DOKUMENTACJA PROJEKTU
Otoczka wypukła dla zbioru punktów w przestrzeni dwuwymiarowej

Algorytmy geometryczne

Informatyka 3. sem., 1. st., AGH

Kacper Kafara
Łukasz Czarniecki

Spis treści

Spis rysunków

Spis tablic

1 Informacje techniczne

1.1 Budowa programu

Program złożony jest z następujących części:

- *lib* – moduł biblioteczny – zawiera zbiór pomocniczych funkcji i struktur danych wykorzystywanych przez algorytmy
- *pure* – moduł z algorytmami w *czystej postaci* tj. nie posiadające części wizualizacyjnej
- *vis* – moduł z algorytmami wraz z kodem odpowiadającym za wizualizację
- *kafara_czarniecki_program.ipynb* – główny plik programu, notebook z prezentacją algorytmów

Poniżej przedstawiamy dokładny opis zawartości poszczególnych modułów.

1.1.1 Moduł *lib*

Moduł zawiera w sobie następujące podmoduły:

1. *geometric_tool_lab.py* – narzędzie graficzne dostarczone w ramach przedmiotu *Algorytmy geometryczne*
2. *getrand.py* – funkcje generujące zbiory punktów różnych typów
3. *sorting.py* – implementację iteracyjnej wersji algorytmu *QuickSort* wykorzystywaną w algorytmie Grahama
4. *stack.py* – klasę implementującą *stos*
5. *util.py* – szereg funkcji pomocniczych wykorzystywanych przez zaimplementowane algorytmy
6. *mytypes.py* – definicje typów stworzone w celu zwiększenia czytelności kodu.
7. *timemeasure.py* – funkcje do pomiaru czasu wykonania algorytmów
8. *tangent.py* – metoda wyznaczająca styczną (punkt styczności) do wielokąta, przechodzącą przez zadany punkt

Kod modułu *mytypes*

```python
from typing import Tuple, List

Point = Tuple[float, float]

Segment = Tuple[Point, Point]

ListOfPoints = List[Point]

ListOfSegments = List[Segment]
```

Kod modułu *getrand*

```python
import numpy as np
from typing import Tuple
from numpy import random

def dist(point_a, point_b):
    return np.sqrt((point_a[0] - point_b[0])** 2 + (point_a[1] - point_b
    [1])**2)

def rand_seg_point(point_a, point_b):
    rng = np.random.default_rng()

    point = np.empty(shape=2)

    if point_a[0] == point_b[0]:
        min_y = min(point_a[1], point_b[1])
        max_y = max(point_a[1], point_b[1])
        point[0] = point_a[0]
        point[1] = rng.random() * (max_y - min_y) + min_y

    else:
        min_x = min(point_a[0], point_b[0])
        max_x = max(point_a[0], point_b[0])

        a = (point_b[1] - point_a[1]) / (point_b[0] - point_a[0])
        b = (point_a[1] - a * point_a[0])

        param_t = rng.random() * (max_x - min_x) + min_x
        point[0] = param_t
        point[1] = a * param_t + b

    return point


def rand_rect_points(n: int, vertices):
    rng = np.random.default_rng()
    A, B, C, D = vertices[0], vertices[1], vertices[2], vertices[3]
    len_AB = dist(A, B)
    len_BC = dist(B, C)

    points = np.empty(shape=(n,2))
```

```

    for i in range(n):
        side = rng.random(1) * 2 * (len_AB + len_BC)

        if side < len_BC:
            points[i] = rand_seg_point(A, D)
        elif side < 2 * len_BC:
            points[i] = rand_seg_point(B, C)
        elif side < 2 * len_BC + len_AB:
            points[i] = rand_seg_point(A, B)
        else:
            points[i] = rand_seg_point(C, D)

    return points

def rand_in_range(  low: float = 0,
                    high: float = 0,
                    data_type: str = 'float64') -> np.array:
    rng = random.default_rng()

    return np.array((rng.random(1) * (high - low) + low), dtype=data_type)


def rand_arr(n: int,
            low: float,
            high: float,
            data_type: str = 'float64') -> np.array:

    rg = np.random.default_rng()

    return np.array( (rg.random(n) * (high - low) + low), dtype=data_type)

def rand_point2_set(n: int,
                    low: float = 0,
                    high: float = 1,
                    data_type: str = 'float64') -> np.array:
    return np.array(np.random.random((n, 2)) * (high - low) + low, dtype=data_type)

def rand_circle_points( n: int = 10,
                        x: float = 0,
                        y: float = 0,
                        r: float = 1,
                        data_type: str = 'float64') -> np.array:
    rng = np.random.default_rng()

    circle = np.empty(n * 2, dtype=data_type).reshape(n, 2)

    for i in range(n):
        rn = rng.random() * 2 * np.pi
        circle[i][0] = r * np.cos(rn) + x
        circle[i][1] = r * np.sin(rn) + y
```

```python

    return circle
```

Kod modułu *sorting*

```python
import os
from sys import path
path.append(os.path.dirname(os.path.realpath(__file__)) + "/../")

from random import randint
from typing import Callable, List
from lib.stack import Stack


def partition_cmp(arr: List, p: int, q: int, cmp: Callable = lambda x, y:
    x <= y) -> int:
    i = p - 1

    pivot_idx = randint(p, q)
    pivot = arr[pivot_idx]

    # zamieniamy miejscami pivot z ostatnim elementem
    arr[pivot_idx], arr[q] = arr[q], arr[pivot_idx]

    for j in range(p, q):
        if cmp(arr[j], pivot):
            i += 1
            arr[i], arr[j] = arr[j], arr[i]

    arr[i + 1], arr[q] = arr[q], arr[i + 1]

    return i + 1


def qsort_iterative(arr: List, cmp: Callable = lambda x, y: x <= y):
    stack = Stack(len(arr))

    stack.push(0)
    stack.push(len(arr) - 1)

    while not stack.is_empty():
        q = stack.top()
        stack.pop()

        p = stack.top()
        stack.pop()

        pivot_idx = partition_cmp(arr, p, q, cmp=cmp)

        if pivot_idx - 1 > p:
            stack.push(p)
            stack.push(pivot_idx - 1)

        if pivot_idx + 1 < q:
```

```
            stack.push(pivot_idx + 1)
            stack.push(q))
```

Kod modułu *stack*

```
class Stack:
    def __init__(self, size = 0):
        self.s = [] if size == 0 else [None] * size
        self.size = size
        self.itop = -1

    def push(self, item):
        if self.itop < self.size - 1:
            self.itop += 1
            self.s[self.itop] = item
        else:
            self.itop += 1
            self.size += 1
            self.s.append(item)

    def pop(self):
        if self.itop >= 0:
            self.itop -= 1

    def top(self):
        if self.itop >= 0:
            return self.s[self.itop]
        else:
            return None

    def sec(self):
        if self.itop > 0:
            return self.s[self.itop - 1]
        else:
            return None

    def is_empty(self):
        return not (self.itop >= 0)

    def getsize(self):
        return self.itop+1

    def __str__(self):
        return str(self.s[:self.itop+1])
```

Kod modułu *util*

```
import json
from typing import Literal, Union
from lib.mytypes import *
from random import randint
import matplotlib.colors as mcolors
import math
import numpy as np
```

```python
import csv

def det3x3( ux, uy, uz,
            vx, vy, vz,
            wx, wy, wz) -> float:
    return (ux * vy * wz) + (uy * vz * wx) + (uz * vx * wy) - (wx * vy * uz) - (wy * vz * ux) - (wz * vx * uy)


def orientation(p1: Point, p2: Point, p3: Point, eps: float = 1e-5) -> Literal[-1, 0, 1]:
    det = det3x3(p1[0], p1[1], 1,
                 p2[0], p2[1], 1,
                 p3[0], p3[1], 1)
    if det < -eps:
        return -1
    elif det < eps:
        return 0
    else:
        return 1


def save_points_to_json(path: str, points: ListOfPoints, indent: int = None) -> None:
    with open(path, 'w') as file:
        file.write(json.dumps(points, indent = indent))


def load_points_from_json(path: str) -> None:
    with open(path, 'r') as file:
        return json.load(file)


def save_data_csv(path: str, data):
    with open(path, 'w') as csvfile:
        writer = csv.writer(csvfile, delimiter=',')
        for row in data:
            writer.writerow(row)


def index_of_min(points: ListOfPoints, cmp_idx = 0) -> Union[int, None]:
    if len(points) < 1 or cmp_idx < 0 or cmp_idx > 1: return None

    min_el = points[0]
    min_idx = 0

    for i in range(1, len(points)):
        if  points[i][cmp_idx] < min_el[cmp_idx] \
            or \
            points[i][cmp_idx] == min_el[cmp_idx] and points[i][1 - cmp_idx] < min_el[1 - cmp_idx]:

            min_el = points[i]
            min_idx = i
```

```python

    return min_idx


def index_of_max(points: ListOfPoints, cmp_idx = 0) -> Union[int, None]:
    if len(points) < 1 or cmp_idx < 0 or cmp_idx > 1: return None

    max_el = points[0]
    max_idx = 0

    for i in range(1, len(points)):
        if  points[i][cmp_idx] > max_el[cmp_idx] \
            or \
            points[i][cmp_idx] == max_el[cmp_idx] and points[i][1 - cmp_idx] > max_el[1 - cmp_idx]:

            max_el = points[i]
            max_idx = i

    return max_idx


def dist_sq(p1, p2):
    return (p2[0] - p1[0]) ** 2 + (p2[1] - p1[1]) ** 2

def swap_points(p, q):
    p[0], p[1], q[0], q[1] = q[0], q[1], p[0], p[1]



def divide(points,m): #dzieli zbior punktow na w miarae rowne podzbiory o rozmiarze m lub m-1
    n=len(points)
    for i in range(1,n):#gwarantuje, ze w pierwszym zbiorze Qi pierwszy element jest najnizszy, czyli nalezy do otoczki ostatecznej
        if points[i][1] < points[0][1]:
            buf=points[i]
            points[i] = points[0]
            points[0]=buf

    k=math.ceil(n/m)
    Q=[[] for i in range(k)]
    i=0
    while i<n:
        for j in range(k):
            if i==n:
                break
            Q[j].append(points[i])
            i+=1
    if len(Q[0]) > m:
        return None

    return Q

