Ρομποτική Ι

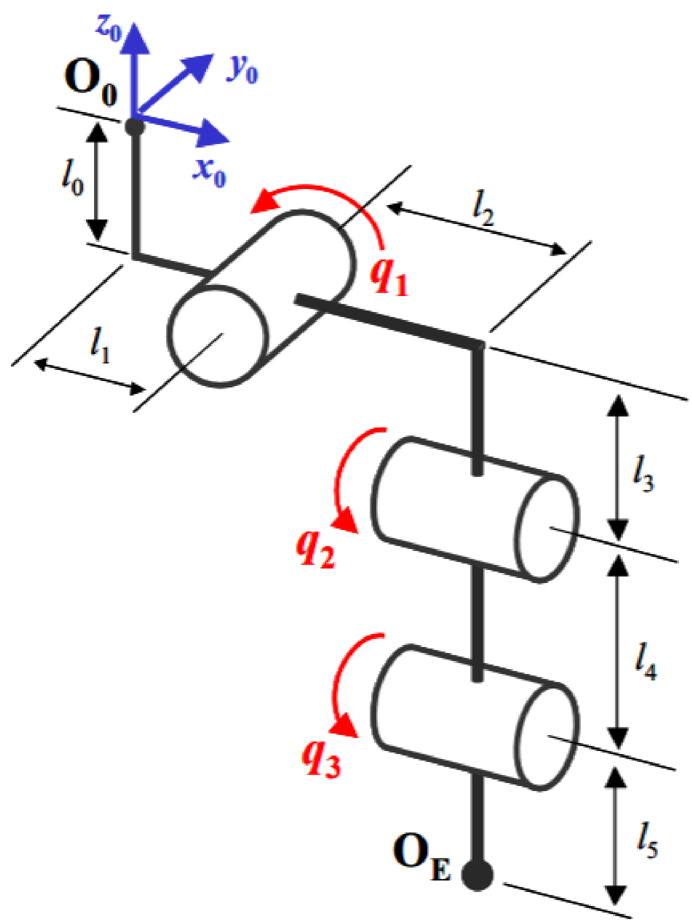
Εξαμηνιαία Εργασία 2020-2021

Ρομποτικός Χειριστής τριών στροφικών βαθμών ελευθερίας

Κωνσταντίνος Σπάθης

AM:03117048

Στο ακόλουθο σχήμα εικονίζεται ο ρομποτικός χειριστής πάνω στον οποίο θα γίνει η ανάλυση της κινηματικής του και θεωρητικά και σε προσομοίωση MATLAB.

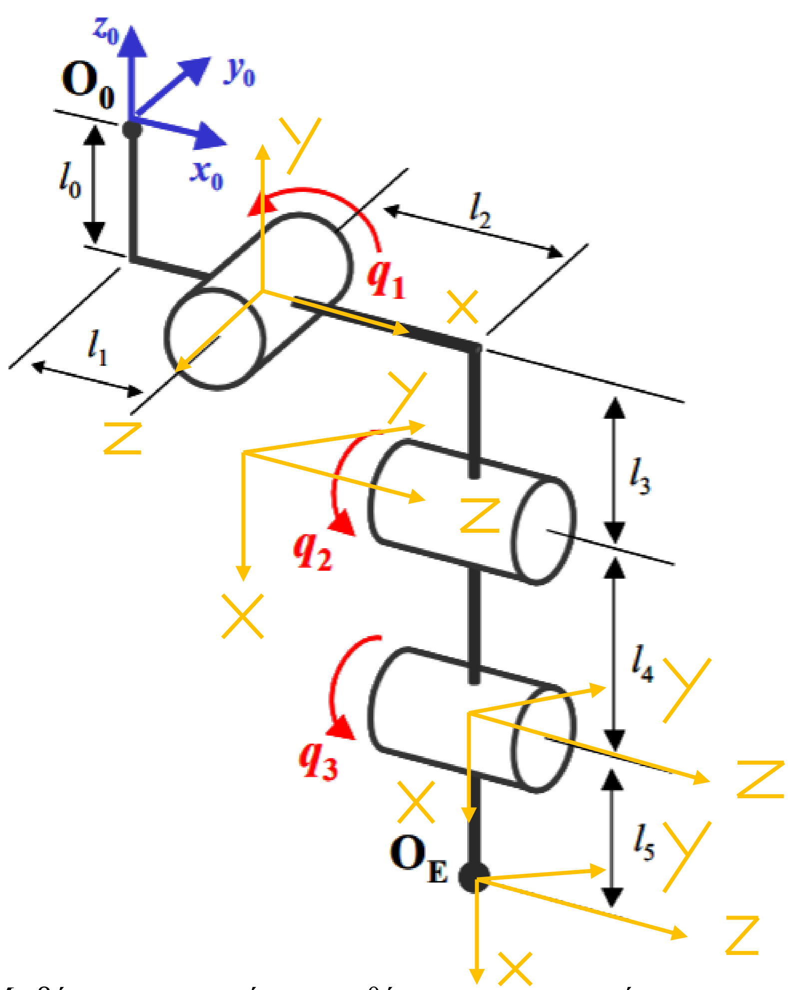


Α. Θεωρητική Ανάλυση

Για την θεωρητική ανάλυση παρακάτω παρατίθενται τα αποτελέσματα των υπολογισμών στο word και στο τέλος του εγγράφου παρατίθενται οι αριθμητικοί υπολογισμοί από τους οποίους προέκυψαν τα αποτελέσματα.

1.

Με εφαρμογή της μεθόδου Denavit-Hartenberg (D-H) τα πλαίσια αναφοράς των συνδέσμων του βραχίονα τοποθετήθηκαν όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Με βάση την παραπάνω τοποθέτηση των συστημάτων αναφοράς ο πίνακας D-H που προκύπτει είναι ο ακόλουθος.

Σύνδεσμος i	di	θi	ai	αi
0’	-lo	0	l1	+90
1	0	q1-90	l3	-90
2	l2	q2	l4	0
E	0	q3	l5	0

Για τη συνέχεια της ανάλυσης, υποθέτουμε ότι: l3=0.

2.

Οι πίνακες μετάβασης από το σύστημα i στο i+1 δίνονται με χρήση του παρακάτω τύπου:

$$A_i^{i-1} = \begin{bmatrix} cos\theta_i & -sin\theta_i \cdot cosa_i & sin\theta_i \cdot sina_i & \mathrm{a}_i \cdot cos\theta_i \\ sin\theta_i & cos\theta_i \cdot cosa_i & -cos\theta_i \cdot sina_i & \mathrm{a}_i \cdot sin\theta_i \\ 0 & sina_i & cosa_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα, οι πίνακες μετάβασης από το σύστημα 0 στο i είναι οι ακόλουθοι :

<u>Από το σύστημα 0 στο 0':</u>

$$A_{0'}^{0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Από το σύστημα 0' στο 1:</u>

$$A_1^{0'} = \begin{bmatrix} s_2 & 0 & c_1 & 0 \\ -c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Από το σύστημα 1 στο 2:</u>

$$A_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_4 \cdot c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_4 \cdot s_2 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Από το σύστημα 2 στο E:</u>

$$A_E^2 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & \mathrm{l}_5 \cdot c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & \mathrm{l}_5 \cdot s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Από το σύστημα 0 στο 1:</u>

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & c_1 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_1 & 0 & s_1 & -l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Από το σύστημα 0 στο 2:</u>

$$A_2^0 = \begin{bmatrix} s_1 \cdot c_2 & -s_1 \cdot s_2 & c_1 & l_1 + l_2 \cdot c_1 + (l_4 \cdot c_2) \cdot s_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_4 \cdot s_2 \\ -c_1 \cdot c_2 & c_1 \cdot s_2 & s_1 & -l_0 + l_2 \cdot s_1 - (l_4 \cdot c_2) \cdot c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Με πολλαπλασιασμό των παραπάνω πινάκων προκύπτει η παρακάτω ευθεία κινηματική εξίσωση του ρομπότ

<u>Από το σύστημα 0 στο Ε:</u>

$$A_E^0 = \begin{bmatrix} s_1 \cdot c_{23} & -s_1 \cdot s_{23} & c_1 & l_1 + l_2 \cdot c_1 + (l_4 \cdot c_2) \cdot s_1 + \mathrm{l}_5 \cdot c_{23} s_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & l_4 \cdot s_2 + \mathrm{l}_5 \cdot s_{23} \\ -c_1 \cdot c_{23} & c_1 \cdot s_{23} & s_1 & -l_0 + l_2 \cdot s_1 - (l_4 \cdot c_2) \cdot c_1 - \mathrm{l}_5 \cdot c_{23} \cdot c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.

Για την εύρεση της Ιακωβιανής μήτρας θα υπολογίσουμε τα J_L , J_A για κάθε άρθρωση:

<u>Για την άρθρωση 1:</u>

$$\overrightarrow{\boldsymbol{J_{A_1}}} = \widehat{\boldsymbol{b_{0'}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{J_{L_1}}} = \begin{bmatrix} -l_2 \cdot s_1 + (l_4 \cdot c_2) \cdot c_1 + (\mathrm{l}_5 \cdot c_{23}) \cdot c_1 \\ 0 \\ l_2 \cdot c_1 + (l_4 \cdot c_2) \cdot s_1 + (\mathrm{l}_5 \cdot c_{23}) \cdot s_1 \end{bmatrix}$$

<u>Για την άρθρωση 2:</u>

$$\overrightarrow{\boldsymbol{J_{A_2}}} = \widehat{\boldsymbol{b_1}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ s_1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{J_{L_2}}} = \begin{bmatrix} -(l_4 \cdot s_2) \cdot s_1 - \mathrm{l}_5 \cdot s_{23} \cdot s_1 \\ l_4 \cdot c_2 + \mathrm{l}_5 \cdot c_{23} \\ (l_4 \cdot s_2) \cdot c_1 + \mathrm{l}_5 \cdot s_{23} \cdot c_1 \end{bmatrix}$$

<u>Για την άρθρωση 3:</u>

$$\overrightarrow{\boldsymbol{J_{A_3}}} = \widehat{\boldsymbol{b_2}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ s_1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{J_{L_3}}} = \begin{bmatrix} -(\mathrm{l}_5 \cdot s_{23}) \cdot s_1 \\ \mathrm{l}_5 \cdot c_{23} \\ \mathrm{l}_5 \cdot s_{23} \cdot c_1 \end{bmatrix}$$

Η Ιακωβιανή μήτρα που περιγράφει το ευθύ διαφορικό κινηματικό μοντέλο δίνεται είναι η ακόλουθη:

$$\vec{J} = \begin{bmatrix} -l_2 \cdot s_1 + (l_4 \cdot c_2) \cdot c_1 + (\mathrm{l}_5 \cdot c_{23}) \cdot c_1 & -(l_4 \cdot s_2) \cdot s_1 - \mathrm{l}_5 \cdot s_{23} \cdot s_1 & -(\mathrm{l}_5 \cdot s_{23}) \cdot s_1 \\ 0 & l_4 \cdot c_2 + \mathrm{l}_5 \cdot c_{23} & \mathrm{l}_5 \cdot c_{23} \\ l_2 \cdot c_1 + (l_4 \cdot c_2) \cdot s_1 + (\mathrm{l}_5 \cdot c_{23}) \cdot s_1 & (l_4 \cdot s_2) \cdot c_1 + \mathrm{l}_5 \cdot s_{23} \cdot c_1 & \mathrm{l}_5 \cdot s_{23} \cdot c_1 \\ 0 & c_1 & c_1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & s_1 \end{bmatrix}$$

4.

Οι ιδιόμορφες κινηματικές διατάξεις του συστήματος (singular configurations) προκύπτουν από τον μηδενισμό της $\det(J_L)$. Συγκεκριμένα, είναι $\det(J_L) = l_4 l_5(l_4 c_2 + l_5 c_{23}) s_3$. Άρα,

i. **$s_3 = 0$**
Ισοδύναμα η παραπάνω σχέση δίνει $q_3 = 0$ ή π , αφού μελετάμε το σύστημα στο διάστημα $(-\pi, \pi]$.
Αυτό είναι ένα work space singularity, γιατί ο βραχίονας θα μπορεί να κινηθεί σε μια διεύθυνση κάθετη σε αυτούς με αποτέλεσμα να χάνεται μια κάθετη διεύθυνση κίνησης, δηλαδή σαν να χάνεται η άρθρωση q_3 .

ii. **$l_4 c_2 + l_5 c_{23} = 0$**
Αυτή η απόσταση από το σχήμα φαίνεται ότι είναι η απόσταση του τελικού εργαλείου δράσης από τον άξονα που είναι άξονας περιστροφής της q1.
Όταν αυτή η απόσταση μηδενιστεί αντιστοιχεί σε διατάξεις, όπου το τελικό εργαλείο είναι πάνω στον άξονα της 1ης άρθρωσης.
Αυτό είναι ένα internal singularity γιατί το εργαλείο έχει πέσει πάνω στη διεύθυνση του άξονα περιστροφής της q1.

