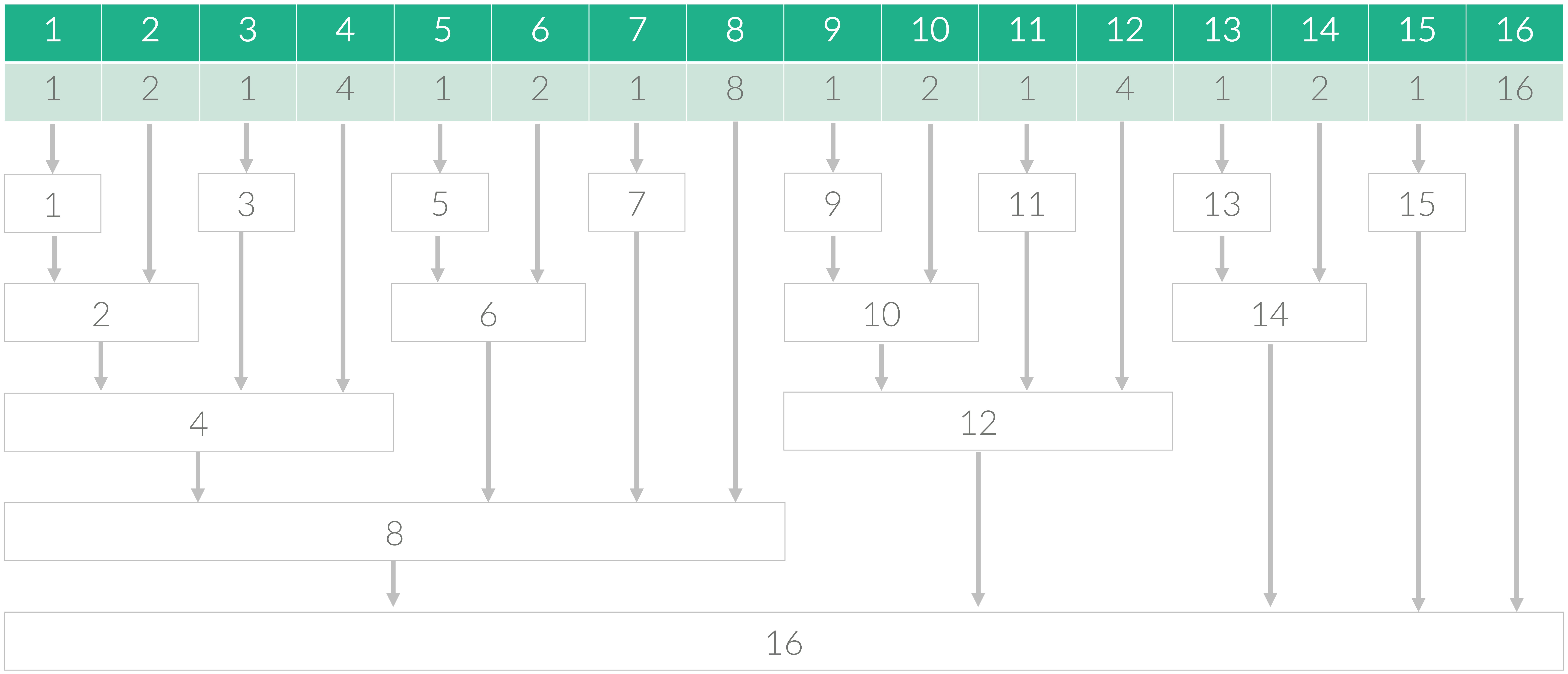
Fenwick Tree

Fenwick Tree (BIT)

```
int update(int i, int num) {
    while (i <= n) {
        tree[i] += num;
        i += (i & -i);
    }
}
```

Fenwick Tree

Fenwick Tree (BIT)



구간 합 구하기

https://www.acmicpc.net/problem/2042

- 소스 1: http://codeplus.codes/092a5402b87f4cfa807a9e9701e4339f
- 소스 2: http://codeplus.codes/bf1ccee75f4c47f6a6469edaeb8a8bc9

	1번		최대	여러번	
	선처리	공간	쿼리	변경	
2중	X		N		
Sqrt decomposition	N	√N	√N	√N	
DP	NlgN	NlgN	lgN	lgN	
세그먼트트리	NlgN	NlgN	lgN	lgN	
누적합	N	N	1 N	N	합
BIT	NlgN	N	lgN	lgN	합