```

```python
def makeSheaf(Points): #laczy punkty w kolejnosci jakiej sa podane
    Sheaf=[]
    for i in range(len(Points)-1):
        Sheaf.append([Points[i],Points[i+1]])
    return Sheaf

def makeFullSheaf(Points): #laczy punkty w kolejnosci jakiej sa podane, dodatkowo domyka cylk
    Sheaf=[]
    for i in range(len(Points)-1):
        Sheaf.append([Points[i],Points[i+1]])
    Sheaf.append([Points[len(Points)-1],Points[0]])

    return Sheaf

def length(v):
     return np.sqrt((v[1][0]-v[0][0])**2+(v[1][1]-v[0][1])**2)

def det(a,b,c):
    return a[0]*b[1]-a[0]*c[1]-b[0]*a[1]+b[0]*c[1]+c[0]*a[1]-c[0]*b[1]


def tangent_r(p, Q, accur=10 ** (-7)):  # Q-zbior punktow w formie otoczki
    ln = len(Q)

    def tangetUtil(p, Q, l, r):
        if r < l:  # zdarza sie tylko, gdy punkt jest wewnatrz otoczki
            return None

        mid = (l + r) // 2
        if det(Q[0], Q[1], p) >= accur and det(Q[ln - 1], Q[0], p) >= accur:
            if (det(Q[0], p, Q[mid]) <= -accur) or (det(p, Q[mid], Q[(mid + 1) % ln]) <= -accur and \
                                                    det(p, Q[mid], Q[(mid - 1) % ln]) <= -accur) or \
                    (det(p, Q[mid], Q[(mid + 1) % ln]) <= -accur and det(p, Q[mid], Q[(mid - 1) % ln]) > -accur):
                return tangetUtil(p, Q, mid + 1, r)

        else:
            if det(Q[0], p, Q[mid]) > -accur and \
                    ((det(p, Q[mid], Q[(mid + 1) % ln]) <= -accur and det(p, Q[mid], Q[(mid - 1) % ln]) > -accur) or \
                     (det(p, Q[mid], Q[(mid + 1) % ln]) <= -accur and det(p, Q[mid], Q[
                         (mid - 1) % ln]) <= -accur)):  # chyba nie potrzebne sprawdz na koncu
                return tangetUtil(p, Q, mid + 1, r)

        if (det(p, Q[mid], Q[(mid + 1) % ln]) > -accur and det(p, Q[mid], Q[(mid - 1) % ln]) > -accur) \
                or (
```

```
                -accur < det(p, Q[mid], Q[(mid + 1) % ln]) < accur and (Q[mid][0] <= p[0] <= Q[(mid + 1) % ln][0]) and \
                (Q[mid][1] <= p[1] <= Q[(mid + 1) % ln][1])):

            while -accur < det(p, Q[mid], Q[(mid + 1) % ln]) < accur and length([Q[(mid + 1) % ln], p]) > length(
                    [Q[mid], p]):
                mid = (mid + 1) % ln  # jesli jest styczna wspolliniowa, to bierzmy pod uwage punkt blizszy
            return mid

        else:
            return tangetUtil(p, Q, l, mid - 1)

    return tangetUtil(p, Q, 0, ln - 1)

def tangent_l(p, Q, accur=10 ** (-7)):  # Q-zbior punktow w formie otoczki
    ln = len(Q)

    def tangetUtil(p, Q, l, r):
        if r < l:  # zdarza sie tylko, gdy punkt jest wewnatrz otoczki
            return None

        mid = (l + r) // 2
        if det(Q[0], Q[1], p) >= accur and det(Q[ln - 1], Q[0], p) >= accur:
            if (det(Q[0], p, Q[mid]) >= accur) or (det(p, Q[mid], Q[(mid + 1) % ln]) >= accur and \
                                                    det(p, Q[mid], Q[(mid - 1) % ln]) >= accur) or \
                    (det(p, Q[mid], Q[(mid + 1) % ln]) <= -accur and det(p, Q[mid], Q[(mid - 1) % ln]) > -accur):
                return tangetUtil(p, Q, l, mid-1)

        else:
            if  det(Q[ln - 1], Q[0], p) >= accur and det(Q[0], Q[1], p) <= - accur:
                return 0
            if det(Q[0], p, Q[mid]) < accur and \
                    ((det(p, Q[mid], Q[(mid + 1) % ln]) >= accur and det(p, Q[mid], Q[(mid - 1) % ln]) < accur) or \
                     (det(p, Q[mid], Q[(mid + 1) % ln]) >= accur and det(p, Q[mid], Q[
                         (mid - 1) % ln]) >= accur)):  # chyba nie potrzebne sprawdz na koncu
                if ln > 2:
                    return tangetUtil(p, Q, l, mid-1)

        if (det(p, Q[mid], Q[(mid + 1) % ln]) < accur and det(p, Q[mid], Q[(mid - 1) % ln]) < accur) \
                or (
                -accur < det(p, Q[mid], Q[(mid + 1) % ln]) < accur and (Q[mid][0] <= p[0] <= Q[(mid + 1) % ln][0]) and \
```

```
                (Q[mid][1] <= p[1] <= Q[(mid + 1) % ln][1])):

            while -accur < det(p, Q[mid], Q[(mid - 1) % ln]) < accur and length([Q[(mid - 1) % ln], p]) > length(
                    [Q[mid], p]):
                mid = (mid - 1) % ln  # jesli jest styczna wspolliniowa, to bierzmy pod uwage punkt blizszy
            return mid

        else:
            return tangetUtil(p, Q, mid + 1, r)

    return tangetUtil(p, Q, 0, ln - 1)


def compr(p,q,current,accur=10**(-6)):
        if det(current,p,q)>accur:
            return -1
        elif det(current,p,q)<accur:
            return 1
        else:
            return 0
```

Kod modułu *timemeasure*

```
import os
from sys import path
path.append(os.path.dirname(os.path.realpath(__file__)) + "/../")

from timeit import default_timer as timer
from typing import Any, Callable, List
from pprint import pprint
import numpy as np

def get_exec_time(func: Callable, *args, points = []) -> float:
    tstart = timer()
    func(points, *args)
    tstop = timer()
    return (tstop - tstart)


def avg_exec_time(func: Callable, *args, points = [], times = 1) -> float:
    total_exec_time = 0

    for _ in range(times):
        points_copy = points.copy()
        total_exec_time += get_exec_time(func, *args, points = points_copy)

    return total_exec_time / times
```

Kod modułu *tangent*

```
def tangent(p, Q, accur=0):  # Q-zbior punktow w formie otoczki
```

```
    ln = len(Q)

    def tangetUtil(p, Q, l, r):
        if r < l:  # zdarza sie tylko, gdy punkt jest wewnatrz otoczki
            return None

        mid = (l + r) // 2
        if det(Q[0], Q[1], p) > 0 and det(Q[ln - 1], Q[0], p) > 0:
            if (det(Q[0], p, Q[mid]) < 0) or (det(p, Q[mid], Q[(mid + 1) % ln]) < 0 and \
                                                  det(p, Q[mid], Q[(mid - 1) % ln]) < 0) or \
                    (det(p, Q[mid], Q[(mid + 1) % ln]) < 0 and det(p, Q[mid], Q[(mid - 1) % ln]) >= 0):
                return tangetUtil(p, Q, mid + 1, r)

        else:
            if det(Q[0], p, Q[mid]) >= 0 and \
                    ((det(p, Q[mid], Q[(mid + 1) % ln]) < 0 and det(p, Q[mid], Q[(mid - 1) % ln]) >= 0) or \
                     (det(p, Q[mid], Q[(mid + 1) % ln]) < 0 and det(p, Q[mid], Q[
                         (mid - 1) % ln]) < 0)):  # chyba nie potrzebne sprawdz na koncu
                return tangetUtil(p, Q, mid + 1, r)

        if det(p, Q[mid], Q[(mid + 1) % ln]) >= 0 and det(p, Q[mid], Q[(mid - 1) % ln]) >= 0 \
                or (det(p, Q[mid], Q[(mid + 1) % ln]) == 0 and (Q[mid][0] <= p[0] <= Q[(mid + 1) % ln][0]) and \
                    (Q[mid][1] <= p[1] <= Q[(mid + 1) % ln][1])):

            while (det(p, Q[mid], Q[(mid + 1) % ln]) == 0):
                mid = (mid + 1) % ln  # jesli jest styczna wspolliniowa, to bierzmy pod uwage punkt blizszy
            return mid

        else:
            return tangetUtil(p, Q, l, mid - 1)

    return tangetUtil(p, Q, 0, ln - 1)
```

1.1.2 Moduł *pure*

Moduł zawiera w sobie następujące podmoduły:

1. *divide_conq.py* – implementacja algorytmu dziel i zwyciężaj
2. *graham.py* – implementacja algorytmu Grahama
3. *increase.py* – implementacja algorytmu przyrostowego
4. *jarvis.py* – implementacja algorytmu Jarvisa
5. *lowerupper.py* – implementacja algorytmu ”górna-dolna”

Kody algorytmów znajdują się w sekcji *Algorytmy*.

1.1.3 Moduł *vis*

Moduł zawiera w sobie następujące podmoduły:

1. *divide_conq_vis.py* – implementacja algorytmu dziel i zwyciężaj wraz z kodem tworzącym wizualizację
2. *graham_vis.py* – implementacja algorytmu Grahama wraz z kodem tworzącym wizualizację
3. *increase_vis.py* – implementacja algorytmu przyrostowego wraz z kodem tworzącym wizualizację
4. *jarvis_vis.py* – implementacja algorytmu Jarvisa wraz z kodem tworzącym wizualizację
5. *lowerupper_vis.py* – implementacja algorytmu "górna-dolna" wraz z kodem tworzącym wizualizację

1.2 Wymagania techniczne

1. Python 3.8.3 64-bit lub nowszy wraz z modułami:
   - *matplotlib*
   - *numpy*
2. Jupyter Notebook

1.3 Korzystanie z programu

1.3.1 Uruchomienie programu

W celu uruchomienia wizualizacji algorytmów należy uruchomić notebook (poprzez Jupyter Notebook) *kafara_czarniecki_program.ipynb*, oraz wykonywać kolejne komórki notatnika.

W celu uruchomienia pomiarow wydajności algorytmów należy przejść do sekcji *Pomiary czasu* wykonać pierwszą komórkę (z importami algorytmów) a następnie przeprowadzać testy i wyświetlać rezultaty w interesujących nas przypadkach.

2 Oznaczenia i definicje

Na potrzeby dalszych wywodów przyjmujemy w tym miejscu szereg oznaczeń i definicji:

def. 1. **Zbiorem wypukłym** nazwiemy dowolny podzbiór płaszczyzny taki, że dla każdych dwóch punktów do niego należących, odcinek je łączący również należy do tego zbioru.

def. 2. **Otoczką wypukłą** dowolnego zbioru punktów S płaszczyzny nazwiemy najmniejszy zbiór wypukły $CH(S)$ zawierający S.

Algorytmicznie otoczkę wypułką dowolnego zbioru S punktów płaszczyzny reprezentujemy jako ciąg punktów (wierzchołołków) $< v_1, v_2, \ldots, v_n >$ wielokąta wypukłego, gdzie $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ v_i jest poprzednikiem v_{i+1} (w kolejności wierzchołków przeciwnej do ruchu wskazówek zegara).

3 Problem

Wyznaczyć otoczkę wypukłą podanego zbioru punktów płaszczyzny dwuwymiarowej.

4 Algorytmy

4.1 Algorytm Grahama

W celu opisania sposobu działania algorytmu Grahama, definiujemy następującą relację $\preceq_Q$ określoną dla dowolnych dwóch punktów płaszczyzny P_1, P_2 względem wybranego i ustalonego punktu odniesienia Q.

$$P_1 \preceq_Q P_2 \Leftrightarrow (\angle(P_1, Q, OX) < \angle(P_2, Q, OX)) \vee (\angle(P_1, Q, OX) = \angle(P_2, Q, OX) \wedge d(P_1, Q) \leqslant d(P_2, Q))$$

gdzie $d(P, Q)$ oznacza odległość od siebie dwóch dowolnych punktów płaszczyzny.

Tak zdefiniowana relacja jest liniowym porządkiem (zwrotna, antysymetryczna, przechodnia i spójna).

4.1.1 Opis działania

1. Wyznaczamy najniższy punkt Q wyjściowego zbioru (jeżeli jest wiele o tej samej rzędnej – bierzemy ten o najmniejszej odciętej).

2. Ustawiamy go jako pierwszy element zbioru.

3. Sortujemy pozostałe punkty względem relacji $\preceq_Q$.

4. Usuwamy wszystkie, poza najbardziej oddalonym od Q, punkty leżące na półprostej QP, dla każdego P

5. Kładziemy pierwsze 3 punkty zbioru na stos S.

6. Iterujemy kolejno po punktach z posortowanego zbioru nie będących na stosie: Niech bieżącym punktem będzie P:

(a) Dopóki P nie jest po lewej stronie $S_{n-1}S_n$ wykonujemy (b)

(b) Uswamy punkt ze stosu.

(c) Dodajemy P na stos.

7. Zwracamy zawartość stosu.

4.1.2 Szczegóły

- Najniższy punkt wyjściowego zbioru (punkt 1) wyznaczamy w czasie liniowym, iterując po kolejnych punktach zbioru.

- Wszystkie punkty leżacej na jednej prostej, poza najbardziej oddalonym od Q usuwamy w czasie liniowym w następujący sposób: Iterując przez posortowaną tablicę, zaczynając od indeksu $i := 1$, zapamiętujemy ostatni indeks na który wstawialiśmy j (na początku $j := 1$). Jeżeli Q, P_i, P_{i+1} są współliniowe to $i := i+1$. Jeżeli nie są współliniowe to P_i wpisujemy na pozycję j, a następnie $j := j + 1$. Następnie, w dalszej części algorytmu posługujemy się częścią tablicy $[0, \ldots, j-1]$.

4.1.3 Złożoność

Operacją dominującą w algorytmie jest sortowanie – realizowane w czasie $O(n\,lgn)$. Wybór punktu najniższego, redukcja punktów współlinowych oraz iterowanie (punkt 6, zauważmy, że każdy punkt zbioru wyjściowego jest obsługiwany co najwyżej 2 razy – gdy jest dodawany do otoczki i gdy jest ewentualnie usuwany) są realizowane w czasie $O(n)$. Algorytm Grahama ma zatem złożoność $O(n\,lgn)$.

4.1.4 Kod

```python
def get_point_cmp(ref_point: Point, eps: float = 1e-7) -> Callable:
    def point_cmp(point1, point2):
        orient = orientation(ref_point, point1, point2, eps)

        if orient == -1:
            return False
        elif orient == 1:
            return True
        elif dist_sq(ref_point, point1) <= dist_sq(ref_point, point2):
            return True
        else:
            return False

    return point_cmp


def graham(points: ListOfPoints) -> ListOfPoints:
    istart = index_of_min(points, 1)

    points[istart], points[0] = points[0], points[istart]

```

```
    qsort_iterative(points, get_point_cmp(points[0]))

    i, new_size = 1, 1
    while i < len(points):
        while (i < len(points) - 1) \
        and \
        (orientation(points[0], points[i], points[i + 1], 1e-7) == 0):
            i += 1

        points[new_size] = points[i]
        new_size += 1
        i += 1

    s = Stack()
    s.push(points[0])
    s.push(points[1])
    s.push(points[2])

    for i in range(3, new_size, 1):
        while orientation(s.sec(), s.top(), points[i], 1e-7) != 1:
            s.pop()

        s.push(points[i])

    return s.s[:s.itop+1]

```

4.2 Algorytm Jarvisa

4.2.1 Opis działania

1. Wyznaczamy najniższy punkt Q wyjściowego zbioru (jeżeli jest wiele o tej samej rzędnej – bierzemy ten o najmniejszej odciętej).

