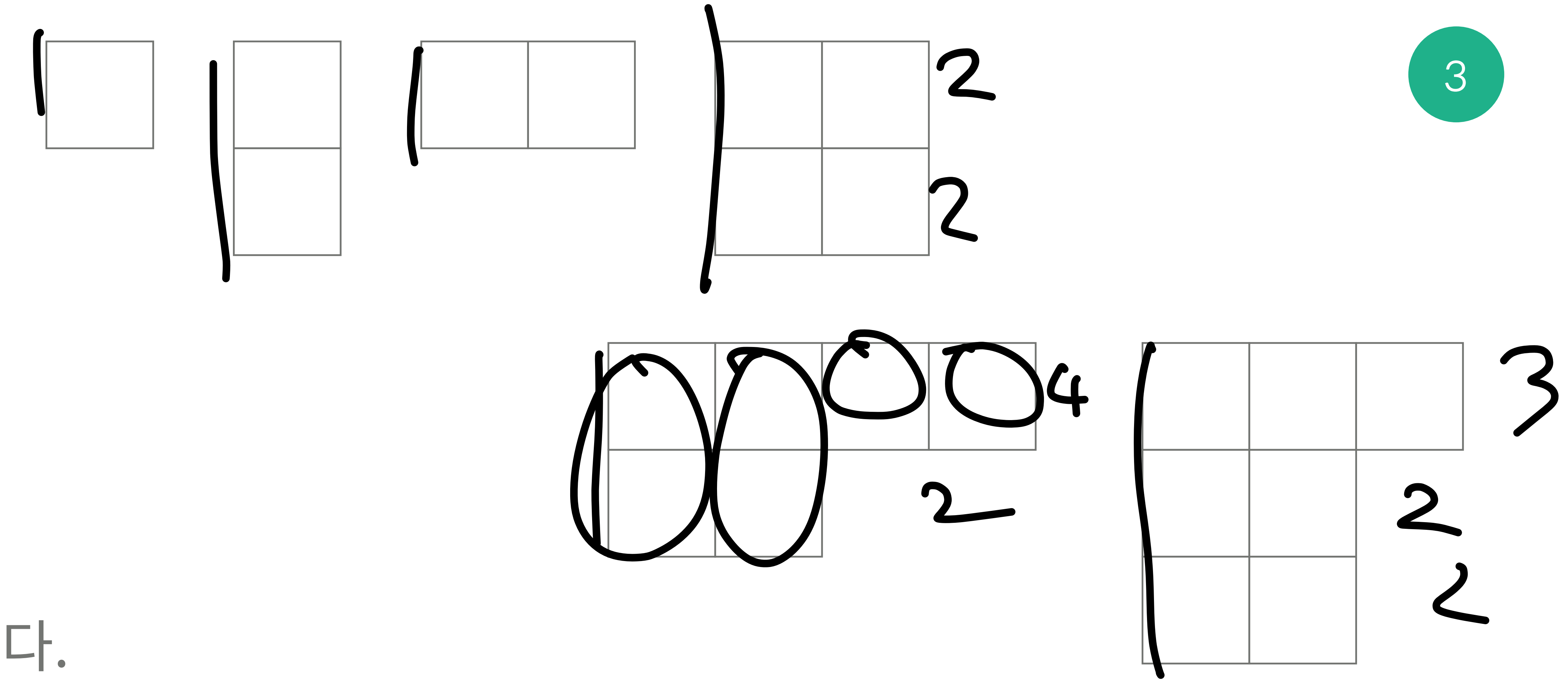
다이나믹 프로그래밍 4 (도전)

최백준 choi@startlink.io

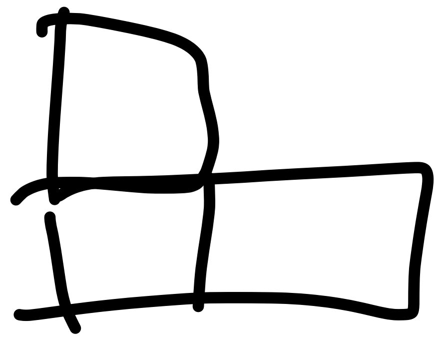
상태 다이나믹

다이어그램과 태블로

https://www.acmicpc.net/problem/9646



- 영 다이어그램
  1. 박스는 각각의 행과 열에 대해서 연속적이어야 한다.
  2. 모든 행은 모두 가장 왼쪽을 기준으로 정렬되어 있어야 한다.
  3. 각각의 행은 바로 위에 있는 행보다 길 수 없다.



