基于阿基米德螺线的板凳龙运动模型

摘要

本文基于阿基米德螺线的性质，通过逻辑推导、几何分析和中心差分法等方法，建立了板凳龙的运动模型，并通过 Rung-Kuta 法和遍历搜索法，计算了龙头的坐标和最佳的螺距。

对于问题一, 我们主要研究了板凳龙沿螺距 55cm 等距螺线顺时针盘入的运动。以螺线中心为原点建坐标系，用极坐标方程表示螺线，得到**阿基米德螺线**的参数方程。对于龙头的位置，我们采用了两种方法确定，分别是 MATLAB 的 fzero(或 fsolve) 函数和**四阶 Rung-Kuta 法 ode45 函数**求其数值解，考虑到龙身与龙头长度差异致把手间距不同，根据角度关系和队伍进线位置确定龙身和龙尾位置。龙头速度恒为 1m/s，龙身和龙尾速度采用**中心差分法**计算。建模求解得到不同时刻下龙头、龙身及龙尾位置和速度，结果显示从龙头到龙尾速度渐降且具有传递性。

对于问题二, 本文建立了碰撞检测模型。首先，通过对运动过程分析和逻辑推导，我们得出后面龙身会重复前面龙身的位置状态和只能龙头和龙身之间发生碰撞的结论。其次，以龙头和龙身的中心的作为其位置坐标，建立了是否发生碰撞的模型。最后，我们从 A 点进入开始计算，到发生碰撞时终止结束，最后终止时的时间 $t = 412.5s$.

对于问题三, 本问建立了确定螺距最优解的计算模型。问题 3 是调头区域直径为 $9m$ 的圆的基础上确定最小的螺距，使得龙头前把手能够沿着相应的螺线盘入到调头空间的边界。首先，我们确定了螺距的约束条件 $d > 2w$。其次，确定螺线与调头的圆区域相切是螺线的极径的长度，根据阿基米德螺线的极径随转过圈数均匀增加的性质，得到了 A 点极径 r_A、切点极径 r_0、转过圈数 n 和螺距 d 的关系式。最后，使用**遍历搜索法**，求得在不同 n 下的 d 值。最后，我们从中找出满足约束条件的最小值 $d = 0.637481m$。

对于问题四, 本问通过**几何分析**建立了在不同的曲线上运动的求解模型。首先，我们通过对掉头区域的两个圆弧进行几何分析，得出大小圆的半径为定值，所以无法通过调整圆弧来使调头区域变短，从而判断出本问不是优化问题。随后，我们建立了在新的螺距 d 盘入盘出螺线和大小圆弧的参数方程，并且在各个曲线的过渡部分建立了运动求解模型，然后，我们计算通过各个龙身距离龙头的位置和龙头的位置计算出龙身处在那一段圆弧，运用中心差分法来计算我们得到了本问要求的最终结果。

对于问题五, 我们通过对舞龙队龙头和各把手在螺线中运动时的速度关系进行分析，得出任意一节板凳在做盘入、盘出时和在 S 形调头顺时针盘出时的速度公式。找出龙头的最大速度的前提条件是所有板凳的速度不超过 2m/s，并将龙尾速度作为关键约束条件，最终通过计算对比得出同时满足约束条件的最大龙头速度为 $2m/s$。

关键字：阿基米德螺线　四阶 Rung-Kuta 法　中心差分法　遍历搜索法　几何分析

一、 问题重述

1.1 问题背景

板凳龙是浙闽地区的传统民俗文化活动，人们将多条板凳首尾相连形成蜿蜒曲折的龙形，通过舞龙队的表演，展现出精彩壮观的场面。以浦江板凳龙为例，郑氏家族[1]的板凳龙依托家族发展，具有强大的家族性。其出龙特征包括祭祀性、拜年性和守护家园性。在仪式方面，如前陈村的板凳龙[2]，从龙头下架、请龙祭祀到出龙、舞龙、散灯、龙上天等，都有特定的程序和文化内涵。板凳龙活动不仅是节日的欢庆，更是当地文化的传承，体现了人们对祖先的敬重、兄弟的情谊和家园的守护之情。在实际的演出过程中，为保证整场表演的顺利进行，舞龙队的每一位成员之间的协调配合至关重要，例如，在盘入和盘出的过程时，如何确保板凳之间不发生碰撞。运用数学建模的方法，可以对板凳龙的运动进行分析和优化，使表演的质量和效果得到保障和提高，还能为传统文化的传承和创新提供科学依据，这对传统文化的发展具有深远意义。

1.2 问题要求

问题 1 根据题目给的信息，舞龙队沿螺距为 55cm 的等距螺线顺时针盘入，各把手中心均位于螺线上，龙头前把手的行进速度始终保持 1m/s，初始时，龙头位于螺线第 16 圈 A 点处。需要给出从初始时刻一直到 300s 为止，龙头、龙身和龙尾各前把手以及龙尾后把手中心的位置和速度，把结果保存到文件 result1.xlsx 中，结果保留 6 位小数，并将 0s、60s、120s、180s、240s、300s 时，龙头前把手、龙头后面第 1、51、101、151、201 节龙身前把手和龙尾后把手的位置和速度在论文中呈现出来。

问题 2 在问题一的基础上，使板凳之间不发生碰撞的情况下确定出舞龙队盘入的最终时刻，给出此时舞龙队的位置和速度，将结果存放到文件 result2.xlsx 中，并且在论文中给出此时龙头前把手、龙头后面第 1、51、101、151、201 条龙身前把手和龙尾后把手的位置和速度。

问题 3 在本问题中，舞龙队从盘入到盘出将由将由顺时针盘入调头切换为逆时针盘出，题目假设调头空间是以螺线中心为圆心、直径为 9 m 的圆形区域。需要确定最小螺距，能使龙头前把手能够沿着相应的螺线盘入到调头空间的边界。

问题 4 盘入螺线的螺距为 1.7m，盘出螺线与盘入螺线关于螺线中心呈中心对称，舞龙队需要在问题三设计出的调头空间内完成调头，调头路径是由两段圆弧相切连接而成的 S 形曲线，前一段圆弧的半径是后一段的 2 倍，前一段圆弧与盘入螺线相切，后一段圆弧与盘出弧线相切。在此条件下，判断能否在保持各部分相切的情况下调整圆弧，使得调头曲线变短。随后需要在龙头前把手的行进速度保持原来的基础上，给出从 - 100s

开始到 100s 为止，每秒舞龙队的位置和速度，将结果存放到文件 result4.xlsx 中。同时在论文中给出 - 100s、- 50s、0s、50s、100s 时，龙头前把手、龙头后面第 1、51、101、151、201 节龙身前把手和龙尾后把手的位置和速度。

