



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

ОТЧЕТ
по лабораторной работе №1

Ряды Фурье

Автор: Дженжеруха Кирилл

Учебная группа: Р3242

Номер ИСУ: 368103

Преподаватель: Перегудин Алексей Алексеевич

Санкт-Петербург
2024

Содержание

Задание 1	3
Задание 2	13
Выводы	16
Приложения	17

Эта лабораторная работа посвящена введению в ряды Фурье и разложению в них различных функций, как вещественных, так и комплексных.

Задание 1

Выберем числа a, b, t_0, t_1, t_2 , соответствующие условию задания:

$$a = \pi, \quad b = 1, \quad t_0 = 1, \quad t_1 = 3, \quad t_2 = 7.$$

Рассмотрим различные функции $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- (1) Квадратная волна.** Зададим периодическую функцию с периодом $T = t_2 - t_0$ такую, что

$$f(t) = \begin{cases} a, & t \in [t_0, t_1), \\ b, & t \in [t_1, t_2); \end{cases} = \begin{cases} \pi, & t \in [1, 3), \\ 1, & t \in [3, 7). \end{cases}$$

Построим график заданной функции:

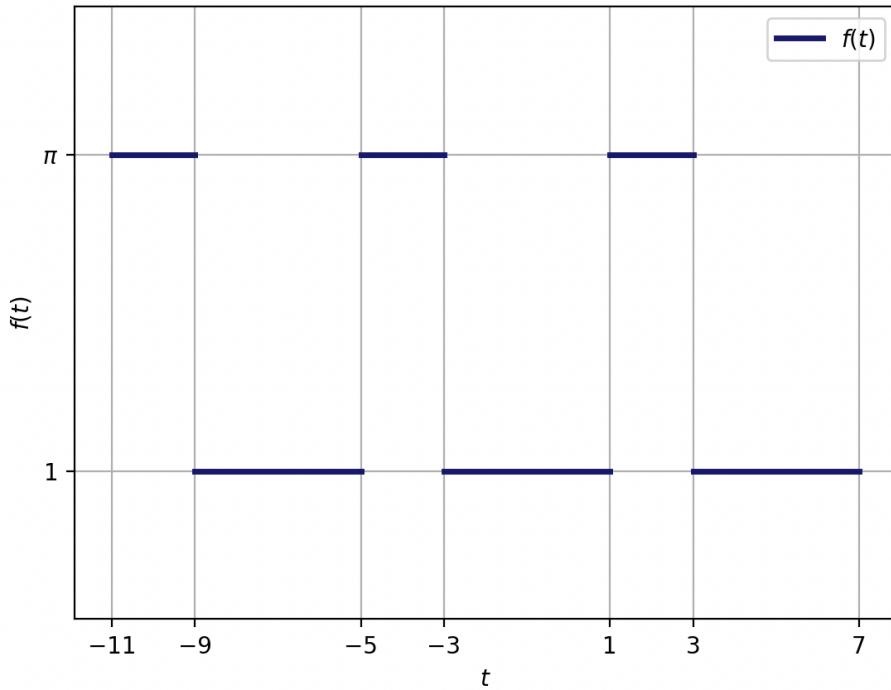


Рис. 1 – График квадратной волны.

Далее необходимо рассмотреть частичные суммы Фурье двух видов:

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)), \quad G_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\omega_n t}; \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T}.$$

Для вычисления коэффициентов a_n и b_n воспользуемся следующими общими формулами:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_h^{h+T} f \cdot \cos(\omega_n t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_h^{h+T} f \cdot \sin(\omega_n t) dt.$$

Запишем общие формулы для вычисления этих коэффициентов применимо к заданной функции ($T = 6$):

$$n = 0 : a_0 = \frac{2}{6} \left(\int_1^3 \pi \cdot \cos(\omega_n t) dt + \int_3^7 1 \cdot \cos(\omega_n t) dt \right) = \frac{2\pi + 4}{3} \Rightarrow \frac{a_0}{2} = \boxed{\frac{2 + \pi}{3}};$$

$$\begin{aligned} n \geq 1 : a_n &= \frac{2}{6} \left(\int_1^3 \pi \cdot \cos(\omega_n t) dt + \int_3^7 1 \cdot \cos(\omega_n t) dt \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(\pi \int_1^3 \cos\left(\frac{\pi n t}{3}\right) dt + \int_3^7 \cos\left(\frac{\pi n t}{3}\right) dt \right) = \\ &= \frac{1}{\pi n} \left(\pi \int_1^3 \cos\left(\frac{\pi n t}{3}\right) d\left(\frac{\pi n t}{3}\right) + \int_3^7 \cos\left(\frac{\pi n t}{3}\right) d\left(\frac{\pi n t}{3}\right) \right) = \\ &= \frac{1}{\pi n} \left(\pi \cdot \sin\left(\frac{\pi n t}{3}\right) \Big|_1^3 + \sin\left(\frac{\pi n t}{3}\right) \Big|_3^7 \right) = \\ &= \boxed{\frac{1}{\pi n} \left(\pi \cdot \sin(\pi n) - \pi \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \sin\left(\frac{7\pi n}{3}\right) - \sin(\pi n) \right)}; \\ b_n &= \frac{2}{6} \left(\int_1^3 \pi \cdot \sin(\omega_n t) dt + \int_3^7 1 \cdot \sin(\omega_n t) dt \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(\pi \int_1^3 \sin\left(\frac{\pi n t}{3}\right) dt + \int_3^7 \sin\left(\frac{\pi n t}{3}\right) dt \right) = \\ &= \frac{1}{\pi n} \left(\pi \int_1^3 \sin\left(\frac{\pi n t}{3}\right) d\left(\frac{\pi n t}{3}\right) + \int_3^7 \sin\left(\frac{\pi n t}{3}\right) d\left(\frac{\pi n t}{3}\right) \right) = \\ &= -\frac{1}{\pi n} \left(\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi n t}{3}\right) \Big|_1^3 + \cos\left(\frac{\pi n t}{3}\right) \Big|_3^7 \right) = \\ &= \boxed{-\frac{1}{\pi n} \left(\pi \cdot \cos(\pi n) - \pi \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \cos\left(\frac{7\pi n}{3}\right) - \cos(\pi n) \right)}. \end{aligned}$$

Приведем значения для коэффициентов при $n = \{0, 1, 2\}$, вычисленных вручную:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2\pi + 4}{3}; \\ a_1 &= -\frac{\sqrt{3}(\pi - 1)}{2\pi}, \quad b_1 = \frac{3(\pi - 1)}{2\pi}; \\ a_2 &= -\frac{\sqrt{3}(\pi - 1)}{4\pi}, \quad b_2 = -\frac{3(\pi - 1)}{4\pi}. \end{aligned}$$

Воспользуемся кодом из **Листинга 1**, чтобы вычислить коэффициенты ряда Фурье в вещественной форме для заданного N . Заметим, что при $N = 3$ коэффициенты не будут отличаться от приведенных выше, поскольку $a_3 = b_3 = 0$.

Приведем частичную сумму $F_N(t)$ для $N = 4$:

$$F_4(t) = \frac{2\pi + 4}{6} - \frac{\sqrt{3}(\pi - 1)}{2\pi} \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) + \frac{3(\pi - 1)}{2\pi} \sin\left(\frac{\pi t}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}(\pi - 1)}{4\pi} \cos\left(\frac{2\pi t}{3}\right) -$$

$$-\frac{3(\pi-1)}{4\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}(\pi-1)}{8\pi} \cos\left(\frac{4\pi t}{3}\right) - \frac{3(\pi-1)}{8\pi} \sin\left(\frac{4\pi t}{3}\right).$$

Теперь воспользуемся формулой для вычисления коэффициентов Фурье в комплексной форме:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_h^{h+T} f \cdot e^{-i\omega_n t} dt; \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T}.$$

В соответствии с полученной формулой запишем аналитическое выражение для коэффициентов c_n :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{6} \left(\int_1^3 \pi e^{-i\omega_n t} dt + \int_3^7 e^{-i\omega_n t} dt \right) = \\ &= \frac{1}{6} \left(-\frac{3}{in} \int_1^3 e^{-i\omega_n t} d(-i\omega_n t) - \frac{3}{i\pi n} \int_3^7 e^{-i\omega_n t} d(-i\omega_n t) \right) = \\ &= \frac{1}{6} \left(-\frac{3}{in} e^{-i\omega_n t} \Big|_1^3 - \frac{3}{i\pi n} e^{-i\omega_n t} \Big|_3^7 \right) = \frac{1}{6} \left(-\frac{3}{in} (e^{-3i\omega_n} - e^{-i\omega_n}) - \frac{3}{i\pi n} (e^{-7i\omega_n} - e^{-3i\omega_n}) \right) = \\ &= \boxed{\frac{i}{2n} \left(-\sqrt[3]{e^{-i\pi n}} + e^{-i\pi n} - \frac{e^{-i\pi n}}{\pi} + \frac{\sqrt[3]{e^{-7i\pi n}}}{\pi} \right)}. \end{aligned}$$

