NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE
UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK
Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Asle Sudbø
Tlf: 93403

EKSAMEN I FAG 74986 FUNKSJONALINTEGRALMETODER I
KONDENSERTE FASERS FYSIKK
Fredag 10. januar, 1997
kl. 0900-1400
Tillatte hjelpemidler: Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Rottmann: Matematisk formelsamling

Oppgave 1

a) Gi definisjonen av en koherent kvante-tilstand.

b) Gi en fysisk motivert forklaring på hvorfor koherente tilstander for bosoner og fermioner er forskjellige.

c) Konstruer koherente tilstander for bosoner og fermioner.

d) Finn gjennomsnittlig antall partikler i en koherent boson-tilstand. Finn fluktuasjonskvadratet $< \hat{N}^2 > - < \hat{N} >^2$ av antall partikler i en slik tilstand, hvor $\hat{N}$ er antallsoperatoren, og middelverdiene er tatt over koherente tilstander.

e) Finn et uttrykk for sporet av en vilkårlig operator A ved hjelp av koherente boson- og fermion-tilstander.

Oppgave 2

La $|x_i >$ og $|x_f >$ være egentilstander til posisjonsoperatoren h.h.v. ved tidene t_i og t_f. La $U(t_f, t_i)$ være evolusjonsoperatoren til en tilstand i Schrödinger-bildet, definert ved:

$$|\Psi(t_f) >= U(t_f, t_i)|\Psi(t_i) >$$

når $|\Psi(t) >$ tilfredsstiller Schrödinger-ligningen.

a) Finn et vei-integral uttrykk for matrise-elementet

$$U(x_f, t_f; x_i, t_i) =< x_f|U(t_f, t_i)|x_i >$$

b) Bruk dette til å finne et imaginær-tid vei-integral uttrykk for partisjons-funksjonen til en partikkel med Hamilton operator H

$$Z = \mathrm{Tr}[\exp(-\beta \mathrm{H})]$$

c) La $|\phi_f >$ og $|\phi_i >$ være koherente tilstander h.h.v. ved tiden t_f og t_i. La H være Hamilton-operatoren til et system. Ved en metode tilsvarende den i punkt a) kan man finne (skal ikke vises) et vei-integral uttrykk for matrise-elementet

$$U(\phi_f, t_f; \phi_i, t_i) = < \phi_f | e^{-iH(t_f - t_i)} | \phi_i > \qquad \hbar = 1$$

for dette systemet. Fra dette kan det videre vises (skal ikke vises) at et imaginær-tid vei-integral uttrykk for en mange-partikkel partisjonsfunksjon er gitt ved

$$\begin{aligned} Z &= \int D[\phi^*]\ D[\phi]\ e^S \\ S &= -\int_0^\beta d\tau\ [\sum_\lambda \phi_\lambda^* \partial_\tau \phi_\lambda + H(\{\phi_\lambda^*, \phi_\lambda\})] \end{aligned} \tag{1}$$

hvor λ angir et sett av kvantetall. Bruk dette til å vise at partisjonsfunksjonen for en fri, spinnløs fermion gass med Hamilton-operator

$$H = \sum_k e_k\ c_k^+\ c_k$$

er gitt ved

$$Z = \prod_k\ [1 + \exp(-\beta\ e_k)\ ]$$

hvor k er et bølgetall (bestemt f.eks ved bokskvantisering).

d) Finn et uttrykk for en statistisk middelverdi av en fermion-observabel A uttrykt ved et funksjonal-integral over Grassman-variable.

e) Beregn en-partikkel imaginær-tidsordnet propagator for de frie spinnløse fermionene i punkt c)

$$G(k, \tau) = < T_\tau\ [c_k(\tau)\ c_k^+(0)] >$$

hvor T_τ er imaginær-tidsordnings operatoren.

Oppgave 3

En sentral modell i kondenserte fasers fysikk er Hubbard-modellen, definert ved Hamilton-operatoren

$$H = -\sum_{i,j,\sigma} t_{ij}\ c_{i,\sigma}^+ c_{j,\sigma} + U \sum_i\ n_{i,\uparrow}\ n_{i,\downarrow}$$

hvor $c_{i,\sigma}^{+}$ er kreasjonsoperator for et fermion på gitterpunkt i i spinntilstand σ, $c_{i,\sigma}$ er tilsvarende destruksjonsoperator, $n_{i,\sigma} = c_{i,\sigma}^{+} c_{i,\sigma}$, og t_{ij} er et nærmeste-nabo en-partikkel tunnelerings matrise-element fra gitterpunkt i til gitterpunkt j. Det antas at $U > 0$.