问题 5 舞龙队基于问题四的原有路径行进，龙头行进速度保持不变，需要确定出能使舞龙队各把手的速度均不超过 2m/s 的情况下，龙头的最大行进速度。

二、 问题分析

2.1 问题一分析

对于问题一，我们需要对龙头、龙身、龙尾的运动轨迹以及速度进行分析，来实现对板凳龙运动的精确描述。首先，我们先确立出阿基米德螺线的参数方程，我们以螺线中心为原点建立平面直角坐标系，以方便确定出板凳龙各个部分在空间中的位置，我们将假设龙头沿螺距为 55cm 的等距螺线顺时针盘入，通过极径方程系数与极角的关系，结合龙头前把手 1m/s 的行进速度与时间的关系，来计算出龙头在每一时刻的极角，进而确定出龙头在坐标系中的位置。然后我们要对龙头位置、龙身位置和龙尾位置进行分析确定，为提高准确性，我们采用了 MATLAB 的 fzero(或 fsolve) 函数和四阶 Rung-Kuta 法 ode45 函数两种方法对龙头位置的数值进行求解，由于龙头和龙身的长度不同，导致相邻把手之间的距离不同。已知队伍先从 B 点进入螺旋线，所有把手都处于螺线上且任意两把手之间的距离保持不变。根据相邻两把手之间的距离关系，由龙头位置依次确定各龙身及龙尾的位置数值。之后是对龙头速度、龙身速度、龙尾速度的分析，根据题目的信息我们可以得知，龙头速度大小恒定为 1m/s。对于龙身速度和龙尾速度，根据速度定义可得到精确计算公式，但由于龙身以及龙尾坐标是通过迭代计算而得，没有理论上的推导公式，故采用差分计算其速度，将速度分解为 x 方向和 Y 方向的速度，进而求得龙身速度以及龙尾速度。最后是螺线特性的分析，螺距的大小决定了板凳龙盘绕的紧密程度，螺距越小，板凳龙盘绕得越紧密。通过分析螺距与极角增量之间的关系，以及螺线的形状方程，可以深入理解板凳龙在螺线上的运动规律。综上所述，问题一的关键在于建立准确的数学模型，描述龙头、龙身和龙尾的运动轨迹，以及计算各部分的速度，从而实现对板凳龙运动的精确分析。

2.2 问题二分析

对于问题二，我们针对板凳龙运动中队伍内部碰撞的问题，进行了如下分析。首先，是对碰撞可能性的分析，在运动过程中，尽管螺距固定为 $d = 0.55\text{m}$，但随着队伍整体逐渐向中间方向靠拢，龙身与龙身之间的距离就会逐渐减小。如果不及时终止运动，队伍内部很可能会发生碰撞。紧接着，我们又对碰撞位置进行了推断，第一步我们假设龙身与龙身之间会发生碰撞，那么按照每个龙身在运动过程中都会走过相同路段的逻辑，如

果处在某点的龙身与龙身发生碰撞，那前面的龙身应该提前在该点发生碰撞，这样本次碰撞就不应该发生。按照这样的推断，那我们可以得知龙身和龙身之间不会发生碰撞，但是龙头却发生了碰撞。这是因为龙头速度最大，并且位于板凳龙的最前面，与此同时，龙头的宽度又是最大的，这也大大地增加了龙头碰撞的机会。所以，最终我们得知，龙头会与第一节龙身发生碰撞，从而终止了运动。然后，我们对本问模型建立的依据进行核心分析，记前三把手的坐标，在笛卡尔坐标系中为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，(x_3, y_3)，在极坐标系中为 (r_1, θ_1)，(r_2, θ_2)，(r_3, θ_3)，它们都满足相关公式。在这里，我们将第一二把手的中点作为龙头的位置，记为 $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$，并简记为 (X_1, Y_1)。在这里，我们将第一二把手的中点作为龙头的位置，记为 $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$，并简记为 (X_1, Y_1)。同理，第一节龙身的坐标记为 (X_2, Y_2)。再基于第一问的设定，最终我们得到问题二的最终模型。

2.3 问题三分析

对于问题三，我们主要研究了板凳龙在盘入到盘出的过渡阶段时的运动情况。我们首先分析了掉头区域和运动路线：板凳龙需要在中心为圆心、直径为 9m 的圆形区域掉头，并沿着相应螺线盘出。由于龙身运动的滞后性和传递性，龙头掉头后，后续龙身仍在盘入，且盘出时的运动路线在盘入运动路线相邻两条螺线之间。为满足板凳宽度限制，要求 $d \geq 2w$，同时保持盘入和盘出螺距相同。随后，对螺距与圈数的关系进行研究，我们根据阿基米德螺线参数方程以及给定的条件，从 A 点 (8.8, 0) 盘入到 D 点（半径为 4.65m），可得到关系式 $4.65 = 8.8 - d \cdot n$ (n 为所转的圈数)。由于所转圈数可能为整数或非整数，遂采用遍历搜索法，分别设定不同步长来寻找最优解。

2.4 问题四分析

对于问题四，我们进行了如下的综合分析：首先，根据给定的螺距 $d = 1.7m$，可得出极径的参数方程系数 $b = \frac{d}{2\pi} = 0.2705$，由于盘出螺线与盘入螺线关于中心对称，进而可得到盘出螺线的参数方程。然后对调头区域进行几何分析，通过相关线段长度的关系推导得出大小圆的半径为定值，这意味着本题不需要调整圆弧，不存在优化问题。最后，整个运动过程分为四段不同的圆弧，包括盘入过程中的螺线、调头过程中的大圆和小圆的部分圆弧以及盘出过程中的螺线。通过相关公式可计算龙头在不同圆弧运动的时间和位置，同时根据龙身到龙头的距离以及龙头的位置能够判断龙身处在哪一段圆弧中，并代入不同的方程计算其位置和速度。

2.5 问题五分析

对于问题五，在舞龙队龙头和各把手在螺线中运动时，其速度分为线速度和角速度，需要确定龙头速度和各把手速度的关系。任意一节板凳的速度 v_i 用 $v_i = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$ 表示，其中 v_r 与螺距 d 有关，v_θ 与角速度 ω 和极径长度 r 有关，进而得出第 i 节板凳的速度公式。之后针对舞龙队做 S 形调头顺时针盘出时的情况，分析得出第 i 节板凳在圆弧上的速度为 $v_i = \omega_i \cdot R_i$。题目要求所有板凳的速度 v_i 不超过 2m/s，即 $v_i \leq 2m/s$，并且考虑到龙尾速度可能较大，将龙尾速度作为关键约束条件来确定龙头的最大行进速度，并且要保证舞龙队在调头过程中所有板凳的速度也不能超过 2m/s。最后，为确定龙头的最大速度，需使用相关公式计算每一节板凳的半径 r_i，并根据速度公式找出满足所有板凳速度不超过 2m/s 的最大龙头速度 v_{head}，在 S 形调头的两段圆弧上，按照相同的条件计算每个板凳此时的速度，对比舞龙队在盘入、盘出时与 S 形调头顺时针盘出的过程时的最大龙头速度的结果，找出同时满足约束条件的最大龙头速度。

三、 模型假设

为简化问题，本文做出以下假设：

- 假设 1 每个板凳的质量分布均匀，且所有板凳的连接部件都是刚性的，不会发生变形。
- 假设 2 舞龙队的队员能够完美地控制板凳的运动，使其按照预定的轨迹行进，不会出现失误或偏差。
- 假设 3 螺线的形状是规则的，符合给定的螺距和半径等参数。
- 假设 4 假设地面是平坦的，没有起伏和障碍物，不考虑地面摩擦力的影响。
- 假设 5 在盘入和盘出过程中，板凳龙的整体形状保持相对稳定，不会发生剧烈的变形。
- 假设 6 在未开始时运动前，整个龙身均处于螺线上。

四、 符号说明

表 1　符号说明

符号	说明	单位
p	相邻把手间的距离	m
d	螺距	m
d_i	第 i 个龙身到龙头的距离	m
v_{head}	龙头的速度	m/s
v_i	第 i 个龙身速度	m/s
L_{oA}	螺线总长	m
L	某点与原点之间螺线长	m
l	龙头到原点间螺线长	m
Δl	龙头的路程	m
r	极径长度	m
a	极径方程系数	$-$
b	极径方程系数	$-$
θ	与 x 轴夹角	rad
h_i	相邻龙身间的距离	m
w	板凳宽度	m
n	所转的圈数	$-$
R_0	调头区域半径	m
R_1	掉头的第一段圆弧半径	m
R_2	掉头的第二段圆弧半径	m
E	大圆的切点	$-$
F	小圆的切点	$-$
O_1	大圆圆心	$-$
O_2	小圆圆心	$-$
α	等腰三角形底角	rad
β	等腰三角形的外角	rad
C_0	两段圆弧长	m
C_1	大圆的部分弧长	m
C_2	小圆的部分弧长	m

