第21回JMO夏季セミナー自由発表

竹内珠佑

大阪公立大学工業高等専門学校知能情報コース2年

イントロ

私の研究したことは,特別な多変数多項式の積について

イントロ

私の研究したことは,特別な多変数多項式の積について

有名な事実1.

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

イントロ

私の研究したことは,特別な多変数多項式の積について

有名な事実1.

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

有名な事実2.（ヘロンの公式などで見かける）

$$(x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)(x-y-z)$$
$$=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$$

イントロ

私の研究したことは,特別な多変数多項式の積について

有名な事実1.

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

有名な事実2.（ヘロンの公式などで見かける）

$$(x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)(x-y-z)$$
$$=x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$$

パターンが見えてきました.

イントロ

mを正整数とする.$x_0, \dots, x_m$を不定元とする多変数多項式:

$$f_{2,m}(x) = \prod_{b_1, b_2, \dots, b_m = 1}^{2} \left(x_0 + (-1)^{b_1} x_1 + \cdots + (-1)^{b_m} x_m \right)$$

を考える($x = (x_0, \dots, x_m)$とした.)

イントロ

mを正整数とする.$x_0, \dots, x_m$を不定元とする多変数多項式:

$$f_{2,m}(x) = \prod_{b_1,b_2,\dots,b_m=1}^{2} \left(x_0 + (-1)^{b_1} x_1 + \cdots + (-1)^{b_m} x_m\right)$$

を考える($x = (x_0, \dots, x_m)$とした.)先ほどの事実を見ると「$f_{2,m}$をx_iを唯一の不定元とする一変数多項式として見ると,$f_{2,m}$の奇数次の項の係数は0である.」と予想できる.

イントロ

mを正整数とする.$x_0, \dots, x_m$を不定元とする多変数多項式:

$$f_{2,m}(x) = \prod_{b_1,b_2,\dots,b_m=1}^{2} \left(x_0 + (-1)^{b_1}x_1 + \cdots + (-1)^{b_m}x_m\right)$$

を考える $(x = (x_0, \dots, x_m)$とした.$)$ 先ほどの事実を見ると「$f_{2,m}$をx_iを唯一の不定元とする一変数多項式として見ると, $f_{2,m}$の奇数次の項の係数は0である.」と予想できる.

これは,知っているかもしれません.ほぼ同じ主張が問題として出題されたことがあります.

イントロ

次の式で表される(符号の組み合わせをすべてを考えた)ものをすべてをかけ合わせる.

$$\sqrt{1} \pm \sqrt{2} \pm \cdots \pm \sqrt{100}$$

この時,得られた数は整数であることを証明せよ.

1997TOT秋SA P3(改)

イントロ

次の式で表される(符号の組み合わせをすべてを考えた)ものをすべてをかけ合わせる.

$$\sqrt{1} \pm \sqrt{2} \pm \cdots \pm \sqrt{100}$$

この時,得られた数は整数であることを証明せよ.

1997TOT秋SA P3(改)

解法.

$$(x_0, \ldots, x_m) \mapsto (x_0, \ldots, -x_i, \ldots, x_m)$$

としても,$f_{2,m}$は不変だから,予想は正しいし,この問題も解けた.

イントロ

イントロはまだ続きます.

イントロ

イントロはまだ続きます.

有名な事実3.

$$x^n - 1 = (x - \zeta^0)(x - \zeta^1) \cdots (x - \zeta^{n-1})$$

$$\text{where } \zeta = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}/n\right)$$

イントロ

イントロはまだ続きます.

有名な事実3.

$$x^n - 1 = (x - \zeta^0)(x - \zeta^1)\cdots(x - \zeta^{n-1})$$

$$\text{where } \zeta = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}/n\right)$$

直ちに導かれる事実4.

$$x_0^n - (-1)^n x_1^n = (x_0 + \zeta^0 x_1)(x_0 + \zeta^1 x_1)\cdots(x_0 + \zeta^{n-1} x_1)$$

イントロ

イントロはまだ続きます.

有名な事実3.

$$x^n - 1 = (x - \zeta^0)(x - \zeta^1) \cdots (x - \zeta^{n-1})$$

$$\text{where } \zeta = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}/n\right)$$

直ちに導かれる事実4.

$$x_0^n - (-1)^n x_1^n = (x_0 + \zeta^0 x_1)(x_0 + \zeta^1 x_1) \cdots (x_0 + \zeta^{n-1} x_1)$$

パターンが見えてきましたでしょうか.

