

BINARNI BROJEVNI SUSTAV

Brojevni sustav s bazom brojanja **B** ima znamenke **0, 1, 2, ..., B-1**
Npr. u dekadskom sustavu **B=10**, a znamenke su **0, 1, 2, ..., 8 i 9**.

Ako je baza **B=2** dobiva se **binarni brojevni sustav**, čije znamenke su **0 i 1**.
Iz engleskog **BI**nary digi**T** nastalo je ime za najmanju količinu informacije **BIT**.

Primjer zapisivanja brojeva:

$$57_{10} = 5 * 10^1 + 7 * 10^0 = 1*2^5 + 1*2^4 + 1*2^3 + 0*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0 = 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1_2$$

Za binarno prikazivanje informacija je potreban najveći broj elemenata u usporedbi s ostalim prikazima, a broj bita za prikaz brojeva je iz tehničkih razloga ograničen.

Uređaji koji obrađuju i pohranjuju binarne informacije fizički se izvode pomoću elektroničkih elementa s 2 stabilna stanja (sklopka), koji su veoma brzi i jeftini.

Primjer 1.1:

Binarni broj tvore ostaci dijeljenja s 2, odozdo prema gore

$$\begin{array}{rcl} 57 : 2 = 28 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & & & & & & \\ 28 : 2 = 14 & & & & & & \\ \mathbf{0} & & & & & & \\ 14 : 2 = 7 & & & & & & \\ \mathbf{0} & & & & & & \\ 7 : 2 = 3 & & & & & & \\ \mathbf{1} & & & & & & \\ 3 : 2 = 1 & & & & & & \\ \mathbf{1} & & & & & & \\ 1 : 2 = 0 & & & & & & \\ \mathbf{1} & & & & & & \end{array}$$

Zadatak 1.1 :

Pretvorite decimalne brojeve u binarne:

- a) 37
- b) 89
- c) 4
- d) 126
- e) 298

Rješenja:

- a) 100101

- b) 1011001
- c) 100
- d) 1111110
- e) 100101010

Zadatak 1.2 :

Pretvorite binarne brojeve u decimalne:

- a) 1100
- b) 100100
- c) 1111111

Rješenja:

- a) $1100 = 2^3 + 2^2 = 8 + 4 = 12$
- b) $100100 = 2^5 + 2^2 = 32 + 4 = 36$
- c) $1111111 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 127$

ZBRAJANJE POZITIVNIH CIJELIH BINARNIH BROJEVA

Koristimo se istim tehnikama kao i kod decimalnih brojeva, vodeći računa da je 1 najveća znamenka koju možemo prikazati.

Primjer 1.2:

Zbrojite brojeve 9 i 5 koristeći registar s 4 bit-a.

$$(9)_{10} = 1\ 0\ 0\ 1$$

$$(5)_{10} = 0\ 1\ 0\ 1$$

$$\begin{array}{r}
 1\ 0\ 0\ 1 \\
 + 0\ 1\ 0\ 1 \\
 \hline
 1\ 1\ 1\ 0
 \end{array}$$

1 -----> prijenos nakon zbrajanja dvije jedinice

Zadatak 1.3 :

Izračunajte zadanu sumu:

- a) $11000100 + 110110$
- b) $1110 + 10101010$
- c) $11001100 + 110011$

Rješenja:

- a) 11111010
- b) 10111000
- c) 11111111

NEGATIVNI BINARNI BROJEVI

Registar je skup memorijskih elemenata koji pamte znamenke binarnog broja, što znači da je za određeno računalo unaprijed propisana dužina registra, a time i brojevno područje unutar kojeg se kreću brojevi.