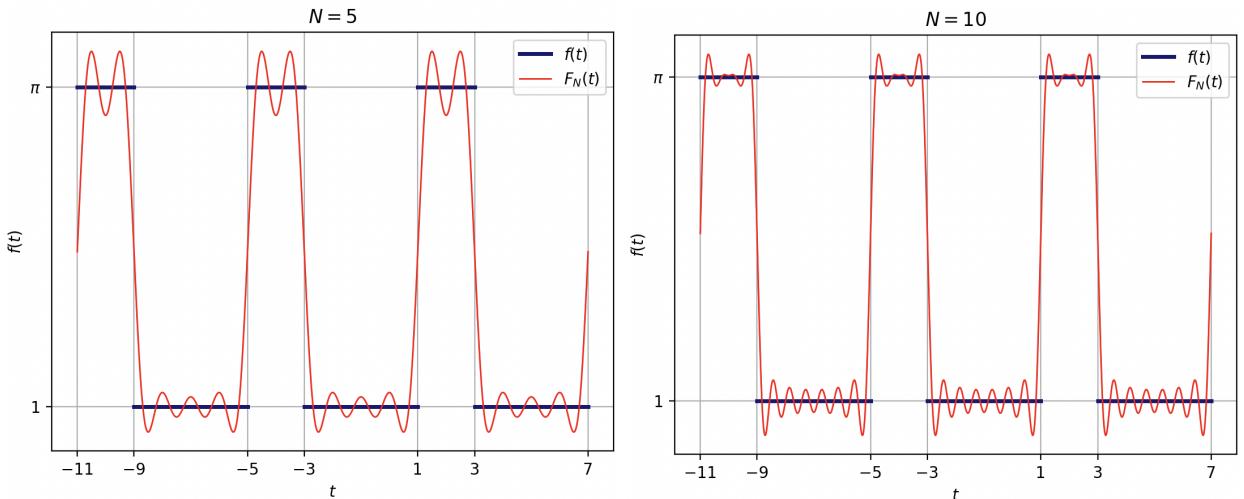
Приведем значения для коэффициентов при $n = \{0, 1, 2\}$, вычисленных вручную:

$$c_0 = \frac{2+\pi}{3}, \quad c_1 = -\frac{(\sqrt{3}+3i)(\pi-1)}{4\pi}, \quad c_2 = -\frac{(\sqrt{3}-3i)(\pi-1)}{8\pi}.$$

Аналогично вещественному случаю, воспользуемся кодом из **Листинга 2** для вычисления коэффициентов комплексного ряда Фурье при заданном N и приведем выражение для частичной суммы $G_N(t)$ при $N = 4$:

$$\begin{aligned} G_4(t) &= \frac{(\sqrt{3}-3i)(\pi-1)}{16\pi} \sqrt[3]{e^{-4i\pi t}} + \frac{(\sqrt{3}+3i)(\pi-1)}{16\pi} \sqrt[3]{e^{4i\pi t}} - \frac{(\sqrt{3}-3i)(\pi-1)}{8\pi} \sqrt[3]{e^{-2i\pi t}} - \\ &- \frac{(\sqrt{3}+3i)(\pi-1)}{8\pi} \sqrt[3]{e^{2i\pi t}} - \frac{(\sqrt{3}+3i)(\pi-1)}{4\pi} \sqrt[3]{e^{-i\pi t}} - \frac{(\sqrt{3}-3i)(\pi-1)}{4\pi} \sqrt[3]{e^{i\pi t}} + \frac{2+\pi}{3}. \end{aligned}$$

Построим графики частичных сумм для различных значений N , заметив, что они будут идентичны при одних и тех же N для вещественной и комплексной форм:



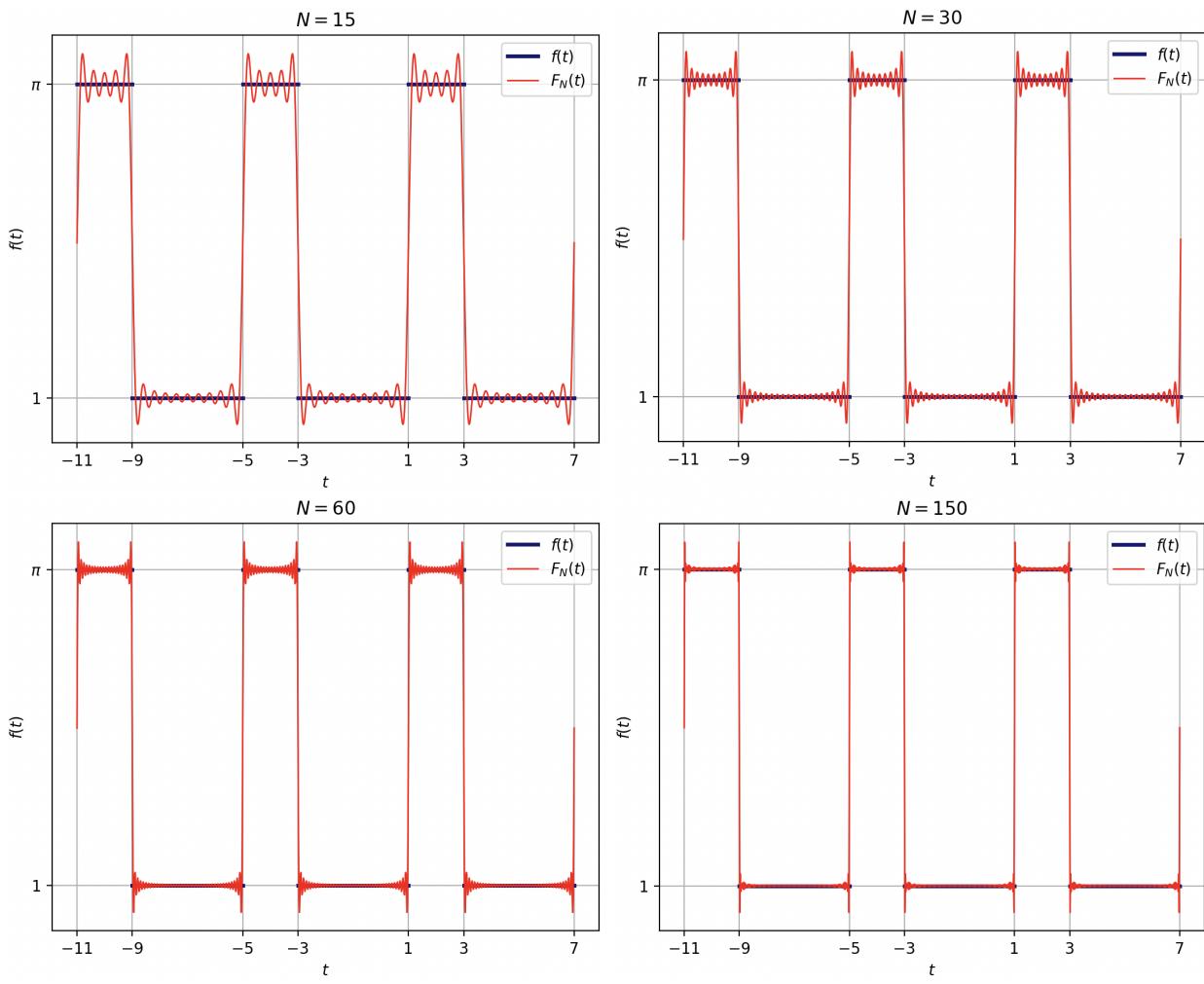


Рис. 2 – Графики частичных сумм $F_N(t)$ и $G_N(t)$ для квадратной волны (синим цветом обозначен график функции, красным – график ее приближения рядом Фурье).

Последним шагом необходимо проверить равенство Парсеваля (аналог векторной теоремы Пифагора, используемый для представления функции в ортонормированном базисе функционального пространства) для всех коэффициентов:

$$\|f\|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{c}_n|^2,$$

где $|\hat{c}_n|$ – модули нормированных комплексных коэффициентов. Для квадратной волны коэффициенты вычислены аналитически, следовательно, можно написать равенство Парсеваля в явном виде, подставив в него полученные ранее формулы коэффициентов:

$$\begin{aligned} \frac{2}{T} \left(\int_1^3 \pi^2 dt + \int_3^7 1^2 dt \right) &= \frac{(2\pi+4)^2}{3^2 \cdot 2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi n} \left(-\pi \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \sin\left(\frac{7\pi n}{3}\right) \right) \right)^2 + \\ &+ \left(-\frac{1}{\pi n} \left(\pi \cdot (-1)^n - \pi \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \cos\left(\frac{7\pi n}{3}\right) - (-1)^n \right) \right)^2; \\ \frac{2}{T} \left(\int_1^3 \pi^2 dt + \int_3^7 1^2 dt \right) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{i}{2n} \left(-\sqrt[3]{e^{-i\pi n}} + e^{-i\pi n} - \frac{e^{-i\pi n}}{\pi} + \frac{\sqrt[3]{e^{-7i\pi n}}}{\pi} \right) \right|^2. \end{aligned}$$

Проверяя эти равенства с помощью калькулятора и/или функций из **Листинга 6** или **Листинга 7** (для вещественных и комплексных коэффициентов соответственно), получаем,

что равенства выполняются. Если быть точнее, при численном решении разность между значением квадрата нормы и значением частичной суммы составляет порядка 10^{-15} .

В дальнейшем будут использоваться лишь программы из указанных Листингов, т.к. численное решение в данном случае быстрее и достаточно хорошо показывает выполнение равенства Парсеваля.