イントロ

次のような多変数多項式を考える.

$$f_{n,m}(x) = \prod_{b_1,b_2,\dots,b_m=1}^{n} \left(x_0 + \zeta^{b_1}x_1 + \cdots + \zeta^{b_m}x_m\right)$$

ただし, $x = (x_0, \dots, x_m)$, mは正整数, nは2以上の整数.

イントロ

次のような多変数多項式を考える.

$$f_{n,m}(x) = \prod_{b_1,b_2,\ldots,b_m=1}^{n} \left(x_0 + \zeta^{b_1}x_1 + \cdots + \zeta^{b_m}x_m\right)$$

ただし, $x = (x_0, \ldots, x_m)$, mは正整数, nは2以上の整数.

イントロ

予想.

$a_0, \ldots, a_m$ は正整数とする.このとき,

$$f_{n,m}(\sqrt[n]{a_0}, \ldots, \sqrt[n]{a_m})$$

は整数である.

イントロ

予想.

$a_0, \ldots, a_m$は正整数とする.このとき,

$$f_{n,m}(\sqrt[n]{a_0}, \ldots, \sqrt[n]{a_m})$$

は整数である.

これこそが,私の研究したことです.

イントロ

予想.

$a_0, \ldots, a_m$は正整数とする.このとき,

$$f_{n,m}(\sqrt[n]{a_0}, \ldots, \sqrt[n]{a_m})$$

は整数である.

これこそが,私の研究したことです.

今回はこれを証明します.

方針

$n = 2$の時はすでに証明しましたね.

方針

$n=2$の時はすでに証明しましたね. $n=2$のときは

$$(x_0, \dots, x_m) \mapsto (x_0, \dots, -x_i, \dots, x_m)$$

を考えました.

方針

$n = 2$の時はすでに証明しましたね. $n = 2$のときは

$$(x_0, \dots, x_m) \mapsto (x_0, \dots, -x_i, \dots, x_m)$$

を考えました.同様に,

$$(x_0, \dots, x_m) \mapsto (x_0, \dots, \zeta x_i, \dots, x_m)$$

としても,$f_{n,m}$は不変です.

方針

$n=2$の時はすでに証明しましたね. $n=2$のときは

$$(x_0,\ldots,x_m)\ \mapsto (x_0,\ldots,-x_i,\ldots,x_m)$$

を考えました.同様に,

$$(x_0,\ldots,x_m)\ \mapsto (x_0,\ldots,\zeta x_i,\ldots,x_m)$$

としても,$f_{n,m}$は不変です.だから,「$f_{n,m}$をx_iを唯一の不定元とする一変数多項式として見ると,$f_{n,m}$のnの倍数でない次数の項の係数は0である.」となります.

方針

$n=2$の時はすでに証明しましたね. $n=2$のときは

$$(x_0,\dots,x_m)\ \mapsto (x_0,\dots,-x_i,\dots,x_m)$$

を考えました.同様に,

$$(x_0,\dots,x_m)\ \mapsto (x_0,\dots,\zeta x_i,\dots,x_m)$$

としても,$f_{n,m}$は不変です.だから,「$f_{n,m}$をx_iを唯一の不定元とする一変数多項式として見ると,$f_{n,m}$のnの倍数でない次数の項の係数は0である. 」となります.

$n=2$の時はこれで十分でしたが,一般にはこれでは不十分です.

方針

$n=2$の時はすでに証明しましたね. $n=2$のときは

$$(x_0,\dots,x_m)\ \mapsto (x_0,\dots,-x_i,\dots,x_m)$$

を考えました.同様に,

$$(x_0,\dots,x_m)\ \mapsto (x_0,\dots,\zeta x_i,\dots,x_m)$$

としても,$f_{n,m}$は不変です.だから,「$f_{n,m}$をx_iを唯一の不定元とする一変数多項式として見ると,$f_{n,m}$のnの倍数でない次数の項の係数は0である.」となります.

$n=2$の時はこれで十分でしたが,一般にはこれでは不十分です. $f_{n,m}$が整数係数であることを示せば十分です.これを示すことを目標に進めていきます.

