一致最小方差无偏估计 UMVUE 的求法归纳

#数理统计 #UMVUE 2021-12-04

一致最小方差无偏估计估计 UMVUE 是参数估计中的重难点内容，也是很多高校考研专业课喜欢考察的问题. 但在很多教材中的介绍并不全面，主要问题在于本科生教材浅尝辄止，研究生教材有些晦涩，所以我归纳整理了求解 UMVUE 的背景知识和常用解法，供大家参阅批评.

转载注明出处!

1 一致最小方差无偏估计（UMVUE)

1.1 均方误差

在参数的点估计中，需要对各个估计量的好坏进行评价. **均方误差 (Mean Squared Error)** 是在小样本量下对点估计进行评价的常用标准，定义为 $\mathrm{MSE}(\hat{\theta})=E(\hat{\theta}-\theta)^2$，其中 $\hat{\theta}$ 代表对参数真值 θ 的点估计量. 显然，估计的 MSE 越小越好.

对于无偏估计量 $E(\hat{\theta})=\theta$，有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{MSE}(\hat{\theta}) &= E[(\hat{\theta}-E\hat{\theta})+(E\hat{\theta}-\theta)]^2 \\
&= E(\hat{\theta}-E\hat{\theta})^2+E(E\hat{\theta}-\theta)^2+2E[(\hat{\theta}-E\hat{\theta})(E\hat{\theta}-\theta)] \\
&= \mathrm{Var}(\hat{\theta})
\end{aligned}
$$

即，无偏估计的均方误差即为其方差.

1.2 一致最小均方误差估计

定义 1 设有样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，对待估参数 θ，有一个估计类，称 $\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是该估计类中 θ 的**一致最小均方误差估计**，如果对该估计类中另外任意一个 θ 的估计 $\tilde{\theta}$，在参数空间 Θ 上都有$\mathrm{MSE}_\theta(\hat{\theta})\leqslant\mathrm{MSE}_\theta(\tilde{\theta})$

一致最小均方误差估计通常在一个确定的估计类中考虑，若不加限制，一致最小均方误差估计通常是不存在的（[1]287）.

1.3 一致最小方差无偏估计

当在参数 θ 的无偏估计类中考虑一致最小均方误差估计时，由（1）式知，一致最小均方误差估计变为一致最小方差无偏估计.

定义2 对参数估计问题，设 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一个无偏估计，如果对另外任意一个 θ 的无偏估计 $\tilde{\theta}$，在参数空间 Θ 上都有 $\mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta}) \leqslant \mathrm{Var}(\tilde{\theta})$，则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的**一致最小方差无偏估计 (Uniform Minimum-Variance Unbiased Estimator)**，记为 **UMVUE**.

定理1 设 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是来自总体样本的一个样本，$\hat{\theta}=\hat{\theta}(\mathbf{X})$ 是 θ 的一个无偏估计，$\mathrm{Var}(\hat{\theta})<\infty$. 则 $\hat{\theta}$ 是 θ 的 UMVUE 的充要条件是，对任意一个满足 $E(\varphi(\mathbf{X}))=0$ 和 $\mathrm{Var}(\varphi(\mathbf{X}))<\infty$ 的 $\varphi(\mathbf{X})$，都有 $\mathrm{Cov}_\theta(\hat{\theta},\varphi)=0, \forall\theta\in\Theta$.

证明 充分性：对于 θ 的任意一个无偏估计 $\tilde{\theta}$，令 $\varphi=\tilde{\theta}-\hat{\theta}$，则 $E(\varphi)=0$. 于是

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\tilde{\theta}) &= E(\tilde{\theta}-\theta)^2 \\
&= E[(\tilde{\theta}-\hat{\theta})+(\hat{\theta}-\theta)]^2 \\
&= E(\varphi^2)+\mathrm{Var}(\hat{\theta})+2\mathrm{Cov}(\varphi,\hat{\theta}) \\
&\geqslant \mathrm{Var}(\hat{\theta})
\end{aligned}$$

得证 $\hat{\theta}$ 为 θ 的 UMVUE. 必要性证明见参考文献[1]第288页.

