

绝密★启用前

## 2021 年普通高等学校招生全国统一考试

### 理科数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设  $2(z + \bar{z}) + 3(z - \bar{z}) = 4 + 6i$ ，则  $z =$  ( )  
 A.  $1 - 2i$                       B.  $1 + 2i$                       C.  $1 + i$                       D.  $1 - i$
2. 已知集合  $S = \{s | s = 2n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$ ， $T = \{t | t = 4n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$ ，则  $S \cap T =$  ( )  
 A.  $\emptyset$                       B.  $S$                       C.  $T$                       D.  $\mathbf{Z}$
3. 已知命题  $p: \exists x \in \mathbf{R}, \sin x < 1$ ；命题  $q: \forall x \in \mathbf{R}, e^{|x|} \geq 1$ ，则下列命题中为真命题的是 ( )  
 A.  $p \wedge q$                       B.  $\neg p \wedge q$                       C.  $p \wedge \neg q$                       D.  $\neg(p \vee q)$
4. 设函数  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ ，则下列函数中为奇函数的是 ( )  
 A.  $f(x-1)-1$                       B.  $f(x-1)+1$                       C.  $f(x+1)-1$                       D.  $f(x+1)+1$
5. 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中， $P$  为  $B_1D_1$  的中点，则直线  $PB$  与  $AD_1$  所成的角为 ( )  
 A.  $\frac{\pi}{2}$                       B.  $\frac{\pi}{3}$                       C.  $\frac{\pi}{4}$                       D.  $\frac{\pi}{6}$
6. 将 5 名北京冬奥会志愿者分配到花样滑冰、短道速滑、冰球和冰壶 4 个项目进行培训，每名志愿者只分配到 1 个项目，每个项目至少分配 1 名志愿者，则不同的分配方案共有 ( )  
 A. 60 种                      B. 120 种                      C. 240 种                      D. 480 种
7. 把函数  $y = f(x)$  图像上所有点的横坐标缩短到原来的  $\frac{1}{2}$  倍，纵坐标不变，再把所得曲线向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个



单位长度，得到函数  $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$  的图像，则  $f(x) =$  ( )

A.  $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{7\pi}{12}\right)$

B.  $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$

C.  $\sin\left(2x - \frac{7\pi}{12}\right)$

D.  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{12}\right)$

8. 在区间  $(0,1)$  与  $(1,2)$  中各随机取 1 个数，则两数之和大于  $\frac{7}{4}$  的概率为 ( )

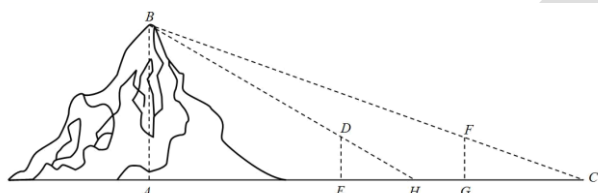
A.  $\frac{7}{9}$

B.  $\frac{23}{32}$

C.  $\frac{9}{32}$

D.  $\frac{2}{9}$

9. 魏晋时刘徽撰写的《海岛算经》是关测量的数学著作，其中第一题是测海岛的高. 如图，点  $E, H, G$  在水平线  $AC$  上， $DE$  和  $FG$  是两个垂直于水平面且等高的测量标杆的高度，称为“表高”， $EG$  称为“表距”， $GC$  和  $EH$  都称为“表目距”， $GC$  与  $EH$  的差称为“表目距的差”则海岛的高  $AB =$  ( )



A.  $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表高}$

B.  $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表高}$

C.  $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} + \text{表距}$

D.  $\frac{\text{表高} \times \text{表距}}{\text{表目距的差}} - \text{表距}$

10. 设  $a \neq 0$ ，若  $x = a$  为函数  $f(x) = a(x-a)^2(x-b)$  的极大值点，则 ( )

A.  $a < b$

B.  $a > b$

C.  $ab < a^2$

D.  $ab > a^2$

11. 设  $B$  是椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的上顶点，若  $C$  上的任意一点  $P$  都满足  $|PB| \leq 2b$ ，则  $C$  的离心率的取值范围是 ( )

A.  $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$

B.  $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$

C.  $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

D.  $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

12. 设  $a = 2\ln 1.01$ ， $b = \ln 1.02$ ， $c = \sqrt{1.04} - 1$ . 则 ( )

A.  $a < b < c$

B.  $b < c < a$

C.  $b < a < c$

D.  $c < a < b$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

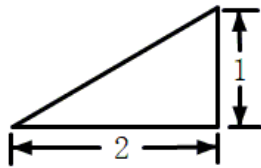


13. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{m} - y^2 = 1 (m > 0)$  的一条渐近线为  $\sqrt{3}x + my = 0$ , 则  $C$  的焦距为\_\_\_\_\_.

