Notatki z Analizy matematycznej ze źródeł wszelakich

Contents

1 Liczby naturalne

1.1 Przykład indukcji - nierówność Bernoulliego

Twierdzenie 1. *Jeśli* $x > -1$ *oraz* $x \neq 0$ *i* $n \geq 2$*, to:*

$$(1 + x)^n > 1 + nx.$$

Baza indukcji: Dla $n = 2$ sprawdzamy, czy nierówność Bernoulliego jest prawdziwa. Mamy zatem:

$$(1 + x)^2 > 1 + 2x$$
$$1 + 2x + x^2 > 1 + 2x \quad / \ + (-1 - 2x)$$
$$x^2 > 0$$

Z założenia wiemy, że $x \neq 0$, kwadrat liczby rzeczywistej jest zawsze większy niż 0, więc nierówność jest spełniona.

Krok indukcyjny Zakładamy, że $(1 + x)^n > 1 + nx$ jest spełnione dla pewnego $n \geq 2$.

Dowodzimy że nierówność jest spełniona dla $n + 1$: Dowodzimy, że $(1 + x)^{n+1} > 1 + (n + 1)x$.

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x)^1$$

Zauważmy, że możemy powyższą informację wykorzystać do odpowiedniego dobrania nierówności, używając nierówności z kroku indukcyjnego (gdy opuścimy wyrażenie $(1 + x)$ wracamy po prostu do nierówności z kroku indukcyjnego):

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)^1 > (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2$$

$$(1 + x)^{n+1} > 1 + (n + 1)x + nx^2 > 1 + (n + 1)x$$

Jeżeli dodamy "coś" (u nas nx^2) do $1 + (n + 1)x$ to i tak widzimy, że $(1 + x)^{n+1}$ nadal jest większe. Jako, że $x \neq 0$ (ważne, gdyby było inaczej, nierówność ostra nie byłaby spełniona) to wyrażenie nx^2 jest dodatnie. Tym bardziej $(1 + x)^{n+1}$ jest większe od wyrażenia bez nx^2. Z tego można wywnioskować końcowy wniosek, który na mocy zasady indukcji pokazuje, że dla $n \geq 2$ nierówność Bernoulliego jest spełniona, czyli udowodnione zostało, że dla $n+1$:

$$(1+x)^{n+1} > 1 + (n+1)x$$

2 Własności ciągów liczbowych

2.1 Granica iloczynu ciągów jest równa iloczynowi granic tych ciągów

Twierdzenie 2. *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *i* $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ *to* $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = xy$.

2.2 Dowód, że $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$

Niech x_n oraz y_n będą ciągami o wyrazach rzeczywistych lub zespolonych.

Twierdzenie 3. *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *i* $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ *to* $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$.

Chcemy okazać, że dla dowolnej liczby rzeczywistej większej niż zero, istnieje jakaś liczba naturalna, taka, że dla n równego bądź większego niż ta liczba, spełniona jest nierówność:

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| < \text{Dowolna ustalona liczba rzeczywista większa od zera}$$

Niech $\epsilon > 0$ będzie ustaloną liczbą rzeczywistą. Przyjmijmy, że $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Wiemy, że $\delta > 0$. Z założeń wiemy, że oba ciągi są zbieżne, więc dla każdego z tych dwóch ciągów istnieją liczby naturalne $l, m \in \mathbb{N}$ takie że:

$$\bigwedge_{n \geq l} |x_n - x| < \delta$$

$$\bigwedge_{n \geq m} |y_n - y| < \delta$$

Oznaczmy $n_0 = \max\{l, m\}$. n_0 jest liczbą, która gwarantuje nam, że gdy $n \geq n_0$, od tego miejsca te dwie nierówności są jednocześnie spełnione. Mamy wtedy:

$$\bigwedge_{n \geq n_0} (|x_n - x| < \delta \wedge |y_n - y| < \delta) \tag{2.1}$$

Z 2.1 uzyskujemy:

$$\bigwedge_{n \geq n_0} |x_n - x| + |y_n - y| < 2\delta \tag{2.2}$$

Skorzystamy z nierówności trójkąta i rozwiniemy wyrażenie $|(x_n + y_n) - (x + y)|$:

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$$

Widzimy, że dla dowolnego $n \geq n_0$:

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| < 2\delta = 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje takie n_0, że $\bigwedge\limits_{n \geq n_0} |(x_n + y_n) - (x + y)| < \epsilon$. Zatem $x + y$ jest granicą $(x_n + y_n)$.

3 Ciągi liczb rzeczywistych

W tym rozdziale każdy rozważany ciąg jest o wyrazach rzeczywistych.

