Συνεπαγωγή Α’ Τάξης

Ερωτήματα

Καμινάρης Κωνσταντίνος

1. **Για ποιους τύπους Α’ τάξης αληθεύουν οι παρακάτω συνεπαγωγές;**
   1. **true |= ψ**
   2. **false |= ψ**
   3. **φ |= true**
   4. **φ |= false**
   5. Αληθεύει για κάθε ψ που είναι ταυτολογία.
   6. Αληθεύει για κάθε ψ.
   7. Αληθεύει για κάθε φ.
   8. Αληθεύει για κάθε φ τέτοιο ώστε ¬φ να είναι ταυτολογία.
2. **Αποδείξτε ότι: Η συνεπαγωγή τύπων Α’ τάξης φ1, φ2, … φn |= ψ αληθεύει, αν και μόνο αν ο τύπος Α’ τάξης (φ1 ∧ φ2 … ∧ φn)** → **ψ είναι ταυτολογία.**

Η συνεπαγωγή φ1, φ2, … φn |= ψ αληθεύει αν και μόνο αν,

για οποιοδήποτε μοντέλο Μ και οποιαδήποτε στοιχεία α1, α2, … του Μ

είτε ( δ(φ1) and δ(φ2) ... and δ(φn) ) = false , είτε δ(ψ) = true.

Ο τύπος (φ1 ∧ φ2 … ∧ φn) → ψ είναι ταυτολογία αν και μόνο αν,

για οποιοδήποτε μοντέλο Μ και οποιαδήποτε στοιχεία α1, α2, … του Μ

δ((φ1 ∧ φ2 … ∧ φn) → ψ) = true,

άρα είτε δ(φ1 ∧ φ2 … ∧ φn) = false, είτε δ(ψ) = true.

1. **Αποδείξτε ότι αληθεύουν οι παρακάτω συνεπαγωγές:**
   1. **(R(x) → ∀y S(y, x)), (z = x) |= (x = z) ∧ ((¬R(z) ∨ ∀y S(y, z))**
   2. **¬R(x, y) |= ¬((∃x∀y R(y, x)) ∧ R(x, y))**

* 1. Έστω τυχαία ρ, s, a, b, c ώστε δ(R(x) → ∀y S(y, x)) = true, δ(z=x) = true

άρα δ(¬R(x) ∨ ∀y S(y, x)) = true, δ(z=x) = true.

Τότε ¬ρ(a) ∨ ∀b s(b, a) = true και c =U a.

Επειδή η =U έχει ομοιότητα ως προς τα ρ και s, ¬ρ(c) ∨ ∀b s(b, c) = true

Άρα δ((x=z) ∧ (¬R(z) ∨ ∀y S(y, z))) = δ(x=z) and δ(¬R(z) ∨ ∀y S(y, z))

= δ(z=x) and δ(¬R(z) ∨ ∀y S(y, z))

= (c =U a) and (¬ρ(c) ∨ ∀b s(b, c)) = true.

* 1. Έστω τυχαία ρ, a, b ώστε δ(¬R(x, y)) = true

άρα δ(R(x, y)) = false.

Τότε δ(¬((∃x∀y R(y, x)) ∧ R(x, y))) = ¬δ((∃x∀y R(y, x)) ∧ R(x, y))

= ¬(δ(∃x∀y R(y, x)) and δ(R(x, y)))

= ¬(δ(∃x∀y R(y, x)) and false)

= ¬(false) = true.

1. **Αποδείξτε ότι αληθεύει η λογική ισοδυναμία**

**g(f(x), g(y, z)) = h(y, x, x) =||= h(y, x, x) = g(f(x), g(y, z))**

Έστω τυχαία F, G, H, a, b, c ώστε δ(g(f(x), g(y, z))) = h(y, x, x)) = true

ισοδύναμα G(F(a), G(b, c)) =U H(b, a, a).

Τότε, επειδή η =U είναι συμμετρική σχέση θα ισχύει ισοδύναμα

H(b, a, a) =U G(F(a), G(b, c))

και άρα ισοδύναμα δ(h(y, x, x) = g(f(x), g(y, z))) = true.

1. **Αποδείξτε ότι αληθεύει η συνεπαγωγή**

**∀x (R(x, y) ∧ (f(x) = y)) |= ∀x (y = f(x))**

Έστω τυχαία ρ, F, a, b ώστε δ(∀x (R(x, y) ∧ (f(x) = y))) = true

άρα AND h∈U [δ΄(R(x, y) ∧ (f(x) = y)) όταν x παίρνει την τιμή h] = true,

AND h∈U [δ΄(R(x, y)) and δ΄((f(x) = y)) όταν x παίρνει την τιμή h] = true,

AND h∈U [δ΄(R(x, y)) όταν x παίρνει την τιμή h] = true and

AND h∈U [δ΄((f(x) = y)) όταν x παίρνει την τιμή h] = true.

Τότε έχουμε δ(∀x (y = f(x)))

= AND h∈U [δ΄(y = f(x)) όταν x παίρνει την τιμή h] = true.

1. **Για καθένα από τα παραδείγματα 3, 5, 6: Αποδείξτε ότι αληθεύει και η αντίστροφη συνεπαγωγή.**

3. Η συνεπαγωγή (f(x) = y) ∨ R(x, y) |= R(x, y) ∨ (f(x) = y) αληθεύει

Έστω τυχαία ρ, F, a, b ώστε δ(f(x) = y ∨ R(x, y)) = true,

άρα δ(f(x) = y) or δ(R(x, y)) = true.

Τότε δ(R(x, y) ∨ (f(x) = y)) = δ(R(x, y)) or δ((f(x) = y))

= δ(f(x) = y) or δ(R(x, y)) = true.

5. Η συνεπαγωγή R(x, y) ∨ (y = f(x)) |= R(x, y) ∨ (f(x) = y) αληθεύει

Έστω τυχαία ρ, F, a, b ώστε δ(R(x, y) ∨ (y = f(x))) = true,

άρα δ(R(x, y)) or δ((y = f(x))) = true.

Τότε δ(R(x, y) ∨ (f(x) = y)) = δ(R(x, y)) or δ((f(x) = y))

= δ(R(x, y)) or δ((y = f(x))) = true.