세그먼트 트리

최백준 choi@startlink.io

RMQ

구간의 최소값 구하기

Range Minimum Query

- 배열 A[1], …, A[N]가 있고, 다음과 같은 연산을 수행해야 한다.
  - 최소값: A[i], …, A[j] 중에서 최소값을 찾아 출력한다.
- 이러한 연산이 총 Q개 주어진다.

A[0]	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]	A[9]	A[10]
3	6	2	5	3	1	8	9	7	3	5

다 해보기

다 해보기

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 최소값: A[i], …, A[j] 중에서 최소값을 찾아 출력한다. O(N)

```
int m = a[i];
for (int k=i; k<=j; k++) {
    if (m > a[k]) {
        m = a[k];
    }
}
```

다 해보기

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 최소값을 하나 구하는데 O(N) 시간이 걸린다.
- 쿼리의 개수는 총 Q개이기 때문에, O(NQ)의 시간이 필요하다.

루트N으로 나누기

루트N으로 나누기

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- N개를 루트 N개의 그룹으로 나누면 그룹에 포함된 수의 개수는 루트 N개이다.
- 그룹의 개수와
- 그룹에 포함된 수의 개수가
- 같다는 점을 이용한다.

루트N으로 나누기

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 영어로는 sqrt decomposition 이라고 한다.
- R = 루트 N이라고 했을 때
- A를 R개의 그룹으로 나눈 다음에, Group[i]에 i번 그룹의 최소값을 저장하는 방식

	A[0]	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]	A[9]	A[10]
	3	6	2	5	3	1	8	9	7	3	5
그룹	0			1			2			3	

루트N으로 나누기

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 영어로는 sqrt decomposition 이라고 한다.
- R = 루트 N이라고 했을 때
- A를 R개의 그룹으로 나눈 다음에, Group[i]에 i번 그룹의 최소값을 저장하는 방식

A[0]	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]	A[9]	A[10]
3	6	2	5	3	1	8	9	7	3	5

Group[0] = 2	Group[1] = 1	Group[2] = 7	Group[3] = 3

루트N으로 나누기

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 영어로는 sqrt decomposition 이라고 한다.
- R = 루트 N이라고 했을 때
- A를 R개의 그룹으로 나눈 다음에, Group[i]에 i번 그룹의 최소값을 저장하는 방식

```
for (int i=0; i<n; i++) {
    if (i%r == 0) {
        group[i/r] = a[i];
    } else {
        group[i/r] = min(group[i/r], a[i]);
    }
}
```

루트N으로 나누기

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 최소값을 구하는 쿼리 i, j는 두 가지 경우가 있다. (i ≤ j)

1. i와 j가 같은 그룹인 경우
2. i와 j의 그룹이 다른 경우

A[0]	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]	A[9]	A[10]
3	6	2	5	3	1	8	9	7	3	5

G[0] = 2	G[1] = 1	G[2] = 7	G[3] = 3

루트N으로 나누기

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 최소값을 구하는 쿼리 i, j는 두 가지 경우가 있다. (i ≤ j)

1. i와 j가 같은 그룹인 경우

- 이 경우에는 그룹에 포함된 수를 모두 최소값 비교할 수 있다.
- 그룹에 들어있는 수의 개수는 루트 N개이기 때문에, 총 걸리는 시간은 O(루트 N) 이다.

```
for (int i=start; i<=end; i++) {
    ans = min(ans, a[i]);
}
```

루트N으로 나누기

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 최소값을 구하는 쿼리 i, j는 두 가지 경우가 있다. (i ≤ j)

2. i와 j가 다른 그룹인 경우

- 이 경우에는 3가지로 나눌 수 있다.
    - i가 들어있는 그룹
    - j가 들어있는 그룹
    - i와 j 사이에 들어있는 그룹

루트N으로 나누기

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- A[1] ~ A[9]의 최소값을 구하는 경우
- N = 11
- R = 루트N = 3
- 1의 그룹: 1/R = 1/3 = 0
- 9의 그룹: 9/R = 9/3 = 3

- 시작 그룹에 들어있는 수의 개수는 R개
- 끝 그룹에 들어있는 수의 개수는 R개
- 시작과 끝 그룹 사이에 있는 그룹의 수는 R개
- 아래 표시된 값을 비교해야 한다.

A[0]	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]	A[9]	A[10]
3	6	2	5	3	1	8	9	7	3	5

G[0] = 2	G[1] = 1	G[2] = 7	G[3] = 3

루트N으로 나누기

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

```
while (true) {
    ans = min(ans, a[start]);
    start += 1;
    if (start % r == 0) {
        break;
    }
}
```

```
while (true) {
    ans = min(ans, a[end]);
    end -= 1;
    if (end % r == r-1) {
        break;
    }
}
for (int i=start/r; i<=end/r; i++) {
    ans = min(ans, group[i]);
}
```

루트N으로 나누기

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 총 O(3루트 N)의 시간이 걸리게 된다.

루트N으로 나누기

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 공간: O(N)
- 선처리: O(N)
- 최소값 구하는 시간: O(루트 N)

다이나믹 프로그래밍

다이나믹 프로그래밍

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- D[i][j] = A[i]부터 2^j개의 최소값

A[0]	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]	A[9]	A[10]
3	6	2	5	3	1	8	9	7	3	5

다이나믹 프로그래밍

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- D[i][j] = A[i]부터 2^j개의 최소값
- A[i]부터 2^j개의 최소값은
- A[i]부터 2^{j-1}개의 최소값과 A[i+2^{j-1}]부터 2^{j-1}개의 최소값과 같다.