2. Dodajemy Q do zbioru punktów otoczki.

3. Przeglądamy punkty zbioru w poszukiwaniu takiego, który wraz z ostatnim punktem otoczki tworzy najmniejszy kąt skierowany względem ostatniej znanej krawędzi otoczki. Dla pierwszego szukanego punktu, kąt namierzamy względem poziomu.

4. Znaleziony punkt dodajemy do zbioru punktów otoczki, jeżeli jest różny od Q.

5. Powtarzamy punkty 3 i 4 tak długo aż znalezionym punktem nie będzie Q.

6. Zwracamy listę punktów otoczki.

4.2.2 Szczegóły

- Najniższy punkt wyjściowego zbioru (punkt 1) wyznaczamy w czasie liniowym, iterując po kolejnych punktach zbioru.

- W celu wyznaczenia punktu wyspecyfikowanego w punkcie 3. nie obliczamy wartości odpowiedniego kąta. Zamiast tego, równoważnie, wyznaczamy punkt P, który wraz z ostatnim znanym punktem otoczki P_0 tworzy wektor $\overrightarrow{P_0P}$ dla którego wszystkie pozostałe punkty zbioru są po lewej stronie. Robimy to w czasie liniowym korzystając z znanych własności wyznacznika.

4.2.3 Złożoność

Zauważmy, że jeżeli otoczka jest k - elementowa, to główna pętla algorytmu (punkty 3–4) wykonuje się k-razy. Każdy krok pętli (znalezienie odpowiedniego punktu P) zajmuje czas liniowy. Pozostałe operacj w algorytmie zajmują co najwyżej czas liniowy. Zatem algrytm Jarvisa ma złożoność $O(nk)$.

4.2.4 Kod

```python
def jarvis(points: ListOfPoints) -> ListOfPoints:
EPS = 1e-8

convex_hull = []

start_idx = index_of_min(points, 1)

convex_hull.append(start_idx)

rand_idx = 0 if start_idx != 0 else 1

prev = start_idx

while True:
    imax = rand_idx

    for i in range(len(points)):
        if i != prev and i != imax:
            orient = orientation(
                        points[prev],
                        points[imax],
                        points[i],
                        EPS
                    )
            if orient == -1:
                imax = i

            elif orient == 0 and \
                 (dist_sq(points[prev], points[imax]) < dist_sq(points[
    prev], points[i])):
                imax = i

    if imax == start_idx:
        break;

    convex_hull.append(imax)

    prev = imax

```

```
return points[convex_hull]

```

W ostatniej linii algorytmu, korzystamy z możliwości bibliteki *numpy*.

4.3 Algorytm górna-dolna

4.3.1 Opis działania

1. Sortujemy punkty rosnąco po odciętych (w przypadku rówych, mniejszy jest punkt o mniejszej rzędnej).
2. Pierwsze dwa punkty z posortowanego zbioru wpisujemy do zbioru punktów otoczki górnej oraz dolnej.
3. Iterujemy po zbiorze punktów zaczynając od $i = 2$ (trzeciego punktu), niech P będzie bieżącym punktem:
   (a) Dopóki górna (dolna) otoczka ma co najmniej 2 punkty i P nie znajduje się po prawej (lewej) stronie odcinka skierowanego utworzonego przez ostatniej dwa punkty otoczki (ostatni jest końcem odcinka), wykonujemy (b):
   (b) Usuwamy ostatni punkt z otoczki górej (dolnej).
   (c) Dodajemy P do punktów otoczki górnej (dolnej).
4. Odwracamy kolejność wierzchołków w otoczce dolnej.
5. Łączymy zbioru punktów otoczki górnej oraz dolnej.
6. Zwracamy złączony zbiór punktów otoczki.

4.3.2 Złożoność

Dominującą operacją w algorytmie jest sortowanie realizowane w czasie $O(n\,lgn)$. Każdy krok pętli (dla wyznaczania otoczki górnej oraz dolnej) zajmuje czas stały. Zauważmy, że podobnie do algorytmu Grahama każdy z punktów jest rozważany co najwyżej dwukrotnie – w momencie dodania do otoczki i przy ewentualnym usunięciu ze zbioru punktów otoczki. Pozostałe operacje realizowane są w czasie liniowym. Zatem algorytm "górna-dolna"ma złożoność $O(n\,lgn)$.

4.3.3 Kod

```
def lower_upper(point2_set: ListOfPoints) -> ListOfPoints:
if len(point2_set) < 3: return None

point2_set.sort(key = operator.itemgetter(0, 1))

upper_ch = [ point2_set[0], point2_set[1] ]
lower_ch = [ point2_set[0], point2_set[1] ]

```

```python
for i in range( 2, len(point2_set) ):
    while len(upper_ch) > 1 and orientation(upper_ch[-2], upper_ch[-1],
    point2_set[i]) != -1:
        upper_ch.pop()

    upper_ch.append(point2_set[i])

for i in range(2, len(point2_set) ):
    while len(lower_ch) > 1 and orientation(lower_ch[-2], lower_ch[-1],
    point2_set[i]) != 1:
        lower_ch.pop()

    lower_ch.append(point2_set[i])

lower_ch.reverse()
upper_ch.extend(lower_ch)

return upper_ch
```

4.4 Algorytm przyrostowy

4.4.1 Opis działania

Ogólne sformułowanie algorytmu ma postać:

1. Dodajemy pierwsze 3 punkty do zbioru punktów otoczki.
2. Iterujemy po pozostałych punktach. Niech P będzie punktem bieżącym:
    (a) Jeżeli P nie należy do wnętrza obecnie znanej otoczki wykonumejmy (b) oraz (c).
    (b) Znajdujemy styczne do obecnie znanej otoczki poprowadzone przez punkt P.
    (c) Aktualizujemy otoczkę.
3. Zwracamy punkty otoczki.

Możemy go jednak sformułować inaczej, co pozwoli na uproszenie implementacji, przy zachowaniu takiego samego rzędu złożoności.

1. Sortujemy punkty rosnąco po odciętych (w przypadku rówych, mniejszy jest punkt o mniejszej rzędnej).
2. Dodajemy pierwsze 3 punkty do zbioru punktów otoczki, w takiej kolejności, aby były podane w kolejności odwrotnej do ruchu wskazówek zegara.
3. Iterujemy po pozostałych punktach. Niech P będzie punktem bieżącym:
    (a) Znajdujemy styczne do obecnie znanej otoczki poprowadzone przez punkt P.
    (b) Aktualizujemy otoczkę.
4. Zwracamy punkty otoczki.

Dzięki wstępnemu posortowaniu puntków, omijamy konieczność testowania należenia P do otoczki znanej w danym kroku algorytmu, ponieważ biorąc kolejny punkt mamy gwarancję, że nie należy on do wcześniej znanej otoczki.

4.4.2 Szczegóły

Wyznaczanie stycznych

Niech Q będzie punktem przez który ma przechodzić styczna.

1. W czasie liniowym znajdujemy punkt otoczki P_i o największej odciętej (jeżeli jest wiele, to wybieramy ten o najmniejszej rzędnej)
2. Dopóki P_{i+1} nie znajduje się po lewej stronie odcinka QP_i:
   (a) Jeżeli Q, P_i, P_{i+1} są współliniowe oraz P_i leży dalej (lub w takiej samej odległości) Q niż P_{i+1} to przerwij działanie pętli.
   (b) $P_i := P_{i+1}$
3. W całkowicie analogiczny sposób wyznaczamy dolną styczną.

4.4.3 Złożoność

Posortowanie punktów zajmuje $O(n\,lgn)$. Wydaje główna pętla programu wykonuje się w czasie $O(n)$, ponieważ możemy usunąć maksymalnie $k-3$ punkty (gdy k jest liczebnością zbioru punktów otoczki znaną w danej iteracji), ale zauważmy, że każdy z punktów usuwany jest co najwyżej raz. Wyszukanie stycznych w głównej pętli także zajmuje czas liniowy, więc główna pętla programu wykonuje się w czasie liniowym. Zatem złożoność algorytmu jest rzędu $O(n\,lgn)$

4.4.4 Kod

```python
def rltangent(polygon: ListOfPoints, point: Point):
    n = len(polygon)

    right = index_of_max(polygon, cmp_idx=0)

    left = right

    left_orient = orientation(point, polygon[left % n], polygon[(left-1)%n])
    while left_orient != -1:
        if left_orient == 0 and dist_sq(point, polygon[left]) >= dist_sq(point, polygon[(left-1)%n]):
            break
        left = (left-1) % n
        left_orient = orientation(point, polygon[left % n], polygon[(left-1)%n])
```

```python

    right_orient = orientation(point, polygon[right%n], polygon[(right+1)%n])
    while right_orient != 1:
        if right_orient == 0 and dist_sq(point, polygon[right]) >= dist_sq(point, polygon[(right+1)%n]):
            break
        right = (right+1)%n
        right_orient = orientation(point, polygon[right%n], polygon[(right+1)%n])


    return left, right


def increase_with_sorting(point2_set: ListOfPoints) -> Union[ListOfPoints, None]:
    if len( point2_set ) < 3: return None

    point2_set.sort(key = operator.itemgetter(0, 1))

    convex_hull = point2_set[:3]

    if orientation(convex_hull[0], convex_hull[1], convex_hull[2]) == -1:
        convex_hull[1], convex_hull[2] = convex_hull[2], convex_hull[1]

    for i in range(3, len( point2_set )):
        rltang = rltangent(convex_hull, point2_set[i])
        left_tangent_idx = rltang[0]
        right_tangent_idx = rltang[1]

        left_tangent_point = convex_hull[left_tangent_idx]
        right_tangent_point = convex_hull[right_tangent_idx]

        deletion_side: Literal[-1, 0, 1] = orientation(left_tangent_point, right_tangent_point, point2_set[i])

        if deletion_side != 0:
            lrlnext_orient = orientation(left_tangent_point, right_tangent_point, convex_hull[(left_tangent_idx + 1) % len(convex_hull)])
            if lrlnext_orient == deletion_side or lrlnext_orient == 0:
                step = 0
            else:
                step = -1

            left = (left_tangent_idx + 1) % len(convex_hull)

            while convex_hull[left % len(convex_hull)] != right_tangent_point:
                convex_hull.pop(left % len(convex_hull))
                left = (left + step) % len(convex_hull)

            convex_hull.insert(left % len(convex_hull), point2_set[i])
```

```
        else:
            convex_hull = [point2_set[left_tangent_idx], point2_set[i]]
    return convex_hull
```

4.5 Algorytm dziel i zwyciężaj

4.5.1 Opis działania

Prócz zbioru punktów, dodatkową daną wejściową dla algorytmu jest stała k oznaczająca liczebość zbioru punktów, przy której przechodzimy w algorytmie rekurencyjnym do przypadku bazowego – wyznaczamy otoczkę innym, wybranym algorytmem.

Opisany algorytm jest algorytmem rekurencyjnym. Przed pierwszym wywołaniem rekurencyjnym należy zbiór punktów posortować rosnąco po odciętych (w przypadku równych, mniejszy jest punkty o mniejszej rzędnej).

Jest to standardowe zastosowanie metody "*dziel i zwyciężaj*":

1. Dzielimy wyjściowy problem na mniejsze tak długo, aż znajdujemy się w przypadku któryi potrafimy rozwiązać elementarnie / w inny sposób.
2. Łączymy kolejne rozwiązania częściowe w całość.

Popatrzmy na schemat działania:

1. Jeżeli liczebność rozważanego zbioru jest mniejsza bądź równa danej stałej k, to:
   (a) Wyznaczamy otoczkę rozważanego zbioru punktów, za pomocą innej metody (np. innego algorytmu wyznaczania otoczki).
   (b) Zwracamy tak uzyskaną otoczkę.
2. W przeciwnym przypadku:
   (a) Wywołujemy się rekurencyjnie na zbiorze punktów o odciętych mniejszych od mediany.
   (b) Wywołujemy się rekurencyjnie na zbiorze punktóœ o odciętych większych bądź równych medianie.
   (c) Łączymy lewą i prawą otoczkę (pozyskane z wywołań rekurencyjnych) w jedną.
   (d) Zwracamy tak uzyskaną otoczkę.

4.5.2 Szczegóły

- Do wyznaczania otoczki w przypadku podstawowym wykorzystany został algortym Grahama. Algorytm Jarvisa, który dla małych k powinien działać bardzo dobrze, dawał gorsze rezultaty.
- Sposób łączenia otoczek jest następujący:

1. Wyznaczamy skrajny prawy punkt L lewej otoczki oraz skrajny lewy P punkt prawej otoczki.
2. Dopóki L i P nie tworzą górnej stycznej, ”wychodzimy w góręńaprzemiennie punktami L i P.
3. Analogicznie wyznaczamy dolną styczną.
4. Usuwamy punkty zawierające się we wnętrzu nowo utworzonej otoczki.

