Otoczka wypukła dla zbioru punktów w przestrzeni dwuwymiarowej

Dokumentacja projektu

Algorytmy geometryczne

K. Kafara
Ł. Czarniecki

Spis treści

Spis rysunków

Spis tablic

1 Informacje techniczne

1.1 Budowa programu

Program złożony jest z następujących modułów:

- *lib* – biblioteczny – zawiera zbiór pomocniczych funkcji i struktur danych wykorzystywanych przez algorytmy.
- *pure* – algorytmy w *czystej postaci* tj. nie posiadające części wizualizacyjnej.
- *vis* – algorytmy wraz z kodem odpowiadającym za wizualizację

Poniżej przedstawiamy dokładny opis zawartości poszczególnych modułów.

1.1.1 Moduł *lib*

Moduł zawiera w sobie następujące podmoduły:

1. *geometric_tool_lab.py* – narzędzie graficzne dostarczone w ramach przedmiotu *Algorytmy geometryczne*
2. *getrand.py* – zawiera funkcje generujące zbiory punktów różnych typów
3. *sorting.py* – zawiera implementację iteracyjnej wersji algorytmu *QuickSort* wykorzystywaną m.in w algorytmie Grahama
4. *stack.py* – zawiera klasę implementującą *stos*
5. *util.py* – zawiera szereg funkcji pomocniczych wykorzystywanych przez zaimplementowane algorytmy
6. *mytypes.py* – zawiera definicje typów stworzone w celu zwiększenia czytelności kodu

1.1.2 Moduł *pure*

Moduł zawiera w sobie następujące podmoduły:

1. *divide_conq.py* – implementacja algorytmu dziel i zwyciężaj
2. *graham.py* – implementacja algorytmu Grahama
3. *increase.py* – implementacja algorytmu przyrostowego
4. *jarvis.py* – implementacja algorytmu Jarvisa
5. *lowerupper.py* – implementacja algorytmu "górna-dolna"

1.1.3 Moduł *vis*

Moduł zawiera w sobie następujące podmoduły:

1. *divide_conq_vis.py* – implementacja algorytmu dziel i zwyciężaj wraz z kodem tworzącym wizualizację
2. *graham_vis.py* – implementacja algorytmu Grahama wraz z kodem tworzącym wizualizację
3. *increase_vis.py* – implementacja algorytmu przyrostowego wraz z kodem tworzącym wizualizację
4. *jarvis_vis.py* – implementacja algorytmu Jarvisa wraz z kodem tworzącym wizualizację
5. *lowerupper_vis.py* – implementacja algorytmu "górna-dolna"wraz z kodem tworzącym wizualizację

1.2 Wymagania techniczne

1. Python 3.8.3 64-bit lub nowszy wraz z modułami:
   - *matplotlib*
   - *numpy*
   - *json*
   - *csv*
   - *pprint*
2. Jupyter Notebook

1.3 Korzystanie z programu

1.3.1 Uruchomienie programu

W celu uruchomienia wizualizacji algorytmów należy uruchomić notebook (poprzez Jupyter Notebook) *program.ipynb*, oraz wykonywać kolejne komórki notatnika.

W celu uruchomienia pomiarow wydajności algorytmów należy przejść do sekcji *Pomiary czasu* wykonać pierwszą komórkę (z importami algorytmów) a następnie przeprowadzać testy i wyświetlać rezultaty w interesujących nas przypadkach.

2 Oznaczenia i definicje

Na potrzeby dalszych wywodów przyjmujemy w tym miejscu szereg oznaczeń i definicji:

def. 1. **Zbiorem wypukłym** nazwiemy dowolny podzbiór płaszczyzny taki, że dla każdych dwóch punktów do niego należących, odcinek je łączący również należy do tego zbioru.

def. 2. **Otoczką wypukłą** dowolnego zbioru punktów S płaszczyzny nazwiemy najmniejszy zbiór wypukły $CH(S)$ zawierający S.

Algorytmicznie otoczkę wypułką dowolnego zbioru S punktów płaszczyzny reprezentujemy jako ciąg punktów (wierzchołołków) $< v_1, v_2, \ldots, v_n >$ wielokąta wypukłego, gdzie $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ v_i jest poprzednikiem v_{i+1} (w kolejności wierzchołków przeciwnej do ruchu wskazówek zegara).

3 Problem

Wyznaczyć otoczkę wypukłą podanego zbioru punktów płaszczyzny dwuwymiarowej.

4 Algorytmy

4.1 Algorytm Grahama

W celu opisania sposobu działania algorytmu Grahama, definiujemy następującą relację $\preceq_Q$ określoną dla dowolnych dwóch punktów płaszczyzny P_1, P_2 względem wybranego i ustalonego punktu odniesienia Q.

$$P_1 \preceq_Q P_2 \Leftrightarrow (\angle(P_1, Q, OX) < \angle(P_2, Q, OX)) \vee (\angle(P_1, Q, OX) = \angle(P_2, Q, OX) \wedge d(P_1, Q) \leqslant d(P_2, Q))$$

gdzie $d(P, Q)$ oznacza odległość od siebie dwóch dowolnych punktów płaszczyzny.

Tak zdefiniowana relacja jest liniowym porządkiem (zwrotna, antysymetryczna, przechodnia i spójna).

4.1.1 Opis działania

1. Wyznaczamy najniższy punkt Q wyjściowego zbioru (jeżeli jest wiele o tej samej rzędnej – bierzemy ten o najmniejszej odciętej).

2. Ustawiamy go jako pierwszy element zbioru.

3. Sortujemy pozostałe punkty względem relacji $\preceq_Q$.

4. Usuwamy wszystkie, poza najbardziej oddalonym od Q, punkty leżące na półprostej QP, dla każdego P

5. Kładziemy pierwsze 3 punkty zbioru na stos S.

6. Iterujemy kolejno po punktach z posortowanego zbioru nie będących na stosie: Niech bieżącym punktem będzie P:

(a) Dopóki P nie jest po lewej stronie $S_{n-1}S_n$ wykonujemy (b)

(b) Uswamy punkt ze stosu.

(c) Dodajemy P na stos.

7. Zwracamy zawartość stosu.

4.1.2 Szczegóły

- Najniższy punkt wyjściowego zbioru (punkt 1) wyznaczamy w czasie liniowym, iterując po kolejnych punktach zbioru.
- Wszystkie punkty leżacej na jednej prostej, poza najbardziej oddalonym od Q usuwamy w czasie liniowym w następujący sposób: Iterując przez posortowaną tablicę, zaczynając od indeksu $i := 1$, zapamiętujemy ostatni indeks na który wstawialiśmy j (na początku $j := 1$). Jeżeli Q, P_i, P_{i+1} są współliniowe to $i := i+1$. Jeżeli nie są współliniowe to P_i wpisujemy na pozycję j, a następnie $j := j + 1$. Następnie, w dalszej części algorytmu posługujemy się częścią tablicy $[0, \ldots, j-1]$.

4.1.3 Złożoność

Operacją dominującą w algorytmie jest sortowanie – realizowane w czasie $O(n\,lgn)$. Wybór punktu najniższego, redukcja punktów współlinowych oraz iterowanie (punkt 6, zauważmy, że każdy punkt zbioru wyjściowego jest obsługiwany co najwyżej 2 razy – gdy jest dodawany do otoczki i gdy jest ewentualnie usuwany) są realizowane w czasie $O(n)$. Algorytm Grahama ma zatem złożoność $O(n\,lgn)$.

