第21回JMO夏季セミナー自由発表

竹内珠佑

大阪公立大学工業高等専門学校電子情報コース2年

イントロ

私の研究したことは,特別な多変数多項式の積について

イントロ

私の研究したことは,特別な多変数多項式の積について

有名な事実1.

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

イントロ

私の研究したことは,特別な多変数多項式の積について

有名な事実1.

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

有名な事実2.(ヘロンの公式などで見かける)

$$(x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)(x-y-z)$$
$$=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$$

イントロ

私の研究したことは,特別な多変数多項式の積について

有名な事実1.

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

有名な事実2.(ヘロンの公式などで見かける)

$$(x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)(x-y-z)$$
$$=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$$

パターンが見えてきました.

イントロ

mを正整数とする.$x_0, \dots, x_m$を不定元とする多変数多項式:

$$f_{2,m}(x) = \prod_{b_1,b_2,\dots,b_m=1}^{2} \left(x_0 + (-1)^{b_1} x_1 + \cdots + (-1)^{b_m} x_m\right)$$

を考える($x = (x_0, \dots, x_m)$とした.)

イントロ

mを正整数とする.$x_0, \dots, x_m$を不定元とする多変数多項式:

$$f_{2,m}(x) = \prod_{b_1,b_2,\dots,b_m=1}^{2} \left(x_0 + (-1)^{b_1}x_1 + \cdots + (-1)^{b_m}x_m\right)$$

を考える($x = (x_0, \dots, x_m)$とした.) 先ほどの事実を見ると「$f_{2,m}$をx_iを唯一の不定元とする一変数多項式として見ると, $f_{2,m}$の奇数次の項の係数は0である.」と予想できる.

イントロ

mを正整数とする.$x_0, \dots, x_m$を不定元とする多変数多項式:

$$f_{2,m}(x) = \prod_{b_1,b_2,\dots,b_m=1}^{2} \left(x_0 + (-1)^{b_1}x_1 + \cdots + (-1)^{b_m}x_m\right)$$

を考える($x = (x_0, \dots, x_m)$とした.) 先ほどの事実を見ると「$f_{2,m}$をx_iを唯一の不定元とする一変数多項式として見ると, $f_{2,m}$の奇数次の項の係数は0である.」と予想できる.

これは,知っているかもしれません.ほぼ同じ主張が問題として出題されたことがあります.

イントロ

次の式で表される(符号の組み合わせをすべてを考えた)ものをすべてをかけ合わせる.

$$\sqrt{1} \pm \sqrt{2} \pm \cdots \pm \sqrt{100}$$

この時,得られた数は整数であることを証明せよ.

1997TOT秋SA P3(改)

イントロ

次の式で表される(符号の組み合わせをすべてを考えた)ものをすべてをかけ合わせる.

$$\sqrt{1} \pm \sqrt{2} \pm \cdots \pm \sqrt{100}$$

この時,得られた数は整数であることを証明せよ.

1997TOT秋SA P3(改)

解法.

$$(x_0, \ldots, x_m) \mapsto (x_0, \ldots, -x_i, \ldots, x_m)$$

としても,$f_{2,m}$は不変だから,予想は正しいし,この問題も解けた.

イントロ

イントロはまだ続きます.

イントロ

イントロはまだ続きます.

有名な事実3.

$$x^n - 1 = (x - \zeta^0)(x - \zeta^1)\cdots(x - \zeta^{n-1})$$

$$\text{where } \zeta = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}/n\right)$$

イントロ

イントロはまだ続きます.

有名な事実3.

$$x^n - 1 = (x - \zeta^0)(x - \zeta^1)\cdots(x - \zeta^{n-1})$$

$$\text{where } \zeta = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}/n\right)$$

直ちに導かれる事実4.

$$x_0^n - (-1)^n x_1^n = (x_0 + \zeta^0 x_1)(x_0 + \zeta^1 x_1)\cdots(x_0 + \zeta^{n-1} x_1)$$

イントロ

イントロはまだ続きます.

有名な事実3.

$$x^n - 1 = (x - \zeta^0)(x - \zeta^1)\cdots(x - \zeta^{n-1})$$

$$\text{where } \zeta = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}/n\right)$$

直ちに導かれる事実4.

$$x_0^n - (-1)^n x_1^n = (x_0 + \zeta^0 x_1)(x_0 + \zeta^1 x_1)\cdots(x_0 + \zeta^{n-1} x_1)$$

パターンが見えてきましたでしょうか.

