

第八章 假设检验

§1 假设检验的基本思想与基本概念 §2 单正态总体参数的假设检验

§3 双正态总体参数的假设检验

一、单项选择题

(1) 解应选 (A)。

由于显著性水平 α 越小, 接受域的范围就越大, 也就是说在显著性水平 $\alpha = 0.01$ 下的接受域包含了在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下的接受域, 若在 $\alpha = 0.05$ 下接受 H_0 , 即检验统计量的样本值落入在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下的接受域内, 则检验统计量的样本值也一定落入在显著性水平 $\alpha = 0.01$ 下的接受域内, 因此在显著性水平 $\alpha = 0.01$ 下必接受 H_0 , 故选 (A)。

(2) 解应选 (B)。

由于当 σ^2 未知时, 单正态总体均值的右边检验的接受域为 $\frac{\bar{x}-1}{s/\sqrt{n}} \in (-\infty, t_\alpha(n-1))$, 即 $\bar{x} < 1 + \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)$, 又由于 $\alpha = 0.05$, 因此其拒绝域为 $\bar{x} \geq 1 + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{0.05}(n-1)$, 故选 (B)。

(3) 解应选 (D)。

由于显著性水平 α 越小, 接受域的范围就越大, 因此在显著性水平 $\alpha = 0.01$ 下的接受域包含了在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下的接受域, 从而在显著性水平 0.05 下的拒绝域与在显著性水平 0.01 下的接受域和拒绝域的交集都不空, 从而可能接受也可能拒绝 H_0 , 故选 (D)。

(4) 解应选 (C)。

由第二类错误的定义知, 第二类错误是指存伪错误, 即 H_0 不真接受 H_0 , 故选 (C)。

二、填空题

(1) 解应填 $T = \frac{\sqrt{n(n-1)}\bar{X}}{Q}$ 。

由于当 σ^2 未知时, 单正态总体均值的双边检验选择的检验统计量为

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

又由于 $\mu_0 = 0$, $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = \frac{Q}{\sqrt{n-1}}$, 因此

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}\bar{X}}{\frac{Q}{\sqrt{n-1}}} = \frac{\sqrt{n(n-1)}\bar{X}}{Q}$$

故填 $T = \frac{\sqrt{n(n-1)}\bar{X}}{Q}$ 。

(2) 解应填 $\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2}$ ，自由度为 n 的 χ^2 。

由于当 μ 已知时，单正态总体方差的双边检验选择的检验统计量为

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n)$$

因此假设检验选择的统计量为 $\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2}$ ，当 H_0 为真时，检验统计量服从自由度为 n 的 χ^2

分布，故填 $\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2}$ ，自由度为 n 的 χ^2 。

三、解 (i) 需检验

$$H_0: \mu = 20, H_1: \mu \neq 20$$

(ii) 选择检验统计量

$$U = \frac{\bar{X} - 20}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

(iii) 由于 $\alpha = 0.05$ ，因此临界点为 $\pm z_{\frac{\alpha}{2}} = \pm 1.96$ ，从而接受域为 $(-1.96, 1.96)$ ；

(iv) 由于 $n = 5$ ， $\sigma = 1$ ， $\bar{x} = 19.6$ ，因此检验统计量 U 的样本值为

$$u = \frac{19.6 - 20}{1/\sqrt{5}} = -0.89$$

(v) 由于 $u = -0.89 \in (-1.96, 1.96)$ ，因此接受 H_0 ，即生产过程正常。

四、解 (i) 需检验

$$H_0: \sigma \leq 0.005, H_1: \sigma > 0.005$$

(ii) 选择检验统计量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{0.005^2} \sim \chi^2(n-1)$$

(iii) 由于 $\alpha = 0.05$, $n = 9$, 因此临界点为 $\chi_{\alpha}^2(n-1) = \chi_{0.05}^2(8) = 15.507$, 从而接受域为 $(0, 15.507)$;

