



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ОТЧЕТ
по лабораторной работе №2

Преобразования Фурье

Автор: Дженжеруха Кирилл

Учебная группа: Р3242

Номер ИСУ: 368103

Преподаватель: Перегудин Алексей Алексеевич

Санкт-Петербург
2024

Содержание

Задание 1. Вещественное	3
Задание 2. Комплексное	12
Задание 3. Музыкальное	14

*Математики похожи на французов:
 что бы вы ни сказали, они все переведут
 на собственный язык.
 Иоганн Вольфганг Гете*

Эта лабораторная работа посвящена преобразованиям Фурье и их применению для работы с функциями и иными типами данных.

Задание 1. Вещественное

Рассмотрим различные функции $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

(1) **Прямоугольная функция.** Зададим функцию

$$f(t) = \begin{cases} a, & |t| \leq b, \\ 0, & |t| \geq b. \end{cases}$$

Построим графики заданной функции при различных значениях $a, b > 0$:

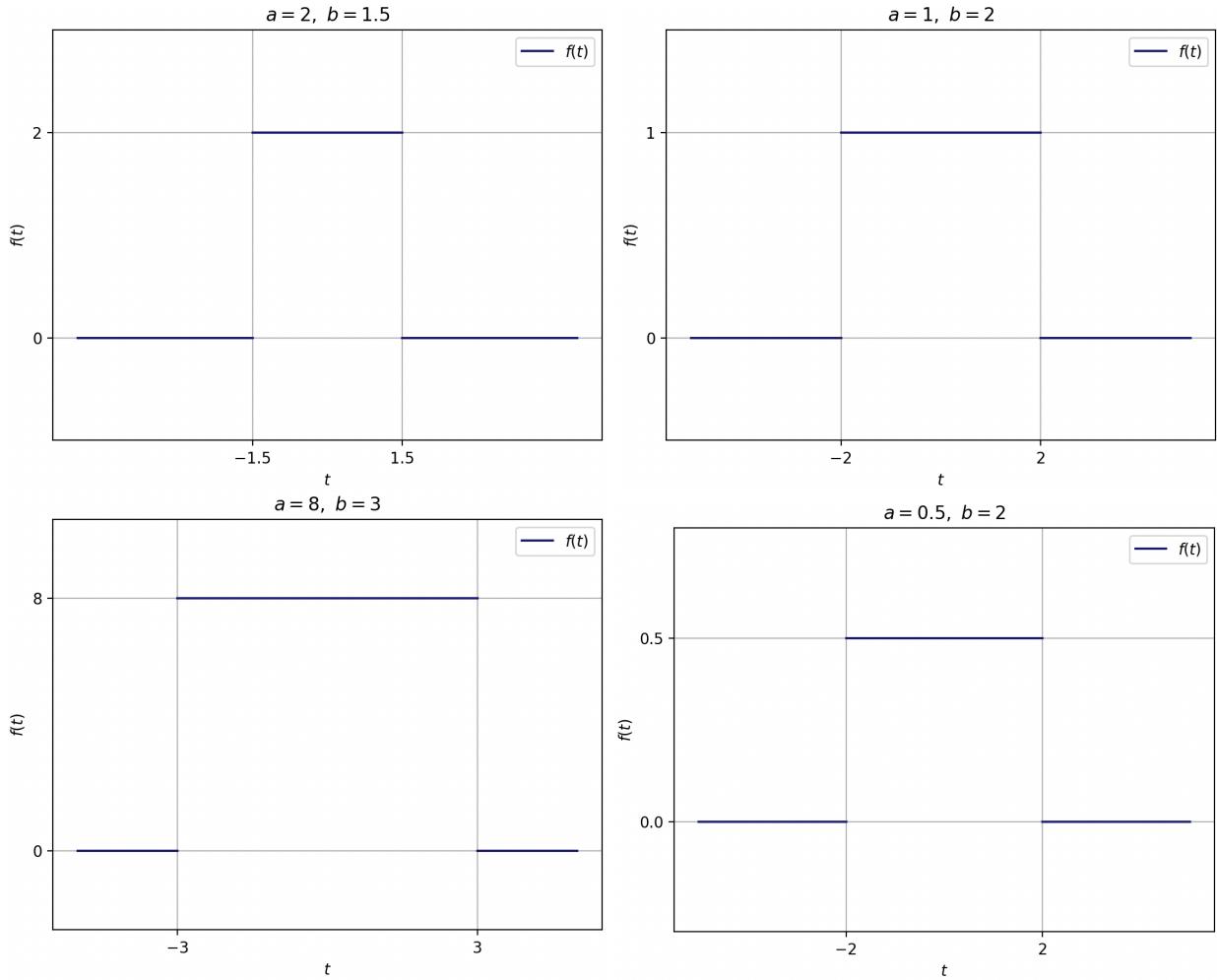


Рис. 1 – Графики прямоугольной функции для различных положительных a, b .

Далее рассмотрим Фурье-образ заданной функции $\hat{f}(\omega)$, заданный как унитарное преобразование Фурье к угловой частоте ω .

Общие формулы для данного унитарного преобразования выглядят следующим образом:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Воспользуемся формулой Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$ и вычислим образ для заданной прямоугольной функции:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-b} 0 \cdot e^{-i\omega t} dt + \int_{-b}^b a \cdot e^{-i\omega t} dt + \int_b^{\infty} 0 \cdot e^{-i\omega t} dt \right) = \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) dt \stackrel{\text{parity}}{=} \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b \cos(\omega t) dt = \frac{a\sqrt{2} \sin(b\omega)}{\omega\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

Построим сравнительные графики исходной функции и преобразования Фурье для каждой из пар значений a, b из **Рис. 1**.

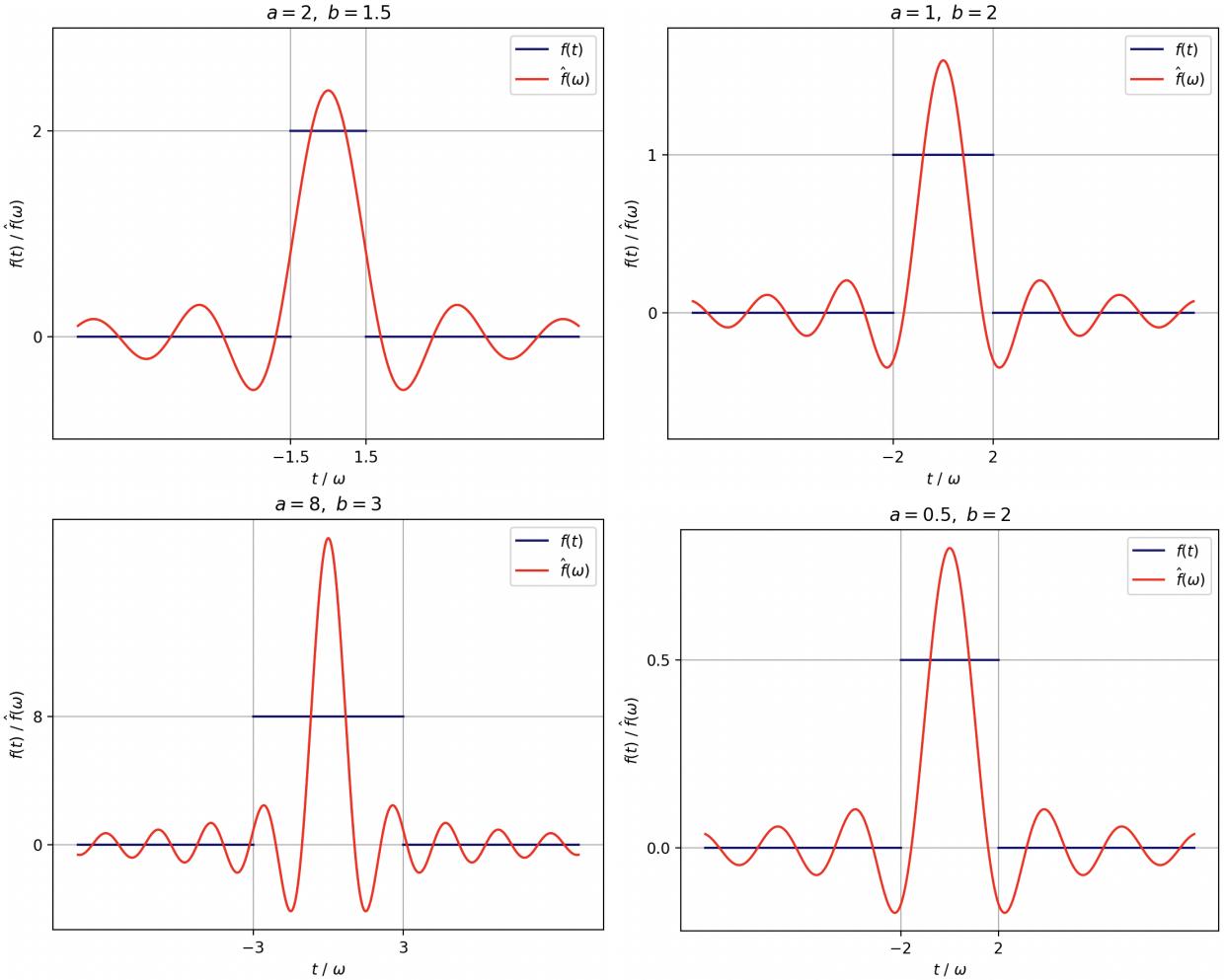


Рис. 2 – Сравнительные графики прямоугольной функции и ее Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$ для различных положительных a, b .

