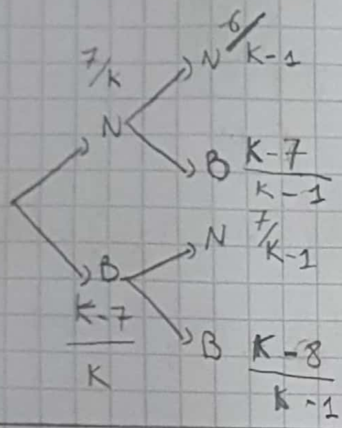
Exercice : Jeu de Tirage de Boules

1) La loi de probabilité de X

X_i	1300	300	0
P_{X_i}	$\frac{14(K-7)}{K(K-1)}$	$\frac{(K-7)(K-8)}{K(K-1)}$	$\frac{42}{K(K-1)}$



Exercice 01

1) Indépendance

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$P(A \cup B) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

$P(A).P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = P(A \cup B)$

donc A et B sont independant

2) Urne de 13 boules

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$

$P(A) = \frac{6}{13}$

$P(B) = \frac{4}{13}$

$P(A \cap B) = \frac{2}{13}$

$P(A).P(B) = \frac{6}{13} \times \frac{4}{13} = \frac{24}{169}$

donc A, B ne sont pas independant

Exercice 02 :

$\Omega = \{FF, FG, GF, GG\}$

$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A).P(B)$

$P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A).P(C)$

$P(B \cap C) = \frac{1}{4}$ $P(B).P(C)$

$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq P(A).P(B).P(C)$

Exercice 03 :

1) Montrons que :

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

On a :

$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup (B \cup C))$

$= P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C))$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap (B \cup C))$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P((A \cap B) \cup (A \cap C))$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - [P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap A \cap C)]$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

2) 1) si les composants en serie

$P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = P_1 P_2 P_3$

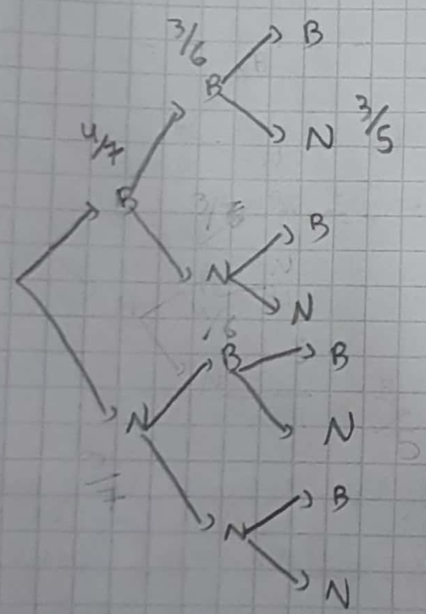
2) si les composants en parallèle

$P(C_1 \cup C_2 \cup C_3) = P_1 + P_2 + P_3 - P_1 P_2 - P_2 P_3 - P_1 P_3 + P_1 P_2 P_3$

3) C_1 en serie avec C_2, C_3 en parallèle

$P(C_1 \cap (C_2 \cup C_3)) = P_1 \cdot (P_2 + P_3 - P_2 P_3)$

Exercice 01:



$P(BBN) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5}$

$= \frac{6}{35}$

Exercice 02:

A: Pièce de l'atelier 1

B: Pièce de l'atelier 2

C: Pièce defectueuse

1) $P(A) = \frac{2}{3}$

$P(B) = \frac{1}{3}$

$P(D|A) = 0,03$

$P(D|B) = 0,04$

2) $P(A \cap D) = P(A)\, P(D|A)$

$= \frac{2}{3} \times 0,03$

$= \frac{1}{50}$

3) $P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)}$

$P(D) = P(A) P(D|A) + P(B) P(D|B)$

$P(D) = \frac{2}{3} \times 0,03 + \frac{1}{3} \times 0,04$

$= \frac{1}{30}$

$P(A|D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{1/50}{1/30}$

$= \frac{3}{5}$

Exercice 03:

A: boite est abîmée

D: clé défectueuse

1) $P(A) = 0,05$

$P(\bar{A}) = 1 - 0,05 = 0,95$

$P(D|A) = 0,6$

$P(D|\bar{A}) = 1 - P(\bar{D}|\bar{A})$

$= 1 - 0,98$

$= 0,02$

$P(\bar{D}|A) = 1 - P(D|A) = 0,4$

$P(D) = P(A) P(D|A) + P(\bar{A}) P(D|\bar{A})$

$= 0,05 \times 0,6 + 0,95 \times 0,02$

$= \frac{49}{1000}$

2) $P(A|D) = \dfrac{P(A\cap D)}{P(D)}$

$P(A\cap D) = P(D|A)\times P(A)$

$= 0{,}6 \times 0{,}05$

$= \dfrac{3}{100}$

$P(A|D) = \dfrac{0{,}03}{0{,}099}$

$= \dfrac{30}{99}$

Exercice 04 :

A : Etudiant connait la reponse

B : Etudiant choisit la reponse correct

$P(A) = p \quad , P(B|\bar{A}) = \dfrac{1}{m}$

$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})$

$= p + \dfrac{(1-p)}{m}$

$= \dfrac{mp + 1 - p}{m}$

$= \dfrac{p(pa-1)+1}{m}$

$P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B}$

$= \dfrac{P(C)P(B|A)}{P(B)}$

$= \dfrac{p}{\dfrac{p(m-1)+1}{m}}$

$= \dfrac{pm}{1+(m-1)p}$

Exercice 01 :

M : être porteur de la maladie

T : avoir un test positive

1) $P(T) = P(M)P(T|M) + P(\bar{M})P(T|\bar{M})$

$= 0{,}02 \times 0{,}851 + 0{,}98 \times (1 - 0{,}95)$

$= \dfrac{33}{500} = 0{,}066$

2) $P(M|T) = \dfrac{P(M\cap T)}{P(T)}$

$= \dfrac{P(M)P(T|M)}{P(T)}$

$= \dfrac{0{,}02 \times 0{,}85}{0{,}066}$

$= 0{,}26$

Exercice 02 :

	homme	femme	Total
ont smartphone	7	34	41
n'ont pas smart	18	37	55
Total	25	71	96

probabilite d'une personne et une femme sachant qu'il a un smartphone

$p = \dfrac{\text{femme ont des smartphone}}{\text{personnes ont smartphone}}$

$= \dfrac{34}{41}$

Exercice 03 :

C_1 : Unité du client C_1

C_2 : Unité de client C_2

C_3 : Unité de client C_3

U_1 : Unité fabriqué dans U_1

U_2 : Unité fabriqué dans U_2

- Calculons $P(U_2|C_3)$

$$P(U_2|C_3) = \frac{P(U_2 \cap C_3)}{P(C_3)}$$

$P U_1 = 10$

$C_1 + C_2 + C_3 = 240$

$U_2 = 240 - 10 = 230$

$$P(U_2) = \frac{23}{24}$$

$P(C_3|U_2) = 0{,}5$

$$P(C_3) = P(U_1)P(C_3|U_1) + P(U_2)P(C_3|U_2)$$

$$= \frac{1}{24} \times 0{,}5 + \frac{23}{24} \times 0{,}5$$

$$P(C_3) = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$P(U_2|C_3) = \frac{P(U_2)P(C_3|U_2)}{P(C_3)}$$

$$= \frac{\frac{23}{24} \times \cancel{0{,}5}}{\cancel{0{,}5}}$$

$$= \frac{23}{24}$$

Exercice : Jeu de lancer de Pièce

1) a) Les issues possible :

{PPP, PPF, PFP, PFF, FFF, FPF, FFP, FPP}

b) Les gain possible :

	Gain pure	Sans le 200
PPP	900	700
PPF	400	200
PFP	400	200
PFF	-100	-300
FPP	400	200
FPF	-100	-300
FFP	-100	-300
FFF	-600	-800

2) La loi de probabilité

G	$P(g_i)$
700	1/8
200	3/8
-300	3/8
-800	1/8

$$E(G) = \frac{1}{8} \times 700 + \frac{3}{8} \times 200 + \frac{3}{8}(-300) + \frac{1}{8}(-800)$$

$$= -50$$

Non, le jeu n'est pas profitable.

Exercice : Choix d'un Avocat pour Maximiser le Gain Attendu

1) Calculons l'espérance $E(G_1)$

$$E(G_1) = 0,8 \times (10\,000\,000 - 1\,200\,000) - 0,2 \times 1\,200\,000$$

$$E(G_1) = 6\,800\,000$$

Calculons l'espérance $E(G_2)$

$$E(G_2) = 0,8 \times (10\,000\,000 - 3\,000\,000)$$

$$= 5\,600\,000$$

2) on a

$$E(G_1) > E(G_2)$$

on choisis l'avocat 1.