4.5.3 Złożoność

- Początkowe sortowanie: $O(nlgn)$
- Rekurencja: $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + O(n) \implies T(n) = O(nlgn)$
- Każde łączenie otoczek: $O(n)$

Algorytm dziel i zwyciężaj ma zatem złożoność $O(nlgn)$

4.5.4 Kod

```python
def merge_convex_hulls(left_convex_hull: ListOfPoints, right_convex_hull: ListOfPoints) -> List[Point]:
    left_ch_size = len(left_convex_hull)
    right_ch_size = len(right_convex_hull)

    # znajdujemy prawy skrajny punkt lewej otoczki
    left_ch_rightmost_idx = index_of_max(left_convex_hull, cmp_idx=0)
    right_ch_leftmost_idx = index_of_min(right_convex_hull, cmp_idx=0)

    left = left_convex_hull[left_ch_rightmost_idx]
    right = right_convex_hull[right_ch_leftmost_idx]
    left_idx = left_ch_rightmost_idx
    right_idx = right_ch_leftmost_idx

    left_flag, right_flag = True, True
    while   orientation(left, right, right_convex_hull[(right_idx - 1) % right_ch_size]) != -1 and right_flag\
            or \
            orientation(right, left, left_convex_hull[(left_idx + 1) % left_ch_size]) != 1 and left_flag:

        left_flag, right_flag = False, False

        # podnosimy punkt na prawej otoczce
        left_right_orient = orientation(left, right, right_convex_hull[(right_idx - 1) % right_ch_size])
        while left_right_orient != -1:
            if left_right_orient == 0 and dist_sq(left, right) >= dist_sq(left, right_convex_hull[(right_idx - 1) % right_ch_size]):
                right_flag = False
                break
```

```

            right_idx = (right_idx - 1) % right_ch_size
            right = right_convex_hull[right_idx]
            left_right_orient = orientation(left, right, right_convex_hull[(right_idx - 1) % right_ch_size])
        else:
            right_flag = True

        # podnosimy punkt na lewej otoczce
        right_left_orient = orientation(right, left, left_convex_hull[(left_idx + 1) % left_ch_size])
        while right_left_orient != 1:
            if right_left_orient == 0 and dist_sq(right, left) >= dist_sq(right, left_convex_hull[(left_idx + 1) % left_ch_size]):
                left_flag = False
                break

            left_idx = (left_idx + 1) % left_ch_size
            left = left_convex_hull[left_idx]
            right_left_orient = orientation(right, left, left_convex_hull[(left_idx + 1) % left_ch_size])
        else:
            left_flag = True


    upper_tangent_left_idx = left_idx
    upper_tangent_right_idx = right_idx

    # dolna styczna
    left = left_convex_hull[left_ch_rightmost_idx]
    right = right_convex_hull[right_ch_leftmost_idx]
    left_idx = left_ch_rightmost_idx
    right_idx = right_ch_leftmost_idx

    left_flag, right_flag = True, True
    while   orientation(left, right, right_convex_hull[(right_idx + 1) % right_ch_size]) != 1 and right_flag \
            or \
            orientation(right, left, left_convex_hull[(left_idx - 1) % left_ch_size]) != -1 and left_flag:

        left_flag, right_flag = False, False

        # opuszczamy punkt na prawej otoczce
        left_right_orient = orientation(left, right, right_convex_hull[(right_idx + 1) % right_ch_size])
        while left_right_orient != 1:
            if left_right_orient == 0 and dist_sq(left, right) >= dist_sq(left, right_convex_hull[(right_idx + 1) % right_ch_size]):
                right_flag = False
                break

            right_idx = (right_idx + 1) % right_ch_size
            right = right_convex_hull[right_idx]
```

```
            left_right_orient = orientation(left, right, right_convex_hull[(right_idx + 1) % right_ch_size])
        else:
            right_flag = True

        # opuszczamy punkt na lewej otoczce
        right_left_orient = orientation(right, left, left_convex_hull[(left_idx - 1) % left_ch_size])
        while right_left_orient != -1:
            if right_left_orient == 0 and dist_sq(right, left) >= dist_sq(right, left_convex_hull[(left_idx - 1) % left_ch_size]):
                left_flag = False
                break

            left_idx = (left_idx - 1) % left_ch_size
            left = left_convex_hull[left_idx]
            right_left_orient = orientation(right, left, left_convex_hull[(left_idx - 1) % left_ch_size])
        else:
            left_flag = True


    lower_tangent_left_idx = left_idx
    lower_tangent_right_idx = right_idx

    merged_convex_hull = [ ]

    while upper_tangent_left_idx != lower_tangent_left_idx:
        merged_convex_hull.append(left_convex_hull[upper_tangent_left_idx])
        upper_tangent_left_idx = (upper_tangent_left_idx + 1) % left_ch_size
    else:
        merged_convex_hull.append(left_convex_hull[lower_tangent_left_idx])


    while lower_tangent_right_idx != upper_tangent_right_idx:
        merged_convex_hull.append(right_convex_hull[lower_tangent_right_idx])
        lower_tangent_right_idx = (lower_tangent_right_idx + 1) % right_ch_size
    else:
        merged_convex_hull.append(right_convex_hull[lower_tangent_right_idx])

    return merged_convex_hull


def divide_conq(point2_set: List[Point], k: int = 2) -> Union[List[Point], None]:
    if len(point2_set) < 3 or k <= 0: return None


```

```python
    def divide_conq_rec(point2_set: List[Point]) -> List[Point]:
        if len(point2_set) <= 2: return point2_set
        elif len(point2_set) <= k: return graham(point2_set)

        left_convex_hull = divide_conq_rec(point2_set[ : len(point2_set)
   // 2])
        right_convex_hull = divide_conq_rec(point2_set[len(point2_set) //
    2 : ])

        return merge_convex_hulls(left_convex_hull, right_convex_hull)

    point2_set.sort(key = operator.itemgetter(0, 1))

    return divide_conq_rec(point2_set)
```

4.6 Algorytm Chana

4.6.1 Opis działania

Główna część algorytmu Chana składa się się z dwóch części:

1. Pierwsza, która składa się na :
   - Podział zbioru punktów Q na podzbiory Q_i o w miarę równych ilościach punktów w nich zawartych, z czego żaden nie zawiera więcej niż dane m.
   - Wyznaczenie otoczek C_i
2. Druga polega na wykonaniu algorytmu na wzór Jarvisa, tylko na otoczkach. Dokładniej mówiąc:
   - Startujemy z najniższy wierzchołkeim z całego zbioru Q i dodajemy go do finalnej otoczki jako pierwszy wierzchołek.
   - Dla każdego punktu należącego do otoczki, możemy znaleźć jego następnego sąsiada w otoczce idąc w kolejności przeciwnej do ruchu wskazóek zegara. Aby to zrobić należy wybrać spośród zbioru punktów utworzonego z: punktów tworzących prawą styczną z otoczkami C_i dla rozważanego wierzchołka, kolejnego punktu podotoczki do której dany punkt należy taki wierzchołek, że wszystkie inne wierzchołki z tego zbioru są na lewo od niego.
   - W ten sposób wyznaczamy kolejne wierzchołki otoczki, dopóki następnym wierzchołkiem otoczki nie jest jej pierwszy punkt. Wtedy otoczka jest pełna i kończymy algorytm.
3. Zwracamy punkty otoczki.

Jednakże nadrzędną istotą powyższego algorytmu jest to, że wykona się on w drugiej części w co najwyżej m krokach(dany rozmiar podzbioru). Inaczej mówiąc m musi być większe bądź równe (w idealnym przypadku) liczbie punktów należących do otoczki k. Jeśli wykonamy m kroków i wciąż nie mamy otoczki, to przerywamy algorytm. I próbujemy z większym m. Aby nie popsuć złożoności dużą ilością powtórzeń głównej części algorytmu najlepiej za każdym razem parametr m podnosić do kwadratu. W przypadku gdy $m \geqslant n$ za m przyjmujemy n. Wtedy algorytm Chana sprowadza się do algorytmu Grahama.

4.6.2 Szczegóły

- Najniższy punkt zbioru wyznaczamy w czasie liniowym. W trakcie podziału zpewniamy, że znajdzie się on w otoczce C_0 w indeksie 0.
- Podział zapewia, że w każdym podzbiorze będzie m, lub m-1 punktów.
- Znajdowanie stycznej wykonujemy w czasie O(log n). Wykorzystujemy do tego binary search, można tak zrobić, ponieważ otoczka zadana jest przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Najpierw obieramy wskaźniki l i r. Następnie obliczamy mid $=(l+r)/2$. Gdy obaj sąsiedzi mida są po lewej stronie - mid jest szukanym indeksem. Gdy mid znajduje się po po prawej stronie odcinka pq, gdzie p, to pierwszy wierzchołek otoczki(pierwszy$l$), a q, to punkt do którego stycznej szukamy. Wtedy prawa styczna znajduje się w przedziale mid+1,r i urachamiamy tą samą funkcję dla tych indeksów. Gdy mid jest współliniowy, bądź po lewej stronie z pq, to jeśli jego następnik(mid+1) jest po prawej stronie odcinka $|qmid|$, to również styczna się znajduje w przedziale mid+1 ,r. W pozostałych przypadkach znajduje się w przedziale l, mid-1.

4.6.3 Złożoność

Złożoność głównej części algorytmu.

- Na złożoność pierwszej części algorytmu składa się:
  - Podział zbioru punktów na podzbiory $O(n)$;
  - Wyznaczenie otoczek dla podzbiorów. Mamy $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ podzbiorów rozmiaru m, dla każdego z nich wyznaczamy otoczkę algorytmem Grahama. Algorytm Grahama działa $O(nlog(n))$. Więc łącznie mamy $O(\lceil \frac{n}{m} \rceil \cdot mlog(m)) = O(nlog(m))$.

  Łącznie dla pierewszej części mamy $O(nlog(m))$, gdzie m jest wybranym maksymalnym rozmiarem podzbiorów.
- Na złożoność drugiej części algorytmu składa się:
  - Wyznaczenie następnego punktu dla każdego punktu z otoczki głównej o rozmiarze k
  - Wyznacznie następnego punktu składa się na wyznaczenie dla każdej z m podotoczek stycznej do tej podotoczki. Styczną wyznaczamy binary searchem w czasie $O(log(m))$ (otoczka C_i ma co najwyżej m wierzchołków). Otoczek jest $\lceil (n/m) \rceil$, a zatem czas wyznaczenia kolejngo wierzchołka otoczki to $O(\lceil (n/m) \rceil log(m))$.

Zakładając, że liczba wierzchołków otoczki $k \leqslant m$(gdy $k > m$ przerywamy algorytm, więc złożoność pozostaje ta sama), to ostatecznie mamy złożoność dla drugiej części rzędu : $O(k\lceil(n/m)\rceil log(m)) = O(nlog(m))$ w idealnym przypadku $O(nlog(k))$

Cała złożoność głównej części algorytmu, to $O(nlog(m))$, gdzie m jest wybraną liczebnością podzbioru. Złożonośc algorytmu dla próbowania algorytmu z kolejnymi m postaci 2^{2^m} dla $m \geqslant 1$, to: w takim razie złożoność można opisać wzorem $\sum_{t=1}^{\lceil loglogk\rceil} O(nlog(2^{2^t})) = O(n * 2^{1+\lceil loglogk\rceil}) = O(nlogk)$