五、 问题一的模型的建立和求解

5.1 模型建立

螺线方程的确定

首先，我们以螺线中心为原点，建立出平面直角坐标系。这样可以方便地确定出板凳龙各个部分在空间中的位置。对于龙头的运动，我们考虑其沿螺距为 55cm 的等距螺线顺时针盘入。通过使用极坐标方程来表示螺线，如

$$r = a + b\theta.$$

其中, 表示 r 极径，θ 表示极角，a 和 b 是常数，结合龙头前把手始终保持 $1m/s$ 的行进速度，我们可以根据时间计算出龙头在每一时刻的极角，进而精确得到龙头在坐标系中的位置。

当 $\theta = 0$ 时，$r = 0$，由此可得 $a = 0$。

螺线的形状我们是由

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = b, \tag{1}$$

确定出的, 表示常数 b 是极径 r 随极角 θ 的变化率。

螺距 $d = 0.55m$ 表示相邻两圈螺线之间的距离,

$$r(\theta + 2\pi) - r(\theta) = 2\pi b = d, \tag{2}$$

表示在极角增加 2π 的情况下，极径的增量为 $2\pi b$ 与螺距 d 相等，这与螺距的定义相符,反映了螺线的特性。同时，$2\pi b = d$ 这一关系也体现了螺距与极角增量之间的联系。螺距的大小决定了板凳龙盘绕的紧密程度，螺距越小，板凳龙盘绕的越紧密。

最终我们可以得到阿基米德螺线的参数方程和极坐标方程为

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta)\cos\theta, \\ y(\theta) = r(\theta)\sin\theta, \\ r(\theta) = a + b\theta. \end{cases} \tag{3}$$

龙头位置的确定

1. 方法一：螺线从原点到任一点是一段平滑的曲线，根据曲线弧长的长度公式，这段弧长长度为[3]

$$L = \int_0^\theta \sqrt{(r^2 + (\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta})^2)}\mathrm{d}\theta = \frac{\ln\theta + \sqrt{\theta^2+1}}{2}b + \frac{\theta\sqrt{\theta^2+1}}{2}b. \tag{4}$$

当(4)式中 $\theta = 32\pi$ 时, 其所求的结果为到 A 点的长度, 在此记作 L_{oA}, 且 $L_{oA} = 442.4122$。

由于龙头速度大小恒定 $v_{head} = 1m/s$，所以龙头从开始到某一时刻 t 的路程可以确定出

$$\Delta l = v_{head} t, \tag{5}$$

在螺旋线线上，龙头到原点的距离为 $l = L_{oA} - \Delta l$, 同时龙头处于螺线上一点 $L = l$, 即

$$b \ln(\theta + \sqrt{\theta^2 + 1}) + b\theta\sqrt{\theta^2 + 1} - 2l = 0. \tag{6}$$

该式难以求得关于 θ 的解析解，在此情况下，我们用 MATLAB 的 fzero 或 fsolve 函数求出其数值解。再代入公式 (3) 即可求出龙头位置。

2. 方法二：从 A 点开始，队伍开始进入螺线范围内。龙头的速度恒定，

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = -1m/s. \tag{7}$$

如果根据弧长的积分公式，得

$$\mathrm{d}L = \sqrt{r^2 + (\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta})^2}\mathrm{d}\theta. \tag{8}$$

联立公式 (7)、 (8), 可求得 θ 和 t 的关系式为

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{-1}{b\sqrt{1+\theta^2}} \quad ,\theta(0) = 16 \times 2\pi. \tag{9}$$

该微分方程求出数值解难度较大，这里采用 MATLAB 中的关于四阶 Rung-kuta 法 ode45 函数求得其数值解。

Rung-kuta 法的基本形式为

$$\begin{cases} \theta' = f(t, \theta). \\ \theta_{i+1} = \theta_i + \dfrac{H}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \\ k_1 = f(t_i\,, \theta_i). \\ k_2 = f(t_i + \dfrac{H}{2}\,, \theta_i + \dfrac{H}{2}k_1). \\ k_3 = f(t_i + \dfrac{H}{2}\,, \theta_i + \dfrac{H}{2}k_2). \\ k_4 = f(t_i + H\,, \theta_i + Hk_3). \end{cases} \tag{10}$$

经过我们对两种方法的不断推演和计算，并反复验证数据的准确性，最终所得出的结果基本一致。

龙身、龙尾位置确定

由于龙头和龙身的长度不同，所以会导致相邻把手之间的距离不同，

$$d=\begin{cases}2.86m, & \text{龙头两把手之间,}\\ 1.65m, & \text{其他.}\end{cases} \tag{11}$$

队伍是从 A 点进入螺旋线的, 所有把手都处于螺线上，且任意两把手之间的距离保持不变。B、C 为相邻两把手，且 B 点更靠前（$\theta_B<\theta_C$）(本论文所有弧度均大于零), 已知 B 点坐标 (x,y), 设点 C 坐标为 (x',y')，两点之间角度满足关系：

$$d^2=(b\theta_B\cos\theta_B-b\theta_C\cos\theta_C)^2+(b\theta_B\sin\theta_B-b\theta_C\sin\theta_C)^2. \tag{12}$$

则 C 点在极坐标系下的坐标为 $(\theta_C,r(\theta_C))$, 无法直接求得，这里需要用到 MATLAB 中的 fsolve 函数，然而在所求的结果中含有多个解，如下图所示：

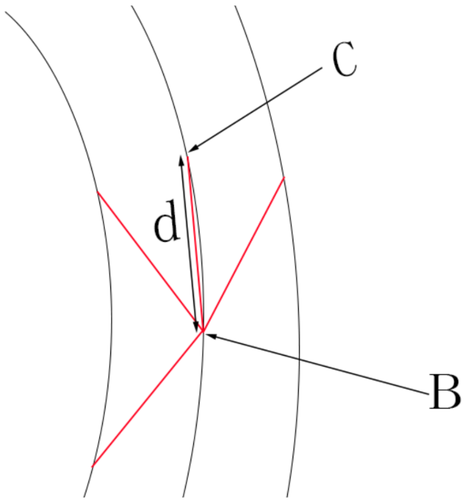


图 1　多值示意图

其中我们只取满足条件

$$\theta_C-\theta_B<2\pi. \tag{13}$$

的数值作为最终解。再利用公式 (3) 即可求出 C 点坐标。

所以在本题中龙头的位置容易确定，可根据龙头坐标求得第 1 个龙身坐标，再依据第一个龙身坐标求得第二龙身坐标，再根据第二龙身坐标求得第三龙身坐标⋯⋯根据前一个坐标求得后一个坐标，直到求得龙尾坐标为止。

龙头速度确定

根据题目的信息我们可以得出，龙头的速度大小恒定 $v_{head}=1m/s$.