4.1.4 Kod

```python
def get_point_cmp(ref_point: Point, eps: float = 1e-7) -> Callable:
    def point_cmp(point1, point2):
        orient = orientation(ref_point, point1, point2, eps)

        if orient == -1:
            return False
        elif orient == 1:
            return True
        elif dist_sq(ref_point, point1) <= dist_sq(ref_point, point2):
            return True
        else:
            return False

    return point_cmp


def graham(points: ListOfPoints) -> ListOfPoints:
    istart = index_of_min(points, 1)

    points[istart], points[0] = points[0], points[istart]

```

```python
    qsort_iterative(points, get_point_cmp(points[0]))

    i, new_size = 1, 1
    while i < len(points):
        while (i < len(points) - 1) \
        and \
        (orientation(points[0], points[i], points[i + 1], 1e-7) == 0):
            i += 1

        points[new_size] = points[i]
        new_size += 1
        i += 1

    s = Stack()
    s.push(points[0])
    s.push(points[1])
    s.push(points[2])

    for i in range(3, new_size, 1):
        while orientation(s.sec(), s.top(), points[i], 1e-7) != 1:
            s.pop()

        s.push(points[i])

    return s.s[:s.itop+1]

```

4.2 Algorytm Jarvisa

4.2.1 Opis działania

1. Wyznaczamy najniższy punkt Q wyjściowego zbioru (jeżeli jest wiele o tej samej rzędnej – bierzemy ten o najmniejszej odciętej).
2. Dodajemy Q do zbioru punktów otoczki.
3. Przeglądamy punkty zbioru w poszukiwaniu takiego, który wraz z ostatnim punktem otoczki tworzy najmniejszy kąt skierowany względem ostatniej znanej krawędzi otoczki. Dla pierwszego szukanego punktu, kąt namierzamy względem poziomu.
4. Znaleziony punkt dodajemy do zbioru punktów otoczki, jeżeli jest różny od Q.
5. Powtarzamy punkty 3 i 4 tak długo aż znalezionym punktem nie będzie Q.
6. Zwracamy listę punktów otoczki.

4.2.2 Szczegóły

- Najniższy punkt wyjściowego zbioru (punkt 1) wyznaczamy w czasie liniowym, iterując po kolejnych punktach zbioru.
- W celu wyznaczenia punktu wyspecyfikowanego w punkcie 3. nie obliczamy wartości odpowiedniego kąta. Zamiast tego, równoważnie, wyznaczamy punkt P, który

wraz z ostatnim znanym punktem otoczki P_0 tworzy wektor $\overrightarrow{P_0P}$ dla którego wszystkie pozostałe punkty zbioru są po lewej stronie. Robimy to w czasie liniowym korzystając z znanych własności wyznacznika.

4.2.3 Złożoność

Zauważmy, że jeżeli otoczka jest k - elementowa, to główna pętla algorytmu (punkty 3–4) wykonuje się k-razy. Każdy krok pętli (znalezienie odpowiedniego punktu P) zajmuje czas liniowy. Pozostałe operacj w algorytmie zajmują co najwyżej czas liniowy. Zatem algrytm Jarvisa ma złożoność $O(nk)$.

4.2.4 Kod

```
def jarvis(points: ListOfPoints) -> ListOfPoints:
EPS = 1e-8

convex_hull = []

start_idx = index_of_min(points, 1)

convex_hull.append(start_idx)

rand_idx = 0 if start_idx != 0 else 1

prev = start_idx

while True:
    imax = rand_idx

    for i in range(len(points)):
        if i != prev and i != imax:
            orient = orientation(
                        points[prev],
                        points[imax],
                        points[i],
                        EPS
                    )
            if orient == -1:
                imax = i

            elif orient == 0 and \
                 (dist_sq(points[prev], points[imax]) < dist_sq(points[prev], points[i])):
                imax = i

    if imax == start_idx:
        break;

    convex_hull.append(imax)

    prev = imax

```

```
return points[convex_hull]

```

W ostatniej linii algorytmu, korzystamy z możliwości bibliteki *numpy*.

4.3 Algorytm górna-dolna

4.3.1 Opis działania

1. Sortujemy punkty rosnąco po odciętych (w przypadku rówych, mniejszy jest punkt o mniejszej rzędnej).
2. Pierwsze dwa punkty z posortowanego zbioru wpisujemy do zbioru punktów otoczki górnej oraz dolnej.
3. Iterujemy po zbiorze punktów zaczynając od $i = 2$ (trzeciego punktu), niech P będzie bieżącym punktem:
   (a) Dopóki górna (dolna) otoczka ma co najmniej 2 punkty i P nie znajduje się po prawej (lewej) stronie odcinka skierowanego utworzonego przez ostatniej dwa punkty otoczki (ostatni jest końcem odcinka), wykonujemy (b):
   (b) Usuwamy ostatni punkt z otoczki górej (dolnej).
   (c) Dodajemy P do punktów otoczki górnej (dolnej).
4. Odwracamy kolejność wierzchołków w otoczce dolnej.
5. Łączymy zbioru punktów otoczki górnej oraz dolnej.
6. Zwracamy złączony zbiór punktów otoczki.

4.3.2 Złożoność

Dominującą operacją w algorytmie jest sortowanie realizowane w czasie $O(n\,lgn)$. Każdy krok pętli (dla wyznaczania otoczki górnej oraz dolnej) zajmuje czas stały. Zauważmy, że podobnie do algorytmu Grahama każdy z punktów jest rozważany co najwyżej dwukrotnie – w momencie dodania do otoczki i przy ewentualnym usunięciu ze zbioru punktów otoczki. Pozostałe operacje realizowane są w czasie liniowym. Zatem algorytm "górna-dolna"ma złożoność $O(n\,lgn)$.

4.3.3 Kod

```
def lower_upper(point2_set: ListOfPoints) -> ListOfPoints:
if len(point2_set) < 3: return None

point2_set.sort(key = operator.itemgetter(0, 1))

upper_ch = [ point2_set[0], point2_set[1] ]
lower_ch = [ point2_set[0], point2_set[1] ]

```

```
for i in range( 2, len(point2_set) ):
    while len(upper_ch) > 1 and orientation(upper_ch[-2], upper_ch[-1],
   point2_set[i]) != -1:
        upper_ch.pop()

    upper_ch.append(point2_set[i])

for i in range(2, len(point2_set) ):
    while len(lower_ch) > 1 and orientation(lower_ch[-2], lower_ch[-1],
   point2_set[i]) != 1:
        lower_ch.pop()

    lower_ch.append(point2_set[i])

lower_ch.reverse()
upper_ch.extend(lower_ch)

return upper_ch
```

4.4 Algorytm przyrostowy

4.4.1 Opis działania

Ogólne sformułowanie algorytmu ma postać:

1. Dodajemy pierwsze 3 punkty do zbioru punktów otoczki.
2. Iterujemy po pozostałych punktach. Niech P będzie punktem bieżącym:
   (a) Jeżeli P nie należy do wnętrza obecnie znanej otoczki wykonumejmy (b) oraz (c).
   (b) Znajdujemy styczne do obecnie znanej otoczki poprowadzone przez punkt P.
   (c) Aktualizujemy otoczkę.
3. Zwracamy punkty otoczki.

Możemy go jednak sformułować inaczej, co pozwoli na uproszenie implementacji, przy zachowaniu takiego samego rzędu złożoności.

1. Sortujemy punkty rosnąco po odciętych (w przypadku rówych, mniejszy jest punkt o mniejszej rzędnej).
2. Dodajemy pierwsze 3 punkty do zbioru punktów otoczki, w takiej kolejności, aby były podane w kolejności odwrotnej do ruchu wskazówek zegara.
3. Iterujemy po pozostałych punktach. Niech P będzie punktem bieżącym:
   (a) Znajdujemy styczne do obecnie znanej otoczki poprowadzone przez punkt P.
   (b) Aktualizujemy otoczkę.
4. Zwracamy punkty otoczki.

Dzięki wstępnemu posortowaniu puntków, omijamy konieczność testowania należenia P do otoczki znanej w danym kroku algorytmu, ponieważ biorąc kolejny punkt mamy gwarancję, że nie należy on do wcześniej znanej otoczki.

