试探函数由完备性，取为3次完全多项式： $u^e(x)=\alpha_0+\alpha_1^e x+\alpha_2^e x^2+\alpha_3^e x^3$

$$\frac{du^e}{dx}=\alpha_1^e+2\alpha_2^e x+3\alpha_3^e x^2$$

由连续性要求，在单元节点处

$$\begin{cases}
u^e(x_1^e)=\alpha_0+\alpha_1^e x_1^e+\alpha_2^e(x_1^e)^2+\alpha_3^e(x_1^e)^3\equiv u_1^e\\
u^e(x_2^e)=\alpha_0+\alpha_1^e x_2^e+\alpha_2^e(x_2^e)^2+\alpha_3^e(x_2^e)^3\equiv u_2^e\\
\left.\frac{du^e}{dx}\right|_{x=x_1^e}=\alpha_1+2\alpha_2^e x_1^e+3\alpha_2^e(x_1^e)^2\equiv \varepsilon_1^e\\
\left.\frac{du^e}{dx}\right|_{x=x_2^e}=\alpha_1+2\alpha_2^e x_2^e+3\alpha_3^e(x_2^e)^2\equiv \varepsilon_2^e
\end{cases}$$

记 $d^e=[u_1^e, u_2^e, \varepsilon_1^e, \varepsilon_2^e]$， $\alpha^e=[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^T$，

则连续性要求可写为矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1^e & (x_1^e)^2 & (x_1^e)^3\\ 1 & x_2^e & (x_2^e)^2 & (x_2^e)^3\\ 0 & 1 & 2x_1^e & 3(x_1^e)^2\\ 0 & 1 & 2x_2^e & 3(x_2^e)^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_0\\ \alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1^e\\ u_2^e\\ \varepsilon_1^e\\ \varepsilon_2^e\end{bmatrix}$$

记为 $M^e\alpha^e=d^e$，则 $\alpha^e=(M^e)^{-1}d^e$

及试探函数 $u^e(x)=P(x)\alpha^e$，其中 $P(x)=[1, x, x^2, x^3]$

将 α^e 代入， $u^e(x)=P(x)(M^e)^{-1}d^e=N^e(x)d^e$，其中 $N^e(x)=P(x)(M^e)^{-1}$

$$(M^e)^{-1}=\begin{bmatrix}
\frac{(3x_1^e-x_2^e)(x_2^e)^2}{(l^e)^3} & \frac{(x_1^e)^2(x_1^e-3x_2^e)}{(l^e)^3} & -\frac{x_1^e(x_2^e)^2}{(l^e)^2} & -\frac{(x_1^e)^2x_2^e}{(l^e)^2}\\
-\frac{6x_1^e x_2^e}{(l^e)^3} & \frac{6x_1^e x_2^e}{(l^e)^3} & \frac{x_2^e(2x_1^e+x_2^e)}{(l^e)^2} & \frac{x_1^e(x_1^e+2x_2^e)}{(l^e)^2}\\
\frac{3(x_1^e+x_2^e)}{(l^e)^3} & -\frac{3(x_1^e+x_2^e)}{(l^e)^3} & -\frac{x_1^e+2x_2^e}{(l^e)^2} & -\frac{2x_1^e+x_2^e}{(l^e)^2}\\
-\frac{2}{(l^e)^3} & \frac{2}{(l^e)^3} & \frac{1}{(l^e)^2} & \frac{1}{(l^e)^2}
\end{bmatrix}$$

其中 $x_2^e-x_1^e=l^e$

$$N^e(x) = [1, x, x^2, x^3] \begin{bmatrix} \frac{(3x_1^e - x_2^e)x_2^{e^2}}{(l^e)^3} & \frac{x_1^{e^2}(x_1^e - 3x_2^e)}{(l^e)^3} & -\frac{x_1^e x_2^{e^2}}{(l^e)^2} & -\frac{x_1^{e^2} x_2^e}{(l^e)^2} \\ -\frac{6x_1^e x_2^e}{(l^e)^3} & \frac{6x_1^e x_2^e}{(l^e)^3} & \frac{x_2^e(2x_1^e + x_2^e)}{(l^e)^2} & \frac{x_1^e(x_1^e + 2x_2^e)}{(l^e)^2} \\ \frac{3(x_1^e + x_2^e)}{(l^e)^3} & -\frac{3(x_1^e + x_2^e)}{(l^e)^3} & -\frac{x_1^e + 2x_2^e}{(l^e)^2} & -\frac{2x_1^e + x_2^e}{(l^e)^2} \\ -\frac{2}{(l^e)^3} & \frac{2}{(l^e)^3} & \frac{1}{(l^e)^2} & \frac{1}{(l^e)^2} \end{bmatrix}$$

故 $N_1^e(x) = \frac{(3x_1^e - x_2^e)x_2^{e^2}}{(l^e)^3} - \frac{6x_1^e x_2^e}{(l^e)^3}x + \frac{3(x_1^e + x_2^e)}{(l^e)^3}x^2 - \frac{2}{(l^e)^3}x^3$

$N_2^e(x) = \frac{x_1^{e^2}(x_1^e - 3x_2^e)}{(l^e)^3} + \frac{6x_1^e x_2^e}{(l^e)^3}x - \frac{3(x_1^e + x_2^e)}{(l^e)^3}x^2 + \frac{2}{(l^e)^3}x^3$

$N_3^e(x) = -\frac{x_1^e x_2^{e^2}}{(l^e)^2} + \frac{x_2^e(2x_1^e + x_2^e)}{(l^e)^2}x - \frac{x_1^e + 2x_2^e}{(l^e)^2}x^2 + \frac{1}{(l^e)^2}x^3$

$N_4^e(x) = -\frac{x_1^{e^2} x_2^e}{(l^e)^2} + \frac{x_1^e(x_1^e + 2x_2^e)}{(l^e)^2}x - \frac{2x_1^e + x_2^e}{(l^e)^2}x^2 + \frac{1}{(l^e)^2}x^3$