Laboratory Work №1 (variant 9)

Kirill Dzhenzherukha

April 2023

Материалы

Материалы лабораторной работы (код и анимация) находятся *здесь*.

Аналитическая часть

Функция $f(x) = x^2$ на отрезке $[-3, 0]$:

Существование интеграла Римана для функции $f(x)$ обусловлено непрерывностью $f(x)$ на промежутке $[-3, 0]$ по теореме об интегрируемости непрерывной функции.

Вычисление интегральной суммы:

Пусть (τ, ξ) – оснащенное разбиение отрезка $[-3, 0]$, причем $\lambda(\tau) = \dfrac{3}{n}$.

Тогда $\sigma_\tau(f, \xi) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\left(\frac{3k}{n} \right)^2 \cdot \frac{3}{n} \right) = \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3k}{n} \right)^2 = \frac{27}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{27}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$

$= \dfrac{54n^3 + 81n^2 + 27n}{6n^3}$ – интегральная сумма;

$\displaystyle\lim_{\lambda(\tau) \to 0} \sigma_\tau(f, \xi) = \lim_{n \to \infty} \frac{54n^3 + 81n^2 + 27n}{6n^3} = 9$ – предел интегральной суммы при $\lambda(\tau) \to 0$.

По формуле Ньютона-Лейбница $\displaystyle\int_{-3}^{0} x^2\, dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-3}^{0} = 9.$

Заметим, что $\displaystyle\int_{-3}^{0} x^2\, dx = \lim_{\lambda(\tau) \to 0} \sigma_\tau(f, \xi) = 9.$

Выведем формулы погрешности вычисления интеграла:

Пусть функция $f(x)$ задана на $[a, b]$ и $f(x) \in R[a, b]$. Введем разбиение τ отрезка $[a, b]$ такое, что $h = \lambda(\tau) = \dfrac{b-a}{n}$, где n – количество отрезков разбиения. Тогда интеграл можно представить в виде суммы интегралов по единичным отрезкам: $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\, dx =$

$= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\, dx.$

Для центрального оснащения:

Справедливо утверждение: $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)h.$

Тогда $\Delta_i = n \cdot \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)h = n \cdot \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f(x) - f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)\right)\,dx.$

Из разложения по формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа получим:

$f(x) = f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) + f'\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right)\left(x - x_{i-\frac{1}{2}}\right) + f''(\xi_i)\dfrac{\left(x - x_{i-\frac{1}{2}}\right)^2}{2},\ \xi_i = \xi_i(x) \in [x_{i-1}, x_i].$

Тогда получим, что $\Delta_i = n \cdot \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f''(\xi_i)\dfrac{\left(x - x_{i-\frac{1}{2}}\right)^2}{2}\,dx.$

Справедлива оценка $|\Delta_i| \le \max\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f''(x)|\, n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \dfrac{\left(x - x_{i-\frac{1}{2}}\right)^2}{2}\,dx = \max\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|\, \dfrac{(b-a)^3}{24n^2}.$

Для оснащения в крайних точках:

Справедливо утверждение: $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx f\left(x_{i-1}\right)h.$

Тогда $\Delta_i = n \cdot \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - f\left(x_{i-1}\right)h = n \cdot \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left(f(x) - f\left(x_{i-1}\right)\right)\,dx.$

Из разложения по формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа получим:

$f(x) = f\left(x_{i-1}\right) + f'\left(\xi_i\right)\left(x - x_{i-1}\right),\ \xi_i = \xi_i(x) \in [x_{i-1}, x_i].$

Тогда получим, что $\Delta_i = n \cdot \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f'\left(\xi_i\right)\left(x - x_{i-1}\right)\,dx.$

Справедлива оценка $|\Delta_i| \le \max\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} |f'(x)|\, n \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \left(x - x_{i-1}\right)\,dx = \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|\, \dfrac{(b-a)^2}{2n}.$

Таблица погрешностей для соответствующих разбиений:

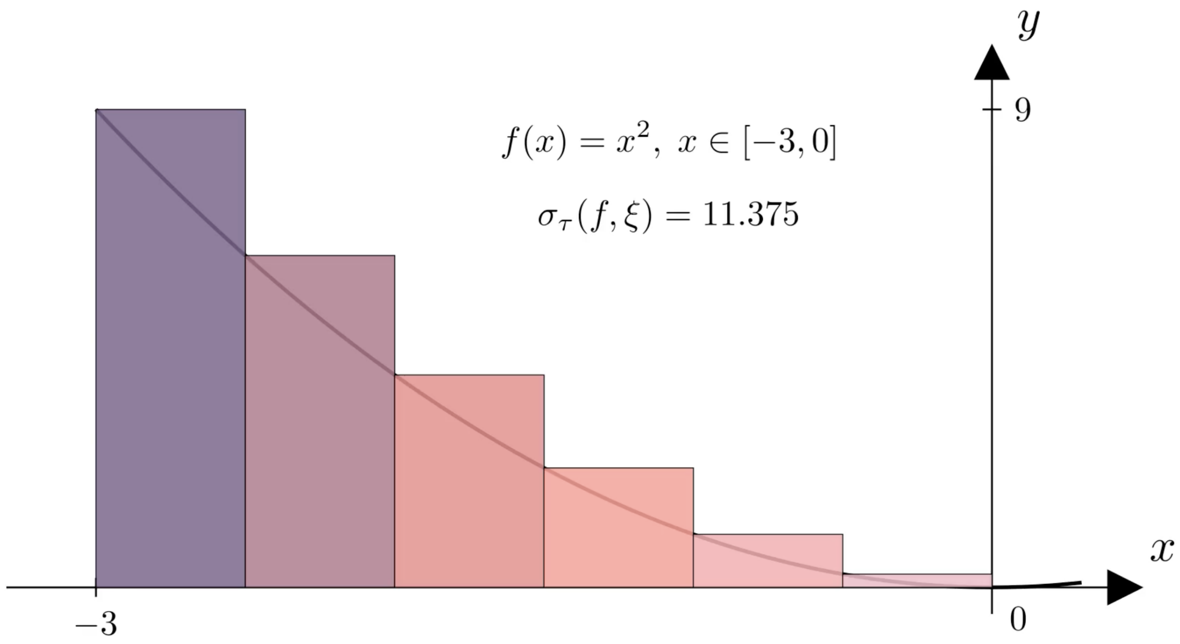
Мелкость	**Для центральных точек**	**Для крайних точек**
$\lambda(\tau) = \frac{1}{2}$	0.0625	4.5
$\lambda(\tau) = \frac{1}{4}$	0.015625	2.25
$\lambda(\tau) = \frac{1}{6}$	0.006944	1.5
$\lambda(\tau) = \frac{1}{8}$	0.003906	1.125
$\lambda(\tau) = \frac{1}{10}$	0.0025	0.9

