さいとう　たくま

2023 年 4 月 29 日

どの問題についても与式を $P(x,y)$ もしくは $P(m,n)$ とおく.
$a\in\mathbb{R}$ に対して,$\mathbb{Z}_{>a}=\mathbb{Z}\cap(a,\infty),\mathbb{Z}_{\geqslant a}=\mathbb{Z}\cap[a,\infty)$ とする.

解答 1. まず明らかに f は全射である.($P(x,-x)$ などを考えればいい.)$P(0,y)$ より,

$$f(f(y)+f(0))=f(y)+f(0)-f(0)$$

であり $f(y)+f(0)$ も明らかに全射なので,$\forall x$ に対して,$f(x)=x+c(c\in\mathbb{R}:Const)$ が必要となる. 元の式に代入すれば,$f(x)=x$ のみが解であることがわかる.

解答 2. $P(m,m)$ より,

$$f(m+f(m))=2m.$$

これに,$m+f(m)$ を代入すると,

$$f(3m+f(m))=2(m+f(m)).$$

$P(3m,m)$ より,

$$4m\mid f(3m+f(m))=2(m+f(m))\Longrightarrow f(m)\geqslant m.$$

一方で,

$$m+f(m)\leqslant f(m+f(m))=2m\Longrightarrow f(m)\leqslant m.$$

したがって,$f(m)=m$ が必要である. 十分なのは明らかであるから,$f(m)=m$ のみが解.

解答 3. $f\equiv 1$ だけであることを示す. これがみたすことは明らかなので, これ以外にないことを示す.

Claim. $f(x)\geqslant 1.$

Proof. $f(yf(x))>0$ であるから,

$$f(x)+f(y)>1.$$

つまり,$f(x)>\frac{1}{2}$ が必要. さて,$n\in\mathbb{Z}_{>0}$ を任意にとって固定し, $f(x)>1-2^{-n}\Longrightarrow f(x)>1-2^{-n-1}$ を示す.

$$f(x)>1-2^{-n}\Longrightarrow f(x)+f(y)>2-2^{-n}\Longrightarrow f(x)>1-2^{-n-1}$$

これによって, 任意の $m\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対して,$f(x)>1-2^{-m}$ が成り立つ. あとは, これに $m\to\infty$ とすれば主張を得る. □

Claim. $f\equiv 1.$

Proof. $P\left(\frac{x}{f(y)}, y\right)$ より,

$$1 + f(y) \leqslant f\left(\frac{x}{f(y)}\right) + f(y) = f(x) + 1 \Longrightarrow f(y) \leqslant f(x).$$

よって,f は定値. あとは, 元の式に代入すればわかる. □

解答 4. $f(x) = x + 1$ が解なのは明らかである. これ以外に解がないことを示していく.

Claim. $c = 4 - f(1)$.

$$f(y + f(y)) = 2y + c. \tag{1}$$

Proof. $P(1, y)$ よりわかる. □

Claim.

$$(x - 1)f(x) = -(x + 1)f(-x). \tag{2}$$

Proof. $P(x, 0), P(-x, 0)$ の比較よりわかる. □

Claim. $c = 2, f(1) = 2$.

Proof. (2) に -1 を代入すると,$f(-1) = 0$.(1) にも -1 を代入すると主張を得る. □

Claim. $f(0) = 1$.

Proof. $P(-1, 1), P(-1, -1)$ より,

$$f(2) + f(0) = 4, f(0) + f(-2) = 0.$$

(2) より,$f(-2) = -\frac{1}{3}f(2)$ であるから,$f(0) = 1$. □

Claim. $f(y + 2) = f(y) + 2$.

Proof. $P(0, y), P(0, y + 1)$ の比較よりわかる. □

Claim. $f(x) = x + 1$.

Proof. (2) に $x + 2$ 代入すると,

$$\begin{aligned} &2(x + 3) - (x + 3)f(-x) = (x + 1)f(x) + 2(x + 1) \\ &\Longleftrightarrow -(x + 3)f(-x) = (x + 1)f(x) - 4. \end{aligned} \tag{3}$$

あとは,(3) $\times (x + 1) -$ (2) $\times (x + 3)$ より従う.

$$\begin{aligned} &(x - 1)(x + 3)f(x) = (x + 1)^2 f(x) - 4(x + 1) \\ &\Longleftrightarrow f(x) = x + 1. \end{aligned}$$

□

解答 5. $f \equiv 0, f(x) = x$ は明らかに与式をみたしている. これら以外の解がないことを示していく.

Claim. $f(0) = 0$.

Proof. $P(m, 0)$ より従う. □

Claim. $f(1) = 0$ のとき,$f \equiv 0$.

Proof. $P(1, 1)$ より,

$$f(1 + f(1)) = f(2). \tag{1}$$

よって,$f(2) = 0$. $P(m+1, 1)$ より,

$$\left\lfloor \frac{f(1 + f(m+1))}{m+1} \right\rfloor + f(m+1) = f(m+2). \tag{2}$$

任意に $k \in \mathbb{Z}_{>1}$ をとって固定する.

$$f(k) = 0 \Longrightarrow f(k+1) = \left\lfloor \frac{f(1 + f(k))}{k} \right\rfloor = 0$$

であるから,$\forall n \in \mathbb{Z}_{>1}, f(n) = 0$. したがって,$f \equiv 0$. □

以降 $f(1) > 0$ の時を考える.

Claim. $f(2) \leqslant f(3) \leqslant \cdots$.

Proof. (2) より明らか. □

Claim. $f(1) = 1$.

