

# Άσκηση 1.3 από “Reasoning About Knowledge (1995)”

Καμινάκης Κωνσταντίνος

11/3/2024

## Άσκηση 1.3

### Ερώτηση

The wise men puzzle is a well-known variant of the muddy children puzzle. The standard version of the story goes as follows: There are three wise men. It is common knowledge that there are three red hats and two white hats. The king puts a hat on the head of each of the three wise men, and asks them (sequentially) if they know the color of the hat on their head. The first wise man says that he does not know; the second wise man says that he does not know; then the third wise man says that he knows.

α' What color is the third wise man's hat?

β' We have implicitly assumed in the story that the wise men can all see. Suppose we assume instead that the third wise man is blind and that it is common knowledge that the first two wise men can see. Can the third wise man still figure out the color of his hat?

## Απάντηση

Στην ανάλυση που ακολουθεί έχει γίνει η παραδοχή πως τα καπέλα είναι 3 λευκά και 2 μαύρα αντί για τα 3 κόκκινα και 2 λευκά της εκφώνησης. Θα χρησιμοποιηθούν οι ατομικές προτάσεις  $AisWh$ ,  $BisWh$  και  $CisWh$ , με την ευκόλως εννοούμενη ερμηνεία τους.

	A	B	C
s1	W	W	W
s2	B	W	W
s3	W	B	W
s4	W	W	B
s5	B	B	W
s6	B	W	B
s7	W	B	B

Table 1: Πιθανοί κόσμοι

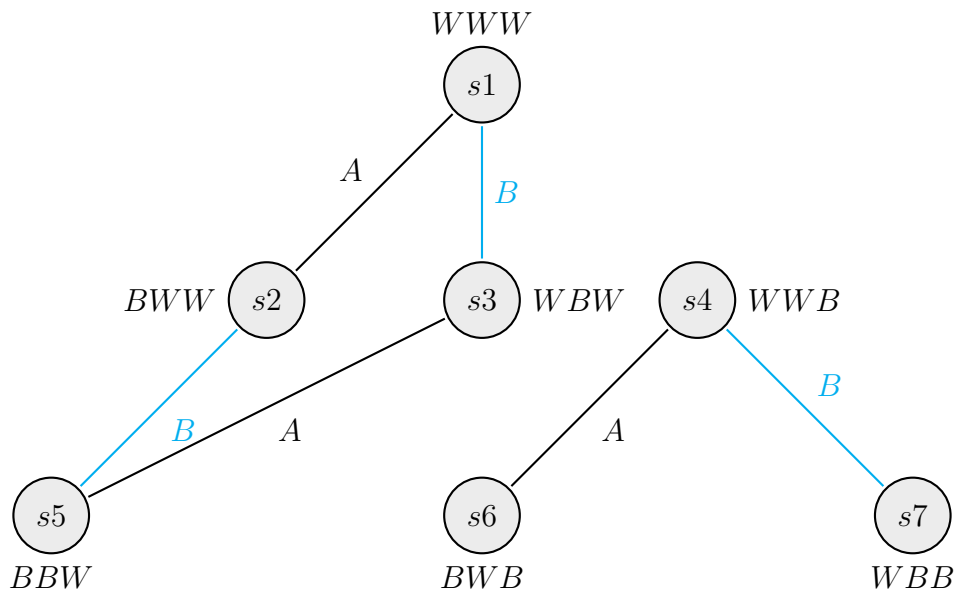


Figure 1: M1

Θα ασχοληθούμε με το ερώτημα β'. Η λίστα με όλους τους πιθανούς κόσμους φαίνεται στον πίνακα 1. Το αντίστοιχο διάγραμμα Kripke φαίνεται στο σχήμα 1. Εφόσον είναι κοινή γνώση πως ο παίκτης C είναι τυφλός, όλοι οι πιθανοί κόσμοι είναι πιθανοί για τον παίκτη C. Επομένως υπάρχουν ακμές για τον C από κάθε κόσμο σε κάθε άλλο κόσμο. Οι ακμές αυτές δεν αναπαρίστανται για λόγους ευκρίνειας. Παρατηρούμε

πως ( $K_A \text{ AisWh}$ ) αληθεύει μόνο στην κατάσταση  $s7$ , ενώ ( $K_B \text{ BisWh}$ ) ισχύει μόνο στην κατάσταση  $s6$ .