Primjer 1.3:

Operacija $7 - 5$ u računalu s registrom od 4 bita obaviti će se kao $7 + (-5)$. Binarni prikaz broja -5 je sljedeći:

Pozitivni broj **0 1 0 1**

Komplement do baze-1 **1 1 1 1**
(jedinični komplement) - **0 1 0 1**
 1 0 1 0

Komplement do baze **1 0 1 0**
(dvojni komplement) + **0 0 0 1**
 1 0 1 1

Dokaz da je dobiveni broj -5

1 0 1 1 (-5)
+ **0 1 0 1** (+5)

 0 0 0 0

Preliv **1**

Operacija oduzimanja $7 - 5$

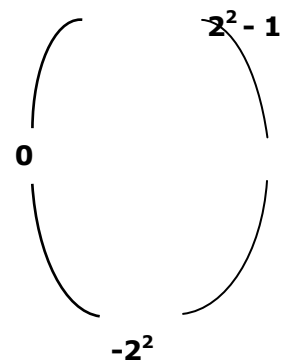
0 1 1 1 (7)
+ **1 0 1 1** (-5)

 0 0 1 0

Preliv **1**

U registru s 3 bita, ako je prvi bit predznak mogu se prikazati sljedeći brojevi:

Dekadski broj	Binarni broj
0	000
1	001
2	010
3	011
+1	
-4	100
-3	101
-2	110
-1	111



VAŽNO!!!!

Za $n=3$ dobije se interval $[-2^2, 2^2 - 1]$, općenito $[-2^{n-1}, 2^{n-1} - 1]$.

Za $n=8$ taj je interval $[-2^7, 2^7-1]$, tj. $[-128, 127]$.

NAPOMENA: Na stvarnom računalu se koristi brži algoritam za dobivanje dvojnog komplementa tako da se 0 zamjeni s 1 i 1 s 0. Dobivenom broju zatim dodajemo 1.

Primjer 1.4 :

Prikažite broj -12 u registru s 8 bita

Broj 12 predstavljen u 8-bitnom registru glasi:

0 0 0 0 1 1 0 0

Zamjenimo 0 i 1 i dobivamo:

1 1 1 1 0 0 1 1

Na kraju dodamo 1:

1 1 1 1 0 0 1 1

+ 1

1 1 1 1 0 1 0 0

Izračunata vrijednost predstavlja -12, zapisan u metodi dvojnog komplementa.

Dokaz:

Zbrojimo izračunatu vrijednost sa +12

1 1 1 1 0 1 0 0
+ 0 0 0 0 1 1 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0

Zadatak 1.4:

Prikaži zadane decimalne brojeve u 8-bitnom registru s predznakom

- a) 23
- b) -23
- c) -48
- d) -65

Rješenja:

- a) Kod prikaza pozitivnih binarnih brojeva u registru s predznakom broj se normalno zapisuje, a najviši bit u registru predstavlja predznak i ima vrijednost 0.

$$(23)_{10} = 1\ 0\ 1\ 1\ 1$$

Zapišimo rezultat u registar:

$$|0|0|0|1|0|1|1|1|$$

- b) Prilikom zapisa broja -23 u registar, pretvaramo njegovu apsolutnu vrijednost u binarni broj i na njemu primjenjujemo dvojni komplement.

$$(23)_{10} = 1\ 0\ 1\ 1\ 1$$

u 8 - bitnom registru je to:

$$|0|0|0|1|0|1|1|1|$$

Dvojni komplement:

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ + \qquad \qquad 1 \\ \hline 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1 \end{array}$$

Dakle u registru zapisujemo:

$$|1|1|1|0|1|0|0|1|$$

c) $1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0$

d) $1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1$

Zadatak 1.5:

Upotrebom aritmetike dvojnog komplementa, izračunajte vrijednosti slijedećih računskih operacija, koristeći registar s 8 bita.

- a) $-34 + (-12)$
- b) $17 - 15$
- c) $-22 - 7$
- d) $18 - (-5)$

Rješenja:

- a) Pretvorimo -34 i -12 u binarne brojeve upotrebom dvojnog komplementa:

$$\begin{array}{l} -34 = 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0 \\ -12 = 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0 \end{array}$$

Zbrojimo dobivene binarne brojeve:

$$\begin{array}{r}
 11011110 \\
 + 11110100 \\
 \hline
 111010010
 \end{array}$$

Vodeća znamenka 1 otpada jer imamo registar s 8 bita i u njega samo stane: 11010010. Dobiveni je broj negativan jer je vodeći bit 1.