4.4.2 Szczegóły

Wyznaczanie stycznych

4.4.3 Złożoność

Posortowanie punktów zajmuje $O(n\,lgn)$. Wydaje główna pętla programu wykonuje się w czasie $O(n)$, ponieważ możemy usunąć maksymalnie $k-3$ punkty (gdy k jest liczebnością zbioru punktów otoczki znaną w danej iteracji), ale zauważmy, że każdy z punktów usuwany jest co najwyżej raz. Wyszukanie stycznych w głównej pętli także zajmuje czas liniowy, więc główna pętla programu wykonuje się w czasie liniowym. Zatem złożoność algorytmu jest rzędu $O(n\,lgn)$

4.4.4 Kod

```
def rltangent(polygon: ListOfPoints, point: Point):
    n = len(polygon)

    right = index_of_max(polygon, cmp_idx=0)

    left = right

    left_orient = orientation(point, polygon[left % n], polygon[(left-1)%n])
    while left_orient != -1:
        if left_orient == 0 and dist_sq(point, polygon[left]) >= dist_sq(point, polygon[(left-1)%n]):
            break
        left = (left-1) % n
        left_orient = orientation(point, polygon[left % n], polygon[(left-1)%n])

    right_orient = orientation(point, polygon[right%n], polygon[(right+1)%n])
    while right_orient != 1:
        if right_orient == 0 and dist_sq(point, polygon[right]) >= dist_sq(point, polygon[(right+1)%n]):
            break
        right = (right+1)%n
        right_orient = orientation(point, polygon[right%n], polygon[(right+1)%n])


    return left, right


```

```
def increase_with_sorting(point2_set: ListOfPoints) -> Union[ListOfPoints, None]:
    if len( point2_set ) < 3: return None

    point2_set.sort(key = operator.itemgetter(0, 1))

    convex_hull = point2_set[:3]

    if orientation(convex_hull[0], convex_hull[1], convex_hull[2]) == -1:
        convex_hull[1], convex_hull[2] = convex_hull[2], convex_hull[1]

    for i in range(3, len( point2_set )):
        rltang = rltangent(convex_hull, point2_set[i])
        left_tangent_idx = rltang[0]
        right_tangent_idx = rltang[1]

        left_tangent_point = convex_hull[left_tangent_idx]
        right_tangent_point = convex_hull[right_tangent_idx]

        deletion_side: Literal[-1, 0, 1] = orientation(left_tangent_point, right_tangent_point, point2_set[i])

        if deletion_side != 0:
            lrlnext_orient = orientation(left_tangent_point, right_tangent_point, convex_hull[(left_tangent_idx + 1) % len(convex_hull)])
            if lrlnext_orient == deletion_side or lrlnext_orient == 0:
                step = 0
            else:
                step = -1

            left = (left_tangent_idx + 1) % len(convex_hull)

            while convex_hull[left % len(convex_hull)] != right_tangent_point:
                convex_hull.pop(left % len(convex_hull))
                left = (left + step) % len(convex_hull)

            convex_hull.insert(left % len(convex_hull), point2_set[i])
        else:
            convex_hull = [point2_set[left_tangent_idx], point2_set[i]]
    return convex_hull
```

4.5 Algorytm dziel i zwyciężaj

4.5.1 Opis działania

Prócz zbioru punktów, dodatkową daną wejściową dla algorytmu jest stała k oznaczająca liczebość zbioru punktów, przy której przechodzimy w algorytmie rekurencyjnym do przypadku bazowego – wyznaczamy otoczkę innym, wybranym algorytmem.

Opisany algorytm jest algorytmem rekurencyjnym. Przed pierwszym wywołaniem rekurencyjnym należy zbiór punktów posortować rosnąco po odciętych (w przypadku równych, mniejszy jest punkty o mniejszej rzędnej).

Jest to standardowe zastosowanie metody "*dziel i zwyciężaj*":

1. Dzielimy wyjściowy problem na mniejsze tak długo, aż znajdujemy się w przypadku któryi potrafimy rozwiązać elementarnie / w inny sposób.
2. Łączymy kolejne rozwiązania częściowe w całość.

Popatrzmy na schemat działania:

1. Jeżeli liczebność rozważanego zbioru jest mniejsza bądź równa danej stałej k, to:
   (a) Wyznaczamy otoczkę rozważanego zbioru punktów, za pomocą innej metody (np. innego algorytmu wyznaczania otoczki).
   (b) Zwracamy tak uzyskaną otoczkę.
2. W przeciwnym przypadku:
   (a) Wywołujemy się rekurencyjnie na zbiorze punktów o odciętych mniejszych od mediany.
   (b) Wywołujemy się rekurencyjnie na zbiorze punktóœ o odciętych większych bądź równych medianie.
   (c) Łączymy lewą i prawą otoczkę (pozyskane z wywołań rekurencyjnych) w jedną.
   (d) Zwracamy tak uzyskaną otoczkę.

4.5.2 Szczegóły

- Do wyznaczania otoczki w przypadku podstawowym wykorzystany został algortym Jarvisa, ponieważ dla $k << n$ ma on złożoność właściwie liniową.
- Sposób łączenia otoczek jest następujący:
  1. Wyznaczamy skrajny prawy punkt L lewej otoczki oraz skrajny lewy P punkt prawej otoczki.
  2. Dopóki L i P nie tworzą górnej stycznej, "wychodzimy w góręńaprzemiennie punktami L i P.
  3. Analogicznie wyznaczamy dolną styczną.
  4. Usuwamy punkty zawierające się we wnętrzu nowo utworzonej otoczki.

4.5.3 Złożoność

- Początkowe sortowanie: $O(nlgn)$
- Rekurencja: $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + O(n) \implies T(n) = O(nlgn)$
- Każde łączenie otoczek: $O(n)$

Algorytm dziel i zwyciężaj ma zatem złożoność $O(nlgn)$

4.5.4 Kod

```python
def merge_convex_hulls(left_convex_hull: ListOfPoints, right_convex_hull: ListOfPoints) -> List[Point]:
    left_ch_size = len(left_convex_hull)
    right_ch_size = len(right_convex_hull)

    # znajdujemy prawy skrajny punkt lewej otoczki
    left_ch_rightmost_idx = index_of_max(left_convex_hull, cmp_idx=0)
    right_ch_leftmost_idx = index_of_min(right_convex_hull, cmp_idx=0)

    left = left_convex_hull[left_ch_rightmost_idx]
    right = right_convex_hull[right_ch_leftmost_idx]
    left_idx = left_ch_rightmost_idx
    right_idx = right_ch_leftmost_idx

    left_flag, right_flag = True, True
    while   orientation(left, right, right_convex_hull[(right_idx - 1) % right_ch_size]) != -1 and right_flag\
            or \
            orientation(right, left, left_convex_hull[(left_idx + 1) % left_ch_size]) != 1 and left_flag:

        left_flag, right_flag = False, False

        # podnosimy punkt na prawej otoczce
        left_right_orient = orientation(left, right, right_convex_hull[(right_idx - 1) % right_ch_size])
        while left_right_orient != -1:
            if left_right_orient == 0 and dist_sq(left, right) >= dist_sq(left, right_convex_hull[(right_idx - 1) % right_ch_size]):
                right_flag = False
                break

            right_idx = (right_idx - 1) % right_ch_size
            right = right_convex_hull[right_idx]
            left_right_orient = orientation(left, right, right_convex_hull[(right_idx - 1) % right_ch_size])
        else:
            right_flag = True

        # podnosimy punkt na lewej otoczce
        right_left_orient = orientation(right, left, left_convex_hull[(left_idx + 1) % left_ch_size])
        while right_left_orient != 1:
            if right_left_orient == 0 and dist_sq(right, left) >= dist_sq(right, left_convex_hull[(left_idx + 1) % left_ch_size]):
                left_flag = False
                break

            left_idx = (left_idx + 1) % left_ch_size
            left = left_convex_hull[left_idx]
            right_left_orient = orientation(right, left, left_convex_hull[(left_idx + 1) % left_ch_size])
```

```
        else:
            left_flag = True


    upper_tangent_left_idx = left_idx
    upper_tangent_right_idx = right_idx

    # dolna styczna
    left = left_convex_hull[left_ch_rightmost_idx]
    right = right_convex_hull[right_ch_leftmost_idx]
    left_idx = left_ch_rightmost_idx
    right_idx = right_ch_leftmost_idx

    left_flag, right_flag = True, True
    while   orientation(left, right, right_convex_hull[(right_idx + 1) % right_ch_size]) != 1 and right_flag \
            or \
            orientation(right, left, left_convex_hull[(left_idx - 1) % left_ch_size]) != -1 and left_flag:

        left_flag, right_flag = False, False

        # opuszczamy punkt na prawej otoczce
        left_right_orient = orientation(left, right, right_convex_hull[(right_idx + 1) % right_ch_size])
        while left_right_orient != 1:
            if left_right_orient == 0 and dist_sq(left, right) >= dist_sq(left, right_convex_hull[(right_idx + 1) % right_ch_size]):
                right_flag = False
                break

            right_idx = (right_idx + 1) % right_ch_size
            right = right_convex_hull[right_idx]
            left_right_orient = orientation(left, right, right_convex_hull[(right_idx + 1) % right_ch_size])
        else:
            right_flag = True

        # opuszczamy punkt na lewej otoczce
        right_left_orient = orientation(right, left, left_convex_hull[(left_idx - 1) % left_ch_size])
        while right_left_orient != -1:
            if right_left_orient == 0 and dist_sq(right, left) >= dist_sq(right, left_convex_hull[(left_idx - 1) % left_ch_size]):
                left_flag = False
                break

            left_idx = (left_idx - 1) % left_ch_size
            left = left_convex_hull[left_idx]
            right_left_orient = orientation(right, left, left_convex_hull[(left_idx - 1) % left_ch_size])
        else:
            left_flag = True