- (2) **Четная функция.** Необходимо задать четную периодическую функцию. Зададим функцию с периодом $[0, 2\pi]$ в полярных координатах следующим образом:

$$r(\varphi) = -2 \sin^2(3\varphi) + 4 \cos(2\varphi) \cos^2(7\varphi).$$

График этой функции будет выглядеть так:

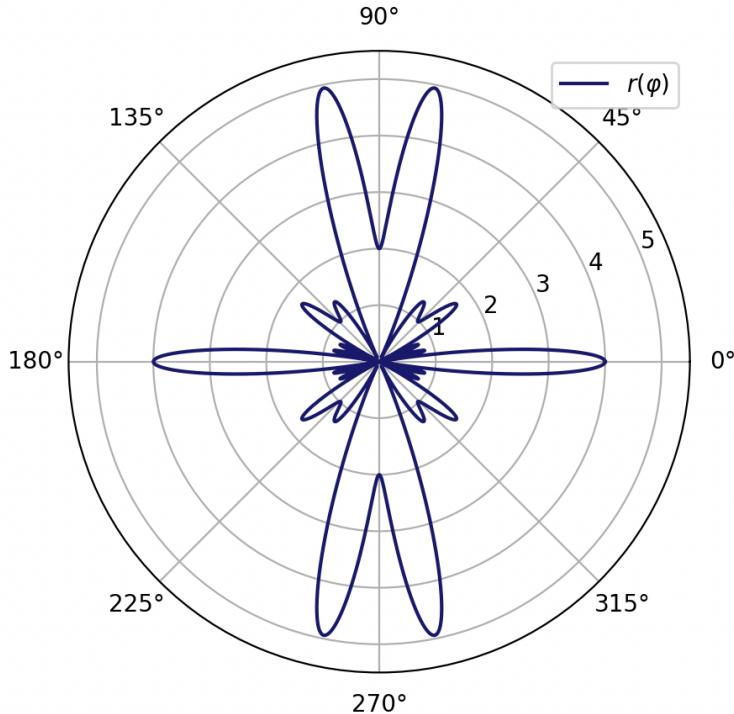


Рис. 3 – График заданной четной функции.

Необходимо разложить заданную функцию в ряд Фурье. Заметим, что вследствие четности для данной функции общий ряд Фурье будет эквивалентен ряду Фурье по косинусам, поскольку все коэффициенты Фурье перед слагаемыми, содержащими синус, будут равны нулю. Коэффициенты перед слагаемыми, содержащими косинусы, и коэффициенты для комплексной формы ряда Фурье можно найти по следующим формулам:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} r(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} r(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi.$$

Воспользуемся кодом из **Листинга 3**, чтобы вычислить коэффициенты a_n (для вещественной формы ряда Фурье), и из **Листинга 4** для вычисления c_n (для комплексной формы).

В вещественном случае при $N = 3$ ненулевыми являются только коэффициенты a_0 и a_2 , а в комплексном – коэффициенты c_0 и c_2 . Приведем частичные суммы рядов Фурье в вещественной и комплексной формах для $N = 3$:

$$F_3(\varphi) = -1 + 2 \cos(2\varphi), \quad G_3(\varphi) = -1 + e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}.$$

Построим графики для различных значений N (они, аналогично предыдущему пункту, совпадают для вещественной и комплексной форм ряда Фурье при соответствующих N):

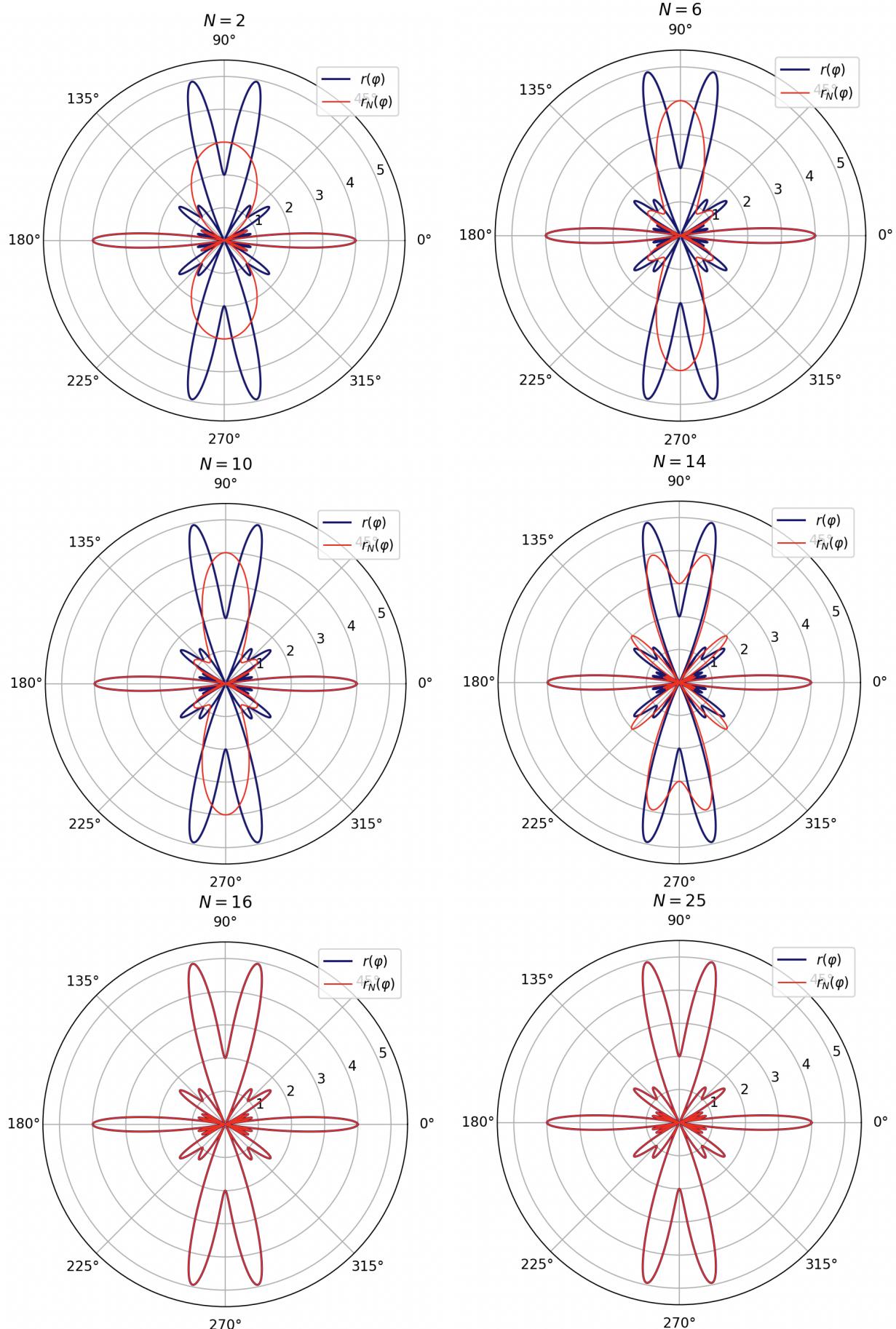


Рис. 4 – Графики частичных сумм $F_N(t)$ и $G_N(t)$ для заданной четной функции (синим цветом обозначен график функции, красным – график ее приближения рядом Фурье).

Проверка равенства Парсеваля с использованием **Листинга 6** и **Листинга 7** показывает, что при выборе $N = 50$ (по графикам можно понять, что при $N \geq 25$ частичная сумма ряда Фурье уже хорошо приближает заданную функцию) значение заданной разности очень близко к нулю, что доказывает выполнение равенства.

- (3) **Нечетная функция.** В этом пункте необходимо задать нечетную периодическую функцию. Зададим ее также в полярных координатах, зная ее период – $[0, 2\pi]$:

$$r(\varphi) = \sin^5(18 \sin(\varphi)) + \sin(\varphi) - 5 \sin^3(2\varphi) + \sin(\sin(\varphi)).$$

Первое, что нужно сделать – построить график:

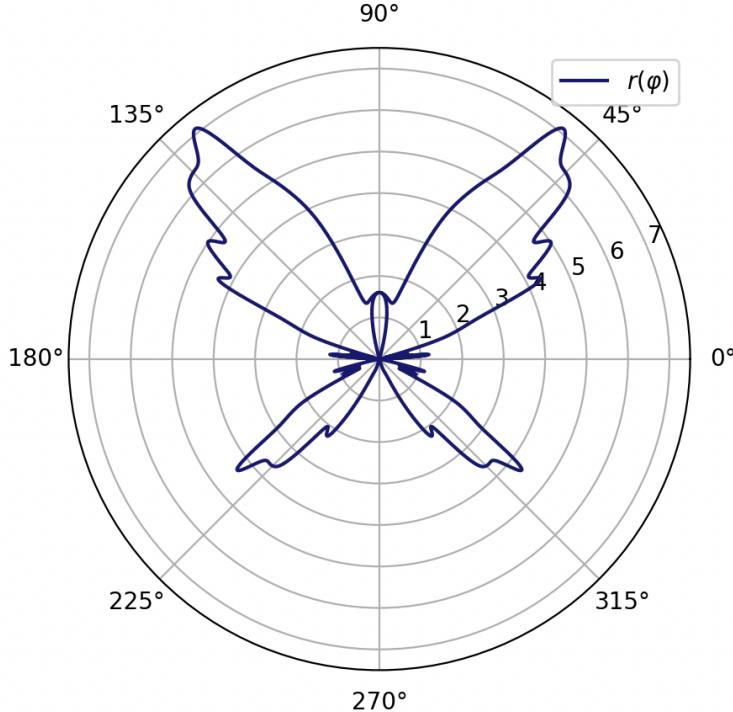


Рис. 5 – График заданной нечетной функции.

