Chapitre 01 : Espaces Probabilisés :

Système complet d'évènements :

1) ils sont deux à deux incompatibles :

$$A_p \cap A_q = \emptyset \quad \text{si } q \neq p$$

2) leur disjonction est l'évènement certain :

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$$

Evènements incompatible :

Si A et B sont deux évènements incompatible alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Propriétés :

1) $P(\emptyset) = 0$

2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

3) Si $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$

4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

5) Si $A_1, A_2 \dots A_n$ sont deux à deux incompatible ;

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

6) $P(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$

Probabilité conditionnelle :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

On note aussi $P_A(B) = P(B|A)$

Propriétés :

1) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$

2) $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$

Evènements indépendants :

A et B sont dits indépendants si : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Propriété :

Si A et B sont indépendants

1) $P(A|B) = P_B(A) = P(A)$

2) $P(B|A) = P_A(B) = P(B)$

CamScanner

3) Si A et B sont independants alors: $\{A, \bar{B}\}$ $\{\bar{A}, B\}$ $\{\bar{A}, \bar{B}\}$ sont aussi independants

Formule de probabilités totales:

Soit $A_1, A_2 \ldots A_n$ un système complet d'évenements; et B un évenement:

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) \ldots + P(A_n)P(B|A_n)$$

Théorème de Bayes:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)}$$

Pour un évènement

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

Chapitre 02: Variables Aléatoires

Paramètres d'une Variable Aléatoires Discrète:

1) Espérance mathématique (Moyenne):

$$E(x) = \sum_{i}^{i=n} x_i P(x_i)$$

2) La variance:

$$V(x) = \sum (x_i - E(x))^2 P(x_i)$$
$$= \sum x_i^2 \cdot P(x_i) - (E(x))^2$$

3) L'ecart type:

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$$

Paramètres d'une variable Aléatoires Continue:

1) Fonction de densité de probabilité:

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \end{cases}$$

2) Fonction de répartition :

$F : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$

$$F(t) = P(x < t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$$

Donc la Fonction de densité est la dérivée de la fonction de répartition $f(x) = F'(x)$

3) Esperance :

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,dx$$

4) Variance

$$V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2 f(x)\,dx$$

Propriétés de l'esperance :

si X, Y deux V.A définie sur une même univers Ω alors :

1) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

2) $E(aX) = a\,E(X)$

$\forall a \in \mathbb{R}$

3) Si $X \geqslant 0$ alors $E(x) \geqslant 0$

4) Si X est un constant tq

$\forall \Omega_i \in \Omega \quad X(\Omega) = K$

alors $E(X) = K$

Propriétés de variance :

1) $\forall a \in \mathbb{R}, \quad V(aX) = a^2 V(X)$

2) $\forall a, b \in \mathbb{R} : V(aX+b) = a^2 V(X)$

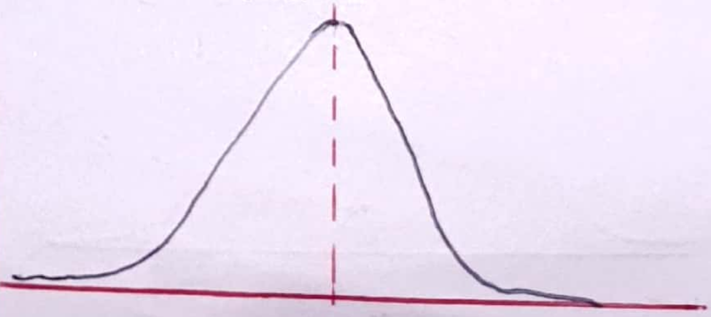
3) $V(X) = 0 \iff X = E(X)$

Chapitre 03 : Vecteurs gaussiens : (Loi normale)

Définition :

A une loi normale $\mathcal{N}(m ; \sigma)$ de moyenne m et d'écart type σ correspond une unique courbe en cloche représentant la fonction

$$f : x \longrightarrow \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$



m

Cette courbe admet pour axe de symétrie la droite d'équation : $x = m$.

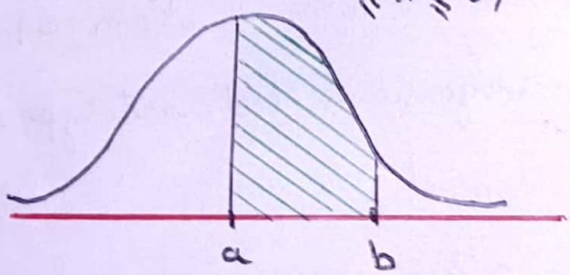
Elle admet un maximum en $x = m$.