Практическая часть

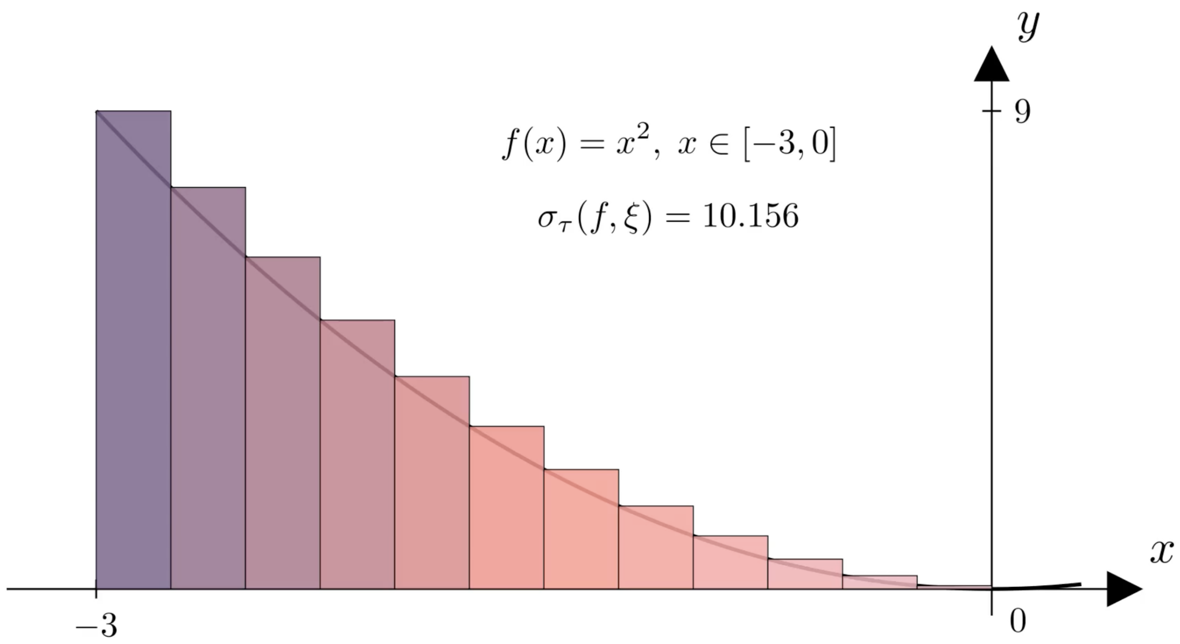
Рассмотрим графические представления разбиений для разных значений мелкости разбиения и при разных оснащениях:

1) Оснащение по левой границе отрезка разбиения (верхние суммы Дарбу):

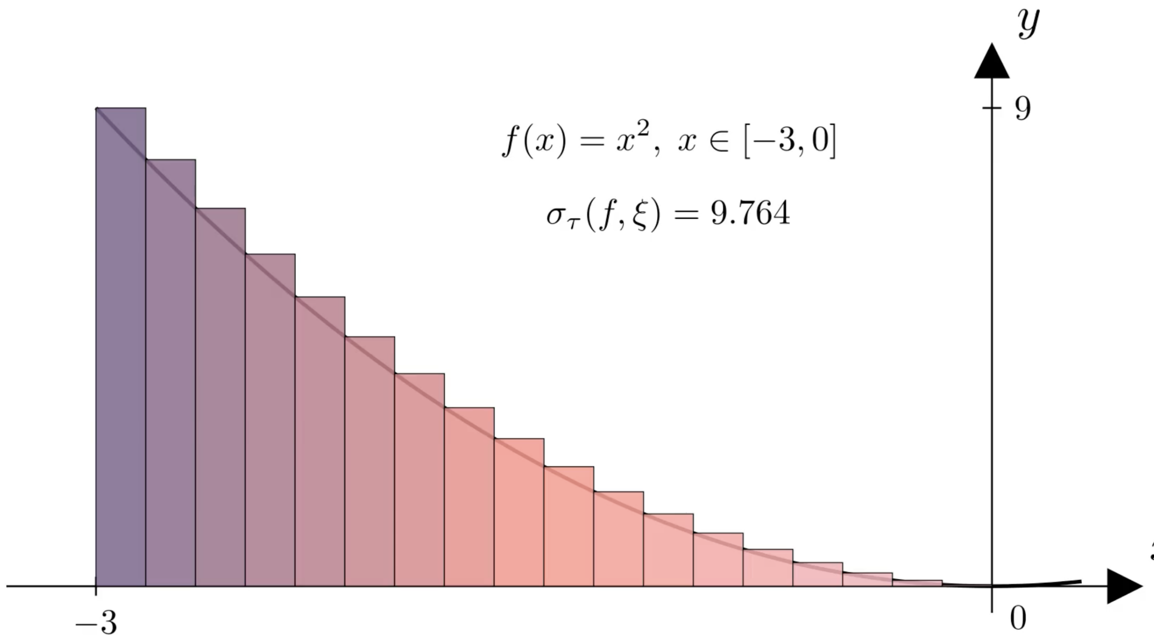
1.1) $\lambda(\tau) = \dfrac{1}{2},\ \sigma_\tau(f,\xi) = 11\dfrac{3}{8}$