다이어그램과 태블로

https://www.acmicpc.net/problem/9646

1	1
2	

1	1
3	

1	2
2	

1	2
3	

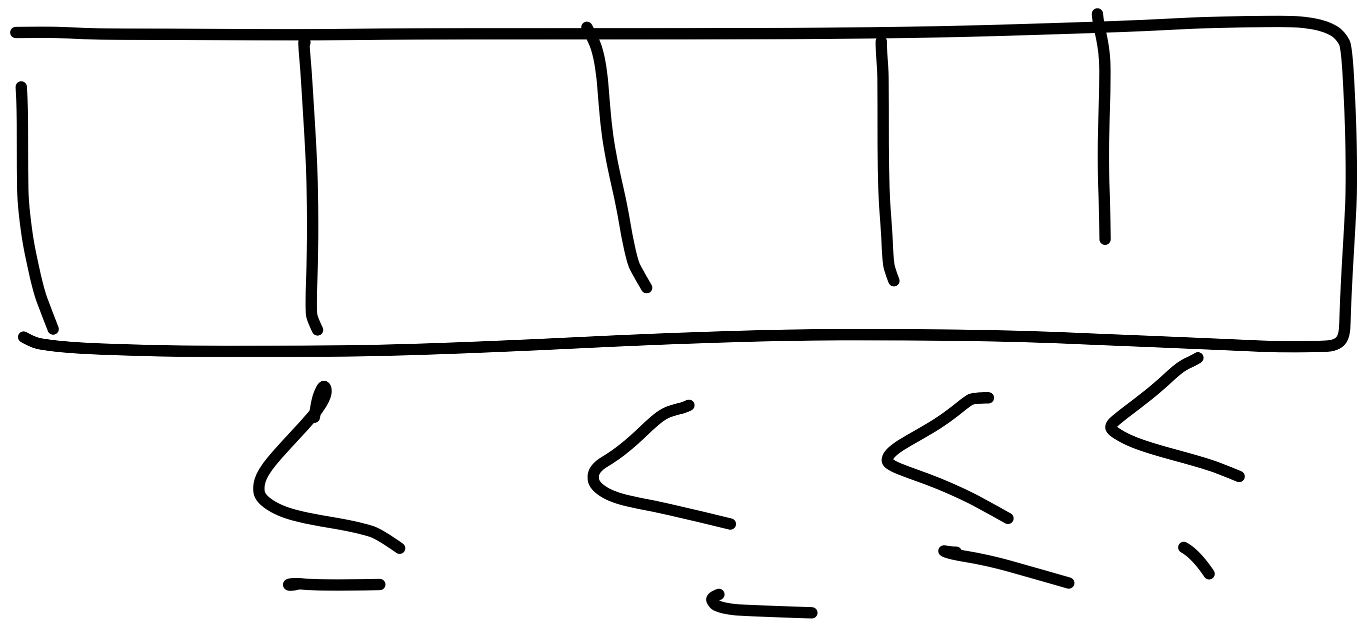
1	3
2	

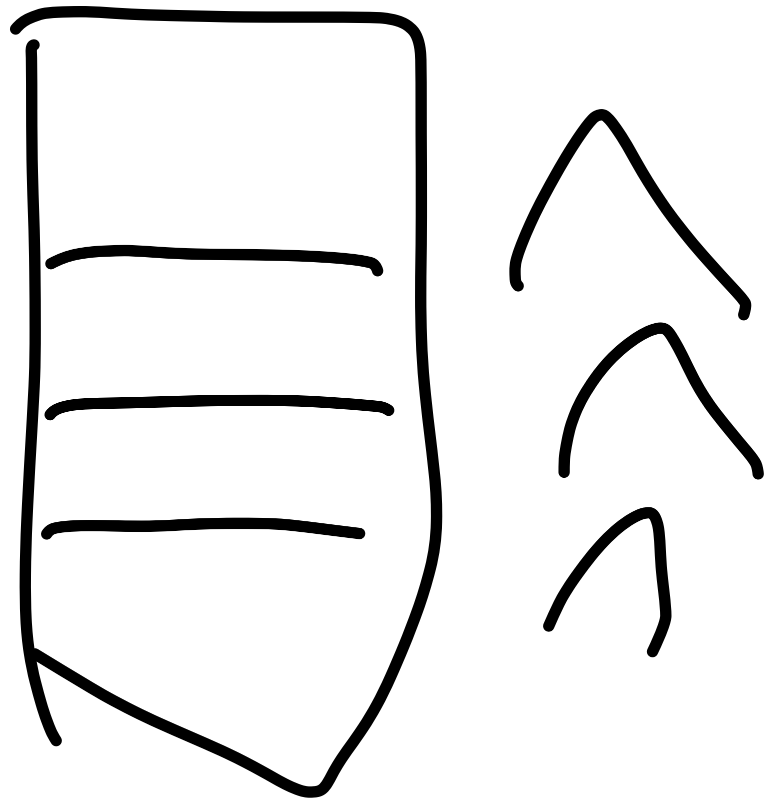
1	3
3	

2	2
3	

2	3
3	

- 영 태블로
  1. 각각의 박스에는 1과 N을 포함하는 그 사이의 정수가 채워져 있다.
  2. 각 박스에 적혀있는 정수는 왼쪽에 있는 정수보다 크거나 같아야 한다.
  3. 각 박스에 적혀있는 정수는 위에 있는 정수보다 커야 한다.





다이어그램과 태블로

https://www.acmicpc.net/problem/9646

- 영 다이어그램이 주어졌을 때, 영 태블로를 만드는 방법의 수를 구하는 문제
- $1 \le$ 행의 개수 $k \le 7$
- 각 행에 있는 박스의 개수 $l_1, l_2, \cdots, l_k$
- $7 \ge l_1 \ge l_2 \ge \cdots \ge l_k \ge 1$
- $k \le N \le 7$

다이어그램과 태블로

https://www.acmicpc.net/problem/9646

1	1
2	

1	1
3	

1	2
2	

1	2
3	

1	3
2	

1	3
3	

2	2
3	

2	3
3	

- 영 태블로
  1. 각각의 박스에는 1과 N을 포함하는 그 사이의 정수가 채워져 있다.
  2. 각 박스에 적혀있는 정수는 왼쪽에 있는 정수보다 크거나 같아야 한다.
  3. **각 박스에 적혀있는 정수는 위에 있는 정수보다 커야 한다.**

한 열에는 중복되는 수가 나오지 않는다.

2^7

비트마스크 → 열을 표현

+ 한 열에 있는 행의 개수

다이어그램과 태블로

https://www.acmicpc.net/problem/9646

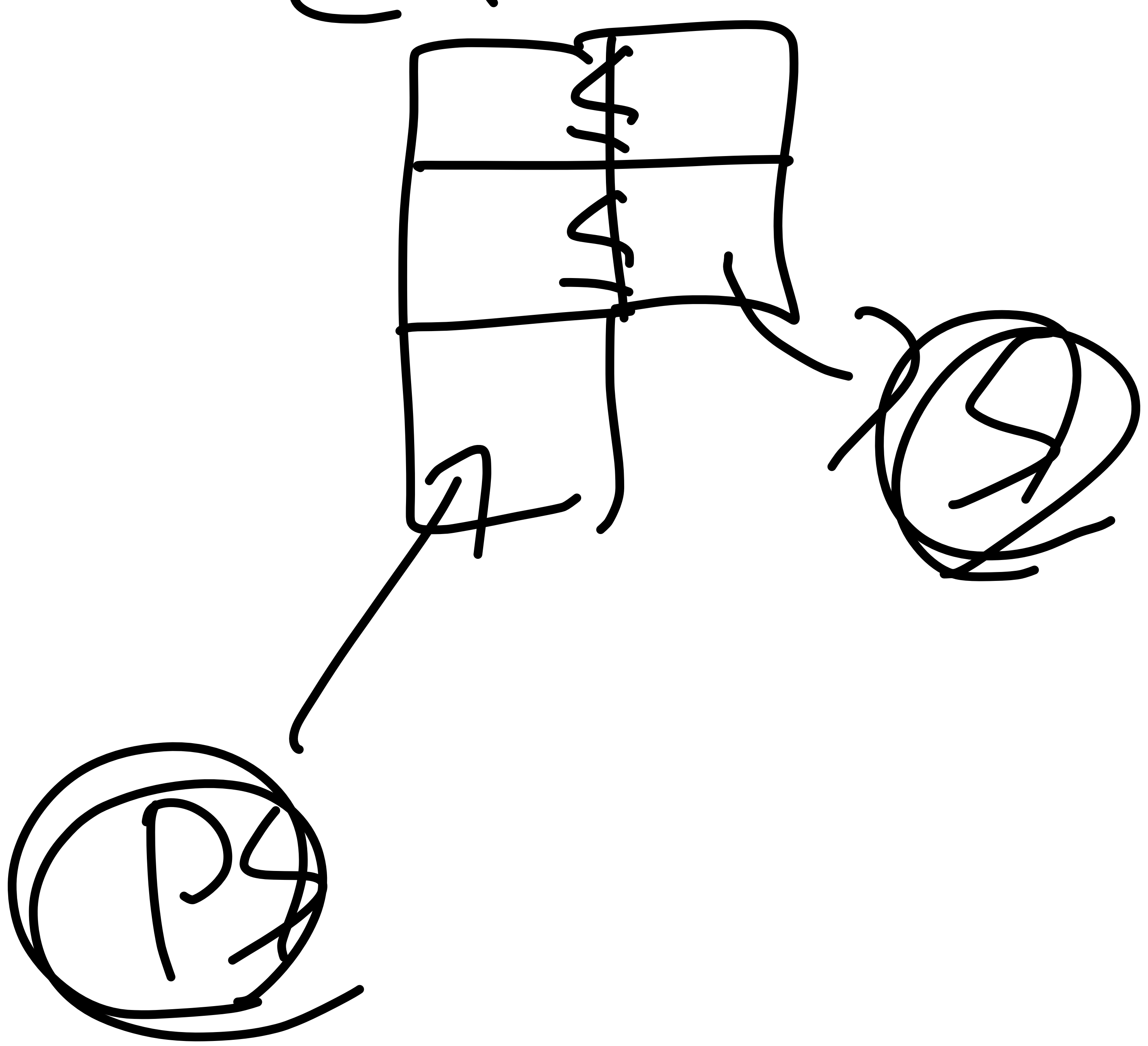
- 각각의 열에 대해서 같은 수는 올 수 없다.
- 또, 각 열에 대해서, 수는 아래로 갈수록 증가해야 한다.
- 따라서, 각 열에 등장한 수를 상태로 나타낼 수 있다.

