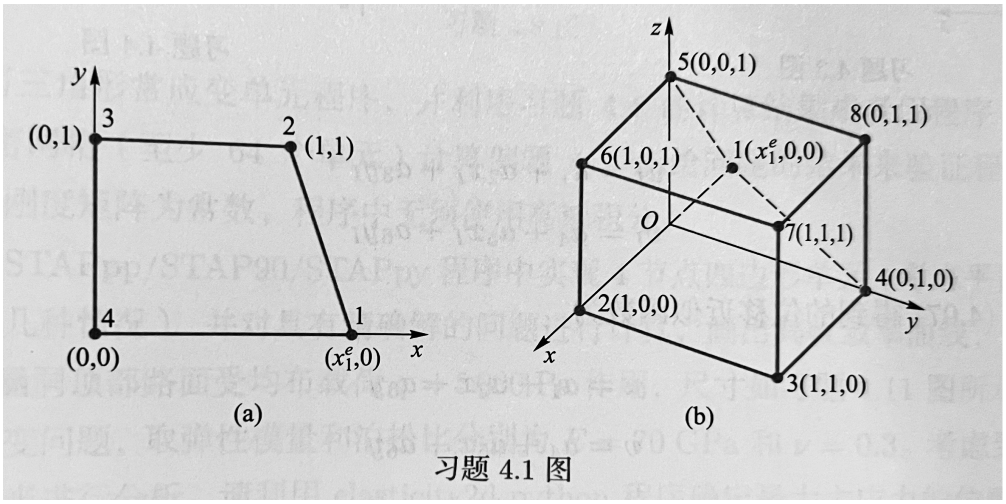
1 习题 4.1

分别计算习题 4.1 中的两个单元形心（$\xi = \eta = \zeta = 0$）处的 Jacobian，绘制其与坐标 $x_1^e \in [-2, 2]$ 之间的函数曲线，并分析。



习题 4.1 图

图 (a) 为平面四边形，其母单元为由点 $(1, -1), (1, 1), (-1, 1), (-1, -1)$ 张成的, 边长为 2 的正方形，该正方戏位于横坐标为 ξ，纵坐标为 η 的母坐标系内。在母坐标系内建立单元的形函数，再使用该形函数作为坐标变换函数完成等参变换至原物理空间的坐标系 xoy。在母坐标系 $\xi o \eta$ 下，考虑单元形函数的 Kronecker 性质和 Partition of Unit 条件，建立形函数

$$N_I^{L2}(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_I \xi), \quad I = (1, 2, 3)$$

$$\mathrm{N}_I^{L2}(\xi) = \tfrac{1}{2}(1 + \eta_I \eta), \quad I = (1, 2, 3)$$

考虑到母单元两方向正交性，通过张量积得到该节点母单元内的四个节点（节点编号如图 4.1 所示）对应的形函数：

$$N_{[I,J]}^{Q4}(\xi,\eta) = N_I^{L2}(\xi)N_J^{L2}(\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi_I\xi)\,(1+\eta_I\eta)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}_1^{Q4}(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{4}(1+\xi)\,(1-\eta)\\
\mathrm{N}_2^{Q4}(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{4}(1+\xi)\,(1+\eta)\\
\mathrm{N}_3^{Q4}(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{4}(1-\xi)\,(1+\eta)\\
\mathrm{N}_4^{Q4}(\xi,\eta) &= \tfrac{1}{4}(1-\xi)\,(1-\eta)
\end{aligned}$$

进行对应的等参变换：

$$x(\xi,\eta) = \boldsymbol{N^{Q4}}(\xi,\eta)\,\boldsymbol{x^e}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{y}(\xi,\eta) &= \boldsymbol{N^{Q4}}(\xi,\eta)\,\boldsymbol{y^e}\\
\boldsymbol{N^{Q4}}(\xi,\eta) &= \begin{bmatrix} N_1^{Q4} & N_2^{Q4} & N_3^{Q4} & N_4^{Q4} \end{bmatrix}\\
\boldsymbol{x^e} &= \begin{bmatrix} x_1^e & x_2^e & x_3^e & x_4^e \end{bmatrix}\\
\boldsymbol{y^e} &= \begin{bmatrix} y_1^e & y_2^e & y_3^e & y_4^e \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