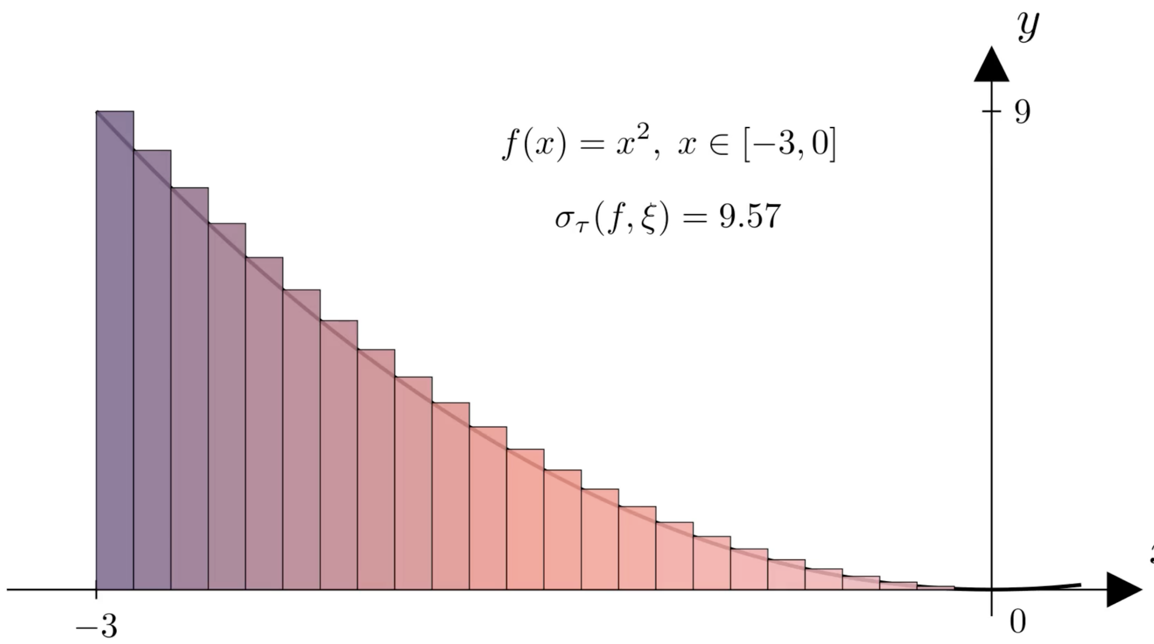
1.2) $\lambda(\tau) = \dfrac{1}{4},\ \sigma_\tau(f,\xi) = 10\dfrac{5}{32}$



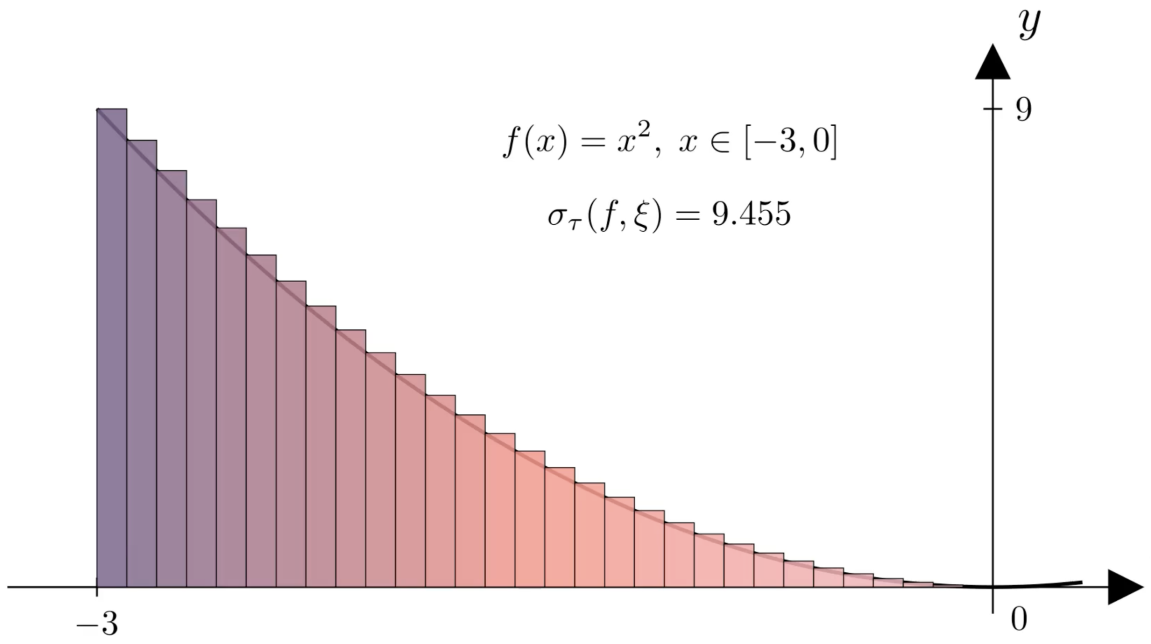
1.3) $\lambda(\tau) = \dfrac{1}{6},\ \sigma_\tau(f, \xi) = 9\dfrac{55}{72}$