Проверим выполнение равенства Парсеваля (в общем-то, условие унитарности выполненного преобразования Фурье):

$$\|f\|_2 = \|\mathcal{F}f\|_2 \Leftrightarrow \|f(t)\|_2 = \|\hat{f}(\omega)\|_2 \quad a, b \geq 0 \quad \int_{-b}^b |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

В случае заданной нами прямоугольной функции возможна аналитическая проверка равенства Парсеваля: нетрудно убедиться, что

$$\int_{-b}^b |f(t)|^2 dt = 2a^2b = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \Rightarrow \odot$$

(2) Треугольная функция. Зададим функцию

$$f(t) = \begin{cases} a - |at/b|, & |t| \leq b, \\ 0, & |t| \geq b. \end{cases}$$

Построим графики заданной функции при различных значениях $a, b > 0$:

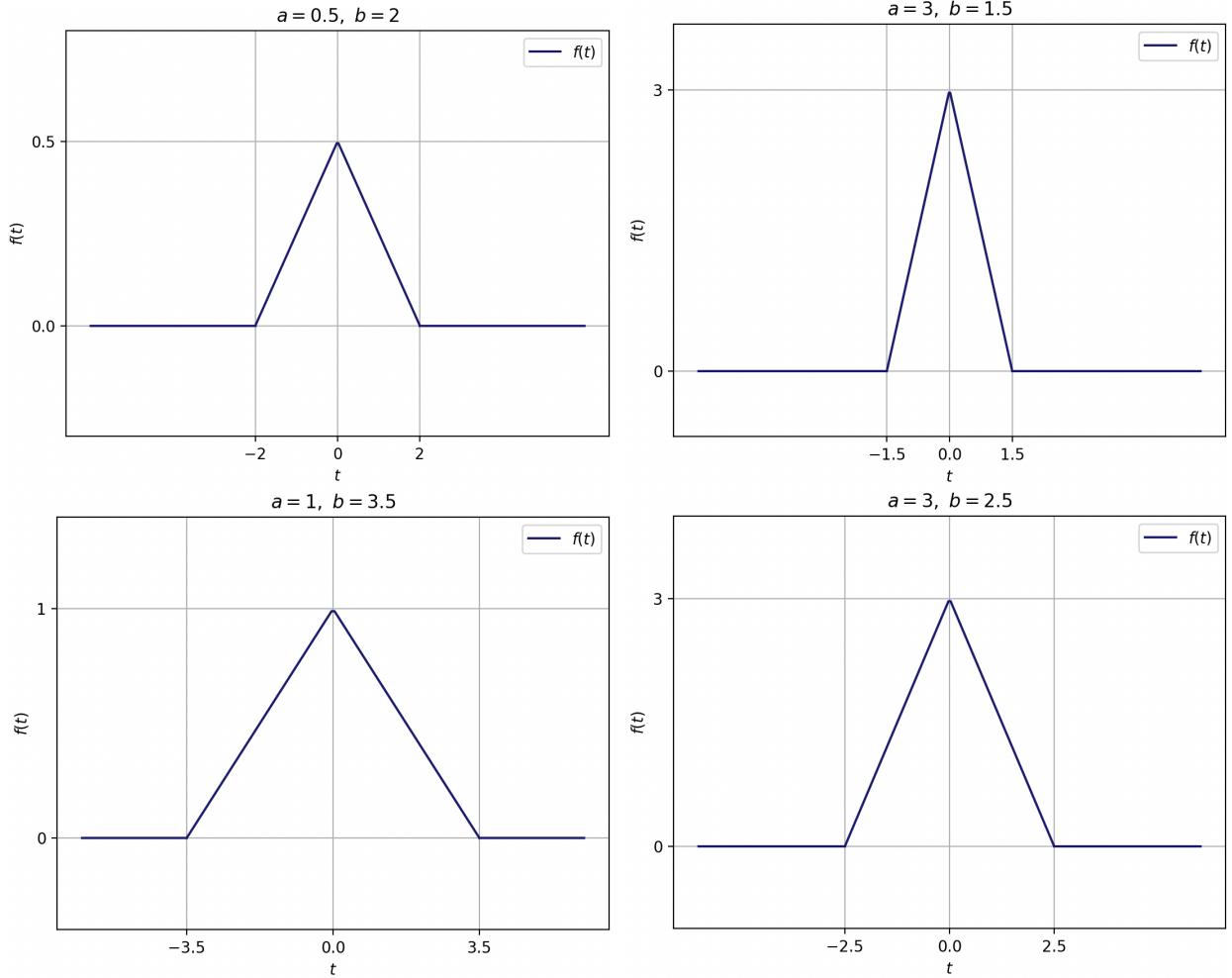


Рис. 3 – Графики треугольной функции для различных положительных a, b .

Воспользуемся формулой Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$ из предыдущего пункта и вычислим образ для заданной треугольной функции:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{-b} 0 \cdot e^{-i\omega t} dt + \int_{-b}^b \left(a - \left| \frac{at}{b} \right| \right) \cdot e^{-i\omega t} dt + \int_b^{\infty} 0 \cdot e^{-i\omega t} dt \right) = \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-b}^0 \left(1 + \frac{t}{b} \right) e^{-i\omega t} dt + \int_0^b \left(1 - \frac{t}{b} \right) e^{-i\omega t} dt \right) = \frac{a\sqrt{2}(1 - \cos(b\omega))}{b\omega^2\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Аналогично прямоугольной функции, построим сравнительные графики исходной функции и преобразования Фурье для каждой из пар значений a, b из **Рис. 3**.