4.6.4 Kod

```
def divide(points, m):
    n = len(points)
    for i in range(1,
                   n):  # gwarantuje, ze w pierwszym zbiorze Qi pierwszy element jest najnizszy, czyli nalezy do otoczki ostatecznej
        if points[i][1] < points[0][1]:
            buf = points[i]
            points[i] = points[0]
            points[0] = buf

    k = math.ceil(n / m)
    Q = [[] for i in range(k)]
    i = 0
    while i < n:
        for j in range(k):
            if i == n:
                break
            Q[j].append(points[i])
            i += 1
    if len(Q[0]) > m:
        return None

    return Q


def compr(p, q, current,
          accur=10 ** (-6)):  # jezeli p jest po prawej  odcinka [current,q] - jest 'wiekszy', to zwracamy 1
    if det(current, p, q) > accur:
        return -1
    elif det(current, p, q) < accur:
        return 1
    else:
        return 0

def nextvert(C, curr):  # dla danego punktu wspolzednymi z Q[i][j] jesli jest to punkt nalezacy do finalnej otoczki, to
    # zwraca nastepny punkt nalezacy do finalnej otoczki zadanego w takich samych wspolzednych Q[nxt[0]][nxt[1]]
    i, j = curr
```

```python
    nxt = (i, (j + 1) % len(C[i]))
    for k in range(len(C)):
        t = tangent(C[i][j], C[k])
        if t != None and k != i and compr(C[nxt[0]][nxt[1]], C[k][t], C[i][j]) > 0 and (k, t) != (curr):
            nxt = (k, t)

    return nxt

def chanUtil(points, m):
    Q = divide(points, m)
    C = []
    for i in range(len(Q)):
        C.append(Graham(Q[i]))

    curr = (0, 0)
    ans = []
    i = 0
    while i < n:
        for j in range(k):
            if i == n:
                break
            Q[j].append(points[i])
            i += 1
    if len(Q[0]) > m:
        return None

    return Q

    def nextvert(C, curr,accur=10**(-7)):  # dla danego punktu wspolzednymi z Q[i][j] jesli jest to punkt nalezacy do finalnej otoczki, to
        # zwraca nastepny punkt nalezacy do finalnej otoczki zadanego w takich samych wspolzednych Q[nxt[0]][nxt[1]]
        i, j = curr
        nxt = (i, (j + 1) % len(C[i]))
        for k in range(len(C)):
            if k == i:
                continue

            t = tangent_r(C[i][j], C[k])
            if t == None:
                print("zle")
                continue

            if  det(C[i][j],C[nxt[0]][nxt[1]],C[k][t])<accur and (k,t)!=(curr):
                if det(C[i][j],C[nxt[0]][nxt[1]],C[k][t])>-accur:
                    if length([C[k][t],C[i][j]]) <= length([C[nxt[0]][nxt[1]],C[i][j]]):
                        continue
                nxt=(k,t)

        return nxt
```

```
    def chanUtil(points, m):
        Q = divide(points, m)
        C = []
        for i in range(len(Q)):
            C.append(graham(Q[i]))

        curr = (0, 0)
        ans = []
        i = 0

        while i < m:
            ans.append(C[curr[0]][curr[1]])

            nxt = nextvert(C, curr)
            if nxt == (0, 0):
                return ans
            curr = nxt
            i += 1

        return None


    def chan(points, visual=False):
        plot = None
        n = len(points)
        m = 4
        hoax = None


        return hoax

    return hoax
```

4.7 Algorytm QuickHull

4.7.1 Opis działania

Algorytm QuickHull polega na rekurencyjnym wyznaczaniu kolejnych punktów otoczki.

1. Algorytm rozpoczynamy od wyznaczenie dwóch punktów skrajnych a,b - tj. o najmniejszej i największej współżędnej x-owej.

2. Następnie uruchamiamy funkcję rekurencyjnego znajdowania łuku należącego do otoczki między danym punktami należącymi do tej otoczki p,q na prawo od odcinka —p,q—. Otoczką jest suma punktów a, wyniku działania funkcji rekurencyjnej dla odcinka —a,b—,b oraz wyniku działania funkcji rekurencyjnej dla —b,a—

3. Funkcja rekurencyjnego wyznaczenia łuku należącego do otoczki między punktami p i q polega na :

   - Wyznaczeniu nabardziej oddalonego punktu na prawo od —p,q— jeśli są punkty po prawej.

- Jeśli nie ma takich punktów, to takiego łuku nie ma i zwracamy pustą tablicę.
- W przeciwnym przypadku p,q należą do otoczki, to wyznaczony punkt skrajny r musi należeć do otoczki.
- Skoro p,k,r należy do otoczki, to wszystkie wierzchołki wewnątrz trójkąta pkr napewno do najmniej nie należą - usuwamy je.
- Szukany łuk, to suma działania tej samej funkcji dla punktów p,r, punktu r , oraz wyniku tej funkcji dla punktów r,q w zadanej kolejności.
- Na koniec zwracamy wyznaczony w ten sposób łuk.

4.7.2 Szczegóły

- Rozpatrywane punkty p,q,r zawsze są podane w kolejności przeciwnej do ruchu wskazówek zegara. Aby usunąć punkty wewnątrz takich trójkątów należy dla każdego punktu z rozważanych sprawdzić, należy do danego trójkąta.
- Sprawdzenie, czy dany punkt należy do trójkąta pkr wykonujemy poprzez sprawdzenie, czy dla każdego z odcinków pr, rq, qp dany punkt znajduje się na lewo od tego odcinka, bądź jest z nim współliniowy.
- Porównywanie odległości punktów r znajdujących się na prawo od odcinka pq wykonujemy za pomocą wyznacznika. Jest on wprostproporcjonlny do pola trójkąta rozpiętego na wektorach pq,pr. Ponieważ odcinek pq ma stałą długość dla każdego r, to wyznacznik ten jest wprostproporcjonalny do wysokości tego trójkąta opuszczonej na bok pq - odległości punktów.

4.7.3 Złożoność

Pesymistyczna złożoność algorytmu to $O(n^2)$ - gdy wszystkie punkty zbioru znajdują się w otoczce. Jendakże w średnim przypadku złożoność wynosi $O(nlogn)$

4.7.4 Kod

```
from copy import deepcopy
from lib.det import *

def furthest(a, b, considering):
    n = len(considering)
    i = 0
    ans = None
    while i < n:
        if det(a, b, considering[i]) < 0:  # rozwazany wierzcholek jest po prawej stronie ab
            if ans == None or det(a, b, considering[i]) < det(a, b,
                                                                    ans):  # |det(a,b,c)| = 1/2|ab|*h, gdzie h jest wysokoscia z c na ab
                ans = considering[i]
        i += 1
```

```
    return ans


def insideTriangle(a, b, c, i):
    accur=10**(-7)
    if det(a, b, i) > -accur and det(b, c, i) > -accur and det(c, a, i) > -accur:
        return True
    return False


def removeInner(a, b, c, considering):
    new=[]
    for i in considering:
        if not insideTriangle(a, b, c, i):
            new.append(i)
    considering.clear()
    considering+=new

def quickHullUtil(a, b, considering):
    if len(considering) == 0:
        return []

    c = furthest(a, b, considering)
    if c == None:
        return []
    considering.remove(c)

    removeInner(a, c, b, considering)
    return quickHullUtil(a, c, considering) +[c]+ quickHullUtil(c, b, considering)


def quickHull(points):
    a = min(points, key=lambda x: x)
    b = max(points, key=lambda x: x)

    considering = deepcopy(points)

    considering.remove(a)
    considering.remove(b)
```

5 Wydajność algorytmów

Testy prowadzone były na następujących zbiorach:

- typ A - losowo rozłożone punkty płaszczyzny o określonych zakresach współrzędnych
- typ B - losowo rozłożone punkty leżące na okręgu o zadanych parametrach
- typ C - losowo rozłożone punkty leżące na bokach prostokąta o zadanych parametrach

Tablica 1: Czas wykonania algorytmu Grahama w zależności od typu zbioru testowego oraz mocy zbioru punktów.

	Liczba punktów									
	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500
Typ zbioru	Czas wykonania [s]									
A	0.0239	0.0331	0.045	0.0586	0.072	0.0847	0.0983	0.1122	0.1273	0.141
B	0.0191	0.0299	0.0413	0.0531	0.0637	0.0768	0.0908	0.0973	0.122	0.1284
C	0.069	0.1115	0.1392	0.1878	0.2349	0.2736	0.3153	0.351	0.3988	0.4601
D	0.4256	0.6523	0.924	1.2255	1.4233	1.8752	1.9285	2.3207	2.5692	2.88

- typ D - losowo rozłożone punkty leżące na 2. przekątnych oraz 2. bokach kwadratu, umiejscowionego tak, że dwa boki pokrywają sie z osiami układu

Charakterystyki zbiorów zostały dobrane w taki sposób aby odzwierciedlać możliwie różne zachowanie się poszczególnych algorytmów w zależności od ilości przypadków zdegenerowanych (liczebność współliniowych otoczek), ilości potrzebnych do wykonania porównań i operacji. Bardziej szczegółowe omówienie charakterystyki algorytmów dla poszczególnych zbiorów znajduje się w kolejnych sekcjach.

5.1 Algorytm Grahama

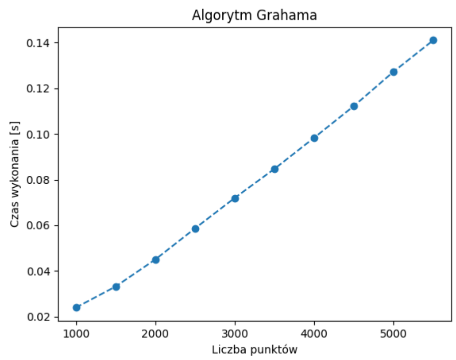
W tabeli 1 przedstawiamy czasy uzyskane przez algorytm Grahama dla kolejnych zbiorów punktów, przy różnej liczebności punktów w zbiorze. Na wykresach 1, 2, 3, 4 widzimy ilustrację danych z tabeli 1.

Kształt dla każdego z typu zbiorów dla algorytmu Grahama przypomina wykres liniowy. Zgdza się to z przewidywaniami teoretycznymi dla tego algorytmu - ma on złożoność $O(nlogn)$. Wykres o takiej złożoności taka bardzo przypomina wykres liniowy. Widzimy, na ilustracjach 1, 2, 3, 4, że algorytm ma taką samą charakterystykę dla wszystkich testowanych zbiorów punktów, choć dla zbioru typu C i w szczególności zbiotu typu D działa znacznie wolniej, jest to związane z dużą liczbą punktów współliniowych na otoczce, a zatem szczególnie wiele razy wykonuje się punkt $6(a)$ algorytmu (ściąganie wierzchołka ze stosu).

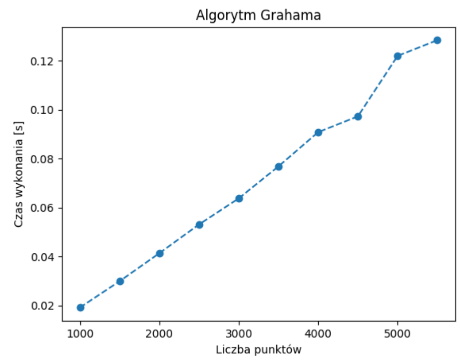
5.2 Algorytm górna-dolna

W tabeli 2 przedstawiamy czasy uzyskane przez algorytm górna-dolna dla kolejnych zbiorów punktów, przy różnej liczebności punktów w zbiorze. Na wykresach 5, 6, 7, 8 widzimy ilustrację danych z tabeli 2.

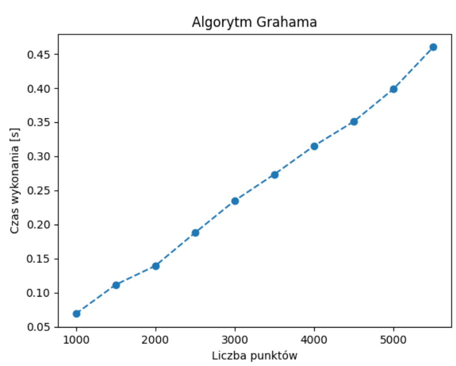
Charakterystyka algorytmu jest jednakowa dla wszystkich zbiorów testowych – jest to algorytm mało wrażliwy na typ danych wejściowych (różne dane nie powodują dgeneracji złożoności, a co za tym idzie wydłużenia czasu wykonania). Co przejawia się podobieństwem poszczególnych wykresów 5, 6, 7, 8 dla kolejnych zbiorów punktów. Kształty wykresów zgadzają się z typem złożoności algorytmu – $O(nlgn)$. Widzimy, że algorytm



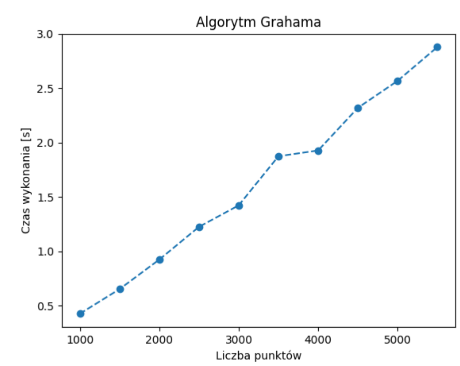
Rysunek 1: Zbiór typu A, algorytm Grahama



Rysunek 2: Zbiór typu B, algorytm Grahama



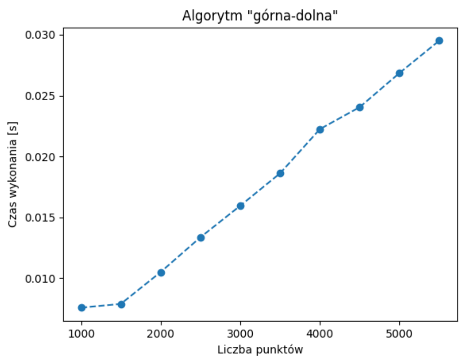
Rysunek 3: Zbiór typu C, algorytm Grahama



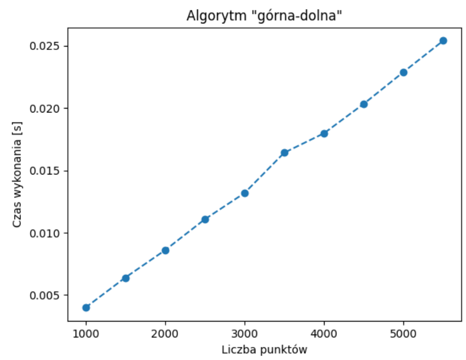
Rysunek 4: Zbiór typu D, algorytm Grahama

Tablica 2: Czas wykonania algorytmu górna-dolna w zależności od typu zbioru testowego oraz mocy zbioru punktów.

