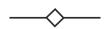
第21回JMO夏季 セミナー自由発表

 \rightarrow

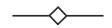
竹内珠佑

大阪公立大学工業高等専門 学校知能情報コース2年



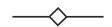


私の研究したことは、特別な多変数多項式の積について



私の研究したことは、特別な多変数多項式の積について有名な事実1.

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$



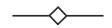
私の研究したことは、特別な多変数多項式の積について 有名な事実1.

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

有名な事実2.(ヘロンの公式などで見かける)

$$(x + y + z)(x - y + z)(x + y - z)(x - y - z)$$

= $x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2$



私の研究したことは、特別な多変数多項式の積について 有名な事実1.

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

有名な事実2.(ヘロンの公式などで見かける)

$$(x + y + z)(x - y + z)(x + y - z)(x - y - z)$$

= $x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2$

パターンが見えてきました.

 \longrightarrow

mを正整数とする. x_0 , ..., x_m を不定元とする多変数多項式:

$$f_{2,m}(x) = \prod_{b_1,b_2,\dots,b_m=1}^{2} \left(x_0 + (-1)^{b_1} x_1 + \dots + (-1)^{b_m} x_m \right)$$

を考える $(x = (x_0, ..., x_m)$ とした.)

 \longrightarrow

mを正整数とする. $x_0, ..., x_m$ を不定元とする多変数多項式:

$$f_{2,m}(x) = \prod_{b_1,b_2,\dots,b_m=1}^{2} \left(x_0 + (-1)^{b_1} x_1 + \dots + (-1)^{b_m} x_m \right)$$

を考える $(x = (x_0, ..., x_m)$ とした.) 先ほどの事実を見ると $f_{2,m}$ を x_i を唯一の不定元とする一変数多項式として見ると, $f_{2,m}$ の奇数次の項の係数は0である.」と予想できる.

─

mを正整数とする. $x_0, ..., x_m$ を不定元とする多変数多項式:

$$f_{2,m}(x) = \prod_{b_1,b_2,\dots,b_m=1}^{2} \left(x_0 + (-1)^{b_1} x_1 + \dots + (-1)^{b_m} x_m \right)$$

を考える $(x = (x_0, ..., x_m)$ とした.) 先ほどの事実を見ると $f_{2,m}$ を x_i を唯一の不定元とする一変数多項式として見ると, $f_{2,m}$ の奇数次の項の係数は0である.」と予想できる.

これは、知っているかもしれません、ほぼ同じ主張が問題として出題されたことがあります.

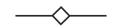
 \longrightarrow

次の式で表される(符号の組み合わせをすべてを考えた)ものをすべてをかけ合わせる.

$$\sqrt{1} \pm \sqrt{2} \pm \cdots \pm \sqrt{100}$$

この時,得られた数は整数であることを証明せよ.

1997TOT秋SA P3(改)



次の式で表される(符号の組み合わせをすべてを考えた)ものをすべてをかけ合わせる.

$$\sqrt{1} \pm \sqrt{2} \pm \cdots \pm \sqrt{100}$$

この時、得られた数は整数であることを証明せよ、

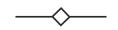
1997TOT秋SA P3(改)

解法.

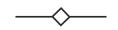
$$(x_0, ..., x_m) \mapsto (x_0, ..., -x_i, ..., x_m)$$

としても、 $f_{2,m}$ は不変だから、予想は正しいし、この問題も解けた.

イントロ ->-



イントロはまだ続きます。

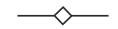


イントロはまだ続きます.

有名な事実3.

$$x^{n} - 1 = (x - \zeta^{0})(x - \zeta^{1}) \cdots (x - \zeta^{n-1})$$

where $\zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/n)$



イントロはまだ続きます.

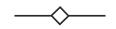
有名な事実3.

$$x^{n} - 1 = (x - \zeta^{0})(x - \zeta^{1}) \cdots (x - \zeta^{n-1})$$

where $\zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/n)$

直ちに導かれる事実4.

$$x_0^n - (-1)^n x_1^n = (x_0 + \zeta^0 x_1)(x_0 + \zeta^1 x_1) \cdots (x_0 + \zeta^{n-1} x_1)$$



イントロはまだ続きます.

有名な事実3.

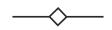
$$x^{n} - 1 = (x - \zeta^{0})(x - \zeta^{1}) \cdots (x - \zeta^{n-1})$$

where $\zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/n)$

直ちに導かれる事実4.

$$x_0^n - (-1)^n x_1^n = (x_0 + \zeta^0 x_1)(x_0 + \zeta^1 x_1) \cdots (x_0 + \zeta^{n-1} x_1)$$

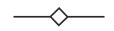
パターンが見えてきましたでしょうか.