2 充分完备统计量

2.1 充分统计量

定义3 设样本 $\mathbf{X}$ 的分布族为 $\{f(\boldsymbol{\theta},x),\boldsymbol{\theta}\in\Theta\}$，$\Theta$ 是参数空间. 对于统计量 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})$，若在已知 $\boldsymbol{T}$ 的条件下，样本 $\mathbf{X}$ 的条件分布与参数 $\boldsymbol{\theta}$ 无关，则称 $\boldsymbol{T}$ 为 $\boldsymbol{\theta}$ 的**充分统计量 (Sufficient Statistic)**.

定理2 (因子分解定理) 设 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是随机向量，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$ 是已知函数. 则 $T=T(\boldsymbol{X})$ 为充分统计量的充分必要条件是：存在两个函数 $g\left(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{\theta}\right)$ 和 $h(\boldsymbol{x})$ 使得对任意的 $\boldsymbol{\theta}$ 和任一组观测值 $\boldsymbol{x}$，有联合概率函数 (简便起见，将连续变量的概率密度函数

和离散变量的概率分布列统称为概率函数，下同)

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta})=g\big(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{\theta}\big)h(\boldsymbol{x})$$

其中 $g(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\theta})$ 是 $\boldsymbol{t},\boldsymbol{\theta}$ 的函数，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})=(T_1(\boldsymbol{x}),T_2(\boldsymbol{x}),\cdots,T_m(\boldsymbol{x}))$ 和 $h(\boldsymbol{x})$ 是 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的函数.

例1 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的 i.i.d 样本，求 μ,σ^2 的充分统计量.

解 样本的联合概率函数为 $f(\boldsymbol{x},\mu,\sigma^2)=(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-n}\exp\left[-\frac{\sum\limits_{i=1}^n(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$，整理可得

$$f(\boldsymbol{x},\mu,\sigma^2)=(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-n}\exp\left[-\frac{\sum\limits_{i=1}^n x_i^2-2\mu\sum\limits_{i=1}^n x_i+n\mu^2}{2\sigma^2}\right]$$

由因子分解定理 $\boldsymbol{T}=(\sum\limits_{i=1}^n X_i,\sum\limits_{i=1}^n X_i^2)$ 是参数 (μ,σ^2) 的充分统计量. 进一步整理得

$$f(\boldsymbol{x},\mu,\sigma^2)=(\sqrt{2\pi}\sigma)^{-n}\exp\left[\frac{n(\bar{x}-\mu)^2+(n-1)s^2}{2\sigma^2}\right]$$

说明 $(\bar{X},S^2)$ 也是参数 (μ,σ^2) 得充分统计量. 事实上 $(\sum\limits_{i=1}^n X_i,\sum\limits_{i=1}^n X_i^2)$ 与 $(\bar{X},S^2)$ 是一一对应的.

定理2 Rao–Blackwell 定理：假设 $g(\boldsymbol{X})$ 是 θ 的一个任意估计，$T(\boldsymbol{X})$ 是一个充分统计量；那么 $g(\boldsymbol{X})$ 相对于给定 $T(\boldsymbol{X})$ 的条件期望 $\tilde{g}=E\big(g(\boldsymbol{X})|T\big)$ 是一个比 $g(\boldsymbol{X})$ 更好的估计量（至少不差于），即 $\mathrm{Var}(\tilde{g})\leqslant\mathrm{Var}(g)$.

证明 由定义3知 $\tilde{g}=E\big(g(\boldsymbol{X})|T\big)$ 与参数 θ 无关，故 $\tilde{g}$ 可作为 θ 的估计量，并可表示为充分统计量 T 的函数，记为 $\tilde{g}=\tilde{g}(T)$. 由重期望公式得 $E(\tilde{g})=E(g)$，不妨记为 θ_0. $\mathrm{Var}(g)=E[(g-\tilde{g})+(\tilde{g}-\theta_0)]^2=E(g-\tilde{g})^2+E(\tilde{g}-\theta_0)^2+2E\left[(g-\tilde{g})(\tilde{g}-\theta_0)\right]$，其中

$$\begin{aligned}E\left[(g-\tilde{g})(\tilde{g}-\theta_0)\right]&=E\left\{E\left[(g-\tilde{g})(\tilde{g}-\theta_0)|T\right]\right\}\\&=E\left\{(\tilde{g}-\theta_0)E\left[(g-\tilde{g})|T\right]\right\}\\&=E\left\{(\tilde{g}-\theta_0)\left[E(g|T)-E(\tilde{g}|T)\right]\right\}\\&=E\left[(\tilde{g}-\theta_0)(\tilde{g}-\tilde{g})\right]\\&=0\end{aligned}$$

故 $\mathrm{Var}(g) = E(g-\tilde{g})^2 + \mathrm{Var}(\tilde{g})$, 则 $\mathrm{Var}(\tilde{g}) \leqslant \mathrm{Var}(g)$.