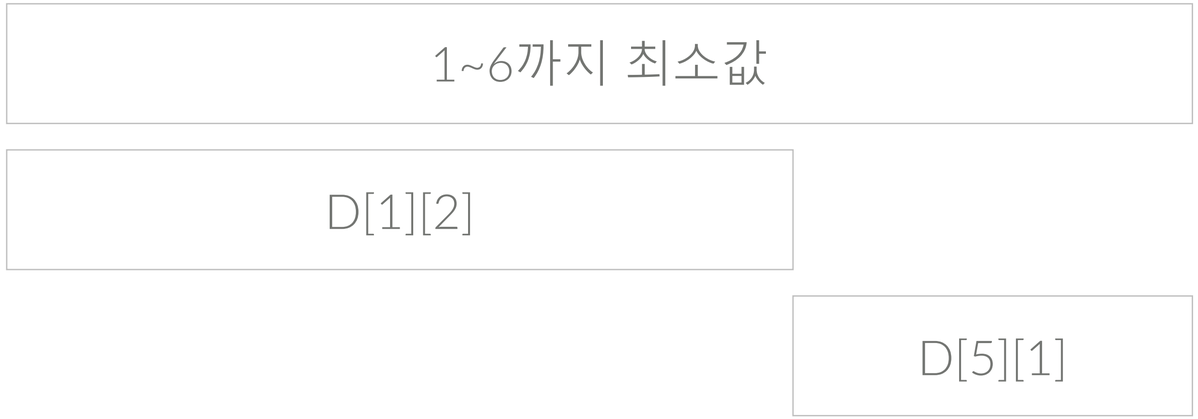
- D[i][j] = min(D[i][j-1], D[i+(1<<(j-1))][j-1]

다이나믹 프로그래밍

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 1부터 6까지 최소값 구하기

A[0]	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]	A[9]	A[10]
3	6	2	5	3	1	8	9	7	3	5

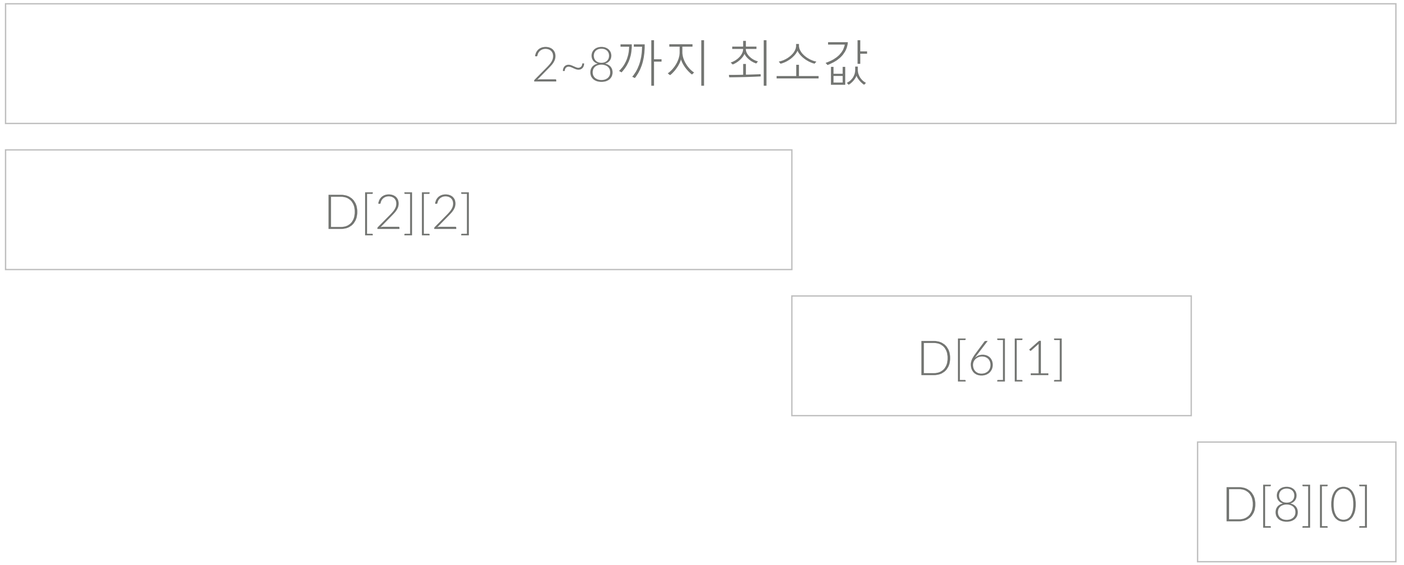


다이나믹 프로그래밍

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 2부터 8까지 최소값 구하기

A[0]	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]	A[9]	A[10]
3	6	2	5	3	1	8	9	7	3	5



다이나믹 프로그래밍

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 공간: O(NlgN)
- 선처리: O(NlgN)
- 최소값 구하는 시간: O(lgN)

다이나믹 프로그래밍

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

```
for (int i=0; i<n; i++) {
    d[i][0] = a[i];
}
for (int j=1; j<17; j++) {
    for (int i=0; i<n; i++) {
        if (i+(1<<j)-1 < n) {
            d[i][j] = min(d[i][j-1], d[i+(1<<(j-1))][j-1]);
        } else {
            break;
        }
    }
}
```

다이나믹 프로그래밍

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

```
int ans = a[start];
int k = 16;
while (start <= end && k >= 0) {
    if (start + (1<<k) - 1 <= end) {
        ans = min(ans, d[start][k]);
        start += (1<<k);
    }
    k -= 1;
}
```

- 위의 소스에서 16은 문제의 N 제한이 10만이기 때문에, 임의로 정한 값이다.
- $2^{16} = 65536$ 이라, 2^{17} 크기를 가지는 경우는 없기 때문