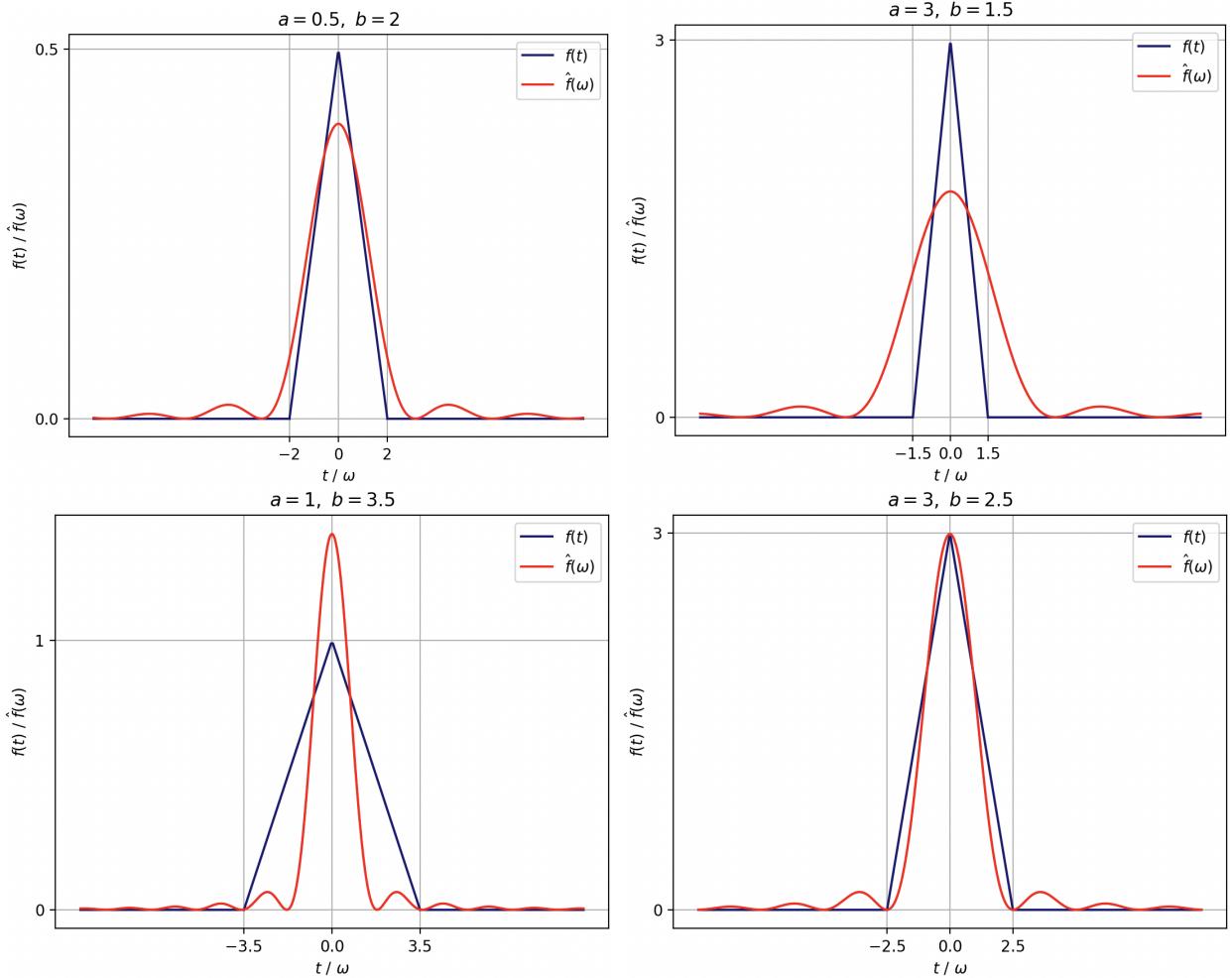


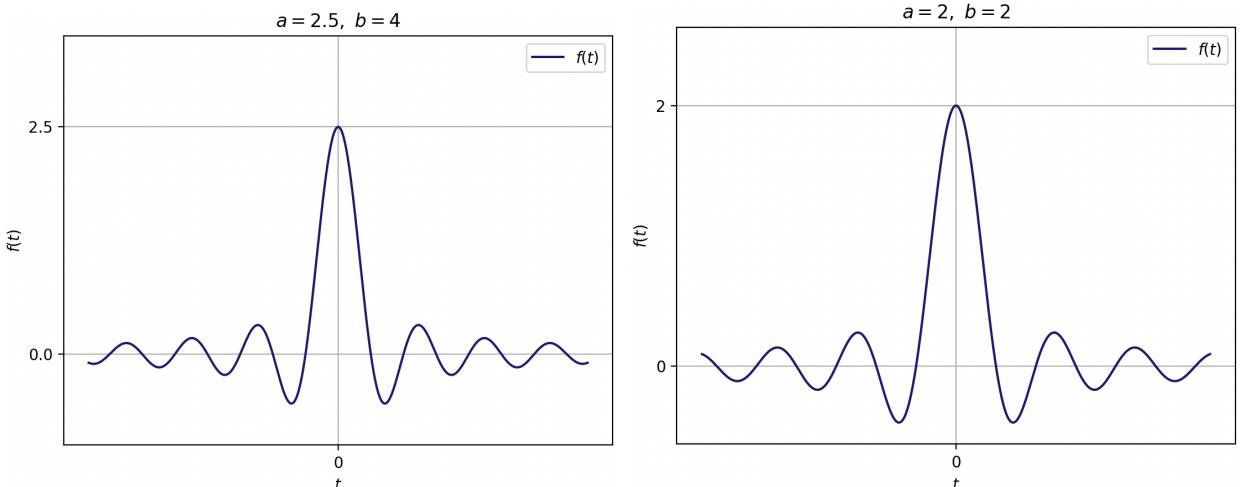
Рис. 4 – Сравнительные графики треугольной функции и ее Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$ для различных положительных a, b .

Также аналитически проверим выполнение равенства Парсеваля:

$$\int_{-b}^b |f(t)|^2 dt = \frac{2a^2b}{3} = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \Rightarrow \odot$$

(3) **Кардиальный синус.** Зададим функцию $f(t) = a \operatorname{sinc}(bt) = \frac{a \sin(bt)}{bt}$.

Построим графики заданной функции при различных значениях $a, b > 0$:



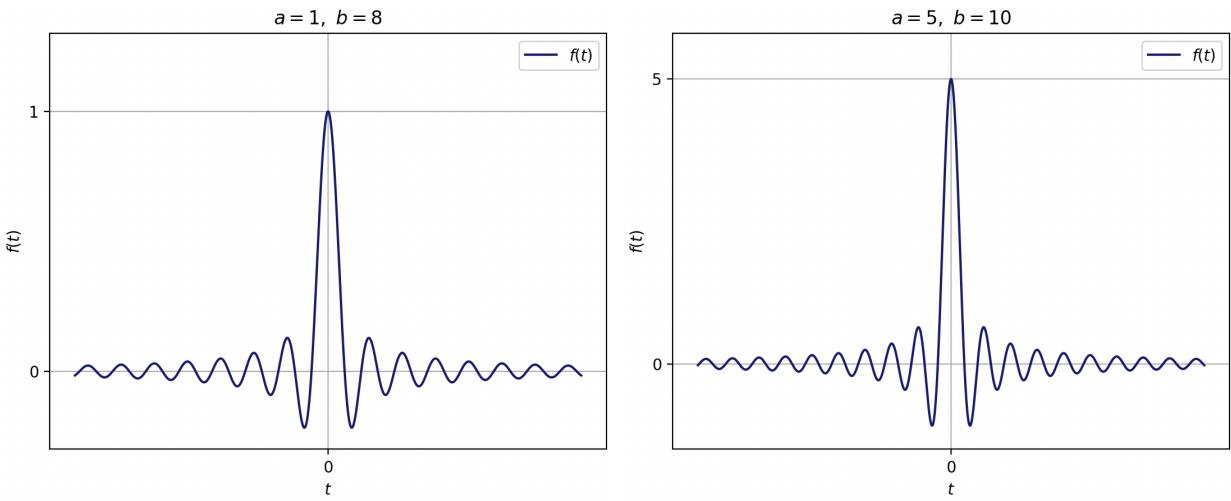


Рис. 5 – Графики кардинального синуса для различных положительных a, b .

В случае кардинального синуса получить выражения для Фурье-образа на аналитически достаточно нетривиально, поэтому воспользуемся методами численного интегрирования для построения графиков Фурье-образа для различных значений a, b с помощью следующего листинга:

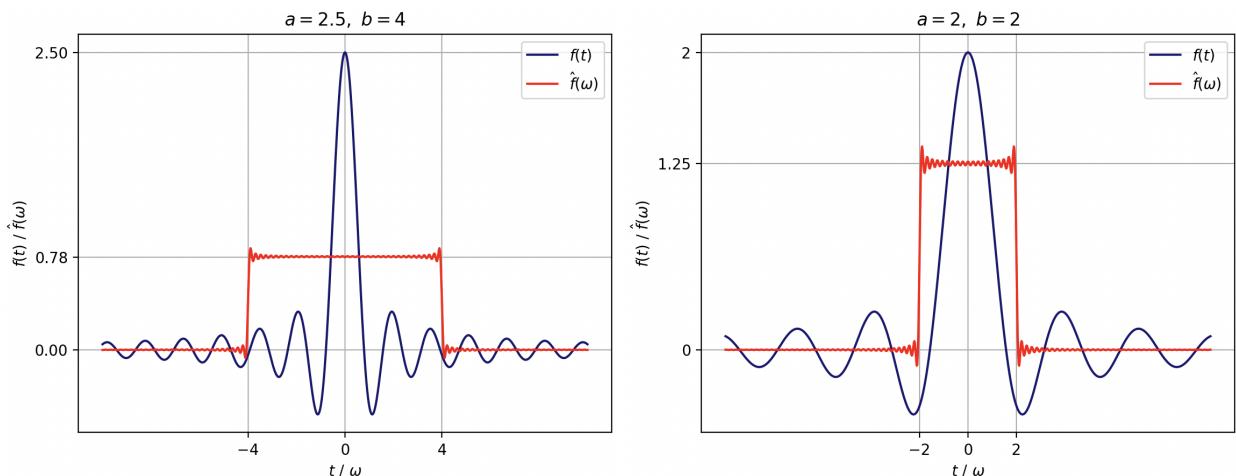
Листинг 1. Функция численного вычисления Фурье-образа для кардинального синуса.

```

1   def f(x, a, b):
2       return a * np.sin(b * x) / b / x
3
4   def f1(x, a, b, w):
5       return (1 / np.sqrt(2 * np.pi)) * (a * np.sin(b * x) / (b * x)) *
6           np.exp(-complex(0, 1) * w * x)
7
8   a = 2.5; b = 4
9   X = np.linspace(-10, 10, 1000)
Y = np.array([(scipy.integrate.quad(f1, 0, 30, args=(a, b, w),
    complex_func=True)[0] + scipy.integrate.quad(f1, -30, 0, args=(a,
    b, w), complex_func=True)[0]) for w in X])

```

Аналогично предыдущим функциям, построим сравнительные графики исходной функции и преобразования Фурье для каждой из пар значений a, b из **Рис. 5**.