• La variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne m et d'écart type σ ($X \sim N(m;\sigma)$) signifie que :

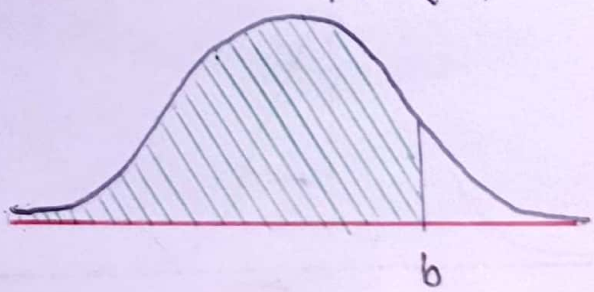
$\forall a, b : a \leqslant b \; ; \; a \leqslant X \leqslant b$

La probabilité de X est égale à "l'aire sous la courbe" entre a et b

$P(a \leqslant X \leqslant b)$



$P(X \leqslant b)$



Remarques :

1) $\forall m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$: l'aire totale sous la courbe vaut 1

2) $\forall a \in \mathbb{R}$: $P(a \leqslant X \leqslant a) = P(X = a)$
$= 0$

3) $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

$P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X < b)$

Loi Normale Centrée Réduite :

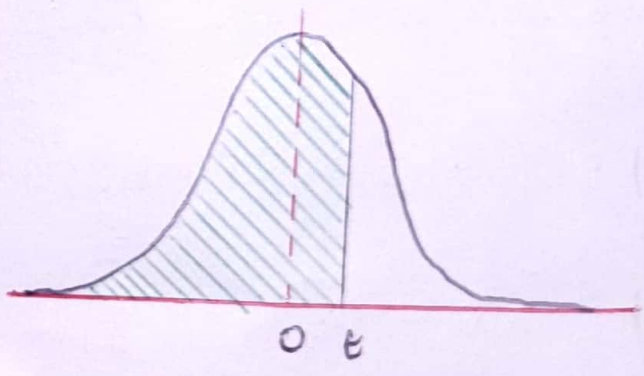
C'est une Loi Normale où on a :

$m = 0$ et $\sigma = 1$

Sa courbe est celle de f :

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ où $x \in \mathbb{R}$

Les valeurs de $p(X \leqslant t)$ pour $t \in [0 ; 2{,}99]$ avec un pas de 0,01 sont regroupées dans un table



Remarques :

1) On utilise la notation :

$$P(X \leq t) = \pi(t)$$

2) $\pi(t)$ est égale à l'aire sous la courbe de $-\infty$ jusqu'à t

Propriétés : $(N(0,1))$

1) $P(X \geq t) = 1 - P(X \leq t)$

2) $P(X \leq -t) = P(X \geq t)$

$$= 1 - P(X \leq t)$$

3) $P(t_1 < X < t_2) = P(X \leq t_2) - P(X \leq t_1)$

$$= \pi(t_2) - \pi(t_1)$$

4) $P(-t < X < t) = 2\pi(t) - 1$

$$= 2P(X \leq t) - 1$$

5) $\pi(t_1) = \pi(t_2) \Leftrightarrow t_1 = t_2$

Propriété 2 :

Pour transforme un varia aléatoire qui suit un loi normal à une variable aléatoire qui suit un loi normale centrée réduite on utilise la formule :

$$Y = \frac{X - m}{\sigma}$$

Chapitre 04 : Simulation

Pourquoi faisons-nous des simulations ?

1) Comprendre et analyser le comportement de phénomènes aléatoires.

2) Approcher des probabilités théoriques dans des situations complexes où un calcul direct est difficile.

3) Vérifier des hypothèses théoriques en reproduisant une expérience un grand nombre de fois

Fréquence observée :

La fréquence observée est une estimation empirique de la probabilité d'un évènement donné. Elle se calcule comme suit :

$$f = \frac{\text{Nombre d'occurence}}{\text{nombre total d'essais}}$$

Pourquoi calculons la fréquence :

1) Comparer avec p :

On vérifie si les resultats réels sont conformes à ce qui est attendu selon les lois probabilistes

2) Quantifier les écarts :

Les écarts entre f et p permettent de mesurer à quel point les resultats simulés s'approchent de la probabilité théorique.

La proportion $|f-p| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$:

Cette condition sert à évaluer si la fréquence observée f se trouve dans une marge d'erreur acceptable autour de la probabilité théorique p

pourquoi cette proportion :

1) Lien avec les intervalles de confiance :

La born $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est liée aux intervalles de confiance en statistique. Elle reflète à quel point f devrait être proche de p pour un nombre d'essais n donné

2) Stabilite des résultats :

Si $|f-p| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ est vrai pour une proportion important des simulation, cela montre que la simulation est cohérente avec les prédictions théorique

3) Visualiser la convergence :

plus n est grand, plus $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est petit, et donc plus f converge vers p. cella illustre la diminution de la variabilité des resultats avec augmentation du nombre d'essais

Règle des grands nombres :

Cette règle stipule qu'à mesure que le nombre d'essaie n augment la fréquence observee f converge vers sa probabilité théorique p.

CamScanner