

Experimento aleatorio:

- Se puede repetir siempre en las mismas condiciones.
- No se puede predecir el resultado, pero si se repite un número elevado de veces se observan regularidades.
- Se conocen de antemano los posibles resultados.

Ejemplos: lanzar una moneda, lanzar un dado, nacimiento de un individuo...

- ❑ **Espacio muestral S :** conjunto de todos los posibles resultados del experimento.
- ❑ **Suceso aleatorio:** cualquier subconjunto de S . Suelen denotarse por las primeras letras del alfabeto: $A, B, C...$
 - **Suceso imposible \emptyset :** conjunto vacío.
 - **Suceso seguro S :** es propio espacio muestral considerado como suceso.
 - **Sucesos elementales:** están formados por un único elemento.



Experimento: lanzar un dado

Espacio muestral: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

Suceso imposible: \emptyset

Suceso seguro: $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

Sucesos elementales: $\{1\}, \{2\}, \dots \{6\}$

Otros sucesos:

$A = \text{salir par} = \{2,4,6\}$

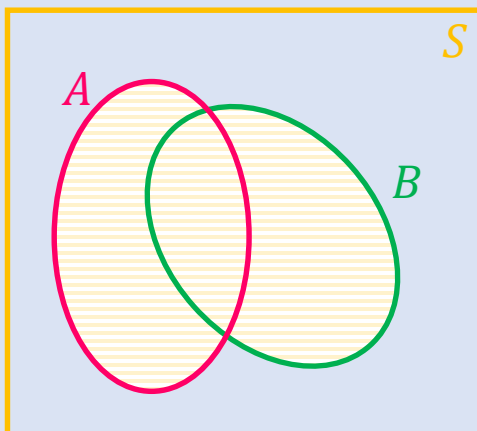
$B = \{\text{salir mayor que } 4\} = \{5,6\}$

$C = \text{salir impar o menor que } 4 = \{1,2,3,5\}$

$D = \{1,6\}$

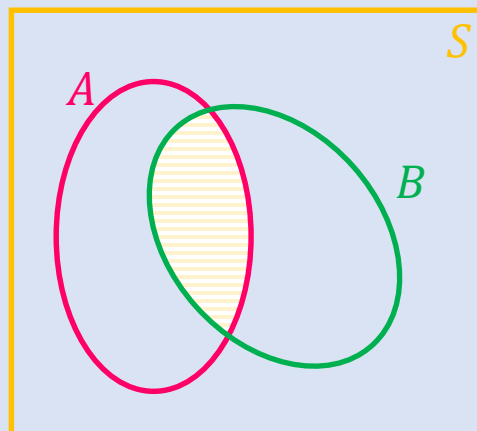
Suceso unión:

$$A \cup B = \{x \in S / x \in A \text{ ó } x \in B\}$$



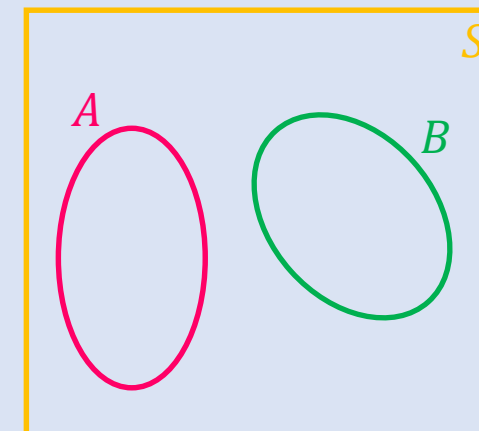
Suceso intersección:

$$A \cap B = \{x \in S / x \in A \text{ y } x \in B\}$$



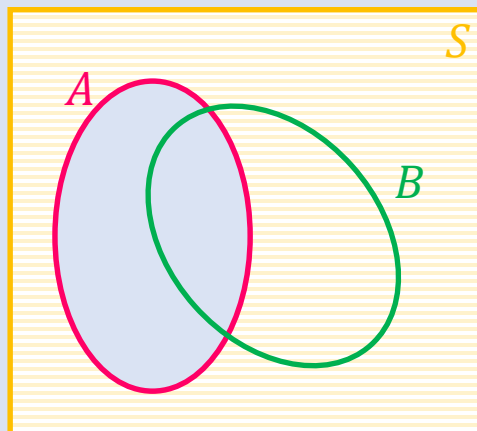
Sucesos incompatibles:

$$A \cap B = \emptyset$$



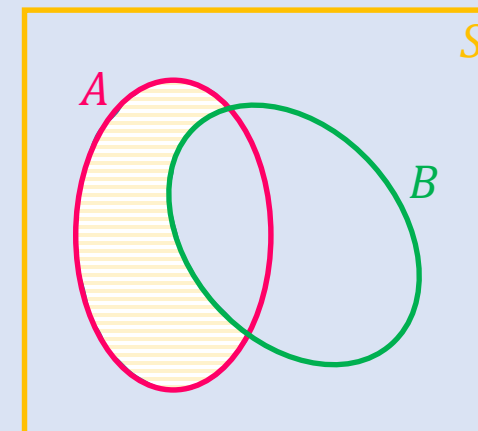
**Suceso complementario o
contrario de A:**

$$\bar{A} = \{x \in S / x \notin A\}$$



Diferencia de sucesos:

$$A \setminus B = \{x \in S / x \in A \text{ y } x \notin B\} = A \setminus (A \cap B)$$





Experimento: lanzar un dado

Espacio muestral: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Suceso imposible: \emptyset

Suceso seguro: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Sucesos elementales: $\{1\}, \{2\}, \dots \{6\}$

Otros sucesos:

$A = \text{salir par} = \{2, 4, 6\}$

$B = \{\text{salir mayor que } 4\} = \{5, 6\}$

$C = \text{salir impar o menor que } 4 = \{1, 2, 3, 5\}$

$D = \{1, 3\}$

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$$

$$A \cap B = \{6\}$$

$$A \cap D = \emptyset \Rightarrow A \text{ y } D \text{ son incompatibles}$$

$$\bar{A} = \{1, 3, 5\}$$

$$A \setminus B = \{2, 4\}$$

Algunas propiedades:

$$\bar{\bar{A}} = A$$

$$\bar{\emptyset} = S \quad \text{y} \quad \bar{S} = \emptyset$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

**LEYES DE
DE MORGAN**

EJEMPLOS

Ejercicio 2.1 y 2.2

Probabilidad de Laplace o “a priori”:

Se puede aplicar a sucesos de un espacio muestral que procede de un experimento que da lugar a un número finito de resultados posibles, todos igualmente factibles.

$$P(A) = \frac{n^{\circ} \text{ casos favorables}}{n^{\circ} \text{ casos posibles}}$$

Experimento: lanzar un dado

$$A = \text{sacar par} \rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Experimento: extraer una carta de una baraja de 40 cartas

$$B = \text{ser oro} \rightarrow P(B) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

EJEMPLOS**Ejercicio 2.6 y 2.5**

Definición axiomática de probabilidad:

Dado un espacio muestral S de un experimento aleatorio, una función de probabilidad es una aplicación:

$$P: S \rightarrow [0,1]$$

que cumple los siguientes axiomas:

- $P(A) \geq 0$, para cualquier suceso $A \in S$
- $P(S) = 1$
- Si A y $B \in S$ son sucesos incompatibles ($A \cap B = \emptyset$) entonces: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Propiedades de la probabilidad:

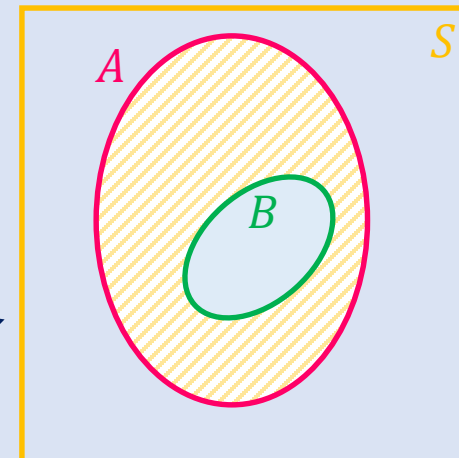
1.) $P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad (\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A))$

2.) $P(\emptyset) = 0$

3.) Si A y B son dos sucesos cualesquiera:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

4.) Si $B \subset A$, entonces $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$



EJEMPLOS

Ejercicio 2.18 (menos aptdo. g.); 2.13; 2.8; 2.11

10. Se tienen dos sucesos aleatorios A y B y se conocen las probabilidades $P(A) = 0,7$; $P(B) = 0,6$ y $P(A \cup B) = 0,85$. Calcula:

- a) $P(A \cap B)$
- b) $P((A \cap B)^c)$
- c) La probabilidad de que se cumpla solo uno de los dos sucesos.