세그먼트 트리

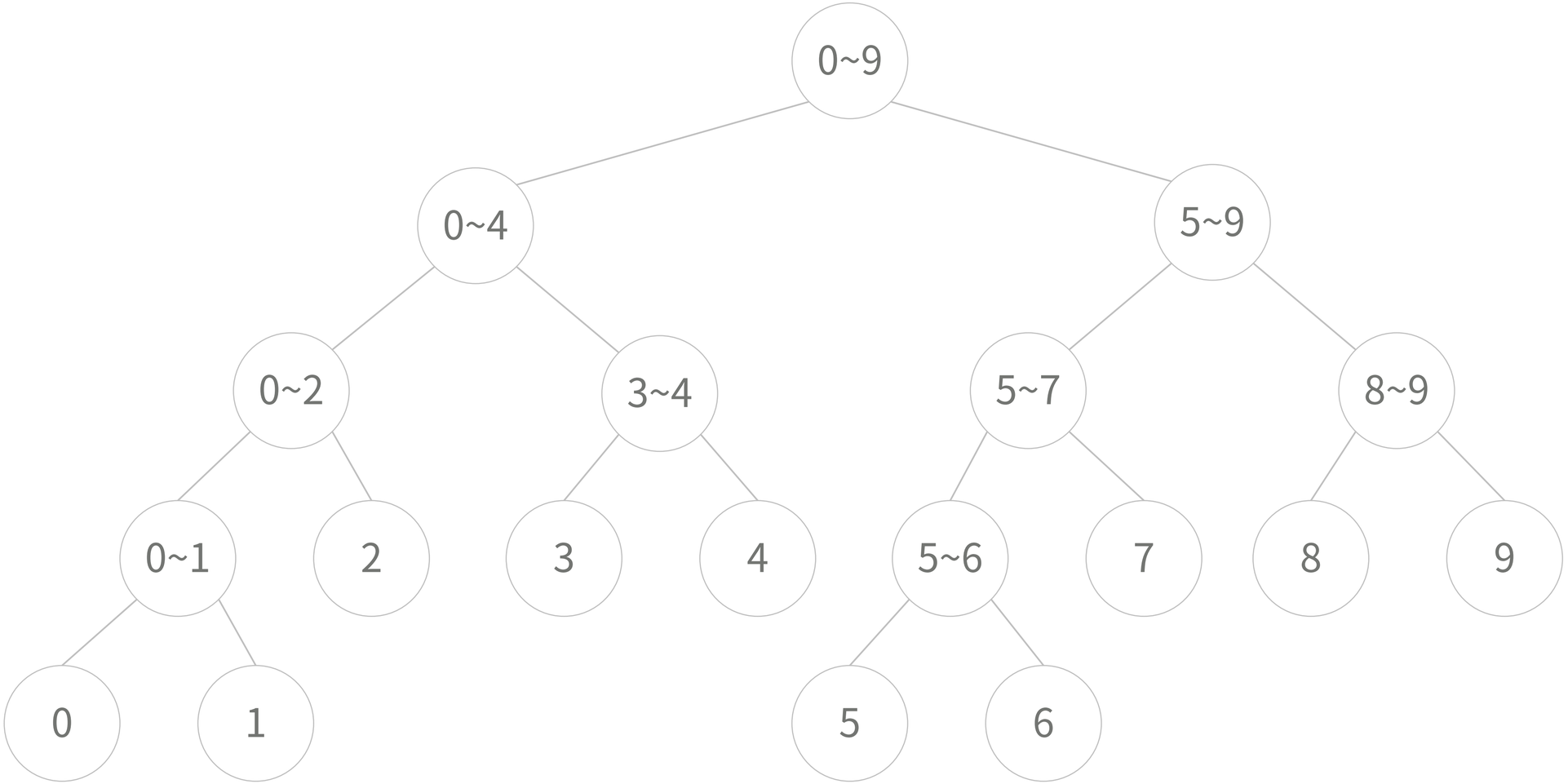
세그먼트 트리

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 세그먼트 트리의 노드는 구간을 담당하고 있다.
- 노드가 담당하는 구간을 [start,end]라고 했을 때
- 노드는 [start,end]의 최소값을 가지고 있다.
- [start,end]의 최소값은 [start,mid]의 최소값과 [mid+1,end]의 최소값 중 최소값이다.
- 이 점을 이용해 왼쪽 자식과 오른쪽 자식으로 노드를 나눈다.

세그먼트 트리

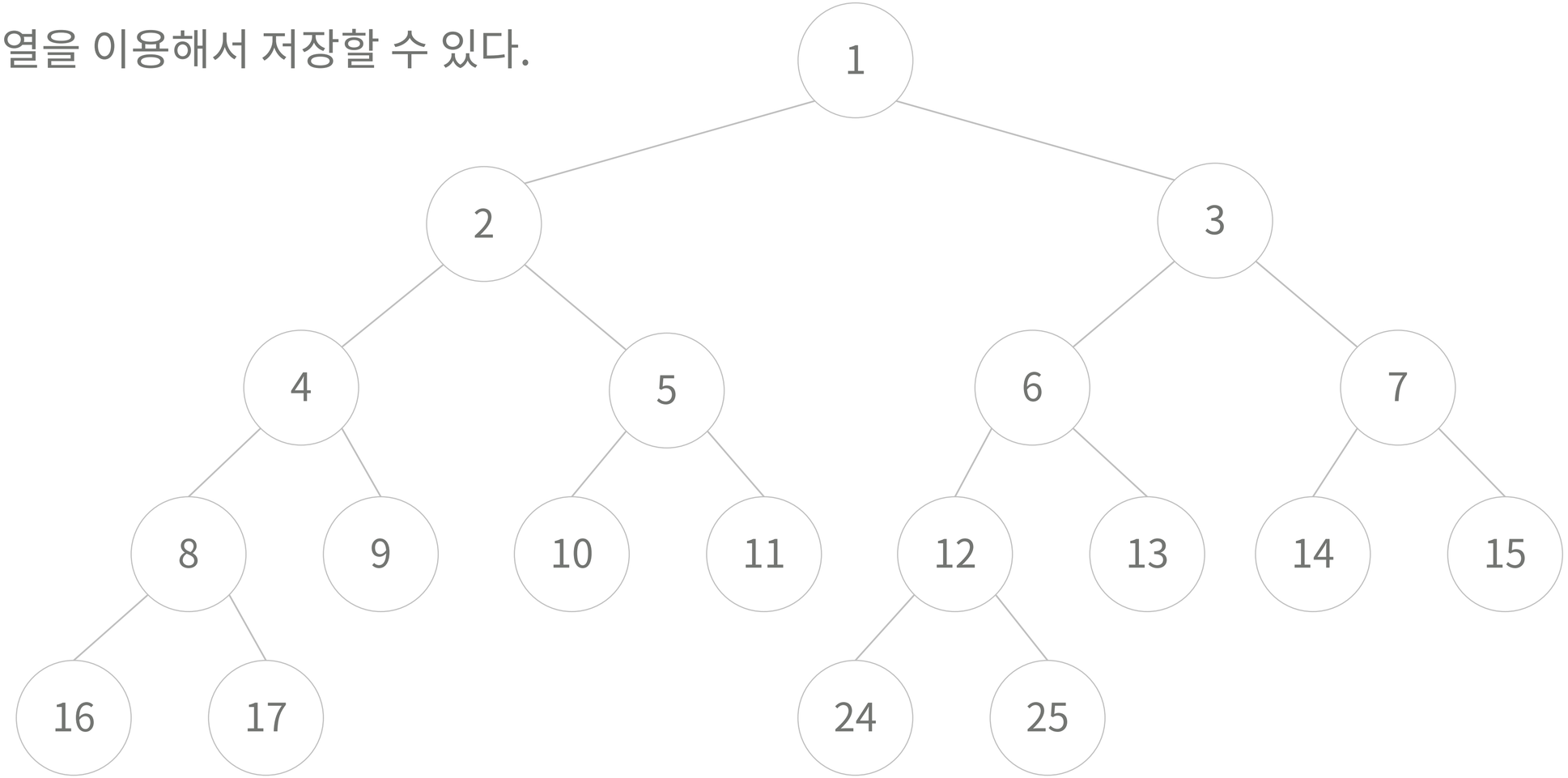
구간의 최소값 구하기 (RMQ)