龙身、龙尾速度确定

根据速度的定义我们可以简单求出速度精确计算公式：

$$v_i(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{x_i^2 + y_i^2}. \tag{14}$$

但由于 x_i 和 y_i 是根据迭代计算而得，这里我们使用中心差分计算速度，对速度进行分解，分为 X 方向和 Y 方向的速度，X 方向速度：

$$v_x \approx \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \tag{15}$$

同理 Y 方向的速度：

$$v_y \approx \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \tag{16}$$

其中 $\Delta t = 1s$. 最后，可求得速度为 $v_i = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

5.2 模型求解

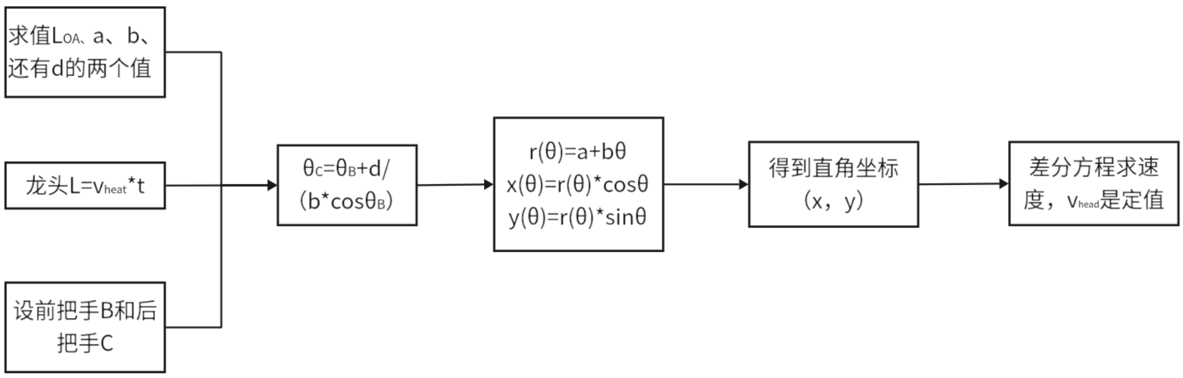


图 2　问题一求解流程图

Step1： 首先确定该时间 t（初始值为 0s）下的龙头位置。

Step2： 然后再依次确定龙头之后所有龙身以及龙尾的位置。

Step3： 时间加 +1，重复 Step1、Step2，知道时间达到题目要求。

Step4： 最后依据公式 (15)、 (16) 求得题目所要求的时间下的速度。

5.3 求解结果

0 s、60 s、120 s、180 s、240 s、300 s 时，龙头前把手前把手、龙头后龙头后面第 1、51、101、151、201 节龙身前把手前把手和龙尾后把手后把手的位置如下表：

表 2　若干点的在不同时间的位置

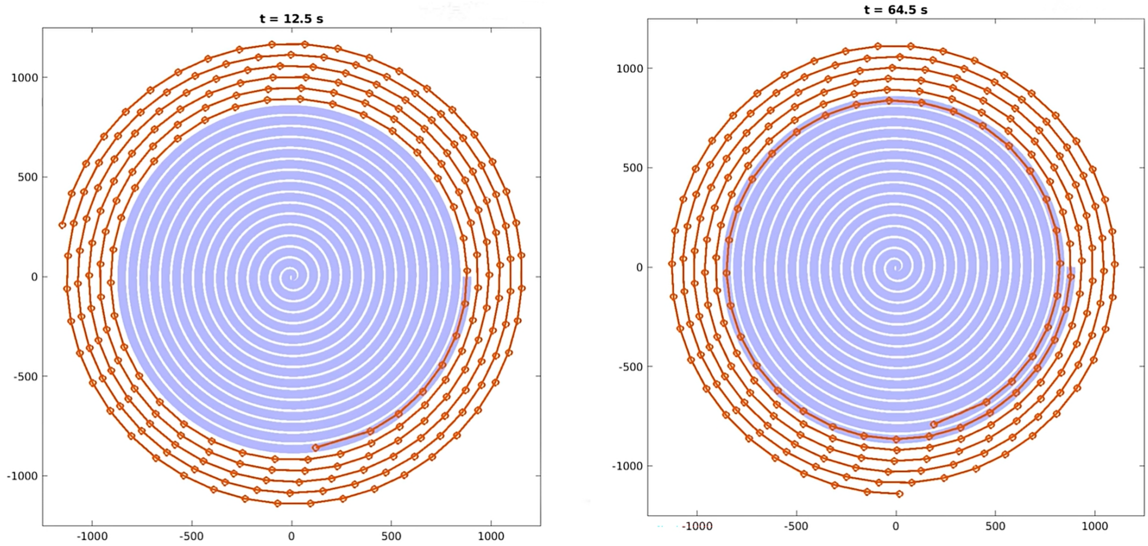
	$0s$	$60s$	$120s$	$180s$	$240s$	$300s$
龙头 $x(m)$	8.80000	5.02371	−4.91304	−1.96002	1.56265	4.80564
龙头 $y(m)$	0.00000	−6.43945	−5.66273	6.47023	−5.72407	1.27034
第 1 节龙身 $x(m)$	2.60807	−3.13245	−2.39725	−4.08825	−5.69576	−4.38406
第 1 节龙身 $y(m)$	8.40107	7.54267	−7.10348	5.38879	−1.66264	2.34250
第 51 节龙身 $x(m)$	−8.79563	−7.86432	6.21233	1.60912	−2.57307	−1.62237
第 51 节龙身 $y(m)$	0.12125	2.20386	4.19659	6.56627	−5.34653	−4.69840
第 101 节龙身 $x(m)$	5.53974	−8.16709	−7.43697	6.60112	1.46412	−1.98796
第 101 节龙身 $y(m)$	6.83305	−0.062347	0.946955	1.45947	5.75007	−4.55589
第 151 节龙身 $x(m)$	−6.28963	8.03238	7.47868	2.89626	5.89610	0.453314
第 151 节龙身 $y(m)$	6.14976	1.47817	0.523534	−6.10879	0.698827	4.94996
第 201 节龙身 $x(m)$	8.79488	7.53966	4.67563	−6.75780	5.92841	−4.95257
第 201 节龙身 $y(m)$	0.171233	−3.13970	5.86021	0.190599	0.243685	0.424649
龙尾 (后)$x(m)$	5.52914	1.61698	−7.49683	6.50097	−2.97387	4.96980
龙尾 (后)$y(m)$	6.84159	8.00564	−0.0354321	−1.85554	5.13443	−0.092376

如要看详细数据，请看支撑材料中的文件 result1.xlsx。同时，若干点在不同的时间下，它们的速度的位置如下表：

表 3　若干点的在不同时间的速度

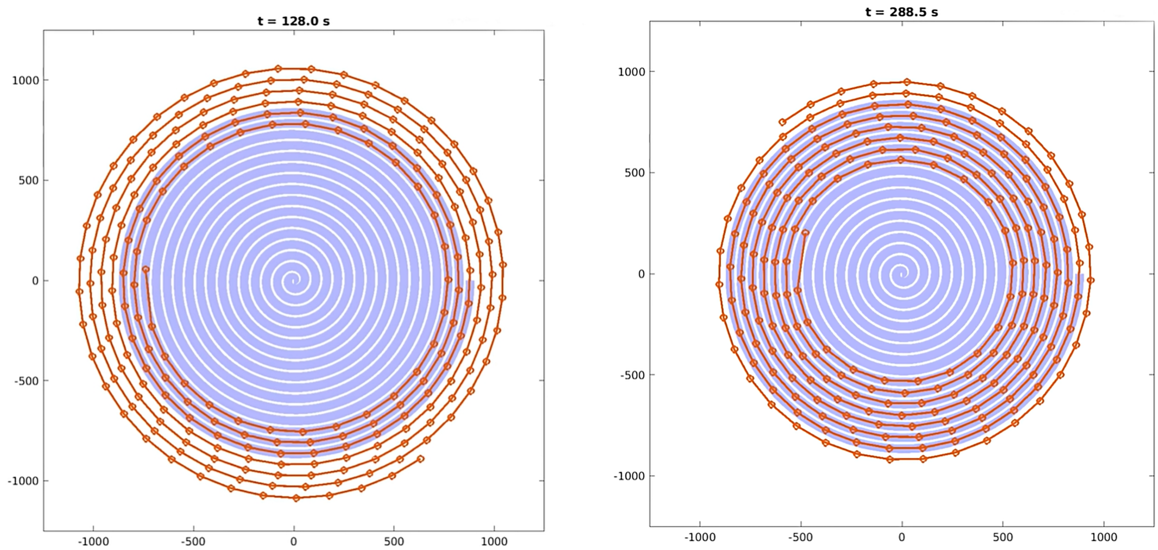
	$0s$	$60s$	$120s$	$180s$	$240s$	$240s$
龙头 (m/s)	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
第 1 节龙身 (m/s)	0.999975	0.999941	0.999919	0.999889	0.999874	0.999849
第 51 节龙身 (m/s)	0.999966	0.999936	0.999898	0.999876	0.999861	0.999820
第 101 节龙身 (m/s)	0.999953	0.999922	0.999888	0.999863	0.999850	0.999815
第 151 节龙身 (m/s)	0.999939	0.999919	0.999874	0.999855	0.999847	0.999791
第 201 节龙身 (m/s)	0.999925	0.999907	0.999864	0.999851	0.999838	0.999787
龙尾 (m/s)	0.999911	0.999897	0.999858	0.999842	0.999820	0.999779

