

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский университет  
ИТМО»

**ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ**

**Курсовая работа. Часть №1**  
по дисциплине  
Дискретная математика (Базовый уровень)

Вариант №-48

*Выполнила:*  
Студент группы Р3132  
Чмурова Мария  
Владиславовна  
*Проверил:*  
Поляков  
Владимир Иванович

г. Санкт-Петербург  
2023 год

## Оглавление

Задание.....	3
Представление булевой функции в аналитическом виде: .....	5
Минимизация булевой функции методом Квайна-Мак-Класки.....	6
Составление импликантной таблицы.....	7
Минимизация булевой функции на картах Карно .....	9
Преобразование минимальных форм булевой функции .....	11
Синтез комбинационных схем в булевом базисе .....	12
Сокращенный булев базис (И, НЕ) .....	14
Универсальный базис (И, НЕ) .....	15

## Задание

Построить комбинационные схемы в различных базисах, реализующие не полностью определенную булеву функцию  $f(X) = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ , которая принимает значение 1 при условии:

$$2 < |X_3X_40 - X_5X_1X_2| \leq 5$$

и неопределенное значение на наборах, для которых:

$$|X_3X_40 - X_5X_1X_2| = 1$$

N	$X_1X_2X_3X_4X_5$	$X_3X_40$	$(X_3X_40)_{10}$	$X_5X_1X_2$	$(X_5X_1X_2)_{10}$	-	f
0	0 0 0 0 0	0 0 0	0	0 0 0	0	0	0
1	0 0 0 0 1	0 0 0	0	1 0 0	4	4	1
2	0 0 0 1 0	0 1 0	2	0 0 0	0	2	0
3	0 0 0 1 1	0 1 0	2	1 0 0	4	2	0
4	0 0 1 0 0	1 0 0	4	0 0 0	0	4	1
5	0 0 1 0 1	1 0 0	4	1 0 0	4	0	0
6	0 0 1 1 0	1 1 0	6	0 0 0	0	6	0
7	0 0 1 1 1	1 1 0	6	1 0 0	4	2	0
8	0 1 0 0 0	0 0 0	0	0 0 1	1	1	d
9	0 1 0 0 1	0 0 0	0	1 0 1	4	4	1
10	0 1 0 1 0	0 1 0	2	0 0 1	1	1	d
11	0 1 0 1 1	0 1 0	2	1 0 1	5	4	1
12	0 1 1 0 0	1 0 0	4	0 0 1	1	3	1
13	0 1 1 0 1	1 0 0	4	1 0 1	5	1	d
14	0 1 1 1 0	1 1 0	6	0 0 1	1	5	1
15	0 1 1 1 1	1 1 0	6	1 0 1	5	1	d
16	1 0 0 0 0	0 0 0	0	0 1 0	2	2	0
17	1 0 0 0 1	0 0 0	0	1 1 0	6	6	0
18	1 0 0 1 0	0 1 0	2	0 1 0	2	0	0
19	1 0 0 1 1	0 1 0	2	1 1 0	6	4	1
20	1 0 1 0 0	1 0 0	4	0 1 0	2	2	0
21	1 0 1 0 1	1 0 0	4	1 1 0	6	2	0
22	1 0 1 1 0	1 1 0	6	0 1 0	2	4	1
23	1 0 1 1 1	1 1 0	6	1 1 0	6	0	0
24	1 1 0 0 0	0 0 0	0	0 1 1	3	3	1
25	1 1 0 0 1	0 0 0	0	1 1 1	7	7	0
26	1 1 0 1 0	0 1 0	2	0 1 1	3	1	d
27	1 1 0 1 1	0 1 0	2	1 1 1	7	5	1
28	1 1 1 0 0	1 0 0	4	0 1 1	3	1	d
29	1 1 1 0 1	1 0 0	4	1 1 1	7	3	1
30	1 1 1 1 0	1 1 0	6	0 1 1	3	3	1
31	1 1 1 1 1	1 1 0	6	1 1 1	7	1	d

