

Ασκήσεις 9γ και 10 από φυλλάδιο "Στοιχεία Προτασιακής Λογικής"

Καμινάρης Κωνσταντίνος

6/3/2024

Άσκηση 9

Ερώτηση

Για κάθε μία από τις παρακάτω δηλώσεις, βρείτε αν ισχύει στα εξής πεδία ορισμού:

$$U1 = \{\}, U2 = \{1\}, U3 = \{1, 2\}.$$

α') " $x \neq x$ "

β') " $\text{αν } x < y \text{ τότε } y < x$ "

γ') " $\text{αν } x \neq y \text{ και } z \neq y \text{ τότε } x = z$ "

Απάντηση

γ)

- Για το $U1$ δε μπορούμε να δώσουμε καμία τιμή στις μεταβλητές της συνάρτησης, άρα η συνεπαγωγή " $\text{αν } x \neq y \text{ και } z \neq y \text{ τότε } x = z$ " ισχύει στο πεδίο ορισμού $U1$, δεν υπάρχει αντιπαράδειγμα.
- Για το $U2$ παρατηρούμε πως για οποιαδήποτε τιμοδοσία ισχύει $TA(x \neq y \text{ και } z \neq y) = false$. Επομένως η συνεπαγωγή " $\text{αν } x \neq y \text{ και } z \neq y \text{ τότε } x = z$ " ισχύει στο πεδίο ορισμού $U2$, δεν υπάρχει αντιπαράδειγμα.
- Για το $U3$ θα προσπαθήσουμε να ικανοποιήσουμε την πρόταση $x \neq y \text{ και } z \neq y$. Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $y = 1$. Τότε, σύμφωνα με τις υποθέσεις $x \neq y$ και $z \neq y$ θα πρέπει αναγκαστικά $x = z = 2$. Αντίστοιχα στην περίπτωση που $y = 2$. Παρατηρούμε λοιπόν πως είτε θα ισχύει $TA(x \neq y \text{ και } z \neq y) = true$ και

ταυτόχρονα $TA(x = z) = true$, είτε θα ισχύει $TA(x \neq y \text{ και } z \neq y) = false$.
Επομένως η συνεπαγωγή " αν $x \neq y$ και $z \neq y$ τότε $x = z$ " ισχύει στο πεδίο ορισμού $U3$, δεν υπάρχει αντιπαράδειγμα.

Άσκηση 10

Ερώτηση

Επαληθεύστε ότι: κάθε δήλωση όπου εμφανίζονται μεταβλητές, ισχύει στο πεδίο ορισμού $U = \{\}$.

Απάντηση

Έστω δήλωση φ στην οποία εμφανίζονται μεταβλητές. Οι μεταβλητές αυτές δε μπορούν να πάρουν καμία τιμή από το πεδίο ορισμού U , άρα δεν υπάρχει αντιπαράδειγμα για την φ . Επομένως, η φ ισχύει στο πεδίο ορισμού U .