EJEMPLOS

Ejercicio 2.18 (menos aptdo. g.); 2.13; 2.8; 2.11; 2.19

10. Se tienen dos sucesos aleatorios A y B y se conocen las probabilidades $P(A) = 0,7$; $P(B) = 0,6$ y $P(A \cup B) = 0,85$. Calcula:

- a) $P(A \cap B)$ b) $P((A \cap B)^c)$
 c) La probabilidad de que se cumpla solo uno de los dos sucesos.

Solución:

a) Se sabe que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0,7 + 0,6 - 0,85 = 0,45$$

b) El suceso $(A \cap B)^c$ es el contrario de $A \cap B \Rightarrow$

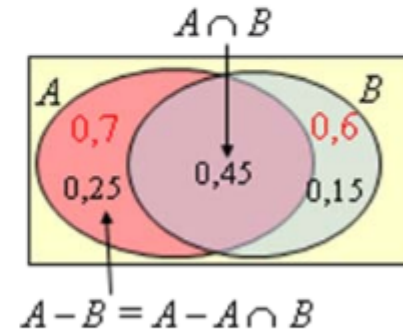
$$P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0,45 = 0,55$$

c) Que se cumpla solo uno de los dos sucesos significa que se cumple A y no B o que se cumple B , pero no A . Esto es, cualquiera de los dos, pero no los dos a la vez.

Su valor es:

$$P((A - B) \cup (B - A)) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0,85 - 0,45 = 0,40.$$

En el diagrama adjunto se puede visualizar todo el problema.



Probabilidad Condicionada:

Dados dos sucesos A y B de un espacio muestral S con $P(A) \neq 0$, la **probabilidad del suceso B condicionada al suceso A** (o *probabilidad de que ocurra B suponiendo que previamente ha ocurrido A*) se define como:

$$P(B|_A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Igualmente puede definirse la **probabilidad de A condicionada a B** (siempre que $P(B) \neq 0$):

$$P(A|_B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Las dos fórmulas anteriores nos permiten escribir la **probabilidad de la intersección de dos sucesos** de dos formas:

$$P(A \cap B) = P(B|_A) \cdot P(A) = P(A|_B) \cdot P(B)$$

Se dice que A y B son **sucesos independientes** si $P(A|_B) = P(A)$ (o equivalentemente, si $P(B|_A) = P(B)$). Esto quiere decir que el hecho de que ocurra uno de los sucesos no está influido por el hecho de que el otro haya ocurrido o no. En caso contrario se dice que son **dependientes**.

De la fórmula ***** se deduce:

$$\text{Si } A \text{ y } B \text{ son independientes} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Dada una baraja de 40 cartas, se extraen dos cartas sin reemplazamiento. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos cartas sean un Oro?

A = sacar un Oro en la primera extracción

B = sacar una Oro en la segunda extracción

A ∩ B = las dos cartas son Oros

Al no devolver la primera carta a la baraja, el resultado de la segunda carta depende de lo obtenido en la primera, o lo que es lo mismo, el suceso *B* depende de *A*. Son sucesos **dependientes**.

$$P(A \cap B) = P(B|_A) \cdot P(A) = \frac{9}{39} \cdot \frac{10}{40} = 0.057$$

¿Y si devolviéramos la primera carta a la baraja?

Al devolver la primera carta a la baraja, el resultado de la segunda carta ya no depende de lo obtenido en la primera, o lo que es lo mismo, *A* y *B* son **independientes**.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = 0.062$$

OBSERVACIÓN IMPORTANTE:**CORRECTO**

$$P(A|_B) + P(\bar{A}|_B) = 1$$

**INCORRECTO**

$$P(A|_B) + P(A|_{\bar{B}}) = 1$$

EJEMPLOS

Ejercicio 2.18 (aptdo. g)**1**

En un centro escolar los alumnos pueden optar por cursar como lengua extranjera inglés o francés. En un determinado curso, el 90% de los alumnos estudia inglés y el resto francés. El 30% de los que estudian inglés son chicos y de los que estudian francés son chicos el 40%. Eligiendo un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?