a) Vis at

$$n_{i,\uparrow}\, n_{i,\downarrow} = \frac{1}{4}\,(n_i\, n_i - \sigma_i^z\, \sigma_i^z)$$

hvor $n_i = \sum_\sigma n_{i,\sigma}$, og $\sigma_i^z = \sum_\sigma \sigma\, n_{i,\sigma}$. Vekselvirkningsleddet i Hubbard-modellen kan altså deles opp i en ladningsdel $n_i n_i$ og en spinndel $\sigma_i^z \sigma_i^z$.

b) Partisjonsfunksjonen for systemet kan skrives (i standard notasjon)

$$Z = \int D[c^+]\; D[c]\; e^S$$
$$S = S_0 + S_I^n + S_I^\sigma$$

hvor c-er i *funksjonal-integralet* angir Grassman-variable. S_0 er virkningen for $U = 0$, og S_I^n og S_I^σ er bidragene til virkningen fra h.h.v. ladnings- og spinn-delen av Hubbard vekselvirkningsleddet. Angi S_0, S_I^n og S_I^σ.

c) Innfør to sett av hjelpe-boson felt $\{a_i^+, a_i\}$ og $\{b_i^+, b_i\}$. Bruk a-bosonene til å foreta en Hubbard-Stratonovich-dekopling av S_I^n, slik at a-bosonene kobler lineært til n_i. Tilsvarende, foreta en Hubbard-Stratonovich dekopling av S_I^σ, slik at b-bosonene kobler lineært til σ_i^z. Gi en tolkning av den resulterende partisjons-funksjonen.

d) Integrer ut fermionene og vis at partisjonsfunksjonen tar formen

$$Z = \int D[a^+]\; D[a]\; D[b^+]\; D[b]\; \exp(\tilde{S})$$

og angi et uttrykk for $\tilde{S}$ på formen en kvadratisk boson-sektor addert til en fermion-determinant.

e) Beregn fri-energi til dette systemet i sadelpunkt-approksimasjon (k-summasjoner kreves ikke utregnet). Finn stasjonærpunkt-ligningene. (Ligningene kreves ikke løst).

Oppgitt:

1) Binomial-formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \; a^{n-k} \; b^k$$

2) Fermi-fordeling

$$f(z) = \frac{1}{1+\exp(\beta z)}$$

hvor $\beta = 1/k_B T$.

3) Fermionisk Matsubara-frekvens

$$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 ...$$

4) Residyet til Fermi-fordelingen ved $z = i\omega_n$

$$\text{Res } [f(i\omega_n)] = -\frac{1}{\beta}$$

5) Fullstendighetsrelasjon for koherente tilstander

$$\int \prod_{\lambda} \frac{d\phi^*_{\lambda,k} \, d\phi_{\lambda,k}}{N} \; \exp(-\sum_{\lambda} \phi^*_{\lambda,k} \phi_{\lambda,k}) \; |\phi_{\lambda,k}> \, < \phi_{\lambda,k}| = 1$$

hvor λ angir et sett av kvantetall og k angir en Trotter-indeks, og

$$\begin{aligned} N &= 2\pi i \quad \text{for bosoner} \\ &= 1 \quad \text{for fermioner} \end{aligned}$$

6) Multippelt Gaussisk integral over c-talls variable

$$\int \prod_i \frac{d\phi_i^* d\phi_i}{2\pi i} \; \exp(-\phi_i^* A_{ij} \phi_j + J_i^* \phi_i + \phi_i^* J_i) = \frac{1}{\det \mathrm{A}} \; \exp(J_i^* A_{ij}^{-1} J_j)$$

7) Multippelt Gaussisk integral over Grassman-variable

$$\int \prod_i d\xi_i^* \; d\xi_i \; \exp(-\xi_i^* A_{ij} \xi_j + J_i^* \; \xi_i + \xi_i^* \; J_i) = \det(\mathrm{A}) \; \exp(J_i^* \; A_{ij}^{-1} \; J_j)$$

$$(\xi_i^* + J_j^* A_{ji}^{-1}) \, A_{ij} \, (\xi_j + A_{ji}^{-1} J_j) - J_j^* A_{ji}^{-1} J_i$$

$$= \xi_i^* A_{ij} \xi_j + J_j^* \xi_j + \xi_i^* J_i \quad \checkmark$$