다이어그램과 태블로

https://www.acmicpc.net/problem/9646

- D[c][s] = c번 열에 수의 상태가 s일 때, 경우의 수
- D[c][s] = $\boxed{\Sigma D[c-1][ps]}$

등장 상태



1~N

0~(N-1)

다이어그램과 테블로

https://www.acmicpc.net/problem/9646

- m = 열의 개수
- b[c] = c번 열에 있는 박스의 개수
- bit_count(s) = s에 있는 비트 1의 개수
- convert(s) = 비트 마스크 s를 배열로 바꿈

D[c][s]

bit_count(s) == b[c]

$17 = 10001_2$

Convert(17)

{0,4}

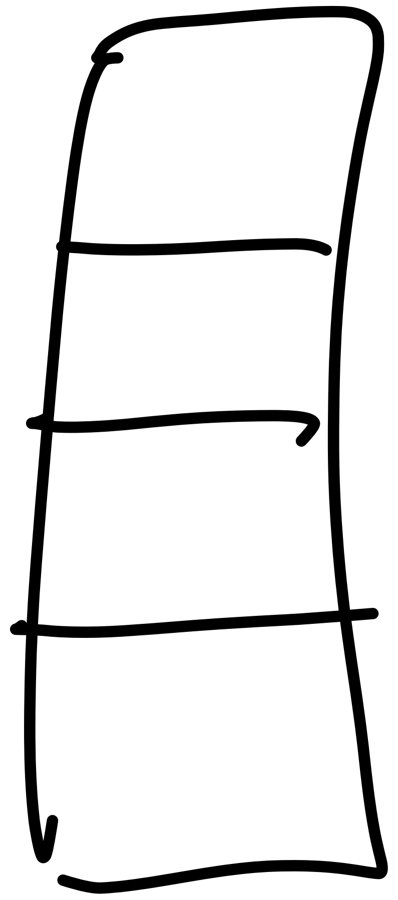
다이어그램과 테블로

https://www.acmicpc.net/problem/9646

```
for (int s=0; s<(1<<n); s++) {
    int cnt = bit_count(s);
    if (cnt != b[0]) continue;
    d[0][s] = 1;
}
```

이진

0번



0~(N-1)

4개

다이어그램과 태블로

https://www.acmicpc.net/problem/9646

```
for (int j=1; j<m; j++) {
    for (int s=0; s<(1<<n); s++) {
        int cnt = bit_count(s); if (cnt != b[j]) continue;
        for (int ps=0; ps<(1<<n); ps++) {
            int pcnt = bit_count(ps); if (pcnt != b[j-1]) continue;
            vector<int> v1 = convert(ps), v2 = convert(s);
            bool ok = true;
            for (int i=0; i<v2.size(); i++) {
                if (v1[i] > v2[i]) ok = false;
            }
            if (ok == false) continue;
            d[j][s] += d[j-1][ps];
        }
    }
}
```

j번열

j번의 상태

j-1 j

상태 ps

상태 s

$\leq$

다이어그램과 태블로

https://www.acmicpc.net/problem/9646

```
for (int s=0; s<(1<<n); s++) {
    int cnt = bit_count(s);
    if (cnt != b[0]) continue;
    d[0][s] = 1;
}
```