Exercice 01 :

1) Cas de la forme $P(X \leq t)$ ou $(X \geq t)$

a) $P(X \leq 1,5) = 0,9332$

$P(X \geq 1,5) = 1 - P(X \leq 1,5)$

$= 1 - 0,9332$

$= 0,0668$

b) $P(X \leq 0,5) = 0,6915$

$P(X > 0,5) = 1 - P(X \leq 0,5)$

$= 1 - 0,6915$

$= 0,3085$

c) $P(X > t) = 1 - P(X < t)$

$= 1 - \pi(t)$

d) $P(X > 1,05) = 1 - P(X < 1,05)$

$= 1 - 0,8531$

$= 0,1469$

2) Cas de la forme $P(t_1 \leq X \leq t_2)$

a) $P(X \leq 2) = 0,9772$

$P(X \leq 1) = 0,8413$

$P(1 \leq X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1)$

$= 0,9772 - 0,8413$

$= 0,1359$

b) $P(X \leq 1,5) = 0,9332$

$P(X \leq 0,5) = 0,6915$

$P(0,5 \leq X \leq 1,5) = 0,9332 - 0,6915$

$= 0,2417$

c) $P(t_1 < X < t_2) = \pi(t_2) - \pi(t_1)$

$= P(X \leq t_2) - P(X \leq t_1)$

d) $P(X \leq 1) = 0,8413$

$P(X < 0) = 0,5$

$P(0 < X < 1) = P(X \leq 1) - P(X \leq 0)$

$= 0,8413 - 0,5$

$= 0,3413$

3) Cas de forme : $P(X \leq -t)$ ou $P(X \geq -t)$

a) Graphiquement : la loi normale centrée réduit est symétrique par rapport à 0. par conséquent

$P(X < -t) = P(X \geq t)$

$P(X \leq 2) = 0,9772$

$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0,9772$

$= 0,0228$

$P(X < -2) = P(X \geq 2) = 0,0228$.

b) $P(X \leq 1,5) = 0,9332$

$P(X \geq 1,5) = 1 - 0,9332$

$= 0,0668$

$= P(X \leq -1,5)$

c) $P(X \leq -t) = 1 - P(X \leq t)$

d) $P(X \geq -0,5) = P(X \leq 0,5)$

$= 0,6915$

e) Par symétrie :

$P(-1,5 < X < -0,5) = P(0,5 < X < 1,5)$

$= P(X < 1,5) - P(X < 0,5)$

$= 0,9332 - 0,6915$

$= 0,2417$

4) Lecture inverse $P(X \leq ?) = a$

a) $P(X \leq t) = 0,881$

$t = -a$

$t = 1,18$ $\quad P(X \leq -a) = 1 - P(X \leq a)$

b) $P(X \leq t) = 0,119$ $\quad P(X \geq a)$

$P(X \leq a) = 1 - 0,119 = 0,881$ $\quad 1 - P(X \leq a)$

$P(X \leq t)$

$t = -1,18$

c) $P(-t < X < t) = 0,881$

$P(-t < X < t) = P(X < t) - P(X < -t)$

$= P(X < t) - 1 + P(X < t)$

$= 2P(X < t) - 1$

$P(X < t) = \dfrac{1 + 0,881}{2}$

$= 0,9405$

$t = 1,56$

B) Exemple d'application :

1) a) $P(-1,5 < X < 1,5)$

$= P(X < 1,5) - P(X < -1,5)$

$= P(X < 1,5) - 1 + (X < 1,5)$

$= 2P(X < 1,5) - 1$

$= 2 \times 0,9332 - 1$

$= 0,8664$

b) $P(t \leq X \leq t) = 0,99$

$t' = -t$

$P(-t' \leq X \leq t') = 0,99$

$= 2P(X \leq t') - 1$

$P(X \leq t') = \dfrac{1 + 0,99}{2} = 0,995$

$t' = 2,58$

$t = -2,58$

Exercice 02 :

$P(110 < X < 130)$

- Transformation en loi normal

$$Z = \frac{X - m}{\sigma}$$

$$Z = \frac{110 - 120}{14} \simeq -0,714$$

$$Z = \frac{130 - 120}{14} \simeq 0,714$$

$P(110 < X < 130) = P(-0,714 < Z < 0,714)$

$= 2(P(Z \leqslant 0,714) - 1$

$= 2 \times 0,762 - 1$

$= 0,524$

CamScanner

Exercice 03 :