最终得到母单元坐标和物理空间坐标之间的 Jacobi 矩阵：

$$\boldsymbol{J^e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{I=1}^4 \frac{\partial N_I^{Q4}}{\partial \xi} x_I^e & \sum_{I=1}^4 \frac{\partial N_I^{Q4}}{\partial \xi} y_I^e \\ \sum_{I=1}^4 \frac{\partial N_I^{Q4}}{\partial \eta} x_I^e & \sum_{I=1}^4 \frac{\partial N_I^{Q4}}{\partial \eta} y_I^e \end{bmatrix}$$

带入形函数微分，带入 $\boldsymbol{x_1^e, y_1^e}$ 并写成矩阵的形式：

$$\boldsymbol{J^e} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \eta-1 & 1-\eta & 1+\eta & -1-\eta \\ \xi-1 & -\xi-1 & 1+\xi & 1-\xi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^e & y_1^e \\ x_2^e & y_2^e \\ x_3^e & y_3^e \\ x_4^e & y_4^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\eta-1)x_1^e+1-\eta & 2 \\ (\xi-1)x_1^e-1-\xi & 0 \end{bmatrix}$$

其行列式的值为

$$det(\boldsymbol{J^e}) = (2-2\xi)x_1^e + 2 + 2\xi, \quad x_1^e \in [-2,2]$$

类似的，图 (b) 所示的八面体可以被映射到一个四棱柱母单元内。首先计算母坐标下的形函数，再使用该形函数完成等参变换，进而计算两坐标系之间的 Jacobi 矩阵。八面体的 Jacobi 矩阵计算如下：

$$\boldsymbol{J}^e = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -\eta x_1^e\zeta + \eta x_1^e + x_1^e\zeta - x_1^e + 4 & 0 & 0 \\ -x_1^e(\xi-1)(\zeta-1) & 4 & 0 \\ -x_1^e(\eta-1)(\xi-1) & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

其行列式的值为：

$$det(\boldsymbol{J}^e) = -2\eta x_1^e\zeta + 2\eta x_1^e + 2x_1^e\zeta - 2x_1^e + 8$$