세그먼트 트리

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

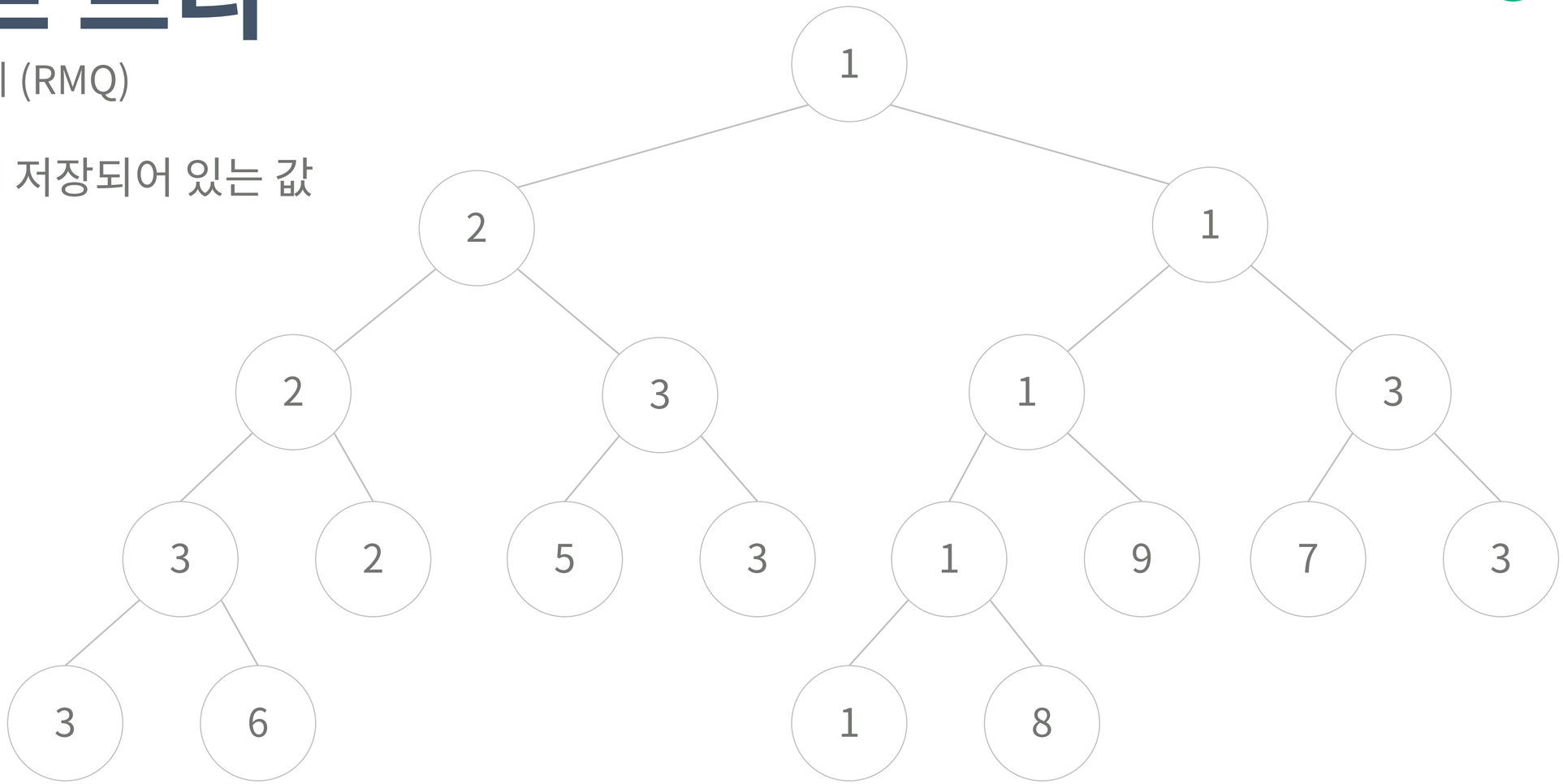
- 배열을 이용해서 저장할 수 있다.



세그먼트 트리

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 세그먼트 트리에 저장되어 있는 값



A[0]	A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]	A[9]
3	6	2	5	3	1	8	9	7	3

세그먼트 트리

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 노드가 담당하는 구간의 크기가 2K라면
- 왼쪽 자식과 오른쪽 자식의 크기는 K이다.
- 구간의 크기가 2K+1인 경우에는 왼쪽, 오른쪽 자식의 크기는 K+1, K가 된다.
- 따라서, 모든 리프 노드의 높이 차이는 0 또는 1이다.

세그먼트 트리

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- N이 2의 제곱꼴인 경우에는 Full Binary Tree
- 리프 노드가 N개인 Full Binary Tree: 필요한 노드의 개수: 2N-1
- 높이 H = ⌈lgN⌉ 이다.
- 필요한 배열의 크기: 2^{H+1}

세그먼트 트리

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

```
void init(vector<int> &tree, vector<int> &a, int node, int start,
int end) {
    if (start == end) {
        tree[node] = a[start];
    } else {
        init(tree, a, node*2, start, (start+end)/2);
        init(tree, a, node*2+1, (start+end)/2+1, end);
        tree[node] = min(tree[node*2],tree[node*2+1]);
    }
}
```