다이어그램과 태블로

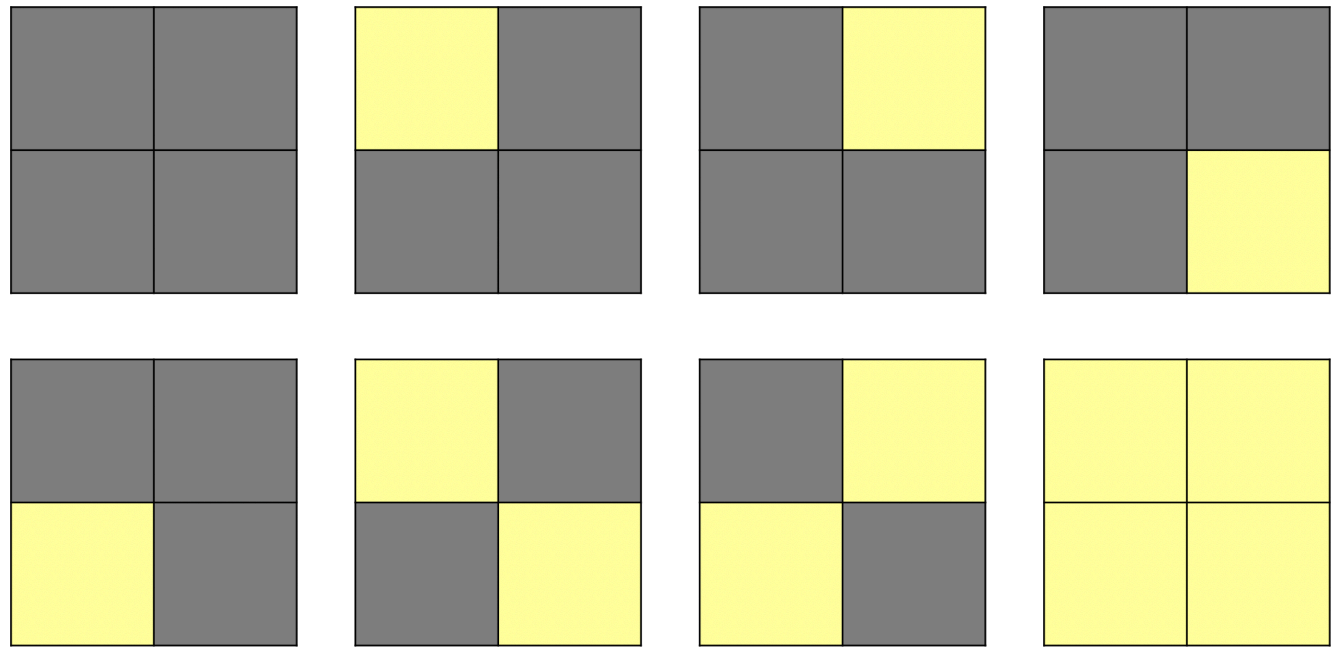
https://www.acmicpc.net/problem/9646

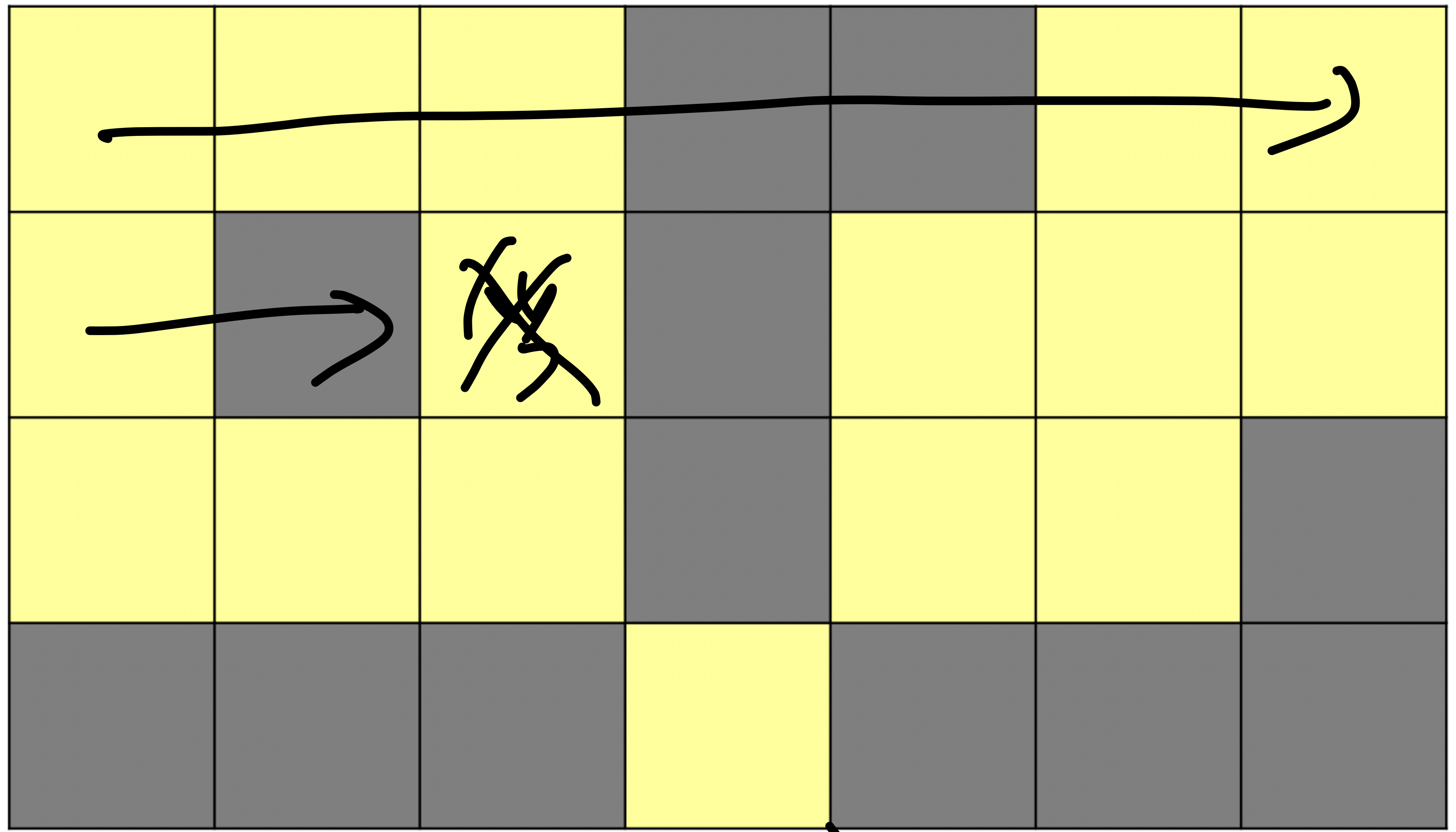
- 소스: http://codeplus.codes/e6717b8c15724b8e80bbc0ada40819e8

직사각형 색칠

https://www.acmicpc.net/problem/14275

- 단위 정사각형으로 나누어져 있는 N×M 크기의 직사각형이 있을 때 1 ≤ N ≤ 100, 1 ≤ M ≤ 8
- 아래 조건을 만족하게 색칠하는 방법의 수를 구하는 문제
- 1. 모든 칸은 색칠되어 있거나 비어있다.
- 2. 색칠된 칸과 인접한 색칠된 칸의 개수는 짝수개
- N = 2, M = 2이면 8가지 경우가 가능하다