Необходимо аналогично предыдущим пунктам разложить ее в ряд Фурье. В силу нечетности этой функции коэффициенты ряда Фурье в вещественной форме при косинусах будут равны нулю, а коэффициенты перед синусами и коэффициенты для комплексной формы ряда Фурье будут вычисляться следующим образом:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} r(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} r(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi.$$

Также воспользуемся кодами из **Листинга 3** и **Листинга 4**, чтобы вычислить коэффициенты b_n и c_n соответственно, и приведем здесь выражения для частичных сумм $F_N(\varphi)$ и $G_N(\varphi)$ при $N = 3$:

$$F_3(\varphi) \approx 1.64258 \sin(\varphi) - 3.75 \sin(2\varphi) + 0.26945 \sin(3\varphi),$$

$$G_3(\varphi) \approx 0.134726ie^{-3i\varphi} - 0.134726ie^{3i\varphi} - 1.875ie^{-2i\varphi} + 1.875ie^{2i\varphi} + 0.82129ie^{-i\varphi} - 0.82129ie^{i\varphi}.$$

Построим графики для различных значений N (они, аналогично предыдущему пункту, совпадают для вещественной и комплексной форм ряда Фурье при соответствующих N):

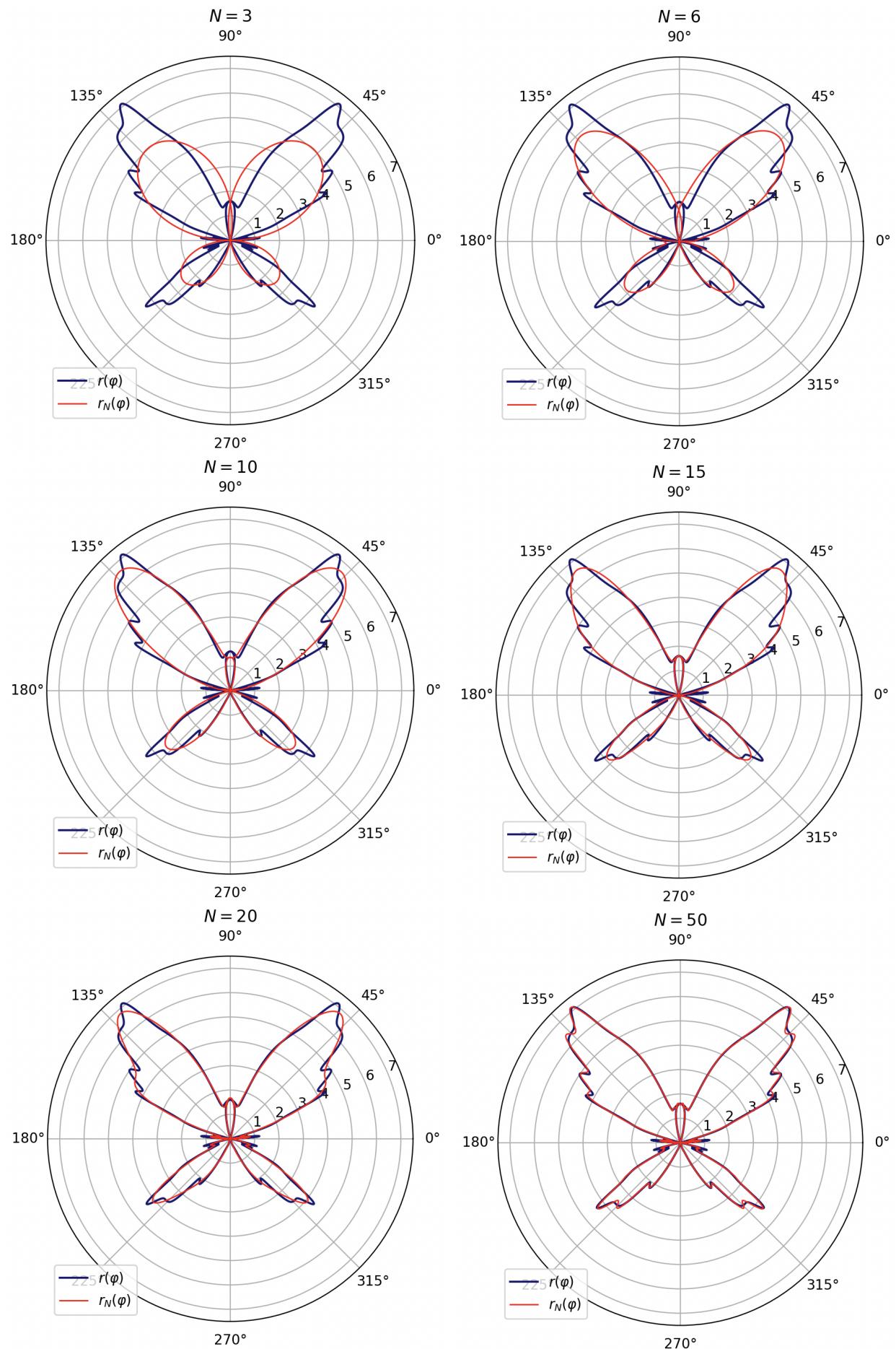


Рис. 6 – Графики частичных сумм $F_N(t)$ и $G_N(t)$ для заданной нечетной функции (синим цветом обозначен график функции, красным – график ее приближения рядом Фурье).

Аналогично предыдущим пунктам, при проверке равенства Парсеваля с помощью функций из **Листинга 6** и **Листинга 7** численно было получено подтверждение выполнения равенства – при выбранном $N = 100$ значение разности квадрата нормы заданной функции и частичных сумм, используемых в равенстве, также было достаточно близким к нулю.

- (4) **Ни четная, ни нечетная функция.** Здесь необходимо задать такую периодическую функцию, которая не будет ни четной, ни нечетной. Сделаем это для функции с периодом $[0, 2\pi]$ также в полярных координатах:

$$r(\varphi) = \frac{1}{2} + 6 \sin(4\varphi) + \sin^2(4\varphi) + 3 \sin^4(4\varphi).$$

График заданной таким образом функции будет выглядеть так:

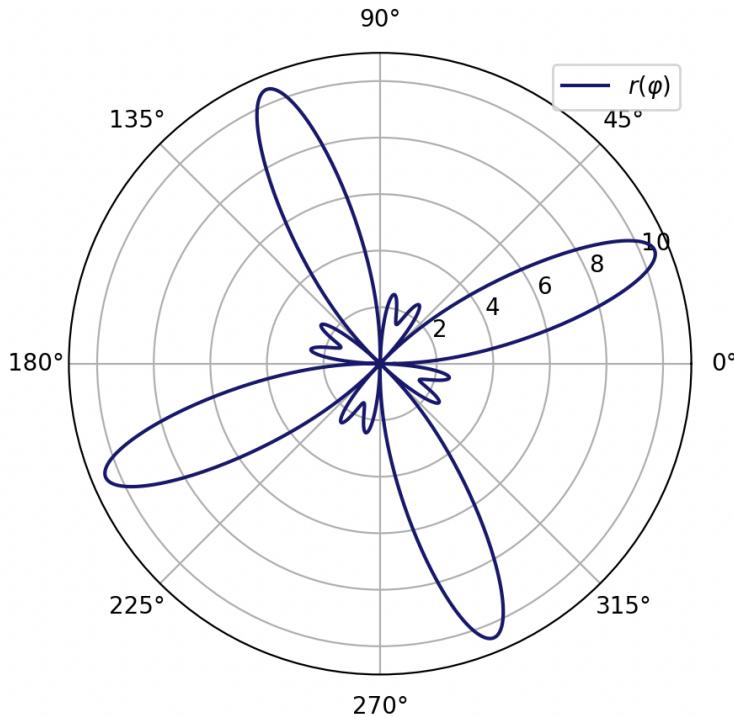


Рис. 7 – График заданной функции, которая не является ни четной, ни нечетной.

Так как функция не является ни четной, ни нечетной, ее ряд в вещественном случае строится и по синусам, и по косинусам (в комплексном – стандартным образом). Формулы, используемые для нахождения коэффициентов, имеют уже привычный вид:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} r(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} r(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} r(\varphi) e^{-in\varphi} d\varphi.$$

Воспользуемся **Листингом 3** и **Листингом 4** для вычисления коэффициентов (a_n, b_n) и c_n и построим частичные суммы $F_N(\varphi)$ и $G_N(\varphi)$ привычным образом (но в этот раз приведем коэффициенты для $N = 4$, поскольку при $N = 3$ функция не приближается, что подтверждается близкими к нулю коэффициентами):

$$F_4(\varphi) \approx 2.125 + 6 \sin(4\varphi), \quad G_4(\varphi) \approx 3ie^{-4i\varphi} - 3ie^{4i\varphi} + 2.125.$$

Построим графики, иллюстрирующие приближение заданной функции рядом Фурье в вещественном и комплексном случаях для разных значений N . Напомним, что графики идентичны для частичных сумм $F_N(\varphi)$ и $G_N(\varphi)$.