Για λόγους ευκολίας και ταχύτητας στην γραφή τέθηκαν τα ακόλουθα:

$d1 = l_4 c_2 + l_5 c_{23}$, $d1 = d1(q_2, q_3)$

$d2 = l_4 s_2 + l_5 s_{23}$, $d2 = d2(q_2, q_3)$

Επομένως, για $\det(J_L) \neq 0$ το αντίστροφο διαφορικό κινηματικό μοντέλο του ρομπότ ως προς τη γραμμική ταχύτητα του τελικού εργαλείου δράσης είναι το ακόλουθο:

$$\boldsymbol{J_{L_1}}^{-1} = \frac{1}{l_4 \cdot \mathrm{l}_5 \cdot s_3 \cdot (l_4 \cdot c_2 + \mathrm{l}_5 \cdot c_{23})} \cdot \begin{bmatrix} l_5 \cdot c_1 \cdot s_3 & 0 & l_5 \cdot s_1 \cdot s_3 \\ l_5 \cdot c_{23} \cdot (l_2 \cdot c_1 + d_1 \cdot s_1) & d_1 \cdot l_5 \cdot s_{23} & l_5 \cdot c_{23} \cdot (l_2 \cdot s_1 - d_1 \cdot c_1) \\ -d_1 \cdot (l_2 \cdot c_1 + d_1 \cdot s_1) & -d_1 \cdot d_2 & -d_1 \cdot (l_2 \cdot s_1 - d_1 \cdot c_1) \end{bmatrix}$$

5.

Για δεδομένη θέση p_E του τελικού εργαλείου δράσης το αντίστροφο γεωμετρικό μοντέλο είναι το ακόλουθο. Θεωρώντας δεδομένο το ευθύγραμμο γεωμετρικό μοντέλο

$$p_E(q_1,q_2,q_3) = \begin{bmatrix} l_1 + l_2 \cdot c_1 + (l_4 \cdot c_2) \cdot s_1 + (\mathrm{l}_5 \cdot c_{23}) \cdot s_1 \\ l_4 \cdot s_2 + \mathrm{l}_5 \cdot s_{23} \\ -l_0 + l_2 \cdot s_1 - l_4 \cdot c_2 \cdot c_1 - (\mathrm{l}_5 \cdot c_{23}) \cdot c_1 \end{bmatrix}$$

Το αντίστροφο γεωμετρικό μοντέλο που προκύπτει είναι το ακόλουθο:

<u>Για την άρθρωση q3:</u>

$$q_3 = \pm \arccos\left(\frac{(p_{Ex} - l_1)^2 + {p_{Ey}}^2 + (p_{Ez} + l_0)^2 - {l_2}^2 - {l_4}^2 - {l_5}^2}{2 \cdot l_4 \cdot \mathrm{l}_5}\right)$$

<u>Για την άρθρωση q2:</u>

$$q_2 = \pm \arccos\left(\frac{\mathrm{l}_5 \cdot s_3 \cdot p_{Ey} \pm (l_4 + \mathrm{l}_5 \cdot c_3) \cdot \sqrt{{\mathrm{l}_5}^2 \cdot {s_3}^2 + (l_4 + \mathrm{l}_5 \cdot c_3)^2 - {p_{Ey}}^2}}{{\mathrm{l}_5}^2 \cdot {s_3}^2 + (l_4 + \mathrm{l}_5 \cdot c_3)^2}\right)$$

<u>Για την άρθρωση q1:</u>

$$q_1 = \pm \arccos\left(\frac{-(l_4 \cdot c_2 + \mathrm{l}_5 \cdot c_{23}) \cdot (p_{Ez} + l_0)^2 \pm l_2 \cdot \sqrt{(l_4 \cdot c_2 + \mathrm{l}_5 \cdot c_{23})^2 + {l_2}^2 - (p_{Ez} + l_0)^2}}{(l_4 \cdot c_2 + \mathrm{l}_5 \cdot c_{23})^2 + {l_2}^2}\right)$$

Β. Κινηματική Προσομοίωση

6.

Ο σχεδιασμός τροχιάς θα γίνει στο χώρο εργασίας του ρομπότ, με χρήση του πολυωνυμικού αλγόριθμου παρεμβολής, μεταξύ των σημείων p_A= [x_A, y_A, z_A] και p_B= [x_B, y_B, z_B] , της μορφής

$\xi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$

Οι αρχικές συνθήκες του πολυωνύμου είναι :

- $\xi(t=0) = p_A$
- $\xi(t=T) = p_B$
- $\dot{\xi}(t_0 = 0) = 0$
- $\dot{\xi}(\mathrm{t} = \mathrm{T}) = 0$
-

Σύμφωνα με τους παραπάνω περιορισμούς οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι οι ακόλουθοι

- $a_0 = p_A$
- $a_1 = 0$
- $a_2 = \frac{\ddot{p_A}}{2}$
- $a_3 = \frac{20(p_B - p_A) - (3\ddot{p_A})T^2 + \ddot{p_B}T^2}{2T^3}$
- $a_4 = \frac{30(p_A - p_B) + (3\ddot{p_A})T^2 - 2\,\ddot{p_B}T^2}{2T^4}$
- $a_5 = \frac{12(p_B - p_A) - (\ddot{p_A})T^2 + \ddot{p_B}T^2}{2T^5}$

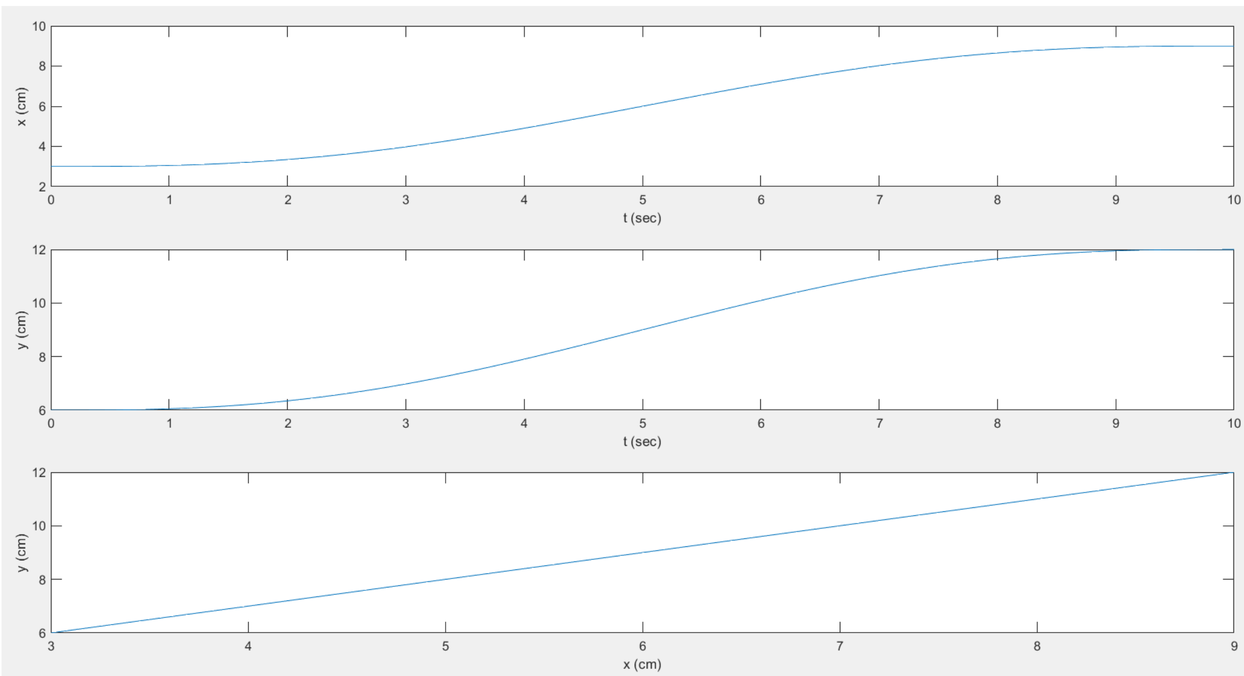
7.

Για την σχεδίαση του επιθυμητού προφίλ κίνησης του εργαλείου χρησιμοποιήθηκε η συνάρτηση jtraj, από το https://github.com/petercorke/robotics-toolbox-matlab/blob/master/jtraj.m , η οποία βρίσκει την τροχιά μεταξύ ενός αρχικού ενός τελικού σημείου.

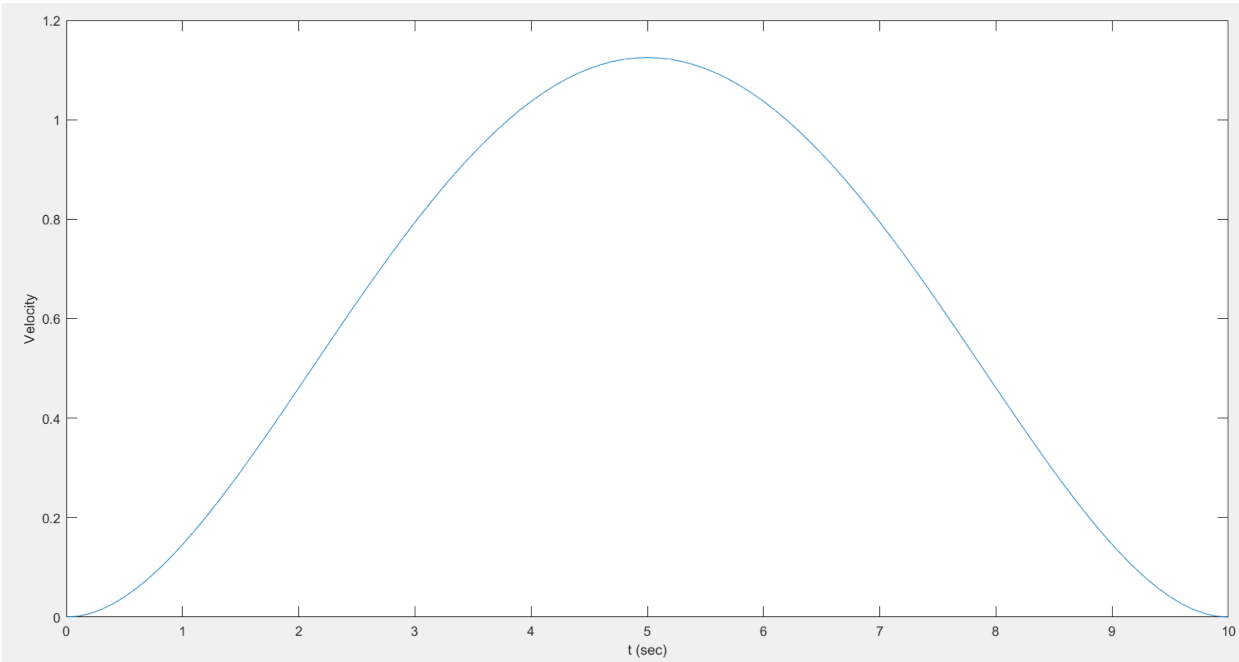
(α)

Το επιθυμητό προφίλ κίνησης του τελικού εργαλείου δράσης φαίνεται στις παρακάτω γραφικές παραστάσεις:

Η θέση του τελικού εργαλείου δράσης:



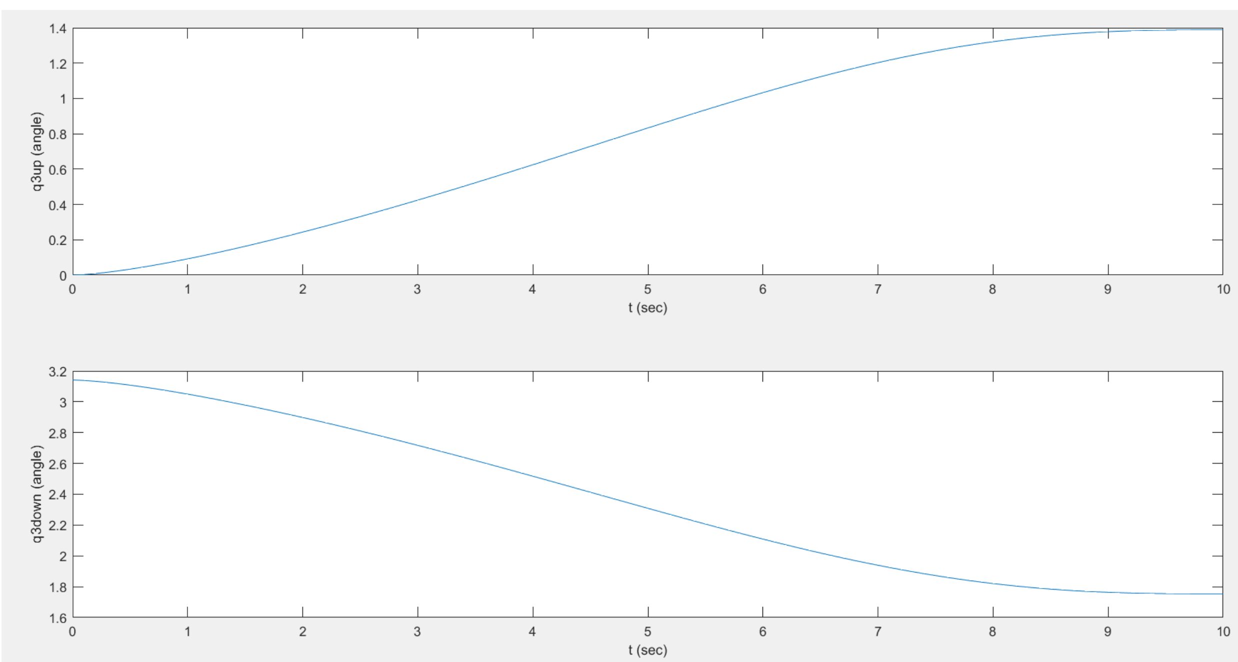
Η ταχύτητα του τελικού εργαλείου δράσης:



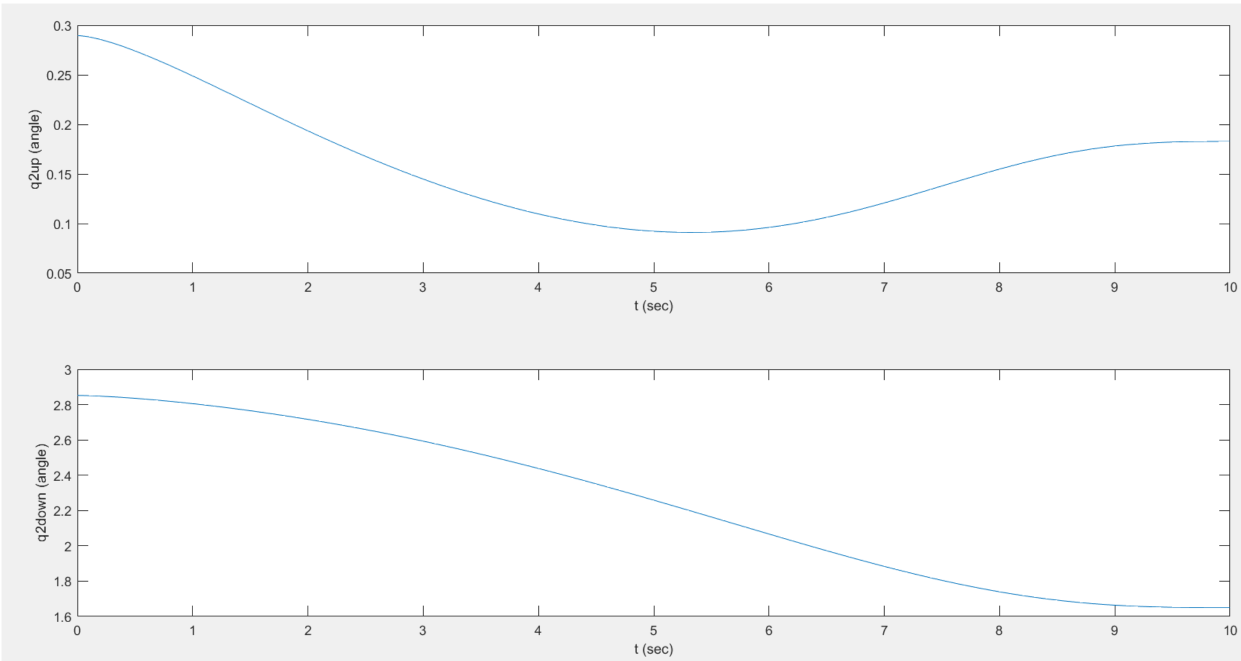
(β)

Σε κάθε χρονική στιγμή t, κατά την εκτέλεση της εργασίας, οι γωνίες στροφής {q1,q2,q3} φαίνονται στις παρακάτω γραφικές παραστάσεις.

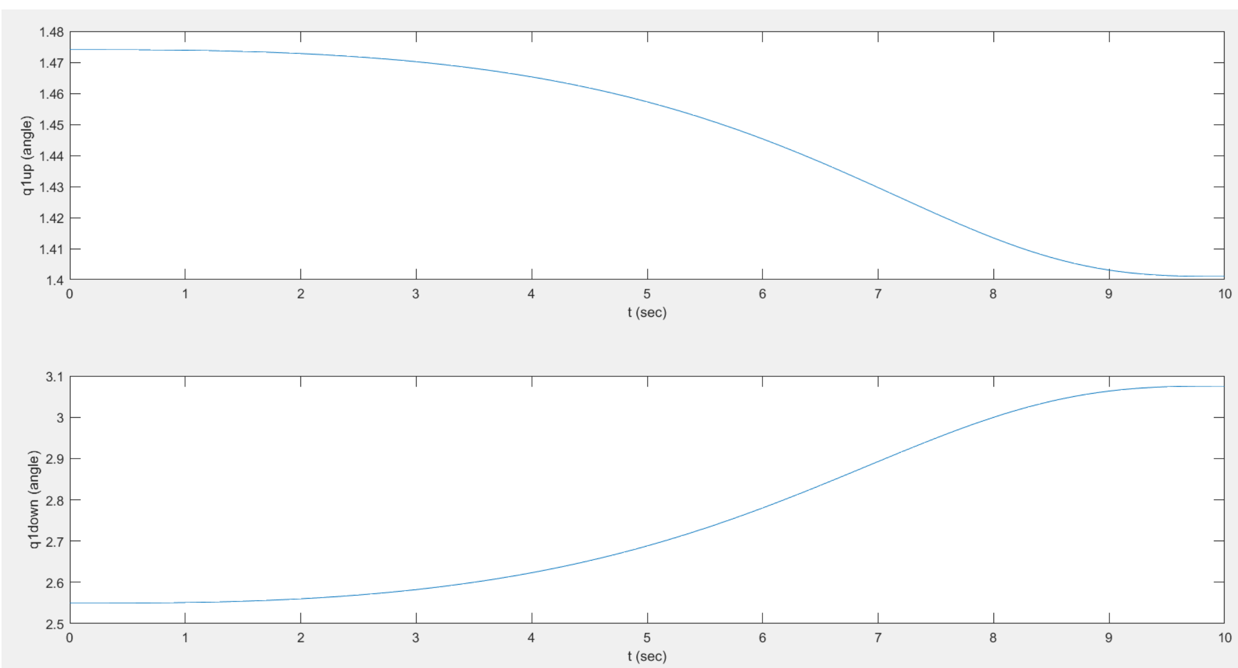
<u>Για την άρθρωση q3:</u>



Για την άρθρωση q2:



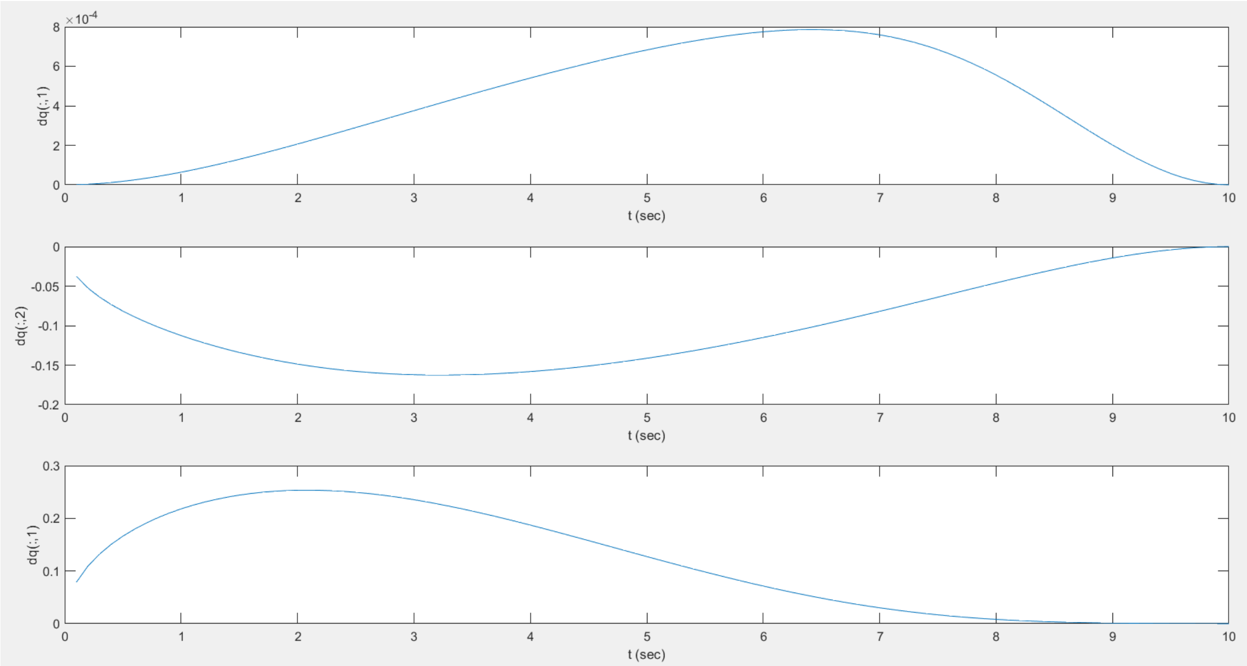
Για την άρθρωση q1:



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

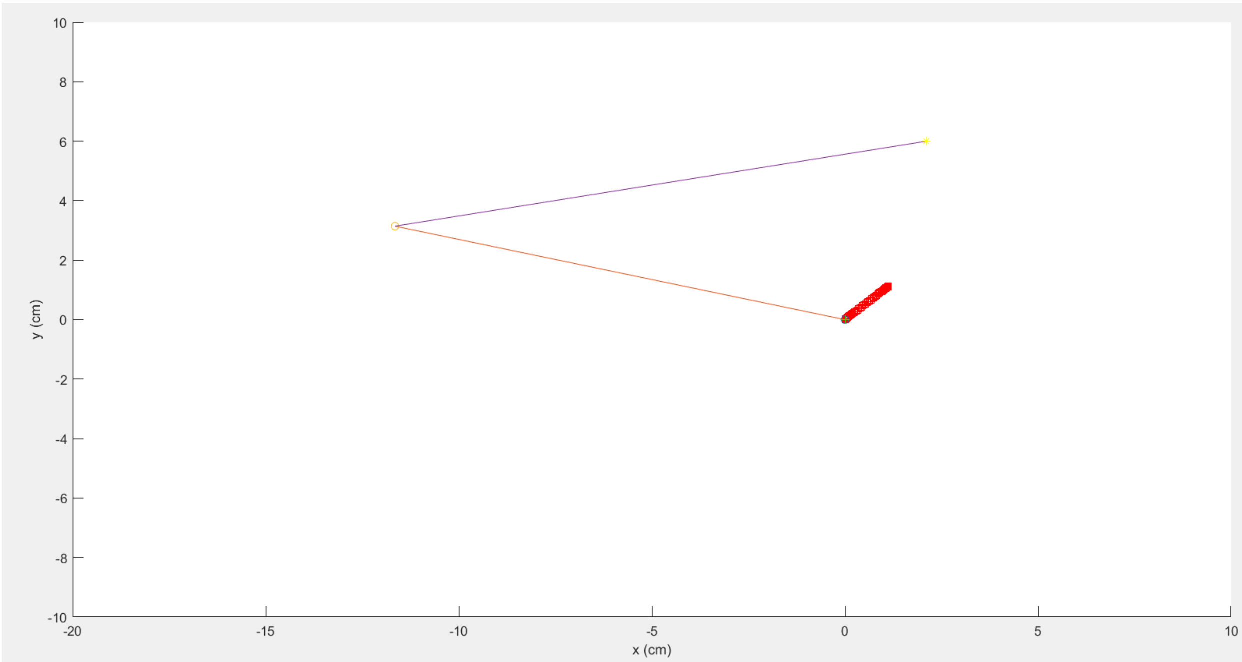
Από αυτό το σημείο και μετά αλλάχτηκαν τα μήκη των συνδέσμων για να δίνουν πιο ομαλές τιμές στις γραφικές παραστάσεις. Επιπλέον, τυπώθηκαν και οι 2 λύσεις για τα {q1,q2,q3} και ύστερα μπήκαν στον κώδικα σε σχόλια για να τυπωθεί μόνο μια δοκιμαστική λύση.

