1 FE

ずんだ

2024 年 9 月 23 日

問題 1 (有名な問題)**.** $k \in \mathbb{Z}_{>2}$ は与えられた数. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して, $f^{k-1}(n) = kn$ をみたす狭義単調増加関数 $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ をすべて求めよ.

解答.

$$g(n) = \begin{cases} n + k^i & (k^i \leqslant n \leqslant (k-1)k^i) \\ k(n - (k-2)k^i) & ((k-1)k^i \leqslant n \leqslant k^{i+1}) \end{cases}$$

とした時, 解が $f(n) = g(n)$ だけであることを示す. これが与式をみたすことは明らかなので, これ以外にないことを示す.

Claim. $f(kn) = kf(n)$.

Proof.

$$f(kn) = f(f^k(n)) = f^{k+1}(n) = f^k(f(n)) = kf(n) \qquad \square$$

Claim. $f(1) = 2, \cdots, f(k-1) = k$.

Proof. まず増加するので, $f(n) \geqslant n$ であるが, もし不動点があったら, $n = 3n$ となるので, 不動点はない. よって, $f(n) \geqslant n+1$, 特に $f^l(n) \geqslant f(n)+l-1$. よって, $f(1)+k-2 \leqslant k \implies f(1) = 2$. あとは $f^{k-1}(1) = k$ を使えば順番に分かっていく. $\square$

いま, $n \in A = \{1, \cdots, k-1, k, k+1, \cdots, (k-1)k, k^2, k^2+1, \cdots\}$ に対して $f(n) = g(n)$ が分かっている. $n \in \mathbb{Z}_{>0} \setminus A$, f の逆関数 h であって, $h^i(n) \in A$ $(1 \leqslant i \leqslant k-2)$ なので, $f(n)$ は一意に定まる. ($k-2$ 回までは $-k^{\lfloor \log_k n \rfloor + 1}$ されるだけなので) f の存在が分かっているので, 解は $f(n) = g(n)$ だけ.

コメント. 増加するってだけで, 一意に決まってしまうのが面白いですね.

問題 2 (IMO 1977/6)**.** Find all functions $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ satisfying following condition:

$$f(n+1) > f(f(n)), \quad \forall n \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

出典はこちら.

解答. $f(n) = n$ だけであることを示す. これが与式をみたすことは明らかなので, これ以外にないことを示す.

Claim. $f(n) \geqslant n$.

Proof. $\forall m \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して,

$$\forall n \geqslant m, f(n) \geqslant m \tag{$P(m)$}$$

が言えればいい. $P(1)$ は明らかに成り立つ. $k \in \mathbb{Z}_{>0} P(1), \cdots, P(k)$ が成り立っていると仮定したとき,

$$\forall l \geqslant k+1, f(l) > f(f(l-1)) \geqslant k,$$

つまり, $P(k+1)$ が成り立つ. これで, $\forall m, P(m)$ が言えた. □

Claim. f は増加する.

Proof.

$$f(n+1) > f(f(n)) \geqslant f(n)$$

□

Claim. $f(n) = n$.

Proof.

$$f(n+1) > f(f(n)) \Longrightarrow n+1 > f(n)$$

なので, $f(n) \leqslant n$. よって,

$$n \leqslant f(n) \leqslant n$$

□

コメント. 具体的な値を求めようとしたときはもう少し難しくなると思います. ISL 2011 A4 とかが類題です.

問題 3 (ELMO 2010/4)**.** Determine all strictly increasing functions $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ satisfying $nf(f(n)) = f(n)^2$ for all positive integers n.

出典はこちら.

解答. 解が

$$f(n) = \begin{cases} n & (n < N) \\ cn & (n \geqslant N) \end{cases} \quad (c, N \in \mathbb{Z}_{>0})$$

だけであることを示す. これが, 与式をみたすことは明らかなので, これ以外にないことを示す.

Claim. $n \mid f(n)$.

Proof. $f^{k+1}(n) = \dfrac{f(n)^{k+1}}{n^k}$ なので, $n^k \mid f(n)^{k+1}$ で大きい k を取ればよい. □

$g : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ を $g(n) = \dfrac{f(n)}{n}$ で定める.

Claim. g は減少しない.

Proof. $f^{k+1}(n) = ng(n)^k$ が成り立つ. f が増加することを考えると, 任意の $a < b$ に対して, $\dfrac{g(a)}{g(b)} < \left(\dfrac{b}{a}\right)^{1/k}$ となっているので, 後は $k \longrightarrow +\infty$ を考えればいい. □

Claim. $g(m) > 1 \Longrightarrow g(m) = g(m+1) = \cdots$.

Proof. $g(mg(m)^k) = g(m)$ で, $k \longrightarrow +\infty$ とすればいい. □

よって,

$$f(n) = \begin{cases} n & (n < N) \\ cn & (n \geqslant N) \end{cases} \quad (c, N \in \mathbb{Z}_{>0})$$

が必要なことが分かった.

コメント. 解がまず面白いですし, いい感じに整数論の議論が入ってきていてひとつの問題に複数の分野が混じっていて, 良い問題だと思います. あとは, 難易度が難し過ぎないところが良いなと思いました.