Θα διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις. Αν στην πρώτη ερώτηση του βασιλιά είτε ο A, είτε ο B απαντήσουν πως ξέρουν το χρώμα του καπέλου τους, τότε βρισκόμαστε είτε στην κατάσταση  $s7$ , είτε στην κατάσταση  $s6$  αντίστοιχα. Παρατηρούμε τώρα πως ο παίκτης C έχει μαύρο καπέλο και στις δύο αυτές καταστάσεις. Άρα όλοι οι παίκτες ξέρουν το χρώμα τους μετά τη δεύτερη ερώτηση του βασιλιά. Αντιθέτως αν όλοι απαντήσουν αρνητικά στην πρώτη ερώτηση, τότε το διάγραμμα Kripke αλλάζει όπως φαίνεται στο σχήμα 2 (Οι ακμές του παίκτη C παραλείπονται για λόγους ευκρίνειας).

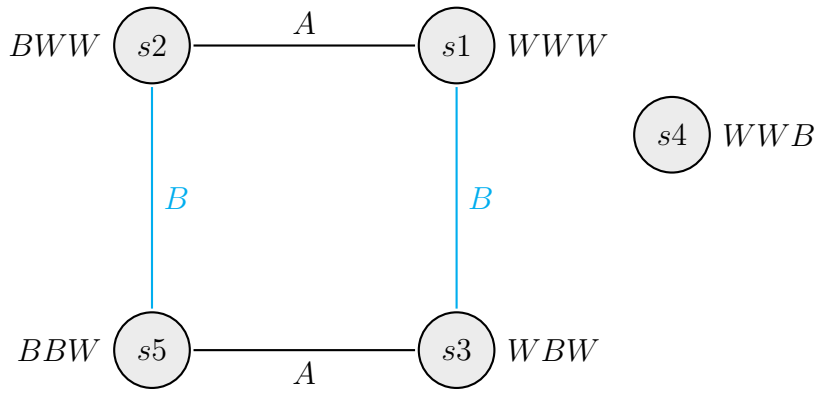


Figure 2: M2

Παρατηρούμε τώρα ότι ( $K_A \text{ AisWh} \wedge K_B \text{ BisWh}$ ) αληθεύει μόνο στην κατάσταση  $s4$ . Θα διακρίνουμε όπως πριν δύο περιπτώσεις. Αν στη δεύτερη ερώτηση ο A και ο B απαντήσουν θετικά, τότε ο παίκτης C μαθαίνει πως φοράει μαύρο καπέλο και μπορεί να απαντήσει θετικά στην τρίτη ερώτηση. Αντιθέτως αν όλοι απαντήσουν αρνητικά στη δεύτερη ερώτηση, τότε το διάγραμμα Kripke αλλάζει όπως φαίνεται στο σχήμα 3. Παρατηρούμε όμως πως ( $C \text{ CisWh}$ ) αληθεύει σε όλες τις πιθανές καταστάσεις του διαγράμματος, κι έτσι ο παίκτης C θα απαντήσει θετικά στην τρίτη ερώτηση. Ταυτόχρονα όμως, επειδή ( $C \text{ CisWh}$ ) αληθεύει σε όλες τις πιθανές καταστάσεις, ισχύει ότι ( $C \text{ CisWh}$ ). Σε αυτή την περίπτωση οι παίκτες A και B δε θα μάθουν ποτέ το χρώμα του καπέλου τους, όσες φορές κι αν ρωτήσει ο βασιλιάς. Το διάγραμμα Kripke μένει στάσιμο από εδώ και στο εξής γιατί κανένας παίκτης δεν αποκτά καινούργια πληροφορία.

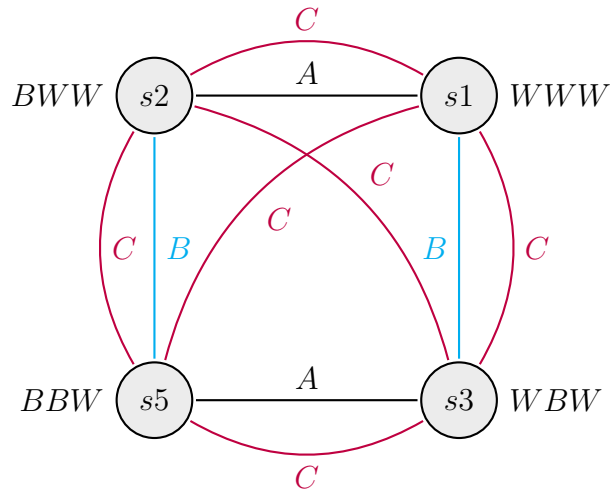


Figure 3: M3

Συμπεραίνοντας, στην περίπτωση που είναι κοινή γνώση πως ο παίκτης  $C$  είναι τυφλός, ο ίδιος θα χρειαστεί το πολύ 3 ερωτήσεις για να μάθει το χρώμα του καπέλου του. Οι άλλοι δύο παίκτες όμως θα μάθουν το χρώμα του καπέλου τους μόνο αν ο παίκτης  $C$  φορούσε μαύρο καπέλο.