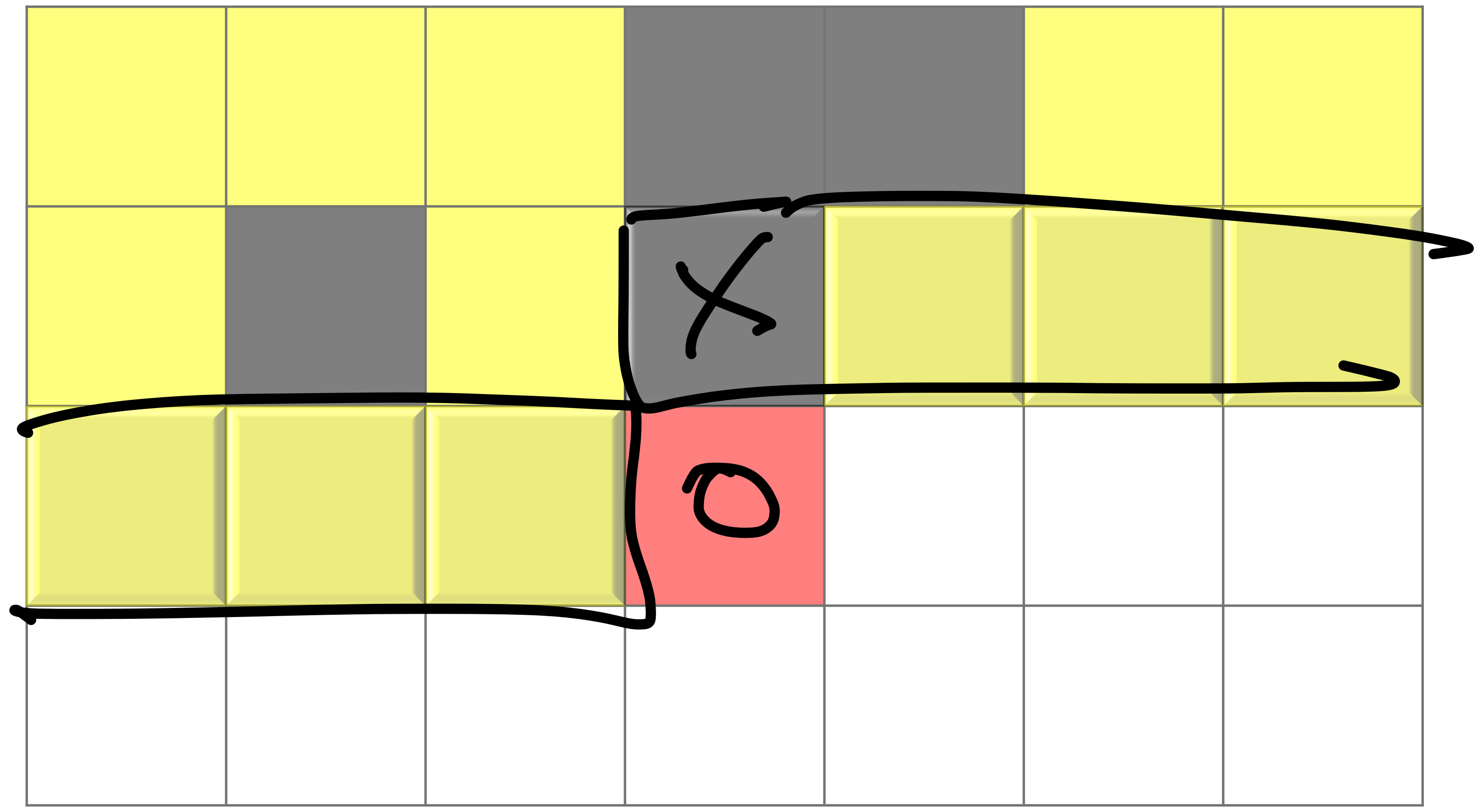


격자판 채우기

직사각형 색칠

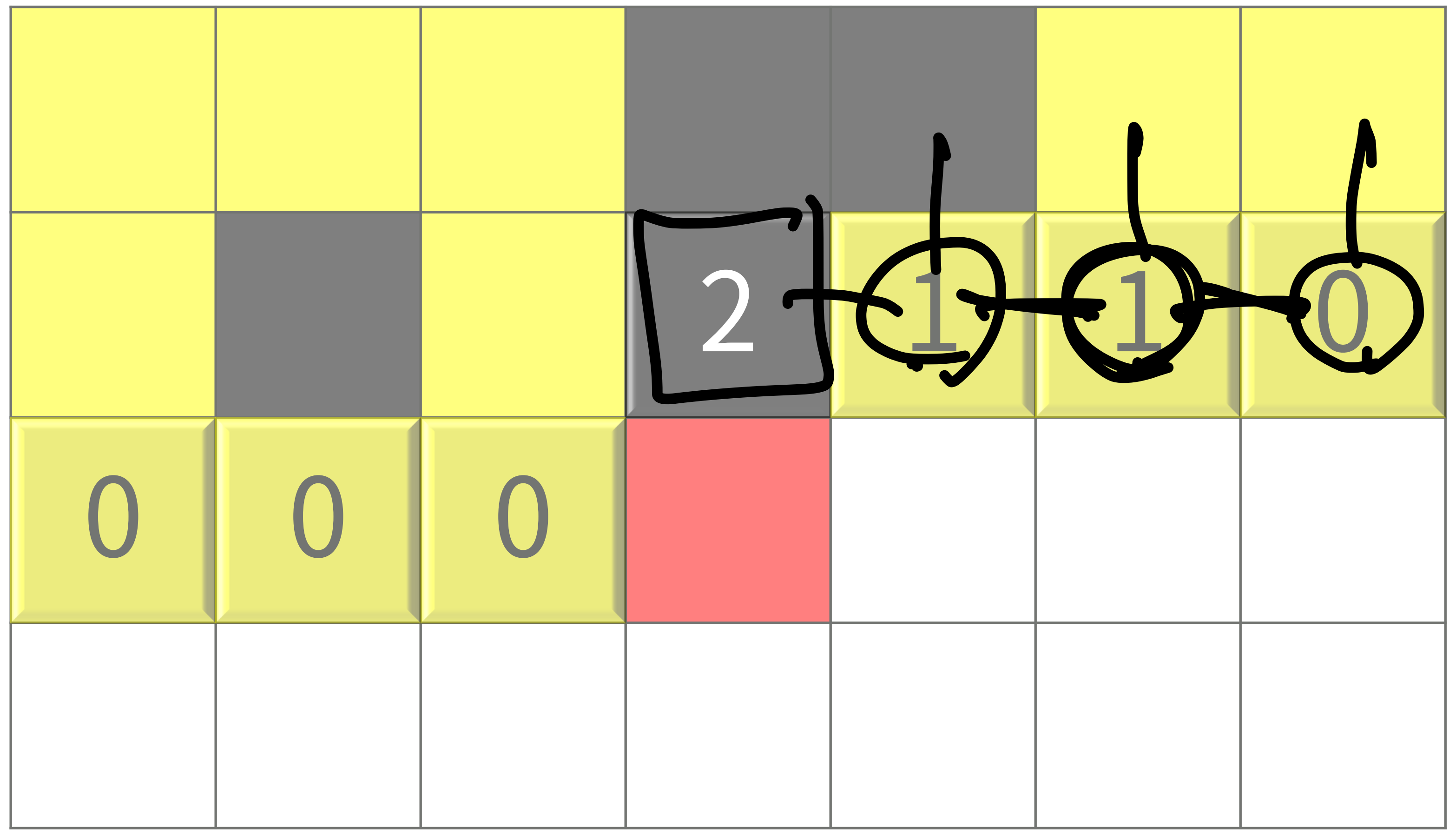
https://www.acmicpc.net/problem/14275

- 격자판 채우기와 비슷한 문제이다.
- 어떤 칸을 색칠하거나 색칠하지 않으면
- M개의 칸이 영향을 받는다.
- 각 칸은 총 몇 개의 상태가 있을까? 3가지



직사각형 색칠 노

https://www.acmicpc.net/problem/14275

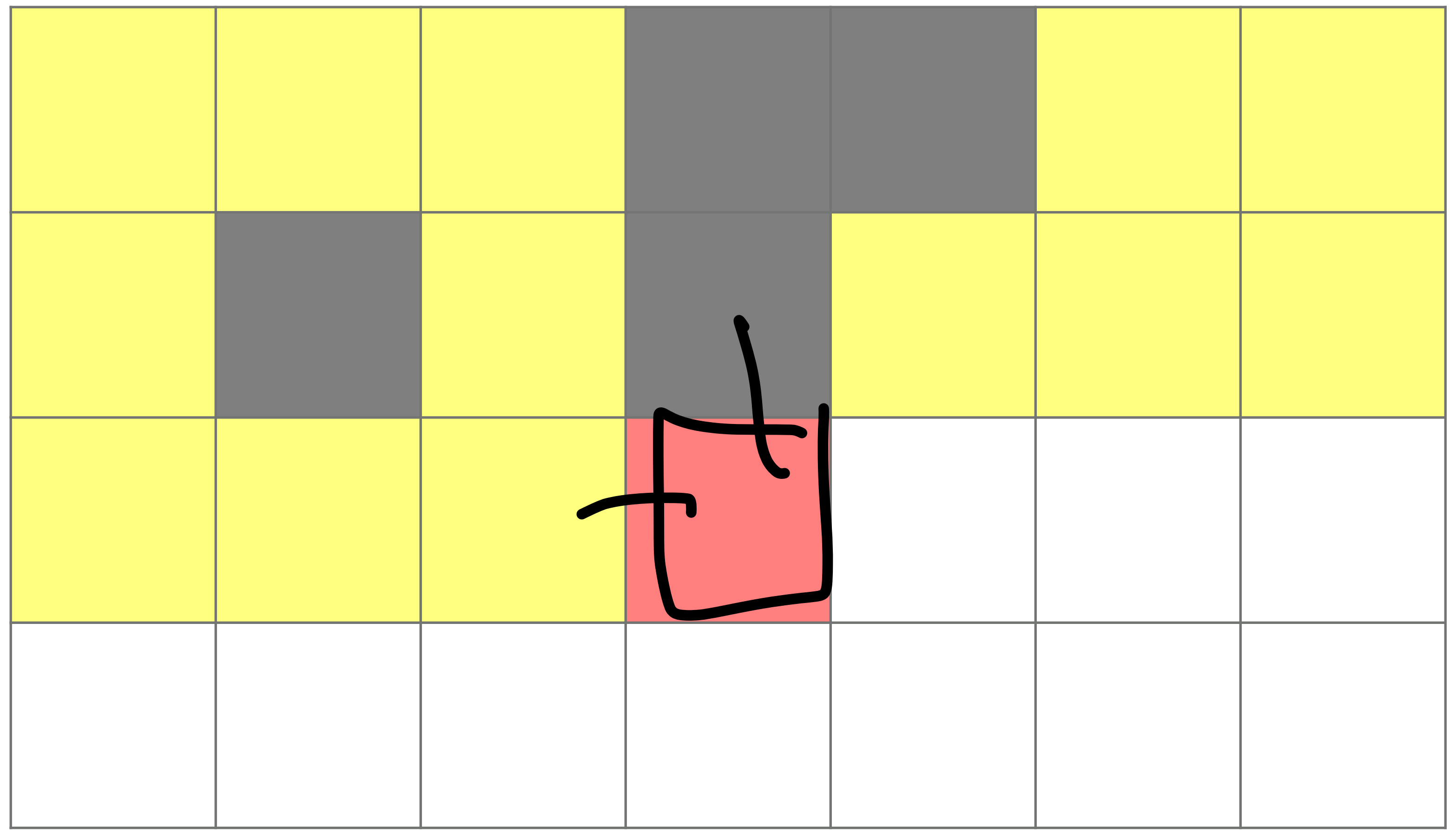


- 격자판 채우기와 비슷한 문제이다.
- 어떤 칸을 색칠하거나 색칠하지 않으면
- M개의 칸이 영향을 받는다.
- 각 칸은 총 몇 개의 상태가 있을까?
- 3개의 상태가 있다.
- 0: 색칠되어 있고, 인접한 색칠된 칸의 개수는 짝수
- 1: 색칠되어 있고, 인접한 색칠된 칸의 개수는 홀수
- 2: 색칠되어 있지 않다 (비어있는 칸)