如下为任意 4 次时间下的运动位置示意图：



(a) 12.5s **(b) 64.5s**

图 3　12.5s、64.5s 的状态



(a) 128.0s **(b) 288.5s**

图 4　128.0s、88.5s 的状态

结果分析

1. 任意时刻，从龙头到龙尾，速度的大小逐渐降低。从实际角度思考，处在龙头的人自己跑，前面没人，相对更自由，所以速度快；而越是后面的人，排在他前面的人也就越多，更不自由，所以速度更低。

2. 速度具有传递性，任意一节龙身在螺线上某点的速度是基本保持不变，同时也证明了分析 1，因为传递性总是伴随着滞后性。

六、 问题二的模型的建立和求解

6.1 模型建立

在运动过程中，虽然螺距 $d \equiv 0.55m$。但随着队伍整体逐渐向中间靠拢，龙身与龙身之间的距离逐渐减小，如果不及时终止，队伍内部会发生碰撞。两个龙身之间的距离记作 h_i, 是第 i 个和第 j 个龙身之间的距离，显然

$$h_i = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}, \tag{17}$$

根据题目要求，在即将发生碰撞时，运动终止，即 $h_i = w$.

首先我们假设，是龙身与龙身之间发生碰撞，每个龙身在运动过程中都会走过相同的路段，所以若处在该点的龙身与龙身发生碰撞，则已经走过该点的前面的龙身应该提前在该点发生碰撞，则本次碰撞则不应该发生。照此逻辑，则前面的龙身也不应该发生碰撞，因为在前面的前面还有龙身应该发生过碰撞。以此类推，龙身和龙身则不会发生碰撞。最终我们得到结论，只能是龙头发生碰撞。由于龙头速度最大，且排在最前面，同时龙头的宽度最大，所以这也大大增加了龙头碰撞的机会。最终龙头与后面某一节的龙身会发生碰撞，从而终止运动。

同时我们记龙头的两个把手和任意第 i 个龙身的两个把手的笛卡尔坐标为

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), \tag{18}$$

和极坐标系：

$$(r_1, \theta_1), (r_2, \theta_2), (r_i, \theta_i), (r_{i+1}.\theta_{i+1}), \tag{19}$$

都满足公式 (3).

在这里，我们将第一二把手的中点作为龙头的位置，即 $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$, 简记为 (X_1, Y_1)。同理，第 i 节龙身坐标为 (X_i, Y_i)。则公式 (17) 更改为

$$h_i = \sqrt{(X_1 - X_i)^2 + (Y_1 - Y_i)^2}. \tag{20}$$

由此我们再依据第一问可建立本问的最终模型：

目标函数：

$$\arg_t \quad (X_1 - X_2)^2 + (Y_i - Y_i)^2 = w^2. \tag{21}$$

约束条件：

$$\begin{cases} X_1 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, X_2 = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}, \\ Y_1 = \dfrac{y_1 + y_2}{2}, Y_2 = \dfrac{y_i + y_{i+1}}{2}, \\ x_1 = r(\theta_1)\cos\theta_1\,, y_1 = r(\theta_1)\sin\theta_1\,, \\ x_2 = r(\theta_2)\cos\theta_2\,, y_2 = r(\theta_2)\sin\theta_2\,, \\ x_i = r(\theta_i)\cos\theta_i\,, y_i = r(\theta_i)\sin\theta_i\,, \\ x_{i+1} = r(\theta_{i+1})\cos\theta_{i+1}\,, y_4 = r(\theta_{i+1})\sin\theta_{i+1}\,, \\ b\ln(\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2+1}) + b\theta_1\sqrt{\theta_1^2+1} - 2(L_{oA} - v_{head}t) = 0\,. \end{cases} \tag{22}$$

6.2 模型求解

Step1： 设定初始条件 t=0。

Step2： 计算该时间 t 下的各龙头、龙身的位置，同时计算 d_1。

Step3： 根据 d_1 和 w 的大小判断是否发生碰撞，如果没有，则时间加一，再重复 Step2；反之，则进入 Step4。

Step4： 计算该事件下各点的速度。

6.3 求解结果

我们通过 problem2.m 程序求解，$t = 412.5s$ 时龙头发生碰撞。当处于终止时间下，龙头前把手、龙头后面第 1、51、101、151、201 条龙身前把手和龙尾后把手的位置和速度如下表所示：

表 4　此时各部位的位置及速度

	龙头	第 1 条	第 51 条	第 101 条	第 151 条	第 201 条	龙尾
x	1.31239	−1.54731	1.39813	−0.658536	0.84686	0.0314981	−7.90981
y	1.86919	1.83301	4.28771	−5.86589	−6.97184	−0.09493	−1.10914
v	0.99916	0.99075	0.976558	0.974334	0.973426	0.159450	0.972933

如要看详细数据，请看支持材料中的文件 result2.xlsx。

七、 问题三的模型的建立和求解

7.1 模型建立

在盘入到盘出的过渡阶段，是需要在中心为圆心，直径为 $9m$ 的圆形区域掉头最终能够沿着相应的螺线盘出到空间边界。在这过程中，由于后面的龙身运动具有滞后性和传递性，假设龙头在 D 点开始掉头，那么在之后的 D 点以后的龙身仍在盘入。龙头运动出掉头空间之后，运动在龙头左右两边的是仍在盘入的龙身，所以龙身在盘出过程中的运动路线应在盘入运动路线相邻两条螺线之间。由于板凳宽度限制，两条螺纹之间的空间需要容纳两个板凳的宽度，即满足条件：

$$d \geq 2w, \tag{23}$$

同时为保持在盘入和盘出过程中运动轨迹的稳定性，盘入和盘出的螺距相同。

题目中给出掉头区域为直径为 $9m$ 的圆形区域，由于板凳宽 $0.3m$, 板凳龙盘出时其边缘必须到达的半径 $R = 4.5 + \dfrac{0.3}{2} = 4.65m$ 这里我们假设板凳掉头时只需其一侧边缘进入圆内即可，实际上可能需要更多的空间，但这里为了简化我们这样假设。