세그먼트 트리

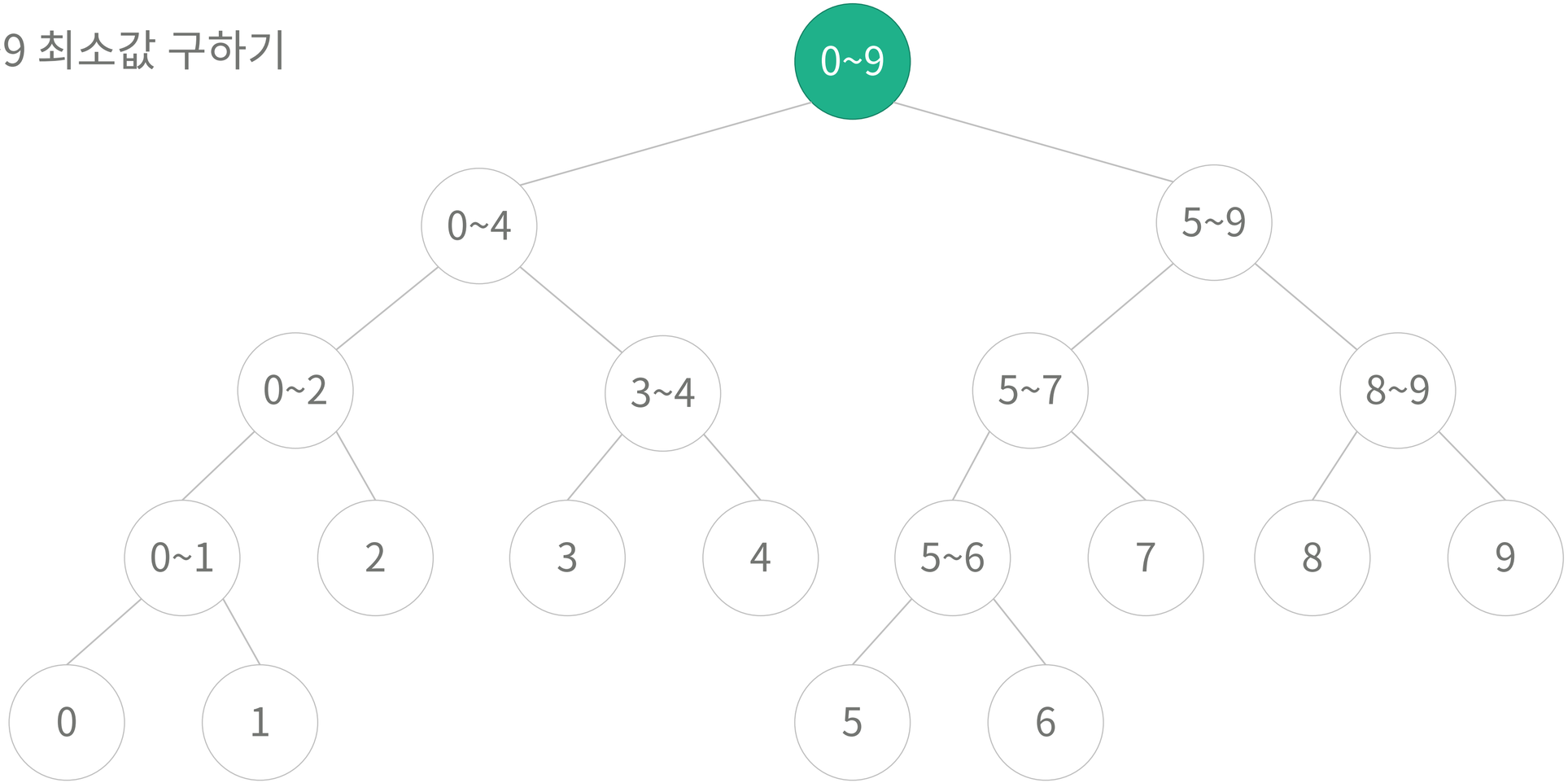
구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 트리 만드는 시간: O(NlgN)