証明

m, nは固定します.

証明

m, nは固定します.

定義1.（円分多項式）

k番目の円分多項式Φ_kを次のように定義する:

$$\Phi_k(x) \coloneqq \prod_{(d,k)=1,\ 1 \le d \le k} \left(x - \eta^d\right).$$

ただし, $\eta = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}/k\right)$とした.

証明

m, nは固定します.

定義1.（円分多項式）

k番目の円分多項式Φ_kを次のように定義する:

$$\Phi_k(x) \coloneqq \prod_{(d,k)=1,\ 1 \leq d \leq k} \left(x - \eta^d\right).$$

ただし, $\eta = \exp\left(2\pi\sqrt{-1}/k\right)$とした.

円分多項式に関して次の有名な事実が知られている.

証明

補題1.

Φ_kは整数係数の多項式である.

証明

補題1.

Φ_kは整数係数の多項式である.

証明はしません.

証明

系2.

A_kを1の原始k乗根すべての集合とする.

証明

系2.

A_kを1の原始k乗根すべての集合とする.この時,$A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$すべての元の基本対象式の値は整数である.

証明

系2.

A_kを1の原始k乗根すべての集合とする.この時,$A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$すべての元の基本対象式の値は整数である.

証明.

$$\prod_j \Phi_{i_j}(x)$$

が整数係数であることから明らか.

証明

補題3.（対称式の基本定理）

$F(x_1, \ldots, x_k)$を整数係数の対称式とする.

証明

補題3.（対称式の基本定理）

$F(x_1, \dots, x_k)$を整数係数の対称式とする.また,σ_iを$x_1, \dots, x_k$に関するi次の基本対称式とする.

証明

補題3. (対称式の基本定理)

$F(x_1, \dots, x_k)$を整数係数の対称式とする.また,σ_iを$x_1, \dots, x_k$に関するi次の基本対称式とする.このとき,整数係数の多項式Gが (一意に) 存在して次をみたす:

$$F(x_1, \dots, x_k) = G(\sigma_1, \dots, \sigma_k).$$

証明

補題3.（対称式の基本定理）

$F(x_1,\dots,x_k)$を整数係数の対称式とする.また,σ_iを$x_1,\dots,x_k$に関するi次の基本対称式とする.このとき,整数係数の多項式Gが（一意に）存在して次をみたす:

$$F(x_1,\dots,x_k)=G(\sigma_1,\dots,\sigma_k).$$

証明はしません.

証明

系4.

pを整数係数の対称式とする.このとき,

$$p(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-1})$$

は整数である.

証明

定義2.

$f_{n,m}$において,$x_0^{d_0} \cdots x_m^{d_m}$の係数の$n^m!/\prod_i d_i!$個の和のうち,
$(\zeta^1)^{c_1} \cdots (\zeta^n)^{c_n}$の個数を$P_{c,d}$で表す.

証明

定義2.

$f_{n,m}$において,$x_0^{d_0} \cdots x_m^{d_m}$の係数の$n^m!/\prod_i d_i!$個の和のうち,$(\zeta^1)^{c_1} \cdots (\zeta^n)^{c_n}$の個数を$P_{c,d}$で表す.

注意.

ここの$(\zeta^1)^{c_1} \cdots (\zeta^n)^{c_n}$は値で区別されず,$\zeta^i x_j$が$c_i$回選ばれたということを表す.

証明

定義2.

$f_{n,m}$において,$x_0^{d_0}\cdots x_m^{d_m}$の係数の$n^m!/\prod_i d_i!$個の和のうち,$(\zeta^1)^{c_1}\cdots(\zeta^n)^{c_n}$の個数を$P_{c,d}$で表す.

注意.

ここの$(\zeta^1)^{c_1}\cdots(\zeta^n)^{c_n}$は値で区別されず,$\zeta^i x_j$が$c_i$回選ばれたということを表す.重複がないため,

$$\sum_c P_{c,d} = \frac{n^m!}{\prod_i d_i!}$$

が成りたっている.