Sada primjenimo dvojni komplement na rezultatu kako bismo mogli pročitati njegovu dekadsku vrijednost:

$$\begin{array}{r}
 00101101 \\
 + 1 \\
 \hline
 00101110 = (46)_{10}
 \end{array}$$

Rezultat zbrajanja je dekadski: -46

b) Oduzimanje $17 - 15$ možemo prikazati kao zbrajanje : $17 + (-15)$. Vrijednost -15 prikazujemo pomoću dvojnog komplementa i dobivamo:

$$\begin{array}{l}
 17 = 00010001 \\
 -15 = 11110001
 \end{array}$$

Zbrajanjem dobivamo:

$$\begin{array}{r}
 00010001 \\
 + 11110001 \\
 \hline
 100000010
 \end{array}$$

U registru se pohranjuje: 00000010. Dobiveni broj je pozitivan pa ne primjenjujemo dvojni komplement kako bi saznali pravu vrijednost. Dekadski je rezultat : 2

$$c) -22-7 = -22 + (-7)$$

Binarno se kao rezultat dobiva: 11100011.

Primjenimo dvojni komplement (vodeća znamenka 1, negativan broj) i rezultat je dekadski: -29

$$d) 18 - (-5) = 18 + 5 = (00010111)_2 = 23$$

Zadatak 1.6:

Odredite najveći i najmanji pozitivni cijeli broj koji se može smjestiti u registar sa 4, 8 i 16 bita.

Rješenje:

Kod zapisa pozitivnih cijelih brojeva, najmanja vrijednost koju možemo prikazati u sva 3 slučaja je 0.

Najveća vrijednost se na registru postavlja kada su sve lokacije postavljene na 1.

Za registar sa 4 bita: $1\ 1\ 1\ 1 = 15$

Za registar sa 8 bita: $1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 = 255$

Za registar sa 16 bita: $1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 = 65\ 535$

Općenito, za registar za n bita, najveći pozitivni cijeli broj koji se može pohraniti je: $2^n - 1$

Zadatak 1.7:

Odredite najveći i najmanji cijeli broj s predznakom koji se može smjestiti u registar sa 4, 8 i 16 bita, pod pretpostavkom da za prikaz negativnog broja koristite metodu dvojnog komplementa.

Rješenje:

Općenito, za registar s n bita u kojem je prvi bit predznak, važe slijedeći izrazi:

najmanji negativni broj koji se može prikazati = -2^{n-1}

za n=4, $-2^{4-1} = -2^3 = -8$

za n=8, $-2^{8-1} = -2^7 = -128$

za n=16, $-2^{16-1} = -2^{15} = -32768$

najveći pozitivni broj koji se može prikazati = $2^{n-1} - 1$

za n=4, $2^{4-1} - 1 = 2^3 - 1 = 7$

za n=8, $2^{8-1} - 1 = 2^7 - 1 = 127$

za n=16, $2^{16-1} - 1 = 2^{15} - 1 = 32767$

OKTALNI BROJEVNI SUSTAV

Baza sustava je **B=8** a znamenke su **0,1,2,3,4,5,6,7**.

Koristi se za skraćeno zapisivanje binarnih sadržaja kada je to spretno.

Primjer 1.5:

36-bitni broj	001	110	000	101	111	001	010	011	111	000	100	001
oktalni ekv.	1	6	0	5	7	1	2	3	7	0	4	1

HEKSADECIMALNI BROJEVNI SUSTAV

Baza sustava je **B = 16**, a znamenke su **0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F**. Koristi se za skraćeno zapisivanje binarnog sadržaja.

Primjer 1.6:

16-bitni broj	0111 1011 0011 1110
heksadecimalni ekvivalent.	7 B 3 E

Zadatak 1.8:

Odredite heksadecimalni prikaz za slijedeće brojeve.

- a) 67
- b) 142
- c) 1348

Rješenje:

- a) $(67)_{10} = (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1)_2 = (4\ 3)_{16}$
- b) $(142)_{10} = (1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0)_2 = (8\ E)_{16}$
- c) $(1348)_{10} = (1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0)_2 = (5\ 4\ 4)_{16}$

Zadatak 1.9:

Pretvorite heksadecimalne brojeve u decimalne.