Σε κάθε χρονική στιγμή t, κατά την εκτέλεση της εργασίας, οι γραμμικές ταχύτητες {q1,q2,q3} φαίνονται στις παρακάτω γραφικές παραστάσεις.



(γ)

Η απεικόνισης μιας χρονικής ακολουθίας ενδιάμεσων διατάξεων της ρομποτικής κινηματικής αλυσίδας κατά την εκτέλεση της εργασίας (από το animation της κίνησης) φαίνεται στο ακόλουθο διάγραμμα:



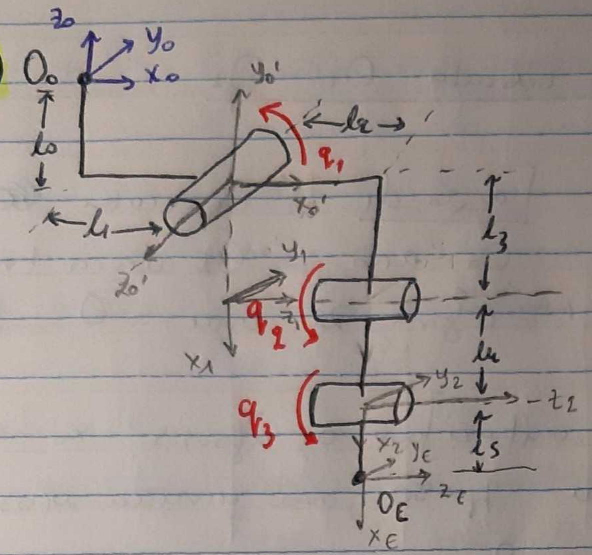
y (cm)
x (cm)

Κωνσταντίνος Σπάθης ΑΜ: 03117048

Εξαμηνιαία Εργασία στην Ρομποτική Ι

Α. Θεωρητική Ανάλυση

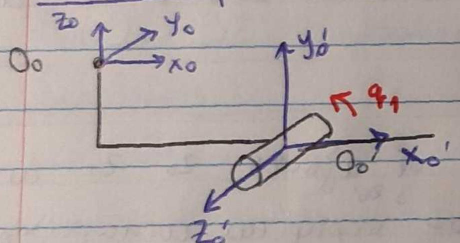
1)



Για την τοποθέτηση των αξόνων χρησιμοποιήθηκαν οι συμβατικοί κανόνες τοποθέτησης D-H

Για την συμπλήρωση του πίνακα D-H θα μελετηθεί η μετάβαση από κάθε σύστημα ξεχωριστά

• Για την μετάβαση από το σύστημα $O_0 \rightarrow O_0'$



Για το d_0': Η απόσταση του O_0 συστήματος από το O_0' κατά μήκος του z_0 φαίνεται ότι είναι l_0. Άρα $d_0' = l_0$

Για το θ_0': Η γωνία που σχηματίζουν οι άξονες $x_0 - x_0'$ ως προς τον z_0 είναι 0. Άρα $\theta_0^{*\prime} = 0$

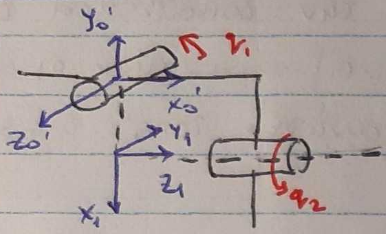
Για το a_0': Το μήκος της κοινής καθέτου $z_0 - z_0'$ είναι l_1. Άρα $a_0' = l_1$

Για το α_0': Η γωνία που σχηματίζουν οι άξονες $z_0 - z_0'$ ως προς τον x_0' είναι $+90^\circ$ αφού κινείται κατά την αντιωρολογιακή φορά. Άρα $\alpha_0' = +90$

Άρα η 1η (βοηθητική) γραμμή του πίνακα D-H θα είναι

Σύνδεσμος i	d_i	θ_i	a_i	α_i
0'	$-l_0$	0	l_1	$+90$

· Για την μετάβαση από το σύστημα $O_{0'} \to O_1$



Για το d_1: Η απόσταση του συστήματος $O_{0'}$ από το O_1 κατά μήκος του άξονα $z_{0'}$ είναι 0. Άρα $d_1 = 0$

Για το θ_1: Η γωνία που σχηματίζουν οι άξονες $x_{0'} - x_1$ ως προς τον $z_{0'}$ είναι $q_1 - 90$, αφού κινείται ωρολογιακά. Άρα $\theta_1 = q_1 - 90$

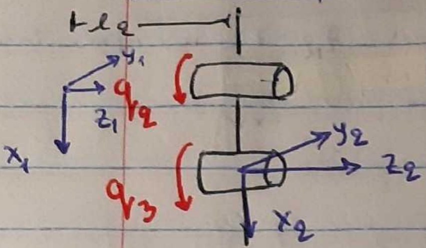
Για το a_1: Το μήκος της κοινής καθέτου των $z_{0'} - z_1$ είναι l_3. Άρα $a_1 = l_3$

Για το α_1: Η γωνία που σχηματίζουν οι άξονες $z_{0'} - z_1$ ως προς τον x_1 είναι -90, αφού ο $z_{0'}$ στρέφεται αντιωρολογιακά για να πέσει πάνω στον z_1. Άρα $\alpha_1 = -90$.

Άρα η 2η γραμμή του πίνακα D-H θα είναι:

Σύνδεσμος i	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	0	$q_1 - 90$	l_3	-90

• Για την μετάβαση από το σύστημα $O_1 \to O_2$



Για το d_2: Η απόσταση του συστήματος O_1 από το O_2 κατά μήκος του άξονα z_1 είναι l_2
Άρα $d_2 = l_2$

Για το θ_2: Η γωνία που σχηματίζουν οι άξονες $x_1 - x_2$ ως προς τον z_1 είναι q_2
Άρα $\theta_2 = q_2$

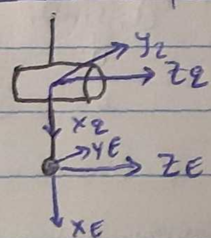
Για το a_2: Το μήκος της κοινής καθέτου $z_1 - z_2$ είναι l_4
Άρα $a_2 = l_4$

Για το α_2: Η γωνία που σχηματίζουν οι άξονες $z_1 - z_2$ ως προς τον άξονα x_1 είναι 0
Άρα $\alpha_2 = 0$

Άρα η 3η γραμμή του πίνακα D-H θα είναι

Σύνδεσμος i	d_i	θ_i	a_i	α_i
2	l_2	q_2	l_4	0

Για την μετάβαση από το σύστημα $O_2 \to O_E$



Για το d_E: Η απόσταση του συστήματος O_2 από το O_E κατά μήκος του άξονα z_2 είναι 0. Άρα $d_E = 0$

Για το θ_E: Η γωνία που σχηματίζουν οι άξονες $x_2 - x_E$ ως προς τον z_2 είναι q_3
Άρα $\theta_E = q_3$

Για το a_E: Το μήκος της κοινής καθέτου $z_2 - z_E$ είναι l_5
Άρα $a_E = l_5$

Για το α_E: Η γωνία που σχηματίζουν οι άξονες $z_2 - z_E$ ως προς τον x_E είναι 0

Άρα $\alpha_E = 0$

Άρα η 4η γραμμή του πίνακα D-H θα είναι

Σύνδεσμος i	d_i	θ_i	a_i	α_i
3	0	q_3	l_5	0

Επομένως, ο πίνακας παραμέτρων D-H θα είναι

Σύνδεσμος i	d_i	θ_i	a_i	α_i
0'	$-l_0$	0	l_1	+90
1	0	$q_1 - 90^\circ$	l_3	-90
2	l_2	q_2	l_4	0
E	0	q_3	l_5	0

2) Για την συνέχεια της ανάλυσης το $l_3 = 0$

Για την εύρεση της κινηματικής εξίσωσης θα χρησιμοποιηθεί ο τύπος για τον προσδιορισμό των πινάκων μετάβασης:

$$A_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \cos a_i & \sin\theta_i \sin a_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \cos a_i & -\cos\theta_i \sin a_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin a_i & \cos a_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

· Από την 1η γραμμή του πίνακα D-H προκύπτει ότι

$$A_{0'}^{0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Από την 2η γραμμή D-H προκύπτει ότι:

$$A_1^{0'} = \begin{bmatrix} \cos(q_1-90^\circ) & 0 & -\sin(q_1-90) & 0 \\ \sin(q_1-90^\circ) & 0 & +\cos(q_1-90^\circ) & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

όπου
$$\begin{cases} \cos(q_1-90^\circ) = \cos(-(90-q_1)) = \sin q_1 = s_1 \\ \sin(q_1-90^\circ) = \sin(-(90-q_1)) = -\sin(90-q_1) = -\cos(q_1) = -c_1 \end{cases}$$

Άρα
$$A_1^{0'} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ -c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Από την 3η γραμμή DH προκύπτει ότι:

$$A_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_4 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_4 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Από την 4η γραμμή DH προκύπτει ότι

$$A_E^2 = \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & l_5 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & l_5 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Βρίσκω τους ενδιάμεσους πίνακες:

- $$A_1^0 = A_{0'}^0 A_1^{0'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ -c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A_1^0 = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & c_1 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_1 & 0 & s_1 & -l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $$A_2^0 = A_1^0 A_2^1 = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & c_1 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -c_1 & 0 & s_1 & -l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_4 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_4 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$A_2^0 = \begin{bmatrix} s_1 c_2 & -s_1 s_2 & c_1 & l_1 + l_2 c_1 + (l_4 c_2) s_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_4 s_2 \\ -c_1 c_2 & c_1 s_2 & s_1 & -l_0 + l_2 s_1 - (l_4 c_2) c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cdot\ A_E^0 = A_2^0 A_E^2 = \begin{bmatrix} s_1 c_2 & -s_1 s_2 & c_1 & l_1 + l_2 c_1 + (l_4 c_2) s_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_4 s_2 \\ -c_1 c_2 & c_1 s_2 & s_1 & -l_0 + l_2 s_1 - (l_4 c_2) c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & -s_3 & 0 & l_5 c_3 \\ s_3 & c_3 & 0 & l_5 s_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_E^0 = \begin{bmatrix} s_1 c_2 c_3 - s_1 s_2 s_3 & -s_1 c_2 s_3 - s_1 s_2 c_3 & c_1 & l_1 + l_2 c_1 + (l_4 c_2) s_1 + l_5 (c_3 s_1 c_2 - s_1 s_2 s_3) \\ s_2 c_3 + c_2 s_3 & -s_2 s_3 + c_2 c_3 & 0 & l_4 s_2 + l_5 (c_3 s_2 + s_3 c_2) \\ -c_1 c_2 c_3 + c_1 s_2 s_3 & c_1 c_2 s_3 + c_1 s_2 c_3 & s_1 & -l_0 + l_2 s_1 - (l_4 c_2) c_1 + l_5 (-c_1 c_2 c_3 + c_1 s_2 s_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επομένως η μήτρα μετάβασης D-H θα είναι

