Brazil MO 2019 Day1 P3

ずんだ

2023 年 3 月 30 日

問題 1 (Brazil MO 2019 Day1 P3)**.** Let $\mathbb{R}_{>0}$ be the set of the positive real numbers. Find all functions $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ such that

$$f(xy + f(x)) = f(f(x)f(y)) + x$$

for all positive real numbers x and y.

出典はこちら.

解答. $f(x) = x$ だけであることを示す. これが解なのは明らかなので他にないことを示す. 与式を $P(x, y)$ で表す.

Claim. $f(x) \geqslant x$.

Proof. $f(x) < x$ なる x が存在したとき,$P\left(x, \frac{x-f(x)}{x}\right)$ より,$f(x) - x = f(something) > 0$ となり矛盾する. □

Claim. $x < 1$ のとき,$f(x) < 1$.

Proof. $x < 1$ に対して,$P\left(x, y = \frac{f(x)}{1-x}\right)$ を考える ($xy + f(x) = y$ に注意する):

$$f(y) = f(xy + f(x)) = f(f(x)f(y)) + x \geqslant f(x)f(y) + x.$$

これは,$f(x) < 1$ を意味している. □

Claim. 0 に収束する数列 $\{a_i\}_{i\in\mathbb{Z}_{>0}}$ が存在して以下をみたす:

$$\lim_{i\to\infty} f(a_i) \to 0.$$

Proof. $x < 1$ とする.$P\left(x, \frac{1-f(x)}{2x}\right)$ より,

$$0 < f\left(f(x)\, f\left(\frac{1-f(x)}{2x}\right)\right) = f\left(\frac{1+f(x)}{2}\right) - x < 1 - x$$

よって, はさみうちの原理より, $\lim_{x \to 1-0} f\left(f(x) f\left(\frac{1-f(x)}{2x}\right)\right) = 0$. また,

$$0 < f\left(\frac{1-f(x)}{2x}\right) \leqslant \frac{f\left(f(x) f\left(\frac{1-f(x)}{2x}\right)\right)}{f(x)}$$

より, $\lim_{x \to 1-0} f(x) = 1$ に注意すると, $\lim_{x \to 1-0} f\left(\frac{1-f(x)}{2x}\right) = 0$. 同様に, $\lim_{x \to 1-0} \frac{1-f(x)}{2x} = 0$. したがって, $a_i = \frac{1-f(1-\frac{1}{i+1})}{2(1-\frac{1}{i+1})}$ などが条件をみたす. □

> **Claim.** $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

Proof. 0 に収束し, $\lim_{x \to \infty} f(a_i) = 0$ をみたすような数列 $\{a_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{>0}}$ を一つ選ぶ. $P(x, a_i)$ より,

$$f(xa_i + f(x)) = f(f(x)f(a_i)) + x \Longrightarrow xa_i - f(f(x)f(a_i)) \leqslant x - f(x).$$

ここで, 十分な大きな i をとることで $-1 < xa_i - 1 < xa_i - f(f(x)f(a_i))$ とすることができる. あとは,

$$1 \leqslant \frac{f(x)}{x} < 1 + \frac{1}{x}$$

で $x \to \infty$ とすればはさみうちの原理より, 主張を得る. □

> **Claim.** $f(x) = x$.

Proof.

$$\frac{f(xy + f(x))}{xy + f(x)} \cdot \left(y + \frac{f(x)}{x}\right) = \frac{f(f(x)f(y))}{f(x)f(y)} \cdot \frac{f(x)}{x} \cdot f(y) + 1$$

ここで, $x \to \infty$ とすれば, $f(y) = y$. □

コメント. たぶん, 上手くやれば $\lim_{x \to +0} f(x) = 0$ が示せると思いますが, もっと弱いやつで十分だなと確認できたので, 深掘りしませんでした. あとは, 単純に極限の操作が自信がなかったので (証明はできたけど自信がまったくない) はさみうちの原理とか割と簡単なことだけしか使えませんでした.