最后，我们绘制这两种单元的 Jacobian 的函数图像如下：

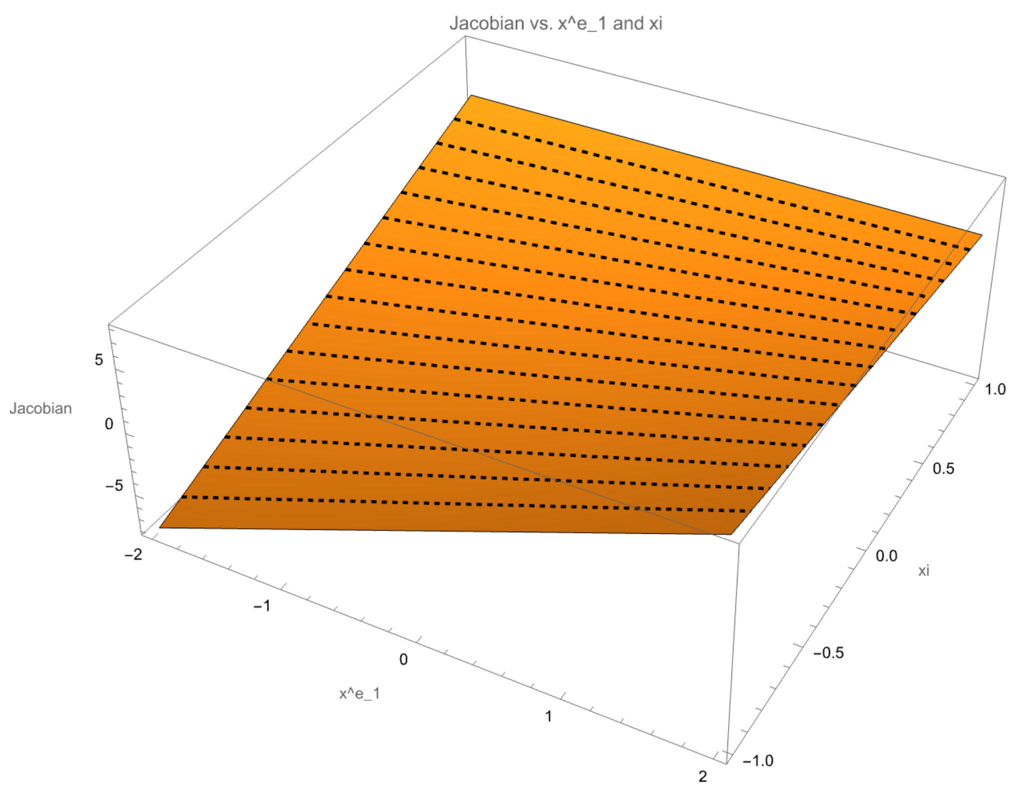


图 1: (a) 单元 Jacobian 图像

对于平面四边形节点 (a) 而言，其 Jacobian 在空间中呈现一个平面，并且满足 x_1^e,ξ 的边界条件。考虑 Jacobian 的物理意义：对于二维单元或二维问题，Jacobian 是母空间和物理空间内的单位面元的面积的比值。即存在关系 $dxdy = \boldsymbol{J}^e d\xi d\eta$。Jacobian 具体的数值是重要的，但我们更加关注 Jacobian 的符号。由反函数定理可知，构建的母空间到物理空间

的映射的逆映射存在且具有相同的连续性性质，当且仅当 Jacobian 在这一点处是可逆的，也即 $det(\boldsymbol{J}^e) \neq 0$。为了保证逆映射在整个物理空间内都存在且具有一定光滑性，我们需要保证 Jacobian 在整个母单元内均不为 0，再由连续性条件容易得到 Jacobian 在整个单元内均非负。在此条件下，形函数在物理空间内的光滑性得到了保证。在图 1 中使用一个平行于 $x_1^e\,\xi$，高度为 Jacobian=0 的平面截取图中的曲面，高于该平面的部分对应的 x_1^e 是划分网格时可以使用的 x_1^e 的位置。

