Università degli Studi di Torino

Dipartimento di Informatica

Appunti di probabilità e statistica

Autore
Francesco Martino
Riccardo Marengo

Anno Accademico 2025–2026

Chapter 1

Teoria

1.1 Elementi di Probabilità e Statistica: Lezione 1 del 16-09-2025

1.1.1 Introduzione alla probabilità

La probabilità riguarda qualsiasi fenomeno non facilmente prevedibile (lancio di dadi o monete, tempi di attesa, eccetera). Il termine che descrive la proprietà di queste situazioni è aleatorietà. Il fatto che questi fenomeni non siano facilmente prevedibili non vuol dire che siano effettivamente casuali, ma solo che non abbiamo tutte le informazioni necessarie per poterle prevedere accuratamente.

DEF: Un insieme è una collezione di oggetti denominati elementi dell'insieme. Un insieme è denominato da una lettera latina maiuscola e i suoi elementi sono elencati esplicitamente tra parentesi graffe o determinati con una proprietà.

Esempio:

$$S = \{x_1, x_2, x_3\} = \{x_2, x_1, x_3\} = \{x_1, x_1, x_1, x_2, x_3\}$$

$$S = \{x \mid P(x) è soddisfatta$$

$[\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3\} = \{0, 1, 2, 3\}4]$ (anche se i numeri naturali sono a volte definiti a partire da 1)

Altre definizioni:

- La cardinalità dell'insieme S è il numero $|S|$, finito o infinito, di elementi di S.
- Un insieme S è numerabile $\Leftrightarrow$ esiste una funzione iniettiva $f : S \to \mathbb{N}$.

Esistono le operazioni di unione, intersezione, ecc. e le relazioni di inclusione, inclusione stretta, ecc.

L'insieme che non contiene alcun elemento è detto *insieme vuoto* e si scrive $\varnothing$.

DEF: Lo spazio campionario, di solito indicato come Ω, è l'insieme che contiene tutti i possibili esiti di un esperimento probabilistico.

Esempio: Se l'esperimento consiste nel lancio di un dado, lo spazio campionario è:

$$\Omega = \{\text{faccia } 1, \text{faccia } 2, \ldots, \text{faccia } 6\}$$

1.2 Elementi di Probabilità e Statistica: Lezione 2 del 18-09-2025

1.2.1 Modello probabilistico

Un modello probabilistico è un oggetto matematico composto da:

- uno spazio campionario Ω, cioè l'insieme che contiene tutti i possibili esiti di un esperimento,
- una funzione che assegna a ogni elemento dell'insieme delle parti di Ω un numero reale.

Esempio: determinare la probabilità che il lancio di un dado risulti in un numero pari.

$$P(\{2,4,6\}) = ?$$

La funzione P deve avere alcune proprietà fondamentali:

- per ogni sottoinsieme $S \subseteq \Omega$, vale $0 \leq P(S) \leq 1$;
- $P(\Omega) = 1$;
- se A e B sono sottoinsiemi disgiunti di Ω, allora

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Lezioni di EPS del 23-24/09/2025

Proprietà di $\mathbb{P}$ derivate dagli assiomi

Siano A, B, C eventi .

1. $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
2. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
3. $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ (sub-additività)

Probabilità condizionata

Vorremmo calcolare delle probabilità che tengono conto di "informazioni parziali" sull'esito dell'esperimento .

ESEMPIO Lancio di 2 dadi equi a 6 facce . Questo esperimento equivale a lanciare due dadi in sequenza solo se assegnamo un ordinamento ai due dadi lanciati (quindi per esempio consideriamo $(2,5)$ diverso da $(5,2)$) .

$$\Omega = \{w | w \in \{1, \ldots, 6\}^2\} \Rightarrow |\Omega| = 6^2 = 36$$

Gli esiti dell'esperimento sono vettori di dimensione 2, per cui possono essere rappresentati graficamente come punti su un piano . La funzione probabilità $\mathbb{P}$ è uniforme discreta . Vediamo le probabilità di due eventi e la loro intersezione :

- $A =$ "la somma dei dadi è 9" $= \{w \in \Omega | w_1 + w_2 = 9\} = \{(4,5),(5,4),(3,6),(6,3)\}$ $\Rightarrow \mathbb{P}(A) = 4/36 = 1/9$
- $B =$ "il primo dado vale 6" $= \{w \in \Omega | w = (6,j)$ con $j \in (1, \ldots, 6)\} \Rightarrow |B| = 6 \Rightarrow \mathbb{P}(B) = 6/36 = 1/6$
- $A \cap B = \{(6,3)\} \Rightarrow |A \cap B| = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = 1/36$

Come possiamo calcolare la probabilità che si verifichi A presupponendo che B si sia già verificato? Dobbiamo introdurre un nuovo concetto :

DEFINIZIONE (probabilità condizionata) Dato $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ spazio di probabilità e B evento t.c $\mathbb{P}(B) \neq 0$; Definiamo probabilità condizionata rispetto a B, indicata con $\mathbb{P}(\cdot|B) : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Nell'esempio di prima,

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{(1/36)}{(1/6)} = 6/36 = 1/6$$

Se $C =$ "il primo dado ha dato 1", quanto vale $\mathbb{P}(A|C)$? Sappiamo che $\mathbb{P}(A|C) = \mathbb{P}(A \cap C)/\mathbb{P}(C)$. Ma $A \cap C = \emptyset$ perché non esistono coppie della forma $(1,j)$ nell'insieme A . Allora $\mathbb{P}(A \cap C) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(A|C) = 0/\mathbb{P}(C) = 0$.