イントロ

次のような多変数多項式を考える.

$$f_{n,m}(x) = \prod_{b_1,b_2,\ldots,b_m=1}^{n} \left(x_0 + \zeta^{b_1} x_1 + \cdots + \zeta^{b_m} x_m\right)$$

ただし, $x = (x_0, \ldots, x_m)$, mは正整数, nは2以上の整数.

イントロ

次のような多変数多項式を考える.

$$f_{n,m}(x) = \prod_{b_1,b_2,\ldots,b_m=1}^{n} \left(x_0 + \zeta^{b_1} x_1 + \cdots + \zeta^{b_m} x_m\right)$$

ただし, $x = (x_0, \ldots, x_m)$, mは正整数, nは2以上の整数.

イントロ

予想.

$a_0, \dots, a_m$**は正整数とする.このとき,**

$$f_{n,m}(\sqrt[n]{a_0}, \dots, \sqrt[n]{a_m})$$

は整数である.

イントロ

予想.

$a_0, \dots, a_m$**は正整数とする.このとき,**

$$f_{n,m}(\sqrt[n]{a_0}, \dots, \sqrt[n]{a_m})$$

は整数である.

これこそが,私の研究したことです.

イントロ

予想.

$a_0, \dots, a_m$**は正整数とする.このとき,**

$$f_{n,m}(\sqrt[n]{a_0}, \dots, \sqrt[n]{a_m})$$

は整数である.

これこそが,私の研究したことです.

今回はこれを証明します.

方針

$n = 2$の時はすでに証明しましたね.

方針

$n = 2$の時はすでに証明しましたね. $n = 2$のときは

$$(x_0, \dots, x_m) \mapsto (x_0, \dots, -x_i, \dots, x_m)$$

を考えました.

方針

$n = 2$の時はすでに証明しましたね. $n = 2$のときは

$$(x_0, \dots, x_m) \mapsto (x_0, \dots, -x_i, \dots, x_m)$$

を考えました.同様に,

$$(x_0, \dots, x_m) \mapsto (x_0, \dots, \zeta x_i, \dots, x_m)$$

としても,$f_{n,m}$は不変です.

方針

$n = 2$の時はすでに証明しましたね. $n = 2$のときは

$$(x_0, \dots, x_m) \mapsto (x_0, \dots, -x_i, \dots, x_m)$$

を考えました.同様に,

$$(x_0, \dots, x_m) \mapsto (x_0, \dots, \zeta x_i, \dots, x_m)$$

としても,$f_{n,m}$は不変です.だから,「$f_{n,m}$をx_iを唯一の不定元とする一変数多項式として見ると,$f_{n,m}$のnの倍数でない次数の項の係数は0である. 」となります.

方針

$n = 2$の時はすでに証明しましたね. $n = 2$のときは

$$(x_0, \dots, x_m) \mapsto (x_0, \dots, -x_i, \dots, x_m)$$

を考えました.同様に,

$$(x_0, \dots, x_m) \mapsto (x_0, \dots, \zeta x_i, \dots, x_m)$$

としても,$f_{n,m}$は不変です.だから,「$f_{n,m}$をx_iを唯一の不定元とする一変数多項式として見ると,$f_{n,m}$のnの倍数でない次数の項の係数は0である. 」となります.

$n = 2$の時はこれで十分でしたが,一般にはこれでは不十分です.

方針

$n = 2$の時はすでに証明しましたね. $n = 2$のときは

$$(x_0, \dots, x_m) \mapsto (x_0, \dots, -x_i, \dots, x_m)$$

を考えました.同様に,

$$(x_0, \dots, x_m) \mapsto (x_0, \dots, \zeta x_i, \dots, x_m)$$

としても,$f_{n,m}$は不変です.だから,「$f_{n,m}$をx_iを唯一の不定元とする一変数多項式として見ると,$f_{n,m}$のnの倍数でない次数の項の係数は0である. 」となります.

$n = 2$の時はこれで十分でしたが,一般にはこれでは不十分です. $f_{n,m}$が整数係数であることを示せば十分です.これを示すことを目標に進めていきます.

証明

m, nは固定します.

証明

m, nは固定します.

定義1.（円分多項式）

k番目の円分多項式Φ_kを次のように定義する:

$$\Phi_k(x) := \prod_{(d,k)=1,\ 1\leq d\leq k} \left(x - \eta^d\right).$$

ただし, $\eta = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}/k\right)$とした.