次のような多変数多項式を考える.

$$f_{n,m}(x) = \prod_{b_1,b_2,\dots,b_m=1}^{n} \left(x_0 + \zeta^{b_1} x_1 + \dots + \zeta^{b_m} x_m \right)$$

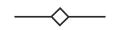
ただし, $x = (x_0, ..., x_m)$, mは正整数, nは2以上の整数.



次のような多変数多項式を考える.

$$f_{n,m}(x) = \prod_{b_1,b_2,\dots,b_m=1}^{n} \left(x_0 + \zeta^{b_1} x_1 + \dots + \zeta^{b_m} x_m \right)$$

ただし, $x = (x_0, ..., x_m)$, mは正整数, nは2以上の整数.

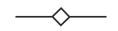


予想.

 a_0, \ldots, a_m は正整数とする.このとき、

$$f_{n,m}(\sqrt[n]{a_0},...,\sqrt[n]{a_m})$$

は整数である.



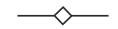
予想.

 a_0, \ldots, a_m は正整数とする.このとき、

$$f_{n,m}(\sqrt[n]{a_0},...,\sqrt[n]{a_m})$$

は整数である.

これこそが,私の研究したことです.



予想.

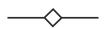
 a_0, \ldots, a_m は正整数とする.このとき、

$$f_{n,m}(\sqrt[n]{a_0},\ldots,\sqrt[n]{a_m})$$

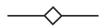
は整数である.

これこそが,私の研究したことです.

今回はこれを証明します.



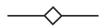
n=2の時はすでに証明しましたね.



n=2の時はすでに証明しましたね. n=2のときは

$$(x_0, ..., x_m) \mapsto (x_0, ..., -x_i, ..., x_m)$$

を考えました.



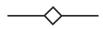
n=2の時はすでに証明しましたね. n=2のときは

$$(x_0, ..., x_m) \mapsto (x_0, ..., -x_i, ..., x_m)$$

を考えました.同様に、

$$(x_0, \dots, x_m) \mapsto (x_0, \dots, \zeta x_i, \dots, x_m)$$

としても、 $f_{n,m}$ は不変です.



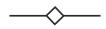
n=2の時はすでに証明しましたね. n=2のときは

$$(x_0, ..., x_m) \mapsto (x_0, ..., -x_i, ..., x_m)$$

を考えました.同様に,

$$(x_0, \dots, x_m) \mapsto (x_0, \dots, \zeta x_i, \dots, x_m)$$

としても、 $f_{n,m}$ は不変です。だから、「 $f_{n,m}$ を x_i を唯一の不定元とする一変数多項式として見ると、 $f_{n,m}$ のnの倍数でない次数の項の係数は0である。」となります。



n=2の時はすでに証明しましたね. n=2のときは

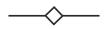
$$(x_0, ..., x_m) \mapsto (x_0, ..., -x_i, ..., x_m)$$

を考えました.同様に,

$$(x_0, \dots, x_m) \mapsto (x_0, \dots, \zeta x_i, \dots, x_m)$$

としても、 $f_{n,m}$ は不変です。だから、「 $f_{n,m}$ を x_i を唯一の不定元とする一変数多項式として見ると、 $f_{n,m}$ のnの倍数でない次数の項の係数は0である。」となります。

n=2の時はこれで十分でしたが、一般にはこれでは不十分です.



n=2の時はすでに証明しましたね. n=2のときは

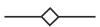
$$(x_0, ..., x_m) \mapsto (x_0, ..., -x_i, ..., x_m)$$

を考えました.同様に,

$$(x_0, \dots, x_m) \mapsto (x_0, \dots, \zeta x_i, \dots, x_m)$$

としても、 $f_{n,m}$ は不変です。だから、「 $f_{n,m}$ を x_i を唯一の不定元とする一変数多項式として見ると、 $f_{n,m}$ のnの倍数でない次数の項の係数は0である。」となります。

n=2の時はこれで十分でしたが,一般にはこれでは不十分です. $f_{n,m}$ が整数係数であることを示せば十分です.これを示すことを 目標に進めていきます.



m,nは固定します。

 \longrightarrow

m,nは固定します.

定義1.(円分多項式)

k番目の円分多項式 Φ_k を次のように定義する:

$$\Phi_k(x) := \prod_{\substack{(d,k)=1,\ 1 \le d \le k}} \left(x - \eta^d\right).$$

ただし、 $\eta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/k)$ とした.