```

```python

    lower_tangent_left_idx = left_idx
    lower_tangent_right_idx = right_idx

    merged_convex_hull = [ ]

    while upper_tangent_left_idx != lower_tangent_left_idx:
        merged_convex_hull.append(left_convex_hull[upper_tangent_left_idx])
        upper_tangent_left_idx = (upper_tangent_left_idx + 1) % left_ch_size
    else:
        merged_convex_hull.append(left_convex_hull[lower_tangent_left_idx])


    while lower_tangent_right_idx != upper_tangent_right_idx:
        merged_convex_hull.append(right_convex_hull[lower_tangent_right_idx])
        lower_tangent_right_idx = (lower_tangent_right_idx + 1) % right_ch_size
    else:
        merged_convex_hull.append(right_convex_hull[lower_tangent_right_idx])

    return merged_convex_hull


def divide_conq(point2_set: List[Point], k: int = 2) -> Union[List[Point], None]:
    if len(point2_set) < 3 or k <= 0: return None


    def divide_conq_rec(point2_set: List[Point]) -> List[Point]:
        if len(point2_set) <= 2: return point2_set
        elif len(point2_set) <= k: return jarvis(np.array(point2_set))

        left_convex_hull = divide_conq_rec(point2_set[ : len(point2_set) // 2])
        right_convex_hull = divide_conq_rec(point2_set[len(point2_set) // 2 : ])

        return merge_convex_hulls(left_convex_hull, right_convex_hull)

    point2_set.sort(key = operator.itemgetter(0, 1))

    return divide_conq_rec(point2_set)
```

4.6 Algorytm Chana

4.6.1 Opis działania

Główna część algorytmu Chana składa się się z dwóch części:

1. Pierwsza, która składa się na :

    - Podział zbioru punktów Q na podzbiory Q_i o w miarę równych ilościach punktów w nich zawartych, z czego żaden nie zawiera więcej niż dane m.
    - Wyznaczenie otoczek C_i

2. Druga polega na wykonaniu algorytmu na wzór Jarvisa, tylko na otoczkach. Dokładniej mówiąc:
    - Startujemy z najniższy wierzchołkeim z całego zbioru Q i dodajemy go do finalnej otoczki jako pierwszy wierzchołek.
    - Dla każdego punktu należącego do otoczki, możemy znaleźć jego następnego sąsiada w otoczce idąc w kolejności przeciwnej do ruchu wskazóek zegara. Aby to zrobić należy wybrać spośród zbioru punktów utworzonego z: punktów tworzących prawą styczną z otoczkami C_i dla rozważanego wierzchołka, kolejnego punktu podotoczki do której dany punkt należy taki wierzchołek, że wszystkie inne wierzchołki z tego zbioru są na lewo od niego.
    - W ten sposób wyznaczamy kolejne wierzchołki otoczki, dopóki następnym wierzchołkiem otoczki nie jest jej pierwszy punkt. Wtedy otoczka jest pełna i kończymy algorytm.

3. Zwracamy punkty otoczki.

Jednakże nadżędną istotą powyższego algorytmu jest to, że wykona się on w drugiej części w co najwyżej m krokach(dany rozmiar podzbioru). Inaczej mówiąc m musi być większe bądź równe(w idealnym przypadku) liczbie punktów należących do otoczki k. Jeśli wykonamy m kroków i wciąż nie mamy otoczki, to przerywamy algorytm. I próbujemy z większym m. Aby nie popsóć złożoności dużą ilością powtórzeń głównej części algorytmu najlepiej za każdym razem parametr m podnosić do kwadratu. W przypadku gdy m¿=n po prustu za m przyjmujemy n. Wtedy algorytm chana sprowadza się do algorytmu Grahama.

4.6.2 Szczegóły

4.6.3 Złożoność

Złożoność głównej części algorytmu.

- Złożoność pierwsszej części składa się na :
    - Podział zbioru punktów na podzbiory $O(n)$;
    - Wyznaczenie otoczek dla podzbiorów. Mamy $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ podzbiorów rozmiaru m, dla każdego z nich wyznaczamy otoczkę algorytmem Grahama. Algorytm Grahama działa $O(nlog(n))$. Więc łącznie mamy O(ceil(n/m)*mlog(m))= $O(nlog(m))$.

  Łącznie dla pierewszej części mamy O(nlog(m)), gdzie m jest wybranym maksymalnym rozmiarem podzbiorów.

- Złożoność drugiej części składa się na :
  - Wyznaczenie następnego punktu dla każdego punktu z otoczki głównej o rozmiarze k
  - Wyznacznie następnego punktu składa się na wyznaczenie dla każdej z m podotoczek stycznej do tej podotoczki. Styczną wyznaczamy binary searchem w czasie $O(log(m))$ (otoczka C_i ma co najwyżej m wierzchołków). Otoczek jest $\lceil (n/m) \rceil$, a zatem czas wyznaczenia kolejngo wierzchołka otoczki to $O(\lceil (n/m) \rceil log(m))$.

  Zakładając, że liczba wierzchołków otoczki $k \leqslant m$(gdy $k > m$ przerywamy algorytm, więc złożoność pozostaje ta sama), to ostatecznie mamy złożoność dla drugiej części rzędu : $O(k \lceil (n/m) \rceil log(m)) = O(nlog(m))$w idealnym przypadku $O(nlog(k))$

Cała złożoność głównej części algorytmu, to $O(nlog(m))$, gdzie m jest wybraną wielkości podzbioru. Złożonośc algorytmu dla próbowania algorytmu z kolejnymi m postaci 2^{2^m} dla $m \geqslant 1$, to: w takim razie złożoność można opisać wzorem $\sum_{t=1}^{\lceil loglogk \rceil} O(nlog(2^{2^t})) = O(n * 2^{1+\lceil loglogk \rceil}) = O(nlogk)$