Twierdzenie 4. *Ciąg monotoniczny jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony.*

Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony (np. Rudnicki Twierdzenie 3 Punkt 2.1.3). W jedną stronę dowód jest w takim razie gotowy. Pokażemy zatem, że ciąg który jest monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

Załóżmy, że ciąg (x_n) jest nierosnący (ciąg nazywamy monotonicznym gdy jest niemalejący lub nierosnący) oraz, że jest ograniczony. Niech:

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Zauważmy, że A jest zbiorem ograniczonym. Co to znaczy, że zbiór jest ograniczony? Mówimy, że zbiór A jest ograniczony jeśli jest ograniczony z góry i z dołu.

Zbiór A jest *ograniczony z góry* gdy:

$$\bigvee_{M \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in A} x \leq M$$

.

Zbiór A jest *ograniczony z dołu* gdy:

$$\bigvee_{m \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in A} x \geq m$$

.

Wcześniej założyliśmy, że ciąg (x_n) jest ograniczony. Wtedy istnieje liczba dodatnia ograniczająca wszystkie wyrazy tego ciągu. Niech $M > 0$ będzie taką liczbą, która dla dowolnego n spełnia nierówność $M \geq |x_n|$. Na mocy pewnej znanej własności dotyczącej wartości bezwzględnej (patrz Wikipedia angielska) mamy:

$$M \geq |x_n| \iff -M \leq x_n \leq M$$

Ciekawe spostrzeżenie jest takie, że przez założenie o ograniczoności ciągu, widzimy powyżej, że jeśli wrzucimy wyrazy tego ciągu do jakiegoś zbioru to ten zbiór będzie ograniczony. Jest nam to niezbędne do posłużenia się aksjomatem ciągłości. Wiemy wtedy, że zbiór A ma kres dolny. Niech zatem $x = \inf A$. Z definicji kresu dolnego mamy wtedy:

$$\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} x \leq x_n$$

oraz

$$\bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{x_{n_0} \in A} x_{n_0} < x + \epsilon$$

Teraz ważny krok, przypomnijmy, że założyliśmy, że nasz ciąg jest nierosnący. Czyli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $x_{n+1} \leq x_n$. Na pierwszy rzut oka może się to nie wydawać oczywiste, ale wykorzystamy tę informację do obsadzenia "własnych" wskaźników. Prawdziwym jest, że dla $n \geq n_0$ mamy $x_n \leq x_{n_0}$. Dlaczego? Wyrazy ciągu wyglądają jakoś tak:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6...$$

Każdy kolejny wyraz ciągu, jest mniejszy niż poprzedni, jeśli wiemy zatem z aksjomatu ciągłości o istnieniu liczby x_{n_0} to jest gdzieś ona w tym zbiorze wyrazów ciągu:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}..., x_{n_0}, ...$$

Czyli od pewnego indeksu wyrazy ciągu są mniejsze bądź równe niż poprzedni wyraz. Jeżeli np. $n_0 = 3$, to wyrazy z indeksem większym bądź równym niż $n = 3$ będa automatycznie mniejsze na mocy założenia o ciągu niemalejącym:

$$x_1 \geq x_2 \geq x_{n_0=3} \geq x_4 \geq x_5 \geq x_6 \geq x_7 \geq x_8...$$

W takim razie wykorzystamy tę informację do zapisania nierówności:

$$x \leq x_n \leq x_{n_0} < x + \epsilon \quad \text{dla} \quad n \geq n_0$$

Z powyższego mamy:

$$x_n < x + \epsilon \quad \text{dla} \quad n \geq n_0$$

oraz

$$x - x_n \leq 0 < \epsilon \implies x - \epsilon < x_n \quad \text{dla} \quad n \geq n_0$$

Z tego już łatwo korzystając z własności wartości bezwzględnej mamy:

$$x - \epsilon < x_n < x + \epsilon \iff |x_n - x| < \epsilon \quad \text{dla} \quad n \geq n_0$$

Tak więc pokazaliśmy, że dla dowolnego $\epsilon > 0$, istnieje taka liczba (indeks po naszemu) n_0, że dla dowolnej liczby $n \geq n_0$ spełniona jest nierówność łudząco przypominająca definicję granicy:

$$\bigwedge_{n \geq n_0} |x_n - x| < \epsilon,$$

tak więc ciąg monotoniczny ograniczony jest zbieżny do x.

3.1 Granica $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0$ gdy $\alpha>0$

Sprawdzamy, że:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=0 \text{ dla } \alpha>0$$

.