─

*m, n*は固定します.

定義1.(円分多項式)

k番目の円分多項式 Φ_k を次のように定義する:

$$\Phi_k(x) \coloneqq \prod_{(d, k) = 1, 1 \le d \le k} (x - \eta^d).$$

ただし、 $\eta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/k)$ とした.

円分多項式に関して次の有名な事実が知られている.

 \rightarrow

補題1.

 Φ_k は整数係数の多項式である。



補題1.

 Φ_k は整数係数の多項式である。

証明はしません.

─

系2.

 A_k を1の原始k乗根すべての集合とする.

系2.

 A_k を1の原始k乗根すべての集合とする。この時, A_{i_1} , ..., A_{i_k} すべての元の基本対象式の値は整数である.

系2.

 A_k を1の原始k乗根すべての集合とする、この時、 A_{i_1}, \dots, A_{i_k} すべての元の基本対象式の値は整数である.

証明.

$$\prod_{j} \Phi_{i_{j}}(x)$$

が整数係数であることから明らか.

─

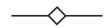
補題3.(対称式の基本定理)

 $F(x_1, ..., x_k)$ を整数係数の対称式とする.

─

補題3.(対称式の基本定理)

 $F(x_1, ..., x_k)$ を整数係数の対称式とする。また, σ_i を $x_1, ..., x_k$ に関するi次の基本対称式とする.



補題3.(対称式の基本定理)

 $F(x_1, ..., x_k)$ を整数係数の対称式とする。また, σ_i を $x_1, ..., x_k$ に関するi次の基本対称式とする。このとき,整数係数の多項式 Gが(一意に)存在して次をみたす:

$$F(x_1, \dots, x_k) = G(\sigma_1, \dots, \sigma_k).$$

 \longrightarrow

補題3.(対称式の基本定理)

 $F(x_1, ..., x_k)$ を整数係数の対称式とする。また, σ_i を $x_1, ..., x_k$ に関するi次の基本対称式とする。このとき,整数係数の多項式Gが(一意に)存在して次をみたす:

$$F(x_1, \dots, x_k) = G(\sigma_1, \dots, \sigma_k).$$

証明はしません.

系4.

pを整数係数の対称式とする.このとき、

$$p(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1})$$

は整数である.

─

定義2.

 $f_{n,m}$ において、 $x_0^{d_0}\cdots x_m^{d_m}$ の係数の $n^m!/\prod_i d_i!$ 個の和のうち、 $(\zeta^1)^{c_1}\cdots (\zeta^n)^{c_n}$ の個数を $P_{c,d}$ で表す.

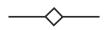
 \longrightarrow

定義2.

 $f_{n,m}$ において、 $x_0^{d_0} \cdots x_m^{d_m}$ の係数の $n^m!/\prod_i d_i!$ 個の和のうち、 $(\zeta^1)^{c_1} \cdots (\zeta^n)^{c_n}$ の個数を $P_{c,d}$ で表す.

注意.

ここの $(\zeta^1)^{c_1}\cdots(\zeta^n)^{c_n}$ は値で区別されず $,\zeta^ix_j$ が c_i 回選ばれたということを表す。



定義2.

 $f_{n,m}$ において、 $x_0^{d_0}\cdots x_m^{d_m}$ の係数の $n^m!/\prod_i d_i!$ 個の和のうち、 $(\zeta^1)^{c_1}\cdots (\zeta^n)^{c_n}$ の個数を $P_{c,d}$ で表す.

注意.

ここの $(\zeta^1)^{c_1}\cdots(\zeta^n)^{c_n}$ は値で区別されず $,\zeta^ix_j$ が c_i 回選ばれたということを表す。重複がないため、

$$\sum_{c} P_{c,d} = \frac{n^m!}{\prod_{i} d_i!}$$

が成りたっている.

定義3.(順序)

全単射 $\alpha: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ に対して、 \mathbb{Z} 上の二項関係 $<_{\alpha}$ を次のように定める:

$$x <_{\alpha} y \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(y)$$

─

定義3.(順序)

全単射 $\alpha: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ に対して、 \mathbb{Z} 上の二項関係 $<_{\alpha}$ を次のように定める:

$$x <_{\alpha} y \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(y)$$

またこの時、xはyより $<_{\alpha}$ で小さいなどと表現する.

定義3.(順序)

全単射 $\alpha: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ に対して、 \mathbb{Z} 上の二項関係 $<_{\alpha}$ を次のように定める:

$$x <_{\alpha} y \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(y)$$

またこの時、xはyより $<_{\alpha}$ で小さいなどと表現する.