証明

定義3.（順序）

全単射$\alpha\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$**に対して，**$\mathbb{Z}$**上の二項関係** $<_\alpha$**を次のように定める:**

$$x <_\alpha y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(y)$$

証明

定義3.（順序）

全単射$\alpha\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$**に対して，**$\mathbb{Z}$**上の二項関係** $<_\alpha$**を次のように定める:**

$$x <_\alpha y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(y)$$

またこの時,x**は**y**より**$<_\alpha$ **で小さいなどと表現する.**

証明

定義3.（順序）

全単射$\alpha\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$に対して，$\mathbb{Z}$上の二項関係 $<_\alpha$を次のように定める:

$$x <_\alpha y \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(y)$$

またこの時,xはyより$<_\alpha$ で小さいなどと表現する.

定義をα^{-1}とすると,

$$\cdots, \alpha(-1) <_\alpha \alpha(0), \alpha(0) <_\alpha \alpha(1), \cdots$$

となっていい感じになることを念頭に置いとく.

証明

定義4.（辞書順）

$\mathbb{Z}^k$ 上の二項関係 $\prec_\alpha$ を次のように定める:

$$(x_1, \dots, x_k) \prec_\alpha (y_1, \dots, y_k) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists j, \forall i < j, x_i = y_i \text{ and } x_j <_\alpha y_j$$

証明

定義4.（辞書順）

$\mathbb{Z}^k$上の二項関係$\prec_\alpha$ を次のように定める:

$$(x_1, \dots, x_k) \prec_\alpha (y_1, \dots, y_k) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists j, \forall i < j, x_i = y_i \text{ and } x_j <_\alpha y_j$$

またこの時も同様に,xはyより$\prec_\alpha$ で小さいなどと表現する.

証明

定義5.

$f_{n,m}$において,$(i_1, \dots, i_{n^m})_{\prec_\alpha}$で$\{n\} \times \{1, \dots, n\}^m$のうち,$\prec_\alpha$で$j$番目に小さい組に対応する多項式$x_0 + \zeta^{b_1}x_1 + \cdots + \zeta^{b_m}x_m$の$\zeta^{b_{i_j}}x_{i_j}$が選ばれた単項式を表すものとする.

証明

定義6.

$\beta_{k,l}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$を次のように定義する.

$$\beta_{k,l}(x) \coloneqq \begin{cases} x & (x \neq k, l) \\ l & (x = k) \\ k & (x = l) \end{cases}$$

証明

補題5.

$$(i_1, \ldots, i_{n^m})_{\prec_{\mathrm{id}}} = (\zeta^1)^{c_1} \cdots \ (\zeta^n)^{c_n} \prod_i x_i^{d_i}$$

$$\Leftrightarrow (i_1, \ldots, i_{n^m})_{\prec_\alpha} = \left(\zeta^{\alpha(1)}\right)^{c_1} \cdots \ \left(\zeta^{\alpha(n)}\right)^{c_n} \prod_i x_i^{d_i}$$

ただし,$\alpha(n) = n$**をみたすものとする.**

証明

補題5.

$$(i_1, \dots, i_{n^m})_{\prec_{\mathrm{id}}} = (\zeta^1)^{c_1} \cdots \ (\zeta^n)^{c_n} \prod_i x_i^{d_i}$$

$$\Leftrightarrow (i_1, \dots, i_{n^m})_{\prec_\alpha} = \left(\zeta^{\alpha(1)}\right)^{c_1} \cdots \ \left(\zeta^{\alpha(n)}\right)^{c_n} \prod_i x_i^{d_i}$$

ただし,$\alpha(n) = n$をみたすものとする.

証明の前に,式の意味や具体例を見とく.

証明

$n = 3, m = 2$のときを見てみる.

証明

$n=3, m=2$のときを見てみる.

$$(0,0,1,1,1,2,2,2,2)_{\prec_{\mathrm{id}}} =$$

$$\begin{array}{r|ccccccccc}
b_0 = 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
b_1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\
b_2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3
\end{array}$$

証明

$n=3, m=2$のときを見てみる.

$$(0,0,1,1,1,2,2,2,2)_{\prec_{\mathrm{id}}} = (\zeta^1)^2(\zeta^2)^3(\zeta^3)^4 x_0^2 x_1^3 x_2^4$$

$$\begin{array}{r|ccccccccc}
b_0 = 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
b_1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\
b_2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3
\end{array}$$