根据阿基米德螺线参数方程 $r = a + b\theta$, 螺距 $d = 2\pi b$。Δr 是螺线往外扩展一圈，半径的增量。若我们将其扩展到任意圈数，可得

$$d = \frac{\Delta r}{\Delta n}. \tag{24}$$

从 A 点盘入到 D 点，n 为所转的圈数，我们采用整数。A 点坐标 $(8.8, 0)$,D 点半径 4.65，从 A 点到 D 点半径从 $8.8m$ 变化到 $4.65m$, 可得到关系式：

$$4.65 = 8.8 - d \cdot n\,, \quad n \in R^{+}. \tag{25}$$

7.2 求解过程以及结果

由于所转圈数可能为整数（可能性较低）或者非整数。所以在程序求解过程中，我们采用遍历搜索法，分为这两种情况，分别设定不等同的步长。

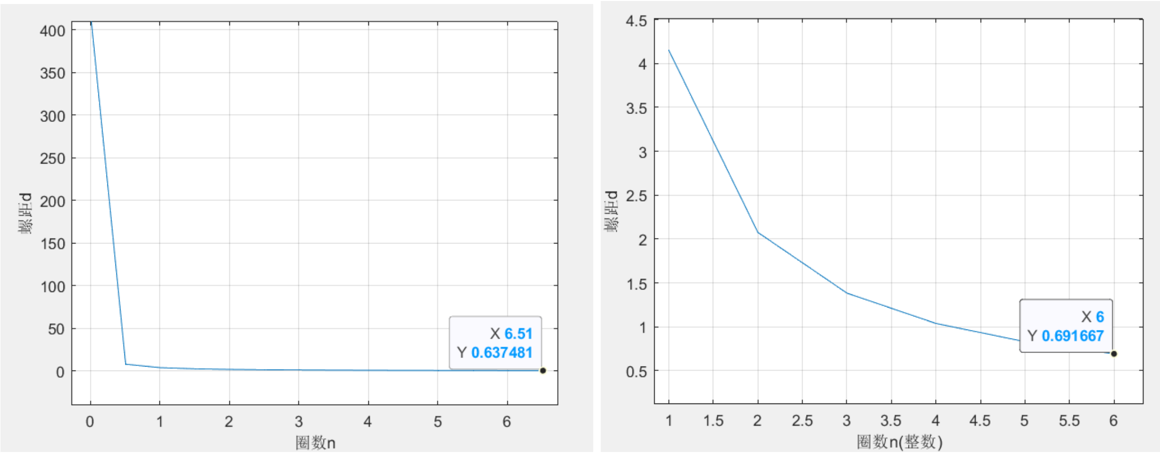
Step1: 初始化参数，设定所转过的圈数为 0 或 0.01。

Step2：计算在该圈数下的螺距 d。

Step3: 增加圈数，步长为 1 或 0.01，重复 Step2。

Step4: 在符合条件的结果中，找出最小的值。

以下为两种情况的圈数与螺距的关系图像（只列出符合约束条件（公式 (23)）的数值）。



(a) 整数部分　　**(b) 非整数部分**

图 5　圈数在整数与非整数下的螺距关系图

由公式 (25), 可得 d 和 n 呈反比例关系，结果图像也大致类似，这也证明了程序编写的正确。由结果可得，在整数情况下，最优解 $d = 0.691667$，此时转的圈数 $n = 6$；在非整数情况下，最优解为 $d = 0.637481$, 此时转的圈数 $n = 6.51$。这两种情况下，螺距仅相差 6 厘米，两种结果在误差允许的范围内，显然非整数的精度更高，最终我们采取的螺距 $d = 0.637481m$。

八、 问题四的模型的建立和求解

8.1 模型建立

确定盘出螺线方程

本问中，螺距 $d = 1.7m$, 那么极径的参数方程系数 $b = \dfrac{d}{2\pi} = 0.2705$。记盘出螺线 x 坐标、y 坐标和极径为 $x'(\theta), y'(\theta), r'(\theta)$ 的盘出螺线与盘入螺线关于中心对称，则可以得到盘出螺线的参数方程：

$$\begin{cases} r'(\theta) = a + b\theta\,, \\ x'(\theta) = r'(\theta)\cos\theta\,, \\ y'(\theta) = -r'(\theta)\sin\theta\,. \end{cases} \tag{26}$$

调头区域的几何分析

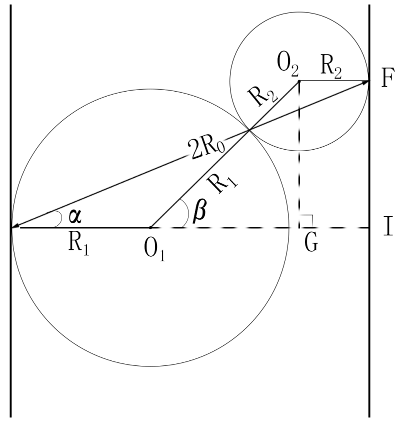


图 6　调头区域的几何分析图

如上图，对调头区域进行几何分析。

$$\overline{EF} = 2R_0, \overline{EO_1} = R_1, \overline{FO_2} = \overline{GI} = R_2, \beta = 2\alpha, \tag{27}$$

这个图中需要重点说明，以下线段长度:

$$\overline{GO_1} = (R_1 + R_2)\cos\beta, \tag{28}$$

和

$$\overline{GO_2} = (R_1 + R_2)\sin\beta = 2R_0\sin\alpha. \tag{29}$$

调头区域内运动轨迹在两个相切的圆上的两段弧长分别为

$$C_1 = R_1(\pi - 2\alpha), C_2 = R_2(\pi - 2\alpha). \tag{30}$$

由(27),(28)和(30)，可以推导出如下关系:

$$\overline{EI} = \overline{EO_1} + \overline{GO_1} + \overline{GI} = (R_1 + R_2)(1 + \cos\beta) = 2R_0\cos\alpha, \tag{31}$$

$$\overline{FI} = 2R_0\sin\alpha = (R_1 + R_2)\sin\beta. \tag{32}$$

记 $T = R_1 + R_2$, 将公式 (31)、 (32) 联立消去 β 得，

$$R_1 + R_2 = T = \frac{R_0}{\cos\alpha}, \tag{33}$$

其中 $\cos\alpha = \dfrac{\overline{EI}}{2R_0}$，$\overline{EI}$ 为在掉头范围内进出两点的切线的距离，因为 $\cos\alpha$ 为定值，再根据公式 (33), 以及

$$R_1 = 2R_2\,, \tag{34}$$

得到大小圆的半径为定值，所以本问不能调整圆弧，也不存在优化问题。

结果求解

在整个运动过程中，分为四段不同的圆弧。第 1，盘入过程中的螺线；第 2，在调头过程中的大圆的部分圆弧；第 3，在掉头过程中的小圆的部分圆弧；第 4，在盘出过程中的螺线。

在第一段圆弧运动过程中，$\theta_A = \dfrac{x_A}{b}$, 而在龙头恰好进入调头区域时 $\theta_{in} = \dfrac{R_0}{b}$。根据公式 (8) 和速度大小恒定，可得龙头 c 从 θ_A 到 θ_{in} 的时间为 $105.7776s$，再此过程中的后面龙身的位置和速度可参考第一问。

当龙头在大圆圆弧运动时,

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}R_1 \cdot \theta}{\mathrm{d}t} = -1, \tag{35}$$

由于 R_1 为一常数，可得

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{R_1}, \tag{36}$$

求解微分方程，得:

$$\theta_1(t) = -\frac{t}{R_1} + \theta_{in}. \tag{37}$$

龙头在大圆运动的时间为 $t_1 = \dfrac{C_1}{v_{head}}$. 上式的时间范围也在 0 到 t_1 之间。

当龙头在小圆圆弧运动中, 同理上一过程，得

$$\theta_2(t) = -\frac{t}{R_2} + \theta_{in} - \pi + 2\alpha\,, t \in [0, \frac{C_2}{v_{head}}]. \tag{38}$$