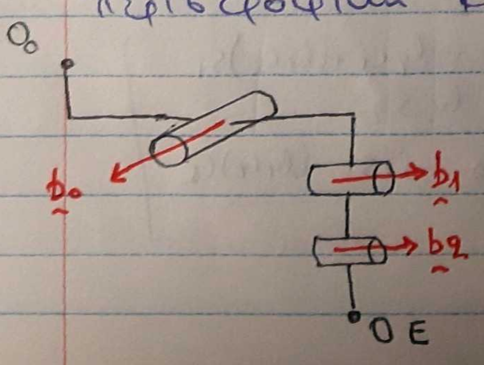
$$A_E^0 = \begin{bmatrix} s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & c_1 & l_1 + l_2 c_1 + (l_4 c_2) s_1 + (l_5 c_{23}) s_1 \\ s_{23} & c_{23} & 0 & l_4 s_2 + l_5 s_{23} \\ -c_1 c_{23} & c_1 s_{23} & s_1 & -l_0 + l_2 s_1 - (l_4 c_2) c_1 - (l_5 c_{23}) c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς το ευθύ γεωμετρικό μοντέλο είναι ο $\underset{\sim}{p}_E^0$, δηλαδή τα 3 πρώτα στοιχεία της $4^{ης}$ στήλης της μήτρας DH A_E^0

$$p_E^0 = \begin{bmatrix} p_{Ex}^0 \\ p_{Ey}^0 \\ p_{Ez}^0 \end{bmatrix} = \begin{cases} p_{Ex}^0 = l_1 + l_2 c_1 + (l_4 c_2) s_1 + (l_5 c_{23}) s_1 \\ p_{Ey}^0 = l_4 s_2 + l_5 s_{23} \\ p_{Ez}^0 = -l_0 + l_2 s_1 - (l_4 c_2) c_1 - (l_5 c_{23}) c_1 \end{cases}$$

$$\theta_z = q_1 + q_2 + q_3$$

3) Για την εύρεση της Jacobian θα χρησιμοποιηθεί το βοηθητικό διάνυσμα $\underset{\sim}{b}$ το οποίο τοποθετείται στη διεύθυνση της μετάβασης, εδώ στους άξονες z που υποδεικνύουν την περιστροφική κίνηση της κάθε άρθρωσης



Οι πίνακες μετάβασης έχουν προκύψει με εφαρμογή της μεθόδου D-H, που σημαίνει ότι το βοηθητικό διάνυσμα $\underset{\sim}{b}$ θα ταυτίζεται με τον άξονα z, δηλαδή $\underset{\sim}{b} = [0\ 0\ 1]^T$

Παρατηρώντας τον πίνακα $A^0_{0'}$ και το σχήμα που δίνεται, φαίνεται ότι υπάρχει ένας σταθερός όρος στο z, που σημαίνει ότι πριν το $Tra(x, l_1)$ έχουμε προηγηθεί μια μετατόπιση κατά z. Άρα πρέπει να μετατίθουμε το σύστημα από το O' για να έχουμε σωστό αποτέλεσμα στην Jacobian.

Για την i=1: Έχουμε στροφική. Άρα $J_{L1} = \hat{b}_{0'} \times r_{0',E}$

$J_{A1} = \hat{b}_{0'}$

Όπου $\hat{b}_{0'} = R^0_{0'} \underset{\wedge}{b}$ και $\underset{\wedge}{b} = [0\ 0\ 1]^T$, δηλαδή το $\hat{b}_{0'}$ θα είναι τα 3 πρώτα στοιχεία της 3ης στήλης του πίνακα στροφής $R^0_{0'}$, δηλαδή $\hat{b}_{0'} = [0\ \ -1\ \ 0]^T$

Επιπλέον ισχύει ότι $r_{0',E} = \underset{\sim}{p_{0,E}} - \underset{\sim}{p_{0,0'}} = \begin{bmatrix} l_1 + l_2c_1 + (l_4c_2)s_1 + (l_5c_{23})s_1 - l_1 \\ l_4s_2 + l_5s_{23} - 0 \\ -l_0 + l_2s_1 - (l_4c_2)c_1 - (l_5c_{23})c_1 + l_0 \end{bmatrix}$

Άρα:

$$r_{0',E} = \begin{bmatrix} r_{0',Ex} \\ r_{0',Ey} \\ r_{0',Ez} \end{bmatrix} = \begin{cases} r_{0',Ex} = l_2c_1 + (l_4c_2)s_1 + (l_5c_{23})s_1 \\ r_{0',Ey} = l_4s_2 + l_5s_{23} \\ r_{0',Ez} = l_2s_1 - (l_4c_2)c_1 - (l_5c_{23})c_1 \end{cases}$$

Άρα $J_{A1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $J_{L1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_{0',Ex} \\ r_{0',Ey} \\ r_{0',Ez} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_{0',Ez} \\ 0 \\ r_{0',Ex} \end{bmatrix} \Longrightarrow$

$$J_{L1} = \begin{bmatrix} -l_2s_1 + (l_4c_2)c_1 + (l_5c_{23})c_1 \\ 0 \\ l_2c_1 + (l_4c_2)s_1 + (l_5c_{23})s_1 \end{bmatrix}$$

Για την i=2: Έχουμε στροφική άρα $J_{L2} = \hat{b}_1 \times r_{1,E}$

$J_{A2} = \hat{b}_1$

Όπου $\hat{b}_1 = R^0_1 \underset{\sim}{b}$ και $\underset{\sim}{b} = [0\ 0\ 1]^T$, δηλαδή το $\hat{b}_1$ θα είναι τα 3 πρώτα στοιχεία της 3ης στήλης του πίνακα στροφής R^0_1, δηλαδή $\hat{b}_1 = [c_1\ \ 0\ \ s_1]^T$

Επιπλέον ισχύει ότι $\underline{r}_{1,E} = \underline{p}_{0,E} - \underline{p}_{0,1} = \begin{bmatrix} l_1 + l_2c_1 + (l_4c_2)s_1 + (l_5c_{23})s_1 - l_1 \\ l_4s_2 + l_5s_{23} - 0 \\ -l_0 + l_2s_1 - (l_4c_2)c_1 - (l_5c_{23})c_1 + l_0 \end{bmatrix}$

Άρα:

$$r_{1,E} = \begin{bmatrix} r_{1,Ex} \\ r_{1,Ey} \\ r_{1,Ez} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_2c_1 + (l_4c_2)s_1 + (l_5c_{23})s_1 \\ l_4s_2 + l_5s_{23} \\ +l_2s_1 - (l_4c_2)c_1 - (l_5c_{23})c_1 \end{bmatrix}$$

Άρα $J_{A1} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ s_1 \end{bmatrix}$ και $J_{L1} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ s_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_{1,Ex} \\ r_{1,Ey} \\ r_{1,Ez} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 r_{1,Ey} \\ -c_1 r_{1,Ez} + s_1 r_{1,Ex} \\ c_1 r_{1,Ey} \end{bmatrix}$

$$J_{L1} = \begin{bmatrix} -(l_4s_2)s_1 - (l_5s_{23})s_1 \\ \cancel{-l_2 s_1c_1} + (l_4c_2)c_1^2 + (l_5c_{23})c_1^2 + \cancel{l_2 s_1c_1} + (l_4c_2)s_1^2 + (l_5c_{23})s_1^2 \\ (l_4s_2)c_1 + (l_5s_{23})c_1 \end{bmatrix}$$

$$J_{L1} = \begin{bmatrix} -(l_4s_2)s_1 - (l_5s_{23})s_1 \\ l_4c_2 + l_5c_{23} \\ (l_4s_2)c_1 + (l_5s_{23})c_1 \end{bmatrix}$$

<u>Για την $i=2$:</u> Είναι στροφική άρα $J_{L2} = \hat{b}_2 \times r_{2,E}$

$J_{A2} = \hat{b}_2$

Όπου $\hat{b}_2 = R_2^0 \underset{\sim}{b}$ και $\underset{\sim}{b} = (0\ 0\ 1)^T$, δηλαδή το $\hat{b}_2$ θα είναι τα 3 πρώτα στοιχεία της $3^{ης}$ στήλης του R_2^0. Άρα $\hat{b}_2 = (c_1\ 0\ s_1)^T$

Επιπλέον ισχύει ότι $\underline{r}_{2,E} = \underline{p}_{0E} - \underline{p}_{0,2} = \begin{bmatrix} l_1 + l_2c_1 + (l_4c_2)s_1 + (l_5c_{23})s_1 - l_1 - l_2c_1 - (l_4c_2)s_1 \\ l_4s_2 + l_5s_{23} - l_4s_2 \\ -l_0 + l_2s_1 - (l_4c_2)c_1 - (l_5c_{23})c_1 + l_0 - l_2s_1 + (l_4c_2)c_1 \end{bmatrix}$

Άρα $r_{2,E} = \begin{bmatrix} r_{2,Ex} \\ r_{2,Ey} \\ r_{2,Ez} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (l_5c_{23})s_1 \\ l_5s_{23} \\ -(l_5c_{23})c_1 \end{bmatrix}$

Άρα $J_{A_2} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ s_1 \end{bmatrix}$ και $J_{L_2} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ s_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_{2,Ex} \\ r_{2,Ey} \\ r_{2,Ez} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s_1 r_{2,Ey} \\ -c_1 r_{2,Ez} + s_1 r_{2,Ex} \\ c_1 r_{2,Ey} \end{bmatrix}$

$$J_{L_2} = \begin{bmatrix} -(l_5 s_{23}) s_1 \\ (l_5 c_{23}) c_1^2 + (l_5 c_{23}) s_1^2 \\ (l_5 s_{23}) c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(l_5 s_{23}) s_1 \\ l_5 c_{23} \\ (l_5 s_{23}) c_1 \end{bmatrix}$$

Επομένως η Jacobian μήτρα είναι η ακόλουθη:

$$J = \begin{bmatrix} J_{L_1} & J_{L_2} & J_{L_3} \\ J_{A_1} & J_{A_2} & J_{A_3} \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$J = \left[\begin{array}{c|c|c} -l_2 s_1 + (l_4 c_2) c_1 + (l_5 c_{23}) c_1 & -(l_4 s_2) s_1 - (l_5 s_{23}) s_1 & -(l_5 s_{23}) s_1 \\ 0 & l_4 c_2 + l_5 c_{23} & l_5 c_{23} \\ l_2 c_1 + (l_4 c_2) s_1 + (l_5 c_{23}) s_1 & (l_4 s_2) c_1 + (l_5 s_{23}) c_1 & (l_5 s_{23}) c_1 \\ \hline 0 & c_1 & c_1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & s_1 \end{array}\right]$$

4) Για την εύρεση του αντίστροφου διαφορικού κινηματικού μοντέλου ως προς τη γραμμική ταχύτητα του τελικού εργαλείου δράσης θα πρέπει η Jacobian να είναι αντιστρέψιμη. Για να είναι αντιστρέψιμη πρέπει $\det(J_L) \neq 0$. Οπότε θα εξετάσω την $\det(J_L)$ και εκεί που μηδενίζεται θα του δίνει τις ιδιόμορφες κινηματικές διατάξεις του συστήματος.

