jmo final 2023

ず

2023 年 2 月 28 日

問題 1.1. 5×5 のマス目に, 図のような 4 マスからなるタイル何枚かをマス目にそって置く. ここで, タイルは "重ねて置いてもよい" が, マス目からはみ出してはならない. どのマスについても, そのマスを覆うタイルが 0 枚以上 2 枚以下であるとき, 少なくとも 1 枚のタイルで覆われているマスの個数としてありうる最大の値を求めよ. ただし, タイルを回転したり裏返したりしてもいい.

解答

5×5 のマス目に, マス目にそい, 重ならず, はみ出さないようにタイルを置かれているもの (マス目とタイル) を, 良いやつと呼ぶ. 問題にあるようなタイルの置き方は,2 つの良いやつをぴったり重ねたものとしてみることができる. 求める値を a とし,$a = 24$ であることを示す. まずは,$a \geqslant 24$ を示す. 以下のようにおけばいい.

あとは,$a \leqslant 24$ を示せば十分である. 良いやつは, 高々 4 つしかタイルがない. なぜなら, どうタイルを置いても, 左から偶数番目, 上から偶数番目のマスいずれかひとつが覆われるからである. また,1 つのタイルで, 左から奇数番目, 上から奇数番目のマス 2 つを覆うことはできない. つまり,1 つの良いやつで,9 つの左から奇数番目, 上から奇数番目のマスは高々 4 つしか覆われない. これは $a \neq 25$ であることを意味し, 明らかに $a \leqslant 25$ なので $a \leqslant 24$.

コメント

具体例の書きやすさで,2 つに分解して解きました. あんまりよくなかったかも.

問題 1.2. 鋭角三角形 ABC があり, 辺 BC, CA, AB の中点を D, E, F とし, D から辺 AB,AC におろした垂線の足をそれぞれ X, Y とする. F を通り直線 X, Y に平行な直線と直線 DY が E と異なる点 P で交わっている. このとき, 直線 AD と直線 EP に交わることを示せ.

問題 1.3. c を非負整数とする. 正の整数からなる数列 $a_1, a_2, \ldots$ であって, 任意の正の整数 n に対して次の条件をみたすものをすべて求めよ.

$$a_i \leqq a_{n+1} + c \text{ をみたす正の整数 } i \text{ がちょうど } a_n \text{ 個存在する.}$$

解答

$a_i = i + c + 1$ のみであることを示す. これが条件をみたすことは明らかである. これ以外にないことを示していく.

Claim. 数列 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{Z}_{>0}}$ は広義増加.

proof. $a_l > a_{l+1}$ をみたす l が存在するとして矛盾を導く.

$$|\{i : a_i \leqslant a_{l+1}+c\}| = a_l > a_{l+1} = |\{i : a_i \leqslant a_{l+2}+c\}|$$

より,$a_{l+1} > a_{l+2}$. 繰り返すことによって, 正の整数全体が下に有界であることに矛盾する. □

$a_l = a_{l+1}$ なる l が存在したとき,

$$a_l = |\{i : a_i \leqslant a_{l+1}+c\}| = |\{i : a_i \leqslant a_l + c\}| = a_{l-1}$$

なので,$a_{l+1} = a_l = a_{l-1} = \cdots = a_1$ となる. 数列 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{Z}_{>0}}$ は明らかに定値ではないので, 次が分かる.

$$m = a_1 = \cdots = a_n < a_{n+1} < a_{n+2} < \cdots \quad (m, n \in \mathbb{Z}_{>0})$$

$b_i = a_{i+1} - a_i$ とおく.

Claim. 任意の $N > 0$ に対して,$b_i = 1$ かつ $i > N$ をみたす i が存在する.

proof. $b_i, b_{i+1} \geqslant 2$ なる i をとる. このとき,$a_j, a_{j+1} \in (a_{i+1}+c, a_{i+2}+c]$ をみたす j がとれ,$i+1 < j$ かつ $b_j < b_{i+1}$ をみたす. あとはこれを繰り返せばいい. □

l に対して,$a_{l+1}+1 = a_{l+2}$ (i.e. $b_{l+1} = 1$) かつ $b_l \geqslant 1$ をみたすとき

$$1 \leqslant b_l = a_{l+1} - a_l = |\{i : a_i \leqslant a_{l+1}+1+c\}| - |\{i : a_i \leqslant a_{l+1}+c\}| \leqslant 1$$

なので繰り返すと,$1 = b_{l+1} = b_l = \cdots = b_n$. よって,

$$a_i = \begin{cases} m & (0 < i \leqslant n) \\ m+i-n & (i > n) \end{cases}$$

が必要なことがわかる.

$$m = a_n = |\{i : a_i \leqslant m+1+c\}| = n+c+1.$$

もし,$n \geqslant 2$ なら,

$$m = a_{n-1} = |\{i : a_i \leqslant m+c\}| = n+c$$

となり矛盾するので,$n = 1$. そして,$m = c+2$. よって,$a_i = i+c+1$ $(i > 0)$ が必要.