証明

m, nは固定します.

定義1.（円分多項式）

k番目の円分多項式Φ_kを次のように定義する:

$$\Phi_k(x) := \prod_{(d,k)=1,\ 1\leq d\leq k} \left(x - \eta^d\right).$$

ただし, $\eta = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}/k\right)$とした.

円分多項式に関して次の有名な事実が知られている.

証明

補題1.

Φ_kは整数係数の多項式である.

証明

補題1.

Φ_kは整数係数の多項式である.

証明はしません.

証明

系2.

A_kを1の原始k乗根すべての集合とする.

証明

系2.

A_kを1の原始k乗根すべての集合とする.この時,$A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$すべての元の基本対象式の値は整数である.

証明

系2.

A_kを1の原始k乗根すべての集合とする.この時,$A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$すべての元の基本対象式の値は整数である.

証明.

$$\prod_j \Phi_{i_j}(x)$$

が整数係数であることから明らか.

証明

補題3.(対称式の基本定理)

$F(x_1, \dots, x_k)$**を整数係数の対称式とする.**

証明

補題3.(対称式の基本定理)

$F(x_1, \dots, x_k)$を整数係数の対称式とする.また,σ_iを$x_1, \dots, x_k$に関するi次の基本対称式とする.

証明

補題3.(対称式の基本定理)

$F(x_1, \dots, x_k)$を整数係数の対称式とする.また,σ_iを$x_1, \dots, x_k$に関するi次の基本対称式とする.このとき,整数係数の多項式Gが(一意に)存在して次をみたす:

$$F(x_1, \dots, x_k) = G(\sigma_1, \dots, \sigma_k).$$

証明

補題3.(対称式の基本定理)

$F(x_1, \dots, x_k)$を整数係数の対称式とする.また,σ_iを$x_1, \dots, x_k$に関するi次の基本対称式とする.このとき,整数係数の多項式Gが(一意に)存在して次をみたす:

$$F(x_1, \dots, x_k) = G(\sigma_1, \dots, \sigma_k).$$

証明はしません.

証明

系4.

pを整数係数の対称式とする.このとき,

$$p(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1})$$

は整数である.

証明

定義2.

$f_{n,m}$**において,**$x_0^{d_0} \cdots x_m^{d_m}$**の係数の**$n^m!/\prod_i d_i!$**個の和のうち,**
$(\zeta^1)^{c_1} \cdots (\zeta^n)^{c_n}$**の個数を**$P_{c,d}$**で表す.**

証明

定義2.

$f_{n,m}$**において,**$x_0^{d_0} \cdots x_m^{d_m}$**の係数の**$n^m!/\prod_i d_i!$**個の和のうち,**
$(\zeta^1)^{c_1} \cdots (\zeta^n)^{c_n}$**の個数を**$P_{c,d}$**で表す.**

注意.

ここの$(\zeta^1)^{c_1} \cdots (\zeta^n)^{c_n}$**は値で区別されず,**$\zeta^i x_j$**が**$c_i$**回選ばれたということを表す.**

証明

定義2.

$f_{n,m}$**において,**$x_0^{d_0} \cdots x_m^{d_m}$**の係数の**$n^m!/\prod_i d_i!$**個の和のうち,**
$(\zeta^1)^{c_1} \cdots (\zeta^n)^{c_n}$**の個数を**$P_{c,d}$**で表す.**

注意.

ここの$(\zeta^1)^{c_1} \cdots (\zeta^n)^{c_n}$**は値で区別されず,**$\zeta^i x_j$**が**$c_i$**回選ばれたということを表す.重複がないため,**

$$\sum_c P_{c,d} = \frac{n^m!}{\prod_i d_i!}$$

が成りたっている.

証明

定義3.（順序）

全単射$\alpha: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$に対して，$\mathbb{Z}$上の二項関係 $<_\alpha$を次のように定める:

$$x <_\alpha y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(y)$$

証明

定義3.(順序)

全単射$\alpha: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$に対して, $\mathbb{Z}$上の二項関係 $<_\alpha$を次のように定める:

$$x <_\alpha y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(y)$$

またこの時,xはyより$<_\alpha$ で小さいなどと表現する.

