

# Ασκήσεις 9γ και 10 από φυλλάδιο ”Στοιχεία Προτασιακής Λογικής”

Καμινάρης Κωνσταντίνος

6/3/2024

## Άσκηση 9

### Ερώτηση

Για κάθε μία από τις παρακάτω δηλώσεις, βρείτε αν ισχύει στα εξής πεδία ορισμού:

$$U1 = \{\}, U2 = \{1\}, U3 = \{1, 2\}.$$

α') " $x \neq x$ "

β') " $\text{αν } x < y \text{ τότε } y < x$ "

γ') " $\text{αν } x \neq y \text{ και } z \neq y \text{ τότε } x = z$ "

### Απάντηση

γ)

- Για το  $U1$  δε μπορούμε να δώσουμε καμία τιμή στις μεταβλητές της συνάρτησης, άρα η συνεπαγωγή " $\text{αν } x \neq y \text{ και } z \neq y \text{ τότε } x = z$ " ισχύει στο πεδίο ορισμού  $U1$ , δεν υπάρχει αντιπαράδειγμα.
- Για το  $U2$  παρατηρούμε πως για οποιαδήποτε τιμοδοσία ισχύει  $TA(x \neq y \text{ και } z \neq y) = false$ . Επομένως η συνεπαγωγή " $\text{αν } x \neq y \text{ και } z \neq y \text{ τότε } x = z$ " ισχύει στο πεδίο ορισμού  $U2$ , δεν υπάρχει αντιπαράδειγμα.
- Για το  $U3$  θα προσπαθήσουμε να ικανοποιήσουμε την πρόταση  $x \neq y \text{ και } z \neq y$ . Ας υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι  $y = 1$ . Τότε, σύμφωνα με τις υποθέσεις  $x \neq y$  και  $z \neq y$  θα πρέπει αναγκαστικά  $x = z = 2$ . Αντίστοιχα στην περίπτωση που  $y = 2$ . Παρατηρούμε λοιπόν πως είτε θα ισχύει  $TA(x \neq y \text{ και } z \neq y) = true$  και

ταυτόχρονα  $TA(x = z) = true$ , είτε θα ισχύει  $TA(x \neq y \text{ και } z \neq y) = false$ .  
Επομένως η συνεπαγωγή " αν  $x \neq y$  και  $z \neq y$  τότε  $x = z$  " ισχύει στο πεδίο ορισμού  $U3$ , δεν υπάρχει αντιπαράδειγμα.

## Άσκηση 10

### Ερώτηση

Επαληθεύστε ότι: κάθε δήλωση όπου εμφανίζονται μεταβλητές, ισχύει στο πεδίο ορισμού  $U = \{\}$ .

### Απάντηση

Έστω δήλωση  $\varphi$  στην οποία εμφανίζονται μεταβλητές. Οι μεταβλητές αυτές δε μπορούν να πάρουν καμία τιμή από το πεδίο ορισμού  $U$ , άρα δεν υπάρχει αντιπαράδειγμα για την  $\varphi$ . Επομένως, η  $\varphi$  ισχύει στο πεδίο ορισμού  $U$ .