직사각형 색칠

https://www.acmicpc.net/problem/14275

- 빨간 칸을 색칠하거나 색칠하지 않을 때
- 영향을 받는 칸은 2개가 있다. (위, 왼쪽)

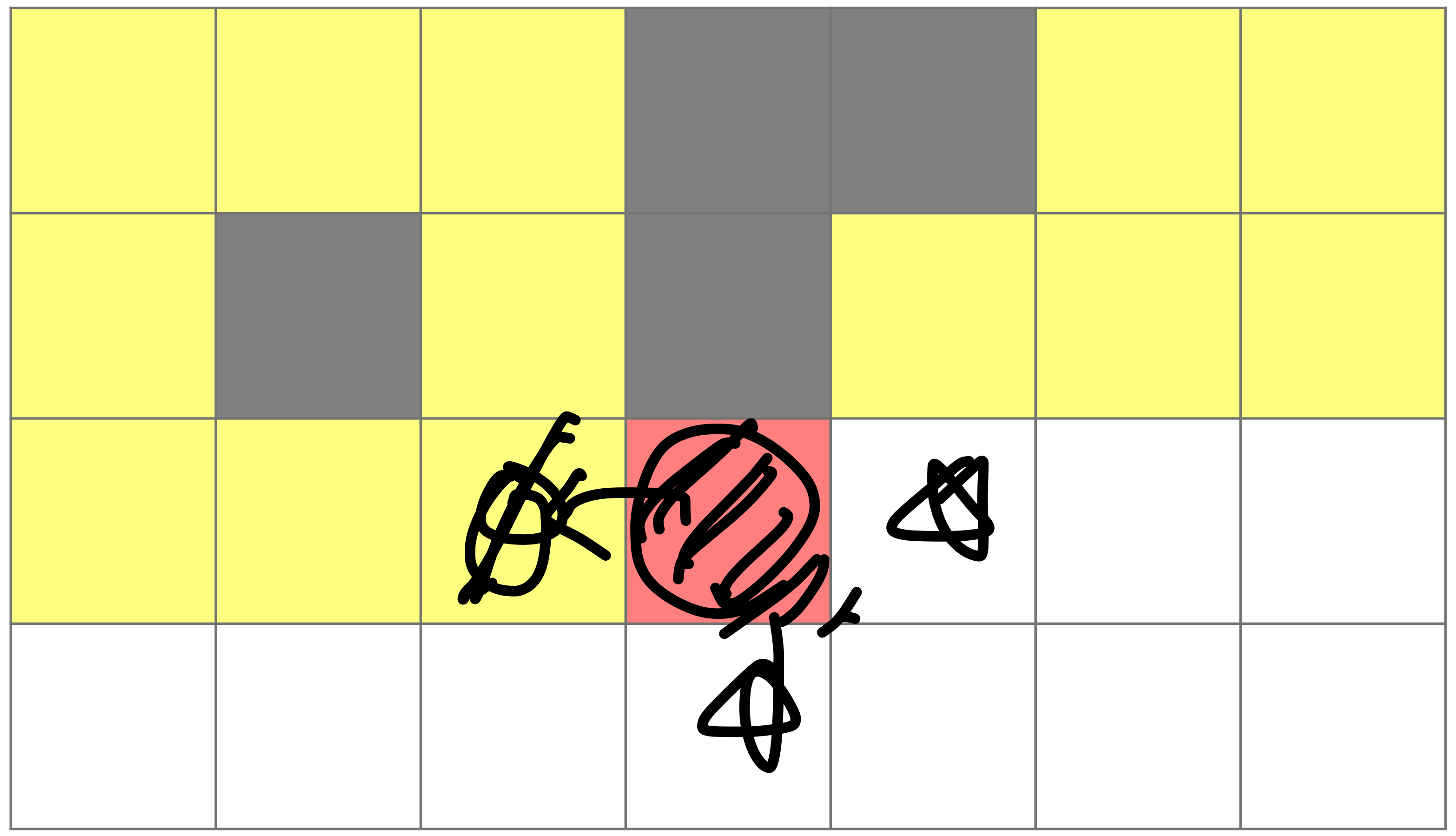


직사각형 색칠

https://www.acmicpc.net/problem/14275

0 짝수
1 홀수
2 : X

- 위 칸이 비어있는 경우에는 현재 칸(빨간색)을 색칠하는 것과
- 색칠하지 않는 것 모두 가능하다.
- 현재 칸을 색칠하면 왼쪽 칸의 상태가 변경되어야 한다.
- 현재 칸을 색칠하지 않으면 왼쪽 칸의 상태는 그대로 유지하면 된다.