当龙头运动在盘出螺线时，题目要求只计算时间在 $[-100, 100]$ 中的状态，总时间为 $200s$，在第四端圆弧运动的时间为

$$t = 100 - \frac{C_1 + C_2}{v_{head}}, \tag{39}$$

由上式得龙头能在第四段弧长上运动 $90.8688s$. 其坐标可用公式 (26) 求得。

由大圆和小圆的半径可得，两圆的参数方程为

$$(x - x_{c1})^2 + (y_{c1}) = R_1^2, (x - x_{c2})^2 + (y - y_{c2})^2 = R_2^2. \tag{40}$$

在龙身的前把手位置计算中，首先需要计算第 i 龙身到龙头的距离，表达式为:

$$d_i = 3.41 - 0.275 + (2.20 - 0.57)(i - 1), \tag{41}$$

整理得,

$$d_i = 1.505 + 1.63i. \tag{42}$$

在计算第 i 节龙身位置中，首先需要 d_i, 以及龙头的位置判断该龙身处在那一段圆弧中，在不同的圆弧需要代入不同的方程。同时在计算后一节龙身时，则根据我们的需求来利用前一个龙身距离各个阶段曲线之间切点的位移，判断后一节龙身是否与前一节龙身处在同一段曲线中。根据在不同的位置，可以代入到不同的曲线方程中。

那么对于计算速度，则可参照公式(15)和(16)计算。

8.2 模型步骤

基于上面的模型建立，我们对不同时间下的队伍所有进行遍历求解，模型求解步骤如下。

Step1： 初始化条件，计算在 $t = -100s$ 时的状态。

Step2： 时间 +1，上一秒的时间进行判断，判断各个部分下一秒将会处在那一部分的曲线，根据不同的位置代入不同曲线方程中，并计算速度

Step3： 重复 Step2，直到 $t = 100s$，终止计算，否则一直进行。

8.3 求解结果

表 5　各部分在不同时间的位置分布

	$-100s$	-50s	$0s$	$50s$	$100s$
龙头 x	7.77803	6.60830	-2.71186	1.40877	-3.08347
龙头 y	3.71716	1.89886	-3.59108	6.15495	7.57614
第 1 节龙身 x	6.20927	5.36691	-0.06353	3.92131	-0.26813
第 1 节龙身 y	6.10852	4.47540	-4.67089	4.78867	8.07952
第 51 节龙身 x	-10.6080	-3.62994	2.45996	-1.09164	2.16255
第 51 节龙身 y	2.83149	-8.96388	-7.77815	-6.35692	3.99264
第 101 节龙身 x	-11.9227	10.1257	3.00849	-8.01189	-7.7036
第 101 节龙身 y	-4.80237	-5.97245	10.1085	4.70083	0.91532
第 151 节龙身 x	-14.3510	12.9747	-7.00279	-4.05769	9.94760
第 151 节龙身 x	-1.98093	-3.81035	10.3378	-10.7002	-2.42928
第 201 节龙身 x	-11.9529	10.5225	-6.87284	0.96496	7.70451
第 201 节龙身 y	10.5669	-10.8074	12.3826	-13.2771	9.49534
龙尾（后）x	-1.01105	0.18981	-1.93363	5.31300	-10.3902
龙尾（后）y	-16.5275	15.7205	-14.7131	12.9246	-7.82409

表 6　各部分在不同时间的速度分布

	$-100s$	-50s	$0s$	$50s$	$100s$
龙头 v1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
第 1 节龙身 v	0.999989	0.999975	0.999963	0.999959	0.999945
第 51 节龙身 v	0.999985	0.999957	0.999943	0.999937	0.999928
第 101 节龙身 v	0.999981	0.999938	0.999934	0.999925	0.999914
第 151 节龙身 v	0.999975	0.999933	0.999917	0.999912	0.999906
第 201 节龙身 v	0.999973	0.999924	0.999907	0.999890	0.999873
龙尾 v	0.999968	0.999911	0.999884	0.999876	0.999864

如要看详细数据，请看支撑材料中的文件 result4.xlsx。龙头把手中心的轨迹图如下：

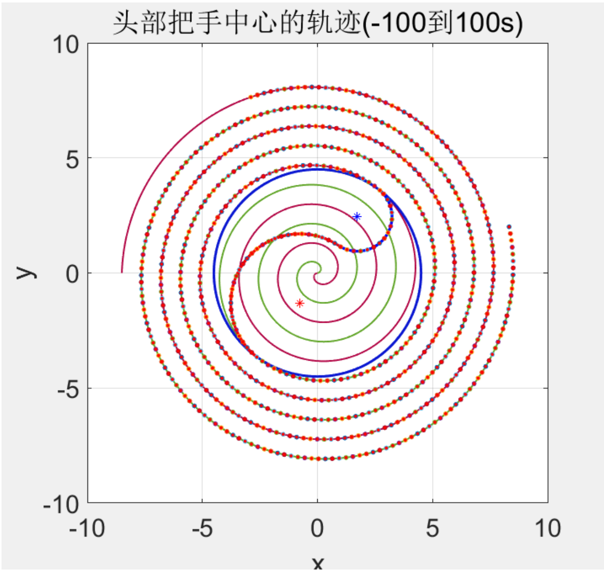


图 7　龙头把手中心的轨迹

九、 问题五的模型的建立和求解

9.1 模型建立

速度关系分析

舞龙队龙头和各把手在螺线中运动时，它们的速度分为线速度和角速度两种，线速度是由其半径 r 决定的，角速度 $\omega = \dfrac{v_{head}}{r_0}$. 第一步我们需要先确定龙头速度和各把手速度的关系，在舞龙队盘入和盘出时，任意一节板凳的速度 v_i 都可以用 $v_i = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$ 来

表示。v_r 是沿着盘入和盘出方向的速度，利用其与螺距 d 的关系得出：

$$v_r = -\frac{d}{2\pi}, \tag{43}$$

v_θ 则随着角速度 ω 和极径长度 r 的变化而变化，其计算公式为：

$$v_\theta = \omega \cdot r_i\,, \tag{44}$$

综上，我们得到第 i 节板凳的速度为：

$$v_i^2 = (-\frac{d}{2\pi})^2 + (\frac{v_{head}}{r_0} \cdot r_i)^2\,, \tag{45}$$

舞龙队做 S 形调头顺时针盘出的过程中，各个板凳需要沿着两端圆弧运动，在圆弧上的速度由角速度和半径决定。对于第 i 节板凳，在圆弧上的速度为：

$$v_i = \omega_i \cdot R_i\,. \tag{46}$$

约束条件

根据题目要求，找出龙头的最大速度的前提条件是所有板凳的速度 v_i 都不能超过 2m/s，即 $v_i \leq 2m/s$. 同时需要考虑到龙尾的速度可能会比较大，所有我们将把龙尾速度作为关键约束条件，来确定出龙头的最大行进速度。特别需要注意的是，舞龙队在调头的过程中也必须保持所有板凳的速度不能超过 2m/s。

确定龙头的最大速度

为了确定出龙头的最大速度，我们首先需要使用公式 (26) 来计算出每一节板凳的半径 r_i，并根据 (45) 找出能够满足所有板凳速度不超过 2m/s 的最大龙头速度 v_{head}。然后，在 S 形调头的两段圆弧上，在确保每个板凳的速度不超过 2m/S 的同时，使用公式 (46) 计算每个板凳此时的速度。最后，对比舞龙队在盘入、盘出时的最大龙头速度与 S 形调头顺时针盘出的过程时的最大龙头速度的结果，找出能够同时满足约束条件的最大龙头速度。

9.2 求解结果

经过上述一系列步骤的核算和对比，我们找到了同时满足所有约束条件的最大龙头速度为 2m/s，即 $\max v_{head} = 2m/s$ 符合本题的要求。

十、 模型的评价

10.1 模型的优点

- 优点 1 对阿基米德螺线方程构造的合理，方程简单明了。

- 优点 2 计算龙头位置使用两种方法，两种方法互相验证，模型更合理，且求解结果类似。
- 优点 3 模型分析基于一定的逻辑推导和几何分析，具有较强的延展性，例如用到排队路线优化问题中。

10.2 模型的缺点

- 计算复杂度较高，在模型的求解过程中，需要大量的计算，特别是计算第四问不断判断龙身的位置。

参考文献

[1] 韩相蓉. 浦江板凳龙的家族式仪式特征研究——以前陈村为例[D]. 浙江: 浙江师范大学, 2018.

