暗号杯 P5 の解答

kk2

2024 年 9 月 23 日

問題 1. $n>0$ は与えられた数．$f:\mathbf{R}_{>0}\to\mathbf{R}_{>0}$ であって，任意の $x,y\in\mathbf{R}_{>0}$ に対して，

$$f(xy^n+f(y)^{2n})=f(x)f(y)^n+y^nf(y)^n \qquad P(x,y)$$

が成り立つようなものをすべて求めよ．

解答． $f(x)=x$ は明らかに解になっていて，これが唯一の解であることを示す．

Claim. f は単射である．

Proof. 背理法で示す．$f(a)=f(b)=c, a<b$ をみたす $a,b\in\mathbf{R}_{>0}$ をとる．$P(a^nx,b)$ と $P(b^nx,a)$ より，

$$f(a^nb^nx+c^{2n})=f(a^nx)c^n+b^nc^n=f(b^nx)c^n+a^nc^n.$$

$x\mapsto\frac{x}{b^n}$ とすることで，

$$f\left(\frac{a^n}{b^n}x\right)=f(x)-(b^n-a^n).$$

繰り返し使うことで，任意の $m\in\mathbf{Z}_{>0}$ に対して，

$$f\left(\frac{a^{mn}}{b^{mn}}x\right)=f(x)-m(b^n-a^n).$$

m を十分大きくすることで，$f(x)<0$ となり，矛盾が生じる． □

Claim.

$$f(1)=1.$$

Proof. $P(x,1)$ より，$a=f(1)^n$ とおくと，

$$f(x+a^2)=af(x)+a. \tag{1}$$

$a\neq1$ を仮定して，背理法で示す．(1) を繰り返し使うことで，任意の $m\in\mathbf{Z}_{>0}$ に対して，

$$f(x+ma^2)=a^mf(x)+a(1+a+\cdots+a^{m-1})=a^mf(x)+\frac{a^{m+1}-a}{a-1}. \tag{2}$$

まず，$a>1$ の場合を考える．簡略化のため $b=a^{1/a^2}>1$ とおく．

補題 1. ある $M > 0$ が存在して，任意の $x > a^2$ に対して，

$$f(x) > Mb^x.$$

Proof.

$$f(x) > a^{\lceil x/a^2 \rceil - 1} \geq a^{-1} \cdot a^{x/a^2} \geq a^{-1} \cdot b^x.$$ □

補題 2. 任意の $r \in (0, a^2]$ に対して，ある $L > 0$ が存在して，任意の $x \in \mathbf{R}_{>0}$, $x \equiv r \mod a^2$ に対して，

$$f(x) < Lb^x.$$

Proof. $m = \lceil x/a^2 \rceil - 1$ とおくと，$x = r + a^2 m$ である．(2) より，

$$f(x) = a^m f(r) + \frac{a^{m+1} - a}{a - 1} = \left(f(r) + \frac{a - a^{1-m}}{a - 1} \right) a^m < \left(f(r) + \frac{a - a^{1-m}}{a - 1} \right) b^x.$$ □

さて，P の両辺を $y^n f(y)^n$ で割った式を考える：

$$\frac{f(xy^n + f(y)^{2n})}{y^n f(y)^n} = \frac{f(x)}{y^n} + 1. \tag{3}$$

(3) において，y を mod a^2 では一定のまま，$y \to \infty$ とすることを考える．補題 2 より，$L > 0$ がとれて，

$$y^n f(y)^n < L^n y^n b^{ny}. \tag{4}$$

また，補題 1 より，$M_0, M_1 > 0$ がとれて，

$$f(xy^n + f(y)^{2n}) > M_0 b^{xy^n + f(y)^{2n}} > M_0 b^{M_1^{2n} b^{2ny}}. \tag{5}$$

(4) と (5) より，

$$\frac{f(xy^n + f(y)^{2n})}{y^n f(y)^n} > \frac{M_0 b^{M_1^{2n} b^{2ny}}}{L^n y^n b^{ny}}.$$

よって，(3) の左辺は $+\infty$ に発散する．一方で，右辺は 1 に収束するため，矛盾が生じる．次に，$a < 1$ の場合を考える．同様にして，$b = a^{1/a^2} < 1$ とおく．

補題 3. 任意の $r \in (0, a^2]$ に対して，ある $M > 0$ が存在して，任意の $x \in \mathbf{R}_{>0}$ に対して，

$$\left| f(x) - \frac{a}{1 - a} \right| < Mb^x.$$

Proof. $m = \lceil x/a^2 \rceil - 1$ とおくと，$x = r + a^2 m$ である．(2) より，

$$\begin{aligned} f(x) &= a^m f(r) + \frac{a^{m+1} - a}{a - 1} \\ &= \frac{a}{1 - a} + a^m \left(f(r) - \frac{a}{1 - a} \right), \end{aligned}$$

$$\left| f(x) - \frac{a}{1 - a} \right| = a^m \left| f(r) - \frac{a}{1 - a} \right|.$$

$f(r)=\frac{a}{1-a}$ だと仮定すると，単射性に矛盾するから，$\left|f(r)-\frac{a}{1-a}\right|>0$ である．結局，

$$\left|f(x)-\frac{a}{1-a}\right|<b^x\cdot a^{-1}\left|f(r)-\frac{a}{1-a}\right|.$$ □

$r\in(0,a^2]$ をとって固定する．補題 3 より，$M>0$ がとれて，各 y に対して，$xy^n+f(y)^{2n}\equiv r \mod a^2$ となるように x をとることで，

$$\frac{a}{1-a}+Mb^{xy^n+f(y)^{2n}}>f(xy^n+f(y)^{2n})>y^nf(y)^n.$$

x はいくらでも大きくとれるから，

$$\frac{a}{1-a}>y^nf(y)^n.$$

これは $y\to\infty$ とすると，$f(y)\to 0$ だから，矛盾が生じる (補題 3 とか)． □

Claim. 任意の $x\in\mathbf{R}_{>0}$ に対して，

$$f(x+1)=f(x)+1.$$

Proof. $P(x,1)$ を見ればいい． □

Claim. 任意の $x,y\in\mathbf{R}_{>0}$ に対して，

$$f(x+y^n)=f(x)+f(y)^n. \tag{6}$$

Proof. $P(x,y),P(x+1,y)$ の比較により，

$$f(xy^n+f(y)^{2n}+y^n)=f(xy^n+f(y)^{2n})+f(y)^n.$$

x を置き換えることで，任意の $x>f(y)^{2n}$ に対して，

$$f(x+y^n)=f(x)+f(y)^n.$$

$x\le f(y)^{2n}$ に対しても，大きい $m\in\mathbf{Z}_{>0}$ をとることで，$x+m>f(y)^{2n}$ とすることができて，

$$f(x+y^n)=f(x+m+y^n)-m=f(x+m)+f(y)^n-m=f(x)+f(y)^n.$$ □

Claim. 任意の $x,y\in\mathbf{R}_{>0}$ に対して，

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

Proof. (6) で，$x=1$ とすれば，$f(y^n)=f(y)^n$．これを，(6) で使って，$y\mapsto y^{1/n}$ とすれば良い． □

Claim. 任意の $x\in\mathbf{R}_{>0}$ に対して，

$$f(x)=x.$$

Proof. 一般に，コーシーの関数方程式をみたし，空でなく 1 点でない区間上で，(少なくとも上か下かに) 有界であれば，線形である．$f(1)=1$ であることに注意すると，$f(x)=x$． □