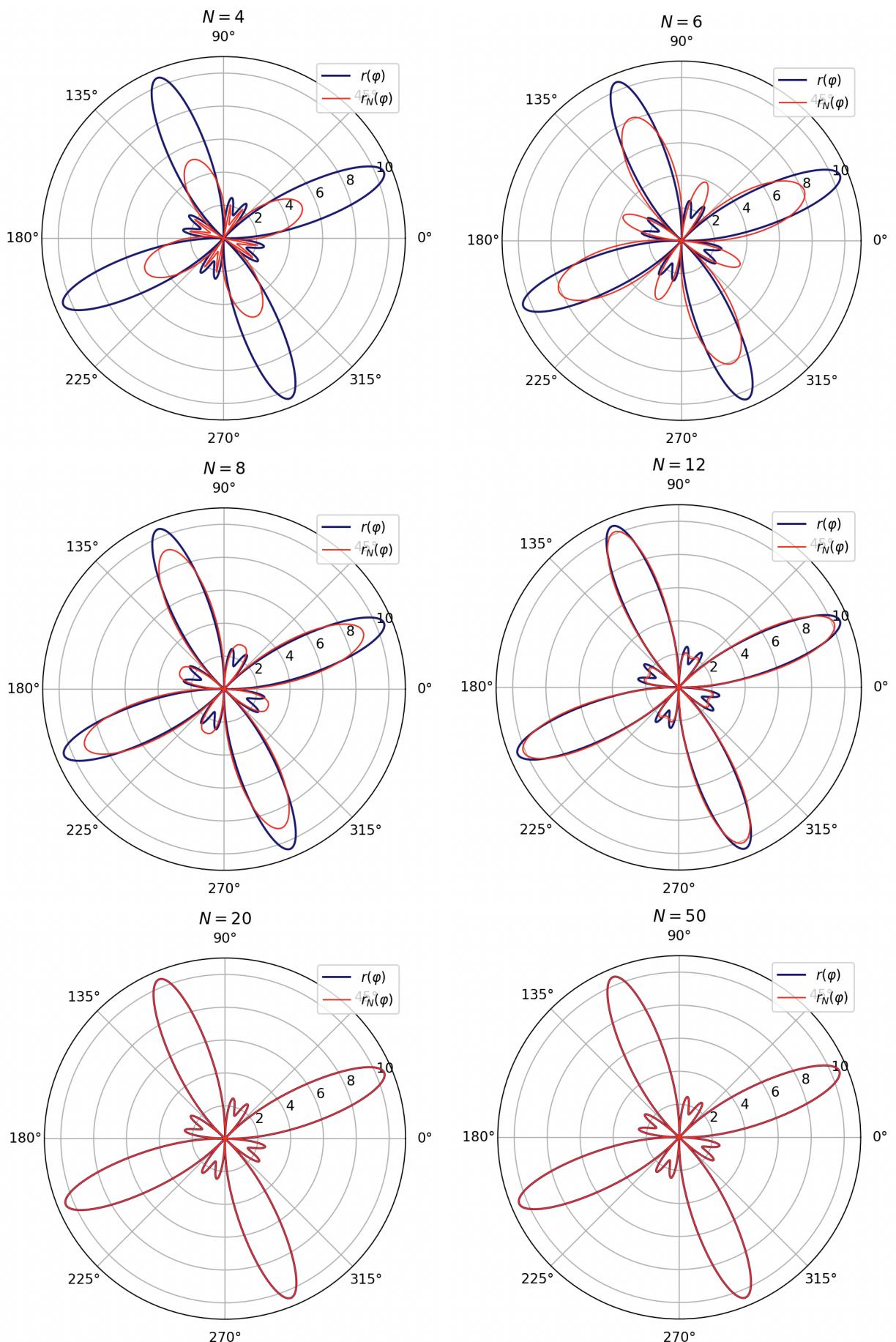


Рис. 8 – Графики частичных сумм $F_N(t)$ и $G_N(t)$ для заданной нечетной функции (синим цветом обозначен график функции, красным – график ее приближения рядом Фурье).

Здесь все выполняется по аналогии с предыдущими выкладками – равенство Парсеваля верно при $N = 100$ при численном решении задачи.

Стоит отметить, что выполнение равенства Парсеваля, по сути, является хорошим способом проверки правильности вычисления коэффициентов Фурье, поскольку сходимость ряда Фурье к заданной функции равносильна близости к нулю разности квадрата нормы функции и суммы квадратов коэффициентов (или сумма квадратов модулей нормированных коэффициентов в комплексном случае).

Задание 2

В этом задании необходимо задать комплекснозначную функцию $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ в соответствии с заданием. Приняв $R = 1$, $T = 8$, получим следующее:

$$\operatorname{Re} f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1, 1), \\ 2 - t, & t \in [1, 3), \\ -1, & t \in [3, 5), \\ -6 + t, & t \in [5, 7); \end{cases} \quad \operatorname{Im} f(t) = \begin{cases} t, & t \in [-1, 1), \\ 1, & t \in [1, 3), \\ 4 - t, & t \in [3, 5), \\ -1, & t \in [5, 7). \end{cases}$$

Параметрическая кривая, соответствующая этой функции, на комплексной плоскости будет выглядеть следующим образом:

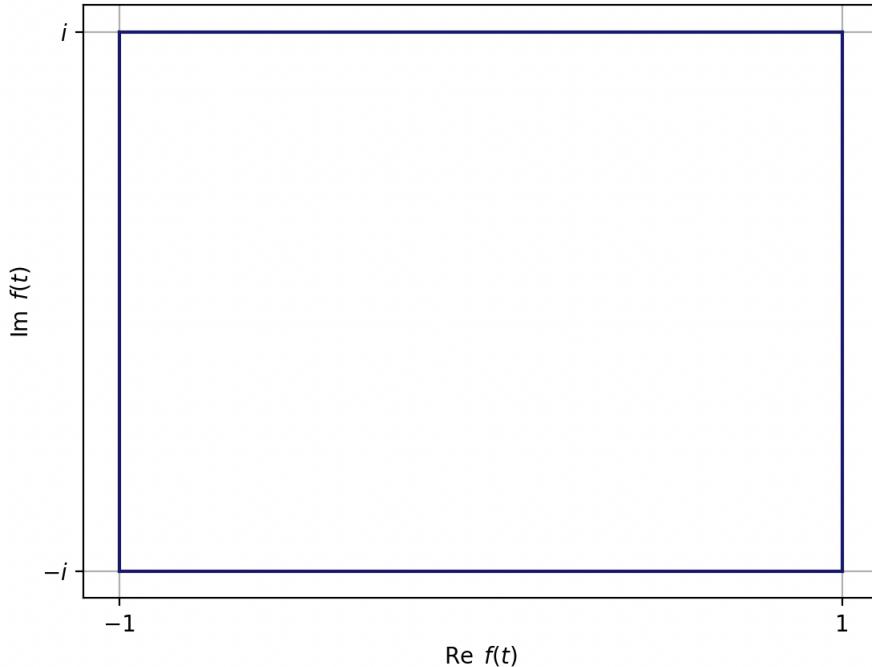


Рис. 9 – Параметрический график комплекснозначной функции на комплексной плоскости.

Обратим внимание на тот факт, что можно построить биективное отображение $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$, так как комплексное число представимо в виде $z = x + yi$, $z \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$ единственным образом. Следовательно, график функции на комплексной плоскости по сути своей должен быть изображен в пространстве \mathbb{R}^3 , поскольку изображению соответствует отображение $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Но удобнее представлять график именно так, как он показан выше – в виде проекции параллельно оси t , на горизонтальной оси откладывая вещественную часть функции, $\operatorname{Re} f(t)$, а на вертикальной – мнимую, $\operatorname{Im} f(t)$.

На самом деле, отображение $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ можно “разложить” на два отображения $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, соответствующие вещественной и мнимой части комплекснозначной функции. Как следствие, можно построить два ряда Фурье, аппроксимирующие функции $\operatorname{Re} f(t)$ и $\operatorname{Im} f(t)$ соответственно. Это связано также и с аддитивностью интеграла по периоду – мы можем представить интеграл, вычисляющий коэффициент, как сумму двух интегралов, для вещественной и мнимой части функции соответственно.