由 Rao–Blackwell 定理可知，若参数得 UMVUE 存在，则一定是充分统计量或充分统计量的函数.

2.2 完备统计量

定义4 设总体 X 的分布函数是 $F(x;\theta)$，Θ 是参数空间，$\mathbf{T}=\mathbf{T}(\mathbf{X})$ 是基于 X 的样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的统计量. 如果对于任何函数 $g(\mathbf{t})$，条件

$$E_\theta g(\boldsymbol{T}) = 0, \forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta$$

蕴涵 $P_\theta(g(\mathbf{T}))=0)=1(\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta)$，则称 $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ 是**完全统计量**或**完备统计量 (Complete Statistic)**.

既是充分的又是完备的统计量称为**充分完备统计量**.

3 指数型分布族

3.1 指数分布族

定义 5 设 $\boldsymbol{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是随机向量，$h(\boldsymbol{x}), T_i(\boldsymbol{x})$ 是 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的实值函数，$C(\boldsymbol{\theta}), Q_i(\boldsymbol{\theta})$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的函数. 如果 $\boldsymbol{X}$ 有联合概率函数

$$f(x, \boldsymbol{\theta}) = C(\boldsymbol{\theta}) \exp\left[\sum_{i=1}^m Q_i(\boldsymbol{\theta}) T_i(\boldsymbol{x})\right] h(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{\theta} \in \Theta$$

则称 $\boldsymbol{X}$ 服从**指数族分布**，其分布族称为**指数型分布族**.

3.2 自然形式

定义6 对于上述指数型分布族，引入新参数

$$\eta_i = Q_i(\boldsymbol{\theta}), i=1,2,\cdots,m.$$

如果能从 (18) 中解出唯一 $\theta_i = h_i(\boldsymbol{\eta})(1 \leqslant i \leqslant m)$，其中 $\boldsymbol{\eta}=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_m)$，

则有 $C(\boldsymbol{\theta})=\widetilde{C}(\boldsymbol{\eta})$，这就得到指数族分布的自然形式

$$\tilde{C}(\boldsymbol{\eta})\exp\left[\sum_{i=1}^{m}\eta_i T_i(\boldsymbol{x})\right]h(\boldsymbol{x})$$

则称 (19) 为**自然指数族**或**标准指数族**，称

$$\widetilde{\Theta}=\{\boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{\eta}=\big(Q_1(\boldsymbol{\theta}),Q_2(\boldsymbol{\theta}),\cdots,Q_m(\boldsymbol{\theta})\big),\boldsymbol{\theta}\in\Theta\}$$

为**自然参数空间**或**标准参数空间**.

例2 证明 $\mathrm{Ga}(\alpha,\lambda)$ 的样本分布服从指数型分布，并写出其自然形式.

解 记 $\boldsymbol{\Theta}=(\theta_1,\theta_2)=(\alpha,\lambda)$，则样本随机变量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的联合密度为

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\Theta})&=\frac{\lambda^{n\alpha}}{\Gamma^n(\alpha)}\exp\left[(\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i\right]\\&=C(\boldsymbol{\Theta})\exp\left[Q_1(\boldsymbol{\theta})T_1(\boldsymbol{x})+Q_2(\boldsymbol{\theta})T_2(\boldsymbol{x})\right]h(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

其中 $C(\Theta)=\frac{\theta_2^{n\theta_1}}{\Gamma^n(\theta_1)},Q_1(\boldsymbol{\theta})=\theta_1-1,Q_2(\boldsymbol{\theta})=-\theta_2,h(\boldsymbol{x})=1.$ (θ_1,θ_2)的参数空间是

$$\Theta=\{\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2)|\theta_1>0,\theta_2>0\}.$$

