

暗号杯 P5 の解答

kk2

2024 年 9 月 25 日

問題 1. $n > 0$ は与えられた数. $f : \mathbf{R}_{>0} \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$ であって, 任意の $x, y \in \mathbf{R}_{>0}$ に対して,

$$f(xy^n + f(y)^{2n}) = f(x)f(y)^n + y^n f(y)^n \quad P(x, y)$$

が成り立つようなものをすべて求めよ.

解答. $f(x) = x$ は明らかに解になっていて, これが唯一の解であることを示す.

Claim. f は単射である.

Proof. 背理法で示す. $f(a) = f(b) = c, a < b$ をみたとす $a, b \in \mathbf{R}_{>0}$ をとる. $P(a^n x, b)$ と $P(b^n x, a)$ より,

$$f(a^n b^n x + c^{2n}) = f(a^n x)c^n + b^n c^n = f(b^n x)c^n + a^n c^n.$$

$x \mapsto \frac{x}{b^n}$ とすることで,

$$f\left(\frac{a^n}{b^n}x\right) = f(x) - (b^n - a^n).$$

繰り返し使うことで, 任意の $m \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して,

$$f\left(\frac{a^{mn}}{b^{mn}}x\right) = f(x) - m(b^n - a^n).$$

m を十分大きくすることで, $f(x) < 0$ となり, 矛盾が生じる. □

Claim.

$$f(1) = 1.$$

Proof. $P(x, 1)$ より, $a = f(1)^n$ とおくと,

$$f(x + a^2) = af(x) + a. \quad (1)$$

$a \neq 1$ を仮定して, 背理法で示す. (1) を繰り返し使うことで, 任意の $m \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して,

$$f(x + ma^2) = a^m f(x) + a(1 + a + \cdots + a^{m-1}) = a^m f(x) + \frac{a^{m+1} - a}{a - 1}. \quad (2)$$

まず, $a > 1$ の場合を考える. 簡略化のため $b = a^{1/a^2} > 1$ とおく.

補題 1. ある $M > 0$ が存在して, 任意の $x > a^2$ に対して,

$$f(x) > Mb^x.$$

Proof.

$$f(x) > a^{\lceil x/a^2 \rceil - 1} \geq a^{-1} \cdot a^{x/a^2} \geq a^{-1} \cdot b^x. \quad \square$$

補題 2. 任意の $r \in (0, a^2]$ に対して, ある $L > 0$ が存在して, 任意の $x \in \mathbf{R}_{>0}$, $x \equiv r \pmod{a^2}$ に対して,

$$f(x) < Lb^x.$$

Proof. $m = \lceil x/a^2 \rceil - 1$ とおくと, $x = r + a^2m$ である. (2) より,

$$f(x) = a^m f(r) + \frac{a^{m+1} - a}{a - 1} = \left(f(r) + \frac{a - a^{1-m}}{a - 1} \right) a^m < \left(f(r) + \frac{a}{a - 1} \right) b^x. \quad \square$$

さて, P の両辺を $y^n f(y)^n$ で割った式を考える:

$$\frac{f(xy^n + f(y)^{2n})}{y^n f(y)^n} = \frac{f(x)}{y^n} + 1. \quad (3)$$

(3) において, y を $\pmod{a^2}$ では一定のまま, $y \rightarrow \infty$ とすることを考える. 補題 2 より, $L > 0$ がとれて,

$$y^n f(y)^n < L^n y^n b^{ny}. \quad (4)$$

また, 補題 1 より, $M_0, M_1 > 0$ がとれて,

$$f(xy^n + f(y)^{2n}) > M_0 b^{xy^n + f(y)^{2n}} > M_0 b^{M_1^{2n} b^{2ny}}. \quad (5)$$

(4) と (5) より,

$$\frac{f(xy^n + f(y)^{2n})}{y^n f(y)^n} > \frac{M_0 b^{M_1^{2n} b^{2ny}}}{L^n y^n b^{ny}}.$$

よって, (3) の左辺は $+\infty$ に発散する. 一方で, 右辺は 1 に収束するため, 矛盾が生じる. 次に, $a < 1$ の場合を考える. 同様にして, $b = a^{1/a^2} < 1$ とおく.

補題 3. 任意の $r \in (0, a^2]$ に対して, ある $M > 0$ が存在して, 任意の $x \in \mathbf{R}_{>0}$, $x \equiv r \pmod{a^2}$ に対して,

$$\left| f(x) - \frac{a}{1-a} \right| < Mb^x.$$

Proof. $m = \lceil x/a^2 \rceil - 1$ とおくと, $x = r + a^2m$ である. (2) より,

$$\begin{aligned}
f(x) &= a^m f(r) + \frac{a^{m+1} - a}{a - 1} \\
&= \frac{a}{1 - a} + a^m \left(f(r) - \frac{a}{1 - a} \right), \\
\left| f(x) - \frac{a}{1 - a} \right| &= a^m \left| f(r) - \frac{a}{1 - a} \right|.
\end{aligned}$$

$f(r) = \frac{a}{1-a}$ だと仮定すると、単射性に矛盾するから、 $\left| f(r) - \frac{a}{1-a} \right| > 0$ である。結局、

$$\left| f(x) - \frac{a}{1-a} \right| < b^x \cdot a^{-1} \left| f(r) - \frac{a}{1-a} \right|. \quad \square$$

$r \in (0, a^2]$ をとって固定する。補題3より、 $M > 0$ がとれて、各 y に対して、 $xy^n + f(y)^{2n} \equiv r \pmod{a^2}$ となるように x をとることで、

$$\frac{a}{1-a} + Mb^{xy^n + f(y)^{2n}} > f(xy^n + f(y)^{2n}) > y^n f(y)^n.$$

x はいくらでも大きくとれるから、

$$\frac{a}{1-a} \geq y^n f(y)^n.$$

これは $y \rightarrow \infty$ とすると、 $f(y) \rightarrow 0$ だから、矛盾が生じる (補題3とか)。 □

Claim. 任意の $x \in \mathbf{R}_{>0}$ に対して、

$$f(x+1) = f(x) + 1.$$

Proof. $P(x, 1)$ を見ればいい。 □

Claim. 任意の $x, y \in \mathbf{R}_{>0}$ に対して、

$$f(x + y^n) = f(x) + f(y)^n. \quad (6)$$

Proof. $P(x, y), P(x+1, y)$ の比較により、

$$f(xy^n + f(y)^{2n} + y^n) = f(xy^n + f(y)^{2n}) + f(y)^n.$$

x を置き換えることで、任意の $x > f(y)^{2n}$ に対して、

$$f(x + y^n) = f(x) + f(y)^n.$$

$x \leq f(y)^{2n}$ に対しても、大きい $m \in \mathbf{Z}_{>0}$ をとることで、 $x + m > f(y)^{2n}$ とすることができて、

$$f(x + y^n) = f(x + m + y^n) - m = f(x + m) + f(y)^n - m = f(x) + f(y)^n. \quad \square$$

Claim. 任意の $x, y \in \mathbf{R}_{>0}$ に対して、

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Proof. (6) で, $x = 1$ とすれば, $f(y^n) = f(y)^n$. これを, (6) で使って, $y \mapsto y^{1/n}$ とすれば良い. \square

Claim. 任意の $x \in \mathbf{R}_{>0}$ に対して,

$$f(x) = x.$$

Proof. 有名な事実. \square