Άρα αναλύω την J_L ως προς τη 2η γραμμή που έχει ένα μηδενικό και θα απλοποιηθούν οι πράξεις

$\cancel{\det(J_L) = 0 - (l_4 c_2 + l_5 c_{23})}$

Επιπλέον για ευκολία στις πράξεις θα θέσω:

$$\begin{cases} d_1 = l_4 c_2 + l_5 c_{23}, & d_1 = d_1(q_2, q_3), \\ d_2 = l_4 s_2 + l_5 s_{23}, & d_2 = d_2(q_2, q_3) \end{cases}$$

Άρα $J_L = \begin{bmatrix} -l_2 s_1 + d_1 c_1 & -d_2 s_1 & -(l_5 s_{23}) s_1 \\ 0 & d_1 & l_5 c_{23} \\ l_2 c_1 + d_1 s_1 & d_2 c_1 & (l_5 s_{23}) c_1 \end{bmatrix}$

$$\det(J_L) = -0 + d_1 \begin{vmatrix} -l_2 s_1 + d_1 c_1 & -(l_5 s_{23}) s_1 \\ l_2 c_1 + d_1 s_1 & (l_5 s_{23}) c_1 \end{vmatrix} - l_5 c_{23} \begin{vmatrix} -l_2 s_1 + d_1 c_1 & -d_2 s_1 \\ l_2 c_1 + d_1 s_1 & d_2 c_1 \end{vmatrix}$$

$$\det(J_L) = +d_1 \left(\cancel{-l_2 s_1 (l_5 s_{23}) c_1} + d_1 (l_5 s_{23}) c_1^2 + \cancel{l_2 s_1 (l_5 s_{23}) c_1} + d_1 (l_5 s_{23}) s_1^2 \right)$$

$$- l_5 c_{23} \left(\cancel{-l_2 s_1 d_2 c_1} + d_1 d_2 c_1^2 + \cancel{l_2 s_1 d_2 c_1} + d_1 d_2 s_1^2 \right) \Rightarrow$$

$$\det(J_L) = +d_1^2 (l_5 s_{23}) - d_1 d_2 l_5 c_{23} \Rightarrow$$

$$\det(J_L) = l_5 \cdot d_1 (d_1 s_{23} - d_2 c_{23})$$

~~Επομένως οι ιδιόμορφες διατάξεις είναι αυτές για τις οποίες ισχύει~~ $\cancel{l_5 \, d_1 (d_2 - d_1) = 0 \Rightarrow s_{23} d_1 (d_2 - d_1) = 0}$

~~1η ιδιομορφία:~~ $\cancel{s_{23} = 0 \Rightarrow \sin(q_2 + q_3) = 0}$

Επιπλέον $s_{23} = s_2 c_3 + c_2 s_3$

$c_{23} = c_2 c_3 - s_2 s_3$

Άρα $d_1 s_{23} = [l_4 c_2 + l_5 (c_2 c_3 - s_2 s_3)](s_2 c_3 + c_2 s_3) \Rightarrow$

$$d_1 s_{23} = l_4 c_2 s_2 c_3 + l_4 c_2^2 s_3 + l_5 c_2 s_2 c_3^2 + l_5 c_2^2 c_3 s_3 - l_5 s_2^2 c_3 s_3 - l_5 s_2 c_2 s_3^2$$

και $d_2 c_{23} = (l_4 s_2 + l_5 s_2 c_3 + l_5 c_2 s_3)(c_2 c_3 - s_2 s_3)$

$$d_2 c_{23} = l_4 s_2 c_2 c_3 - l_4 s_2^2 s_3 + l_5 s_2 c_2 c_3^2 - l_5 s_2^2 c_3 s_3 + l_5 c_2^2 s_3 c_3 - l_5 c_2 s_2 s_3^2$$

Άρα ο όρος $(d_1 s_{23} - d_2 c_{23}) =$

$$l_4 c_2 s_2 c_3 + l_4 c_2^2 s_3 + l_5 c_2 s_2 c_3^2 + l_5 c_2^2 c_3 s_3 - l_5 s_2^2 c_3 s_3 - l_5 s_2 c_2 s_3^2$$
$$- l_4 c_2 s_2 c_3 + l_4 s_2^2 s_3 - l_5 c_2 s_2 c_3^2 - l_5 c_2^2 c_3 s_3 + l_5 s_2^2 c_3 s_3 + l_5 s_2 c_2 s_3^2$$

$$\Rightarrow (d_1 s_{23} - d_2 c_{23}) = l_4 s_3 (c_2^2 + s_2^2) = l_4 s_3$$

Άρα $\det(J_L) = l_5 d_1 l_4 s_3$

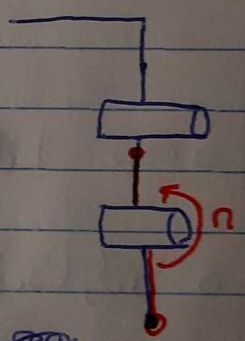
Επομένως, οι ιδιόμορφες διατάξεις είναι αυτές για τις οποίες ισχύει ότι $\det(J_L) = 0 \Rightarrow d_1 s_3 = 0$

Άρα, οι ιδιόμορφες διατάξεις είναι

1η ιδιόμορφη διάταξη:

$s_3 = 0 \rightarrow q_3 = 0 \pm k\pi$ με $k \in N$

Άρα $q_3 = 0$ ή π, αφού μελετάμε το σύστημα στο διάστημα $[-\pi, \pi]$

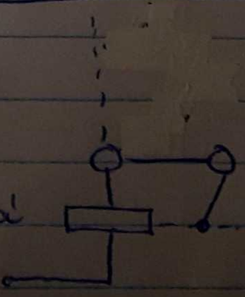


Αυτό είναι ένα work space singularity γιατί ο βραχίονας θα μπορεί να κινηθεί σε μια διεύθυνση κάθετη σε αυτούς με αποτέλεσμα να χάνεται μια κάθετη διεύθυνση κίνησης, σαν να χάνεται η άρθρωση q_3

2η ιδιόμορφη διάταξη:

$d_1 = 0 \Rightarrow l_4 c_2 + l_5 c_{23} = 0$

Πρόσοψη βραχίονα

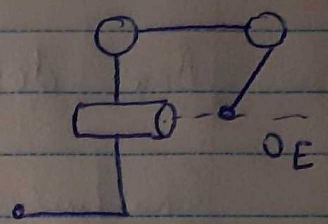


Από το πρόχειρο σχήμα δίπλα φαίνεται ότι το d_1 είναι η απόσταση του τελικού εργαλείου από τον άξονα που είναι

~~θέσεις~~ στον άξονα περιστροφής της q_1.

Όταν αυτή η απόσταση μηδενιστεί αντιστοιχεί σε διατάξεις, όπου το τελικό εργαλείο είναι πάνω στον άξονα ~~της~~ της $1^{ης}$ άρθρωσης

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ



Αυτό είναι ένα internal singularity γιατί το εργαλείο έχει πέσει πάνω στη διεύθυνση του άξονα περιστροφής της q_1

Για την εύρεση του αντίστροφου Jacobian θα χρησιμοποιηθεί ο τύπος

$$J_L^{-1} = \frac{1}{|det(J_L)|} adj(J_L).$$

όπου $|det(J_L)| = l_5 d_1 l_4 s_3 = l_5 l_4 (l_4 c_2 + l_5 c_{23}) s_3$

ο $adj(J_L) = \begin{vmatrix} det(J_{L11}) & -det(J_{L21}) & det(J_{L31}) \\ -det(J_{L12}) & det(J_{L22}) & -det(J_{L32}) \\ det(J_{L13}) & -det(J_{L23}) & det(J_{L33}) \end{vmatrix}$

όπου $\cdot$ $det(J_{L11}) = \begin{vmatrix} d_1 & l_5 c_{23} \\ d_2 c_1 & (l_5 s_{23}) c_1 \end{vmatrix} \Rightarrow$

$$det(J_{L11}) = d_1 l_5 s_{23} c_1 - d_2 l_5 c_{23} c_1 \Rightarrow$$
$$det(J_{L11}) = l_5 c_1 (d_1 s_{23} - d_2 c_{23}) \Rightarrow \left(\begin{matrix}\text{από} \\ \text{πριν}\end{matrix}\right)$$
$$\underline{det(J_{L11}) = l_5 c_1 s_3}$$

$$\bullet \det(J_{L12}) = \begin{vmatrix} 0 & l_5 c_{23} \\ l_2 c_1 + d_1 s_1 & (l_5 s_{23}) c_1 \end{vmatrix} = -l_5 c_{23}(l_2 c_1 + d_1 s_1) \Rightarrow$$

$$\cancel{\det(J_{L12}) = l_5(c_2 c_3 - s_2 s_3)(l_2 c_1 + l_1 c_2 s_1 + l_5}$$

$$\bullet \det(J_{L13}) = \begin{vmatrix} 0 & d_1 \\ l_2 c_1 + d_1 s_1 & d_2 c_1 \end{vmatrix} = -d_1(l_2 c_1 + d_1 s_1)$$

$$\bullet \det(J_{L21}) = \begin{vmatrix} -d_2 s_1 & -(l_5 s_{23}) s_1 \\ d_2 c_1 & (l_5 s_{23}) c_1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} -d_2 s_1 c_1 l_5 s_{23} \\ + d_2 s_1 c_1 l_5 s_{23} \end{matrix} = 0$$

$$\bullet \det(J_{L22}) = \begin{vmatrix} -l_2 s_1 + d_1 c_1 & -(l_5 s_{23}) s_1 \\ l_2 c_1 + d_1 s_1 & (l_5 s_{23}) c_1 \end{vmatrix} =$$

$$\cancel{-l_2 s_1 c_1 (l_5 s_{23})} + d_1 c_1^2 (l_5 s_{23}) + d_1 s_1^2 (l_5 s_{23}) + \cancel{l_2 s_1 c_1 l_5 s_{23}} =$$

$$\det(J_{L22}) = d_1 l_5 s_{23}$$

$$\bullet \det(J_{L23}) = \begin{vmatrix} -l_2 s_1 + d_1 c_1 & -d_2 s_1 \\ l_2 c_1 + d_1 s_1 & d_2 c_1 \end{vmatrix} =$$

$$\cancel{-l_2 d_2 c_1 s_1} + d_1 d_2 c_1^2 + d_1 d_2 s_1^2 + \cancel{l_2 d_2 c_1 s_1} = d_1 d_2$$

$$\bullet \det(J_{L31}) = \begin{vmatrix} -d_2 s_1 & -(l_5 s_{23}) s_1 \\ d_1 & l_5 c_{23} \end{vmatrix} =$$

$$-d_2 s_1 c_{23} l_5 + d_1 s_1 l_5 s_{23} = +l_5 s_1 (d_1 s_{23} - d_2 c_{23}) \Rightarrow$$

$$\det(J_{L31}) = l_5 s_1 s_3$$

από πριν αφού $d_1 s_{23} - d_2 c_{23} = s_3$

$$\cdot \det(J_{L32}) = \begin{vmatrix} -l_2 s_1 + d_1 c_1 & -(l_5 s_{23}) s_1 \\ 0 & l_5 c_{23} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\det(J_{L32}) = l_5 c_{23} (-l_2 s_1 + d_1 c_1)$$

$$\cdot \det(J_{L33}) = \begin{vmatrix} -l_2 s_1 + d_1 c_1 & -d_2 s_1 \\ 0 & d_1 \end{vmatrix} = d_1 (d_1 c_1 - l_2 s_1)$$

Επομένως, η αντίστροφη Jacobian είναι:

$$J_L^{-1} = \frac{1}{l_5 d_1 l_4 s_3} \begin{bmatrix} l_5 c_1 s_3 & 0 & l_5 s_1 s_3 \\ l_5 c_{23}(l_2 c_1 + d_1 s_1) & d_1 l_5 s_{23} & l_5 c_{23}(l_2 s_1 - d_1 c_1) \\ -d_1(l_2 c_1 + d_1 s_1) & -d_1 d_2 & d_1(d_1 c_1 - l_2 s_1) \end{bmatrix}$$

Επομένως το αντίστροφο διαφορικό κινηματικό μοντέλο ως προς τη γραμμική ταχύτητα του τελικού εργαλείου δράσης θα δίνεται από τον τύπο:

$$\dot{q} = J_L^{-1} \cdot V_E \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J^{-1}_{L,x} \\ J^{-1}_{L,y} \\ J^{-1}_{L,z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_{Ex} \\ V_{Ey} \\ V_{Ez} \end{bmatrix}$$

Από όπου τα $J^{-1}_{L,x}$, $J^{-1}_{L,y}$ και $J^{-1}_{L,z}$ δίνονται από την αντίστροφη Jacobian που βρέθηκε πιο πάνω

