Ιδιότητα 2.3.2 2b από "Logic in Computer Science (2004)"

Καμινάρης Κωνσταντίνος

6/4/2024

Ιδιότητα 2b

Prove

$$\forall x(\phi \vee \psi) \vdash \forall x\phi \vee \psi$$

1.	$\forall x\,(\phi \vee \psi)$	premise
2.	$\neg(\forall x\,\phi \vee \psi)$	assumption
3.	$\neg\forall x\,\phi \wedge \neg\psi$	deMorgan, 2
4.	$\neg\forall x\,\phi$	$\wedge$e1, 3
5.	$\neg\psi$	$\wedge$e2, 3
6.	$\exists x\,\neg\phi$	4
7.	x_0	assumption
8.	$\neg\phi[x_0/x]$	$\exists x$ e, 6
9.	$(\phi \vee \psi)[x_0/x]$	$\forall x$ e 1
10.	$\phi[x_0/x] \vee \psi$	x is not free in ψ
11.	$\phi[x_0/x]$	assumption
12.	$\bot$	$\neg$e 11, 8
13.	ψ	assumption
14.	$\bot$	$\neg$e 13, 5
15.	$\bot$	$\vee$e 10, 11-12, 13-4
16.	$\bot$	copy 15, independent of x_0
17.	$\forall x\,\phi \vee \psi$	PBC 2-16