4.6.4 Kod

```
from divide import *
from det import *
from tangentBothsides import *

def compr(p, q, current,
          accur=10 ** (-6)):  # jezeli p jest po prawej  odcinka [current,q] - jest 'wiekszy', to zwracamy 1
    if det(current, p, q) > accur:
        return -1
    elif det(current, p, q) < accur:
        return 1
    else:
        return 0

def nextvert(C, curr):  # dla danego punktu wspolzednymi z Q[i][j] jesli jest to punkt nalezacy do finalnej otoczki, to
    # zwraca nastepny punkt nalezacy do finalnej otoczki zadanego w takich samych wspolzednych Q[nxt[0]][nxt[1]]
    i, j = curr
    nxt = (i, (j + 1) % len(C[i]))
    for k in range(len(C)):
        t = tangent(C[i][j], C[k])
        if t != None and k != i and compr(C[nxt[0]][nxt[1]], C[k][t], C[i][j]) > 0 and (k, t) != (curr):
            nxt = (k, t)

    return nxt

```

```python
def chanUtil(points, m):
    Q = divide(points, m)
    C = []
    for i in range(len(Q)):
        C.append(Graham(Q[i]))

    curr = (0, 0)
    ans = []
    i = 0
    while i < m:
        ans.append(C[curr[0]][curr[1]])
        if nextvert(C, curr) == (0, 0):
            return ans
        curr = nextvert(C, curr)
        i += 1

    return None

def chan(points):
    n = len(points)
    m = 4
    hoax = None
    while hoax == None:
        hoax = chanUtil(points, m)
        m = min(n, m * m)

    return hoax
```

4.7 Algorytm QuickHull

4.7.1 Opis działania

Algorytm QuickHull polega na rekurencyjnym wyznaczaniu kolejnych punktów otoczki.

1. Algorytm rozpoczynamy od wyznaczenie dwóch punktów skrajnych a,b - tj. o najmniejszej i największej współżędnej x-owej.
2. Następnie uruchamiamy funkcję rekurencyjnego znajdowania łuku należącego do otoczki między danym punktami należącymi do tej otoczki p,q na prawo od odcinka —p,q—. Otoczką jest suma punktów a, wyniku działania funkcji rekurencyjnej dla odcinka —a,b—,b oraz wyniku działania funkcji rekurencyjnej dla —b,a—
3. Funkcja rekurencyjnego wyznaczenia łuku należącego do otoczki między punktami p i q polega na :
    - Wyznaczeniu nabardziej oddalonego punktu na prawo od —p,q— jeśli są punkty po prawej.
    - Jeśli nie ma takich punktów, to takiego łuku nie ma i zwracamy pustą tablicę.
    - W przeciwnym przypadku p,q należą do otoczki, to wyznaczony punkt skrajny r musi należeć do otoczki.
    - Skoro p,k,r należy do otoczki, to wszystkie wierzchołki wewnątrz trójkąta pkr napewno do najmniej nie należą - usuwamy je.

- Szukany łuk, to suma działania tej samej funkcji dla punktów p,r, punktu r , oraz wyniku tej funkcji dla punktów r,q w zadanej kolejności.
- Na koniec zwracamy wyznaczony w ten sposób łuk.

4.7.2 Szczegóły

- Rozpatrywane punkty p,q,r zawsze są podane w kolejności przeciwnej do ruchu wskazówek zegara. Aby usunąć punkty wewnątrz takich trójkątów należy dla każdego punktu z rozważanych sprawdzić, należy do danego trójkąta.
- Sprawdzenie, czy dany punkt należy do trójkąta pkr wykonujemy poprzez sprawdzenie, czy dla każdego z odcinków pr, rq, qp dany punkt znajduje się na lewo od tego odcinka, bądź jest z nim współliniowy.
- Porównywanie odległości punktów r znajdujących się na prawo od odcinka pq wykonujemy za pomocą wyznacznika. Jest on wprostproporcjonlny do pola trójkąta rozpiętego na wektorach pq,pr. Ponieważ odcinek pq ma stałą długość dla każdego r, to wyznacznik ten jest wprostproporcjonalny do wysokości tego trójkąta opuszczonej na bok pq - odległości punktów.

4.7.3 Złożoność

Pesymistyczna złożoność algorytmu to $O(n^2)$ - gdy wszystkie punkty zbioru znajdują się w otoczce. Jendakże w średnim przypadku złożoność wynosi $O(nlogn)$

4.7.4 Kod

```
from copy import deepcopy
from lib.det import *

def furthest(a, b, considering):
    n = len(considering)
    i = 0
    ans = None
    while i < n:
        if det(a, b, considering[i]) < 0:  # rozwazany wierzcholek jest po prawej stronie ab
            if ans == None or det(a, b, considering[i]) < det(a, b,
                                                               ans):  # |det(a,b,c)| = 1/2|ab|*h, gdzie h jest wysokoscia z c na ab
                ans = considering[i]
        i += 1
    return ans


def insideTriangle(a, b, c, i):
    accur=10**(-7)
    if det(a, b, i) > -accur and det(b, c, i) > -accur and det(c, a, i) > -accur:
```

```
            return True
        return False


    def removeInner(a, b, c, considering):
        new=[]
        for i in considering:
            if not insideTriangle(a, b, c, i):
                new.append(i)
        considering.clear()
        considering+=new

    def quickHullUtil(a, b, considering):
        if len(considering) == 0:
            return []

        c = furthest(a, b, considering)
        if c == None:
            return []
        considering.remove(c)

        removeInner(a, c, b, considering)
        return quickHullUtil(a, c, considering) +[c]+ quickHullUtil(c, b, considering)


    def quickHull(points):
        a = min(points, key=lambda x: x)
        b = max(points, key=lambda x: x)

        considering = deepcopy(points)

        considering.remove(a)
        considering.remove(b)
```

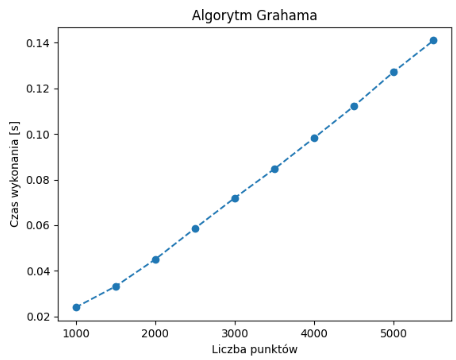
5 Wydajność algorytmów

Testy prowadzone były na następujących zbiorach:

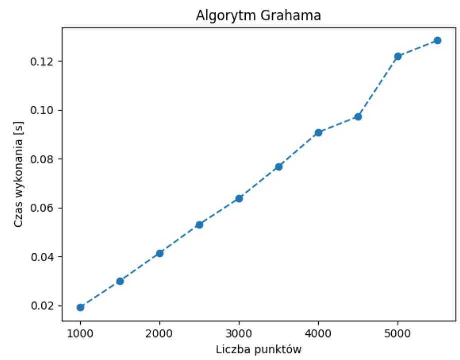
- Testy odbywały się na 4-rech typach zbiorów:
  - typ A - losowo rozłożone punkty płaszczyzny o określonych zakresach współrzędnych
  - typ B - losowo rozłożone punkty leżące na okręgu o zadanych parametrach
  - typ C - losowo rozłożone punkty leżące na bokach prostokąta o zadanych parametrach
  - typ D - losowo rozłożone punkty leżące na 2 bokach kwadratu, umiejscowionego tak, że te dwa boki pokrywają sie z osiami układu oraz na jego przekątnych

Tablica 1: Czas wykonania algorytmu Grahama w zależności od typu zbioru testowego oraz mocy zbioru punktów.