Chcemy sprawdzić, że dla dowolnej liczby $\epsilon>0$ istnieje takie $n_0\in\mathbb{N}$, że:

$$|\frac{1}{n^\alpha}-0|<\epsilon \;\text{ dla }\; n\geq n_0$$

Jako, że wyrażenie $\frac{1}{n^\alpha}$ dla naszych warunków jest zawsze większe niż 0, możemy opuścić wartość bezwzględną:

$$\frac{1}{n^\alpha}<\epsilon \;\text{ dla }\; n\geq n_0$$

Teraz, żeby pokazać, że istnieje liczba od której nierówność z epsilonem jest spełniona, przekształćmy nierówność do równoważnej postaci tak by n było trochę bardziej "widoczne" tj. dla $n\geq n_0$:

$$\frac{1}{n^\alpha}<\epsilon \;\;/\cdot n^\alpha$$

$$1<\epsilon n^\alpha \;\;/\cdot\frac{1}{\epsilon}$$

$$\frac{1}{\epsilon}<n^\alpha \;\;/\sqrt[\alpha]{}$$

$$n>\big(\frac{1}{\epsilon}\big)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Teraz, wiemy, że ϵ i α jest dowolną liczbą większą niż zero, to oznacza, że jak zostaną ustalone to będziemy mieli po prawej stronie jakąś liczbę. Zawsze możemy wskazać, liczbę naturalną większą niż ta liczba. Niech w takim razie n_0 będzie liczbą naturalną większą niż $\big(\frac{1}{\epsilon}\big)^{\frac{1}{\alpha}}$ tzn. $n_0>\big(\frac{1}{\epsilon}\big)^{\frac{1}{\alpha}}$. Wskazaliśmy teraz właśnie istnienie liczby, od której (aż wzwyż, czyli liczby powyżej n_0 też spełniają tę nierówność) nasza przekształcona nierówność jest spełniona. Ta nierówność jest oczywiście równoważna $|\frac{1}{n^\alpha}-0|<\epsilon$ dla $n\geq n_0$. Tak więc granicą dla ciągu $\frac{1}{n^\alpha}$ jest liczba 0.

3.2 Granica $\lim_{n\to\infty}a^n=0$, gdy $0\leq a<1$

Postępujemy podobnie jak w granicy ciągu $\frac{1}{n^\alpha}$. Chcemy sprawdzić, że 0 jest granicą ciągu a^n dla warunków $0\leq a<1$. W takim razie sprawdzamy, że dla dowolnej liczby $\epsilon>0$, istnieje takie $n_0\in\mathbb{N}$, że

$$|a^n-0|<\epsilon \;\text{ dla }\; n\geq n_0$$

Z podanych warunków, wiemy, że wyrażenie w środku wartości bezwzględnej nie będzie ujemne, możemy ją więc opuścić:

$$a^n < \epsilon \text{ dla } n \geq n_0$$

Ważne wtrącenie: Dla $a = 0$ ciąg jest stały o wyrazie 0 już od pierwszego wyrazu, więc ma on granicę równą 0. W dalszych rozważaniach ograniczmy więc a do przypadku $0 < a < 1$ (pozwoli nam to swobodnie używać logarytmu, jako, że gdy przyjmiemy za podstawę a mógłby być 'kłopot' z ϵ w nierówności, z powodu zera w podstawie). Skorzystajmy z własności logarytmu ($\log_a a^b = b$) i dokonajmy przekształcenia powyższej nierówności, aby n było bardziej widoczne, oczywiście nierówność ta będzie równoważna pierwotnej, zatem dla $n \geq n_0$ zachodzi (Uwaga na zmianę znaku w nierówności!):

$$a^n < \epsilon \ / \ \log_a$$

$$\log_a a^n = n > \log_a \epsilon$$

Teraz, gdy ϵ oraz a zostaną ustalone, po prawej stronie powyższej nierówności mamy jakąś skończoną liczbę. Niech zatem n_0 będzie liczbą naturalną taką, że $n_0 > \log_a \epsilon$. Właśnie pokazaliśmy, że istnieje liczba (i jako, że jest to liczba naturalna jej następnik etc.) od której nierówność $n > \log_a \epsilon$ jest spełniona, która jest równoważna pierwotnej nierówności. Pokazaliśmy zatem, że dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje liczba naturalna n_0 która dla każdego $n \geq n_0$ spełnia:

$$|a^n - 0| < \epsilon$$

więc $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$, gdy $0 \leq a < 1$.

3.3 Granica $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ gdy $a > 0$

Mamy udowodnić, że granica z $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$ gdy $a > 0$ wynosi 1. Na starcie zobaczmy co się dzieje w momencie gdy $a \geq 1$. Weźmy wtedy pierwiastek n-tego stopnia z obydwu stron nierówności, nie musimy uważać na znak nierówności ponieważ a jest dodatnie tak samo jak 1. Mamy zatem:

$$a \geq 1 / \ \sqrt[n]{}$$

$$\sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{1} = 1$$

Weźmy teraz $b_n = \sqrt[n]{a} - 1$. Wyliczmy z tej równości a:

$$b_n = \sqrt[n]{a} - 1 \ / \ +1$$
$$b_n + 1 = \sqrt[n]{a} \ / \ (.)^n$$
$$(b_n + 1)^n = a$$