証明

$n=3, m=2$のときを見てみる.

$$(0,0,1,1,1,2,2,2,2)_{\prec_{\mathrm{id}}} = (\zeta^1)^2(\zeta^2)^3(\zeta^3)^4 x_0^2 x_1^3 x_2^4$$

$$\begin{array}{r|ccccccccc} b_0=3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ b_1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ b_2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$(0,0,1,1,1,2,2,2,2)_{\prec_{\beta_{1,2}}} =$$

$$\begin{array}{r|ccccccccc} b_0=3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ b_1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ b_2 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

証明

$n=3, m=2$のときを見てみる.

$$(0,0,1,1,1,2,2,2,2)_{\prec_{\mathrm{id}}} = (\zeta^1)^2(\zeta^2)^3(\zeta^3)^4 x_0^2 x_1^3 x_2^4$$

$$\begin{array}{r|ccccccccc}
b_0=3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
b_1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\
b_2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3
\end{array}$$

$$(0,0,1,1,1,2,2,2,2)_{\prec_{\beta_{1,2}}} = (\zeta^2)^2(\zeta^1)^3(\zeta^3)^4 x_0^2 x_1^3 x_2^4$$

$$\begin{array}{r|ccccccccc}
b_0=3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
b_1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\
b_2 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3
\end{array}$$

証明

$n = 3, m = 2$のときを見てみる.

$$(0,0,1,1,1,2,2,2,2)_{\prec_{\mathrm{id}}} = (\zeta^{1})^2(\zeta^{2})^3(\zeta^{3})^4 x_0^2 x_1^3 x_2^4$$

$$\begin{array}{r|ccccccccc} b_0 = 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ b_1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ b_2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$(0,0,1,1,1,2,2,2,2)_{\prec_{\beta_{1,2}}} = (\zeta^{2})^2(\zeta^{1})^3(\zeta^{3})^4 x_0^2 x_1^3 x_2^4$$

$$\begin{array}{r|ccccccccc} b_0 = 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ b_1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ b_2 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

証明

補題5.の証明を二つのパートに分ける.

証明

補題5.の証明を二つのパートに分ける.

1. dが一緒になること.

証明

補題5.の証明を二つのパートに分ける.

1. dが一緒になること.
2. αがつくこと.

証明

補題5.の証明を二つのパートに分ける.

1. dが一緒になること.

2. αがつくこと.

Part1. これは定義より明らかです.

証明

定義5.

$f_{n,m}$において,$(i_1, \dots, i_{n^m})_{\prec_\alpha}$で$\{n\} \times \{1, \dots, n\}^m$のうち,$\prec_\alpha$で$j$番目に小さい組に対応する**多項式**$x_0 + \zeta^{b_1} x_1 + \cdots + \zeta^{b_m} x_m$**の** $\zeta^{b_{i_j}} x_{i_j}$**が選ばれた単項式**を表すものとする.

⇒ $i_1, \dots, i_{n^m}$**のうちに**k**が**l**個あれば,**x_k^l**となるから,**$i_1, \dots, i_{n^m}$**が不変ならば,**d**も不変.**

証明

Part2. $(\Rightarrow)$ $\{n\} \times \{1, \ldots, n\}^m$の$\prec_{\mathrm{id}}$ でj番目に小さい組が$(n, y_{1,j}, \ldots, y_{m,j})$のように書けたとする.

証明

Part2. $(\Rightarrow)$ $\{n\}\times\{1,\dots,n\}^m$の$\prec_{\mathrm{id}}$ でj番目に小さい組が$\left(n, y_{1,j}, \dots, y_{m,j}\right)$のように書けたとする.このとき$\prec_\alpha$で$j$番目に小さい組は

$$\left(n, \alpha\left(y_{1,j}\right), \dots, \alpha\left(y_{n,j}\right)\right)$$

のように書ける.

証明

定義3.（順序）

全単射$\alpha\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$に対して, $\mathbb{Z}$上の二項関係 $<_\alpha$を次のように定める:

$$x <_\alpha y \overset{\text{def}}{\iff} \alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(y)$$

またこの時,xはyより$<_\alpha$ で小さいなどと表現する.

定義をα^{-1}とすると,

$$\cdots, \alpha(-1) <_\alpha \alpha(0), \alpha(0) <_\alpha \alpha(1), \cdots$$

となっていい感じになることを念頭に置いとく.