2

Ante un examen, un alumno sólo ha estudiado 15 de los 25 temas correspondientes a la materia del mismo. Éste se realiza extrayendo al azar dos temas y dejando que el alumno escoja uno de los dos para ser examinado del mismo.

Hallar la probabilidad de que el alumno pueda elegir en el examen uno de los temas estudiados.

3

Un taller sabe que por término medio acuden: por la mañana tres automóviles con problemas eléctricos, ocho con problemas mecánicos y tres con problemas de chapa, y por la tarde dos con problemas eléctricos, tres con problemas mecánicos y uno con problemas de chapa.

- a** Hacer una tabla ordenando los datos anteriores
- b** Calcular el porcentaje de los que acuden por la tarde
- c** Calcular el porcentaje de los que acuden por problemas mecánicos
- d** Calcular la probabilidad de que un automóvil con problemas eléctricos acuda por la mañana



Se supone que 25 de cada 100 hombres y 600 de cada 1000 mujeres usan gafas. Si el número de mujeres es cuatro veces superior al de hombres, se pide la probabilidad de encontrarnos:

- a** Con una persona sin gafas
- b** Con una mujer con gafas

PROBABILIDAD TOTAL. TEOREMA DE BAYES. $S \equiv$ espacio muestral
$$A_1, A_2, A_3 \subset S \text{ tales que: } \begin{cases} S = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \\ A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j \text{ (sucesos incompatibles dos a dos)} \end{cases}$$
Entonces, para cualquier otro suceso $B \subset S$:

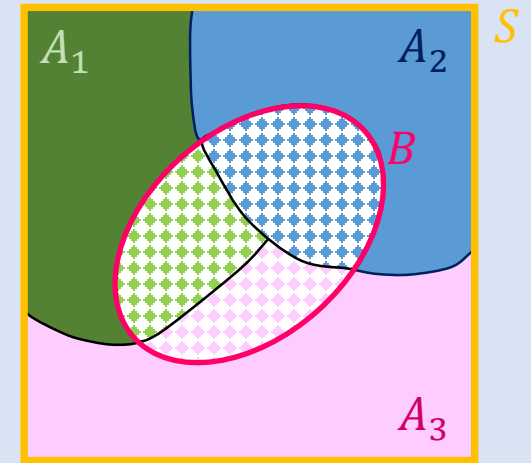
$$P(B) = P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3)) =$$

$$= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) =$$

$$= P(B|_{A_1})P(A_1) + P(B|_{A_2})P(A_2) + P(B|_{A_3})P(A_3) \quad \text{Fórmula de la probabilidad total}$$

Además, para cualquiera de los A_i :

$$P(A_i|_B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|_{A_i})P(A_i)}{P(B|_{A_1})P(A_1) + P(B|_{A_2})P(A_2) + P(B|_{A_3})P(A_3)} \quad \text{Teorema de Bayes}$$



Sucesos
incompatibles

EJEMPLOS

5

Un estudiante cuenta, para un examen con la ayuda de un despertador, el cual consigue despertarlo en un 80% de los casos. Si oye el despertador, la probabilidad de que realiza el examen es 0,9 y, en caso contrario, de 0,5.

- a Si va a realizar el examen, ¿cuál es la probabilidad de que haya oído el despertador?
- b Si no realiza el examen, ¿cuál es la probabilidad de que no haya oído el despertador?

Ejercicio 2.25

Al encender una radio, se escucha aleatoriamente cualquiera de las tres emisoras A , B y C que están presintonizadas y que emiten durante todo el día. La emisora A siempre ofrece música, mientras que la C lo hace la mitad del tiempo. Por otra parte, la probabilidad de que al encender la radio no se sintonice la emisora B o no estén emitiendo música es de $5/6$.

Ejercicio 2.30

- b1) ¿Qué porcentaje del día emite música la emisora B ?
- b2) ¿Cuál es la probabilidad de que al encender la radio escuchemos música?
- b3) Si al poner la radio no escuchamos música, ¿cuál es la probabilidad de que esté sintonizada en la emisora B ?