	Liczba punktów									
	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500
Typ zbioru	Czas wykonania [s]									
A	0.0239	0.0331	0.045	0.0586	0.072	0.0847	0.0983	0.1122	0.1273	0.141
B	0.0191	0.0299	0.0413	0.0531	0.0637	0.0768	0.0908	0.0973	0.122	0.1284
C	0.069	0.1115	0.1392	0.1878	0.2349	0.2736	0.3153	0.351	0.3988	0.4601
D	0.4256	0.6523	0.924	1.2255	1.4233	1.8752	1.9285	2.3207	2.5692	2.88



Rysunek 1: Zbiór typu A, algorytm Grahama



Rysunek 2: Zbiór typu B, algorytm Grahama

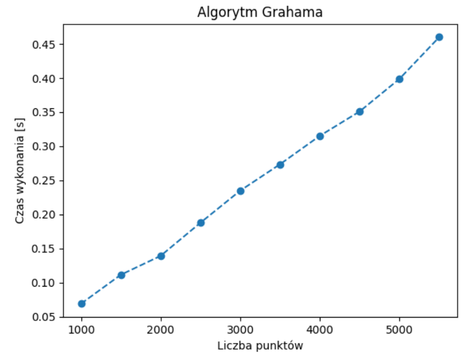
Charakterystyki zbiorów zostały dobrane w taki sposób aby odzwierciedlać możliwie różne zachowanie się poszczególnych algorytmów w zależności od ilości przypadków zdegenerowanych (liczebność współliniowych otoczek), ilości potrzebnych do wykonania porównań i operacji. Bardziej szczegółowe omówienie charakterystyki algorytmów dla poszczególnych zbiorów znajduje się w kolejnych sekcjach.

5.1 Algorytm Grahama

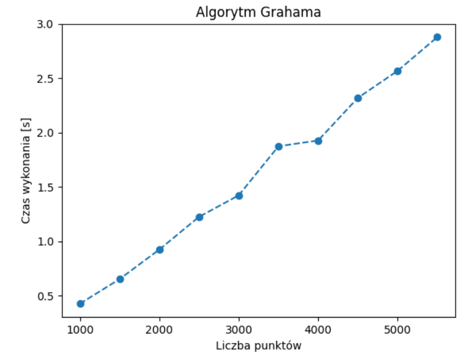
W tabeli 1 przedstawiamy czasy uzyskane przez algorytm Grahama dla kolejnych zbiorów punktów, przy różnej liczebności punktów w zbiorze. Na wykresach 1, 2, 3, 4 widzimy ilustrację danych z tabeli 1.

5.2 Algorytm górna-dolna

W tabeli 2 przedstawiamy czasy uzyskane przez algorytm górna-dolna dla kolejnych zbiorów punktów, przy różnej liczebności punktów w zbiorze. Na wykresach 5, 6, 7, 8 widzimy ilustrację danych z tabeli 2.



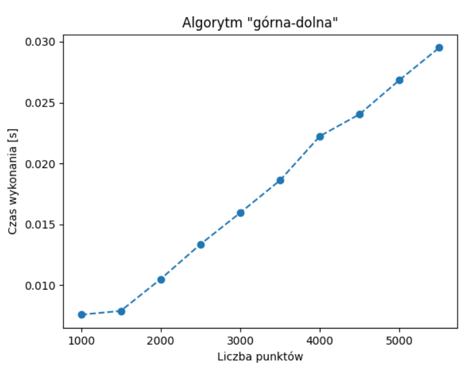
Rysunek 3: Zbiór typu C, algorytm Grahama



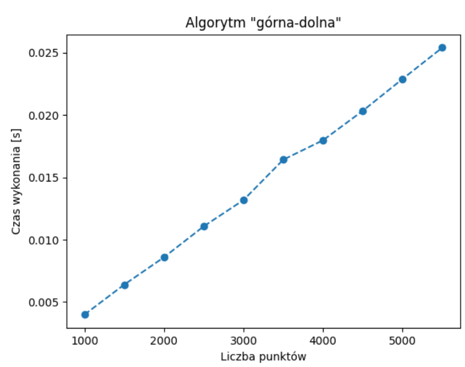
Rysunek 4: Zbiór typu D, algorytm Grahama

Tablica 2: Czas wykonania algorytmu górna-dolna w zależności od typu zbioru testowego oraz mocy zbioru punktów.

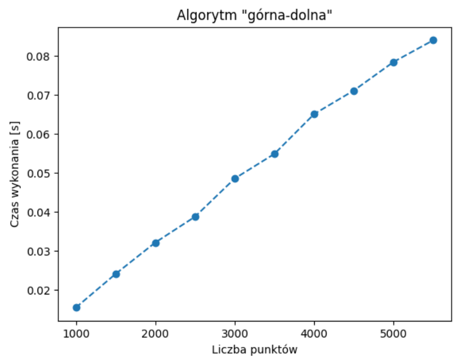
	Liczba punktów									
	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500
Typ zbioru	Czas wykonania [s]									
A	0.0076	0.0079	0.0105	0.0134	0.016	0.0186	0.0222	0.0241	0.0269	0.0295
B	0.004	0.0064	0.0086	0.0111	0.0132	0.0164	0.018	0.0203	0.0229	0.0254
C	0.0155	0.0241	0.0321	0.0388	0.0486	0.0549	0.0651	0.0711	0.0784	0.084
D	0.0635	0.0927	0.1261	0.1566	0.1875	0.2217	0.259	0.2897	0.316	0.3495



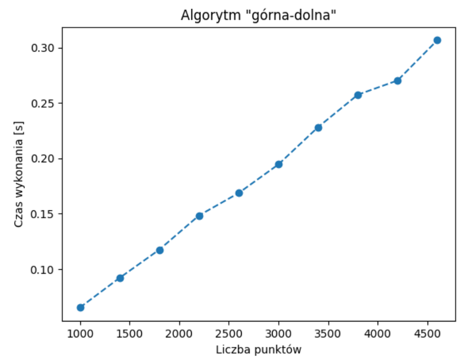
Rysunek 5: Zbiór typu A, algorytm górna-dolna



Rysunek 6: Zbiór typu B, algorytm górna-dolna



Rysunek 7: Zbiór typu C, algorytm górna-dolna



Rysunek 8: Zbiór typu D, algorytm górna-dolna

Tablica 3: Czas wykonania algorytmu Chana w zależności od typu zbioru testowego oraz mocy zbioru punktów.

	Liczba punktów									
	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500
Typ zbioru	Czas wykonania [s]									
A	0.1055	0.1544	0.3575	0.2408	0.5449	0.6155	0.7104	0.7904	0.8621	0.9826
B	0.3714	0.5483	0.6962	0.8893	1.0799	1.2537	1.415	1.827	1.7746	1.9095
C	0.2457	0.5615	0.727	0.9188	1.1007	1.3044	1.5073	1.6875	1.88	2.1234
D	0.6322	0.9372	1.2306	2.1543	2.8556	6.0844	2.4157	3.943	3.094	4.7075

5.3 Algorytm Chana

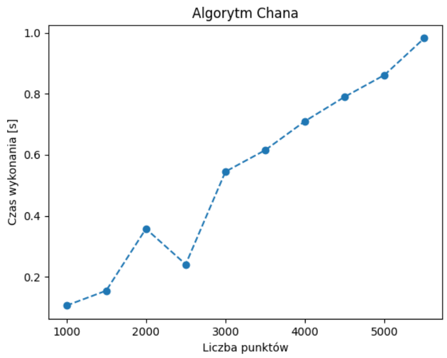
W tabeli 3 przedstawiamy czasy uzyskane przez algorytm Chana dla kolejnych zbiorów punktów, przy różnej liczebności punktów w zbiorze. Na wykresach 9, 10, 11, 12 widzimy ilustrację danych z tabeli 3.

5.4 Algorytm QuickHull

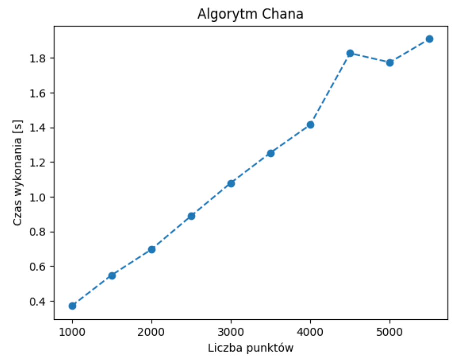
W tabeli 4 przedstawiamy czasy uzyskane przez algorytm QuickHull dla kolejnych zbiorów punktów, przy różnej liczebności punktów w zbiorze. Na wykresach 13, 14, 15, 16 widzimy ilustrację danych z tabeli 4.