세그먼트 트리

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

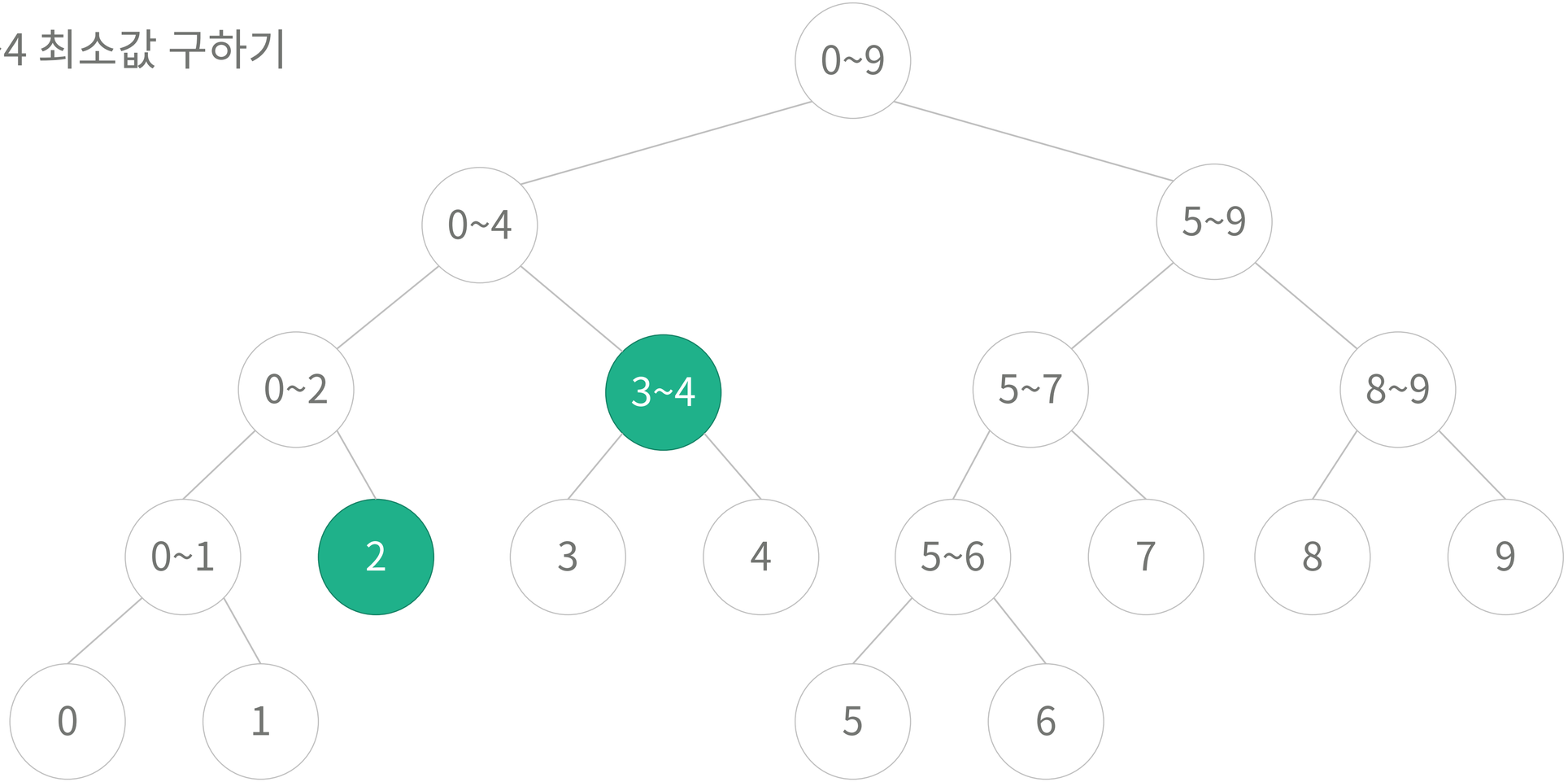
- 0~9 최소값 구하기



세그먼트 트리

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

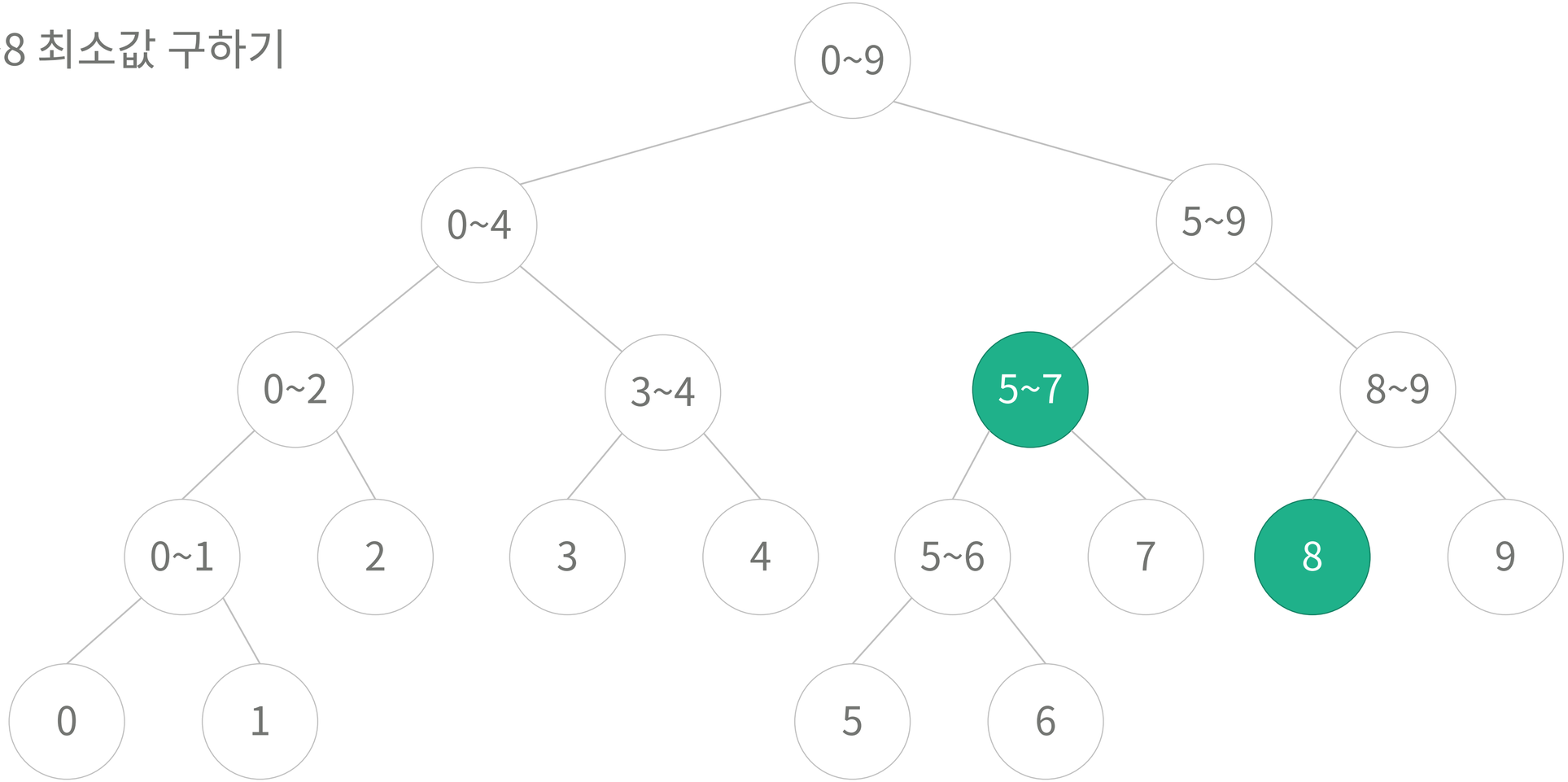
- 2~4 최소값 구하기



세그먼트 트리

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

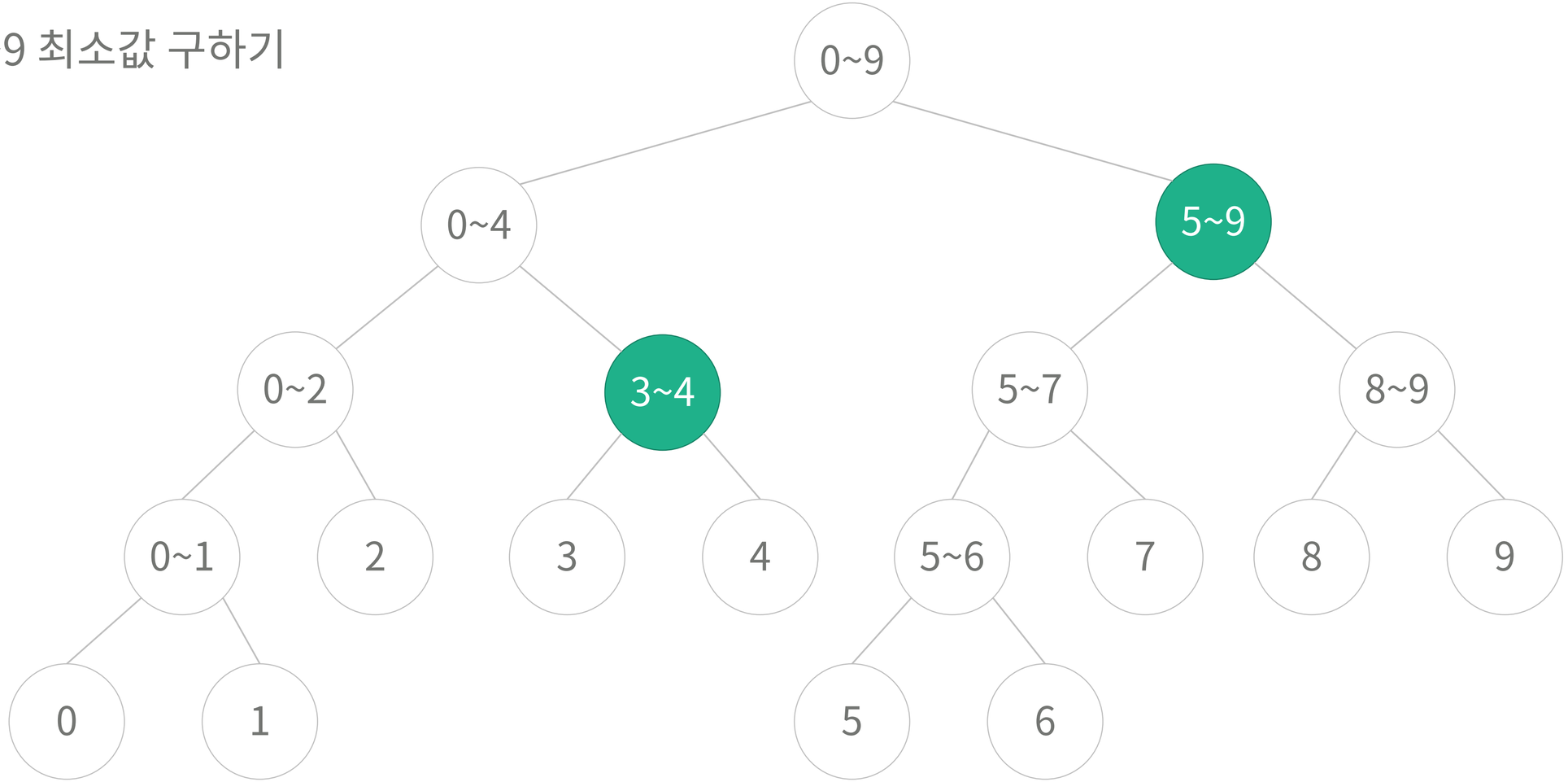
- 5~8 최소값 구하기



세그먼트 트리

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 3~9 최소값 구하기



세그먼트 트리

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

```
int query(vector<int> &tree, int node, int start, int end, int i,
int j) {
    if (i > end || j < start) return -1;
    if (i <= start && end <= j) return tree[node];
    int m1 = query(tree,2*node, start, (start+end)/2, i, j);
    int m2 = query(tree, 2*node+1, (start+end)/2+1, end, i, j);
    if (m1 == -1) {
        return m2;
    } else if (m2 == -1) {
        return m1;
    } else {
        return min(m1, m2);
    }
}
```

세그먼트 트리

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 쿼리 시간: O(lgN)

세그먼트 트리

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 트리의 루트부터 탐색을 시작하고
- 어떤 노드에서 왼쪽과 오른쪽 자식을 모두 호출하는 경우는 각 레벨마다 최대 2번씩이다.
- 따라서, O(2lgN) = O(lgN)이다.