Fenwick Tree

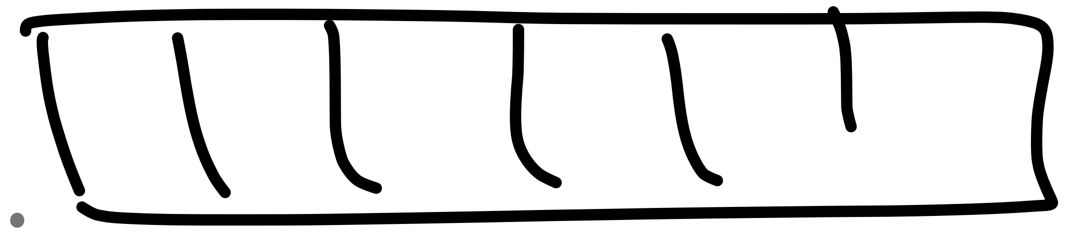
2D Fenwick Tree

2D Fenwick Tree (BIT)

- 1차원을 2차원으로 확장해서 만들 수 있다.
- 행에 대해서 그리고 열에 대해서 트리를 만들면 된다

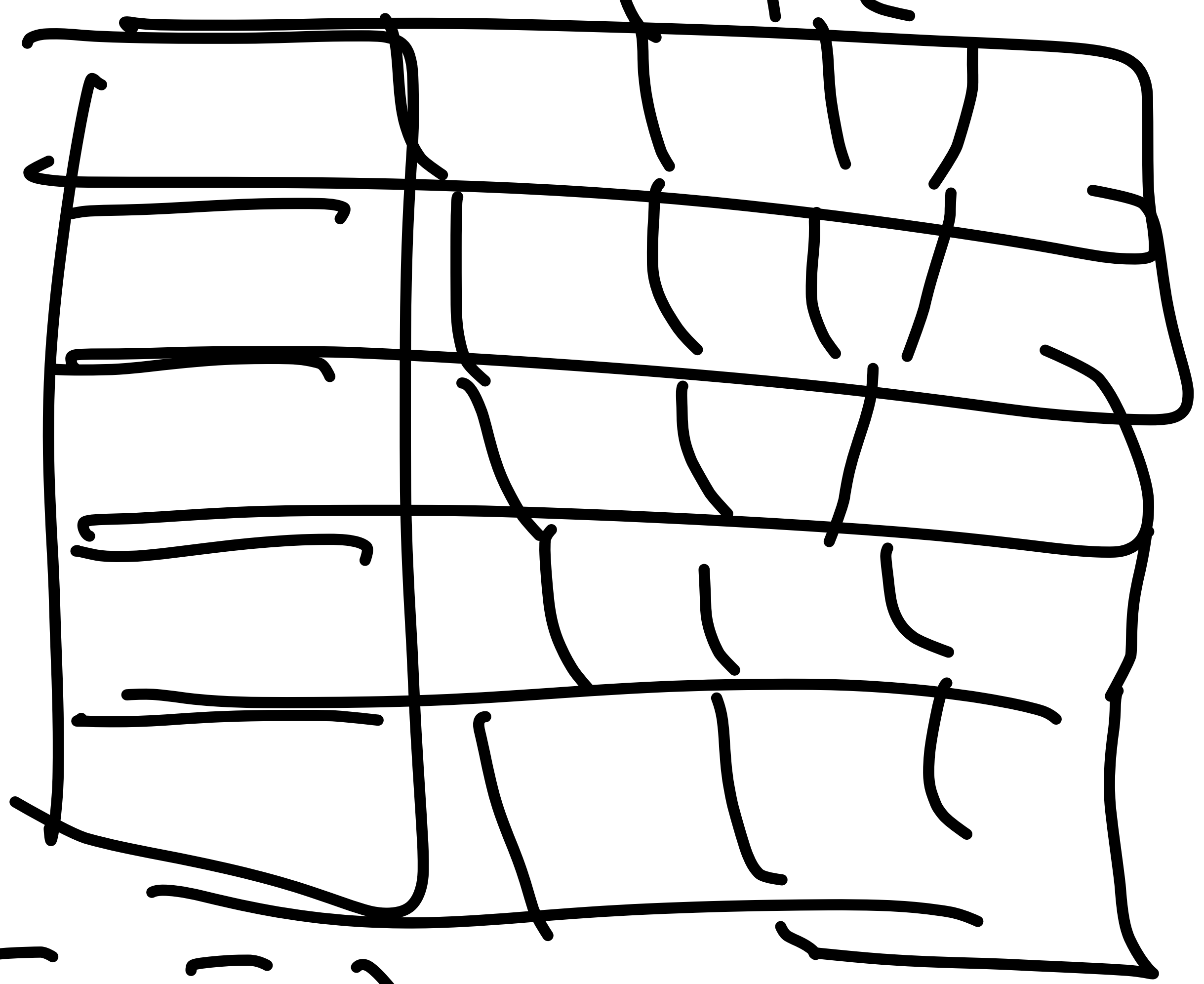
1차원 배열 A

i~j 합



2차원 배열 A

└> 1차원 배열이 1차원 배열

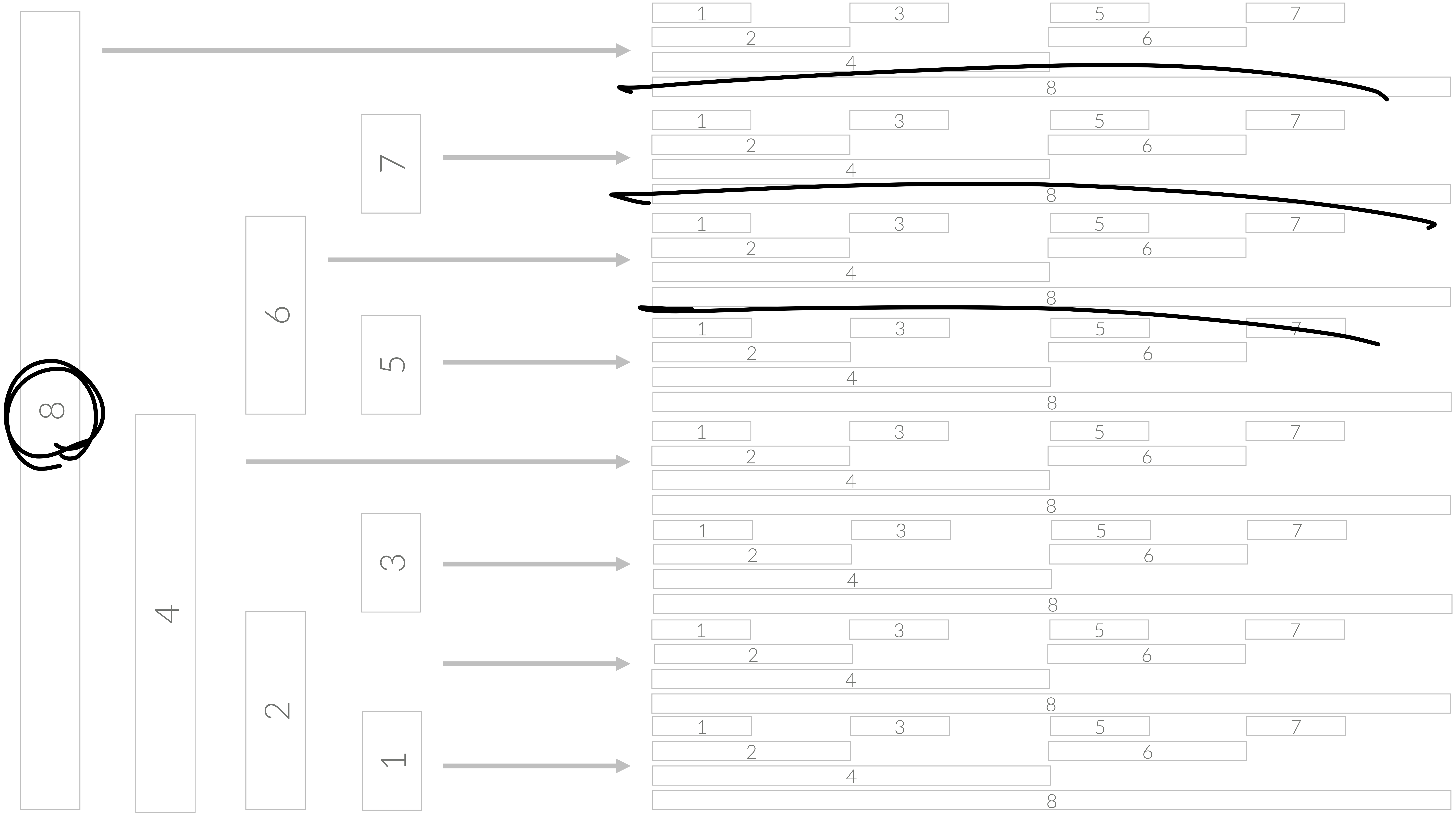


(i_1, j_1) (i_2, j_2)

```
for(x=i1; x<=j1; x++){
    for(y=i2; y<=j2; y++){
        sum += A[x][y];
    }
}
```

2D Fenwick Tree

2D Fenwick Tree (BIT)



2D Fenwick Tree

2D Fenwick Tree (BIT)

3D BIT

```
void update(int x, int y, int val) {
    for (int i=x; i<=n; i+=i&-i) {
        for (int j=y; j<=n; j+=j&-j) {
            tree[i][j] += val;
        }
    }
}
```

2D Fenwick Tree

2D Fenwick Tree (BIT)

```
int sum(int x, int y) {
    int ans = 0;
    for (int i=x; i>0; i-=i&-i) {
        for (int j=y; j>0; j-=j&-j) {
            ans += tree[i][j];
        }
    }
    return ans;
}
```

구간 합 구하기 3

https://www.acmicpc.net/problem/11658

- 소스: http://codeplus.codes/1079573df1254a9ebefccf7caf4bfbbc