	Liczba punktów									
	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500
Typ zbioru	Czas wykonania [s]									
A	0.0076	0.0079	0.0105	0.0134	0.016	0.0186	0.0222	0.0241	0.0269	0.0295
B	0.004	0.0064	0.0086	0.0111	0.0132	0.0164	0.018	0.0203	0.0229	0.0254
C	0.0155	0.0241	0.0321	0.0388	0.0486	0.0549	0.0651	0.0711	0.0784	0.084
D	0.0635	0.0927	0.1261	0.1566	0.1875	0.2217	0.259	0.2897	0.316	0.3495



Rysunek 5: Zbiór typu A, algorytm górna-dolna



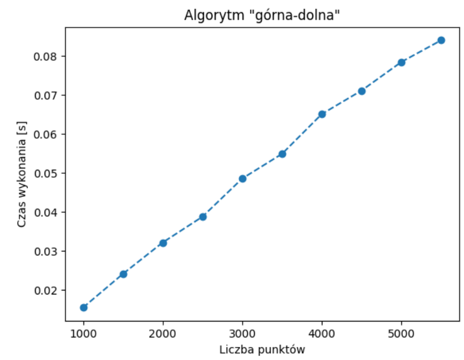
Rysunek 6: Zbiór typu B, algorytm górna-dolna

górna dolna uzyskuje bardzo zbliożone czasy dla zbiorów typu A, B, D. Dla zbioru typu C notujemy ok. 4-krotnie krótszy czas wykonania (wykres 7), na co ma wpływ stosunkowa mała liczba wykonań usuwania wierzchołków ze stosu.

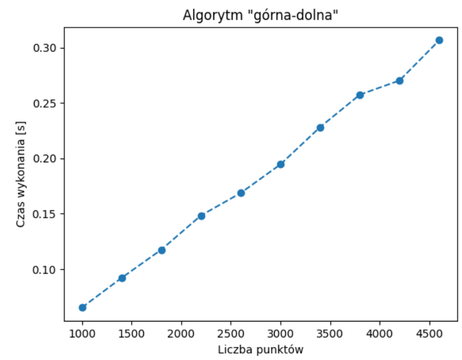
5.3 Algorytm Chana

W tabeli 3 przedstawiamy czasy uzyskane przez algorytm Chana dla kolejnych zbiorów punktów, przy różnej liczebności punktów w zbiorze. Na wykresach 9, 10, 11, 12 widzimy ilustrację danych z tabeli 3.

Teorytyczna złożoność chana wynosi O(nlogk), gdzie k jest ilością wierzchołków w otoczce.Analizując wykresy czasu od liczebności zbioru wejściowego dla Chana ilość wierzchołków w otoczce wpływa na szybkość jego działania. Dla chmury punktów (zbiór typu A) działał bardzo nieregularnie (różna liczba wierzchołków otoczki w zbiorze typu A). Natomiast dla rozkładów punktów, w których liczba wierzchołków otoczki jest w większości przypadków stała (zbiór typu D) lub niewielka – algorytm radził sobie dobrze. Wygląda na to, że przewidywania teoretyczne po części sprawdzają się dla Chana, jego wykres ma kształt w przybliżeniu liniowy (dokładniej liniowo-logarytmiczny), a dla okręgu, gdzie jest najwięcej wierzchołków w otoczce jest najbardziej stromy. Jednakże poza tym, że ma najlepszą złożoność asymptotyczną, to najwyjaśniej implementacja po-



Rysunek 7: Zbiór typu C, algorytm górna-dolna



Rysunek 8: Zbiór typu D, algorytm górna-dolna

Tablica 3: Czas wykonania algorytmu Chana w zależności od typu zbioru testowego oraz mocy zbioru punktów.

	Liczba punktów									
	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500
Typ zbioru	Czas wykonania [s]									
A	0.1055	0.1544	0.3575	0.2408	0.5449	0.6155	0.7104	0.7904	0.8621	0.9826
B	0.3714	0.5483	0.6962	0.8893	1.0799	1.2537	1.415	1.827	1.7746	1.9095
C	0.2457	0.5615	0.727	0.9188	1.1007	1.3044	1.5073	1.6875	1.88	2.1234
D	0.6322	0.9372	1.2306	2.1543	2.8556	6.0844	2.4157	3.943	3.094	4.7075

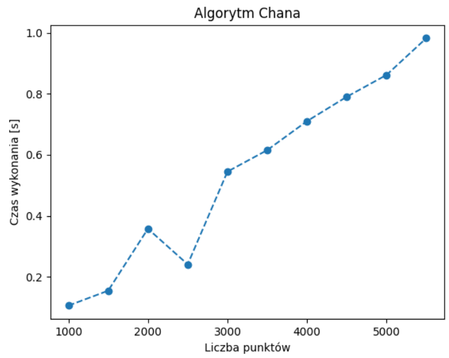
sługująca się w dużym stopniu operacjami na listach języka Python posiada największy współczynnik stały w porównaniu z innymi algorytmami i dlatego ostatecznie jest stosunkowo wolny. W zbiorze typu D algorytm Chana zachowuje się (w stosunku np. do algorytmu górna-dolna) niestabilnie (w sensie w dużej czułości algorytmu na dokładne ułożenie punktów w zbiorze typu D)

5.4 Algorytm QuickHull

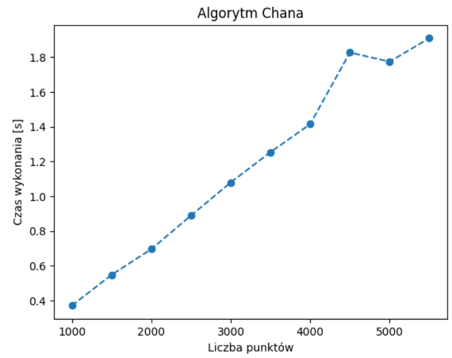
W tabeli 4 przedstawiamy czasy uzyskane przez algorytm QuickHull dla kolejnych zbiorów punktów, przy różnej liczebności punktów w zbiorze. Na wykresach 13, 14, 15, 16 widzimy ilustrację danych z tabeli 4.

Algorytm QuickHull ma podobną charakterystykę dla wszystkich zbiorów testowych (jest mało wrażliwy na typ danych wejściowych), co możemy zaobserwować na odpowiadających mu wykresach. Uzyskana charakterystyka pokrywa się z przewidywaniami teoretycznymi (kształt wykresu wpasowuje się w charakterystykę funckji liniowo-wykładnicznej).

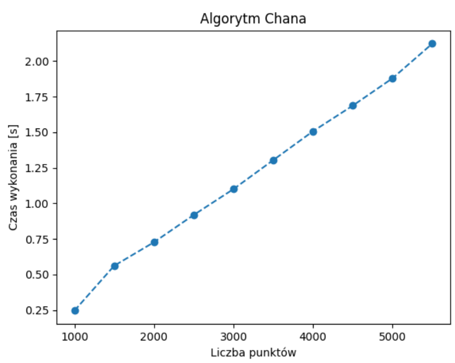
Widzimy też, że algorytm ten charakteryzuje się generalnie najkrótszym czasem wykonania w porównaniu z analizowanymi do tej pory algorytmami. Algorytm zachowuje się stabilnie w sensie: zmiana typu danych wejściowych nie wpływa w widoczny sposób



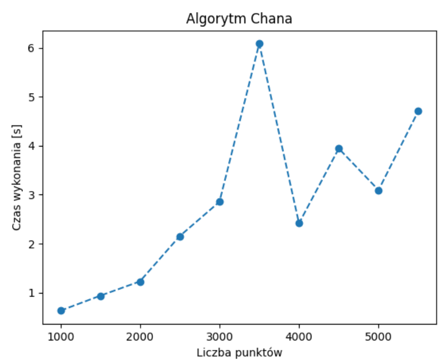
Rysunek 9: Zbiór typu A, algorytm Chana



Rysunek 10: Zbiór typu B, algorytm Chana



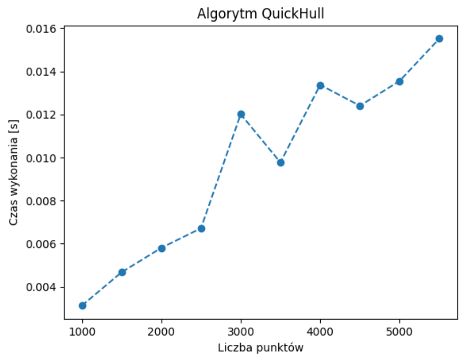
Rysunek 11: Zbiór typu C, algorytm Chana



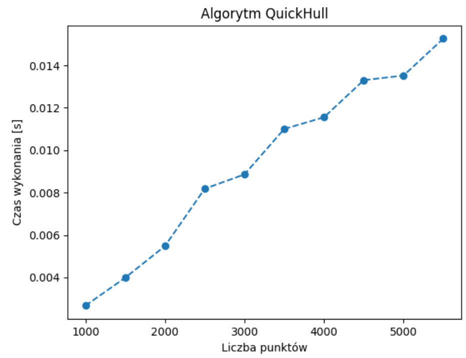
Rysunek 12: Zbiór typu D, algorytm Chana

Tablica 4: Czas wykonania algorytmu QuickHull w zależności od typu zbioru testowego oraz mocy zbioru punktów.

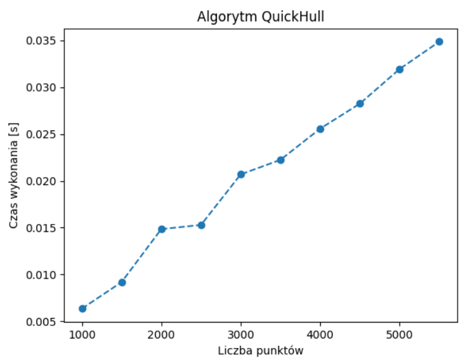
	Liczba punktów									
	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500
Typ zbioru	Czas wykonania [s]									
A	0.0031	0.0047	0.0058	0.0067	0.012	0.0098	0.0134	0.0124	0.0136	0.0155
B	0.0027	0.004	0.0055	0.0082	0.0089	0.011	0.0116	0.0133	0.0135	0.0153
C	0.0064	0.0092	0.0148	0.0153	0.0207	0.0222	0.0256	0.0282	0.0319	0.0348
D	0.0287	0.0426	0.0551	0.0702	0.0847	0.0986	0.1143	0.1294	0.1411	0.1562



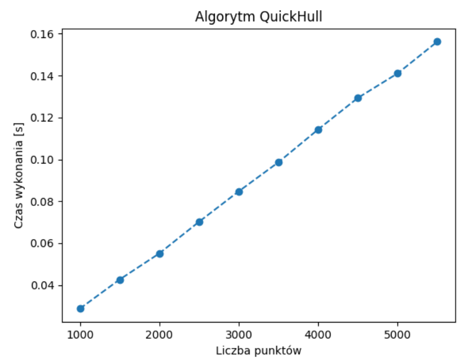
Rysunek 13: Zbiór typu A, algorytm QuickHull



Rysunek 14: Zbiór typu B, algorytm QuickHull



Rysunek 15: Zbiór typu C, algorytm QuickHull



Rysunek 16: Zbiór typu D, algorytm QuickHull

na zachowanie się algorytmu, co również pokrywa się z oczekiwaniami teoretycznimi, ponieważ nawet dla dużej liczebności zbiorów punktów, algorytm szybko redukuje tą liczbę.

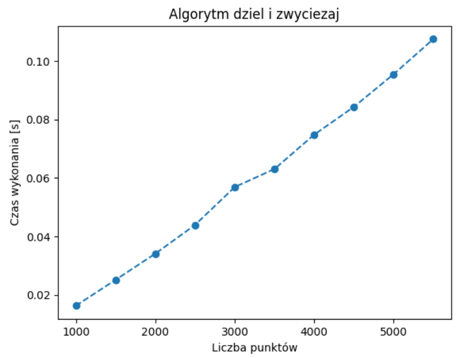
5.5 Algorytm dziel i zwyciężaj

W tabeli 5 przedstawiamy czasy uzyskane przez algorytm Dziel i zwyciężaj dla kolejnych zbiorów punktów, przy różnej liczebności punktów w zbiorze. Na wykresach 17, 18, 19, 20 widzimy ilustrację danych z tabeli 5.