所以 $\boldsymbol{X}$ 服从指数分布. 下面取 $\eta_1=Q_1(\boldsymbol{\theta})=\theta_1-1,\eta_2=Q_2(\boldsymbol{\theta})=-\theta_2$，则唯一解出

$$\theta_1=\eta_1+1,\theta_2=-\eta_2,\widetilde{C}(\boldsymbol{\eta})=\frac{(-\eta_2)^{n(\eta_1+1)}}{\Gamma^n(\eta_1+1)}$$

所以 X 分布的自然形式为

$$\tilde{C}(\boldsymbol{\eta})\exp\left[\eta_1T_1(\boldsymbol{x})+\eta_2T_2(\boldsymbol{x})\right]h(\boldsymbol{x})$$

且自然参数空间为

$$\widetilde{\Theta}=\{\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\eta_2)|\eta_1>-1,\eta_2<0\},$$

定理3 如果 $\boldsymbol{X}$ 的概率分布族能写成指数分布的自然形式 (19)，且自然参数空间 $\widetilde{\Theta}$ 有内

点，则

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})=\big(T_1(\boldsymbol{X}),T_2(\boldsymbol{X}),\cdots,T_m(\boldsymbol{X})\big)$$

是 $\boldsymbol{\theta}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$ 充分完备统计量.

证明 由因子分解定理易证 $T(\boldsymbol{X})$ 为充分统计量，完全性的证明参见参考资料[2]第 80 页.

例 3 对于正态分布 $\{N(0,\sigma^2):\sigma\in\mathbb{R}^+\}$，证明统计量 X_1 不是完备统计量，而 $T=\sum\limits_{i=1}^n X_i^2$ 是完备统计量.

解 $E_\sigma(X_1)=0$ 而 $P_\sigma(X_1=0)=0\neq 1(\forall\sigma\in\mathbb{R}^+)$，故 X_1 不是完备统计量.

$X_i/\sigma\sim N(0,1)$，故 $T/\sigma^2\sim Ga(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$，因此 $T\sim Ga(\frac{n}{2},\frac{1}{2\sigma^2})$，由例1知，$\boldsymbol{X}$ 服从指数型分布族，且其自然参数空间有内点，故由定理3，T 为充分完备统计量，证必.

4 Lehmann–Scheffé 定理

定理4 Lehmann–Scheffé 定理 设 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{X})$ 是充分完备统计量，若 $\hat{g}(\boldsymbol{X})$ 是 $h(\boldsymbol{\theta})$ 的方差有限的无偏估计，即

$$E_\theta\hat{g}(\boldsymbol{X})=h(\boldsymbol{\theta}),\mathrm{Var}_\theta(\hat{g}(\boldsymbol{X}))<\infty,\forall\boldsymbol{\theta}\in\Theta,$$

则条件数学期望

$$\eta(\boldsymbol{T})=E\left[\hat{g}(\boldsymbol{X})|T\right]$$

是 $h(\boldsymbol{\theta})$ 的唯一的 UMVUE. 证明见参考文献[3]103页

5 Cramer-Rao 不等式

定理5 Cramer-Rao 不等式 设总体分布 $f(x,\theta)$，$X_1,\cdots,X_n$ 是来自该总体的简单样本，$T=T(X_1,\cdots,X_n)$ 是 $g(\theta)$ 的任一个无偏估计，$g'(\theta)=\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta}$ 存在，且对 Θ 中一切 θ，对

$$g'(\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}T(x_1,\cdots,x_n)\prod_{i=1}^n p(x_i,\theta)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n,$$

的微商可在积分号下进行，即

$$g'(\theta)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}T(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\prod_{i=1}^{n}p(x_i,\theta)\right)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n.$$

则有

$$\mathrm{Var}(T)\geqslant\frac{[g'(\theta)]^2}{nI(\theta)}$$

其中 $I(\theta)=E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x,\theta)\right]^2$ 为费希尔信息量，$\frac{[g'(\theta)]^2}{nI(\theta)}$ 称为参数估计的 C-R 下限. 证明详见参考文献[1]291页.

(31) 式中若等号成立则称 T 是 $g(\theta)$ 的有效估计，有效估计一定是 UMVUE.