証明

定義3.(順序)

全単射$\alpha: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$に対して, $\mathbb{Z}$上の二項関係 $<_\alpha$を次のように定める:

$$x <_\alpha y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(y)$$

またこの時,xはyより$<_\alpha$ で小さいなどと表現する.

定義をα^{-1}とすると,

$$\cdots, \alpha(-1) <_\alpha \alpha(0), \alpha(0) <_\alpha \alpha(1), \cdots$$

となっていい感じになることを念頭に置いとく.

証明

定義4.（辞書順）

$\mathbb{Z}^k$ **上の二項関係** $\prec_\alpha$ **を次のように定める:**

$$(x_1, \ldots, x_k) \prec_\alpha (y_1, \ldots, y_k) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists j, \forall i < j, x_i = y_i \text{ and } x_j <_\alpha y_j$$

証明

定義4.（辞書順）

$\mathbb{Z}^k$ **上の二項関係** $\prec_\alpha$ **を次のように定める:**

$$(x_1, \ldots, x_k) \prec_\alpha (y_1, \ldots, y_k) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists j, \forall i < j, x_i = y_i \text{ and } x_j <_\alpha y_j$$

またこの時も同様に,x**は**y**より**$\prec_\alpha$ **で小さいなどと表現する.**

証明

定義5.

$f_{n,m}$**において,**$(i_1, \dots, i_{n^m})_{\prec_\alpha}$**で**$\{n\} \times \{1, \dots, n\}^m$**のうち,**$\prec_\alpha$**で**$j$**番目に小さい組に対応する多項式**$x_0 + \zeta^{b_1} x_1 + \cdots + \zeta^{b_m} x_m$**の**$\zeta^{b_{i_j}} x_{i_j}$**が選ばれた単項式を表すものとする.**

証明

定義6.

$\beta_{k,l}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$**を次のように定義する.**

$$\beta_{k,l}(x) \coloneqq \begin{cases} x & (x \neq k, l) \\ l & (x = k) \\ k & (x = l) \end{cases}$$

証明

補題5.

$$(i_1, \dots, i_{n^m})_{\prec_{\mathrm{id}}} = (\zeta^1)^{c_1} \cdots \ (\zeta^n)^{c_n} \prod_i x_i^{d_i}$$

$$\Leftrightarrow (i_1, \dots, i_{n^m})_{\prec_\alpha} = \left(\zeta^{\alpha(1)}\right)^{c_1} \cdots \ \left(\zeta^{\alpha(n)}\right)^{c_n} \prod_i x_i^{d_i}$$

ただし,$\alpha(n) = n$**をみたすものとする.**

証明

補題5.

$$(i_1, \dots, i_{n^m})_{\prec_{\mathrm{id}}} = (\zeta^1)^{c_1} \cdots \ (\zeta^n)^{c_n} \prod_i x_i^{d_i}$$

$$\Leftrightarrow (i_1, \dots, i_{n^m})_{\prec_\alpha} = \left(\zeta^{\alpha(1)}\right)^{c_1} \cdots \ \left(\zeta^{\alpha(n)}\right)^{c_n} \prod_i x_i^{d_i}$$

ただし,$\alpha(n) = n$をみたすものとする.

証明の前に,式の意味や具体例を見とく.

証明

$n = 3, m = 2$のときを見てみる.

証明

$n = 3, m = 2$のときを見てみる.

$$(0,0,1,1,1,2,2,2,2)_{\prec_{\mathrm{id}}} =$$

$b_0 = 3$	3	3	3	3	3	3	3	3	3
b_1	1	1	1	2	2	2	3	3	3
b_2	1	2	3	1	2	3	1	2	3

証明

$n = 3, m = 2$のときを見てみる.

$$(0,0,1,1,1,2,2,2,2)_{\prec_{\mathrm{id}}} = (\zeta^1)^2(\zeta^2)^3(\zeta^3)^4 x_0^2 x_1^3 x_2^4$$

$b_0 = 3$	3	3	3	3	3	3	3	3	3
b_1	1	1	1	2	2	2	3	3	3
b_2	1	2	3	1	2	3	1	2	3

証明

$n = 3, m = 2$のときを見てみる.

$$(0,0,1,1,1,2,2,2,2)_{\prec_{\mathrm{id}}} = (\zeta^1)^2(\zeta^2)^3(\zeta^3)^4 x_0^2 x_1^3 x_2^4$$