1) Les probabilités :

a) $P(X < 50,19)$

$$Z = \frac{50,19 - 50}{0,2} = 0,95$$

$P(Z < 0,95) = 0,8289$

b) $P(\cancel{X < 50,16})$

$$Z = \frac{50,16 - 50}{0,2} = 0,8$$

$P(Z < 0,8) = 0,7881$

$P(X > 50,16) = 1 - 0,7881$

$= 0,2119$

c) $P(50,16 < X < 50,19)$

$= P(0,8 < Z < 0,95)$

$= P(Z < 0,95) - P(Z < 0,8)$

$= 0,8289 - 0,7881$

$= 0,0408$

2) Déterminer a tq :

$p(50 - a \leqslant X \leqslant 50 + a) = 0,9$

$z = \frac{50 - a - 50}{0,2} = -\frac{a}{0,2}$

$z = \frac{50 + a - 50}{0,2} = \frac{a}{0,2}$

$P(50 - a \leqslant X \leqslant 50 + a)$

$= P(-Z \leqslant x \leqslant Z) = 0,9$

$= 2P(Z \leqslant x) - 1$

$P(Z \leqslant x) = \frac{0,9 + 1}{2}$

$P(Z \leqslant x) = 0,95$

$Z = 1,645$

$a = 0,2Z = 0,2 \times 1,645$

$a = 0,329.$

Exercice 01 :

P(comestible) = $\frac{5}{8}$

P(Non comestible) = $\frac{3}{8}$

Couleur	Comestible	Non Comestible
Cyan	2/5	0/3
Orange	2/5	1/3
Magenta	1/5	2/3

Forme	Comestible	Non comestible
octogonal	2/5	2/3
hexagonal	3/5	0/3
pentagonal	0/5	1/3

Taille	comestible	Non comestible
Petit	2/5	1/3
gigantesque	2/5	1/3
grand	1/5	1/3

motif	comestible	Non comestible
rayé	3/5	3/3
uniforme	2/5	0/3

• id = 1 :

V(comestible) = P(C) . P(magenta/C) . P(octogonal/C) . P(petit/C) . P(rayé/C)

$= \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$

$V(C) = \frac{3}{250} = 0{,}012$

V(N) = P(N) . P(magenta/N) . P(octogonal/N) . P(petit/N) . P(rayé/N)

$= \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3}$

$\boxed{V(N) = \frac{1}{18} = 0{,}0556}$

• id = 2 :

V(C) = P(C) . P(cyan/C) . P(pentagonal/C) . P(gigantesque/C) . P(uniforme/C)

$= \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{0}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$

V(C) = 0

V(N) = P(N) . P(cyan/N) . P(pentagonal/N) . P(gigantesque/N) . P(uniforme/N)

$V(N) = \frac{3}{8} \times \frac{0}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{0}{3}$

$V(N) = 0$

- **id = 3 :**

$V(C) = P(C) \cdot P(magenta/C) \cdot P(hexagonal/C)$
$P(grand/C) \cdot P(rayé/C)$

$= \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5}$

$\boxed{V(C) = 0{,}009}$

$V(N) = P(N) \cdot P(magenta/N) \cdot P(hexagonal/N)$
$P(grand/N) \cdot P(rayé/C)$

$= \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{0}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3}$

$V(N) = 0$

- **id = 4 :**

$V(C) = P(C) \cdot P(orange/C) \cdot P(Hexagonal/C)$
$P(grand/C) \cdot P(uniform/C)$

$= \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5}$

$\boxed{V(C) = 0{,}012}$

$V(N) = P(N) \cdot P(orange/N) \cdot P(Hexagonal/N)$
$P(grand/N) \cdot P(uniform/N)$

$= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{0}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{0}{3}$

$V(N) = 0$

3) Petit échantillon pentagonal

$V(C) = P(C) \cdot P(petit/C) \cdot P(pentagonal/C)$

$= \frac{5}{8} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{0}{5}$

$V(C) = 0$

$V(N) = P(N) \cdot P(petit/N) \cdot P(pent/N)$

$= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$

$\boxed{V(N) = 0{,}041}$

4) Échantillon rayé et cyan

$V(C) = P(C) \cdot P(rayé/C) \cdot P(cyan/C)$

$= \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$

$\boxed{V(C) = 0{,}15}$

$V(N) = P(N) \cdot P(rayé/N) \cdot P(cyan/N)$

$= \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{0}{3}$

$V(N) = 0$