6 UMVUE 的求法

根据 Rao–Blackwell 定理，UMVUE 若存在一定是基于充分统计量的估计. 故寻找 UMVUE 可以利用因子分解定理寻找充分统计量，然后对充分统计量进行无偏修正，得到可能的 UMUVE，最后可以利用 UMVUE 的充要条件 (定理1)、Lehmann–Scheffé 定理、Cramer-Rao 不等式等方法说明其方差一致最小.

下面通过例题说明求 UMVUE 的具体思路.

例4 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的 i.i.d 样本，求 μ,σ^2 的 UMVUE.

解法1 由例1知，$(\bar{X},S^2)$ 是 (μ,σ^2) 的充分统计量. $E(\bar{X})=\mu,E(S^2)=\sigma^2$ 均为无偏估计，且为充分统计量的函数. 令 $E(\varphi(\boldsymbol{X}))=0$，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_1,\cdots,x_n)\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n=$$

两边对 μ 求导，得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_1,\cdots,x_n)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x_1,\cdots,x_n)\bar{x}f(\boldsymbol{x},\theta,\sigma^2)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$
$$\mathrm{Cov}(\varphi,\bar{X})$$

由定理1知，$\bar{X}$ 是 μ 的 UMVUE.

同理，式 (32) 俩边对 σ^2 求导，得到 $\mathrm{Cov}(\varphi, S^2)=0$，证得 S^2 是 σ^2 的UMVUE.

解法2 记 $\boldsymbol{T}=(T_1(\boldsymbol{X}), T_2(\boldsymbol{X}))=(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2)$ 样本的联合密度函数为

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}, \theta, \sigma^2) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right] \\
&= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{n\mu^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left[\frac{\mu T_1(\boldsymbol{x})}{\sigma^2}-\frac{T_2(\boldsymbol{x})}{2\sigma^2}\right] \\
&= C(\boldsymbol{\Theta}) \exp\left[Q_1(\boldsymbol{\theta})T_1(\boldsymbol{x})+Q_2(\boldsymbol{\theta})T_2(\boldsymbol{x})\right] h(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

其中，$\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2)=(\mu,\sigma^2), h(\boldsymbol{x})=1$.

取 $\eta_1=Q_1(\boldsymbol{\theta})=\frac{\theta_1}{\theta_2}, \eta_2=Q_2(\boldsymbol{\theta})=\frac{-1}{2\theta_2}$，唯一解出 $\theta_1=\frac{-\eta_1}{2\eta_2}, \theta_2=\frac{-1}{2\eta_2}$，带入 $C(\boldsymbol{\theta})$ 得到 $\widetilde{C}(\boldsymbol{\eta})$. 所以 $\boldsymbol{X}$ 的分布族为指数型分布族且有自然形式，自然参数空间为

$$
\widetilde{\Theta}=\{\boldsymbol{\eta}=(\eta_1,\eta_2)|\eta_1\in(-\infty,\infty),\eta_2<0\}
$$

由定理3知，$\boldsymbol{T}=(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} X_i^2)$ 是 $\boldsymbol{\Theta}=(\mu,\sigma^2)$ 的充分完备统计量，基于该统计量构造 μ, σ^2 的无偏估计 $\bar{X}, S^2$. 显然 $\bar{X}, S^2$ 都可以表示为 $\boldsymbol{T}$ 的函数，故由 Lehmann–Scheffé 定理 $\bar{X}=E(\bar{X}|\boldsymbol{T})$ 和 $S^2=E(S^2|\boldsymbol{T})$ 分别为 μ 和 σ^2 的 UMVUE.

上例中，分布族为指数型分布族，使用定理3确定充分完备统计量是方便的，然后使用 Lehmann–Scheffé 定理说明 UMVUE. 对于非指数族分布，可以尝试使用因子分解定理和定义4说明充分性和完备性.

例 5 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自均匀样本分布 $U(0,\theta), \theta>0$ 的 i.i.d 样本，求 θ 的 UMVUE.