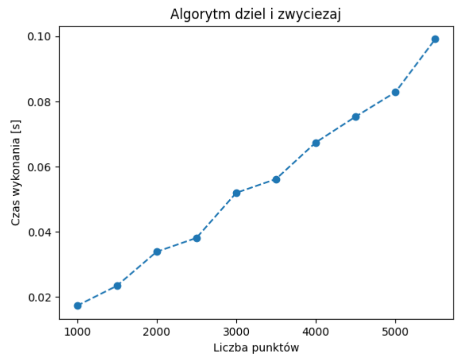
Uzyskana charakterystyka algorytmu dziel i zwyciężaj zgadza się z przewidywaniami teoretycznymi. Algorytm ten jest algorytmem niewrażliwym na typ danych wejściowych, co dobrze ilustrują wyżej wymienione wykresy (charakterystyka wykresu nie zmienia się w zależności od rodzaju danych wejściowych) – zgadza się to z przewidywaniami teoretycznymi. Testowanie algorytmu pokazało, że przy dużych mocach zbiorów testowych, w celu uzyskania lepszych rezultatów, należy zwiększyć stałą k (przy $n = 5000$ najlepiej

Tablica 5: Czas wykonania algorytmu dziel i zwyciężaj w zależności od typu zbioru testowego oraz mocy zbioru punktów.

	Liczba punktów									
	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500
Typ zbioru	Czas wykonania [s]									
A	0.0163	0.0251	0.0341	0.0439	0.0569	0.0631	0.0748	0.0844	0.0955	0.1076
B	0.0173	0.0234	0.0339	0.0381	0.052	0.0562	0.0675	0.0754	0.0829	0.0992
C	0.0441	0.0683	0.0877	0.1189	0.1516	0.1863	0.2067	0.2437	0.27	0.3132
B	0.1634	0.2474	0.3518	0.4703	0.5694	0.6705	0.7849	0.8928	1.0458	1.1565



Rysunek 17: Zbiór typu A, algorytm dziel i zwyciężaj



Rysunek 18: Zbiór typu B, algorytm dziel i zwyciężaj

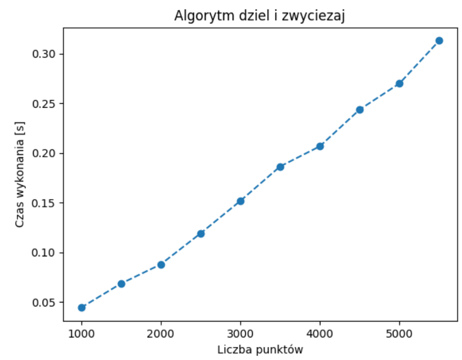
sprawdzoło się $k \in [40, 50]$).

W zbiorze typu D obserwujemy wzrost czasu wykonania (ok. 4-krotny) co może być skutkiem zastosowania algorytmu Grahama do wyznaczania otoczek w przypadku bazowym (algorytm Grahama działał stosunkowo wolno w zbiorze typu D ze względu na dużą ilość operacji korygowania otoczki (usuwania wierzchołków ze stosu).

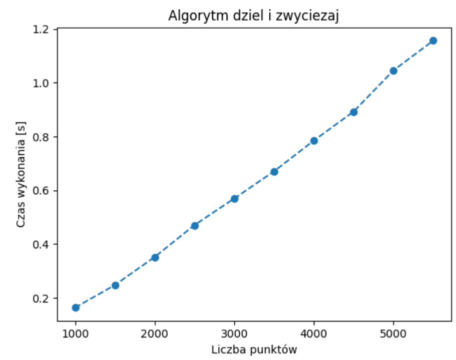
5.6 Algorytm przyrostowy

W tabeli 6 przedstawiamy czasy uzyskane przez algorytm przyrostowy i zwyciężaj dla kolejnych zbiorów punktów, przy różnej liczebności punktów w zbiorze. Na wykresach 21, 22, 23, 24 widzimy ilustrację danych z tabeli 6.

Uzyskana charakterystyka algorytmu odpowiada oczekiwaniom opartym na wiedzy teoretycznej – algorytm zachowuje się zgodnie z funkcją liniowo-logarytmiczną. Algorytm ten jest algorytmem niewrażliwym na typ danych wejściowych, w sensie braku zmiany charakterystyki. Dla zbioru typu B obserwujemy znaczący wzrost czasu wykonania w stosunku do pozostałych typów zbiorów, nawet ok. 25 razy, co jest bezpośrednio spowodowane dużą liczbą puntków otoczki, a co za tym idzie – możliwie największą liczbą operacji przy aktualizacji otoczki.



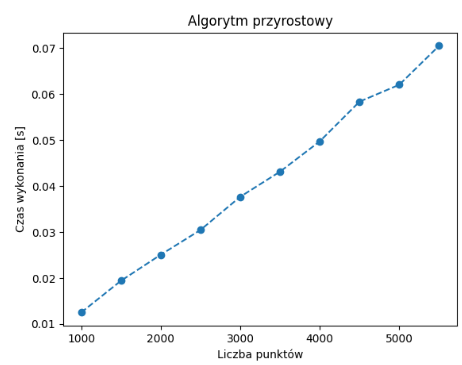
Rysunek 19: Zbiór typu C, algorytm dziel i zwyciężaj



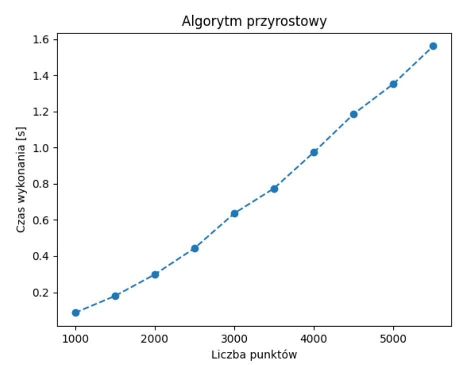
Rysunek 20: Zbiór typu D, algorytm dziel i zwyciężaj

Tablica 6: Czas wykonania algorytmu przyrostowego w zależności od typu zbioru testowego oraz mocy zbioru punktów.

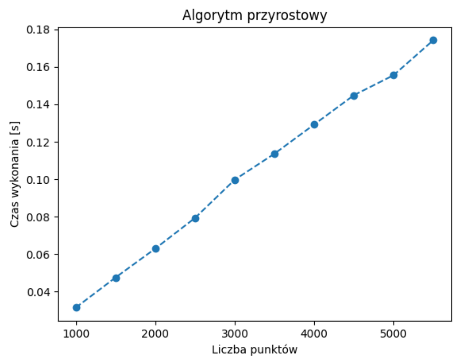
	Liczba punktów									
	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500
Typ zbioru	Czas wykonania [s]									
A	0.0125	0.0194	0.0251	0.0305	0.0377	0.0431	0.0497	0.0584	0.0621	0.0705
B	0.0864	0.1788	0.2978	0.4428	0.6359	0.7745	0.9738	1.1858	1.3526	1.5613
C	0.0315	0.0475	0.063	0.0793	0.0997	0.1136	0.1292	0.1449	0.1555	0.1742
D	0.1373	0.1992	0.2715	0.326	0.4165	0.4639	0.5195	0.5937	0.6773	0.7446



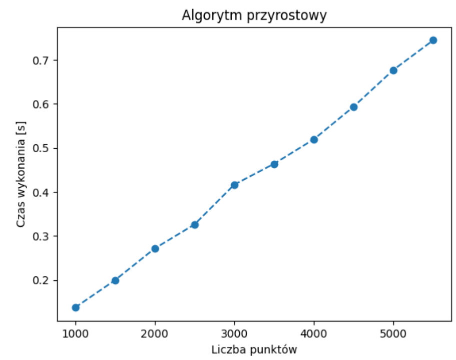
Rysunek 21: Zbiór typu A, algorytm przyrostowy



Rysunek 22: Zbiór typu B, algorytm przyrostowy



Rysunek 23: Zbiór typu C, algorytm przyrostowy



Rysunek 24: Zbiór typu D, algorytm przyrostowy

Tablica 7: Czas wykonania algorytmu Jarvisa w zależności od typu zbioru testowego oraz mocy zbioru punktów.

	Liczba punktów									
	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500
Typ danych	Czas wykonania [s]									
A	0.1379	0.2058	0.2217	0.213	0.3311	0.3635	0.307	0.3775	0.3808	0.3825
B	5.684	12.882	22.737	35.648	51.305	69.425	90.227	113.80	141.27	169.58
C	0.0529	0.077	0.1046	0.1306	0.1543	0.184	0.2086	0.2304	0.2571	0.2858
D	0.1094	0.1572	0.2167	0.2611	0.3129	0.3711	0.4218	0.4774	0.5255	0.5886

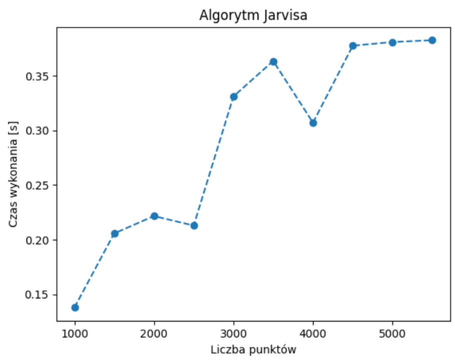
5.7 Algorytm Jarvisa

W tabeli 7 przedstawiamy czasy uzyskane przez algorytm Jarvisa i zwyciężaj dla kolejnych zbiorów punktów, przy różnej liczebności punktów w zbiorze. Na wykresach 25, 26, 27, 28 widzimy ilustrację danych z tabeli 7.

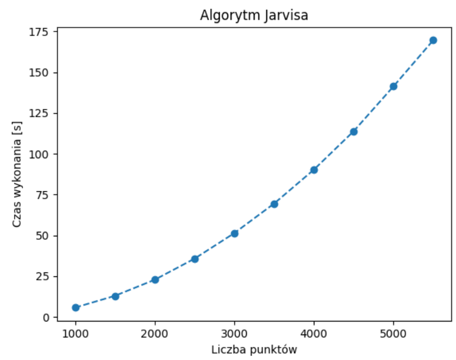
Algorytm Jarvisa zachowywał się zgodnie z przewidywaniami teoretycznymi. Jego złożoność wynosi O(kn), gdzie k to liczba wierzchołków w otoczce, a zatem jego złożoność *mocno* zależy od liczby punktów otoczki. Dla chmury punktów (zbioru typu A), gdzie liczba wierzchołków otoczki może się znacząco wahać - zahowywał się nieregularnie. Dla zbioru typu B (punkty na okręgu), gdzie k n algorytm Jarvisa staje się algorytmem kwadratowym, co bardzo wyraźnie widzimy na wykresie 26. Dla zbioru o rozmiarze 5500 wykonywał się niemal 3 min. Dla zbiorów o małej liczbie punktów otoczki (C, D) był porównywalny z algorytmami liniowo-logarytmicznymi.

6 Porównanie algorytmów

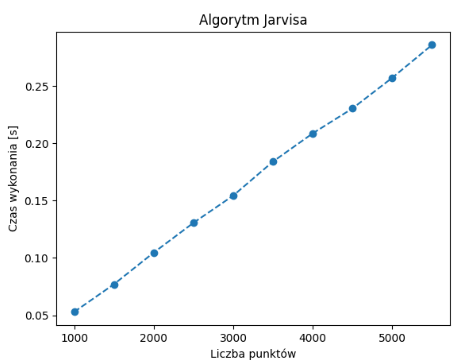
Ze względu na różną charakterystykę zbiorów punktów i zachowania algorytmów, porównania dzielimy na 4 sekcje, każda odpowiadająca wybranemu typowi zbioru punktów testowych.



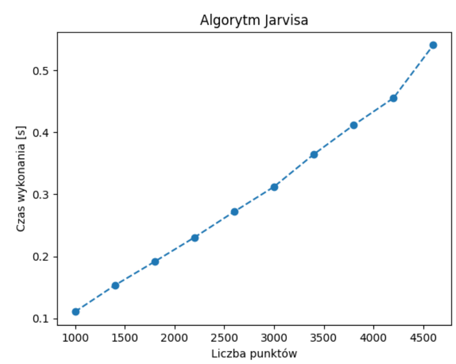
Rysunek 25: Zbiór typu A, algorytm Jarvisa



Rysunek 26: Zbiór typu B, algorytm Jarvisa



Rysunek 27: Zbiór typu C, algorytm Jarvisa



Rysunek 28: Zbiór typu D, algorytm Jarvisa

Dla uproszczenia zapisu w tabelach wprowazdamy oznaczenia dla poszczególnych algorytmów:

- GR – algorytm Grahama
- LU – algorytm górna dolna
- CH – algorytm Chana
- QH – algorytm QuickHull
- DC – algorytm dziel i zwyciężaj
- IN – algorytm przyrostowy
- JR – algorytm Jarvisa

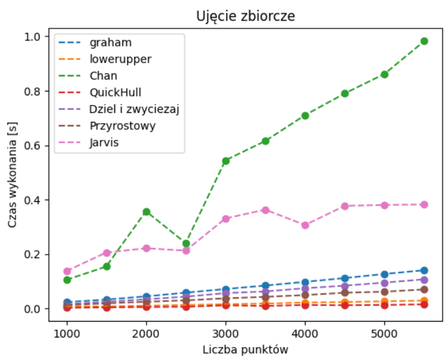
6.1 Zbiór typu A

Zbiór losowych punktów płaszczyzny, charakteryzuje się różną (w zależności od danej generacji) liczbą wierzchołków otoczki, jednocześnie posiadając małą liczbę konfiguracji puntków współliniowych (przez konfigurację rozumiemy układ rozpoznawany jako współliniowy w konkretnych algorytmach, np. algorytmie Grahama)

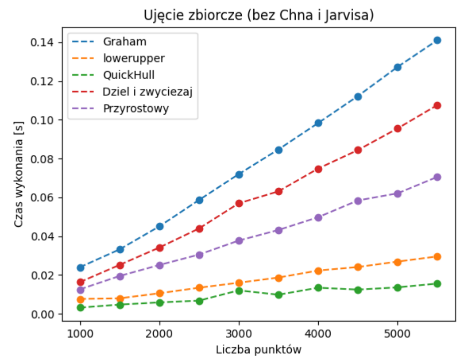
Tablica 8: Czasy wykonania poszczególnych algorytmów dla zbioru typu A przy różnych mocach zbiorów punktów.

