Методы оптимизации и управления
О.И. Костюкова, О.И. Дугинов

Лабораторная работа 3 «Начальная фаза симплекс-метода»

Пусть имеется задача линейного программирования в канонической форме

$$\begin{aligned} &c^\intercal x \to \max \\ &Ax = b \\ &x \geqslant 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $c \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\intercal \in \mathbb{R}^n$ — вектор переменных, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — матрица, в которой m строк и n столбцов, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^\intercal \in \mathbb{R}^m$. Требуется определить совместна ли задача (1) и, в случае положительного ответа, найти какой-нибудь базисный допустимый план (x, B).

Начальная фаза симплекс-метода

Вход: $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $b \in \mathbb{R}^m$ — параметры задачи (1)

Выход: (x, B) — базисный допустимый план задачи (1) или сообщение о том, что задача (1) не имеет допустимых планов.

Шаг 1. Необходимо преобразовать задачу (1) таким образом, чтобы вектор правых частей b был неотрицательным. Для этого умножим на -1 все ограничения задачи, правая часть которых отрицательна. А именно, для каждого индекса $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ выполним следующую операцию: если $b_i < 0$, то умножим на -1 компоненту b_i и i-ю строку матрицы A;

Шаг 2. Составим вспомогательную задачу линейного программирования

$$\begin{aligned} &\widetilde{c}^\intercal \widetilde{x} \to \max \\ &\widetilde{A}\widetilde{x} = b \\ &\widetilde{x} \geqslant 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где вектор коэффициентов при переменных в целевой функции имеет вид

$$\widetilde{c}^\intercal = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n}, \underbrace{-1, -1, \ldots, -1}_{m}) \in \mathbb{R}^{n+m},$$

вектор переменных — $\widetilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m})^\intercal \in \mathbb{R}^{n+m}$ (переменные $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ называются *искусственными*), матрица $\widetilde{A}$ получается из матрицы A присоединением к ней справа единичной матрицы порядка m.

Шаг 3. Построим начальный базисный допустимый план $(\widetilde{x}, B)$ задачи (2)

$$\begin{gathered} \widetilde{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}, \\ B = \{j_1 = n+1, j_2 = n+2, \ldots, j_m = n+m\}. \end{gathered}$$

Шаг 4. Решим вспомогательную задачу (2) основной фазой симплекс-метода и получим оптимальный план

$$\widetilde{x} = \begin{pmatrix} \widetilde{x}_1 & \widetilde{x}_2 & \ldots & \widetilde{x}_n & \widetilde{x}_{n+1} & \widetilde{x}_{n+2} & \ldots & \widetilde{x}_{n+m} \end{pmatrix}^\intercal$$

и соответствующее ему множество базисных индексов B.

Шаг 5. Проверим условия совместности: если $\widetilde{x}_{n+1} = \widetilde{x}_{n+2} = \ldots = \widetilde{x}_{n+m} = 0$, то задача (1) совместна; в противном случае, задача (1) не совместна и метод завершает свою работу.

Шаг 6. Формируем допустимый план $x = \begin{pmatrix}\widetilde{x}_1 & \widetilde{x}_2 & \ldots & \widetilde{x}_n\end{pmatrix}$ задачи (1). Для него необходимо подобрать множество базисных индексов. С этой целью скорректируем множество B следующим образом.

Шаг 7. Если $B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, то метод завершает свою работу и возвращает базисный допустимый план (x, B).

Шаг 8. Выберем в наборе B максимальный индекс искусственной переменной

$$j_k = n + i.$$

Шаг 7. Для каждого индекса $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus B$ вычислим вектор

$$\ell(j) = \widetilde{A}_B^{-1}\widetilde{A}_j,$$

где $\widetilde{A}_j$ — это j-ый столбец матрицы $\widetilde{A}$.

Шаг 8. Если найдется индекс $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus B$ такой, что $(\ell(j))_k \neq 0$, то заменим в наборе B значение j_k, равное $n + i$, на j.

Шаг 9. Если для любого индекса $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus B$ выполняется $(\ell(j))_k = 0$, то i-е основное ограничение задачи (1) линейно выражается через остальные и его необходимо удалить. В этом случае удалим i-ую строку из матрицы A и i-ую компоненту из вектора b. Удалим из B индекс $j_k = n + i$. Кроме этого, удалим i-ую строку из матрицы $\widetilde{A}$. Переходим на Шаг 7.

Проиллюстрируем работу метода на примере. Рассмотрим задачу (P) линейного программирования

$$x_1 \to \max$$

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 0\\
2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0\\
x_1 &\geqslant 0\\
x_2 &\geqslant 0\\
x_3 &\geqslant 0
\end{aligned}$$

Размеры задачи $m = 2$ и $n = 3$. Вектор коэффициентов при переменных в целевом функционале

$$c^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Матрица коэффициентов при переменных в основных ограничениях

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

Вектор правых частей

$$b = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Так как $b \geqslant 0$, то корректировать вектор b не нужно.

Составляем вспомогательную задачу линейного программирования (2), в которой вектор переменных

$$\widetilde{x}^\intercal = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix},$$

вектор коэффициентов переменных в целевом функционале

$$\widetilde{c}^\intercal = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

матрица $\widetilde{A}$ получается из матрицы A приписыванием к ней справа единичной матрицы порядка два

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Формируем начальный базисный допустимый план (x, B) задачи (2), в котором

$$\widetilde{x}^\intercal = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \{j_1 = 4, j_2 = 5\}.$$

Решаем вспомогательную задачу (2) основной фазой симплекс-метода и получаем оптимальный план $\widetilde{x}^\intercal = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ с соответствующим множеством базисных индексов $B = \{j_1 = 1, j_2 = 5\}$. В плане $\widetilde{x}$ значения искусственных переменных x_4 и x_5 равны 0. Следовательно, задача (P) совместна. Значения переменных x_1, x_2, x_3 в $\widetilde{x}$ образуют допустимый план задачи (1)

$$x^\intercal = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В множестве B базисных индексов выбираем максимальный индекс искусственной переменной

$$j_2 = 5 = 3 + 2.$$

Таким образом, $k = 2$ и $i = 2$. Для каждого индекса $j \in \{1, 2, 3\} \setminus B = \{2, 3\}$ найдем вектор $\ell(j)$

$$\ell(2) = \widetilde{A}_B^{-1} \widetilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\ell(3) = \widetilde{A}_B^{-1} \widetilde{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что для любого индекса $j \in \{1, 2, 3\} \setminus B$ компонента $(\ell(j))_k = 0$. Стало быть, i-ое ограничение задачи (P) линейно выражается через остальные и его необходимо удалить. Из матриц A и $\widetilde{A}$ исключим вторую строку, а из вектора b вторую компоненту. Из множества B удалим выбранный индекс искусственной переменной j_2. Получаем множество $B = \{j_1 = 1\}$. Поскольку в B нет индексов искусственных переменных, то метод завершает свою работу.

Ответ: $x^\intercal = (0, 0, 0)$, $B = \{j_1 = 1\}$, $A = (1, 1, 1)$ и $b = (1)$.