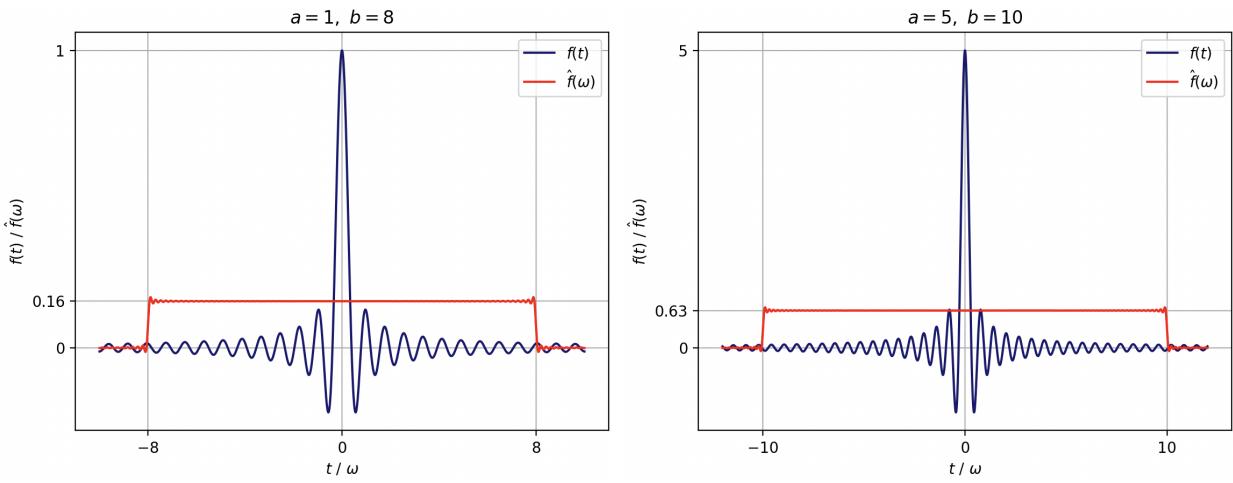


Рис. 6 – Сравнительные графики кардинального синуса и его Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$ для различных положительных a, b .

Численно проверяя равенство Парсеваля, получаем, что нормы исходной функции и ее Фурье-образа достаточно близки. Покажем в качестве примера одну из проверок:

$$a = 5, b = 10; \quad \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{5 \sin(10\omega)}{10\omega} \right)^2 d\omega} - \sqrt{\int_{-10}^{10} 0.6266615246^2 dt} \approx -0.0000199 \Rightarrow \odot$$

(4) **Функция Гаусса.** Зададим функцию $f(t) = ae^{-bt^2}$.

Построим графики заданной функции при различных значениях $a, b > 0$:

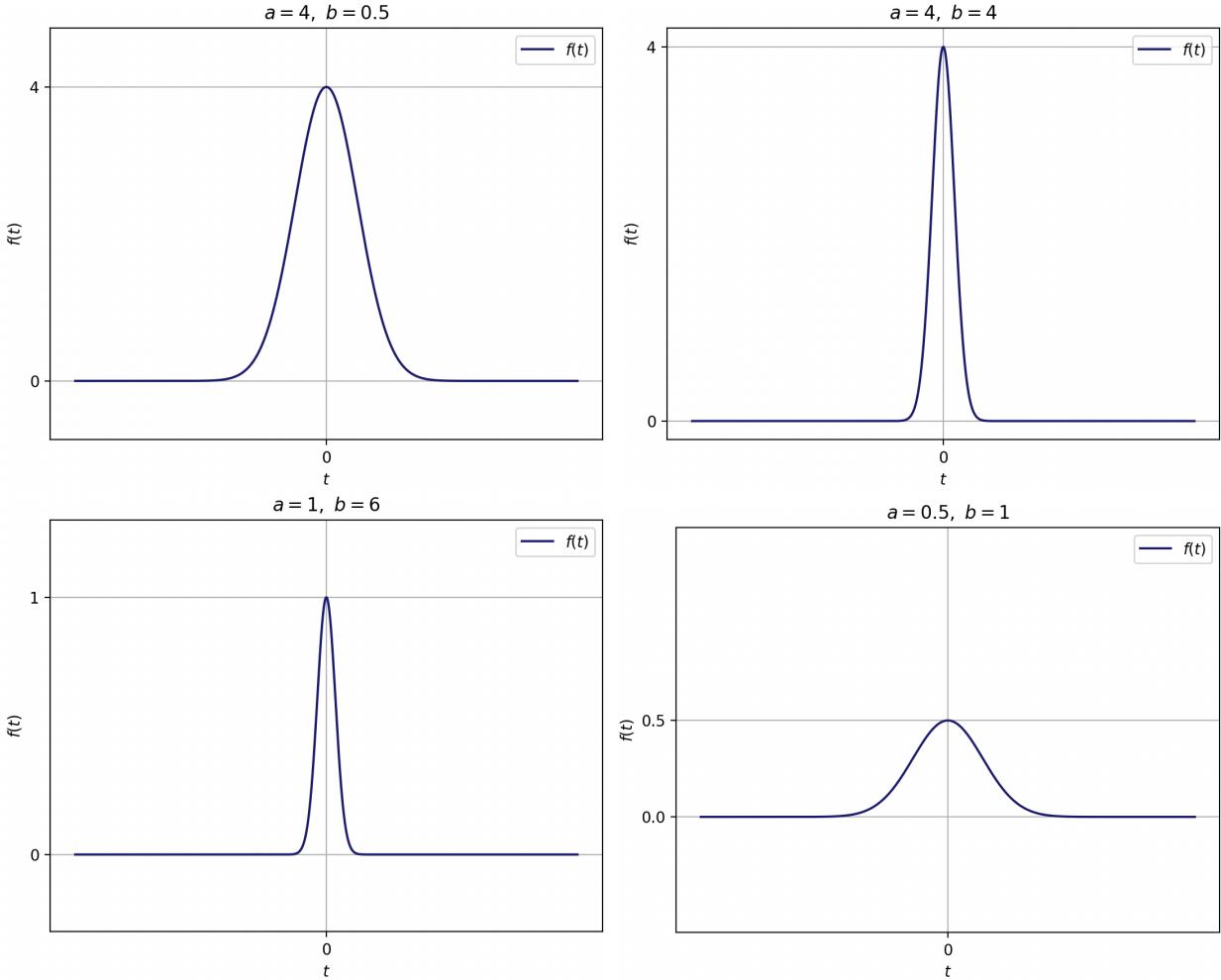


Рис. 7 – Графики функции Гаусса для различных положительных a, b .

Применим численное интегрирование для вычисления Фурье-образа функции Гаусса и построения его графиков для значений a, b , соответствующих Рис. 7. Ниже приведем листинг с функцией для интегрирования функции Гаусса и сравнительные графики:

Листинг 2. Функция численного вычисления Фурье-образа для функции Гаусса.

```

1  def f(x, a, b):
2      return a * np.exp(-b * x ** 2)
3
4  def f1(x, a, b, w):
5      return (1 / np.sqrt(2 * np.pi)) * (a * np.exp(-b * x ** 2)) *
6          np.exp(-complex(0, 1) * w * x)
7
8  a = 4; b = 0.5
9  X = np.linspace(-10, 10, 1000)
Y = np.array([(scipy.integrate.quad(f1, 0, 30, args=(a, b, w),
10         complex_func=True)[0] + scipy.integrate.quad(f1, -30, 0, args
11         =(a, b, w), complex_func=True)[0]) for w in X])