Рассмотрим частичные суммы Фурье вида

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\omega_n t}, \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T}.$$

Для таких частичных сумм необходимо вычисление коэффициентов c_n с использованием следующей формулы:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_n t} dt; \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T}.$$

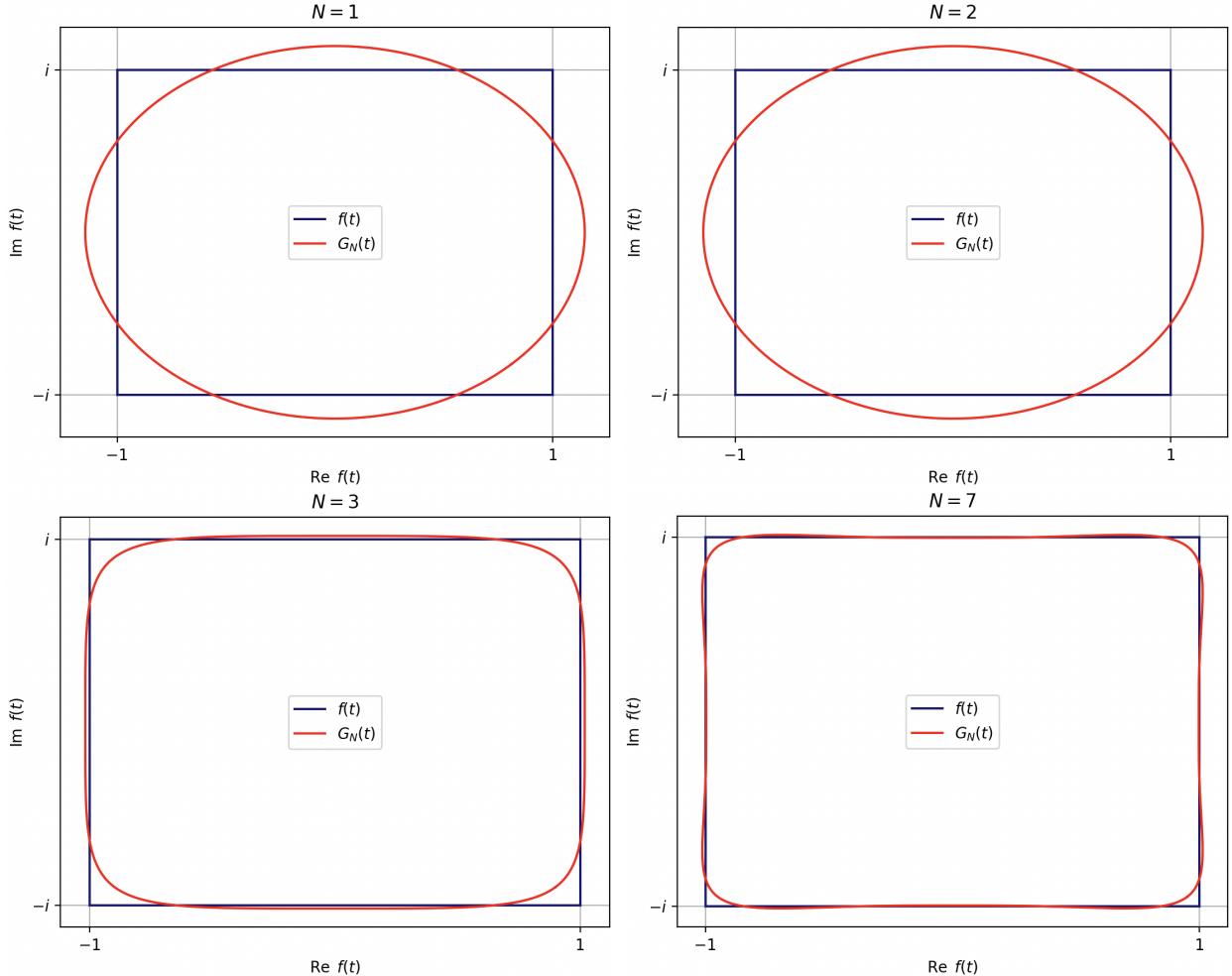
Преобразовывая формулу для коэффициентов, получаем следующее:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{8} \int_{-1}^1 (1+it)e^{-i\omega_n t} dt + \frac{1}{8} \int_1^3 (2-t+i)e^{-i\omega_n t} dt + \frac{1}{8} \int_3^5 (-1+(4-t)i)e^{-i\omega_n t} dt + \\ &+ \frac{1}{8} \int_5^7 (-6+t-i)e^{-i\omega_n t} dt \Rightarrow c_0 = 0, \quad c_1 = \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2} - \frac{4\sqrt{2}}{\pi^2}i, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -\frac{4\sqrt{2}}{9\pi^2} - \frac{4\sqrt{2}}{9\pi^2}i. \end{aligned}$$

Коэффициент c_3 также был вычислен с помощью функции из **Листинга 5** численно:

$$c_3 \approx -0.063684 - 0.063684i.$$

Приведем несколько параметрических графиков, отражающих различие в приближениях функции частичной суммой ряда Фурье для разных значений N :



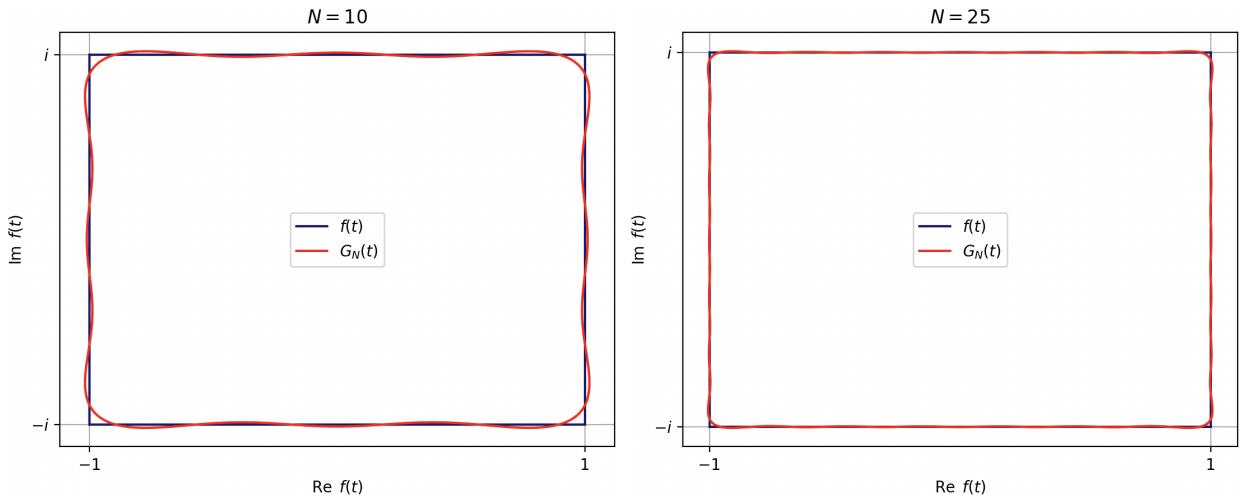
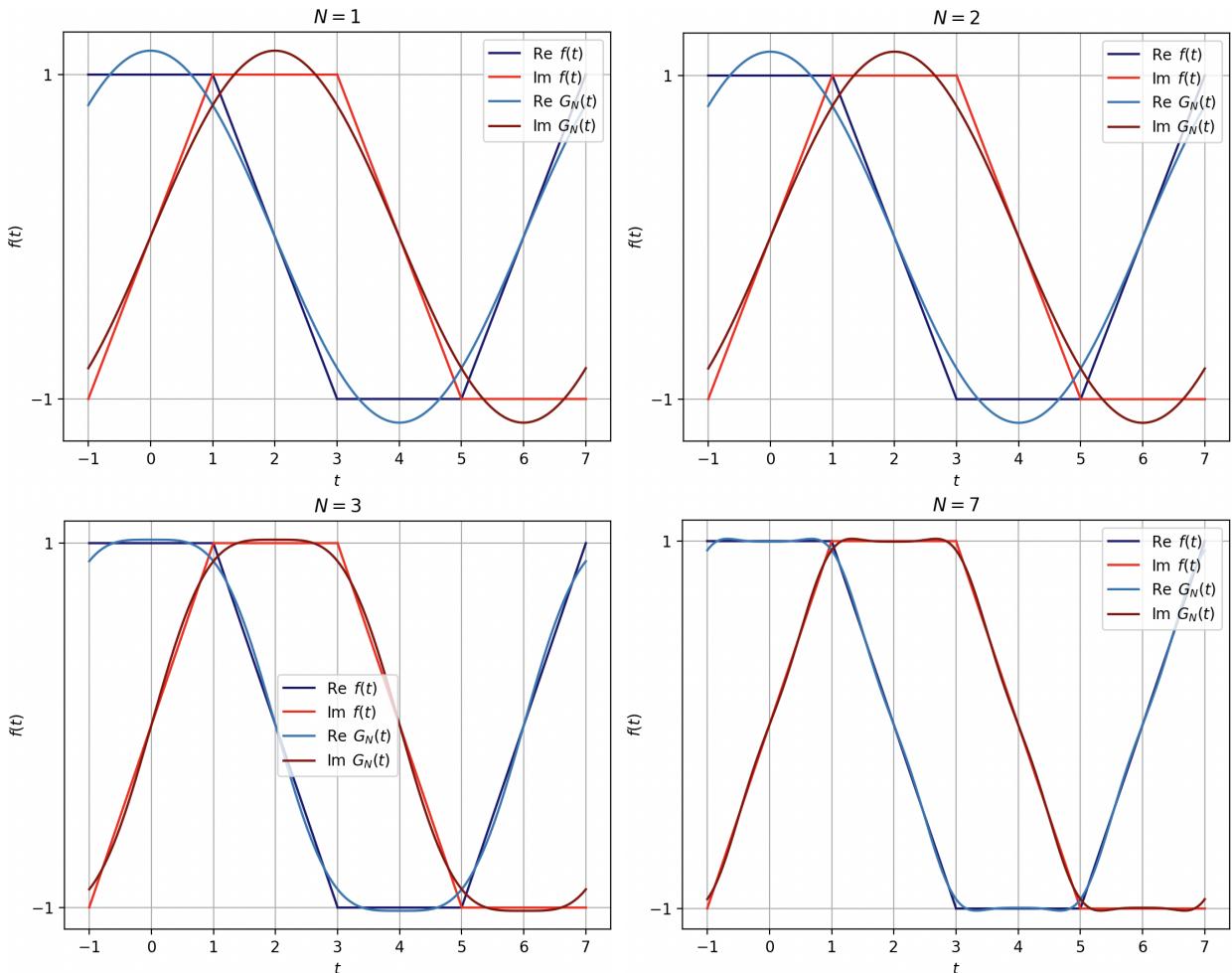


Рис. 10 – Приближение к заданной параметрически комплекснозначной функции частичными суммами Фурье $G_N(t)$ (синим цветом обозначен график функции, красным – график ее приближения рядом Фурье).