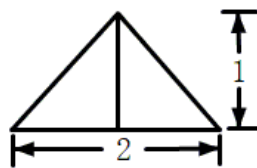
14. 已知向量  $\vec{a} = (1, 3), \vec{b} = (3, 4)$ , 若  $(\vec{a} - \lambda\vec{b}) \perp \vec{b}$ , 则  $\lambda =$ \_\_\_\_\_.

15. 记  $\triangle ABC$  内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 面积为  $\sqrt{3}$ ,  $B = 60^\circ$ ,  $a^2 + c^2 = 3ac$ , 则  $b =$ \_\_\_\_\_.

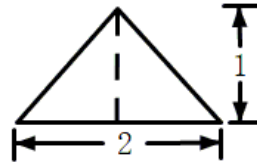
16. 以图①为正视图, 在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图, 组成某个三棱锥的三视图, 则所选侧视图和俯视图的编号依次为\_\_\_\_\_ (写出符合要求的一组答案即可).



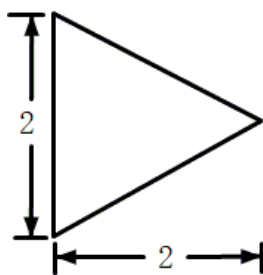
图①



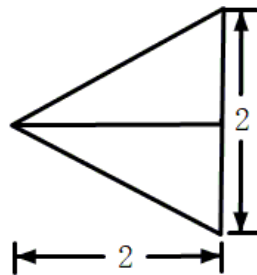
图②



图③



图④



图⑤

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. 某厂研制了一种生产高精产品的设备, 为检验新设备生产产品的某项指标有无提高, 用一台旧设备和一台新设备各生产了 10 件产品, 得到各件产品该项指标数据如下:

|     |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 旧设备 | 9.8  | 10.3 | 10.0 | 10.2 | 9.9  | 9.8  | 10.0 | 10.1 | 10.2 | 9.7  |
| 新设备 | 10.1 | 10.4 | 10.1 | 10.0 | 10.1 | 10.3 | 10.6 | 10.5 | 10.4 | 10.5 |

旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均数分别记为  $\bar{x}$  和  $\bar{y}$ , 样本方差分别记为  $s_1^2$  和  $s_2^2$ .

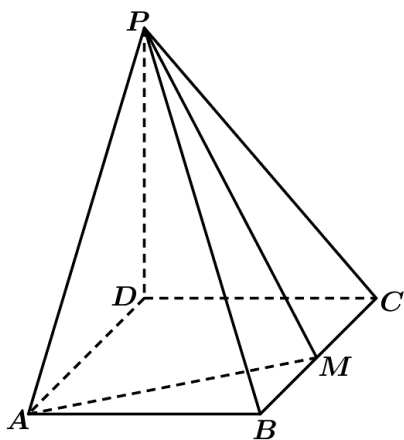
(1) 求  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $s_1^2$ ,  $s_2^2$ ;

(2) 判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高 (如果  $\bar{y} - \bar{x} \geq 2\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{10}}$ , 则认为



新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高，否则不认为有显著提高).

18. 如图，四棱锥  $P-ABCD$  的底面是矩形， $PD \perp$  底面  $ABCD$ ， $PD = DC = 1$ ， $M$  为  $BC$  的中点，且  $PB \perp AM$ .



- (1) 求  $BC$ ;
  - (2) 求二面角  $A-PM-B$  的正弦值.
19. 记  $S_n$  为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和， $b_n$  为数列  $\{S_n\}$  的前  $n$  项积，已知  $\frac{2}{S_n} + \frac{1}{b_n} = 2$ .
- (1) 证明：数列  $\{b_n\}$  是等差数列;
  - (2) 求  $\{a_n\}$  通项公式.
20. 设函数  $f(x) = \ln(a-x)$ ，已知  $x=0$  是函数  $y = xf(x)$  的极值点.
- (1) 求  $a$ ;
  - (2) 设函数  $g(x) = \frac{x+f(x)}{xf(x)}$ . 证明:  $g(x) < 1$ .
21. 已知抛物线  $C: x^2 = 2py (p > 0)$  焦点为  $F$ ，且  $F$  与圆  $M: x^2 + (y+4)^2 = 1$  上点的距离的最小值为 4.
- (1) 求  $p$ ;
  - (2) 若点  $P$  在  $M$  上， $PA, PB$  是  $C$  的两条切线， $A, B$  是切点，求  $\triangle PAB$  面积的最大值.

(二) 选考题，共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

[选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)



22. 在直角坐标系  $xOy$  中,  $\odot C$  的圆心为  $C(2,1)$ , 半径为 1.

(1) 写出  $\odot C$  的一个参数方程;

(2) 过点  $F(4,1)$  作  $\odot C$  的两条切线. 以坐标原点为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 求这两条切线的极坐标方程.

[选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

23. 已知函数  $f(x) = |x-a| + |x+3|$ .

(1) 当  $a=1$  时, 求不等式  $f(x) \geq 6$  的解集;

(2) 若  $f(x) > -a$ , 求  $a$  取值范围.