1.4) $\lambda(\tau) = \dfrac{1}{8},\ \sigma_\tau(f, \xi) = 9\dfrac{73}{128}$

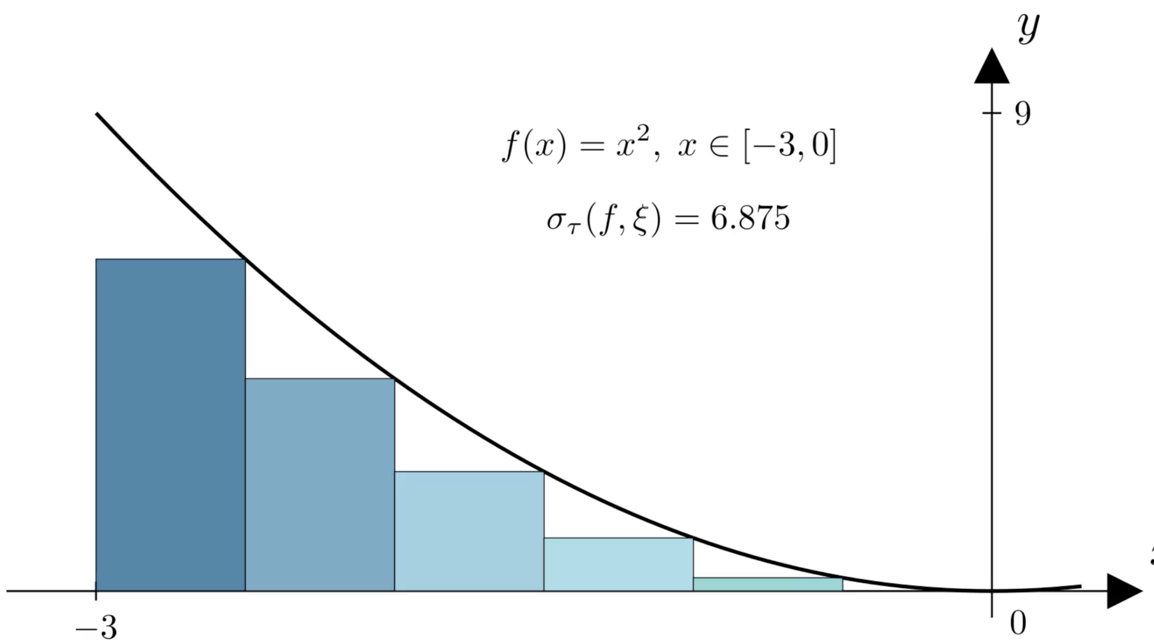


1.5) $\lambda(\tau) = \dfrac{1}{10},\ \sigma_\tau(f,\xi) = 9\dfrac{91}{200}$

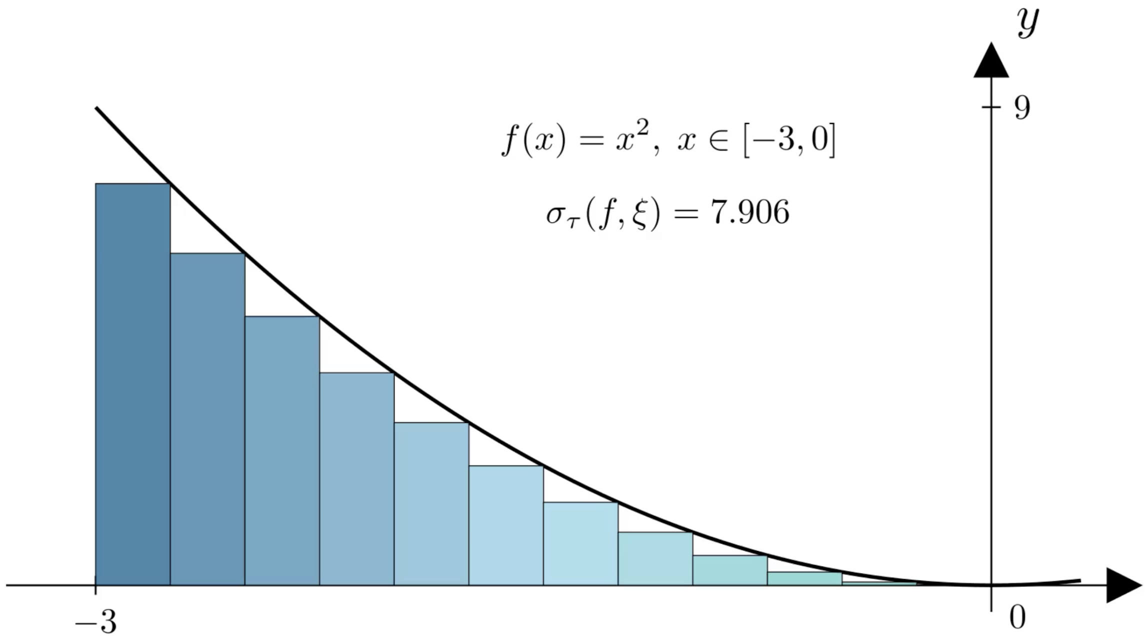


2) Оснащение по правой границе отрезка разбиения (нижние суммы Дарбу):