Вспомним, что, вообще говоря, параметрический график функции $f(t)$ можно разложить на две компоненты, точнее, на два графика функций $\operatorname{Re} f(t), \operatorname{Im} f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Эти графики соответствуют представлению вещественной и мнимой части заданной функции соответственно (по отдельности). Как было объяснено выше, их так же по отдельности можно аппроксимировать рядом Фурье (а точнее его частичными суммами). Слова о том, что эти взаимосвязи взаимно однозначны, еще раз можно подтвердить с помощью графиков частичных сумм $\operatorname{Re} G_N(t)$ и $\operatorname{Im} G_N(t)$ в сравнении с графиками $\operatorname{Re} f(t)$ и $\operatorname{Im} f(t)$ при разных значениях N . Для удобства возьмем тот же набор значений, что и в вышеприведенных графиках, а для построения воспользуемся тем же **Листингом 5**.



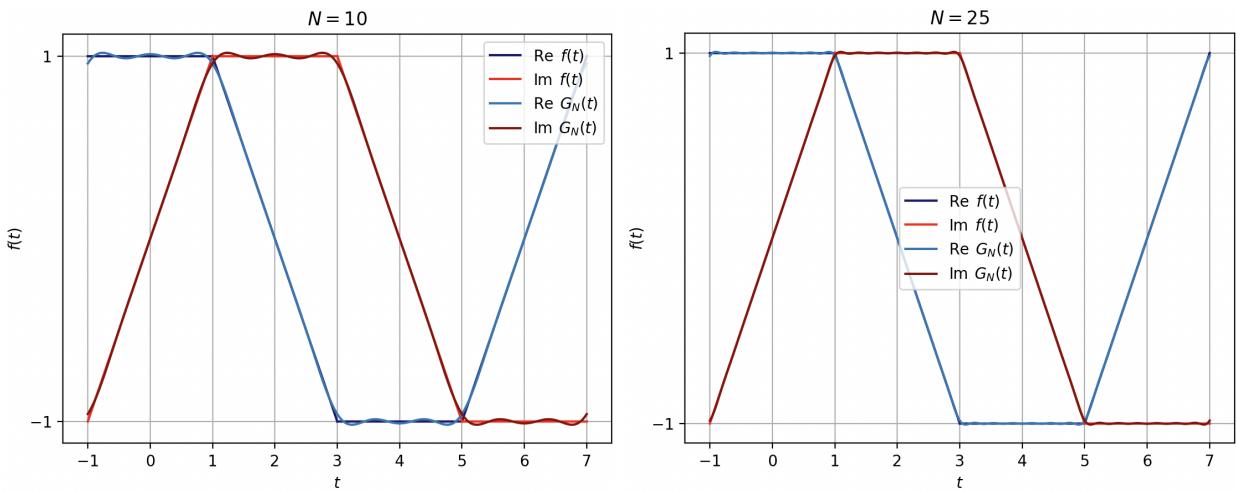


Рис. 11 – Приближение к вещественной и мнимой частям заданной комплекснозначной функции частичными суммами Фурье $\text{Re } G_N(t)$ и $\text{Im } G_N(t)$ (синий цвет – для вещественной части, красный – для мнимой).

Дело осталось за малым – проверить равенство Парсеваля. Радует то, что аппроксимация оказалась успешной, а значит, равенство должно быть выполнено. Воспользовавшись функцией из **Листинга 7**, убеждаемся, что численно получается достаточно малая разность, а значит, правильность коэффициентов подтверждена, так как равенство Парсеваля выполнено.

Выводы

В процессе выполнения данной лабораторной работы было исследование применение рядов Фурье (в частности, частичных сумм Фурье) для аппроксимации функций различного характера: вещественных – квадратной волны, четной, нечетной и произвольно заданной, а также комплекснозначной параметрически заданной функции.

Для вещественнозначных функций были построены графики заданных функций, а также их аппроксимации для различных значений количества слагаемых в частичных суммах Фурье (как в вещественной форме, так и в комплексной). Очевидно (и подтверждено на графиках), что с увеличением этого количества аппроксимация становится лучше, поскольку “цель” ряда Фурье – быть равным аппроксимируемой функции на бесконечности. При этом, стоит заметить, что для разных функций необходимо разное значение N для того, чтобы график частичной суммы Фурье N -го порядка был достаточно близок к графику заданной функции. Например, в случае четной функции достаточно $N = 16$, в то время как с заданной нечетной функцией дела обстоят хуже – для ее точной аппроксимации недостаточно даже $N = 50$. Все функции были успешно приближены, что подтверждается проверкой равенства Парсеваля для каждой из них. Также стоит еще раз отметить, что графики частичных сумм в случае построения последних в вещественной форме или же в комплексной совпадают, кроме того, равенство Парсеваля выполняется в обоих случаях, поэтому в отчете графики приведены один раз.

В случае с комплекснозначной функцией была отмечена биективность отображений при построении параметрических графиков и графиков вещественной и мнимой частей функции по отдельности. Было отмечено, что разложение в ряд Фурье функции может быть получено двумя способами – напрямую (используя заданную параметрически комплекснозначную функцию без разложения) и раскладывая ее на вещественную и мнимую части. Эти способы равносильны из-за аддитивности интеграла (используемого для вычисления коэффициентов), а также из-за биективности отображения комплексного числа в пару вещественных чисел ($\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$). В соответствии с обоими случаями, были построены графики приближения заданной функции частичными суммами Фурье и для параметрической кривой на комплексной плоскости, и для отдельных графиков зависимостей от t вещественной и мнимой частей. Здесь еще раз подтверждается биективность вышеупомянутых отображений – приближения и в случае параметрического графика, и в случае отдельных графиков совпадают. Здесь также было проверено равенство Парсеваля, что еще раз говорит о том, что приближение выполнено верно.

Приложения

Листинг 1. Код для получения коэффициентов ряда Фурье в вещественной форме для квадратной волны.

```
1 def integrand_cos_1(x, n, T):
2     f = pi
3     return f * np.cos(2 * pi * n * x / T)
4
5 def integrand_cos_2(x, n, T):
6     f = 1
7     return f * np.cos(2 * pi * n * x / T)
8
9 def integrand_sin_1(x, n, T):
10    f = pi
11    return f * np.sin(2 * pi * n * x / T)
12
13 def integrand_sin_2(x, n, T):
14    f = 1
15    return f * np.sin(2 * pi * n * x / T)
16
17 def function_values(x):
18     global coefs
19     y_value = 0
20     for summand in range(len(coefs)):
21         y_value += coefs[summand][1] * np.cos(coefs[summand][0] * 2 * pi *
22                                         x / T)
23         y_value += coefs[summand][2] * np.sin(coefs[summand][0] * 2 * pi *
24                                         x / T)
25     return y_value
26
27 N = 10
28 T_1 = [1, 3]
29 T_2 = [3, 7]
30 T = T_2[1] - T_1[0]
31 coefs = [[0, 2 * (integrate.quad(integrand_cos_1, T_1[0], T_1[1], args=(0,
32                                         T))[0] + integrate.quad(integrand_cos_2, T_2[0], T_2[1], args=(0, T))
33                                         [0]) / T / 2, 0]]
34 for step in range(1, N + 1):
35     value_a = 2 * (integrate.quad(integrand_cos_1, T_1[0], T_1[1], args=(step,
36                                         T))[0] + integrate.quad(integrand_cos_2, T_2[0], T_2[1], args
37                                         =(step, T))[0]) / T
38     value_b = 2 * (integrate.quad(integrand_sin_1, T_1[0], T_1[1], args=(step,
39                                         T))[0] + integrate.quad(integrand_sin_2, T_2[0], T_2[1], args
40                                         =(step, T))[0]) / T
41     if value_a != 0 or value_b != 0:
42         coefs.append([step, value_a, value_b])
```