コメント

$a_l > a_{l+1}$ なら $a_{l+1} > a_{l+2}$ であったが,$a_l = a_{l+1}$ なら,$|a_{l+1} - a_{l+2}|$ がそんなに大きくないんじゃないかなとなるだけで使うのが難しそうだなと思ったので, 広義に逃げましたが何とかなってよかったです.

問題 1.4. 正の整数 n であって,$\dfrac{\phi(n)^{d(n)}+1}{n}$ が正の整数であり,$\dfrac{n^{\phi(n)}-1}{d(n)^5}$ が整数でないようなものをすべて求めよ. ただし,n と互いに素な 1 以上 n 以下の整数の個数を $\phi(n)$ で表し,n の正の約数の個数を $d(n)$ で表す.

解答

$n=2$ のみであることを示す. これがみたすことは明らかなので,$n=2$ 以外にないことを示す.

Claim 1. n は無平方.

$v_p(n)\geqslant 2$ をみたす素数 p が存在すると仮定して矛盾を導く.$p\mid\phi(n)$ に注意すると,

$$n\mid\phi(n)^{d(n)}+1\Longrightarrow p\mid\phi(n)^{d(n)}+1\Longrightarrow p\mid 1$$

であるから矛盾する.

$n=p_1\cdot\dots\cdot p_m$ $(m\in\mathbb{Z}_{>0},p_i:$ 素数$,p_1<\dots<p_m)$ とおくことができる.$p_1=2$ なら $m=1$ なので $n=2$ が必要. 以下の $p_1>2$ のときを考える.$\phi(n)=(p_1-1)\cdots(p_m-1),d(n)=2^m$ に注意する.

$$n\mid\phi(n)^{d(n)}+1\Longleftrightarrow\phi(n)^{2^m}\equiv-1\pmod{p_i}\Longrightarrow\phi(n)^{2^{m+1}}\equiv 1\pmod{p_i}\ (1\leqslant i\leqslant m)$$

よって,mod p_i における $\phi(n)$ の位数 2^{m+1} である. 特に,$v_2(p_i-1)\geqslant m+1$ (1). また,

$$d(n)^5\nmid n^{\phi(n)}-1\Longleftrightarrow v_2\left(n^{\phi(n)}-1\right)<5m$$

であり,LTE の補題より,$v_2\left(n^{\phi(n)}-1\right)=v_2\left(n^2-1\right)-1+\sum_{i=1}^m v_2(p_i-1)$ が成り立つので,

$$d(n)^5\nmid n^{\phi(n)}-1\Longleftrightarrow v_2\left(n^2-1\right)-1+\sum_{i=1}^m v_2(p_i-1)<5m. \tag{2}$$

(1), (2) より,

$$5m>v_2\left(n^2-1\right)-1+\sum_{i=1}^m v_2(p_i-1)=v_2\left(n-1\right)+\sum_{i=1}^m v_2(p_i-1)\geqslant(m+1)^2$$

なので,$5m\geqslant(m+1)^2+1$ が必要で,$m=1,2$ が分かる. しかし,$p_1\mid(p_1-1)^2+1\Longrightarrow p_1\mid 2$ なので不適.$m=2$ のとき,$v_2(p_1p_2-1)=v_2(p_1-1)=v_2(p_2-1)=3$ であるが,$p_1\equiv p_2\equiv 9\pmod{16}$ に注意すると,$p_1p_2-1\equiv 81-1\equiv 0\pmod{16}$ なので不適.

コメント

今回の問題のなかで一番頭を使わない問題だなと思いました. 本質は LTE と位数の議論だったわけですが,LTE はもう知名度が高く有名事実ですし, 位数の議論も整数論の対策を練っていたら簡単なことだと思いました (中国剰余定理から各 p_i の mod をみればいいことが分かるし, 位数を見るという発想が簡単だったというのもある). 面白い数値設定ではあるものの, 完全な知識ゲーで少し悲しいです.

問題 1.5. $S=\{1,2,\ldots,3000\}$ とおく. このとき, 次の条件をみたす整数 X としてありうる最大の値を求めよ.

> 任意の S 上で定義され S に値をとる全単射な f に対して,S 上で定義され S に値をとる全単射な関数 g をうまくとることで,
>
> $$\sum_{k=1}^{3000}\Big(\max\{f(f(k)),f(g(k)),g(f(k)),g(g(k))\}-\min\{f(f(k)),f(g(k)),g(f(k)),g(g(k))\}\Big)$$
>
> を X 以上にできる.

ただし,S 上で定義され S に値をとる関数 f が全単射であるとは, 任意の S の要素 y について,$f(x)=y$ をみたす S の要素 x がちょうど 1 つ存在することを表す. また, 正の整数 x_1,x_2,x_3,x_4 に対し, それらの最大値, 最小値をそれぞれ $\max\{x_1,x_2,x_3,x_4\},\min\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ で表す.