```

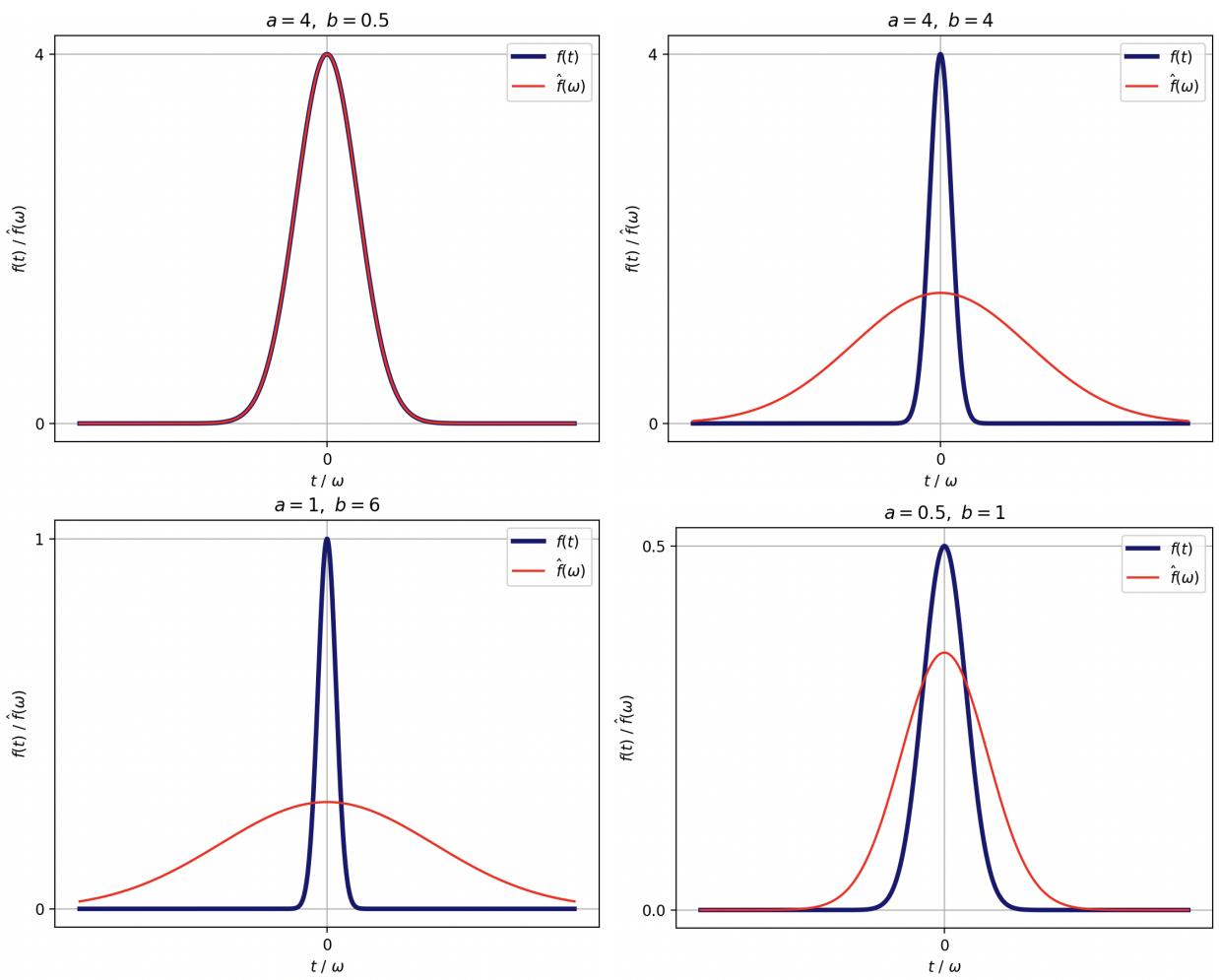


Рис. 8 – Сравнительные графики функции Гаусса и ее Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$ для различных положительных a, b .

Пример проверки равенства Парсеваля дает следующий результат:

$$\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (4e^{0.5t^2})^2 dt} - \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (4e^{0.5t^2}) e^{-i\omega t} dt \right)^2 d\omega} = 0 \Rightarrow \odot$$

(5) Двустороннее затухание. Зададим функцию $f(t) = ae^{-b|t|}$.

Построим графики заданной функции при различных значениях $a, b > 0$:

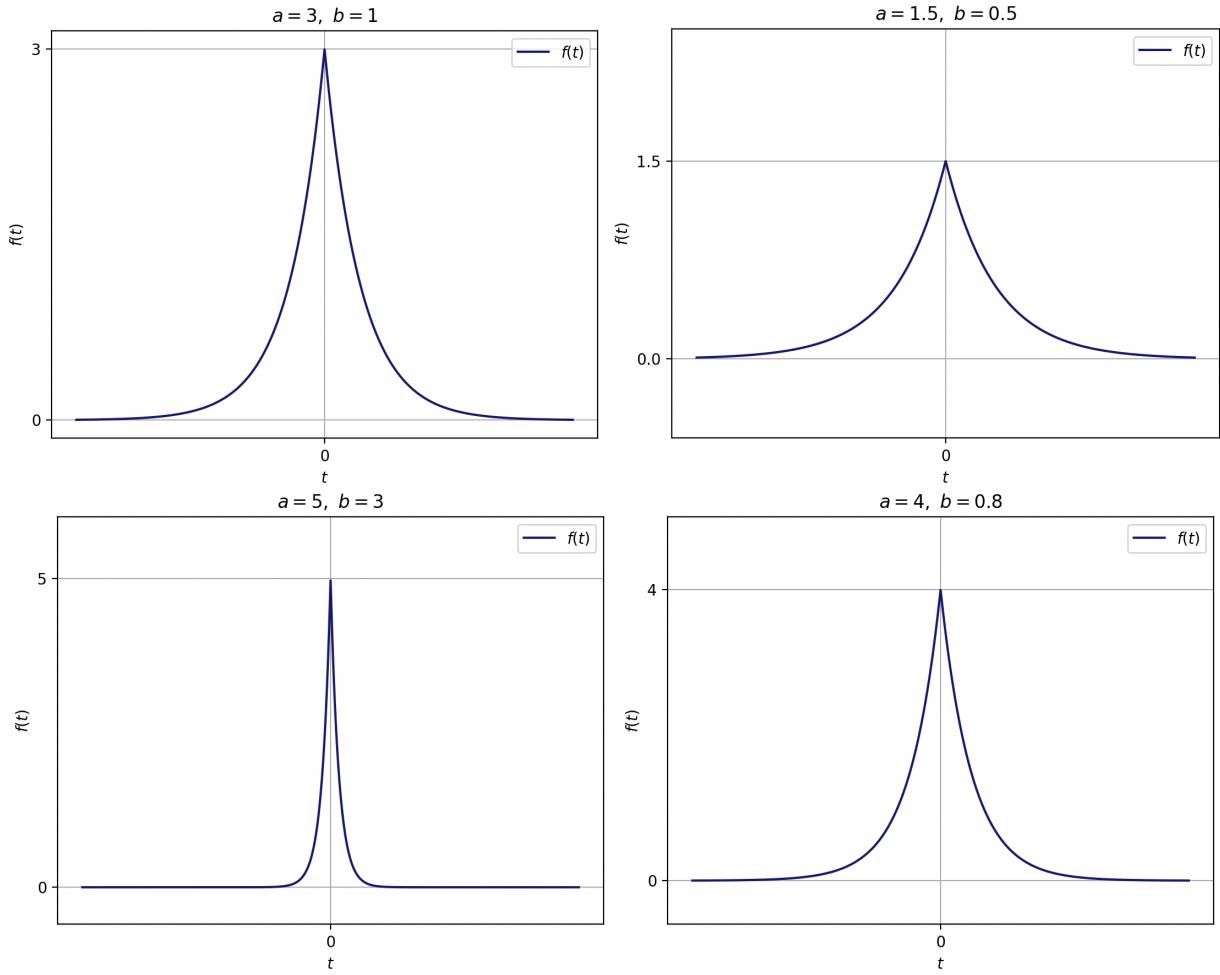
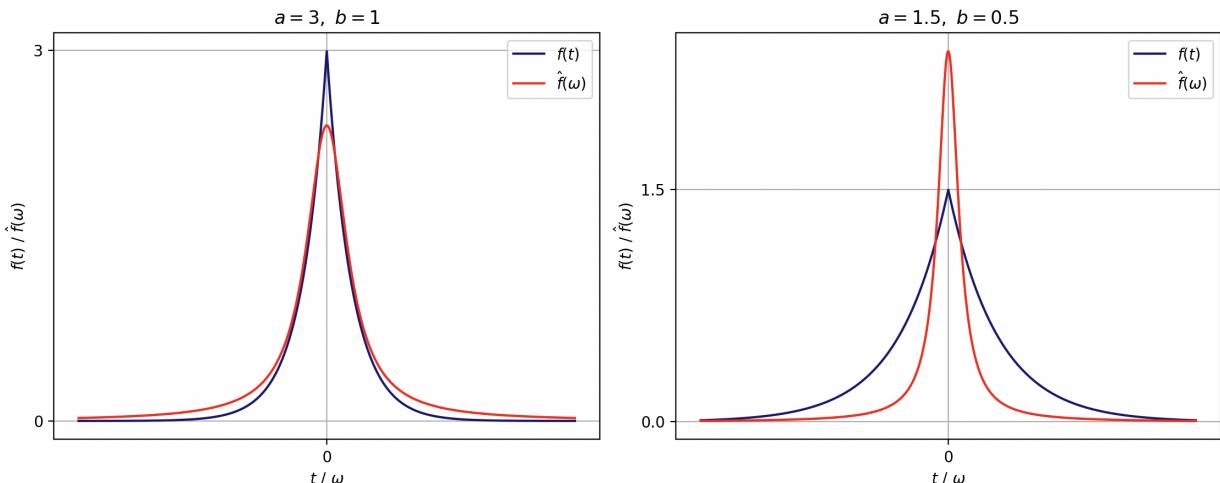


Рис. 9 – Графики двустороннего затухания для различных положительных a, b .