### Представление булевой функции в аналитическом виде:

$$\begin{aligned} \text{КДНФ: } f = & \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_4 x_5 \vee \\ & \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2 x_3 x_4 \overline{x_5} \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 x_5 \vee x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 \overline{x_5} \vee x_1 x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} \overline{x_5} \vee \\ & x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 x_5 \vee x_1 x_2 x_3 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 \overline{x_5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ККНФ: } f = & (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) \\ & (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}) (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee x_5) \\ & (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) \\ & (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4} \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5) (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee \overline{x_5}). \\ & (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) \end{aligned}$$

## Минимизация булевой функции методом Квайна-Мак-Класки

$K^0(f)$	$K^1(f)$	$K^2(f)$	$K^3(f)$
1. 00001 v 2. 00100 v 3. 01000 v	1. 0100X (3-4) v 2. 010X0 (3-7) v 3. 01X00 (3-5) v 4. 0X001 (1-4) 5. 0X100 (2-7) 6. X1000 (3-6) v	1. 010XX (1-7) v 2. 01X0X (1-9) v 3. 01XX0 (2-10) v 4. X10X0 (2-13) v 5. X1X00 (3-14) v	1. 01XXX (1-6) 2. X1XX0 (3-9)
4. 01001 v 5. 01100 v 6. 11000 v 7. 01010 v	7. 0101X (7-8) v 8. 010X1 (4-8) v 9. 0110X (5-12) v 10. 011X0 (5-9) v 11. 01X01 (4-12) v 12. 01X10 (7-9) v 13. 110X0 (6-13) v 14. 11X00 (6-14) v 15. X1010 (7-13) v 16. X1100 (5-14) v	6. 011XX (9-17) v 7. 01X1X (7-17) v 8. 01XX1 (8-18) v 9. 11XX0 (13-22) v 10. X101X (7-20) v 11. X110X (9-21) v 12. X11X0 (10-22) v 13. X1X11 (12-23) v	3. X11XX (6-14) 4. X1X1X (7-15)
8. 01011 v 9. 01110 v 10. 10011 v 11. 10110 v 12. 01101 v 13. 11010 v 14. 11100 v	17. 0111X (9-18) v 18. 011X1 (12-18) v 19. 01X11 (8-18) v 20. 1101X (13-15) v 21. 1110X (14-16) v 22. 111X0 (14-17) v 23. 11X10 (13-17) v 24. 1X011 (10-15) 25. 1X110 (11-17) 26. X1011 (8-15) v 27. X1101 (12-16) v 28. X1110 (9-17) v	14. 111XX (21-29) v 15. 11X1X (20-29) v 16. X111X (17-29) v 17. X11X1 (18-30) v 18. X1X11 (19-31) v	
15. 11011 v 16. 11101 v 17. 11110 v 18. 01111 v 19. 11111 v	29. 1111X (17-19) v 30. 111X1 (16-19) v 31. 11X11 (15-19) v 32. X1111 (18-19) v		

**Z(f):** 0X001  
0X100  
1X011  
1X110  
01XXX  
X1XX0  
X11XX  
X1X1X

## Составление импликантной таблицы

Простые импланты (максимальные кубы)	0-кубы											
	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1
	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1
	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
	1	4	9	11	12	14	19	22	24	27	29	30
0X001	X		X									
0X100		X			X							
1X011							X			X		
1X110								X				X
01XXX			X	X	X	X						
X1XX0					X	X			X			X
X11XX					X	X					X	X
X1X1X				X		X				X		X

**T(f):** 0X001  
 0X100  
 1X011  
 1X110  
 X1XX0  
 X11XX

## Полученная упрощенная импликантная таблица

Простые импликанты (максимальные кубы)		0-кубы
		0
		1
		0
		1
		1
		11
01XXX	A	X
X1X1X	B	X

Метод Петрика:

Запишем булево выражение, определяющее условие покрытия всех вершин

$$Y = A \vee B$$

Возможны следующие варианты покрытия:

$$C_1 = \{^T_A\} = \left\{ \begin{array}{l} 0X001 \\ 0X100 \\ X1XX0 \\ X11XX \\ 1X011 \\ 1X110 \\ 01XXX \end{array} \right\} \quad C_2 = \{^T_B\} = \left\{ \begin{array}{l} 0X001 \\ 0X100 \\ X1XX0 \\ X11XX \\ 1X011 \\ 1X110 \\ X1X1X \end{array} \right\}$$

$$S_1^a = 22$$

$$S_2^a = 22$$

$$S_1^b = 29$$

$$S_2^b = 29$$

Оба покрытия можем считать минимальными, тогда, рассмотрим следующее минимальное покрытие  $C_1$ :

$$C_{min} = \left\{ \begin{array}{l} 0X001 \\ 0X100 \\ X1XX0 \\ X11XX \\ 1X011 \\ 1X110 \\ 01XXX \end{array} \right\}$$

$$S^a = 22$$

$$S^b = 29$$

Этому покрытию соответствует МДНФ следующего вида:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_3 \overline{x_4} \overline{x_5} \vee x_2 \overline{x_5} \vee x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_3} x_4 x_5 \vee x_1 x_3 x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2$$



## Минимизация булевой функции на картах Карно

МДНФ:

		$x_4 x_5$			
		00	01	11	10
$x_2 x_3$	00		1		
	01	1			
	11	1	d	d	1
	10	d	1	1	d
		$x_1 = 0$			

		$x_4 x_5$			
		00	01	11	10
$x_2 x_3$	00			1	
	01				1
	11	d	1	d	1
	10	1		1	d
		$x_1 = 1$			

Получаем:

$$C_{min} = \left\{ \begin{array}{l} 0X001 \\ 0X100 \\ X1XX0 \\ X11XX \\ 1X011 \\ 1X110 \\ 01XXX \end{array} \right\} \quad S^a = 22 \quad S^b = 29$$

МДНФ имеет следующий вид:

$$f = \overline{x_1} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_3 \overline{x_4} x_5 \vee x_2 \overline{x_5} \vee x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_3} x_4 x_5 \vee x_1 x_3 x_4 \overline{x_5} \vee \overline{x_1} x_2$$

МКНФ

		$x_4 x_5$			
		00	01	11	10
$x_2 x_3$	00	0		0	0
	01		0	0	0
	11		d	d	
	10	d			d
		$x_1 = 0$			

		$x_4 x_5$			
		00	01	11	10
$x_2 x_3$	00	0	0		0
	01	0	0	0	
	11	d		d	
	10		0		d
		$x_1 = 1$			

Получаем:

$$C_{min} = \left\{ \begin{array}{l} 00X1X \\ X00X0 \\ X01X1 \\ 1X001 \\ 1X100 \end{array} \right\} \quad S^a = 17 \quad S^b = 22$$

МКНФ имеет следующий вид:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_4})(x_2 \vee x_3 \vee x_5)(x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_5})(\overline{x_1} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5}) \\ (\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5)$$

## Преобразование минимальных форм булевой функции

### Факторное преобразование для МДНФ:

$$f = x_2 \overline{x_5} \vee x_2 x_3 \vee \overline{x_1} x_2 \vee \overline{x_1} \overline{x_3} \overline{x_4} x_5 \vee \overline{x_1} x_3 \overline{x_4} x_5 \vee x_1 \overline{x_3} x_4 x_5 \vee x_1 x_3 x_4 \overline{x_5}$$

$$S_Q = 29; \tau = 2$$

$$f = x_2 (\overline{x_1} \vee x_3 \vee \overline{x_5}) \vee (\overline{x_1} \overline{x_4} \vee x_1 x_4) \vee (x_3 \overline{x_5} \vee \overline{x_3} x_5) \quad S_Q = 21; \tau = 4$$

$$\varphi = \overline{x_3} x_5$$

$$\overline{\varphi} = x_3 \vee \overline{x_5}$$

$$f = x_2 (\overline{\varphi} \vee \overline{x_1}) \vee (\overline{x_1} \overline{x_4} \vee x_1 x_4) (x_3 \overline{x_5} \vee \varphi) \quad S_Q = 21, \tau = 5$$