Proof. $f(1) \geqslant 2$ として, 矛盾を導く.(1) より,$f(2) = f(3) = f(1 + f(1))$. これを踏まえて (2) に 1 を代入すると,$\left\lfloor \frac{f(1+f(2))}{2} \right\rfloor = 0$. 任意に $m \geqslant 3$ をとり固定する. 次を示す:

$$f(m) = f(2) \Longrightarrow f(m+1) = f(m) = f(2).$$

まず,

$$0 \leqslant \left\lfloor \frac{f(1 + f(m))}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{f(1 + f(2))}{m} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{f(1 + f(2))}{2} \right\rfloor = 0$$

であるから,$\left\lfloor \frac{f(1+f(m))}{m} \right\rfloor = 0$. あとは,(2) に $m - 1 > 0$ を代入すると,$f(m) = f(m+1)$ がわかる. したがって,$f(2) = f(3) = \cdots$ となる. しかし, これは不合理である.($P(1, 3)$ とか.) □

Claim. $f(2) \geqslant 2$.

Proof. $f(2) \leqslant 1$ と仮定し, 矛盾を導く.$f(0), f(1), f(2) \leqslant 1$ に注意して,(2) に 1 を代入すると,$f(2) = f(3)$. 一つ前の主張の証明と同様にすると,$f(2) = f(3) = \cdots$ となり, これもまた同様に不合理である. □

Claim. f は増加する.

Proof. $f(0) < f(1) < f(2)$ であるから, 任意に $m \in \mathbb{Z}_{>1}$ とって固定し, 次を示せばいい:

$$f(0) < f(1) < \cdots < f(m) \Longrightarrow f(m) < f(m+1).$$

$$f(0) < f(1) < \cdots < f(m) \Longrightarrow f(m) \geqslant m$$

に注意して,(2) に $m-1>0$ を代入すると,

$$f(m+1) = f(m) + \left\lfloor \frac{f(1+f(m))}{m} \right\rfloor \geqslant f(m) + \left\lfloor \frac{f(1+m)}{m} \right\rfloor \geqslant f(m) + \left\lfloor \frac{f(m)}{m} \right\rfloor > f(m). \qquad \square$$

Claim. $f(2)=2, f(3)=3$.

Proof. $P(1,2)$ より,

$$f(3)+1 = f(4).$$

$P(3,1)$ より,

$$\left\lfloor \frac{f(1+f(3))}{3} \right\rfloor + f(3) = f(4).$$

よって,$f(1+f(3)) < 6$. また,$f(2) \geqslant 3$ だとすると,$f(n) \geqslant n+1$ $(n>1)$ であるが,

$$6 > f(1+f(3)) \geqslant 6$$

となり矛盾するため,$f(2)=2$. また同様にして,$f(3)=3$ がわかる. $\square$

Claim. $f(n)=n$.

Proof. 次のように数列 $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{>0}}$ を定める:

$$a_1 = 3, a_{i+1} = (a_i - 1)^2 \ (i>0).$$

このとき,$f(a_i)=a_i$ である. なぜなら,$f(a_1)=a_1$ であり $\forall i>0$ に対して,$P(1, a_i - 1)$ より,

$$(a_i - 1)f(a_i) + f(1) = f((a_i-1)^2) + f(a_i) \Longleftrightarrow a_{i+1} = f(a_{i+1})$$

が成り立つからである. また,$\{a_i\}$ は明らかに増加するので,$i \to \infty, a_i \to \infty$ となる.(増加するのは明らかでないかもしれないが簡単だし冗長になるため省かせてもらう.) さて,$a<b$ であって,$f(a)=a, f(b)=b$ をみたすとき,$f(x)=x$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ となる.(増加するため.) いま,$a=0, b=a_i$ とすることができるので,$i \to \infty$ とすれば,$f(n)=n$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0})$. $\square$

解答 6. $f(x) = \frac{1}{x}$ だけであることを示す. これが解なのは明らか.

Claim. $x>1, f(x) \leqslant 1. x<1, f(x) \geqslant 1.$

Proof. $\frac{x-1}{f(x)-1} > 0$ であると仮定して矛盾を導けばいい.$P\left(x, \frac{x-1}{f(x)-1}\right)$ より,$x = 1$ となるがこれは不合理. $\square$

Claim. $f(x) \leqslant \frac{1}{x}$.

Proof. $1 + yf(x) > 1$ であるから,

$$f(x+y) \leqslant \frac{1}{x}.$$

$t > 0, x < t, y = t - x$ として,$x \to t - 0$ とすればいい. $\square$

Claim. $x \to 1 + 0, f(x) \to 1$.

Proof. $x < 1$ とする.$P\left(x, y = \frac{1-x}{2f(x)}\right)$ より,$(x + y < 1$ に注意する$)$

$$x \leqslant f\left(\frac{3-x}{2}\right) \leqslant \frac{2}{3-x}.$$

ここで,$x \to 1 - 0$ とすればいい. $\square$

Claim. $t \in \mathbb{R}_{>0}.x \to t + 0, f(x) \to \frac{1}{t}$.

Proof. $y \to +0, f(1 + yf(x)) \to 1$ であるから,P で $y \to +0$ とすると,$f(x+y) \to \frac{1}{x}$. これは主張に他ならない. $\square$

Claim. $f(x) = \frac{1}{x}$.

Proof. P で $y \to 1 + 0$ などとすれば,

$$\frac{x}{1+x} = \frac{1}{1+f(x)} \iff f(x) = \frac{1}{x}. \qquad \square$$