5.5 Algorytm dziel i zwyciężaj

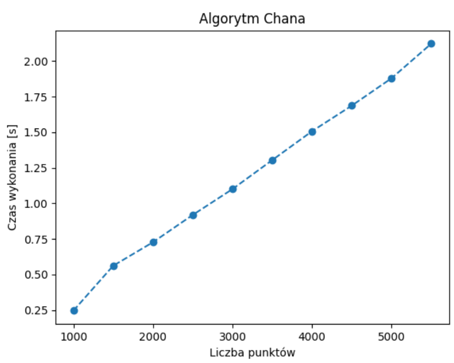
W tabeli 5 przedstawiamy czasy uzyskane przez algorytm Dziel i zwyciężaj dla kolejnych zbiorów punktów, przy różnej liczebności punktów w zbiorze. Na wykresach 17, 18, 19, 20 widzimy ilustrację danych z tabeli 5.



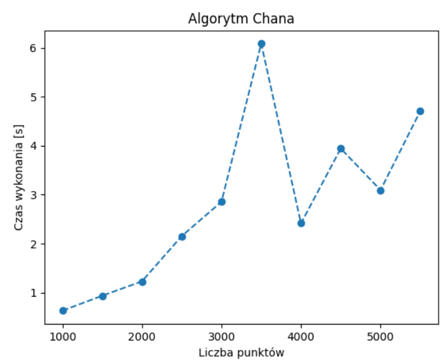
Rysunek 9: Zbiór typu A, algorytm Chana



Rysunek 10: Zbiór typu B, algorytm Chana



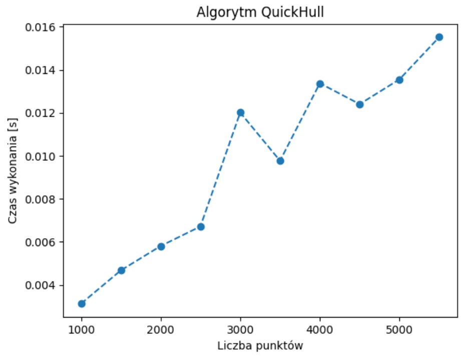
Rysunek 11: Zbiór typu C, algorytm Chana



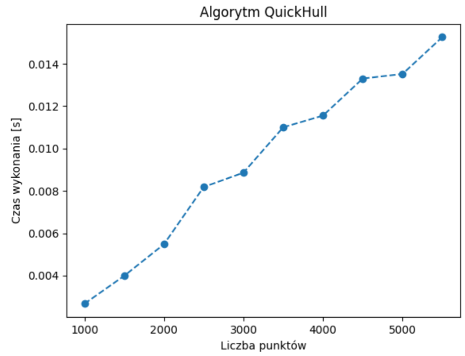
Rysunek 12: Zbiór typu D, algorytm Chana

Tablica 4: Czas wykonania algorytmu QuickHull w zależności od typu zbioru testowego oraz mocy zbioru punktów.

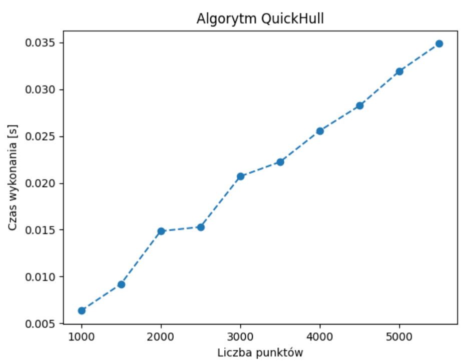
	Liczba punktów									
	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500
Typ zbioru	Czas wykonania [s]									
A	0.0031	0.0047	0.0058	0.0067	0.012	0.0098	0.0134	0.0124	0.0136	0.0155
B	0.0027	0.004	0.0055	0.0082	0.0089	0.011	0.0116	0.0133	0.0135	0.0153
C	0.0064	0.0092	0.0148	0.0153	0.0207	0.0222	0.0256	0.0282	0.0319	0.0348
D	0.0287	0.0426	0.0551	0.0702	0.0847	0.0986	0.1143	0.1294	0.1411	0.1562



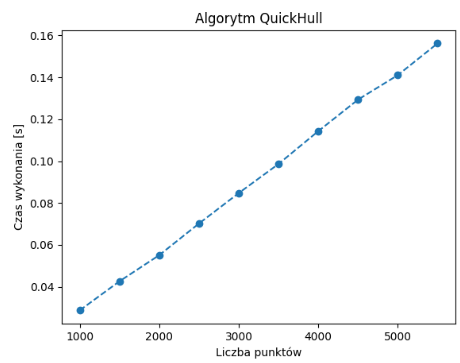
Rysunek 13: Zbiór typu A, algorytm QuickHull



Rysunek 14: Zbiór typu B, algorytm QuickHull



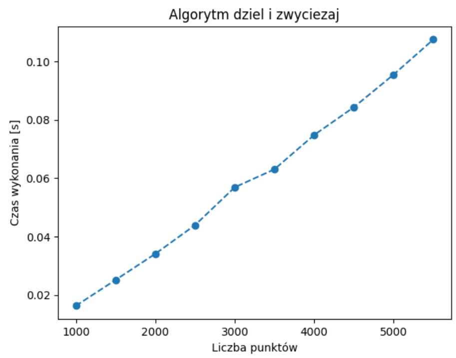
Rysunek 15: Zbiór typu C, algorytm QuickHull



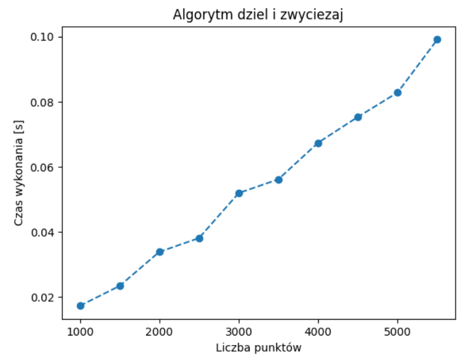
Rysunek 16: Zbiór typu D, algorytm QuickHull

Tablica 5: Czas wykonania algorytmu dziel i zwyciężaj w zależności od typu zbioru testowego oraz mocy zbioru punktów.

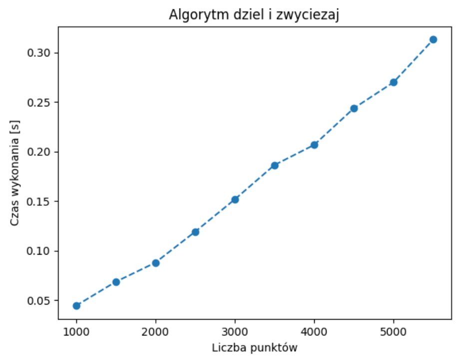
	Liczba punktów									
	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500
Typ zbioru	Czas wykonania [s]									
A	0.0163	0.0251	0.0341	0.0439	0.0569	0.0631	0.0748	0.0844	0.0955	0.1076
B	0.0173	0.0234	0.0339	0.0381	0.052	0.0562	0.0675	0.0754	0.0829	0.0992
C	0.0441	0.0683	0.0877	0.1189	0.1516	0.1863	0.2067	0.2437	0.27	0.3132
B	0.1634	0.2474	0.3518	0.4703	0.5694	0.6705	0.7849	0.8928	1.0458	1.1565



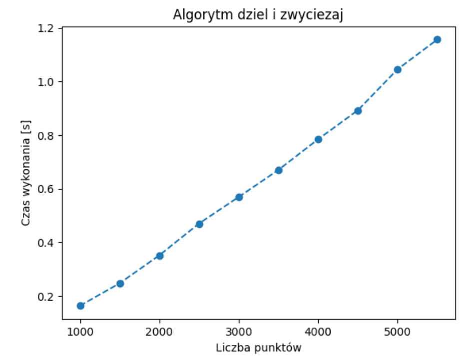
Rysunek 17: Zbiór typu A, algorytm dziel i zwyciężaj