=> Декомпозиция нецелесообразна

$$f = x_2 (\overline{x_1} \vee x_3 \vee \overline{x_5}) \vee (\overline{x_1} \overline{x_4} \vee x_1 x_4) \vee (x_3 \overline{x_5} \vee \overline{x_3} x_5) \quad S_Q = 21; \tau = 4$$

### Факторное преобразование для МКНФ:

$$f = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_4}) (x_2 \vee x_3 \vee x_5) (x_2 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_5}) (\overline{x_1} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5})$$

$$(\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5)$$

$$S_Q = 22, \tau = 2$$

$$f = (x_2 \vee (x_1 \vee \overline{x_4}) (x_3 \vee x_5) (\overline{x_3} \vee \overline{x_5})) (\overline{x_1} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5})$$

$$(\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5)$$

$$S_Q = 22, \tau = 4$$

Декомпозиция невозможна

## Синтез комбинационных схем в булевом базисе

Набор аргументов:

$$f(00000) = 0$$

$$f(00010) = 0$$

$$f(00001) = 1$$

$$f(00100) = 1$$

Схема по упрощенной МДНФ:

$$f = x_2(\overline{x_1} \vee x_3 \vee \overline{x_5}) \vee (\overline{x_1} \overline{x_4} \vee x_1 x_4) \vee (x_3 \overline{x_5} \vee \overline{x_3} x_5)$$

$$S_Q = 21; \tau = 4$$

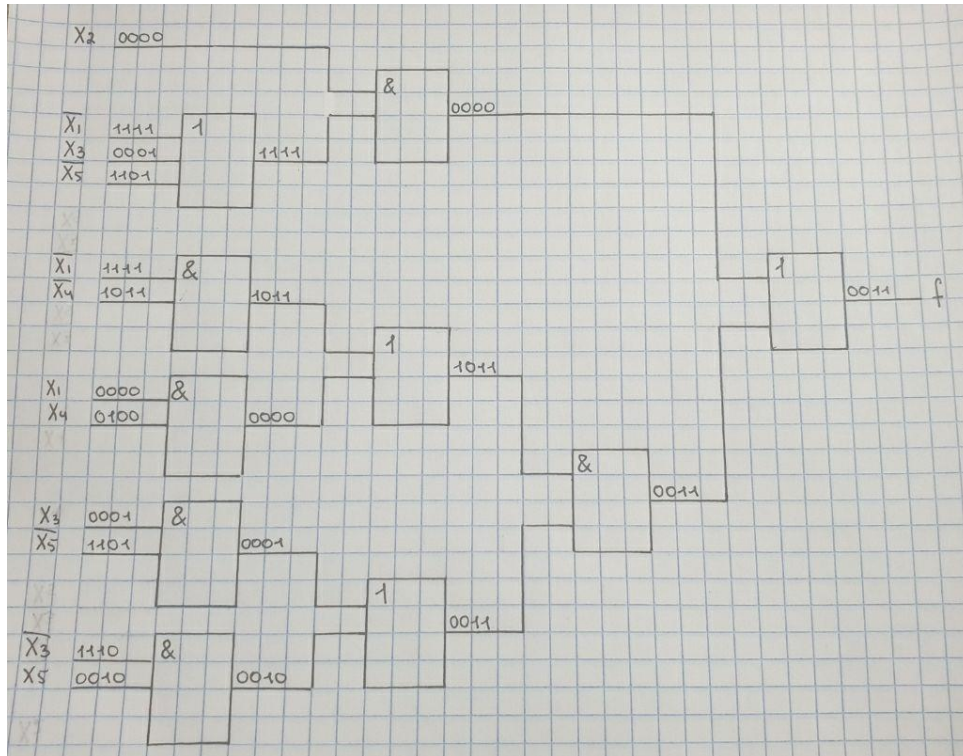
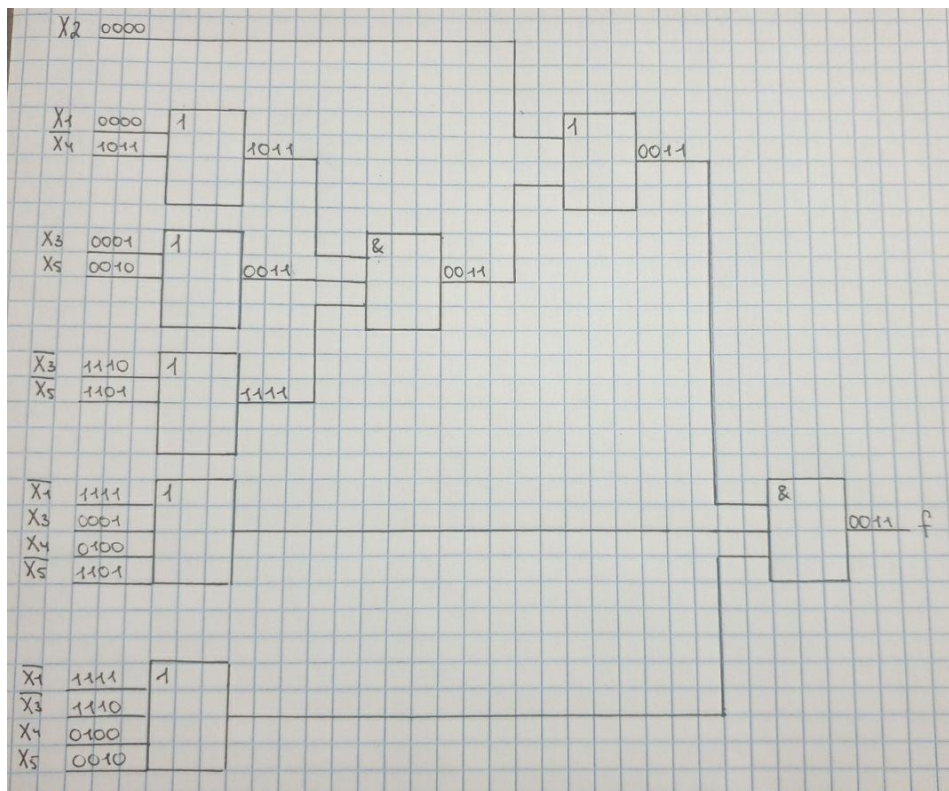