5) Για την εύρεση του αντίστροφου γεωμετρικού μοντέλου θα χρησιμοποιηθεί ως δεδομένο το γεωμετρικό μοντέλο που βρήκαμε στο ερώτημα 2, δηλαδή ξέρω

$$p^0_{E,x} = l_1 + l_2 c_1 + (l_4 c_2) s_1 + (l_5 c_{23}) s_1 \quad (1)$$

$$p^0_{E,y} = l_4 s_2 + l_5 s_{23} \quad (2)$$

$$p^0_{E,z} = -l_0 + l_2 s_1 - (l_4 c_2) c_1 - (l_5 c_{23}) c_1 \quad (3)$$

Από τις (1),(2),(3): $\begin{bmatrix} p_{Ex} \\ p_{Ey} \\ p_{Ez} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 + l_2 c_1 + (l_4 c_2) s_1 + l_5 (c_{23} s_1) \\ l_4 s_2 + l_5 (s_{23}) \\ -l_0 + l_2 s_1 - (l_4 c_2) c_1 - l_5 (c_{23} c_1) \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} p_{Ex} \\ p_{Ey} \\ p_{Ez} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 + l_2 c_1 + (l_4 c_2) s_1 \\ l_4 s_2 \\ -l_0 + l_2 s_1 - (l_4 c_2) c_1 \end{bmatrix} + l_5 \begin{bmatrix} c_{23} s_1 \\ s_{23} \\ -c_{23} c_1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} p_{Ex} \\ p_{Ey} \\ p_{Ez} \end{bmatrix} - l_5 \begin{bmatrix} s_1 c_{23} \\ s_{23} \\ -c_1 c_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 + l_2 c_1 + (l_4 c_2) s_1 \\ l_4 s_2 \\ -l_0 + l_2 s_1 - (l_4 c_2) c_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Παρατηρώ από τον πίνακα του μητρώου στροφής ~~ότι~~ R^0_E ότι το διάνυσμα $[s_1 c_{23} \;\; s_{23} \;\; -c_1 c_{23}]^T$ είναι το γνωστό διάνυσμα του $\hat{x}_E$ του R^0_E. Άρα $\hat{x}_E = \begin{bmatrix} s_1 c_{23} \\ s_{23} \\ -c_1 c_{23} \end{bmatrix}$

Επιπλέον, παρατηρώ από τον πίνακα A^0_2 που υπολογίσαμε στο ερώτημα 2, ότι το διάνυσμα θέσης του $A^0_2 \sim \underline{p}_2$ είναι το διάνυσμα που εμφανίζεται στην εξίσωση (5)

$$\underline{p}_2 = \begin{bmatrix} l_1 + l_2 c_1 + (l_4 c_2) s_1 \\ l_4 s_2 \\ -l_0 + l_2 s_1 - (l_4 c_2) c_1 \end{bmatrix}$$

Επομένως, η ~~τελευταία~~ σχέση 5 μετατρέπεται στην ακόλουθη μορφή:

$\underset{\sim}{p_2} = \underset{\sim}{p_E} - l_5 \hat{x}_E$ 6

Με αυτό τον τρόπο το πρόβλημα επιμερίζεται σε δύο υποπροβλήματα
ένα πρόβλημα 2R και ένα πρόβλημα ανάλυσης της εξίσωσης 6

Επίλυση του προβλήματος 2R με αγνώστους q_1, q_2 και δεδομένο
το διάνυσμα θέσης $\underset{\sim}{p_2}$. Άρα

$p_{2x} = l_1 + l_2 c_1 + (l_4 c_2) s_1$ 7

$p_{2y} = l_4 s_2$ 8

$p_{2z} = -l_0 + l_2 s_1 - (l_4 c_2) c_1$ 9

Στην εξίσωση 7 $(p_{2x} - l_1)^2 = l_2^2 c_1^2 + (l_4^2 c_2^2) s_1^2 + 2 l_2 l_4 c_1 c_2 s_1$ 7'

Στην εξίσωση 9 $(p_{2z} + l_0)^2 = l_2^2 s_1^2 + (l_4^2 c_2^2) c_1^2 - 2 l_2 l_4 c_1 c_2 s_1$ 9'

Άρα 7' + 9' $(p_{2x} - l_1)^2 + (p_{2z} + l_0)^2 = l_2^2 + l_4^2 c_2^2 \Rightarrow$

$$c_2^2 = \frac{(p_{2x} - l_1)^2 + (p_{2z} + l_0)^2 - l_2^2}{l_4^2}$$

Οπότε θα προκύπτουν λύσεις της μορφής:

α' μορφή: $q_2 = \arccos\left(\pm \sqrt{\frac{(p_{2x} - l_1)^2 + (p_{2z} + l_0)^2 - l_2^2}{l_4^2}} \right)$

όπου βγάζει 2 λύσεις με διαφορά π αφού για το arccos ισχύει:

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$$

Θ' μορφή: εφαρμόζω (8) $s_2 = \frac{p_{2y}}{l_2}$ επομένως προκύπτει

$$q_2 = atan2(s_2, c_2)$$

Όπου προκύπτουν δύο λύσεις q_{2+}, q_{2-} δεκτές

Για την εύρεση της q_1, γνωρίζοντας την γωνία $q_2 \{q_{2+}, q_{2-}\}$ θα λύσω ένα σύστημα $\{c_1, s_1\}$

(7) $p_{2x} - l_1 = \underbrace{l_2}_{d_1} c_1 + \underbrace{(l_4 c_2)}_{d_2} s_1$

(8) $p_{2z} + l_0 = -\underbrace{(l_4 c_2)}_{d_2} c_1 + \underbrace{l_2}_{d_1} s_1$

Θέτω βοηθητικά τους συντελεστές $\begin{cases} d_1 = l_2 = \text{σταθερό} \\ d_2 = l_4 c_2 = d_2(q_2) \end{cases}$

Για μια βοηθητική γωνία a ισχύει ότι:

$$\left.\begin{cases} d_2 = d\cos a \\ d_1 = d\sin a \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} > 0 \\ a = atan2(d_1, d_2) \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} d = \sqrt{l_2^2 + l_4^2 c_2^2} \\ a = atan2(l_2, l_4 c_2) \end{cases}$$

Τελικά, συνδυάζοντας τα συστήματα $\{d, a\}$ και $\{p_{2x}, p_{2z}\}$ προκύπτει

$$\left.\begin{cases} p_{2x} - l_1 = d s_a c_1 + d c_a s_1 \\ p_{2z} + l_0 = -d c_a c_1 + d s_a s_1 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} d\sin(q_1 + a) = p_{2x} - l_1 \\ -d\cos(q_1 + a) = p_{2z} + l_0 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \frac{p_{2z} + l_0}{p_{2x} - l_1} = \frac{-d\cos(q_1 + a)}{d\sin(q_1 + a)} \Rightarrow \frac{-(p_{2z} + l_0)}{p_{2x} - l_1} = \tan(q_1 + a)$$

Θα χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση $atan2(y, x)$ για να μην χαθεί κάποιο πρόσημο στις πράξεις

$q_1 + a = \mathrm{atan}2(-P_{2z} - l_0,\ P_{2x} - l_1) \Rightarrow$

$q_1 = \mathrm{atan}2(-P_{2z} - l_0,\ P_{2x} - l_1) - \mathrm{atan}2(l_2,\ l_4 c_2)$

Από όπου φαίνεται ότι προκύπτουν 2 λύσεις για την q_1 αφού εξαρτάται από την q_2, που έχει και αυτή 2 λύσεις.
$q_{2+} \rightarrow q_{1+}$ και $q_{2-} \rightarrow q_{1-}$

Για την εύρεση της q_3 επιστρέφω στην εξίσωση 6 ~~για~~ και θα αναπτύξω τα αθροίσματα συνημιτόνου και ημιτόνου

$\underset{\sim}{P_2} = \underset{\sim}{P_E} - l_5 \hat{x}_E \Rightarrow \underset{\sim}{P_E} - \underset{\sim}{P_2} = l_5 \hat{x}_E \Rightarrow$

$$\begin{cases} p_{Ex} - p_{2x} = l_5 c_2 s_1 c_3 - l_5 s_2 s_1 s_3 \\ p_{Ey} - p_{2y} = l_5 s_2 c_3 + l_5 c_2 s_3 \\ p_{Ez} - p_{2z} = -l_5 c_2 c_1 c_3 + l_5 s_2 c_1 s_3 \end{cases}$$

Από όπου ΔΕΝ παρατηρήθηκε κάποιος κοινός συντελεστής για να εφαρμοστεί παρόμοια μέθοδο με την εύρεση της q_1

Άρα $\begin{cases} p_{Ex} - p_{2x} = l_5 c_{23} s_1 \\ p_{Ey} - p_{2y} = l_5 s_{23} \\ p_{Ez} - p_{2z} = -l_5 c_{23} c_1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (p_{Ex} - p_{2x})^2 = l_5^2 c_{23}^2 s_1^2 \\ (p_{Ey} - p_{2y})^2 = l_5^2 s_{23}^2 \\ (p_{Ez} - p_{2z})^2 = l_5^2 c_{23}^2 c_1^2 \end{cases}$

Επομένως $(p_{Ex} - p_{2x})^2 + (p_{Ez} - p_{2z})^2 = l_5^2 c_{23}^2 \Rightarrow$

$$c_{23}^2 = \frac{(p_{Ex} - p_{2x})^2 + (p_{Ez} - p_{2z})^2}{l_5^2}$$

Οπότε θα προκύψουν λύσεις της μορφής:

α' μορφή: $q_2 + q_3 = \arccos\left(\pm\sqrt{\dfrac{(P_{Ex}-P_{\Sigma x})^2 + (P_{Ez}-P_{\Sigma z})^2}{l_5^2}}\right)$

$$q_3 = \arccos\left(\pm\sqrt{\dfrac{(P_{Ex}-P_{\Sigma x})^2 + (P_{Ez}-P_{\Sigma z})^2}{l_5^2}}\right)$$

$$- \arccos\left(\pm\sqrt{\dfrac{(P_{\Sigma x}-l_1)^2 + (P_{\Sigma z}+l_0)^2 - l_2^2}{l_4^2}}\right)$$

Από όπου φαίνεται ότι θα προκύψουν 4 λύσεις

β' μορφή: Με χρήση $s_{23} = \dfrac{P_{Ey} - P_{\Sigma y}}{l_5}$ προκύπτει

$$q_3 = \operatorname{atan2}(s_{23}, c_{23}) - \operatorname{atan2}(s_2, c_2)$$

Από όπου φαίνεται και πάλι ότι θα προκύψουν 4 λύσεις, αφού q_2 βγάζει q_{2+}, q_{2-} και οι $\operatorname{atan2}(s_{23}, c_{23})$ βγάζει άλλες δύο λύσεις με αποτέλεσμα να οι 4 λύσεις να είναι κάποιος πιθανός συνδυασμός των παραπάνω

Παρατηρήθηκε όμως ότι με αυτή την προσέγγιση του αντίστροφου γεωμετρικού μοντέλου προκύπτει το P_E συναρτήσει το $P_{E}x$ όπου όταν πάμε να βάλουμε ~~τιμές~~ τιμές για την υλοποίηση της προσομοίωσης, η τυχαιότητα στην επιλογή αυτή θα δημιουργήσει προβλήματα.