Ważna uwaga, korzystamy z nierówności Bernoulliego, odwołując się do (1.1.1), udowodniliśmy, wersję dla nierówności ostrej, w dowodzie tej granicy wykorzystamy wersję nieostrą:

$$a = (b_n + 1)^n \geq 1 + b_n n$$

Przekształćmy nierówność, aby wydobyć b_n:

$$a \geq 1 + b_n n \quad / \quad -1$$

$$a - 1 \geq b_n n \quad / \quad \cdot \frac{1}{n}$$

$$\frac{a-1}{n} \geq b_n$$

Stworzymy teraz nierówność, która da nam podstawę do użycia twierdzenia o trzech ciągach. Wiemy, że $b_n \geq 0$ (dlatego, że $b_n = \sqrt[n]{a} - 1 \geq 0$ a $a \geq 1$). Ustawmy w takim razie następującą nierówność:

$$0 \leq b_n \leq \frac{a-1}{n}$$

$\lim_{n\to\infty} 0$ wynosi 0 (na mocy twierdzenia o granicy ciągu stałego). Granica $lim_{n\to\infty} \frac{a-1}{n}$ jest równa:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a-1}{n} = \lim_{n\to\infty} (a-1) \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} (a-1) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \big(\lim_{n\to\infty} (a-1)\big) \cdot 0 = 0$$

Z twierdzenia o trzech ciągach mamy zatem $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Rezultatu tego użyjemy w wyrażeniu opisującym b_n:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{a}) - \lim_{n\to\infty} (1)$$

$$0 = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{a}) - 1 \quad / \quad +1$$

$$1 = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{a})$$

Dla $a \geq 1$ udowodniliśmy, że granica wynosi 1. Pozostaje sprawdzić przypadek dla $a \in (0,1)$. Ale najpierw pokażemy, że wyrażenie $\sqrt[n]{a}$ da się przedstawić trochę inaczej. Będzie to kluczowe dla dostrzeżenia czemu granica dla tego przypadku również wynosi 1.

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\frac{1}{\frac{1}{a}}} = \sqrt[n]{(\frac{1}{a})^{-1}} = (\frac{1}{a})^{\frac{-1}{n}} = \frac{1}{(\frac{1}{a})^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$$

Ważne spostrzeżenie, $a \in (0,1)$, powyżej udowodniliśmy, że granica z $\sqrt[n]{a}$ wynosi 1 gdy $a \geq 1$. Oznacza to dla nas tyle, że w wyrażeniu pod pierwiastkiem jest ułamek, którego wynikiem jest liczba większa niż 1. Wiemy zatem jaki jest wynik dla tej granicy, znamy granicę licznika oraz mianownika, separując:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{1} = 1$$

3.4 Granica $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Chcemy sprawdzić, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Przyjmijmy zatem, że $1 + b_n = \sqrt[n]{n}$. Wtedy:

$$1 + b_n = \sqrt[n]{n} \quad / \quad -1$$
$$b_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$$

Skąd wiemy, że $b_n \geq 0$? Po pierwsze, wiemy na pewno, że b_n może przyjąć 0 dla $n = 1$ ($b_{n=1} = \sqrt[1]{1} - 1 = 0$). W takim razie co by się stało, gdyby $b_n < 0$? Otóż:

$$b_n = \sqrt[n]{n} - 1 < 0$$
$$\sqrt[n]{n} - 1 < 0 \quad / \quad +1$$
$$\sqrt[n]{n} < 1 \quad / \quad (\cdot)^n$$
$$(\sqrt[n]{n})^n = (n^{\frac{1}{n}})^n = n^1 = n < 1^n = 1$$

SPRZECZNOŚĆ! Żadna liczba n nie będzie mniejsza niż 1.

Wiemy już dlaczego na pewno $b_n \geq 0$. Wyliczmy, n:

$$1 + b_n = \sqrt[n]{n} \quad / \quad (\cdot)^n$$
$$(1 + b_n)^n = n$$

Skorzystamy teraz ze wzoru Newtona na potęgę dwumianu (Wikipedia nazywa ten szczególny przypadek Szeregiem Newton'a? Sprawdzić). Rozwińmy wyrażenie $(1 + b_n)^n$ tymże wzorem:

$$(1 + b_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_n^k = \binom{n}{0} b_n^0 + \binom{n}{1} b_n^1 + \binom{n}{2} b_n^2 + ...$$
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_n^k = 1 + \binom{n}{1} b_n + \binom{n}{2} b_n^2 + ...$$

Mamy w takim razie dla $n \geq 2$:

$$(1 + b_n)^n \geq 1 + \binom{n}{1} b_n + \binom{n}{2} b_n^2 > 1 + \binom{n}{2} b_n^2$$