	Liczba punktów									
	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500
Algorytm	Czas wykonania [s]									
GR	0.0239	0.0331	0.045	0.0586	0.072	0.0847	0.0983	0.1122	0.1273	0.141
LU	0.0076	0.0079	0.0105	0.0134	0.016	0.0186	0.0222	0.0241	0.0269	0.0295
CH	0.1055	0.1544	0.3575	0.2408	0.5449	0.6155	0.7104	0.7904	0.8621	0.9826
QH	0.0031	0.0047	0.0058	0.0067	0.012	0.0098	0.0134	0.0124	0.0136	0.0155
DC	0.0163	0.0251	0.0341	0.0439	0.0569	0.0631	0.0748	0.0844	0.0955	0.1076
IN	0.0125	0.0194	0.0251	0.0305	0.0377	0.0431	0.0497	0.0584	0.0621	0.0705
JR	0.1379	0.2058	0.2217	0.213	0.3311	0.3635	0.307	0.3775	0.3808	0.3825

- Na wykresie 29 widzimy, że wszystkie algorytmy $O(nlgn)$, w stosunku do algorytmów Jarvisa i Chana, zachowywały się porównywalnie.
- Algorytmy Jarvisa i Chana wykazały się zdecydowanie najwolniejszym działaniem – przy $n = 5500$ algorytm Chana działał ok. 60 razy wolniej niż QuickHull, a ok. 13.5 raza wolniej od średniego czasu wykonania algorytmów liniowo-logarytmicznych.



Rysunek 29: Zbiór typu A, zestawienie



Rysunek 30: Zbiór typu A, zestawienie bez Jarvisa i Chana

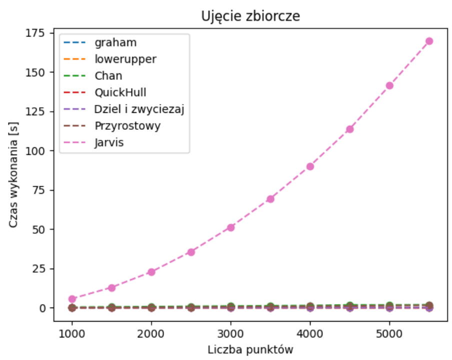
- Algorytm Jarvisa działał zdecydowanie wolniej od algorytmów liniowo-logarytmicznych – średno ok. 5.5 raza wolniej od średniego czasu wykonania algorytmów liniowo-logarytmicznych.
- Z wykresu 30 widzimy wyraźnie, że najlepsze czasy wykonania uzyskał algorytm QuickHull.
- Spośród algorytmów liniowo-logarymtmicznych najwolniejszym był algorytm Grahama.

6.2 Zbiór typu B

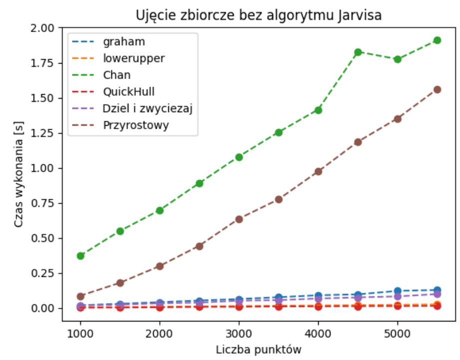
Zbiór losowych punktów okręgu. Charakteryzuje się możliwie największą liczbą punktów otoczki (wszystkie punkty zbioru należą do otoczki).

Tablica 9: Czasy wykonania poszczególnych algorytmów dla zbioru typu B przy różnych mocach zbiorów punktów.

	Liczba punktów									
	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500
Algorytm	Czas wykonania [s]									
GR	0.0191	0.0299	0.0413	0.0531	0.0637	0.0768	0.0908	0.0973	0.122	0.1284
LU	0.004	0.0064	0.0086	0.0111	0.0132	0.0164	0.018	0.0203	0.0229	0.0254
CH	0.3714	0.5483	0.6962	0.8893	1.0799	1.2537	1.415	1.827	1.7746	1.9095
QH	0.0027	0.004	0.0055	0.0082	0.0089	0.011	0.0116	0.0133	0.0135	0.0153
DC	0.0173	0.0234	0.0339	0.0381	0.052	0.0562	0.0675	0.0754	0.0829	0.0992
IN	0.0864	0.1788	0.2978	0.4428	0.6359	0.7745	0.9738	1.1858	1.3526	1.5613
JR	5.68	12.88	22.73	35.64	51.30	69.42	90.22	113.80	141.27	169.58



Rysunek 31: Zbiór typu B, zestawienie



Rysunek 32: Zbiór typu B, zestawienie bez Jarvisa

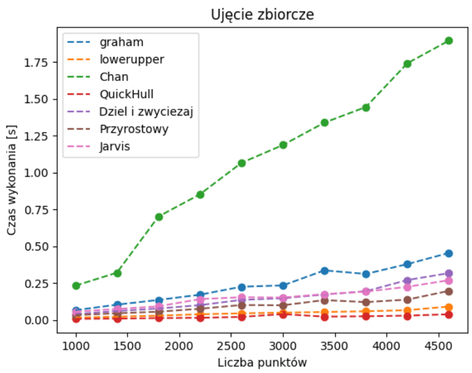
- Zgodnie z oczekiwaniami, najwolniejszym algorytmem jest algorytm Jarvisa, który dla $n = 5500$ wykonywał się ok. 11000 razy wolniej od algorytmu QuickHull (tabela 9, wykres 31).
- Najszybszym sposród testowanych algorytmów jest algorytm QuickHull.
- Algorytm górna–dolna ma czas wykonania bardzo bliski algorytmowi QuickHull.
- Spośród algorytmów typowo liniowo-logarytmicznych (względem n) najwolniejszym jest algorytm przyrostowy (wykres 32)

6.3 Zbiór typu C

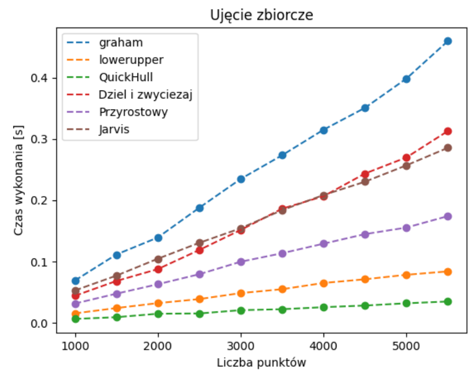
Zbiór punktów leżących na obwodzie prostokąta. Charakteryzuje się ograniczoną przez stałą $k = 8$ liczbą punktów otoczki oraz dużą liczba konfiguracji współliniowych (sens jak w zbiorze typu A).

Tablica 10: Czasy wykonania poszczególnych algorytmów dla zbioru typu C przy różnych mocach zbiorów punktów.

	Liczba punktów									
	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500
Algorytm	Czas wykonania [s]									
GR	0.069	0.1115	0.1392	0.1878	0.2349	0.2736	0.3153	0.351	0.3988	0.4601
LU	0.0155	0.0241	0.0321	0.0388	0.0486	0.0549	0.0651	0.0711	0.0784	0.084
CH	0.2457	0.5615	0.727	0.9188	1.1007	1.3044	1.5073	1.6875	1.88	2.1234
QH	0.0064	0.0092	0.0148	0.0153	0.0207	0.0222	0.0256	0.0282	0.0319	0.0348
DC	0.0441	0.0683	0.0877	0.1189	0.1516	0.1863	0.2067	0.2437	0.27	0.3132
IN	0.0315	0.0475	0.063	0.0793	0.0997	0.1136	0.1292	0.1449	0.1555	0.1742
JR	0.0529	0.077	0.1046	0.1306	0.1543	0.184	0.2086	0.2304	0.2571	0.2858



Rysunek 33: Zbiór typu C, zestawienie



Rysunek 34: Zbiór typu C, zestawienie bez Chana

- Obserwujemy znaczną poprawę (w stosunku do zbiorów typu A, B) czasu wykonania algorytmu Jarvisa, który teraz jest porównywalny z alogyrtmami typowo liniowo-logarytmicznymi.
- Zdecydowanie najwolniejszym algorytmem okazał się być algorytm Chana.
- Najszybszym algorytmem okazał się być algorytm QuickHull.
- Dla $n > 4000$ algorytm Jarvisa staje się szybszy od algorytmu dziel i zwyciężaj (trend ten utrzymywał się także dla większych mocy zbiorów testowych) (wykres 34)

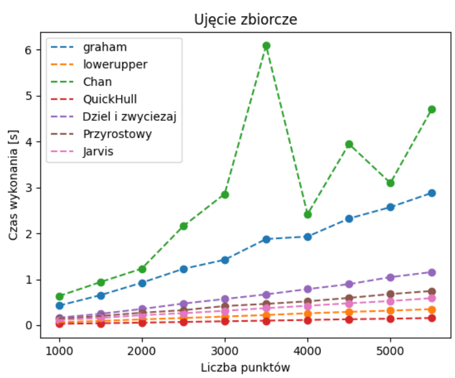
6.4 Zbiór typu D

Zbiór punktów leżących na przekątnych i dwóch bokach kwadratu. Charakteryzuje się ograniczoną liczbą punktów otoczki (pomiając bardzo małe n, otoczka jest zawsze 4 elementowa) oraz dużą liczbą konfiguracji współliniowych (znaczenie jak przy zbiorze typu A) w szczególności dla algorytmu Grahama.

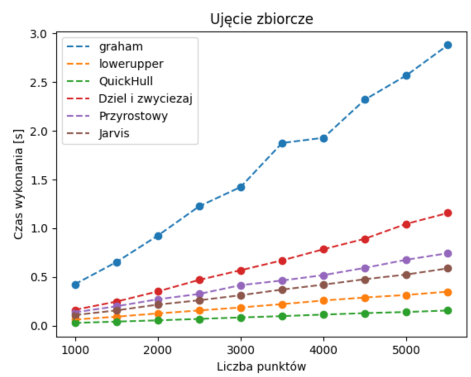
- Najszybszym algorytmem okazał się być algorytm QuickHull.
- Najwolniejszym spośród algorytmów liniowo-logarytmicznych jest algorytm Grahama.
- Obserwujemy znaczną poprawę (w stosunku do zbiorów typu A i B) czasu wykonania algorytmu Jarvisa, który teraz jest porównywalny z algorytmami liniowo-logarytmicznymi.
- Najwolniejszym algorytmem jest algorytm Chana.

Tablica 11: Czasy wykonania poszczególnych algorytmów dla zbioru typu D przy różnych mocach zbiorów punktów.

	Liczba punktów									
	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500
Algorytm	Czas wykonania [s]									
GR	0.4256	0.6523	0.924	1.2255	1.4233	1.8752	1.9285	2.3207	2.5692	2.88
LU	0.0635	0.0927	0.1261	0.1566	0.1875	0.2217	0.259	0.2897	0.316	0.3495
CH	0.6322	0.9372	1.2306	2.1543	2.8556	6.0844	2.4157	3.943	3.094	4.7075
QH	0.0287	0.0426	0.0551	0.0702	0.0847	0.0986	0.1143	0.1294	0.1411	0.1562
DC	0.1634	0.2474	0.3518	0.4703	0.5694	0.6705	0.7849	0.8928	1.0458	1.1565
IN	0.1373	0.1992	0.2715	0.326	0.4165	0.4639	0.5195	0.5937	0.6773	0.7446
JR	0.1094	0.1572	0.2167	0.2611	0.3129	0.3711	0.4218	0.4774	0.5255	0.5886



Rysunek 35: Zbiór typu D, zestawienie



Rysunek 36: Zbiór typu D, zestawienie bez Chana

7 Bibliografia

1. *Wykład z przedmiotu Algorytmy Geometryczne, Informatyka 3. sem., 1. st. AGH, Barbara Głut*
2. *Computational Geometry – Algorithms and Applications, Mark de Berg, Otfried Cheong, Marc van Kreveld, Mark Overmars*
3. `https://jeffe.cs.illinois.edu/teaching/compgeom/notes/01-convexhull.pdf`