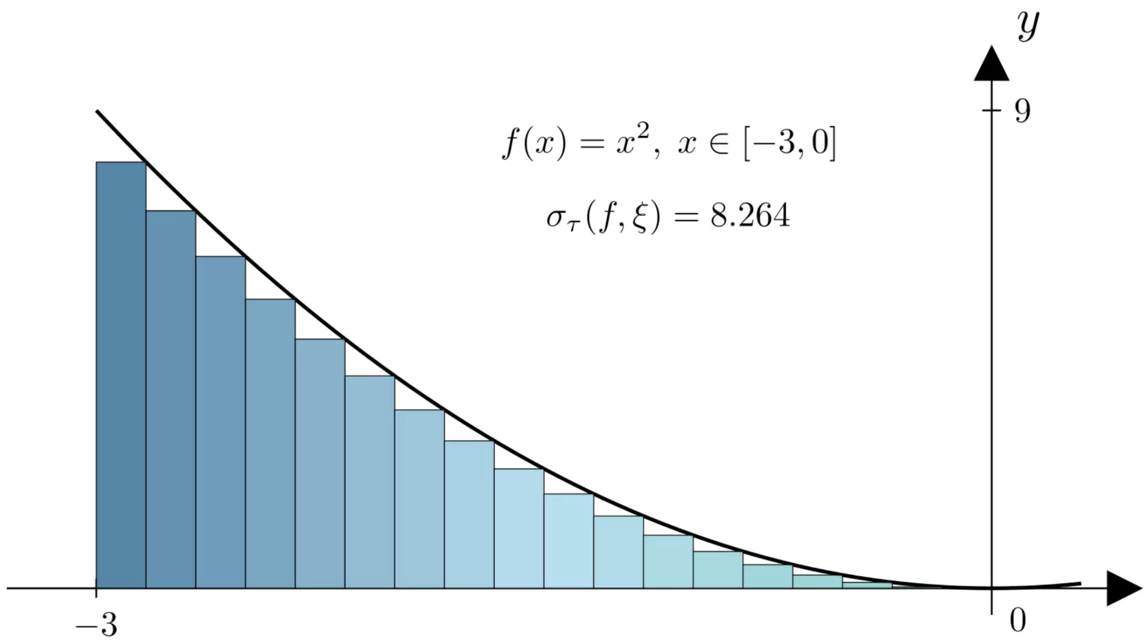
2.1) $\lambda(\tau) = \dfrac{1}{2},\ \sigma_\tau(f,\xi) = 6\dfrac{7}{8}$



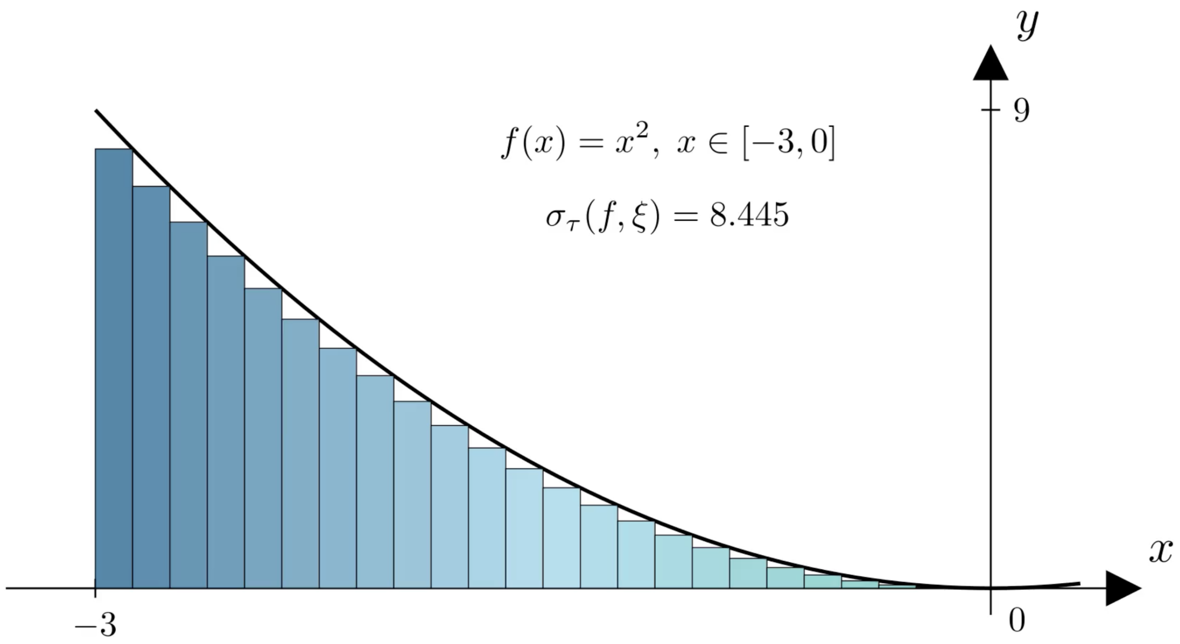
2.2) $\lambda(\tau) = \dfrac{1}{4},\ \sigma_\tau(f,\xi) = 7\dfrac{29}{32}$