解 样本的联合概率分布为 $f(\boldsymbol{x},\theta)=\frac{1}{\theta^n} I_{\{0<x_{(n)}<\theta\}}$，其中 $X_{(n)}=\max\{\boldsymbol{X}\}$ 为次序统计量. 根据因子分解定理，$T=X_{(n)}$ 为充分统计量. T 的概率密度函数为 $f(t,\theta)=n\frac{t^{n-1}}{\theta^n} I_{\{0<x_{(n)}<\theta\}}$. 则 $E(T)=\frac{n}{n+1}\theta$，可得 $\frac{n+1}{n}T$ 为 θ 的无偏估计，记为 $\hat{\theta}(T)$. 设 $E(g(T))=0$，即

$$\int_0^\theta g(T)n\frac{t^{n-1}}{\theta^n}\mathrm{d}t=0$$

$$\int_0^\theta g(T)t^{n-1}\mathrm{d}t=0$$

两边对 θ 求导，得 $g(\theta)=0$，由定义4知 T 为完备统计量. $\hat{\theta}(T)=E(\hat{\theta}(T)|T)$, 由 Lehmann–Scheffé 定理，$\hat{\theta}=\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ 为 θ 的 UMVUE.

相对于以上解法，估计的 C-R 下限的计算是简单而直接的，所以对于某估计我们可以先验证它的方差是否达到 C-R 下限，一旦达到 C-R 下限则立即说明该估计为 UMVUE.

例6 设总体为指数分布 $Exp(1/\theta)$，求参数 θ UMVUE.

解 先计算费希尔信息量 $I(\theta)=E\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x,\theta)\right]^2=\frac{1}{\theta^2}$，则 θ 的 C-R 下限为 $\frac{1}{nI(\theta)}=\frac{\theta^2}{n}$. 对于 θ 的无偏估计量 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，其方差为 $\mathrm{Var}(\bar{X})=\frac{\theta^2}{n}$ 达到 C-R 下限，故为有效估计，则为 UMVUE.

通过以上例题，总结 UMVUE 的求法思路.

1. 首先应明确，并不是所有的参数都有 UMVUE.
2. 根据 Rao–Blackwell 定理，若 UMVUE 存在则一定是基于充分统计量的，故应先寻找参数的充分统计量.
3. 确定待证明的统计量，一般基于充分统计量构造，然后进行无偏修正.
4. 证明选择的统计量为 UMVE. 具体地，
    1. 首先考虑 C-R 下限，因为该方法计算相对简单，一旦估计的方差达到下限，则立即说明其为 UMVUE. 但应注意方差达到 C-R 下限是 UMVUE 的充分不必要条件.
    2. 由于指数族分布的优良性质，整理联合概率函数，证明其为指数族分布且有自然形式，并写出自然参数空间，使用定理3说明 UMVUE.
    3. 若分布族不是指数族分布，则考虑使用完备统计量的定义说明完备性(例5)，然后利用 Lehmann–Scheffé 定理说明 UMVUE.
    4. 使用 UMVUE 的充分必要条件 (定理1)，对 $E(\varphi)=0$ 两边求导，整理得到 $\mathrm{Cov}(\varphi,T)=0$ 来证明.

5. 对于某些特殊的情况可以使用定义法直接说明其方差一致最小，但一般比较困难.
6. 若以上方法均无法证明，则考虑更换估计量，或者估计的 UMVUE 不存在.

参考文献

[1] 茆诗松, 程依明, 濮晓龙. 概率论与数理统计教程. 3版. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[2] 陈希孺. 数理统计引论. 北京：科学出版社, 1981.

[3] 韦来生, 数理统计. 北京: 科学出版社, 2015.

[4] 周伟萍, 关于一直最小方差无偏估计的教学思考, 高师理科学刊, 2013,33(06)

[5] Charles Elkan, Rao-Blackwell Theorem: Intuition, Lemmas and Start of Proof

“又摘桃花换酒钱”

喜欢作者

< 上一篇

「篮球裁判手势挑战」小程序发布

下一篇 >

使用 Web 前端技术开发一个 Wallpaper Engine 壁纸

#数理统计 #UMVUE

机器学习基础-“逻辑”回归(logistic regression)的数学原理

机器学习基础-BP(Error Back Propagation)算法的数学原理

0 条评论 未登录用户

说点什么

支持 Markdown 语法 使用 GitHub 登录 预览

来做第一个留言的人吧!

海 内 存 知 己　天 涯 若 比 邻

朋友

- Lei's Research
- Yangtian's blog site
- 咕咕
- 申请友链

账号

- hooozen
- 谁在胡言乱语
- 知乎 Mundooo

联系

- Hozen@live.com

hozen.site | 由 Hexo 及 致远 驱动