

# Lecture notes FY8305

13. august 2019

Digitalisert fra FAG 74986 Funksjonal-integral metoder HØST 1996. Brukes per 2019 som forelesningsnotater til selvstudium for faget FY8305 -Funksjonalintegral metoder i kondenserte fasers fysikk

## Innhold

<b>1</b>	<b>Kort rekapitulering av 2. kvantisering for fermioner og bosoner</b>	<b>2</b>
1.1	Mangepartikkelbasis . . . . .	2
1.2	Fra klassisk til 2.kvantisering av én-partikkel operatorer . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Koherente tilstander for bosoner</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Grassman variable</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Koherente tilstander for fermioner</b>	<b>6</b>

## 1 Kort rekapitulering av 2. kvantisering for fermioner og bosoner

Notasjon:  $\mu$  = sett av kvantetall som bestemmer en én-partikkel tilstand.

### 1.1 Mangepartikkelbasis

Eks 1.

$$\begin{aligned}\mu &= (\vec{k}, \sigma) : \text{Bølgetall, spinn} \\ \mu &= (i, \sigma) : \text{Gitterpunkt, spinn} \\ \mu &= (n, i) : \text{Orbital, gitterpunkt}\end{aligned}$$

En mange-partikkel basis kan skrives  $|\phi\rangle = |n_\mu, n_\nu, \dots, n_{\mu_N}\rangle$ . Mangepartikkeltilstander er bygget opp av én-partikkel tilstander, men hvor én-partikkeltilstandene ikke nødvendigvis er uavhengige. Dersom ett av kvantetall-settene,  $\mu_i$ , endres, får denne spredningen generelt konsekvenser for fordelingen av kvantetall i de øvrige kvantetallene  $\{\mu_j\}_{j \neq i}$ . Vi tenker oss at en generell mangepartikkeltilstand kan bygges opp som en lineærkombinasjon av  $|\phi\rangle$ -er;

$$|\Psi\rangle = \sum_{n_\mu, \dots, n_{\mu_N}} \phi_{\mu, \dots, n_{\mu_N}} |\mu, \dots, n_{\mu_N}\rangle. \quad (1)$$

Én-bestemt tilstandsvektor  $|n_\mu, \dots, n_{\mu_N}\rangle$  kan kreves fra en vakuu-tilstand  $|0\rangle$  (ingen kvant i noen av de mulige én-partikkeltilstandene) via kreasjonsoperatorer.

$$\begin{aligned}\text{bosoner} : & a_\mu^\dagger \\ \text{fermioner} : & c_\mu^\dagger\end{aligned}$$

Et kvant i en én-partikkeltilstand kan destrueres v.h.a annihilasjonsoperatorene

$$\begin{aligned}\text{bosoner} : & a_\mu \\ \text{fermioner} : & c_\mu\end{aligned}$$

Disse operatorene oppfyller diverse kommutasjonsrelasjoner

$$[a_\mu, a_\nu] = [a_\mu^\dagger, a_\nu^\dagger] = 0 \quad (2)$$

$$[a_\mu, a_\nu^\dagger] = \delta_{\mu\nu} \quad (3)$$

$$[A, B] = AB - BA \quad (4)$$

$$\{c_\mu^\dagger, c_\nu^\dagger\} = \{c_\mu, c_\nu\} = 0 \quad (5)$$

$$\{c_\mu, c_\nu^\dagger\} = \delta_{\mu\nu} \quad (6)$$

I tillegg kommer Pauli-prinsippet, som gir symmetriske/antisymmetriske kommutatorer ved ombytte, avhengig om det er fermion eller boson.

## 1.2 Fra klassisk til 2.kvantisering av én-partikkel operatorer

For én-partikkel operatorer har vi som regel for den kinetiske energien

$$T = \sum_i T(\vec{r}_i, \vec{p}_i) = \sum_i T\left(\vec{r}_i, \frac{\partial}{\partial r}\right) \quad (7)$$

**Eks 2.** Eksternt elektrostatiske potensial:

$$T = \sum_i V_{\text{ext}}(\vec{r}_i) \quad (8)$$

**Eks 3.** Kinetisk energi:

$$T = \sum_i \frac{p^2}{2m} = - \sum_i \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 \quad (9)$$

**Eks 4.** Krystall-potensial:

$$T = \sum_i \sum_j v_{\text{cryst}}(\vec{r}_i, \vec{R}_j) \quad (10)$$

2. kvantisering av en slik operator kan skrives

$$T = \sum_{\mu, \nu} T_{\mu\nu} c_{\mu}^{\dagger} c_{\nu}, \quad (11)$$

hvor

$$T_{\mu\nu} = \langle \mu | T(\vec{r}, \vec{p}) | \nu \rangle. \quad (12)$$

**NB:** Matriseelementet av én-partikkel operatorer er bestemt av matrise-elementer i Hilbertrommet av én-partikkel tilstander

## 1.3 Fra klassisk til 2. kvantisering av to-partikkel operator

Vi ser typisk på par-potensialer

$$V = \sum_{i,j} V(\vec{r}_i, \vec{r}_j). \quad (13)$$

**Eks 5.** Vekselvirkning mellom to ladninger

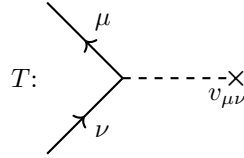
$$V = \frac{e^2}{2} \sum_{i \neq j} \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (14)$$

2. kvantisert versjon er

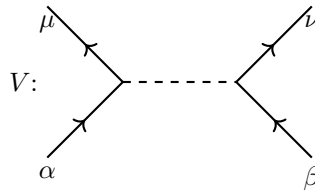
$$V = \sum_{\mu, \dots, \beta} V_{\mu\nu\alpha\beta} c_{\mu}^{\dagger} c_{\nu}^{\dagger} c_{\alpha} c_{\beta}, \quad (15)$$

1 KORT REKAPITULERING AV 2. KVANTISERING FOR FERMIONER  
1.3 Fra klassisk til 2. kvantisering av to-partikkel operator OG BOSONER

---



Figur 1: Spredning fra eksternt potensial  $v_{\mu\nu}c_{\mu}^{\dagger}c_{\nu}$



Figur 2: Vekselvirkning mellom to partikler.

hvor igjen

$$V_{\mu\nu\alpha\beta} = \langle \mu\nu | V(\vec{r}_i, \vec{r}_j) | \beta\alpha \rangle \quad (16)$$

**NB: Matrise-elementer av to-partikkel operatorer er bestemt av matrise-elementer i Hilbert-rommet av to-partikkel tilstander.**

Hamilton-operatoren:

$$H = T + V \quad (17)$$

$$T = - \sum_i \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 \quad (18)$$

Så langt er dette bare gjort for fermione-operatorer, men helt tilsvarende utsagn gjelder selvsagt for bosoner. 2. kvantisert versjon av Hamilton-operatoren for et vekselvirkende, materielt, boson-system har identisk samme form som ??  
Legg merke til at hvert ledd i  $H$  har like mange  $c_{\mu}^{\dagger}$  som  $c_{\nu}$ .

## 2 Koherente tilstander for bosoner

### 3 Grassman variable

## 4 Koherente tilstander for fermioner