Notiamo che le funzioni $\mathbb{P}(\cdot|B)$ e $\mathbb{P}(\cdot|C)$ non sono più uniformi . Dimostriamo però che le funzioni di probabilità condizionata conservano le proprietà delle funzioni di probabilità .

DIMOSTRAZIONE Dato $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, dobbiamo dimostrare che $\forall B \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(\cdot|B)$ soddisfa:

1. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A|B) \geq 0$
2. $\mathbb{P}(\Omega|B) = 1$
3. A_1, A_2 eventi disgiunti $\Rightarrow \mathbb{P}(A_1 \cup A_2|B) = \mathbb{P}(A_1|B) + \mathbb{P}(A_2|B)$

Prova:

1. Per definizione di $\mathbb{P}$ sappiamo che $\mathbb{P}(B), \mathbb{P}(A \cap B) \geq 0$ allora anche $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \geq 0$.

2. Per definizione di $\mathbb{P}$ sappiamo che $\mathbb{P}(\Omega) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(\Omega|B) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$
   $\mathbb{P}$ $(\Omega|\mathrm{B}) = \frac{\mathbb{P}(\Omega\cap|B}{}$

3. $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2|B) = \frac{\mathbb{P}((A_1 \cup A_2) \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

   $$= \frac{\mathbb{P}((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{\mathbb{P}(B)}$$

   Poiché A_1 e A_2 sono disgiunti, anche $(A_1 \cap B)$ e $(A_2 \cap B)$ lo sono.

   $$= \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

   $$= \mathbb{P}(A_1|B) + \mathbb{P}(A_2|B)$$

(1), (2) e (3) sono verificate $\Rightarrow \mathbb{P}(\cdot|B)$ è una funzione probabilistica $\square$.

Chapter 2

Esercizi ed esempi

Esercizio 1 - biglie

Una scatola contiene 3 biglie: una rossa (R), una verde (V), una blu (B) . Considero il seguente esperimento: Estraggo una biglia, la reimbussolo e ne estraggo una seconda . Scrivere un possibile modello probabilistico e calcolare la probabilità che le due biglie estratte siano uguali .

- $\Omega = \{w = (w_1, w_2) \text{ con } w_i \in \{R, V, B\}, i \in \{1, 2\}\}$
- $|\Omega| = 3^2 = 9$
- $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ (probabilità uniforme discreta)

Se $A = \{(R, R), (V, V), (B, B)\}$ ("le biglie estratte sono uguali") $\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = 3/9 = 1/3$.

Esercizio 2 - dadi

Un dado a 4 facce equo viene lanciato ripetutamente fino all'uscita di un numero pari . Scrivere lo spazio campionario per questo esperimento . Quanti sono gli esiti possibili? Posso usare la legge uniforme discreta?

Gli esiti possibili sono tutti gli esiti che contengono zero o più numeri dispari seguiti da esattamente un numero pari ($(2), (1, 1, 2), (1, 3, 1, 4)$, ecc.) .

$$\Omega = \{w = (w_1, \dots, w_n) \text{ con } n \in \{1, 2, \dots\} | w_i \text{ è pari } \Leftrightarrow i = n\}$$

La cardinalità di Ω è ∞ quindi non possiamo usare la legge uniforme discreta .

Esercizio 3 - amici

Un gruppo di amici (5 ragazzi e 10 ragazze) viene messo in fila in ordine causale .

- $\Omega = \{w = (w_1, \dots, w_{15}) | w_i \text{ è una persona nel gruppo e } i \neq j \Rightarrow w_i \neq w_j\}$
- $|\Omega| = 15!$
- Possiamo usare la legge uniforme discreta .

1. Calcolare la probabilità che la persona in quarta posizione sia un ragazzo .
   $A =$ "w4 è un ragazzo" $\Rightarrow |A| = 5 \cdot 14!$
   $$\mathbb{P}(A) = \frac{5 \cdot 14!}{15!} = \frac{5 \cdot 14!}{15 \cdot 14!} = 5/15 = 1/3$$
2. Calcolare la probabilità che la persona in dodicesima posizione sia un ragazzo .
   $B =$ "w12 è un ragazzo" $\Rightarrow |B| = |A|$
   $$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) = 1/3$$
3. Calcolare la probabilità che Luigi sia in terza posizione .
   $C =$ "w3 = Luigi" $\Rightarrow |C| = 14!$
   $$\mathbb{P}(C) = \frac{14!}{15!} = 1/15$$

Esercizio 4 - giuria

Una giuria composta da 5 persone viene selezionata da 6 uomini e 9 donne . Con quale probabilità la giuria sarà composta da 3 uomini e due donne .

- $\Omega = \{\text{sottoinsiemi } S \text{ delle 15 persone } | |S| = 5\}$
- $|\Omega| = \frac{15!}{5! \cdot 10!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{5!} = 3003$

Per sapere se $\mathbb{P}$ è uniforme discreta, bisogna pensare se gli elementi di Ω sono finiti e hanno tutti la stessa probabilità di verificarsi.

$A =$ "estraiamo due donne e tre uomini"

$$|A| = \binom{6}{3} \cdot \binom{9}{2} = \frac{6!}{3!3!} \cdot \frac{9!}{2!7!}$$

$$|A| = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 2}$$

$$\mathbb{P}(A) = 720/3003 \approx 0.2398$$