証明

Part2. $(\Rightarrow)$ $\{n\} \times \{1, \dots, n\}^m$の$\prec_{\mathrm{id}}$ でj番目に小さい組が$(n, y_{1,j}, \dots, y_{m,j})$のように書けたとする.このとき$\prec_\alpha$で$j$番目に小さい組は

$$\left(n, \alpha(y_{1,j}), \dots, \alpha(y_{n,j})\right)$$

のように書ける.

つまりは,idのときに$\zeta^{y_{i_j,j}} x_{i_j}$が選ばれたら,$\alpha$のときは$\zeta^{\alpha(y_{i_j,j})} x_{i_j}$が選ばれる（ただし$y_{0,j} = n$.）

証明

Part2. $(\Rightarrow)$ $\{n\} \times \{1, \dots, n\}^m$の$\prec_{\mathrm{id}}$ でj番目に小さい組が$(n, y_{1,j}, \dots, y_{m,j})$のように書けたとする.このとき$\prec_\alpha$で$j$番目に小さい組は

$$\left(n, \alpha(y_{1,j}), \dots, \alpha(y_{n,j})\right)$$

のように書ける.

つまりは,idのときに$\zeta^{y_{i_j,j}} x_{i_j}$が選ばれたら,$\alpha$のときは$\zeta^{\alpha(y_{i_j,j})} x_{i_j}$が選ばれる（ただし$y_{0,j} = n$.）

$(\Leftarrow)$ 逆も同じ

証明

系6.

$$P_{(\ldots,c_k,\ldots,c_l,\ldots),d} = P_{(\ldots,c_l,\ldots,c_k,\ldots),d} \ \text{ where } k, l < n$$

証明

系6.

$$P_{(\ldots,c_k,\ldots,c_l,\ldots),d} = P_{(\ldots,c_l,\ldots,c_k,\ldots),d} \ \text{ where } k,l < n$$

証明. **補題5.において**$\alpha = \beta_{k,l}$**を考えればいい:**

$$(i_1, \ldots, i_{n^m})_{\prec_{\mathrm{id}}} = \cdots \left(\zeta^k\right)^{c_k} \cdots \ \left(\zeta^l\right)^{c_l} \cdots \prod_i x_i^{d_i}$$

$$\Leftrightarrow (i_1, \ldots, i_{n^m})_{\prec_{\beta_{k,l}}} = \cdots \left(\zeta^l\right)^{c_k} \cdots \ \left(\zeta^k\right)^{c_l} \cdots \prod_i x_i^{d_i}$$

証明

系6.より$f_{n,m}$の各項の係数は$\zeta, \dots, \zeta^{n-1}$の対称式,つまりは$f_{n,m}$は整数係数の多項式である.先の事実と合わせると,

方針

$n=2$の時はすでに証明しましたね. $n=2$のときは

$$(x_0,\dots,x_m)\mapsto(x_0,\dots,-x_i,\dots,x_m)$$

を考えました.同様に,

$$(x_0,\dots,x_m)\mapsto(x_0,\dots,\zeta x_i,\dots,x_m)$$

としても,$f_{n,m}$は不変です.だから,**「$f_{n,m}$をx_iを唯一の不定元とする一変数多項式として見ると,$f_{n,m}$のnの倍数でない次数の項の係数は0である.」**となります.

$n=2$の時はこれで十分でしたが,一般にはこれでは不十分です.
$f_{n,m}$が整数係数であることを示せば十分です.これを示すことを目標に進めていきます.

証明

系6.より$f_{n,m}$の各項の係数は$\zeta, \dots, \zeta^{n-1}$の対称式,つまりは$f_{n,m}$は整数係数の多項式である.先の事実と合わせると,

$$f_{n,m}(\sqrt[n]{a_0}, \dots, \sqrt[n]{a_m})$$

は整数である.(証明終了)

おまけ

同様の証明で，

$$g_{n,m}(x) = \prod_{\substack{0<b_1,\ldots,b_m\le n \\ (b_i,n)=1}} \left(x_0 + \zeta^{b_1}x_1 + \cdots + \zeta^{b_m}x_m\right)$$

は整数係数であることがわかります．