[2] 项云华, 兰勇健. 乡村振兴与乡土文化遗产共融的优势、困境与消解路径——来自浦江古镇与板凳龙的田野调查[J]. 浙江体育科学, 2024.

[3] 刘崇军. 等距螺旋的原理与计算[J]. 数学的实践与认识, 2018.

附录 A　支撑文件列表

文件名	功能描述
problem1.m	问题一程序代码
q1.m	计算速度代码
ode45.m	龙格库塔法求角度代码
problem2.m	问题二程序代码
problem3.m	问题三程序代码
problem4.m	问题四程序代码
intodate.m	导出数据代码
result1.xlsx	问题一结果
result2.xlsx	问题二结果
result4.xlsx	问题四结果

附录 B　代码

problem1.m

```
clc,clear
syms w;
d=1.65;
v_head=1;
b=0.0875;
f=@(sita) sqrt((b*sita).^2+b^2);
L=integral(f,0,16*2*pi);  %计算原点到A点螺线的长度
position(1,1)=0.55*16;
position(2,1)=0;
position=zeros(447,301)
for  t=1:302
    if t>1
       l_head=v_head*t;
       l=L-l_head;
       fun=@(w) b*(asinh(w)+w*sqrt(w^2+1))-2*l;
       w=fzero(fun,[0,17*2*pi]);
       %w=sqrt(exp(2*l/b)-1);
       r=b*w;
```

```
       x=r*cos(w);
       y=r*sin(w);
       position(1,t)=x;
       position(2,t)=y;
    else
       position(1,t)=0.55*16;
       position(2,t)=0;
       w=16*2*pi;
       r=b*w;
    end
    for i=3:2:447
        if i==3
            d=2.86;
        else
            d=1.65;
        end
        w=w+d/(b*cos(w));
        position(i,t)=r*cos(w);
        position(i+1,t)=r*sin(w);

    end
end
```

q1.m

```
p=position([1,2,3,4,103,104,203,204,303,304,403,404,end-1,end],[1:60:301]);
n=1;
for i=[1,3,103,203,303,403,447]
    j=1;
   for k=1:60:301  %:60:301
       x1=position(i,k),x2=position(i,k+1);
       y1=position(i+1,k),y2=position(i+1,k+1);
       v(n,j)=((x1-x2)^2+(y1-y2)^2)^(0.5);
       j=j+1;
   end
```

```
    n=n+1;
end
```

ode45.m

```
d=0.55;
b=d/(2*pi);    %这几行替换problem1.m的11-13行
range=0:300;%定义时间范围
f=@(t,sita) -1/(b*sqrt(1+sita.^2));
[t,sita]=ode45(f,range,32*pi);%龙格库塔法
```

problem2.m

```
clc,clear
syms w;
d=1.65;
v_head=1;
b=0.0875;
f=@(sita) sqrt((b*sita).^2+b^2);
L=integral(f,0,16*2*pi);  %计算原点到A点螺线的长度
position=zeros(223,1000);
for  t=1:500
    if t>1
        l_head=v_head*t;
        l=L-l_head;
        fun=@(w) b*(asinh(w)+w*sqrt(w^2+1))-2*l;
        l=L-l_head;
        b=0.0875;
        w=fzero(fun,17*2*pi);
        %w=sqrt(exp(2*l/b)-1);
        r=b*w;
        x=r*cos(w);
        y=r*sin(w);
        position(1,2*t-1)=x;
        position(1,2*t)=y;
    else
        position(1,2*t-1)=0.55*16;
        position(1,2*t)=0;
```

```
        w=16*2*pi;
        r=b*w;
    end
    for i=2:223
        if i==3
            d=2.86;
        else
            d=1.65;
        end
        ffun=@(wb) [b^2*((w*cos(w)-wb*cos(wb))^2-(w*sin(w)-wb*
   sin(wb))^2)-d^2==0,wb>w];
        g=@(wb) wb-w;
        wb=fzero(ffun,w);
       % wb=fmincon(ffun,w,g);
        w=wb;
        r=w*b
        position(i,2*t-1)=r*cos(w);
        position(i,2*t)=r*sin(w);

    end
end
figure
scatter(position(:,1),position(:,2));
grid on;
figure
```

problem3.m

```
clc,clear
w=0.3;
for n=1:10
    d(n)=(8.8-4.65)/n;
end
index=find(d>2*w);  %搜寻符合条件的索引
dd=d(index);        %将符合条件的值放在新的矩阵中

```

```
figure     %图片1    圈数是整数
plot(index,dd)     %生成图片
xlabel('圈数n(整数)');
ylabel('螺距d');
grid on;

i=1;
for nn=0.01:0.5:10
    D(i)=(8.8-4.65)/nn;
    i=i+1;
end
Index=find(D>2*w)  %搜寻符合条件的索引
DD=D(Index);       %将符合条件的值放在新的矩阵中
figure        %图片2   圈数是小数
plot((Index-1).*0.5+0.01,DD); %生成图片
xlabel('圈数n');
ylabel('螺距d');
grid on;
```

problem4.m

```
clc,clear
d=1.7;%定义螺距
b=d/(2*pi);
v_head=1;%定义龙头速度
R_0=4.5;%调头区域半径
x_0=8.8,y_0=0;%A点坐标
theta_A=x_0/b,theta_01=R_0/b;
f=@(sita) sqrt((b*sita).^2+b^2);
L=integral(f,theta_01,theta_A);  %计算原0s的位置到A点螺线的长
   度
t_OSA=(L/v_head);
calculate_theta=@(t,theta) -1/(b*sqrt(1+theta.^2));
[t,theta]=ode45(calculate_theta,0:t_OSA-16,theta_A);
x_head=b*theta(6:end).*cos(theta(6:end));
y_head=b*theta(6:end).*sin(theta(6:end));
```

```
A=sin(theta_O1)+theta_O1*cos(theta_O1),B=cos(theta_O1)-theta_O1*sin(theta_O1);
C=abs(A*R_0*b*cos(theta_O1)-B*R_0*b*sin(theta_O1));
L_qiexian=2*C/sqrt(A^2+B^2);
alpha=acos(L_qiexian/(2*R_0));
R_2=R_0/cos(alpha)/3;
R_1=2*R_2;
S=3*R_2*(pi-2*alpha);
S_2=S/3,S_1=S-S_2;
t_panchu=100-S/v_head;
```

intodate.m

```
YYY=YY(1:end,1:10:end);
XXX=XX(1:end,1:10:end);
position=zeros(224,2);
xi=real(XXX);
yi=real(YYY)
for i=1:224
     if i==1
         position=[xi(1,:);yi(1,:)];
     else
         position=vertcat(position,xi(i,:));
         position=vertcat(position,yi(i,:));
     end
end
range_time=1:50:201;
range_xy=[1,2,3,4,103,104,203,204,303,304,403,404,447,448];
pp=position(range_xy,range_time);
```