Воспользуемся аналитической формулой унитарного преобразования Фурье к образу $\hat{f}(\omega)$:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ae^{-b|t|} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 ae^{(b-i\omega)t} dt + \int_0^{\infty} ae^{(-b-i\omega)t} dt \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{a}{b-i\omega} + \frac{a}{b+i\omega} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{a(b+i\omega) + a(b-i\omega)}{b^2 + \omega^2} = \frac{ab\sqrt{2}}{(b^2 + \omega^2)\sqrt{\pi}}.\end{aligned}$$

Пользуясь полученным соотношением, построим сравнительные графики для значений a, b из **Рис. 9**:



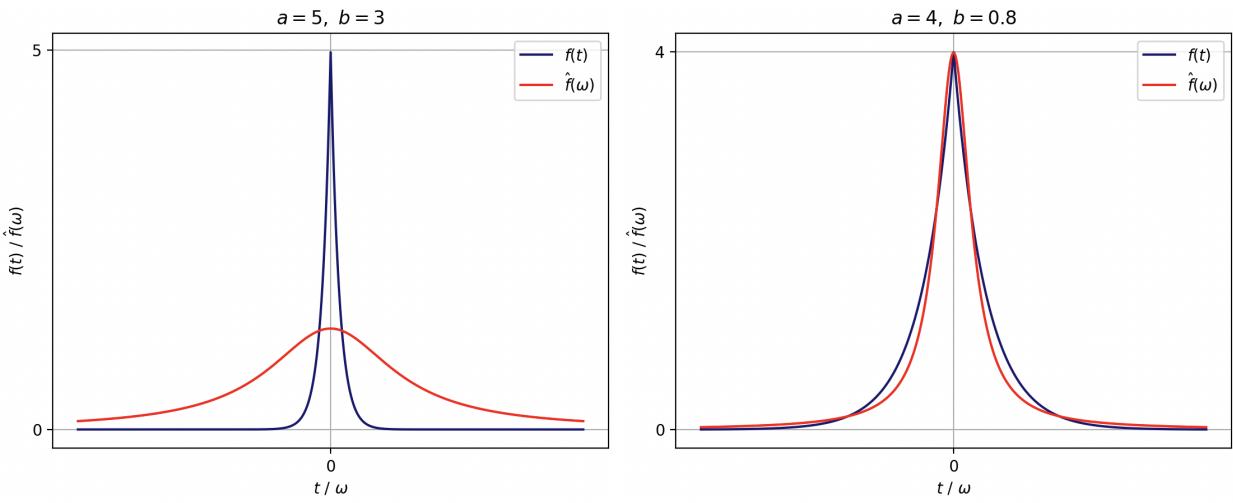


Рис. 10 – Сравнительные графики двустороннего затухания и его Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$ для различных положительных a, b .

Аналитически проверим и равенство Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (ae^{-b|t|})^2 dt = \frac{a^2}{b} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{ab\sqrt{2}}{(b^2 + \omega^2)\sqrt{\pi}} \right)^2 d\omega \Rightarrow \odot$$

Таким образом, мы выполнили унитарные преобразования Фурье $f(t) \rightarrow \hat{f}(\omega)$ к угловой частоте ω для различных функций. Унитарность обеспечила нам выполнение равенства Парсеваля, потому что сама его структура эквивалента структуре условия унитарности преобразования, то есть условия равенства норм функции и образа.

Отдельно стоит отметить *принцип неопределенности* – в преобразованиях Фурье он связан с концентрацией функции и зависимости от этого растяжения самого преобразования. Иными словами, принцип неопределенности говорит нам о несовпадении графиков функции и ее Фурье-образа из-за того, что невозможно произвольно сконцентрировать функцию, и ее преобразование Фурье, так как это по сути (в условиях унитарности) взаимно обратные преобразования. Так, к примеру, в случае двустороннего затухания график преобразования Фурье будет отличен от графика исходной функции в смысле концентрации – чем более сконцентрирована функция, тем больше растянуто преобразование (графики 3 и 4).

Принцип неопределенности можно обосновать следующим условием (с учетом нормировочного множителя):

$$(\Delta f)^2 (\Delta \hat{f})^2 \geq \frac{1}{16\pi^2}; \quad (\Delta f)^2 = \frac{1}{\|f\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 |f(x)|^2 dx, x_0 = \frac{1}{\|f\|_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} x |f(x)|^2 dx.$$

Здесь $(\Delta f)^2$ – дисперсия, x_0 – математическое ожидание, разброс вокруг которого изменяется этой дисперсией. При этих условиях равенство достигается только в том случае, если f – функция вида:

$$f(x) = Ce^{-\pi x^2/\sigma^2}; \quad \sigma > 0, C = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{\sigma}}, \|f\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dx}.$$

Иными словами, равенство достигается, когда f – центрированная на нуле функция Гаусса с дисперсией σ^2 , а ее преобразование Фурье – функция Гаусса с дисперсией σ^{-2} . Это подтверждается одним из графиков на **Рис. 8**.

Задание 2. Комплексное

В качестве функции выберем двустороннее затухание вида $f(t) = ae^{-b|t|}$ и, задав $a = 3$, $b = 1$, примем за новую функцию сдвиг исходной:

$$g(t) = f(t + c) \stackrel{a=3, b=1}{=} 3e^{-|t+c|}.$$

Построим графики заданной функции $g(t)$ при разных значениях параметра c , разместив их на одном графике:

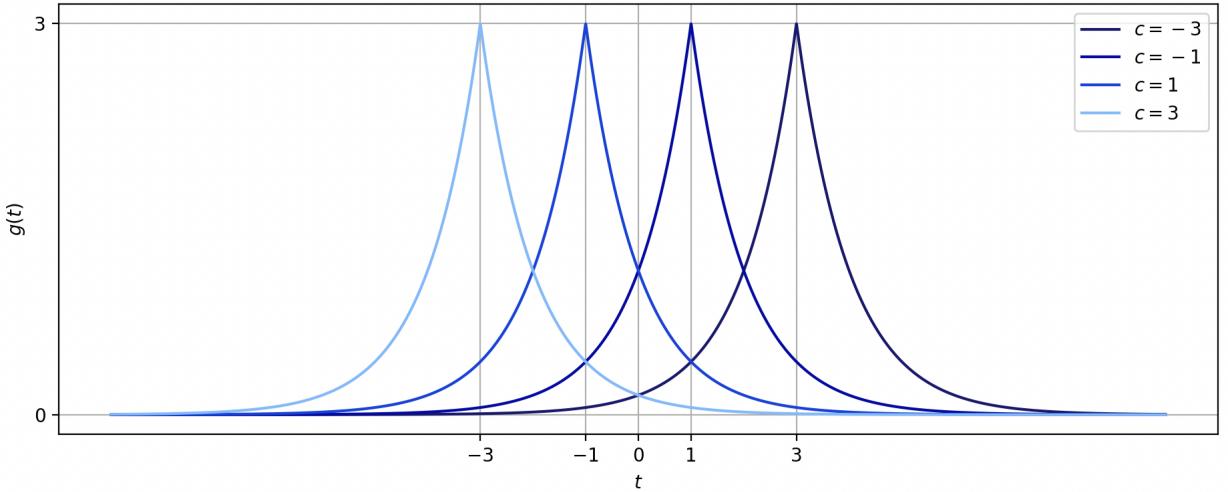


Рис. 11 – График двустороннего затухания с различными сдвигами.

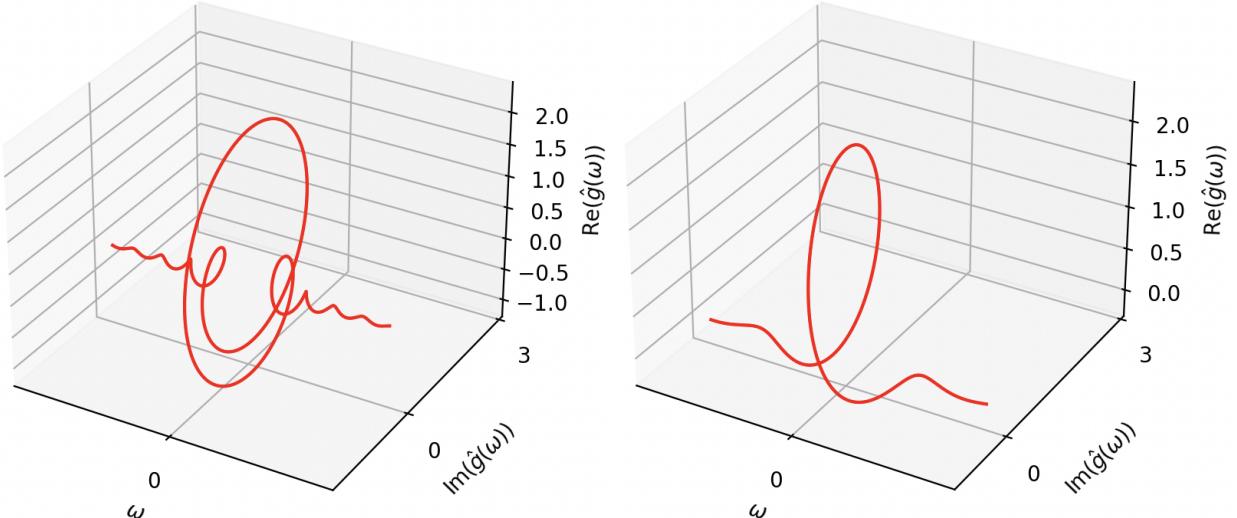
Получим некоторые аналитические выражения, соответствующие Фурье-образу $\hat{g}(\omega)$ заданной функции:

$$\begin{aligned} \hat{g}(\omega) &\stackrel{s=t+c}{=} e^{i\omega c} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 3e^{-|s|} e^{-i\omega s} ds = \frac{e^{i\omega c}}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 3e^{(1-i\omega)s} ds + \int_0^{\infty} 3e^{(-1-i\omega)s} ds \right) = \\ &= \frac{\cos(\omega c) + i \sin(\omega c)}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{3i}{\omega + i} - \frac{3i}{\omega - i} \right) = \frac{\cos(\omega c)3\sqrt{2}}{(\omega^2 + 1)\sqrt{\pi}} + i \frac{\sin(\omega c)3\sqrt{2}}{(\omega^2 + 1)\sqrt{\pi}}; \\ \operatorname{Re}(\hat{g}(\omega)) &= \frac{\cos(\omega c)3\sqrt{2}}{(\omega^2 + 1)\sqrt{\pi}}, \quad \operatorname{Im}(\hat{g}(\omega)) = \frac{\sin(\omega c)3\sqrt{2}}{(\omega^2 + 1)\sqrt{\pi}}; \quad |\hat{g}(\omega)| = \frac{3\sqrt{2}}{(\omega^2 + 1)\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

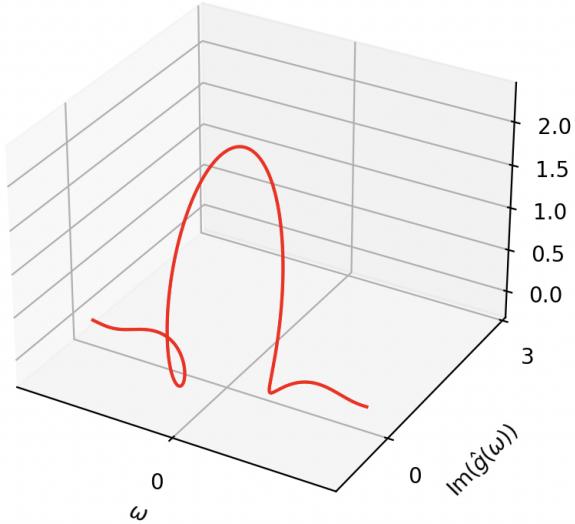
Покажем, как влияет параметр c на составляющие Фурье-образа функции при разных значениях:

$$c = -3$$

$$c = -1$$



$c = 1$



$c = 3$

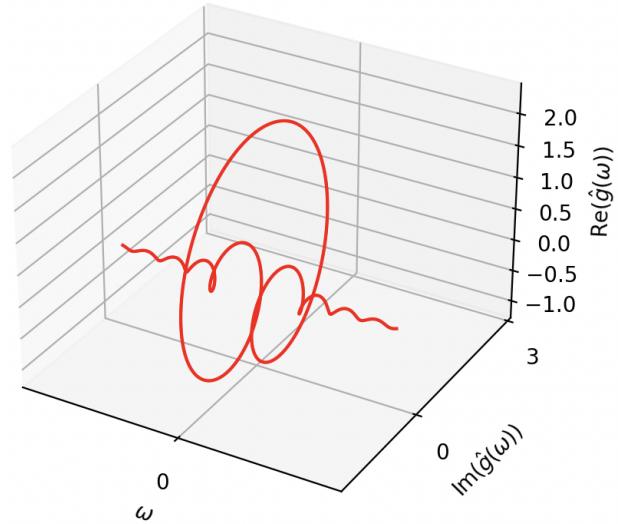
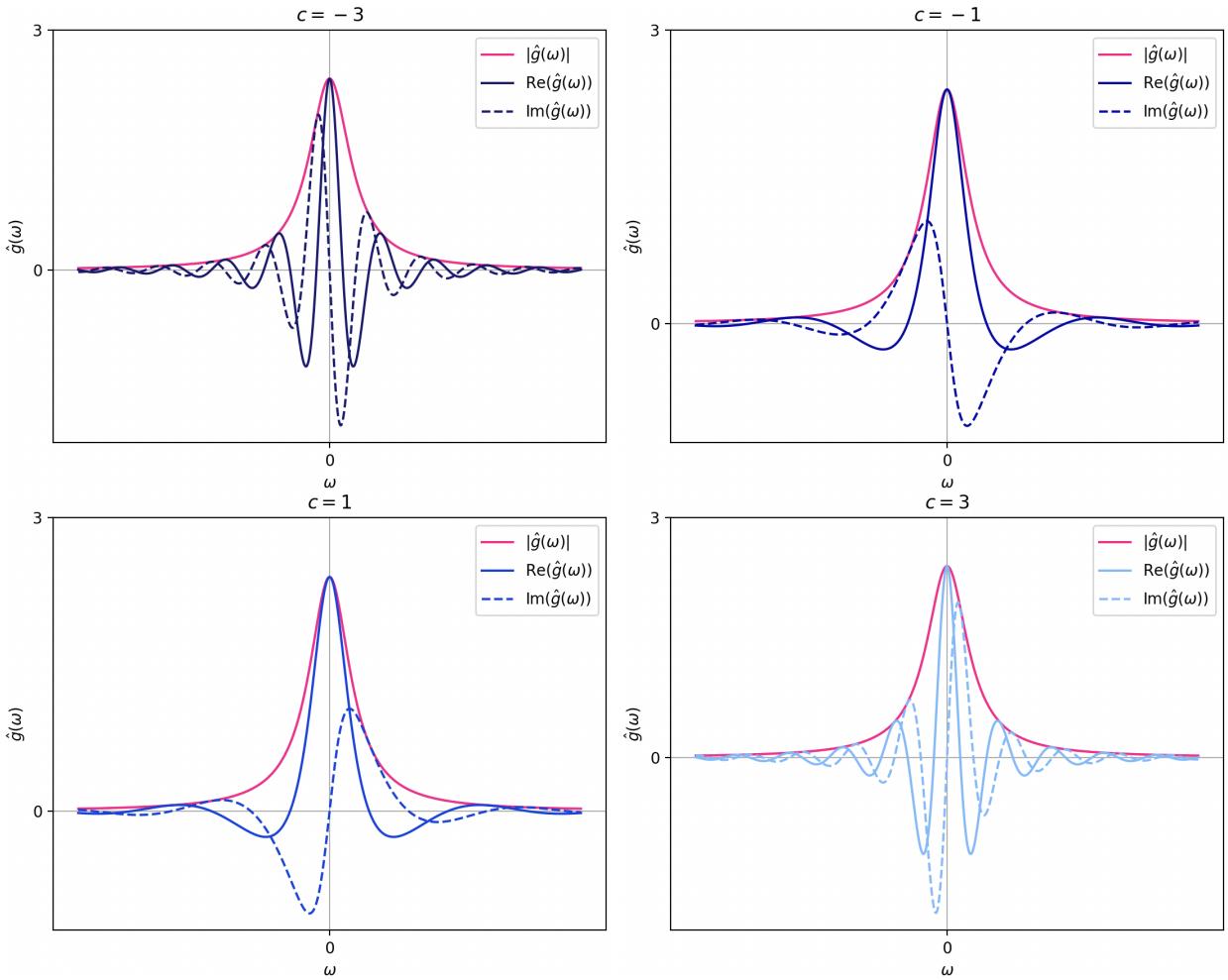


Рис. 12 – Фурье-образы $\hat{g}(\omega)$ заданной функции для различных c .

Заметим, что трехмерный график Фурье-образа как бы “закручивается” – по сути, в соответствии со сдвигом графика заданной функции происходит сжатие/растяжение графика ее Фурье-образа относительно нулевого положения, то есть при $c = 0$ – при нулевом сдвиге. Исследуем разложение Фурье-образа $\hat{g}(\omega)$ на вещественную и мнимую часть – построим их графики, а также график модуля образа для различных значений c :



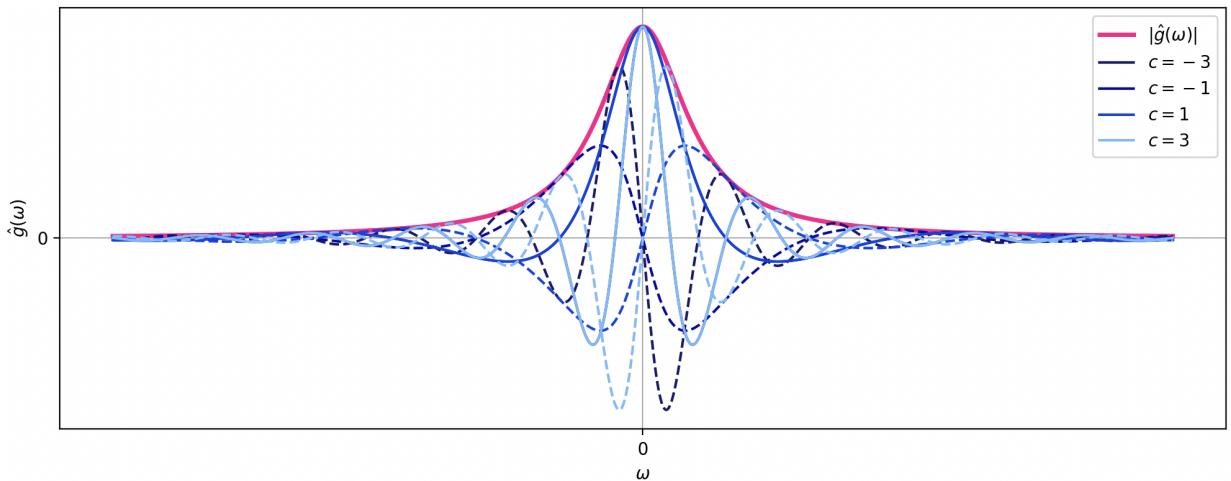


Рис. 13 – Графики $\operatorname{Re}(\hat{f}(\omega))$, $\operatorname{Im}(\hat{f}(\omega))$ и $|\hat{f}(\omega)|$ заданной функции для различных c и сравнительный график.