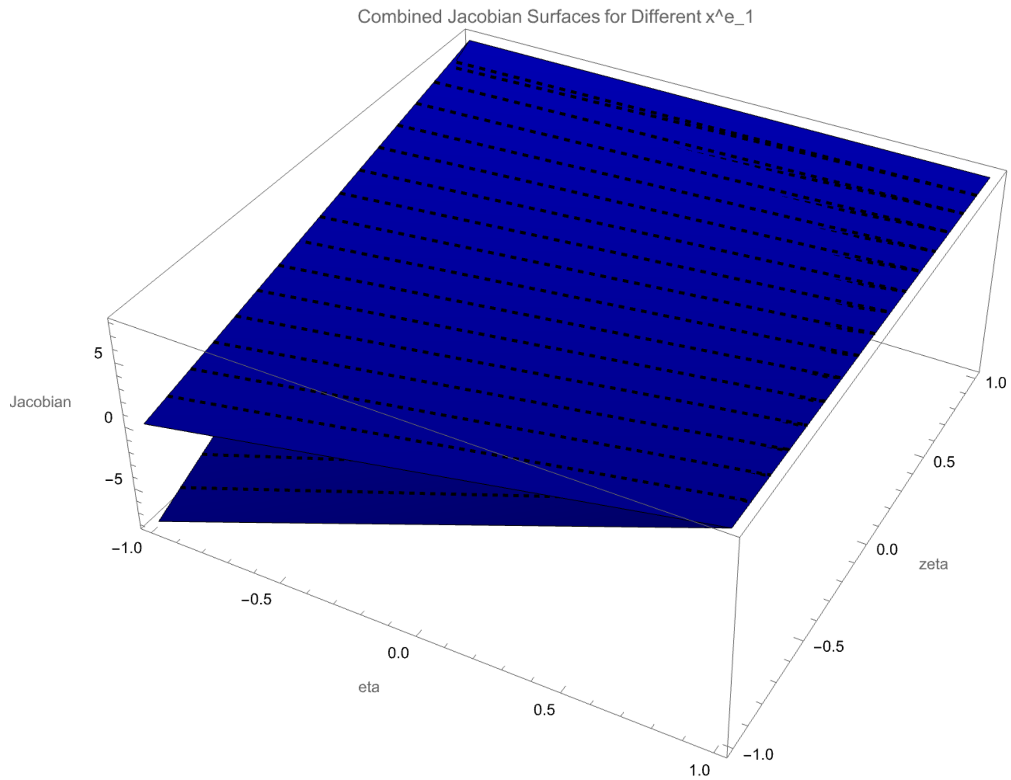
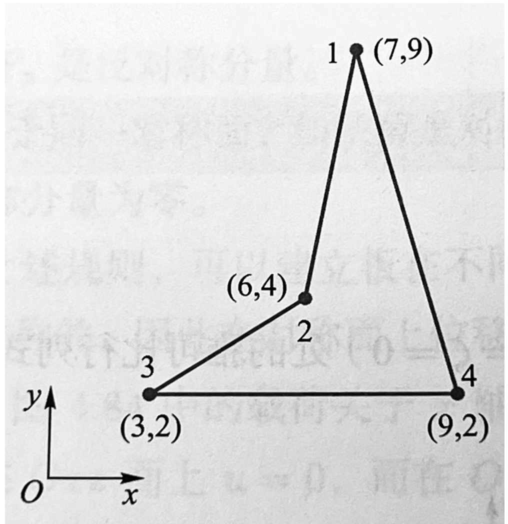


图 2: (b) 单元 Jacobian 图像

(b) 图对应的函数为一个三变量函数。以 $\eta\,\xi$ 作为底面两坐标轴，每一个 x_1^e 的值对应一个空间中的曲面。和之前的分析相似，使用 Jacobian=0 的平面作为分界线，使得整个曲面均高于该基准平面的所有 x_1^e 的值为划分单元时应该使用的 1 点的位置，其余位置会使得 Jacobi 在单元内存在奇点，导致形函数不光滑，丧失了连续性。

2 习题 4.3

计算习题 4.3 图所示单元的 Jacobi 矩阵 $\boldsymbol{J}^e(\xi,\eta)$，并确定 Jacobi 矩阵奇异的点的母坐标 (ξ,η)。



习题 4.3 图

该单元仍为平面四节点四边形单元，其母单元为四节点矩形 Q4 单元。复用习题 4.1 中得到的 Jacobi 矩阵：

$$\boldsymbol{J}^e = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \eta-1 & 1-\eta & 1+\eta & -1-\eta \\ \xi-1 & -\xi-1 & 1+\xi & 1-\xi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1^e & y_1^e \\ x_2^e & y_2^e \\ x_3^e & y_3^e \\ x_4^e & y_4^e \end{bmatrix}$$

对于该单元，有 $\boldsymbol{x}^e, \boldsymbol{y}^e$ 为

$$\boldsymbol{x}^e = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{y}^e = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$$

带入得 Jacobi 矩阵：

$$\boldsymbol{J}^e = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -5\eta - 7 & 5\eta - 5 \\ -5\xi - 1 & 5\xi - 9 \end{bmatrix}$$

其行列式的值：

$$det(\boldsymbol{J}^e) = \frac{1}{4}[(-5\eta - 7)(5\xi - 9) - (5\eta - 5)(-5\xi - 1)]$$

Jacobi 矩阵的奇异点满足行列式为 0，满足该条件的点的母坐标 (ξ, η) 为：

$$(-\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}) \quad and \quad (\frac{9}{5}, \frac{1}{5})$$