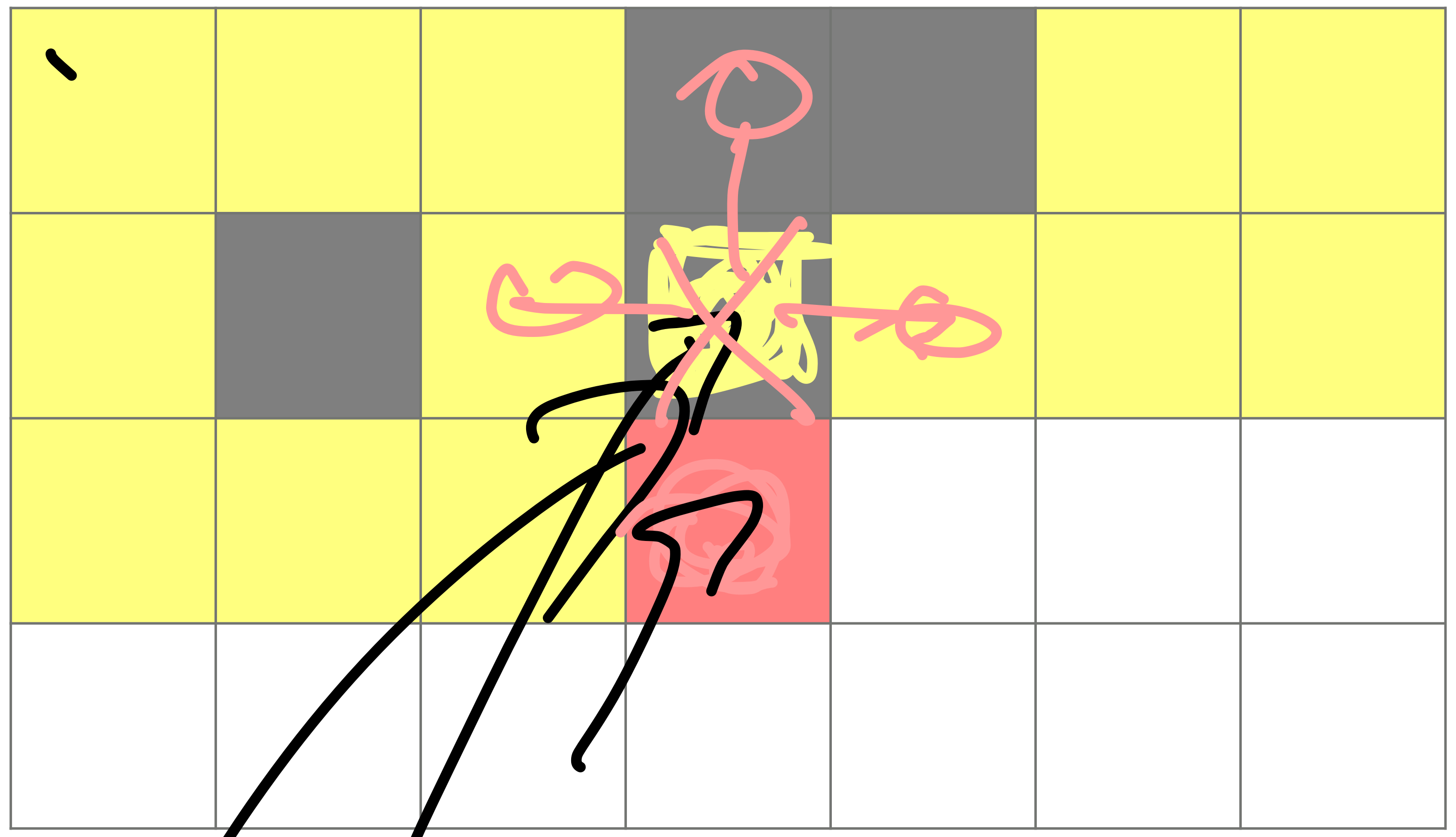


직사각형 색칠

https://www.acmicpc.net/problem/14275

모든 색

인접한 색칠 : 짝



- 위 칸이 색칠되어 있는 경우에는
- 현재 칸(빨간색)을 색칠하는 것과 색칠하지 않는 것 중에서
- 하나만 할 수 있다.
- 이 선택은 위 칸의 상태에 의해서 결정된다.
- 위 칸과 인접한 색칠된 칸이 홀수 개면 현재 칸은 색칠해야 하고
- 색칠된 칸이 짝수 개면 현재 칸을 색칠하면 안된다.

홀수개 인접 : 색

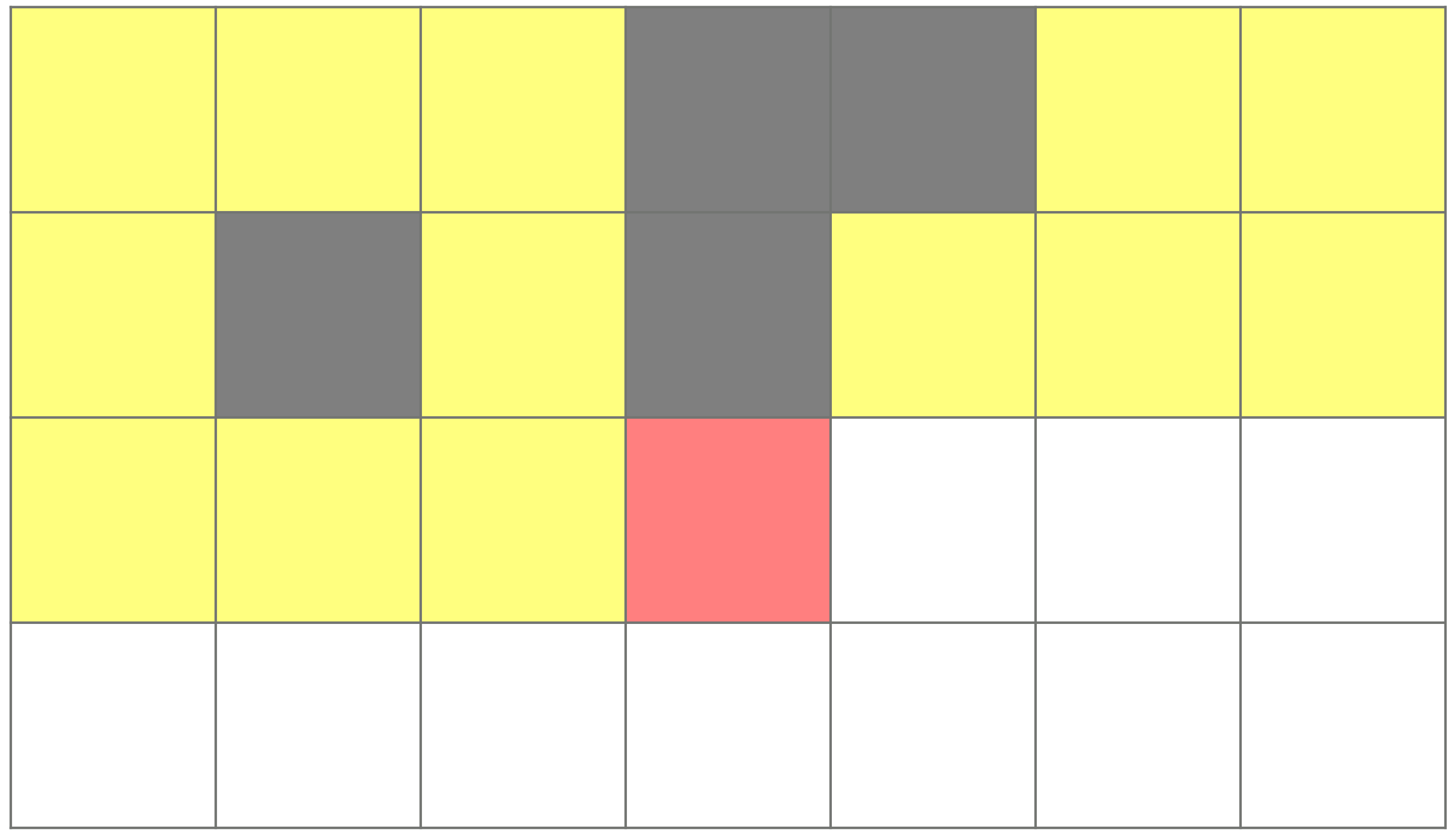
짝수개

0, 1, 2

직사각형 색칠

https://www.acmicpc.net/problem/14275

- go(num, state) = num번 칸을 채우고, 이전 M개 칸의
- 상태가 state일 때 채우는 방법의 수
- 위 칸의 상태 up은 (state/pow3[m-1]) % 3로 구할 수 있다.
- 왼쪽 칸의 상태 left는 (state/pow3[0]) % 3로 구할 수 있다.



직사각형 색칠

https://www.acmicpc.net/problem/14275

- 현재 칸을 색칠했을 때 왼쪽 칸의 변경된 상태 cleft
- left == 2 라면 (왼쪽 칸이 비어있으면)
  - cleft = 2
- left == 0 이라면 (왼쪽 칸이 색칠되어 있고, 짝수 개의 색칠된 칸과 인접해 있다면)
  - cleft = 1 (현재 칸이 색칠되어서 왼쪽 칸은 홀수 개의 색칠된 칸과 인접해 있다)
- left == 1 이라면 (왼쪽 칸이 색칠되어 있고, 홀수 개의 색칠된 칸과 인접해 있다면)
  - cleft = 0 (현재 칸이 색칠되어서 왼쪽 칸은 짝수 개의 색칠된 칸과 인접해 있다)

직사각형 색칠

https://www.acmicpc.net/problem/14275

- 현재 칸을 색칠했을 때 현재 칸의 변경된 상태 cur (위 칸은 비어있다고 가정)
- left == 2 라면 (왼쪽 칸이 비어있으면)
  - cur = 0
- left != 2 이라면 (왼쪽 칸이 색칠되어 있다면)
  - cur = 1 (현재 칸이 홀수 개의 색칠된 칸과 인접해 있다))
- 위 칸이 색칠되어 있으면 cur을 반대로 (0 → 1, 1 → 0) 만들면 된다.

