# Rozdział 2 Ciągi 2.2

# 1 Własności ciągów liczbowych

## 1.1 Granica iloczynu ciągów jest równa iloczynowi granic tych ciągów

**Twierdzenie 1** *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *i* $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ *to* $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = xy$.

## 1.2 Dowód, że $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$

Niech $x_n$ oraz $y_n$ będą ciągami o wyrazach rzeczywistych lub zespolonych.

**Twierdzenie 2** *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *i* $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ *to* $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$.

Chcemy okazać, że dla dowolnej liczby rzeczywistej większej niż zero, istnieje jakaś liczba naturalna, taka, że dla $n$ równego bądź większego niż ta liczba, spełniona jest nierówność:

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| < \text{Dowolna liczba rzeczywista większa od zera}$$

Niech $\epsilon > 0$ będzie ustaloną liczbą rzeczywistą. Przyjmijmy, że $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Wiemy, że $\delta > 0$. Z założeń wiemy, że oba ciągi są zbieżne, więc dla każdego z tych dwóch ciągów istnieją liczby naturalne $l, m \in \mathbb{N}$ takie że:

$$\bigwedge_{n \geq l} |x_n - x| < \delta$$

$$\bigwedge_{n \geq m} |y_n - y| < \delta$$

Oznaczmy $n_0 = \max\{l, m\}$. $n_0$ jest liczbą, która gwarantuje nam, że gdy $n \geq n_0$, od tego miejsca te dwie nierówności są jednocześnie spełnione. Mamy wtedy:

$$\bigwedge_{n \geq n_0} (|x_n - x| < \delta \wedge |y_n - y| < \delta) \tag{1.1}$$

Z 1.1 uzyskujemy:

$$\bigwedge_{n \geq n_0} |x_n - x| + |y_n - y| < 2\delta \tag{1.2}$$

Skorzystamy z nierówności trójkąta i rozwiniemy wyrażenie $|(x_n + y_n) - (x + y)|$:

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |(x_n - x) + (y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$$

Widzimy, że dla dowolnego $n \geq n_0$:

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| < 2\delta = 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje takie $n_0$, że $\bigwedge_{n \geq n_0} |(x_n + y_n) - (x + y)| < \epsilon$. Zatem $x + y$ jest granicą $(x_n + y_n)$.

## 2 Ciągi liczb rzeczywistych

W tym rozdziale każdy rozważany ciąg jest o wyrazach rzeczywistych.

**Twierdzenie 3** *Ciąg monotoniczny jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony.*

Każdy ciąg zbieżny jest ograniczony (np. Rudnicki Twierdzenie 3 Punkt 2.1.3). W jedną stronę dowód jest w takim razie gotowy. Pokażemy zatem, że ciąg który jest monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

Załóżmy, że ciąg $(x_n)$ jest nierosnący (ciąg nazywamy monotonicznym gdy jest niemalejący lub nierosnący) oraz, że jest ograniczony. Niech:

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Zauważmy, że $A$ jest zbiorem ograniczonym. Co to znaczy, że zbiór jest ograniczony? Mówimy, że zbiór $A$ jest ograniczony jeśli jest ograniczony z góry i z dołu.

Zbiór $A$ jest *ograniczony z góry* gdy:

$$\bigvee_{M \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in A} x \leq M$$

.

Zbiór $A$ jest *ograniczony z dołu* gdy:

$$\bigvee_{m \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in A} x \geq m$$

.

Wcześniej założyliśmy, że ciąg $(x_n)$ jest ograniczony. Wtedy istnieje liczba dodatnia ograniczająca wszystkie wyrazy tego ciągu. Niech $M > 0$ będzie taką liczbą, która dla dowolnego $n$ spełnia nierówność $M \geq |x_n|$. Z tego wnioskujemy, że zbiór $A$ jest ograniczony z góry.