- a) 1B
- b) A7
- c) 8CE

Rješenje:

- a) $1B = 1 \times 16 + 11 \times 1 = 27$
- b) $A7 = 10 \times 16 + 7 \times 1 = 167$
- c) $8CE = 8 \times 16^2 + 12 \times 16 + 14 = 2254$

RAZLOMLJENI BINARNI BROJEVI

Razlomljeni binarni brojevi sadrže "binarnu točku", analogno decimalnom zarezu, odnosno točki u anglo-američkoj notaciji.

Primjer prikaza razlomljenih brojeva:

$$\begin{aligned} 5.75_{10} &= 5 \times 10^0 + 7 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} = \\ &= 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} = 1\ 0\ 1 . 1\ 1_2 \end{aligned}$$

Primjer 1.7:

Pretvaranje decimalnog broja u binarni:

Cjelobrojni dio dekadskog broja pretvara se u binarni uzastopnim dijeljenjem, a decimalni uzastopnim množenjem s 2, gdje cjelobrojni dio dobivenih produkata tvori znamenke binarnog razlomka.

$$1.25 = 1 + .25$$

$.25 * 2$	1.01
0.50	
$.5 * 2$	
1.0	

Primjer pretvaranja decimalnih brojeva koji se ne mogu prikazati konačnim brojem binarnih frakcija:

$$13.3 = 13 + 0.3$$

$.3 * 2$	$1101.010011001\dots$
0.6	
$.6 * 2$	
1.2	
$.2 * 2$	
0.4	
$.4 * 2$	
0.8	
$.8 * 2$	
1.6	
$.6 * 2$	
1.2	
$!$	
$....$	

Treba uočiti da se konačni decimalni razlomak prikazuje kao beskonačni periodički binarni razlomak.

Binarni broj se množi s potencijama baze 2 tako da se binarna točka pomakne odgovarajući broj mjesta desno ili lijevo, zavisno da li je predznak potencije pozitivan ili negativan.

Na primjer, $1.11 * 2^2 = 111$

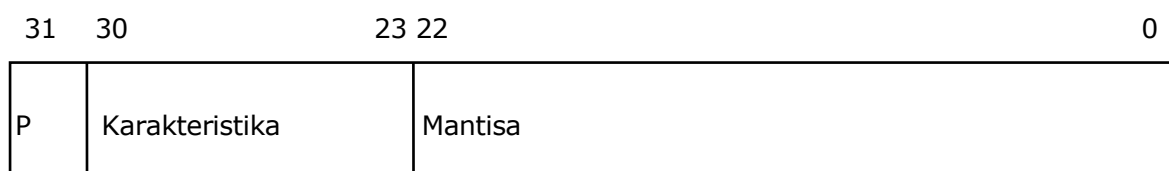
PRIKAZ REALNIH BROJEVA U RAČUNALU

Standardna točnost: 32 bita (4 byte)
Dvostruka točnost: 64 bita (8 byte)

REALNI BROJEVI STANDARDNE TOČNOSTI

Deklaracija u programskom jeziku C:
float

IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) standard 754 za prikaz realnih brojeva u standardnoj točnosti:



P	predznak (P=1 negativan, P=0 pozitivan)
Karakteristika	binarni eksponent + 127 (da se izbjegne prikaz negativnog eksponenta)
Mantisa	normalizirana (samo jedan bit ispred binarne točke).

Primjer 1.8:

Prikazati dekadski broj 5.75

$$5.75_{10} = 101.11_2 * 2^0 = 1.0111_2 * 2^2$$

Kako se normalizacijom svakog binarnog broja (osim nule) postiže oblik 1.xxxxx, vodeća jedinica ne pohranjuje se u računalu i naziva se **skrivenim bitom**. Time se štedi jedan bit što povećava točnost.

