暗号杯 P5 の解答

kk2

2024 年 9 月 25 日

問題 1. $n > 0$ は与えられた数．$f : \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{R}_{>0}$ であって，任意の $x, y \in \mathbf{R}_{>0}$ に対して，

$$f(xy^n + f(y)^{2n}) = f(x)f(y)^n + y^n f(y)^n \qquad P(x,y)$$

が成り立つようなものをすべて求めよ．

解答. $f(x) = x$ は明らかに解になっていて，これが唯一の解であることを示す．

Claim. f は単射である．

Proof. 背理法で示す．$f(a) = f(b) = c, a < b$ をみたす $a, b \in \mathbf{R}_{>0}$ をとる．$P(a^n x, b)$ と $P(b^n x, a)$ より，

$$f(a^n b^n x + c^{2n}) = f(a^n x)c^n + b^n c^n = f(b^n x)c^n + a^n c^n.$$

$x \mapsto \frac{x}{b^n}$ とすることで，

$$f\left(\frac{a^n}{b^n}x\right) = f(x) - (b^n - a^n).$$

繰り返し使うことで，任意の $m \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して，

$$f\left(\frac{a^{mn}}{b^{mn}}x\right) = f(x) - m(b^n - a^n).$$

m を十分大きくすることで，$f(x) < 0$ となり，矛盾が生じる． □

Claim.

$$f(1) = 1.$$

Proof. $P(x, 1)$ より，$a = f(1)^n$ とおくと，

$$f(x + a^2) = af(x) + a. \tag{1}$$

$a \neq 1$ を仮定して，背理法で示す．(1) を繰り返し使うことで，任意の $m \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して，

$$f(x + ma^2) = a^m f(x) + a(1 + a + \cdots + a^{m-1}) = a^m f(x) + \frac{a^{m+1} - a}{a - 1}. \tag{2}$$

まず，$a>1$ の場合を考える．簡略化のため $b=a^{1/a^2}>1$ とおく．

補題 1. ある $M>0$ が存在して，任意の $x>a^2$ に対して，

$$f(x)>Mb^x.$$

Proof.

$$f(x)>a^{\lceil x/a^2\rceil-1}\geq a^{-1}\cdot a^{x/a^2}\geq a^{-1}\cdot b^x.$$

□

補題 2. 任意の $r\in(0,a^2]$ に対して，ある $L>0$ が存在して，任意の $x\in\mathbf{R}_{>0}$，$x\equiv r \mod a^2$ に対して，

$$f(x)<Lb^x.$$

Proof. $m=\lceil x/a^2\rceil-1$ とおくと，$x=r+a^2m$ である．(2) より，

$$f(x)=a^mf(r)+\frac{a^{m+1}-a}{a-1}=\left(f(r)+\frac{a-a^{1-m}}{a-1}\right)a^m<\left(f(r)+\frac{a}{a-1}\right)b^x.$$

□

さて，P の両辺を $y^nf(y)^n$ で割った式を考える：

$$\frac{f(xy^n+f(y)^{2n})}{y^nf(y)^n}=\frac{f(x)}{y^n}+1. \tag{3}$$

(3) において，y を $\mathrm{mod}\ a^2$ では一定のまま，$y\to\infty$ とすることを考える．補題 2 より，$L>0$ がとれて，

$$y^nf(y)^n<L^ny^nb^{ny}. \tag{4}$$

また，補題 1 より，$M_0,M_1>0$ がとれて，

$$f(xy^n+f(y)^{2n})>M_0b^{xy^n+f(y)^{2n}}>M_0b^{M_1^{2n}b^{2ny}}. \tag{5}$$

(4) と (5) より，

$$\frac{f(xy^n+f(y)^{2n})}{y^nf(y)^n}>\frac{M_0b^{M_1^{2n}b^{2ny}}}{L^ny^nb^{ny}}.$$

よって，(3) の左辺は $+\infty$ に発散する．一方で，右辺は 1 に収束するため，矛盾が生じる．次に，$a<1$ の場合を考える．同様にして，$b=a^{1/a^2}<1$ とおく．

補題 3. 任意の $r\in(0,a^2]$ に対して，ある $M>0$ が存在して，任意の $x\in\mathbf{R}_{>0}$，$x\equiv r \mod a^2$ に対して，

$$\left|f(x)-\frac{a}{1-a}\right|<Mb^x.$$

Proof. $m=\lceil x/a^2\rceil-1$ とおくと，$x=r+a^2m$ である．(2) より，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a^m f(r) + \frac{a^{m+1}-a}{a-1} \\
&= \frac{a}{1-a} + a^m\left(f(r) - \frac{a}{1-a}\right), \\
\left|f(x) - \frac{a}{1-a}\right| &= a^m \left|f(r) - \frac{a}{1-a}\right|.
\end{aligned}
$$

$f(r) = \frac{a}{1-a}$ だと仮定すると，単射性に矛盾するから，$\left|f(r) - \frac{a}{1-a}\right| > 0$ である．結局，

$$
\left|f(x) - \frac{a}{1-a}\right| < b^x \cdot a^{-1} \left|f(r) - \frac{a}{1-a}\right|.
$$

□

$r \in (0, a^2]$ をとって固定する．補題 3 より，$M > 0$ がとれて，各 y に対して，$xy^n + f(y)^{2n} \equiv r \mod a^2$ となるように x をとることで，

$$
\frac{a}{1-a} + Mb^{xy^n + f(y)^{2n}} > f(xy^n + f(y)^{2n}) > y^n f(y)^n.
$$

x はいくらでも大きくとれるから，

$$
\frac{a}{1-a} \geq y^n f(y)^n.
$$

これは $y \to \infty$ とすると，$f(y) \to 0$ だから，矛盾が生じる (補題 3 とか). □

Claim. 任意の $x \in \mathbf{R}_{>0}$ に対して，

$$
f(x+1) = f(x) + 1.
$$

Proof. $P(x, 1)$ を見ればいい. □

Claim. 任意の $x, y \in \mathbf{R}_{>0}$ に対して，

$$
f(x + y^n) = f(x) + f(y)^n. \tag{6}
$$

Proof. $P(x, y), P(x+1, y)$ の比較により，

$$
f(xy^n + f(y)^{2n} + y^n) = f(xy^n + f(y)^{2n}) + f(y)^n.
$$

x を置き換えることで，任意の $x > f(y)^{2n}$ に対して，

$$
f(x + y^n) = f(x) + f(y)^n.
$$

$x \leq f(y)^{2n}$ に対しても，大きい $m \in \mathbf{Z}_{>0}$ をとることで，$x + m > f(y)^{2n}$ とすることができて，

$$
f(x + y^n) = f(x + m + y^n) - m = f(x + m) + f(y)^n - m = f(x) + f(y)^n.
$$

□

Claim. 任意の $x, y \in \mathbf{R}_{>0}$ に対して，

$$
f(x + y) = f(x) + f(y).
$$

Proof. (6) で，$x = 1$ とすれば，$f(y^n) = f(y)^n$．これを，(6) で使って，$y \mapsto y^{1/n}$ とすれば良い． □

Claim. 任意の $x \in \mathbf{R}_{>0}$ に対して，

$$f(x) = x.$$

Proof. 有名な事実. □

コメント.