(iv) 由于 $n = 9$, $s = 0.007$, 因此检验统计量 χ^2 的样本值为

$$\chi^2 = \frac{(9-1) \times 0.007^2}{0.005^2} = 15.68$$

(v) 由于 $\chi^2 = 15.68 \notin (0, 15.507)$, 因此拒绝 H_0 , 即可以认为这批导线的标准差显著地偏大。

五、解 (i) 需检验

$$H_0: \sigma \geq 0.04\%, H_1: \sigma < 0.04\%$$

(ii) 选择检验统计量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{(0.04\%)^2} \sim \chi^2(n-1)$$

(iii) 由于 $\alpha = 0.05$, $n = 10$, 因此临界点为 $\chi_{1-\alpha}^2(n-1) = \chi_{0.95}^2(9) = 3.325$, 从而接受域为

$$(3.325, +\infty)$$

(iv) 由于 $n = 10$, $s = 0.037\%$, 因此检验统计量 χ^2 的样本值为

$$\chi^2 = \frac{(10-1) \times (0.037\%)^2}{(0.04\%)^2} = 7.701$$

(v) 由于 $\chi^2 = 7.701 \in (3.325, +\infty)$, 所以接受 H_0 , 即可以认为 $\sigma \geq 0.04\%$ 。

六、解 (i) 需检验

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

(ii) 选择检验统计量

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

(iii) 由于 $\alpha = 0.01$, $n_1 = 8$, $n_2 = 9$, 因此临界点为 $\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2-1, n_1-1)} = \frac{1}{F_{0.005}(8, 7)} = \frac{1}{8.68}$,

$F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1) = F_{0.005}(7, 8) = 7.69$, 从而接受域为 $(\frac{1}{8.68}, 7.69)$;

(iv) 由于 $s_1^2 = 0.29$, $s_2^2 = 0.34$, 因此检验统计量 F 的样本值为

$$f = \frac{0.29}{0.34} = 0.8529$$

(v) 由于 $f = 0.8529 \in (\frac{1}{8.68}, 7.69)$, 因此接受 H_0 , 即可以认为机器 A 和机器 B 加工的精度无显著的差异。

度无显著的差异。

七、解 设第一批棉纱的断裂强力 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, 第二批棉纱的断裂强力 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 分

两步检验:

(1) 第一步需检验方差。

(i) 需检验

$$H_{01}: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_{11}: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

(ii) 选择检验统计量

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

(iii) 由于 $\alpha = 0.05$, $n_1 = 200$, $n_2 = 100$, 因此临界点为 $\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2-1, n_1-1)} = \frac{1}{F_{0.025}(99, 199)} = \frac{1}{1.33}$,

$F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1) = F_{0.025}(199, 99) = 1.395$, 从而接受域为 $(\frac{1}{1.33}, 1.395)$;

(iv) 由于 $s_1 = 0.218$, $s_2 = 0.198$, 因此检验统计量 F 的样本值为

$$f = \frac{0.218^2}{0.198^2} = 1.2122$$

(v) 由于 $f = 1.2122 \in (\frac{1}{1.33}, 1.395)$, 因此接受 H_{01} , 即可以认为 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ 。

(2) 第二步需检验均值。

(i) 需检验

$$H_{02}: \mu_1 = \mu_2, H_{12}: \mu_1 \neq \mu_2$$

(ii) 选择检验统计量

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_{\omega} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

$$\text{其中 } S_{\omega} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}};$$

(iii) 由于 $\alpha = 0.05$, $n_1 = 200$, $n_2 = 100$, 因此临界点为 $\pm t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) = \pm t_{0.025}(298) = \pm 1.96$,

从而接受域为 $(-1.96, 1.96)$;

(iv) 由于 $n_1 = 200$, $n_2 = 100$, $\bar{x} = 0.532$, $\bar{y} = 0.576$, $s_1 = 0.218$, $s_2 = 0.198$, 因此

$$s_{\omega} = \sqrt{\frac{(200 - 1) \times 0.218^2 + (100 - 1) \times 0.198^2}{200 + 100 - 2}} = 0.2116$$

从而检验统计量 T 的样本值为

$$t = \frac{0.532 - 0.576}{0.2116 \times \sqrt{\frac{1}{200} + \frac{1}{100}}} = -1.6978$$

(v) 由于 $t = -1.6978 \in (-1.96, 1.96)$, 因此接受 H_{02} , 即可以认为两批棉纱的断裂强力无显著的差异。