Predznak = 0 (pozitivan broj)		
Binarni eksponent = 2	→	K = 2 + 127 = 129 = (1000 0001) ₂
Mantisa (cijela)	1.0111	
Mantisa (bez skrivenog bita)	0111	
Rezultat:	0 10000001 011100000000000000000000	
ili	0100 0000 1011 1000 0000 0000 0000 0000	
	4 0 B 8 0 0 0 0	(heksadecimalno)

Primjer 1.9:

$2 = 10_2 * 2^0 = 1_2 * 2^1 = 0\ 100\ 0000\ 0000\ 0000 \dots 0000\ 0000 = 4000\ 0000\ \text{hex}$
 $P = 0, K = 1 + 127 = 128\ (10000000), M = (1.)\ 000\ 0000 \dots 0000\ 0000$
 $-2 = -10_2 * 2^0 = -1_2 * 2^1 = 1100\ 0000\ 0000\ 0000 \dots 0000\ 0000 = C000\ 0000\ \text{hex}$
 Jednako kao 2, ali $P = 1$
 $4 = 100_2 * 2^0 = 1_2 * 2^2 = 0\ 100\ 0000\ 1\ 000\ 0000 \dots 0000\ 0000 = 4080\ 0000\ \text{hex}$
 Jednaka mantisa, $BE = 2, K = 2 + 127 = 129\ (10000001)$

$6 = 110_2 * 2^0 = 1.1_2 * 2^2 = 0100\ 0000\ 1100\ 0000 \dots 0000\ 0000 = 40C0\ 0000\ \text{hex}$

$1 = 1_2 * 2^0 = 0011\ 1111\ 1000\ 0000 \dots 0000\ 0000 = 3F80\ 0000\ \text{hex}$
 $K = 0 + 127\ (01111111).$

$.75 = 0.11_2 * 20 = 1.1_2 * 2^{-1} = 0011\ 1111\ 0100\ 0000 \dots 0000\ 0000 = 3F40\ 0000\ \text{hex}$

Poseban slučaj - 0:

Normalizacijom broja 0 ne može se dobiti oblik 1.xxxxx

$0 = 0\ 0000000\ 0000 \dots$ tj. kao $1.0_2 * 2^{-127}$

Zadatak 1.10:

Prikažite zadane realne brojeve u standardnoj točnosti.

- a) 128
- b) -32,75
- c) 18.125
- d) 0.0625

Rješenja:

a) $128 = 2^7, P=0, BE=7, K = 134$, na mantisi su sve 0 budući nema decimalnog dijela

U registru imamo prikaz

P	K		M
0	1 0 0 0 0 1 1 0		000 0000 0000 0000 0000 0000

odnosno ako grupiramo bitove:

0100 0011 0000 0000 0000 0000 0000 0000

b) $-32,75 = -1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0,1\ 1 = -1,0000011 \times 2^5$

$P=1, BE=5, K = 132$

P	K		M
1	1 0 0 0 0 1 0 0		000 0011 0000 0000 0000 0000

grupiramo bitove:

1100 0010 0000 0011 0000 0000 0000 0000

c) 0100 0001 1001 0001 0000 0000 0000 0000

d) $0,0625 = 0,0001 = 1 \times 2^{-4}$

P=0, BE=-4, K = 123

0011 1101 1000 0000 0000 0000 0000 0000

Zadatak 1.11:

Koje su vrijednosti prikazane u 32-bitnom registru, postavljenom na standardnu točnost ?

a) 1 0 1 1 1 1 0 1 0 1 0 0 0000 0000 0000 0000 0000

b) 0 1 0 1 0 1 0 1 0 1 1 0 0000 0000 0000 0000 0000

c) 1 1 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 0000 0000 0000 0000 0000

d) 0 0 1 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0000 0000 0000 0000 0000

Rješenja:

a) P=1, K=(01111010)₂=122, K=BE+127 -> BE=-5

M= 100 0000 0000 0000

Na temelju izračunatih vrijednosti, zaključujemo da je riječ o broju:

$(1.1) \times 2^{-5} = -0.046875$

b) P=0, K=(1 0 1 0 1 0 1 0)₂=170, BE=170-127=43

M= 1 1 0 0000 0000 0000 0000 0000

Traženi broj je:

$(1.11)_2 \times 2^{43} = 1,5393162788864 \times 10^{13}$

c) $(-1.111)_2 \times 2^4 = -30$

d) $(1.0)_2 \times 2^{-10} = 0,0009765625$

RASPON I TOČNOST REALNIH BROJEVA

Za slučaj realnog broja standardne točnosti karakteristika (8 bita) se može nalaziti u intervalu [0,255].