최솟값

https://www.acmicpc.net/problem/10868

- 세그먼트 트리를 이용해서 RMQ를 구현하는 문제

최솟값

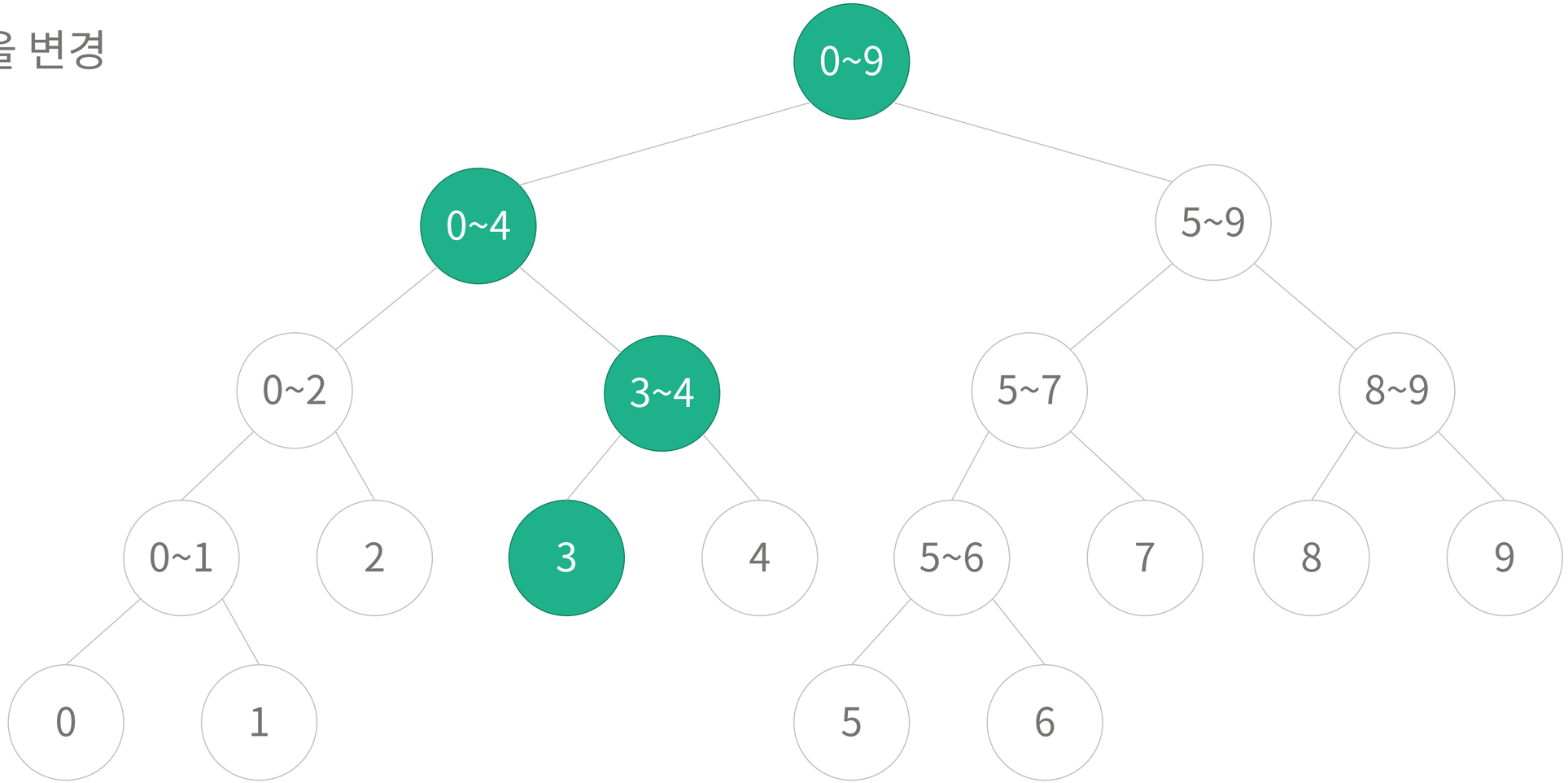
https://www.acmicpc.net/problem/10868

- 루트 N: http://codeplus.codes/ea6b855c44864cf79d1be7112fad2c6f
- DP: http://codeplus.codes/ba4cbd4c3e7e4023b4832b0f22ee05dd
- 세그먼트 트리: http://codeplus.codes/cb627400fe2a4df2aa7456ee8696d793

세그먼트 트리 변경

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

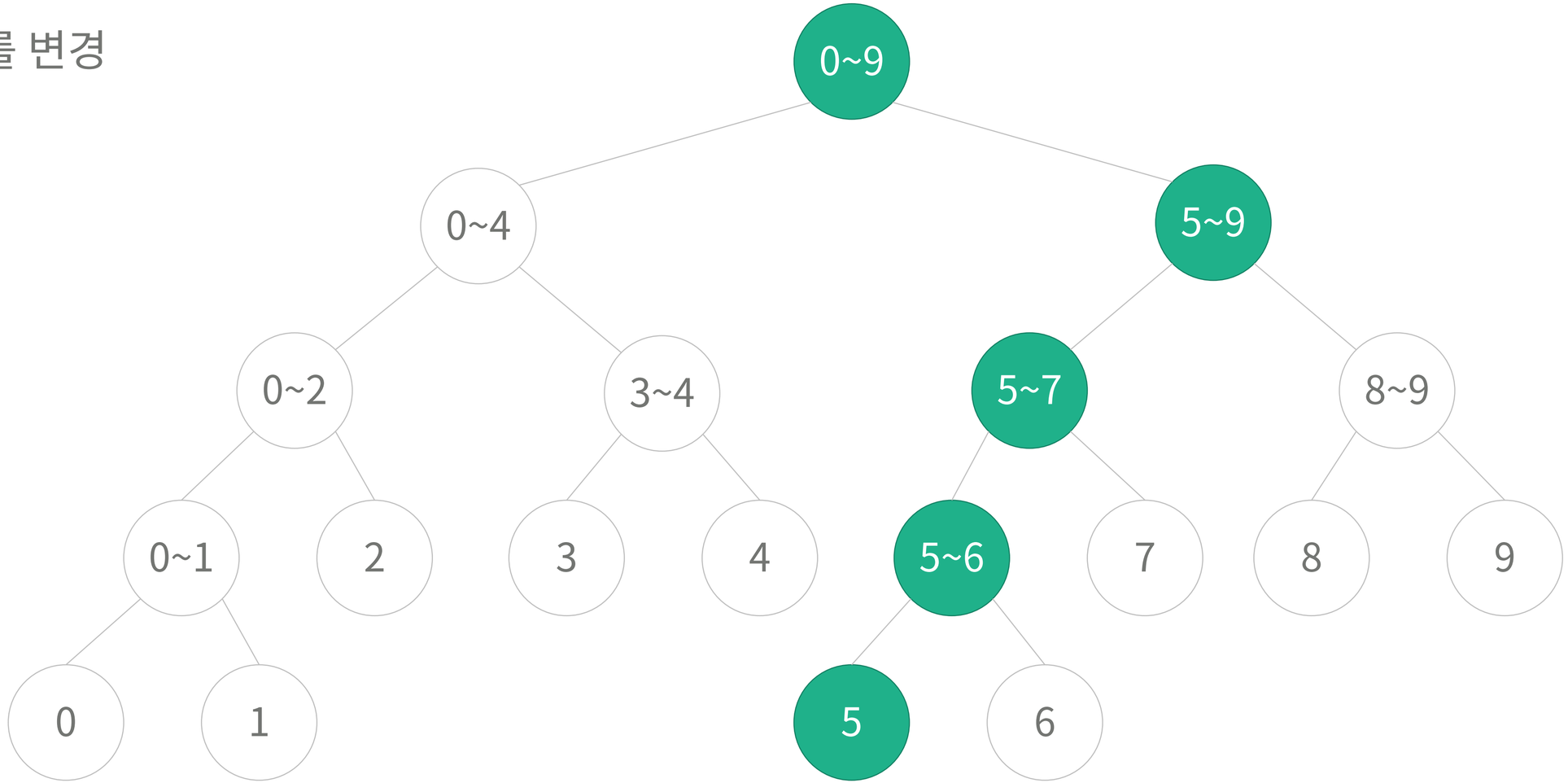
- 3을 변경



세그먼트 트리 변경

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

- 5를 변경



세그먼트 트리 변경

구간의 최소값 구하기 (RMQ)

```
void update(vector<int> &tree, int node, int start, int end, int
index, int value) {
    if (index < start || end < index) return;
    if (start == end) {
        tree[node] = value;
        return;
    }
    update(tree, node*2, start, (start+end)/2, index, value);
    update(tree, node*2+1, (start+end)/2+1, end, index, value);
    tree[node] = min(tree[node*2], tree[node*2+1]);
}
```

수열과 쿼리 17

https://www.acmicpc.net/problem/14438

- RMQ 문제 + 수정

수열과 쿼리 17

https://www.acmicpc.net/problem/14438

- 소스: http://codeplus.codes/26ce40834f6c4fc48d7d7d520f9f2eac

합 구하기

구간 합 구하기

https://www.acmicpc.net/problem/2042

- 구간의 최소값이 아니고 합을 구하는 경우에는
- min 대신 +를 하면 된다

구간 합 구하기

https://www.acmicpc.net/problem/2042

- 소스: http://codeplus.codes/3b643289518e48d89f377dc077a4c411