問題 4 (ISL 2013 A5)**.** Find all the functions $f : \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ satisfying the relation

$$f(f(f(n))) = f(n+1) + 1$$

for all $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

出典はこちら.

解答. $f(n) = \left\lfloor \dfrac{n}{4} \right\rfloor + i\left(n - 4\left\lfloor \dfrac{n}{4} \right\rfloor\right)$ $(i(0) = 1, i(1) = \varepsilon_1 + 2, i(2) = 3, i(3) = \varepsilon_3, \{\varepsilon_1, \varepsilon_3\} = \{0, 4\})$ だけであることを示す. これが与式をみたすことは明らかなので, これ以外にないことを示す.

Claim. $c = f(f(0)+1)+1$.

$$f^4(n) = n + c.$$

Proof.

$$f^4(n) = f(f(n+1)+1) = f(f(n)+1)+1$$

より従う. □

Claim.

$$f(n+c) = f(n) + c.$$

Proof.

$$f^5(n) = f(n+c) = f(n) + c$$

□

f に対して, $g : \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \to \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, h : \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \to S$ が一意に存在して次をみたす:

$$f(n) = cg(n) + h(n).$$

ここで, $S = \{0, \cdots, c-1\}$ とした.

$$g(n+c) = g(n) + 1, h(n+c) = h(n)$$

に注意する．

> **Claim.**
> $$h^4(r) = r, g(r) + g(h(r)) + g(h^2(r)) + g(h^3(r)) = 1 \ (r \in S)$$

Proof.

$$\begin{aligned} & cg(r) + cg(h(r)) + cg(h^2(r)) + cg(h^3(r)) + h^4(r) = f^4(r) = r + c \\ \Longrightarrow\ & c[g(r) + g(h(r)) + g(h^2(r)) + g(h^3(r)) - 1] = r - h^4(r) \end{aligned}$$

$c \mid r - h^4(r)$ であるが, $|r - h^4(r)| < c$ であるため, $h^4(r) = r$. もうひとつは, もう明らか. □

> **Claim.** $h_1(n) = h(n) + 1. T = S \setminus \{0\}$.
> $$h_1^2(l) = l, g(l) + g(h_1(l)) = 1,\ (l \in T)$$
> $$h_1^2(0) = c, g(0) = g(h_1(0)) = 0.$$

Proof.

$$\begin{aligned} & cg(h(r)) + cg(h^2(r)) + cg(h^3(r)) + h^4(r) = f^3(h(r)) = f(h(r) + 1) + 1 = cg(h_1(r)) + h_1^2(r) \\ \Longleftrightarrow\ & c[1 - g(r) - g(h_1(r))] = h_1^2(r) - r \end{aligned}$$

より従う. □

> **Claim.** $c = 4$

Proof. $g(r) = 1$ となる $r \in S$ の個数をふたつの方法で数える. $U = S \setminus \{h_1(0)\}$ とおく.

$$\{r \in S : g(r) = 1\} = \{r \in U : g(r) = 1\}$$

を使う. まずに, S 上に二項関係 $\sim_S$ を次のように定める:

$$x \sim_S y \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}_{>0}, x = h^n(y)$$

このとき, $\sim_S$ は同値関係である. また, $x = h^n(x)$ をみたす最小の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ は常に 4 である. したがって, $\#\{r \in S : g(r) = 1\} = \frac{c}{4}$. 次に, U 上に二項関係 $\sim_U$ を次のように定める:

$$x \sim_U y \Longleftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}_{>0}, x = h_1^n(y)$$

このとき, $\sim_U$ は同値関係である. また, $h_1(x) = x$ または $h_1(x) = c$ をみたす $x \in U$ は存在しない. したがって, $\#\{r \in U : g(r) = 1\} = \frac{c-2}{2}$. 以上より, $\frac{c}{4} = \frac{c-2}{2}$ つまり $c = 4$. □

> **Claim.** $h(0) = 1, h(1) = 2, h(2) = 3, h(3) = 0$

Proof. $h(0) = 0, 3$ は明らかにない. $h(0) = 2$ のとき. $4 = h_1^2(0) = h_1(3) = h(3) + 1$ より, $h(3) = 3$. これは不合理. あとは明らか. □

f は, $g(1) = 1$ の時と, $g(3) = 1$ の時のふたつしかない. これらはまぎれもなく, 最初に示した解のふたつである.

コメント. 難しそうな見た目ですが, やってることは普通ですね.

問題 5 (ISL 2010 A6)**.** Suppose that f and g are two functions defined on the set of positive integers and taking positive integer values. Suppose also that the equations $f(g(n)) = f(n)+1$ and $g(f(n)) = g(n)+1$ hold for all positive integers. Prove that $f(n) = g(n)$ for all positive integer n.

解答.

$$f(g^m(n)) = f(n) + m, f(g(n) + m) = f^{m+1}(n) + 1$$

$$f(g(f(n) + m - 1) - 1) = f(n) + m$$

$\min f = m_f, \min g = m_g . m_f \leqslant k, f(g(k) - 1) = k + 1 . m_g \leqslant l, g(f(l) - 1) = l + 1.$

$$m_f \leqslant a, b, g(a) = g(b) \Longrightarrow a = b$$

$$m_g \leqslant a, b, f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b$$