Rysunek 18: Zbiór typu B, algorytm dziel i zwyciężaj



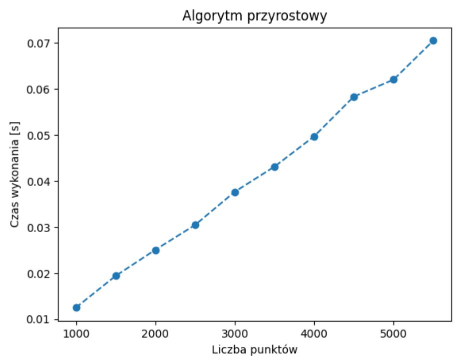
Rysunek 19: Zbiór typu C, algorytm dziel i zwyciężaj



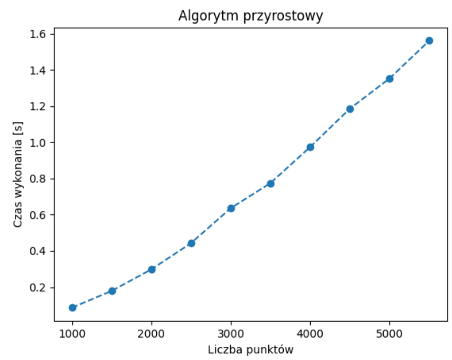
Rysunek 20: Zbiór typu D, algorytm dziel i zwyciężaj

Tablica 6: Czas wykonania algorytmu przyrostowego w zależności od typu zbioru testowego oraz mocy zbioru punktów.

	Liczba punktów									
	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500
Typ zbioru	Czas wykonania [s]									
A	0.0125	0.0194	0.0251	0.0305	0.0377	0.0431	0.0497	0.0584	0.0621	0.0705
B	0.0864	0.1788	0.2978	0.4428	0.6359	0.7745	0.9738	1.1858	1.3526	1.5613
C	0.0315	0.0475	0.063	0.0793	0.0997	0.1136	0.1292	0.1449	0.1555	0.1742
D	0.1373	0.1992	0.2715	0.326	0.4165	0.4639	0.5195	0.5937	0.6773	0.7446



Rysunek 21: Zbiór typu A, algorytm przyrostowy



Rysunek 22: Zbiór typu B, algorytm przyrostowy

5.6 Algorytm przyrostowy

W tabeli 6 przedstawiamy czasy uzyskane przez algorytm przyrostowy i zwyciężaj dla kolejnych zbiorów punktów, przy różnej liczebności punktów w zbiorze. Na wykresach 21, 22, 23, 24 widzimy ilustrację danych z tabeli 6.

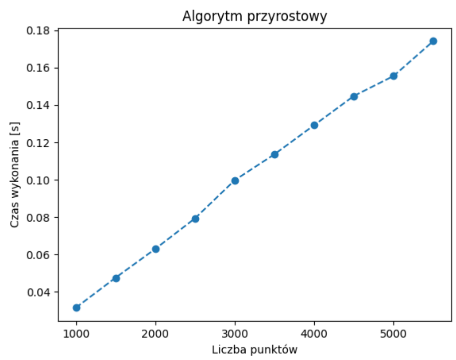
5.7 Algorytm Jarvisa

W tabeli 7 przedstawiamy czasy uzyskane przez algorytm Jarvisa i zwyciężaj dla kolejnych zbiorów punktów, przy różnej liczebności punktów w zbiorze. Na wykresach 25, 26, 27, 28 widzimy ilustrację danych z tabeli 7.

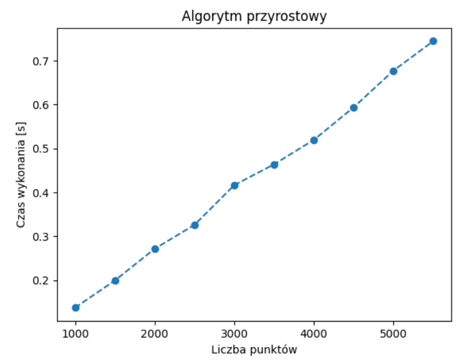
6 Porównanie algorytmów

7 Bibliografia

1. *Wykład z przedmiotu Algorytmy Geometryczne, Informatyka 3. sem., 1. st. AGH, Barbara Głut*



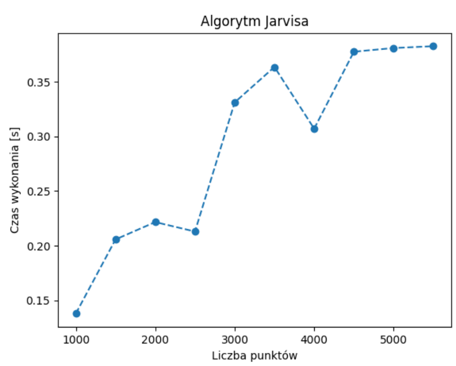
Rysunek 23: Zbiór typu C, algorytm przyrostowy



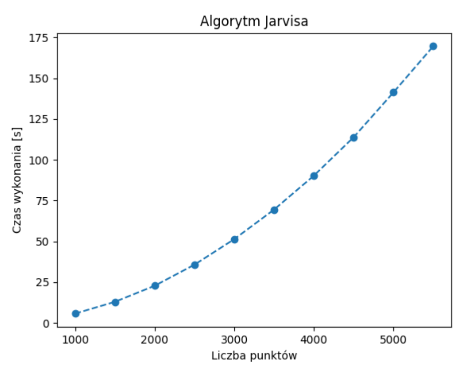
Rysunek 24: Zbiór typu D, algorytm przyrostowy

Tablica 7: Czas wykonania algorytmu Jarvisa w zależności od typu zbioru testowego oraz mocy zbioru punktów.

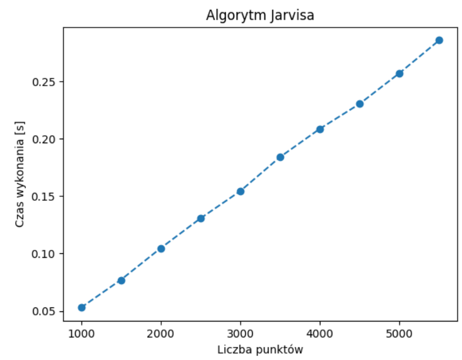
	Liczba punktów									
	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	
Typ danych	Czas wykonania [s]									
A	0.1379	0.2058	0.2217	0.213	0.3311	0.3635	0.307	0.3775	0.3808	
B	5.6845	12.8821	22.7307	35.6488	51.3054	69.4251	90.2278	113.8051	141.2752	1
C	0.0529	0.077	0.1046	0.1306	0.1543	0.184	0.2086	0.2304	0.2571	
D	0.1094	0.1572	0.2167	0.2611	0.3129	0.3711	0.4218	0.4774	0.5255	



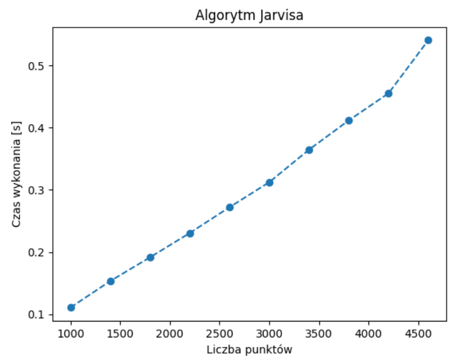
Rysunek 25: Zbiór typu A, algorytm Jarvisa



Rysunek 26: Zbiór typu B, algorytm Jarvisa



Rysunek 27: Zbiór typu C, algorytm Jarvisa



Rysunek 28: Zbiór typu D, algorytm Jarvisa

2. *Computational Geometry – Algorithms and Applications, Mark de Berg, Otfried Cheong, Marc van Kreveld, Mark Overmars*

3. `https://jeffe.cs.illinois.edu/teaching/compgeom/notes/01-convexhull.pdf`