직사각형 색칠

https://www.acmicpc.net/problem/14275

- 현재 칸이 가장 왼쪽 칸이면 왼쪽 칸이 없기 때문에
  - cleft = left
  - cur = 0
- 이라고 볼 수 있다.

직사각형 색칠

3^k

https://www.acmicpc.net/problem/14275

- 위 칸의 정보는 다음 상태를 구할 때 의미가 없어진다.
- 다음 상태를 구하기 위해서 위 칸의 정보와 왼쪽 칸의 정보를 제거한다.
- nstate = (state-up*pow3[m-1] - left*pow3[0]) * 3;

<<

직사각형 색칠

https://www.acmicpc.net/problem/14275

- 위 칸이 비어있으면, 현재 칸은 색칠할 수도 있고, 하지 않을 수도 있다.

```
if (up == 2) { // up: empty
    // cur: empty
    ans += go(num+1, nstate + left*pow3[1] + 2);
    // cur: colored
    ans += go(num+1, nstate + cleft*pow3[1] + cur);
}
```

직사각형 색칠

https://www.acmicpc.net/problem/14275

- 위 칸이 비어있지 않으면, 위 칸의 상태에 따라서 색칠할지 말지 결정된다.

```
else { // up: colored
    cur = 1-cur;
    if (up == 0) { // up: even
        // cur: empty
        ans += go(num+1, nstate + left*pow3[1] + 2);
    } else { // up: odd
        // cur: colored
        ans += go(num+1, nstate + cleft*pow3[1] + cur);
    }
}
```

직사각형 색칠

https://www.acmicpc.net/problem/14275

$3 \quad NM \boxed{2^M}$

$0, 1$

- 시간 복잡도: O(NM3^M)
- 가장 첫 칸의 위는 모두 비어있다고 가정하면 된다.

$NM \boxed{3^M}$

$0, 1, 2$

직사각형 색칠

https://www.acmicpc.net/problem/14275

- 소스: http://codeplus.codes/f65cb1ac92a64ab2961ec013a27aeadb

도로 건설

https://www.acmicpc.net/problem/14276

각 점과 연결한 도로의 개수

비트마스크

- N개의 도시가 있고, 1번부터 N번까지 번호가 매겨져 있다. 도로는 없다.
- 아래 조건을 지키면서 총 M개의 양방향 도로를 만들어야 한다. 양방향 도로는 두 집을 연결한다.
- 1. 서로 다른 두 집 A와 B가 있을 때, 0 < |A-B| ≤ K 를 만족해야 도로를 연결할 수 있다. 같은 집의 쌍에 대해서 여러 개의 도로를 만들 수 있다.
- 2. 모든 집은 짝수개의 도로와 인접해야 한다. (0도 짝수)
- N, M, K가 주어졌을 때, 도로를 만드는 방법의 수
- 1 ≤ N ≤ 30, 0 ≤ M ≤ 30, 1 ≤ K ≤ 8

2^{30}

A 2^K B

10억

K+1

2

k=3

짝 0

홀 1

1~ 13 14 17번 18

도로 건설

https://www.acmicpc.net/problem/14276

- 번호가 높은 집에서 낮은 집으로 도로를 연결한다고 해도 된다.

도로 건설

https://www.acmicpc.net/problem/14276

i-k … i-2 i-1 i

- d[i][j][state]
  - i번 집의 도로를 연결하려고 한다. (i-1번 집까지는 도로를 모두 연결한 상태)
  - 현재 j개의 도로를 연결
  - i번 집부터 K개의 집이 연결된 도로의 상태는 state (짝수면 0, 홀수면 1)

도로 건설

https://www.acmicpc.net/problem/14276

- d[i][j][state]
  - i번 집의 도로를 연결하려고 한다. (i-1번 집까지는 도로를 모두 연결한 상태)
  - 현재 j개의 도로를 연결
  - i번 집부터 K개의 집이 연결된 도로의 상태는 state (짝수면 0, 홀수면 1)
- i번 집에서 도로를 연결할 수 있는 집의 번호는 i-1, i-2, …, i-K 이다.
- 이 집 중에서 어떤 집에 도로를 각각 몇 개 연결해야 하는지 구해야 한다.

도로 건설

https://www.acmicpc.net/problem/14276

- 예를 들어, K = 2이고, 3번 집에 도로를 연결해야 하는 경우에
- 3번-2번, 3번-1번을 순서대로 연결하는 경우와 3번-1번, 3번-2번을 순서대로 연결하는 경우를 다른 경우라고 해야 한다.
- 앞의 점화식에서는 이것을 처리하기 매우 어렵기 때문에
- 변수 하나를 더 추가해야 한다.

도로 건설

+1

1 2 3 4

https://www.acmicpc.net/problem/14276

cur 2 1 0

k=3

cur=0

- d[i][j][cur][state]
  - i번 집의 도로를 연결하려고 한다. (i-1번 집까지는 도로를 모두 연결한 상태)
  - 현재 j개의 도로를 연결
  - i번 집과 i-(cur+1)번 집에 도로를 연결하는 것을 고려하는 중
  - i번 집부터 K개의 집이 연결된 도로의 상태는 state (짝수면 0, 홀수면 1)
- i번 집에서 도로를 연결할 수 있는 집의 번호는 i-1, i-2, …, i-K 이다.
- 이 집 중에서 어떤 집에 도로를 각각 몇 개 연결해야 하는지 구해야 한다.

도로 건설

1

cur=0

K-1

https://www.acmicpc.net/problem/14276

- d[i][j][cur][state]
  - i번 집의 도로를 연결하려고 한다. (i-1번 집까지는 도로를 모두 연결한 상태)
  - 현재 j개의 도로를 연결
  - i번 집과 i-(cur+1)번 집에 도로를 연결하는 것을 고려하는 중
  - i번 집부터 K개의 집이 연결된 도로의 상태는 state (짝수면 0, 홀수면 1)
- cur = K인 경우: i번 집에서 연결할 수 있는 모든 도로의 상태를 계산한 것
  - 경우의 수: d[i+1][j][0][state << 1]
  - 이때 i-K번은 더 이상 도로와 연결할 수 없기 때문에, i-K번 집의 도로 수가 짝수인 것을 확인해야 한다.

도로 건설

i-(cur+1) i

https://www.acmicpc.net/problem/14276

- d[i][j][cur][state]
  - i번 집의 도로를 연결하려고 한다. (i-1번 집까지는 도로를 모두 연결한 상태)
  - 현재 j개의 도로를 연결
  - i번 집과 i-(cur+1)번 집에 도로를 연결하는 것을 고려하는 중
  - i번 집부터 K개의 집이 연결된 도로의 상태는 state (짝수면 0, 홀수면 1)
- cur < K인 경우: i번 집과 i-(cur+1)집의 도로를 연결해야 함
  - 도로를 건설하는 경우: d[i][j+1][cur][state^(1<<0)^(1<<(cur+1))]
  - 도로를 건설하지 않는 경우: d[i][j][cur+1][state]

도로 건설

https://www.acmicpc.net/problem/14276

- 소스: http://codeplus.codes/f1775b58db9b46e7a484e651ddfbe425

중복 X

상태

바뀌었나?

상태'

0,1,2

3진법