Επομένως, $2^{ος}$ τρόπος επίλυσης αντίστροφου γεωμετρικού, όπου και θα χρησιμοποιηθεί και στο σχεδιασμό τροχιάς και στην προσομοίωση στο MATLAB

$$P^0_{E,x} = l_1 + l_2 c_1 + (l_4 c_2) s_1 + (l_5 c_{23}) s_1 \quad (1)$$
$$P^0_{E,y} = l_4 s_2 + l_5 s_{23} \quad (2)$$
$$P^0_{E,z} = -l_0 + l_2 s_1 - (l_4 c_2) c_1 - (l_5 c_{23}) c_1 \quad (3)$$

Υψώνω στο τετράγωνο τις παραπάνω σχέσεις

$$(1)^2 \Rightarrow (P^0_{E,x} - l_1)^2 = l_2^2 c_1^2 + (l_4 c_2)^2 s_1^2 + (l_5 c_{23})^2 s_1^2 + 2 l_2 l_4 c_1 s_1 c_2 + 2 l_2 l_5 c_1 s_1 c_{23} + 2 l_4 l_5 s_1^2 c_2 c_{23}$$

$$(2)^2 \Rightarrow {P^0_{E,y}}^2 = l_4^2 s_2^2 + l_5^2 s_{23}^2 + 2 l_4 l_5 s_2 s_{23}$$

$$(3)^2 \Rightarrow (P^0_{E,z} + l_0)^2 = l_2^2 s_1^2 + (l_4 c_2)^2 c_1^2 + (l_5 c_{23}) c_1^2 - 2 l_2 l_4 s_1 c_1 c_2 - 2 l_2 s_1 l_5 c_1 c_{23} + 2 l_4 l_5 c_1^2 c_2 c_{23}$$

Παρατηρώ ότι κατά την πρόσθεση των παραπάνω σχέσεων $(1)^2$ και $(2)^2$ και $(3)^2$ οι κοινοί όροι αλληλοαναιρούνται και προκύπτει ότι

$$(P^0_{E,x} - l_1)^2 + (P^0_{E,y})^2 + (P^0_{E,z} + l_0)^2 = l_2^2 + l_4^2 + l_5^2 + 2 l_4 l_5 c_2 c_{23} + 2 l_4 l_5 s_2 s_{23}$$

Όμως $c_2 c_{23} + s_2 s_{23} = c_2^2 c_3 - c_2 \cancel{s_2} s_3 + s_2^2 c_3 + s_2 \cancel{c_2} s_3 \Rightarrow$

$c_2 c_{23} + s_2 s_{23} = c_3 (c_2^2 + s_2^2) = c_3$

Άρα $\boxed{c_3 = \dfrac{(P^0_{E,x} - l_1)^2 + (P^0_{E,y})^2 + (P^0_{E,z} + l_0)^2 - l_2^2 - l_4^2 - l_5^2}{2 l_4 l_5}}$

Οπότε θα προκύπτουν λύσεις της μορφής:

$$q_3 = \arccos\left(\frac{(P^0_{Ex} - l_1)^2 + (P_{E,y})^2 + (P_{Ez} + l_0)^2 - l_2^2 - l_4^2 - l_5^2}{2 l_4 l_5} \right)$$

Που βγάζει 2 λύσεις με διαφορά π αφού για το arccos ισχύει: $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

Γνωρίζοντας πλέον την q_3 πάω στην σχέση ② και αποφαίνω ότι δεν γνωρίζω

$P_{Ey} = l_4 s_2 + l_5 s_{23} = l_4 s_2 + l_5 (s_2 c_3 + c_2 s_3) = (l_4 + l_5 c_3) s_2 + l_5 c_2 s_3$

$P_{Ey} - l_5 c_2 s_3 = (l_4 + l_5 c_3) s_2 \Rightarrow P_{Ey}^2 + l_5^2 c_2^2 s_3^2 - 2 P_{Ey} l_5 c_2 s_3 = (l_4 + l_5 c_3)^2 (1 - c_2^2) \Rightarrow$

$P_{Ey}^2 + l_5^2 c_2^2 s_3^2 - 2 P_{Ey} l_5 c_2 s_3 = (l_4 + l_5 c_3)^2 - (l_4 + l_5 c_3)^2 c_2^2 \Rightarrow$

$[l_5^2 s_3^2 + (l_4 + l_5 c_3)^2] c^2 - 2 l_5 s_3 P_{Ey} c_2 + P_{Ey}^2 - (l_4 + l_5 c_3)^2 = 0$

Από όπου φαίνεται ότι έχω ένα εν δυνάμει πολυώνυμο 3ου βαθμού ως προς c_2

• Διακρίνω τις περιπτώσεις

1) $l_5^2 s_3^2 + (l_4+l_5c_3)^2 = 0$

δηλαδή και τα 2 ~~ίσα~~ είναι $=0$ $\left\{\begin{array}{l} l_5s_3=0 \\ l_4+l_5c_3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} s_3=0 \\ c_3=-l_4/l_5 \end{array}\right. \Longrightarrow$

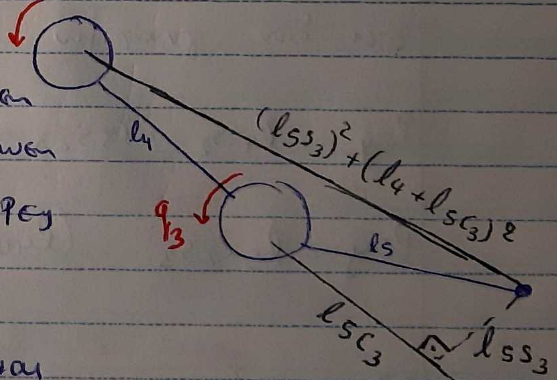
Άρα $\left\{\begin{array}{l} q_3=\pi \\ c_3=-1 \text{ και} \\ c_3=-l_4/l_5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} q_3=\pi \\ \text{και} \\ l_4=l_5 \end{array}\right.$

2) Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 4 l_5^2 s_3^2 \cdot p_{Ey}^2 - 4\left[l_5^2 s_3^2+(l_4+l_5c_3)^2\right]\left[p_{Ey}^2-(l_4+l_5c_3)^2\right]$

$$\Delta = 4\left[l_5^2 s_3^2 \cdot p_{Ey}^2 - l_5^2 s_3^2 p_{Ey}^2 + l_5^2 s_3^2 (l_4+l_5c_3)^2 - (l_4+l_5c_3)^2 p_{Ey}^2 + (l_4+l_5c_3)^4\right]$$

$$\Delta = 4(l_4+l_5c_3)^2\left[-p_{Ey}^2 + l_5^2 s_3^2 + (l_4+l_5c_3)^2\right]$$

Παρατηρώ ότι το $(l_5s_3)^2+(l_4+l_5c_3)^2$ είναι η απόσταση του εργαλείου δράσης από την άρθρωση q_2, οπότε είναι μεγαλύτερο του p_{Ey}



Άρα η λύση του πολυωνύμου θα είναι

$$C_2 = \frac{l_5s_3p_{Ey} \pm (l_4+l_5c_3)\sqrt{l_5^2s_3^2+(l_4+l_5c_3)^2-p_{Ey}^2}}{l_5^2s_3^2+(l_4+l_5c_3)^2}$$

Άρα για την q_2 προκύπτουν 2 λύσεις αφού είναι συναρτήσει της q_3

$$q_2 = \pm \arccos\left(\frac{l_5 s_3 p_{Ey} \pm (l_4+l_5c_3)\sqrt{(l_4+l_5c_3)^2+l_5^2s_3^2-p_{Ey}^2}}{l_5^2 s_3^2+(l_4+l_5c_3)^2}\right)$$

Για την εύρεση της q_1 πάω στην σχέση ③ και απομονώνω ό,τι δεν γνωρίζω

$$p_{Ez}+l_0 = l_2 s_1 - (l_4 c_2)c_1 - (l_5 c_{23})c_1 \Rightarrow$$

$$p_{Ez}+l_0 + (l_4c_2+l_5c_{23})c_1 = l_2 s_1 \Rightarrow$$

$$(p_{Ez}+l_0)^2 + (l_4c_2+l_5c_{23})^2c_1^2 + 2(p_{Ez}+l_0)(l_4c_2+l_5c_{23})c_1 = l_2^2(1-c_1^2) \Rightarrow$$

$$\left[(l_4c_2+l_5c_{23})^2+l_2^2\right]c_1^2 + 2(p_{Ez}+l_0)(l_4c_2+l_5c_{23})c_1 + (p_{Ez}+l_0)^2 - l_2^2 = 0$$

Από όπου φαίνεται ότι προκύπτει ένα 2ου βαθμού πολυώνυμο για το c_1

Διακρίνω τις περιπτώσεις:

1) $(l_4c_2+l_5c_{23})^2+l_2^2=0$, δηλαδή να είναι και τα 2 ίσα με 0

$\cancel{(l_4c_2+l_5c_{23})^2=0}$ Όπου ΔΕΝ γίνεται αφού έχω έναν σταθερό θετικό όρο το μήκος του συνδέσμου l_2

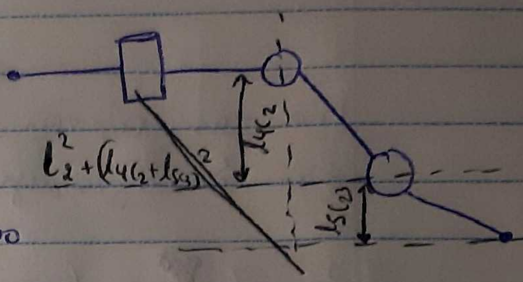
Άρα βρίσκω τη διακρίνουσα

$$\Delta = 4(p_{Ez}+l_0)^2(l_4c_2+l_5c_{23})^2 - 4\left[\left[(l_4c_2+l_5c_{23})^2+l_2^2\right]\left[(p_{Ez}+l_0)^2-l_2\right]\right]$$

$$\Delta = 4\{(p_{Ez}+l_0)^2(l_4c_2+l_5c_{23})^2 - (p_{Ez}+l_0)^2\cdot(l_4c_2+l_5c_{23})^2 + l_2^2(l_4c_2+l_5c_{23})^2$$
$$- l_2^2(p_{Ez}+l_0)^2 + l_4^2\}$$

$$\Delta = 4l_2^2\left[(l_4c_2+l_5c_{23})^2 + l_2^2 - (p_{Ez}+l_0)^2\right]$$

Παρατηρώ ότι το μέγεθος $l_2^2 + (l_4c_2+l_5c_{23})^2$ είναι η κάθετη απόσταση του εργαλείου δράσης από την q_1, οπότε είναι μεγαλύτερο του $(p_{Ez}+l_0)^2$



Άρα, η λύση του πολυωνύμου θα είναι

$$c_1 = \frac{-(l_4c_2+l_5c_{23})(p_{Ez}+l_0) \pm l_2\sqrt{(l_4c_2+l_5c_{23})^2 + l_2^2 - (p_{Ez}+l_0)^2}}{(l_4c_2+l_5c_{23})^2 + l_2^2}$$

Από όπου προκύπτουν οι λύσεις για το q_1:

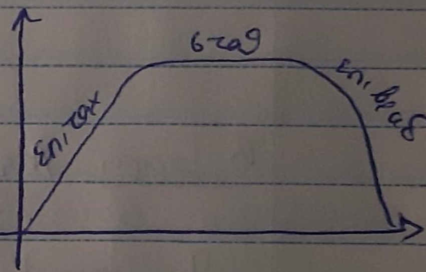
$$q_1 = \pm \arccos\left(\frac{-(l_4c_2+l_5c_{23})(p_{Ez}+l_0) \pm l_2\sqrt{(l_4c_2+l_5c_{23})^2 + l_2^2 - (p_{Ez}+l_0)^2}}{(l_4c_2+l_5c_{23})^2 + l_2^2}\right)$$

Β. Κινηματική Προσομοίωση

6) Για τον σχεδιασμό της επιθυμητής τροχιάς χρειάζεται ο στόχος του είναι να γραφούν κάποιες χρονικές συναρτήσεις που θα περιγράφουν την εξέλιξη των μεταβλητών θέσης του ρομπότ μεταξύ μιας αρχικής και τελικής θέσης

Για την ομαλότητα στην τροχιά θα χρειαστεί να πάρουμε κάποια σημεία ενδιάμεσα της αρχικής και της τελικής θέσης, στα οποία θα εφαρμόσουμε αντίστροφο γεωμετρικό για να πάρουμε τις τιμές των γωνιών q_1, q_2, q_3

Επιπλέον, ως ομαλή τροχιά ορίζεται μια η οποία έχει 3 φάσεις:



1) επιτάχυνση
2) σταθερή ταχύτητα
3) επιβράδυνση

όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα

Επομένως, θα χρησιμοποιηθεί για τον σχεδιασμό πολυωνυμικός αλγόριθμος παρεμβολής μεταξύ $P_A(x_A, y_A, z_A)$ και $P_B(x_B, y_B, z_B)$ με αρχική ταχύτητα 0.

Το πολυώνυμο θα είναι της μορφής:

$$\xi(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_5 t^5$$

Στο οποίο εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες προκύπτουν οι ακόλουθοι συντελεστές.

$\alpha_0 = P_A$

$\alpha_1 = \dot{P}_A \Rightarrow \alpha_1 = 0$

$\alpha_2 = \ddot{P}_A/2 \Rightarrow$

$$\alpha_3 = \frac{20P_B - 20P_A - (8\dot{P}_B + 12\dot{P}_A)T - (3\ddot{P}_A - \ddot{P}_B)T^2}{2T^3} \Rightarrow$$

$$\alpha_3 = \frac{20(P_B - P_A) - (3\ddot{P}_A - \ddot{P}_B)T^2}{2T^3}$$

$$\alpha_4 = \frac{30P_A - 30P_B + (3\ddot{P}_A - 2\ddot{P}_B)T^2}{2T^4}$$

$$\alpha_5 = \frac{12P_B - 12P_A - (\ddot{P}_A - \ddot{P}_B)T^2}{2T^5}$$