Как уже было сказано ранее, если взять графики функции $g(t)$ и ее Фурье-образа $\hat{g}(\omega)$ при нулевом сдвиге, то есть при $c = 0$, за эталонные, то при сдвиге функции график Фурье-образа начнет закручиваться в ту или иную сторону (**Рис. 12**). При исследовании для каждого значения c графиков вещественной и мнимой части Фурье-образа, а также его модуля, было получено следующее: чем сдвиг больше, тем больше сжат образ, чем сдвиг меньше, тем образ более растянут. Полученные результаты можно считать верными, поскольку при нулевом сдвиге, то есть при $g(t) \equiv f(t)$, график Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$ будет совпадать с графиком вещественной части Фурье-образа $\hat{g}(\omega)$, в то время как его мнимая часть будет нулевой. Такая ситуация приведена на **Рис. 10**.

Задание 3. Музыкальное

В качестве исследуемого аккорда возьмем **аккорд 24**.

Построим график зависимости амплитуды колебаний звука в аккорде от времени для правого канала:

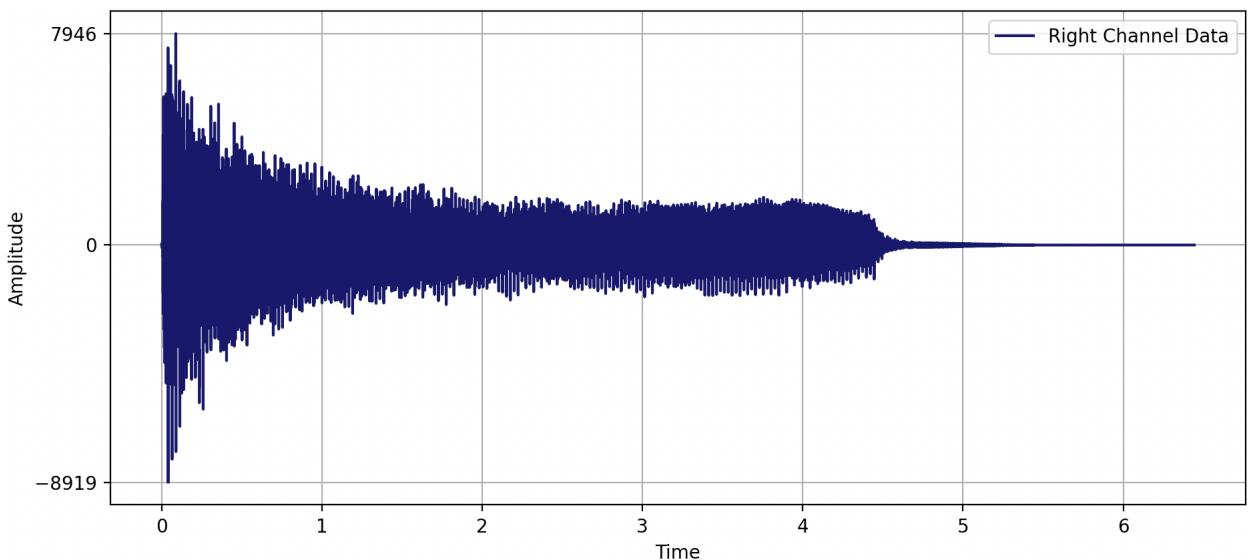


Рис. 14 – График зависимости амплитуды колебаний звука от времени, соответствующий заданному аккорду.

Численно получим Фурье-образ $\hat{f}(\nu)$ с помощью унитарного преобразования к частоте ν и построим график его модуля от частоты, то есть график функции $|\hat{f}(\nu)|$:

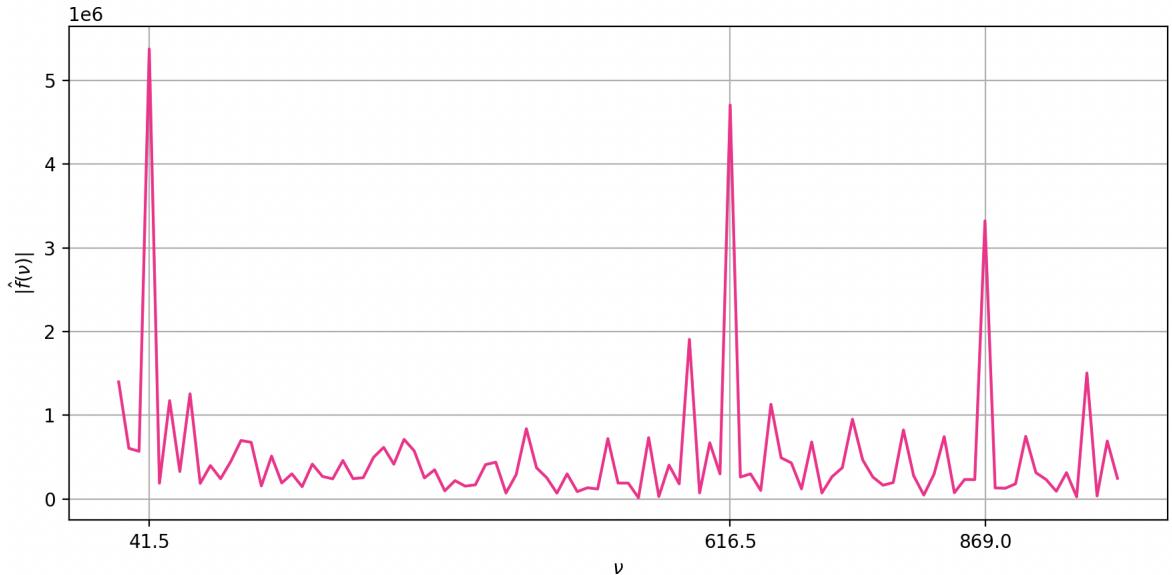


Рис. 15 – График модуля Фурье-образа амплитуды $|\hat{f}(\nu)|$ с отмеченными пиками частот.

Для полноты картины приведем листинг кода для построения модуля упомянутого Фурье-образа с учетом оптимизации процесса – были “обрезаны” некоторые данные, не представляющие интереса.

Листинг 3. Построение оптимальной части Фурье-образа амплитуды звукового сигнала.

```

1 samplerate, data = sp.io.wavfile.read('accord.wav')
2 time = np.linspace(0, data.shape[0] / samplerate, data.shape[0])
3 data = data[:, 1] # right channel
4 time = time[:int(len(time) / 2)]
5 data = data[:int(len(data) / 2)]
6 integrand = lambda t, nu: abs(data[t]) * np.exp(2 * np.pi * complex
    (0, -1) * time[t] * nu)
7 N = 100
8 freq = np.linspace(1, 1000, N)
9 fourier = np.array([])
10 for i in range(1, len(freq)):
11     value = 0
12     for t in range(len(data)):
13         value += integrand(t, freq[i])
14     fourier_1 = np.append(fourier, abs(value))

```

Проанализируем полученный график модуля Фурье-образа: по горизонтальной оси отложена частота звукового сигнала в Гц, наиболее выделяющиеся пики отмечены линиями сетки. Приведем некоторое соответствие выделенных частот и буквенного обозначения соответствующих нот по Гельмгольцу в соответствии со списком октав:

$$\begin{aligned} \sim 41.5 \text{ Гц} &\Leftrightarrow E_1 \text{ (нота ми контроктавы);} \\ \sim 616.5 \text{ Гц} &\Leftrightarrow d^2 \text{ (нота ре второй октавы);} \\ \sim 869 \text{ Гц} &\Leftrightarrow a^2 \text{ (нота ля второй октавы);} \end{aligned}$$

В случае нот второй октавы взяты наиболее близкие по значению табличных частот ноты – вследствие погрешностей численного интегрирования может происходить сдвиг на графике Фурье-образа.