$b_0 = 3$	3	3	3	3	3	3	3	3	3
b_1	1	1	1	2	2	2	3	3	3
b_2	1	2	3	1	2	3	1	2	3

$$(0,0,1,1,1,2,2,2,2)_{\prec_{\beta_{1,2}}} =$$

$b_0 = 3$	3	3	3	3	3	3	3	3	3
b_1	2	2	2	1	1	1	3	3	3
b_2	2	1	3	2	1	3	2	1	3

証明

$n = 3, m = 2$のときを見てみる.

$$(0,0,1,1,1,2,2,2,2)_{\prec_{\mathrm{id}}} = (\zeta^1)^2(\zeta^2)^3(\zeta^3)^4 x_0^2 x_1^3 x_2^4$$

$b_0 = 3$	3	3	3	3	3	3	3	3	3
b_1	1	1	1	2	2	2	3	3	3
b_2	1	2	3	1	2	3	1	2	3

$$(0,0,1,1,1,2,2,2,2)_{\prec_{\beta_{1,2}}} = (\zeta^2)^2(\zeta^1)^3(\zeta^3)^4 x_0^2 x_1^3 x_2^4$$

$b_0 = 3$	3	3	3	3	3	3	3	3	3
b_1	2	2	2	1	1	1	3	3	3
b_2	2	1	3	2	1	3	2	1	3

証明

$n = 3, m = 2$のときを見てみる.

$$(0,0,1,1,1,2,2,2,2)_{\prec_{\mathrm{id}}} = (\zeta^{1})^{2}(\zeta^{2})^{3}(\zeta^{3})^{4}x_0^2x_1^3x_2^4$$

$b_0 = 3$	3	3	3	3	3	3	3	3	3
b_1	1	1	1	2	2	2	3	3	3
b_2	1	2	3	1	2	3	1	2	3

$$(0,0,1,1,1,2,2,2,2)_{\prec_{\beta_{1,2}}} = (\zeta^{2})^{2}(\zeta^{1})^{3}(\zeta^{3})^{4}x_0^2x_1^3x_2^4$$

$b_0 = 3$	3	3	3	3	3	3	3	3	3
b_1	2	2	2	1	1	1	3	3	3
b_2	2	1	3	2	1	3	2	1	3

証明

補題5.の証明を二つのパートに分ける.

証明

補題5.の証明を二つのパートに分ける.

1. dが一緒になること.

証明

補題5.の証明を二つのパートに分ける.

1. dが一緒になること.

2. αがつくこと.

証明

補題5.の証明を二つのパートに分ける.

1. dが一緒になること.

2. αがつくこと.

Part1. これは定義より明らかです.

証明

定義5.

$f_{n,m}$において,$(i_1, \dots, i_{n^m})_{<_\alpha}$で$\{n\} \times \{1, \dots, n\}^m$のうち,$<_\alpha$で$j$番目に小さい組に対応する多項式$x_0 + \zeta^{b_1} x_1 + \cdots + \zeta^{b_m} x_m$の$\zeta^{b_{i_j}} x_{i_j}$が選ばれた単項式を表すものとする.

$\Rightarrow i_1, \dots, i_{n^m}$のうちに$k$が$l$個あれば,$x_k^l$となるから,$i_1, \dots, i_{n^m}$が不変ならば,$d$も不変.

証明

Part2. $(\Rightarrow)$ $\{n\} \times \{1, \dots, n\}^m$**の**$\prec_{\mathrm{id}}$ **で**j**番目に小さい組が** $\left(n, y_{1,j}, \dots, y_{m,j}\right)$**のように書けたとする.**

証明

Part2. $(\Rightarrow)$ $\{n\}\times\{1,\dots,n\}^m$の$\prec_{\mathrm{id}}$で$j$番目に小さい組が$\left(n, y_{1,j}, \dots, y_{m,j}\right)$のように書けたとする.このとき$\prec_\alpha$で$j$番目に小さい組は

$$\left(n, \alpha\left(y_{1,j}\right), \dots, \alpha\left(y_{n,j}\right)\right)$$

のように書ける.

証明

定義3.(順序)

全単射$\alpha: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$に対して, $\mathbb{Z}$上の二項関係 $<_\alpha$を次のように定める:

$$x <_\alpha y \overset{\text{def}}{\iff} \alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(y)$$

またこの時,xはyより$<_\alpha$ で小さいなどと表現する.