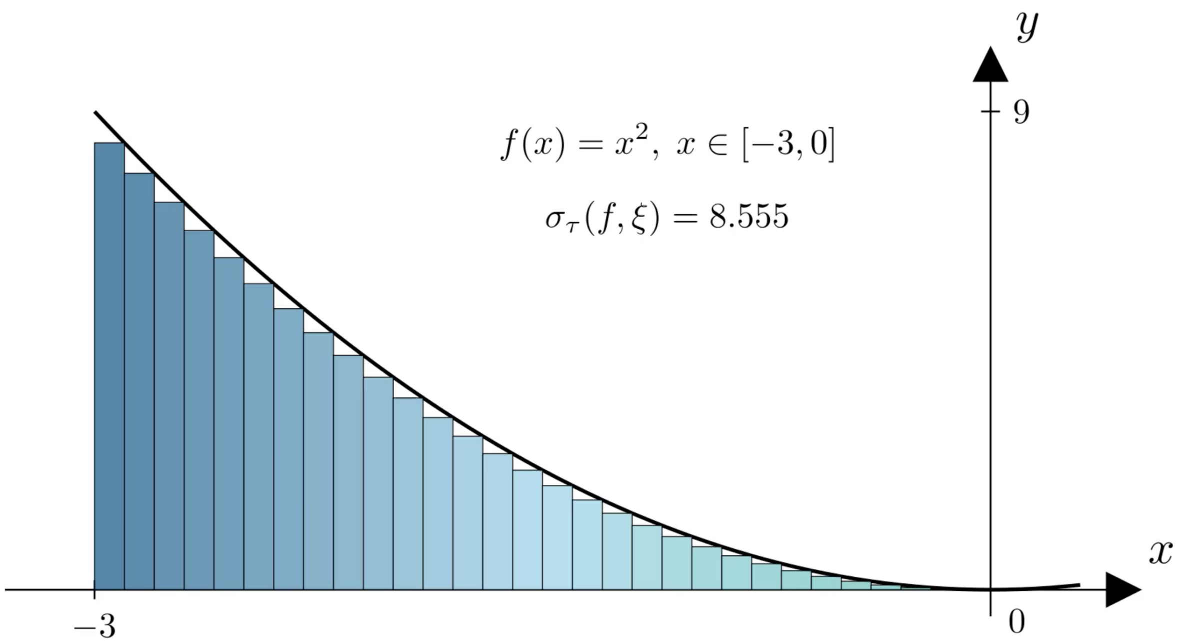
2.3) $\lambda(\tau) = \dfrac{1}{6},\ \sigma_\tau(f,\xi) = 8\dfrac{19}{72}$



2.4) $\lambda(\tau) = \dfrac{1}{8},\ \sigma_\tau(f,\xi) = 8\dfrac{57}{128}$

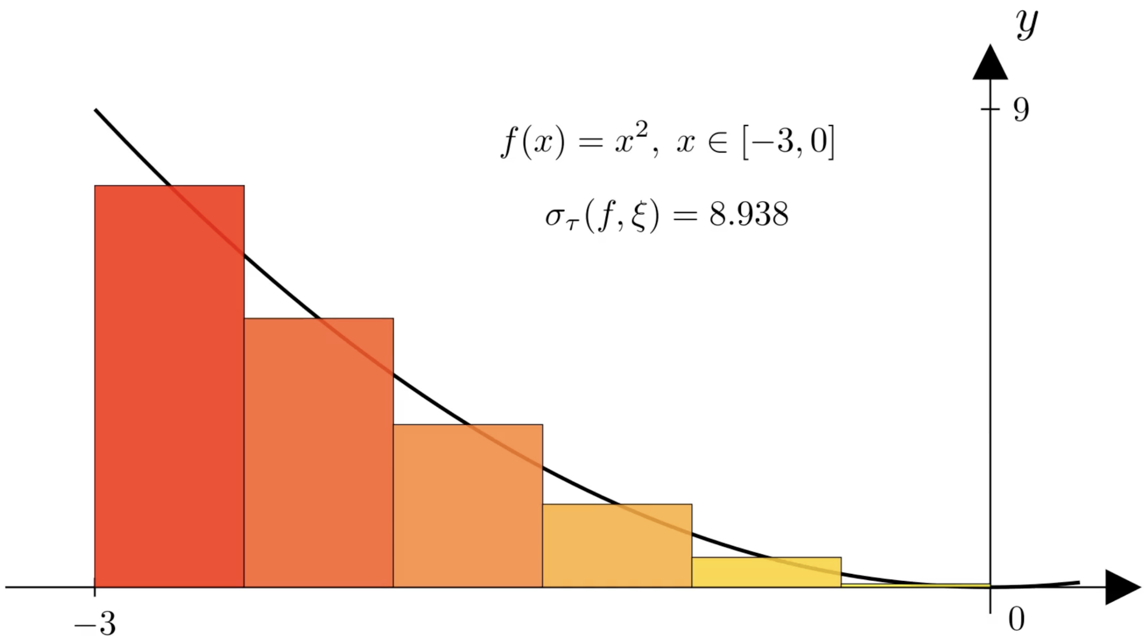


2.5) $\lambda(\tau) = \dfrac{1}{10},\ \sigma_\tau(f,\xi) = 8\dfrac{111}{200}$

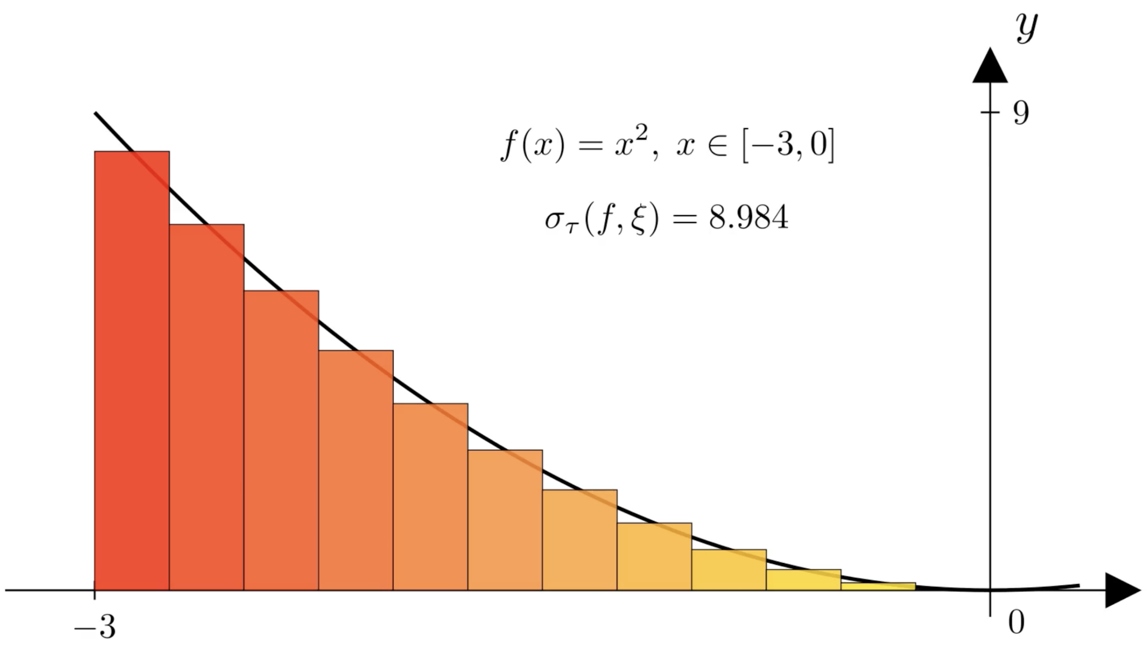


3) Оснащение по центральной точке отрезка разбиения:

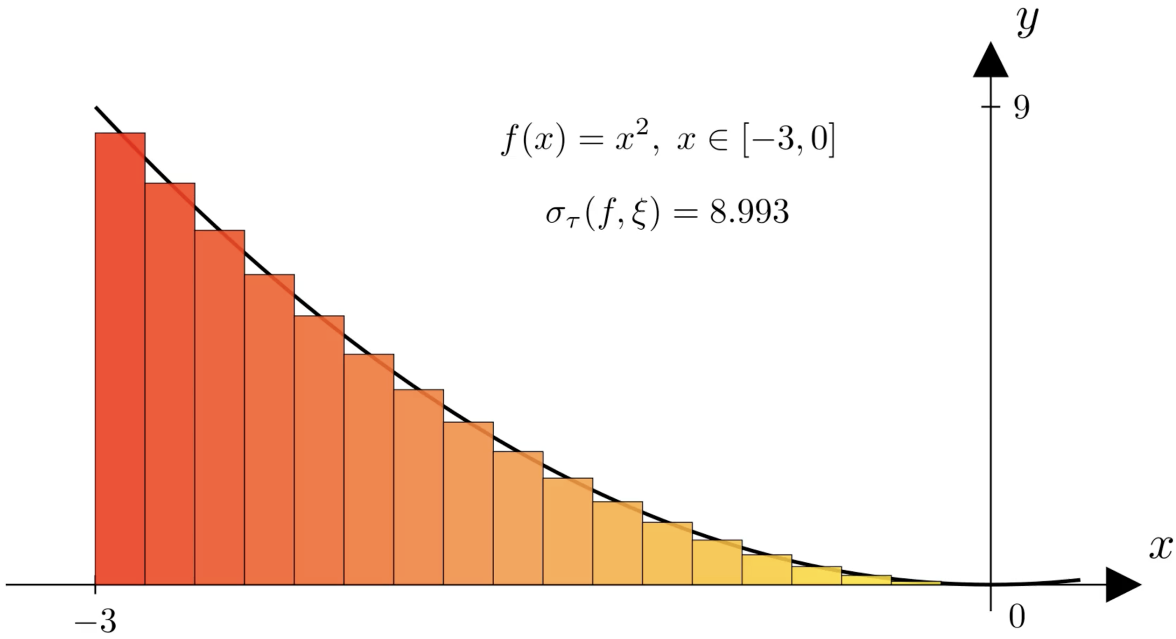
3.1) $\lambda(\tau) = \frac{1}{2}$, $\sigma_\tau(f, \xi) = 8\frac{15}{16}$



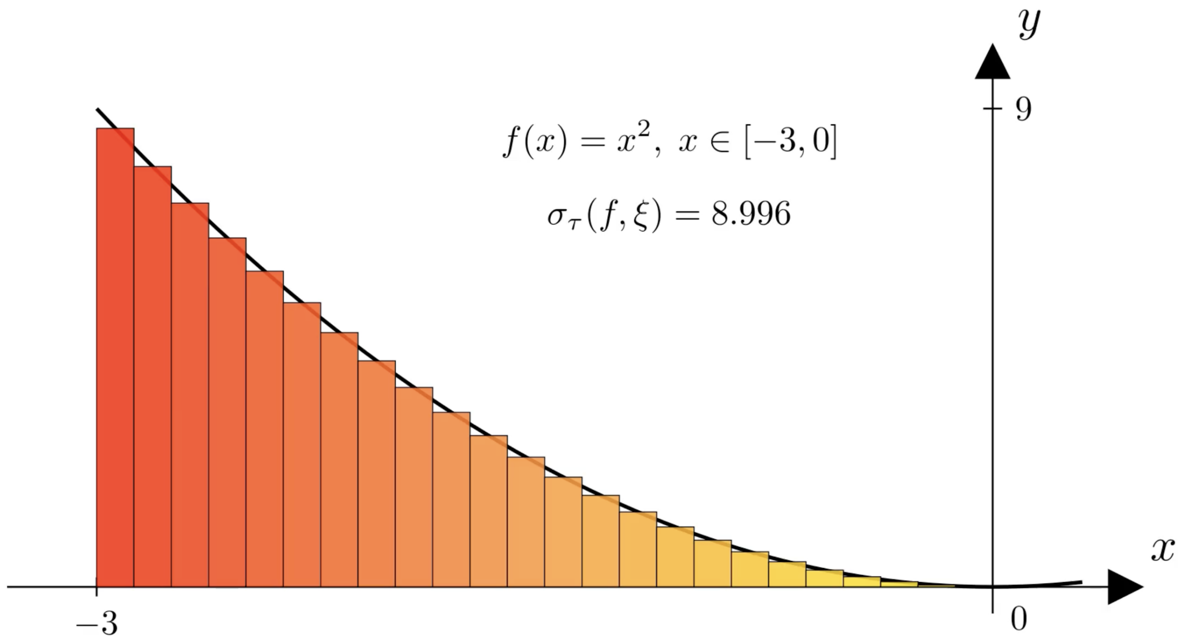
3.2) $\lambda(\tau) = \frac{1}{4}$, $\sigma_\tau(f, \xi) = 8\frac{63}{64}$