Схема по упрощенной МКНФ

$$f = (x_2 \vee (x_1 \vee \overline{x_4})(x_3 \vee x_5)(\overline{x_3} \vee \overline{x_5}))(\overline{x_1} \vee x_3 \vee x_4 \vee \overline{x_5})$$

$$(\overline{x_1} \vee \overline{x_3} \vee x_4 \vee x_5)$$

$$S_Q = 22, \tau = 4$$





## Сокращенный булев базис (И, НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе (И, НЕ):

$$f = \overline{x_2 \varphi x_1} \overline{x_1 x_4} \overline{x_1 x_4} \overline{x_3 x_5} \overline{\varphi}$$

$$S_Q = 30, \tau = 8, \varphi = \overline{x_3} x_5$$

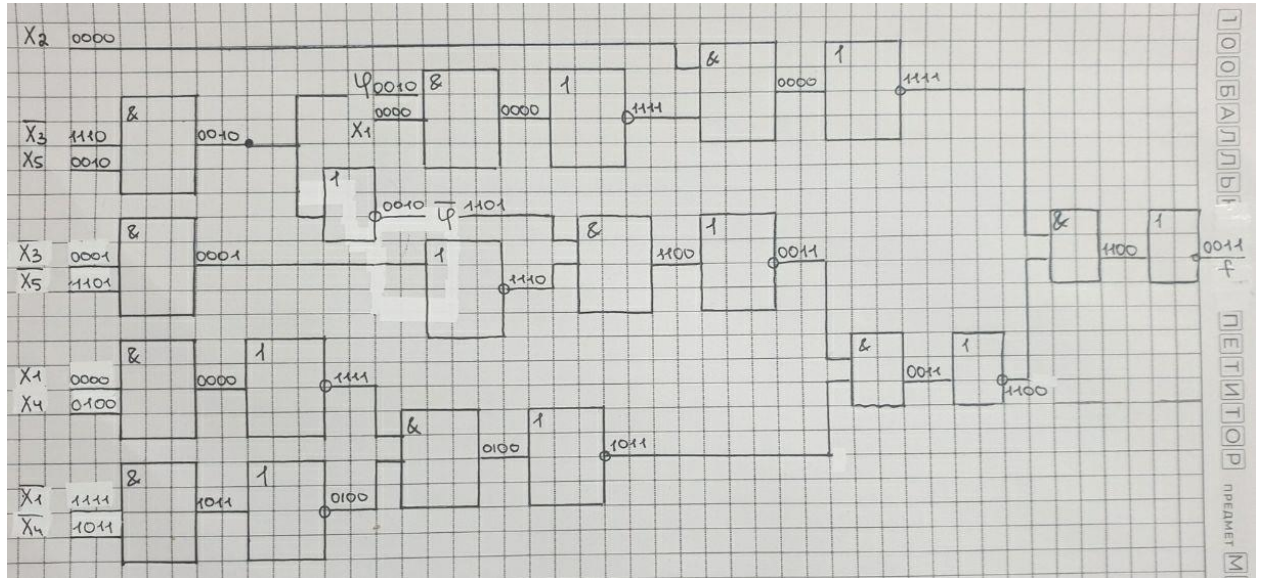
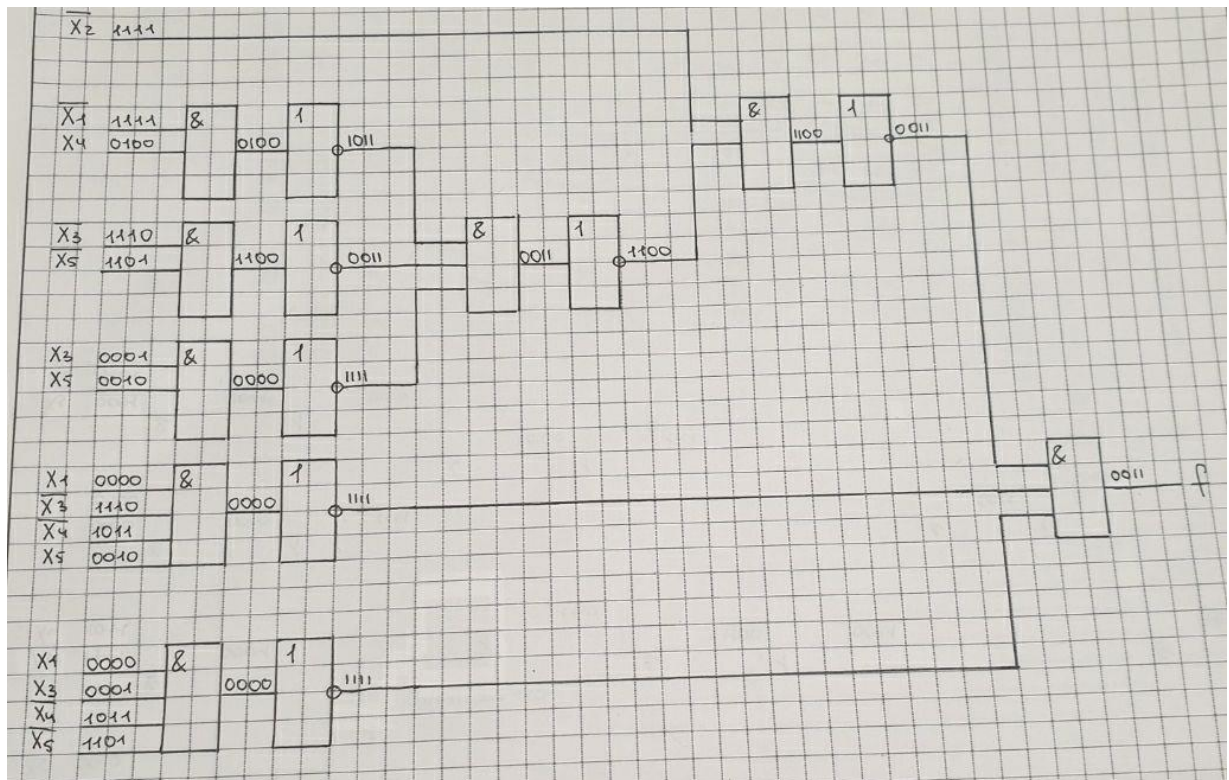