定義をα^{-1}とすると,

$$\cdots, \alpha(-1) <_\alpha \alpha(0), \alpha(0) <_\alpha \alpha(1), \cdots$$

となっていい感じになることを念頭に置いとく.

証明

Part2. $(\Rightarrow)$ $\{n\}\times\{1,\dots,n\}^m$の$\prec_{\mathrm{id}}$で$j$番目に小さい組が$\left(n, y_{1,j}, \dots, y_{m,j}\right)$のように書けたとする.このとき$\prec_\alpha$で$j$番目に小さい組は

$$\left(n, \alpha\left(y_{1,j}\right), \dots, \alpha\left(y_{n,j}\right)\right)$$

のように書ける.

つまりは,idのときに$\zeta^{y_{i_j,j}}x_{i_j}$が選ばれたら,αのときは$\zeta^{\alpha\left(y_{i_j,j}\right)}x_{i_j}$が選ばれる(ただし$y_{0,j}=n$.)

証明

Part2. $(\Rightarrow)$ $\{n\}\times\{1,\dots,n\}^m$の$\prec_{\mathrm{id}}$で$j$番目に小さい組が$\left(n, y_{1,j}, \dots, y_{m,j}\right)$のように書けたとする.このとき$\prec_\alpha$で$j$番目に小さい組は

$$\left(n, \alpha\left(y_{1,j}\right), \dots, \alpha\left(y_{n,j}\right)\right)$$

のように書ける.

つまりは,idのときに$\zeta^{y_{i_j,j}}x_{i_j}$が選ばれたら,αのときは$\zeta^{\alpha\left(y_{i_j,j}\right)}x_{i_j}$が選ばれる(ただし$y_{0,j}=n$.)

$(\Leftarrow)$ idをαに,αをα^{-1}に置き換えればいい.

証明

系6.

$$P_{(\ldots,c_k,\ldots,c_l,\ldots),d} = P_{(\ldots,c_l,\ldots,c_k,\ldots),d} \quad \text{where } k, l < n$$

証明

系6.

$$P_{(\dots,c_k,\dots,c_l,\dots),d} = P_{(\dots,c_l,\dots,c_k,\dots),d} \quad \text{where } k,l < n$$

証明. 補題5.において$\alpha = \beta_{k,l}$を考えればいい:

$$(i_1,\dots,i_{n^m})_{\prec_{\mathrm{id}}} = \cdots \left(\zeta^k\right)^{c_k} \cdots \left(\zeta^l\right)^{c_l} \cdots \prod_i x_i^{d_i}$$

$$\Leftrightarrow (i_1,\dots,i_{n^m})_{\prec_{\beta_{k,l}}} = \cdots \left(\zeta^l\right)^{c_k} \cdots \left(\zeta^k\right)^{c_l} \cdots \prod_i x_i^{d_i}$$

証明

系6.より$f_{n,m}$の各項の係数は$\zeta, \ldots, \zeta^{n-1}$の対称式,つまりは$f_{n,m}$は整数係数の多項式である.先の事実と合わせると,

方針

$n = 2$の時はすでに証明しましたね. $n = 2$のときは

$$(x_0, \dots, x_m) \mapsto (x_0, \dots, -x_i, \dots, x_m)$$

を考えました.同様に,

$$(x_0, \dots, x_m) \mapsto (x_0, \dots, \zeta x_i, \dots, x_m)$$

としても,$f_{n,m}$は不変です.だから,「$f_{n,m}$をx_iを唯一の不定元とする一変数多項式として見ると,$f_{n,m}$のnの倍数でない次数の項の係数は0である. 」となります.

$n = 2$の時はこれで十分でしたが,一般にはこれでは不十分です.$f_{n,m}$が整数係数であることを示せば十分です.これを示すことを目標に進めていきます.

証明

系6.より$f_{n,m}$の各項の係数は$\zeta, \dots, \zeta^{n-1}$の対称式,つまりは$f_{n,m}$は整数係数の多項式である.先の事実と合わせると,

$$f_{n,m}(\sqrt[n]{a_0}, \dots, \sqrt[n]{a_m})$$

は整数である.(証明終了)

おまけ

同様の証明で,

$$g_{n,m}(x) = \prod_{\substack{0<b_1,\dots,b_m\leq n \\ (b_i,\,n)=1}} \left(x_0 + \zeta^{b_1}x_1 + \cdots + \zeta^{b_m}x_m\right)$$

は整数係数であることがわかります.