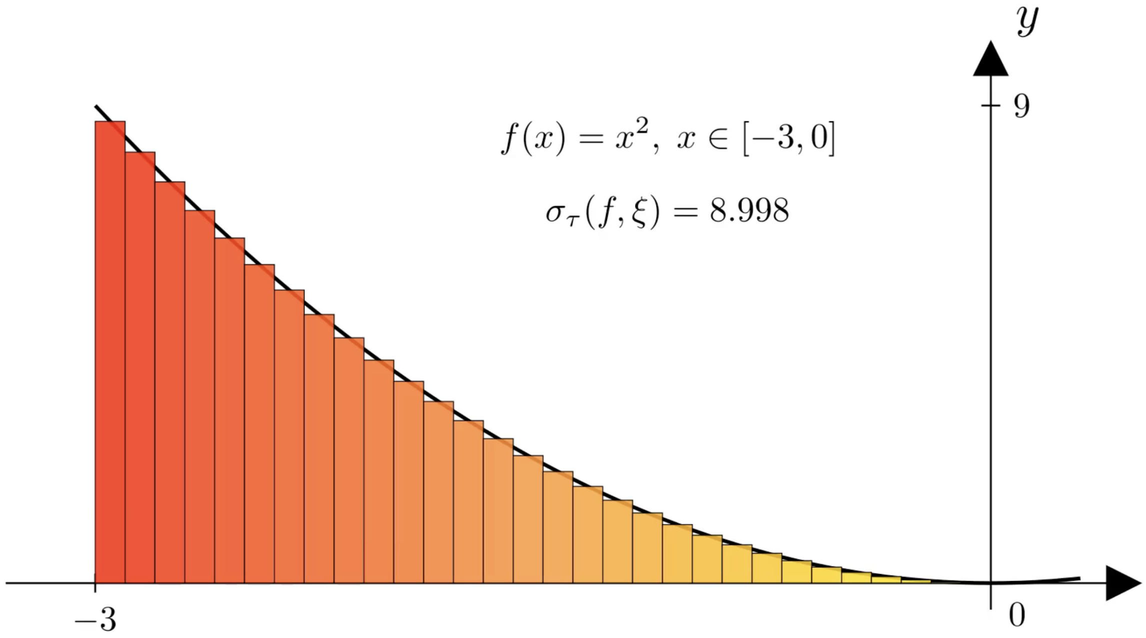
3.3) $\lambda(\tau) = \dfrac{1}{6},\ \sigma_\tau(f,\xi) = 8\dfrac{143}{144}$



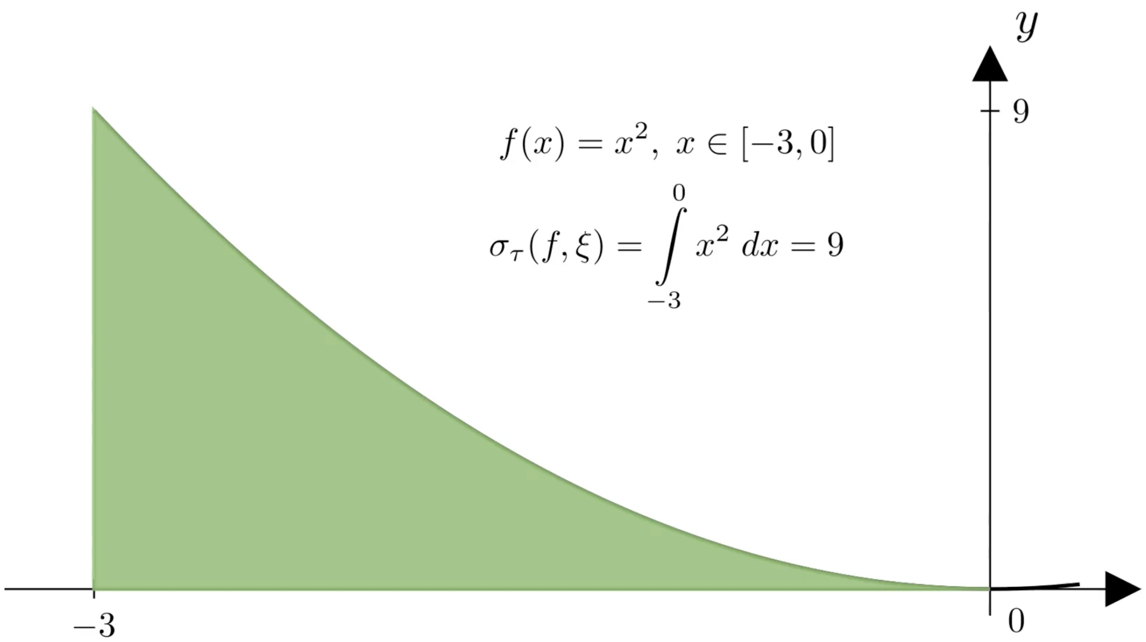
3.4) $\lambda(\tau) = \dfrac{1}{8},\ \sigma_\tau(f,\xi) = 8\dfrac{255}{256}$



3.5) $\lambda(\tau) = \dfrac{1}{10}$, $\sigma_\tau(f, \xi) = 8\dfrac{399}{400}$



Из полученных графиков можно сделать вывод о том, что интегральные суммы стремятся к значению определенного интеграла от функции $f(x)$, вычисленному ранее:



Кроме того, заметим, что все значения интегральных сумм для различных разбиений входят в диапазон допустимых значений с учетом соответствующих погрешностей (см. *Таблицу погрешностей*).