定義を α^{-1} とすると、

$$\cdots$$
, $\alpha(-1) <_{\alpha} \alpha(0)$, $\alpha(0) <_{\alpha} \alpha(1)$, \cdots

となっていい感じになることを念頭に置いとく、

─

定義4.(辞書順)

 \mathbb{Z}^k 上の二項関係 $<_{\alpha}$ を次のように定める:

$$(x_1, \dots, x_k) \prec_{\alpha} (y_1, \dots, y_k) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists j, \forall i < j, x_i = y_i \text{ and } x_j <_{\alpha} y_j$$

 \longrightarrow

定義4.(辞書順)

 \mathbb{Z}^k 上の二項関係 $<_{\alpha}$ を次のように定める:

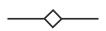
定義5.

 $f_{n,m}$ において、 $(i_1, ..., i_{n^m})_{\prec_{\alpha}}$ で $\{n\} \times \{1, ..., n\}^m$ のうち、 \prec_{α} でj番目に小さい組に対応する多項式 $x_0 + \zeta^{b_1}x_1 + \cdots + \zeta^{b_m}x_m$ の $\zeta^{b_{i_j}}x_{i_j}$ が選ばれた単項式を表すものとする.

定義6.

 $\beta_{k,l} \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を次のように定義する.

$$\beta_{k,l}(x) \coloneqq \begin{cases} x & (x \neq k, l) \\ l & (x = k) \\ k & (x = l) \end{cases}$$

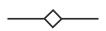


補題5.

$$(i_1, \dots, i_{n^m})_{\prec_{\mathrm{id}}} = (\zeta^1)^{c_1} \cdots (\zeta^n)^{c_n} \prod_i x_i^{d_i}$$

$$\Leftrightarrow (i_1, \dots, i_{n^m})_{\prec_{\alpha}} = (\zeta^{\alpha(1)})^{c_1} \cdots (\zeta^{\alpha(n)})^{c_n} \prod_i x_i^{d_i}$$

 $ただし,\alpha(n) = n$ をみたすものとする.



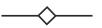
補題5.

$$(i_1, \dots, i_{n^m})_{\leq_{id}} = (\zeta^1)^{c_1} \cdots (\zeta^n)^{c_n} \prod_i x_i^{d_i}$$

$$\Leftrightarrow (i_1, \dots, i_{n^m})_{\prec_{\alpha}} = \left(\zeta^{\alpha(1)}\right)^{c_1} \cdots \left(\zeta^{\alpha(n)}\right)^{c_n} \prod_i x_i^{d_i}$$

ただ \mathbf{L} , $\alpha(n) = n$ をみたすものとする.

証明の前に,式の意味や具体例を見とく.



n=3, m=2**のときを見てみる**.

─

─

$$n = 3, m = 2$$
のときを見てみる.

 \longrightarrow

 \longrightarrow

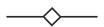
 \longrightarrow

補題5.の証明を二つのパートに分ける.

─

補題5.の証明を二つのパートに分ける.

1. d**が一緒になること**.



補題5.の証明を二つのパートに分ける.

- 1. d**が一緒になること**.
- **2**. αがつくこと.

─

補題5.の証明を二つのパートに分ける.

- **1**. *d***が一緒になること**.
- **2**. α が つくこと.

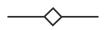
Part 1. これは定義より明らかです.

 \longrightarrow

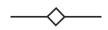
定義5.

 $f_{n,m}$ において、 $(i_1, ..., i_{n^m})_{\prec_{\alpha}}$ で $\{n\} \times \{1, ..., n\}^m$ のうち、 \prec_{α} でj番目に小さい組に対応する多項式 $x_0 + \zeta^{b_1}x_1 + \cdots + \zeta^{b_m}x_m$ の $\zeta^{b_i}_j x_{i_i}$ が選ばれた単項式を表すものとする.

 $\Rightarrow i_1, ..., i_{n^m}$ のうちにkがl個あれば, x_k^l となるから, $i_1, ..., i_{n^m}$ が不変ならば,dも不変.



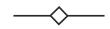
Part2. (⇒) $\{n\} \times \{1, ..., n\}^m$ の \prec_{id} でj番目に小さい組が $(n, y_{1,j}, ..., y_{m,j})$ のように書けたとする.



Part2. (\Rightarrow) $\{n\} \times \{1, ..., n\}^m$ の \prec_{id} でj番目に小さい組が $(n, y_{1,j}, ..., y_{m,j})$ のように書けたとする.このとき \prec_{α} でj番目に小さい組は

$$(n, \alpha(y_{1,j}), \ldots, \alpha(y_{n,j}))$$

のように書ける.