Листинг 2. Код для получения коэффициентов ряда Фурье в комплексной форме для квадратной волны.

```
1 def integrand_1(x, n, T):
2     f = pi
3     return f * np.exp(complex(0, -1) * 2 * pi * n * x / T)
4
5 def integrand_2(x, n, T):
```

```

6     f = 1
7     return f * np.exp(complex(0, -1) * 2 * pi * n * x / T)
8
9 def function_values(x):
10    global coefs
11    y_value = 0
12    for summand in range(len(coefs)):
13        y_value += coefs[summand][1] * np.exp(complex(0, 1) * coefs[
14            summand][0] * 2 * pi * x / T)
15    return y_value
16
17 N = 10
18 T_1 = [1, 3]
19 T_2 = [3, 7]
20 T = T_2[1] - T_1[0]
21 coefs = []
22 for step in range(-N, N + 1):
23     value_c = (1 / T) * (integrate.quad(integrand_1, T_1[0], T_1[1], args
24         =(step, T), complex_func=True)[0] + integrate.quad(integrand_2, T_2
25         [0], T_2[1], args=(step, T), complex_func=True)[0])
26     if value_c != 0:
27         coefs.append([step, value_c])

```

Листинг 3. Код для получения коэффициентов ряда Фурье в вещественной форме для произвольной функции.

```

1 def func(x):
2     return (-2 * ((np.sin(3 * x)) ** 2) + 4 * np.cos(2 * x) * np.cos(7 * x
3         ) ** 2)
4
5 def integrand_cos(x, n, T):
6     f = (-2 * ((np.sin(3 * x)) ** 2) + 4 * np.cos(2 * x) * np.cos(7 * x)
7         ** 2)
8     return f * np.cos(2 * pi * n * x / T)
9
10 def integrand_sin(x, n, T):
11     f = (-2 * ((np.sin(3 * x)) ** 2) + 4 * np.cos(2 * x) * np.cos(7 * x)
12         ** 2)
13     return f * np.sin(2 * pi * n * x / T)
14
15 def args_correction(Theta):
16     R = []
17     for i in range(len(Theta)):
18         if func(Theta[i]) < 0:
19             R.append(abs(func(Theta[i])))
20             Theta[i] = Theta[i] + pi
21         else:
22             R.append(func(Theta[i]))
23     return R
24
25 def function_values(x):
26     global coefs
27     y_value = coefs[0][1] * np.cos(coefs[0][0] * 2 * pi * x / T)
28     for summand in range(1, len(coefs)):
29         y_value += coefs[summand][1] * np.cos(coefs[summand][0] * 2 * pi *
30             x / T)

```

```

27         y_value += coefs[summand][2] * np.sin(coefs[summand][0] * 2 * pi *
28             x / T)
29     return y_value
30
31     def row_correction(fourier):
32         Fourier_final = []
33         for i in range(len(fourier)):
34             if function_values(fourier[i]) < 0:
35                 Fourier_final.append(abs(function_values(fourier[i])))
36                 fourier[i] = fourier[i] + pi
37             else:
38                 Fourier_final.append(function_values(fourier[i]))
39     return Fourier_final
40
41     N = 16
42     T = 2 * pi
43     coefs = [[0, 2 * (integrate.quad(integrand_cos, 0, T, args=(0, T))[0]) / T
44               / 2]]
45     for step in range(1, N + 1):
46         value_a = 2 * (integrate.quad(integrand_cos, 0, T, args=(step, T))[0])
47             / T
48         value_b = 2 * (integrate.quad(integrand_sin, 0, T, args=(step, T))[0])
49             / T
50         if value_a != 0 or value_b != 0:
51             coefs.append([step, value_a, value_b])
52
53     Theta = np.linspace(0, 2 * pi, 1000)
54     Theta_1 = np.linspace(0, 2 * pi, 1000)
55
56     R = args_correction(Theta)
57     Fourier_final = row_correction(Theta_1)

```

Листинг 4. Код для получения коэффициентов ряда Фурье в комплексной форме для произвольной функции.

```

1     def func(x):
2         return (-2 * ((np.sin(3 * x)) ** 2) + 4 * np.cos(2 * x) * np.cos(7 * x
3             ) ** 2)
4
5     def integrand_complex(x, n, T):
6         f = (-2 * ((np.sin(3 * x)) ** 2) + 4 * np.cos(2 * x) * np.cos(7 * x
7             ) ** 2)
8         return f * np.exp(complex(0, -1) * 2 * pi * n * x / T)
9
10    def args_correction(Theta):
11        R = []
12        for i in range(len(Theta)):
13            if func(Theta[i]) < 0:
14                R.append(abs(func(Theta[i])))
15                Theta[i] = Theta[i] + pi
16            else:
17                R.append(func(Theta[i]))
18    return R
19
20    def function_values(x):
21        global coefs

```

```

20     y_value = 0
21     for summand in range(1, len(coefs)):
22         y_value += coefs[summand][1] * np.exp(coefs[summand][0] * complex
23             (0, 1) * 2 * pi * x / T)
24     return y_value
25
26 def row_correction(fourier):
27     Fourier_final = []
28     for i in range(len(fourier)):
29         if function_values(fourier[i]) < 0:
30             Fourier_final.append(abs(function_values(fourier[i])))
31             fourier[i] = fourier[i] + pi
32         else:
33             Fourier_final.append(function_values(fourier[i]))
34     return Fourier_final
35
36 N = 10
37 T = 2 * pi
38 coefs = []
39 for step in range(-N, N + 1):
40     value_c = 1 * (integrate.quad(integrand_complex, 0, T, args=(step, T),
41         complex_func=True)[0]) / T
42     if value_c != 0:
43         coefs.append([step, value_c])
44
45 Theta = np.linspace(0, 2 * pi, 1000)
46 Theta_1 = np.linspace(0, 2 * pi, 1000)
47
48 R = args_correction(Theta)
49 Fourier_final = row_correction(Theta_1)

```

Листинг 5. Код для получения коэффициентов ряда Фурье для комплекснозначной функции с помощью ряда Фурье.

```

1  def part_1(t):
2      return complex(1, t)
3
4  def integrand_1(t, n, T):
5      return part_1(t).real * np.exp(complex(0, -1) * 2 * pi * n * t / T)
6
7  def integrand_11(t, n, T):
8      return part_1(t).imag * np.exp(complex(0, -1) * 2 * pi * n * t / T)
9
10 def part_2(t):
11     return complex(2 - t, 1)
12
13 def integrand_2(t, n, T):
14     return part_2(t).real * np.exp(complex(0, -1) * 2 * pi * n * t / T)
15
16 def integrand_22(t, n, T):
17     return part_2(t).imag * np.exp(complex(0, -1) * 2 * pi * n * t / T)
18
19 def part_3(t):
20     return complex(-1, 4 - t)
21
22 def integrand_3(t, n, T):

```

```

23     return part_3(t).real * np.exp(complex(0, -1) * 2 * pi * n * t / T)
24
25 def integrand_33(t, n, T):
26     return part_3(t).imag * np.exp(complex(0, -1) * 2 * pi * n * t / T)
27
28 def part_4(t):
29     return complex(-6 + t, -1)
30
31 def integrand_4(t, n, T):
32     return part_4(t).real * np.exp(complex(0, -1) * 2 * pi * n * t / T)
33
34 def integrand_44(t, n, T):
35     return part_4(t).imag * np.exp(complex(0, -1) * 2 * pi * n * t / T)
36
37 def function_values(x, coefs):
38     y_value = 0
39     for summand in range(len(coefs)):
40         y_value += coefs[summand][1] * np.exp(coefs[summand][0] * complex
41             (0, 1) * 2 * pi * x / T)
42     return y_value
43
44 N = 10
45 T = 8
46 coefs_real = []
47 for step in range(-N, N + 1):
48     value_c_1 = 1 * (integrate.quad(integrand_1, -1, 1, args=(step, T),
49         complex_func=True)[0] + integrate.quad(integrand_2, 1, 3, args=(
50             step, T), complex_func=True)[0] + integrate.quad(integrand_3, 3, 5,
51             args=(step, T), complex_func=True)[0] + integrate.quad(integrand_4
52             , 5, 7, args=(step, T), complex_func=True)[0]) / T
53     if value_c_1 != 0:
54         coefs_real.append([step, value_c_1])
55
56 coefs_imag = []
57 for step in range(-N, N + 1):
58     value_c_2 = 1 * (integrate.quad(integrand_11, -1, 1, args=(step, T),
59         complex_func=True)[0] + integrate.quad(integrand_22, 1, 3, args=(
60             step, T), complex_func=True)[0] + integrate.quad(integrand_33, 3,
61             args=(step, T), complex_func=True)[0] + integrate.quad(
62                 integrand_44, 5, 7, args=(step, T), complex_func=True)[0]) / T
63     if value_c_2 != 0:
64         coefs_imag.append([step, value_c_2])

```

Листинг 6. Функция для проверки равенства Парсеваля (вещественные коэффициенты).

```

1 def f_norm(f):
2     return integrate.quad(f, -pi, pi)[0] / pi
3
4 def coefs_squares_sum(coefs):
5     summ = ((coefs[0][1] * 2) ** 2) / 2
6     for i in range(1, len(coefs)):
7         summ += (coefs[i][1] ** 2 + coefs[i][2] ** 2)
8     return summ

```

Листинг 7. Функция для проверки равенства Парсеваля (комплексные коэффициенты).

```
1 def f_norm(f):
2     T = 2 * pi
3     return 2 * integrate.quad(f, -pi, pi)[0] / T
4
5 def coefs_squares_sum(coefs):
6     summ = 0
7     for i in range(-len(coefs), len(coefs)):
8         summ += (coefs[i][1].real ** 2 + coefs[i][1].imag ** 2)
9     return summ
```