K = 0 rezervirana je za prikaz nule

K = 255 rezervirana je za prikaz beskonačno velikog broja

Kako je $BE = K - 127$, BE se može kretati u intervalu $[-126, 127]$.

Najmanjši pozitivni broj različit od nule koji se može prikazati je:

$$1.0_2 * 2^{-126} \approx 1.175494350822 * 10^{-38}$$

a najveći je:

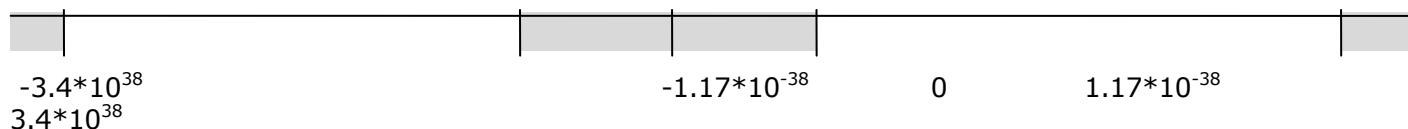
[illegible]

Točnost: 24 binarne znamenke

$$2^{24} \approx 10^x \rightarrow 24 \log 2 \approx x \log 10 \rightarrow x \approx \frac{24 \log 2}{\log 10} \approx 7.224719895936$$

tj. približno 7 prvih važećih točnih znamenki.

Prikaz pomoću brojevnog pravca:



NUMERIČKE POGREŠKE

Nemogućnost korištenja svih bita kod računanja

Primjer: $0.0001_{10} + 0.9900_{10}$

 $0.0001_{10} :$
$$(1.)10100011011011100010111_2 * 2^{-14}$$
 $0.9900_{10} :$
$$(1.)11111010111000010100011_2 * 2^{-1}$$

Kod zbrajanje, binarne točke moraju biti poravnate:

$$\begin{array}{r} .000000000000011010001101 * 2^0 \quad \text{Samo 11 od 24 bita!} \\ + .111111010111000010100011 * 2^0 \\ \hline .111111010111011100110000 * 2^0 = 0,9900999069214_{10} \end{array}$$

REALNI BROJEVI DVOSTRUKE TOČNOSTI

Deklaracija u programskom jeziku C:

double

63 62 52 51
0

P	Karakteristika (11 bita)	Mantisa
---	--------------------------	---------

P predznak (P=1 negativan, P=0 pozitivan)

Karakteristika binarni eksponent + 1023 (11 bita)

Mantisa normalizirana (52+1 bit).

Raspon:

K - [0,2047].

K = 0 rezervirana je za prikaz nule

K = 2047 rezervirana je za prikaz beskonačno velikog broja

BE = K - 1023

BE - [-1022,1023]

Najmanji pozitivni broj različit od nule koji se može prikazati je:

$$1.0_2 * 2^{-1022} \approx 2.225073858507 * 10^{-308}$$

a najveći je:

$$1.1111\dots11111_2 * 2^{1023} \approx 2^{1024} = 1.797693134862316 * 10^{308}$$

Točnost: 53 binarne znamenke

$$2^{53} \approx 10^x \rightarrow 53 \log 2 \approx x \log 10 \rightarrow x \approx 53 \log 2 \approx 15.95458977019$$

tj. približno 16 prvih važećih točnih znamenki.

Postoji još i:

long double 80 bita

Karakteristika: 15 bita

Binarni eksponent: Karakteristika - 16383

Realne konstante

1. 2.34 9e-8 8.345e+25
2f 2.34F -1.34e5f
1.L 2.34L -2.5e-37L

double
float
long double