定義3.(順序)

全単射 $\alpha: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ に対して、 \mathbb{Z} 上の二項関係 $<_{\alpha}$ を次のように定める:

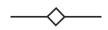
$$x <_{\alpha} y \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(y)$$

またこの時、xはyより $<_{\alpha}$ で小さいなどと表現する.

定義をα-1とすると、

$$\cdots$$
, $\alpha(-1) <_{\alpha} \alpha(0)$, $\alpha(0) <_{\alpha} \alpha(1)$, \cdots

となっていい感じになることを念頭に置いとく、

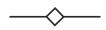


Part2. (\Rightarrow) $\{n\} \times \{1, ..., n\}^m$ の \prec_{id} でj番目に小さい組が $(n, y_{1,j}, ..., y_{m,j})$ のように書けたとする.このとき \prec_{α} でj番目に小さい組は

$$(n, \alpha(y_{1,j}), \ldots, \alpha(y_{n,j}))$$

のように書ける.

つまりは,idのときに $\zeta^{y_{i_j,j}}x_{i_j}$ が選ばれたら, α のときは $\zeta^{\alpha(y_{i_j,j})}x_{i_j}$ が選ばれる (ただし $y_{0,j}=n$.)



Part2. (\Rightarrow) $\{n\} \times \{1, ..., n\}^m$ の \prec_{id} でj番目に小さい組が $(n, y_{1,j}, ..., y_{m,j})$ のように書けたとする.このとき \prec_{α} でj番目に小さい組は

$$(n, \alpha(y_{1,j}), \ldots, \alpha(y_{n,j}))$$

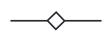
のように書ける.

つまりは,idのときに $\zeta^{y_{i_j,j}}x_{i_j}$ が選ばれたら, α のときは $\zeta^{\alpha(y_{i_j,j})}x_{i_j}$ が選ばれる (ただし $y_{0,j}=n$.)

(⇐) 逆も同じ

系6.

 $P_{(\dots,c_k,\dots,c_l,\dots),d} = P_{(\dots,c_l,\dots,c_k,\dots),d} \text{ where } k,l < n$



系6.

$$P_{(...,c_k,...,c_l,...),d} = P_{(...,c_l,...,c_k,...),d}$$
 where $k, l < n$

証明. 補題5.におい $\mathbf{C}\alpha = \beta_{k,l}$ を考えればいい:

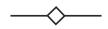
$$(i_1, \dots, i_{n^m})_{\prec_{\mathrm{id}}} = \cdots (\zeta^k)^{c_k} \cdots (\zeta^l)^{c_l} \cdots \prod_i x_i^{d_i}$$

$$\Leftrightarrow (i_1, \dots, i_{n^m})_{\prec_{\beta_{k,l}}} = \cdots (\zeta^l)^{c_k} \cdots (\zeta^k)^{c_l} \cdots \prod_i x_i^{d_i}$$

─

系6.より $f_{n,m}$ の各項の係数は $\zeta, \dots, \zeta^{n-1}$ の対称式、つまりは $f_{n,m}$ は整数係数の多項式である.先の事実と合わせると、

方針



n=2の時はすでに証明しましたね. n=2のときは

$$(x_0, ..., x_m) \mapsto (x_0, ..., -x_i, ..., x_m)$$

を考えました.同様に、

$$(x_0, \dots, x_m) \mapsto (x_0, \dots, \zeta x_i, \dots, x_m)$$

としても、 $f_{n,m}$ は不変です。だから、「 $f_{n,m}$ を x_i を唯一の不定元とする一変数多項式として見ると、 $f_{n,m}$ のnの倍数でない次数の項の係数は0である。」となります。

n=2の時はこれで十分でしたが、一般にはこれでは不十分です。 $f_{n,m}$ が整数係数であることを示せば十分です。これを示すことを 目標に進めていきます。

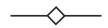
 \longrightarrow

系6.より $f_{n,m}$ の各項の係数は $\zeta, \dots, \zeta^{n-1}$ の対称式,つまりは $f_{n,m}$ は整数係数の多項式である.先の事実と合わせると,

$$f_{n,m}(\sqrt[n]{a_0}, \dots, \sqrt[n]{a_m})$$

は整数である.(証明終了)

おまけ



同様の証明で,

$$g_{n,m}(x) = \prod_{\substack{0 < b_1, \dots, b_m \le n \\ (b_i, n) = 1}} (x_0 + \zeta^{b_1} x_1 + \dots + \zeta^{b_m} x_m)$$

は整数係数であることがわかります.