Схема по упрощенной МКНФ в базисе (И, НЕ):

$$f = \overline{x_2} \overline{x_1 x_4} \overline{x_3} \overline{x_5} \overline{x_3 x_5} \overline{x_1 x_3} \overline{x_4 x_5} \overline{x_1 x_3 x_4} \overline{x_5}$$

$$S_Q = 29, \tau = 7$$



## Универсальный базис (И, НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ с ограничением на число входов (2):

$$f = \overline{x_2 x_1 x_3 x_5} \overline{x_1 x_4} \overline{x_1 x_4} \overline{x_3 x_5} \overline{x_3 x_5}$$

$$S_Q = 24, \tau = 5$$

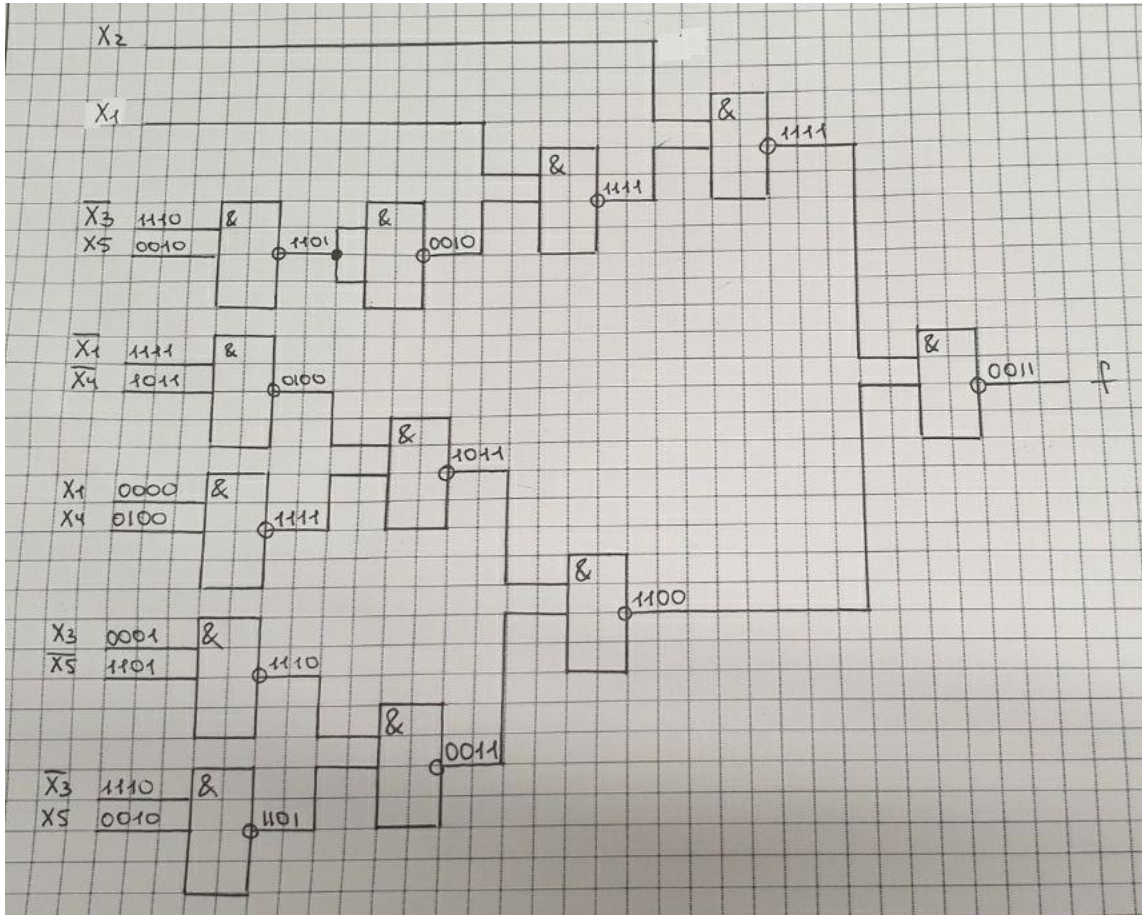
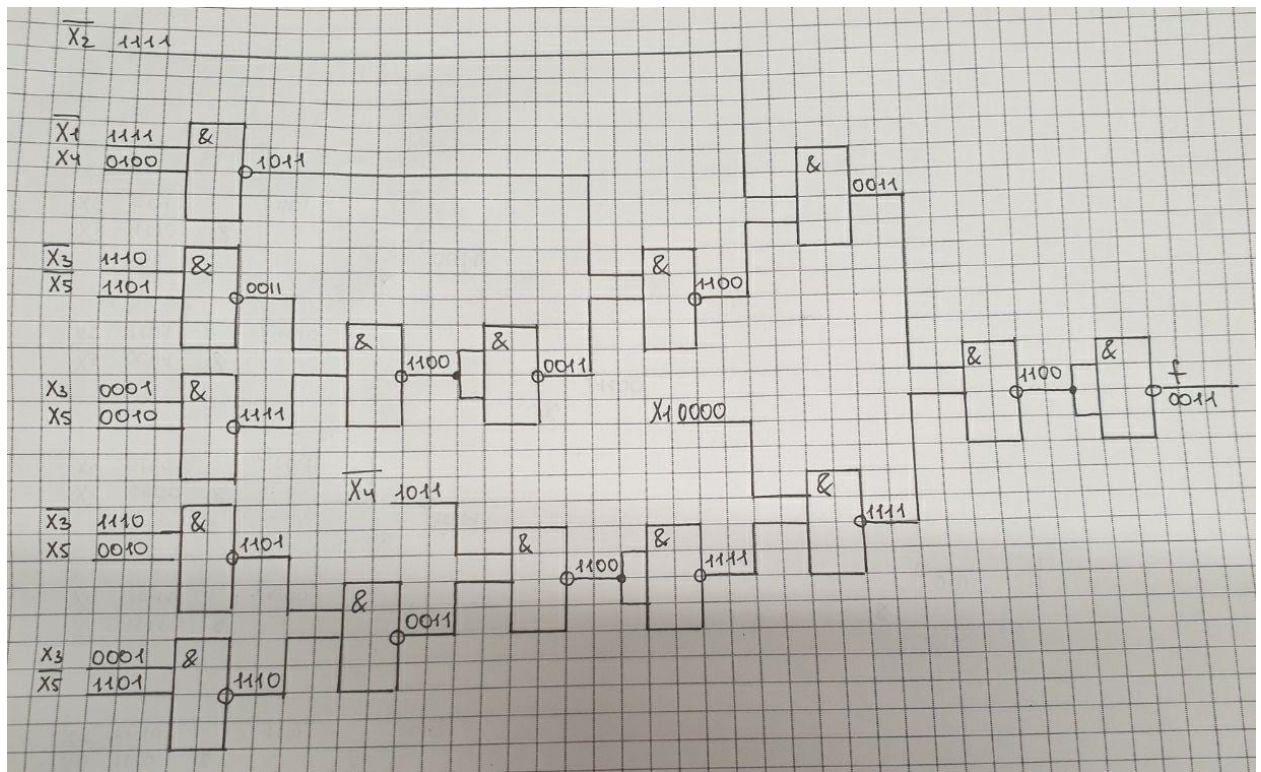


Схема по упрощенной МКНФ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{x_2} \overline{x_1 x_4} \overline{x_3} \overline{x_5} \overline{x_3 x_5} \overline{x_1 x_4} \overline{x_3 x_5} \overline{x_3 x_5}$$

$$S_Q = 30, \tau = 7$$





## **Вывод**

При использовании ограничения на вход задержка комбинационных схем ниже. Для МДНФ цена схемы уменьшилась, для МКНФ увеличилась.