第五章　大数定律及中心极限定理

§1 Chebyshev 不等式　　§2 大数定律　　§3 中心极限定理

一、单项选择题

（1）解应选（D）。

由 Chebyshev 不等式，得

$$P(|X-\mu|<2\sigma)=P(|X-EX|<2\sigma)\geq 1-\frac{DX}{4\sigma^2}=1-\frac{\sigma^2}{4\sigma^2}=\frac{3}{4}$$

故选（D）。

（2）解应选（C）。

由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x\frac{dF(x)}{dx}\right|dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|b||x|}{\pi(b^2+x^2)}dx=2\int_{0}^{+\infty}\frac{|b||x|}{\pi(b^2+x^2)}dx=\frac{2|b|}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{\pi(b^2+x^2)}dx$$

$$=\frac{|b|}{\pi}\lim_{t\to+\infty}\int_0^t\frac{d(b^2+x^2)}{\pi(b^2+x^2)}=\frac{|b|}{\pi}\lim_{t\to+\infty}\ln(1+\frac{t^2}{b^2})=+\infty$$

因此辛钦大数对此序列不适用，故选（C）。

（3）解应选（A）。

方法一由中心极限定理知，当 n 充分大时，$\sum_{i=1}^{n}X_i$ 近似地服从正态分布 $N(n\mu,n\sigma^2)$，从而 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 近似地服从正态分布 $N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$，故选（A）。

方法二 由中心极限定理知，当 n 充分大时，$\sum_{i=1}^{n}X_i$ 近似地服从正态分布 $N(n\mu,n\sigma^2)$，从而 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 近似地服从正态分布 $N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$，由大数定律知，$\lim_{n\to\infty}P(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon)=1$，所以选项（B）、（C）、（D）都是正确选项，故选（A）。

（4）解应选（C）。

方法一由 Lindeberg-Levy 中心极限定理知，当 n 充分大时，要 S_n 近似地服从正态分布，只要 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 相互独立同分布，且数学期望和方差存在，故选（C）。

方法二由于选项（A）、（B）缺少同分布条件，因此选项（A）、（B）不正确。选项（D）缺少期

望和方差存在条件，所以选项（D）不正确，故选（C）。

二、填空题

（1）解应填$\frac{1}{9}$。

由 Chebyshev 不等式，得$P(|X-\mu|\ge 3\sigma)=P(|X-EX|\ge 3\sigma)\le \frac{DX}{(3\sigma)^2}=\frac{\sigma^2}{9\sigma^2}=\frac{1}{9}$，故填$\frac{1}{9}$。

（2）解应填0。

由 Bernoulli 大数定律知，$\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{\eta_n}{n}-p\right|\ge \varepsilon\right)=0$，故填$0$。

三、解设X表示 6 颗骰子出现的点数之和，$X_i\ (i=1,2,\cdots,6)$表示第i颗骰子出现的点数，则

$X_1,X_2,\cdots,X_6$相互独立，

$X=\sum\limits_{i=1}^{6}X_i$，且

$$P(X_i=k)=\frac{1}{6},\quad k=1,2,\cdots,6,\ i=1,2,\cdots,6$$

$$EX_i=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+\cdots+6\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}，\ EX_i^2=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+\cdots+6^2\times\frac{1}{6}=\frac{91}{6}$$

从而

$$DX_i=EX_i^2-(EX_i)^2=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{35}{12},\quad i=1,2,\cdots,6$$

所以

$$EX=\sum_{i=1}^{6}EX_i=6\times\frac{7}{2}=21,\ DX=\sum_{i=1}^{6}DX_i=6\times\frac{35}{12}=\frac{35}{2}$$

由 Chebyshev 不等式，得

$$P(15\le X\le 27)=P(14<X<28)=P(-7<X-21<7)$$

$$=P(|X-EX|<7)\ge 1-\frac{DX}{7^2}=1-\frac{1}{49}\times\frac{35}{2}=\frac{9}{14}$$

四、解设$X_i\ (i=1,2,\cdots,5000)$表示第i只零件的重量，则$X_1,X_2,\cdots,X_{5000}$相互独立同分布，

且 $EX_i=0.5,\ DX_i=0.1^2,\ i=1,2,\cdots,5000$。由中心极限定理知，5000 只零件的总重量 $\sum_{i=1}^{5000}X_i$ 近似地服从正态分布 $N(5000\times0.5,5000\times0.1^2)$，故所求的概率为

$$P(\sum_{i=1}^{5000}X_i>2510)=1-P(\sum_{i=1}^{5000}X_i\le 2510)\approx 1-\Phi(\frac{2510-2500}{5\sqrt{2}})$$

$$=1-\Phi(\sqrt{2})=1-0.9213=0.0787$$

五、解 设 $X_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 表示一辆汽车承运的第 i 箱产品的重量（单位：kg），n 为所求的箱数，则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为相互独立同分布的随机变量，从而该辆汽车所承运的 n 箱总重量为 $T_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$。由于 $EX_i=50,\ DX_i=5^2,\ i=1,2,\cdots,n$，因此

$$ET_n=50n,\ DT_n=25n$$

由中心极限定理知，T_n 近似地服从正态分布 $N(50n,25n)$，从而 n 取决于如下条件：

$$P(T_n\le 5000)\approx\Phi(\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}})=\Phi(\frac{1000-10n}{\sqrt{n}})>0.977=\Phi(2)$$

从而 $\frac{1000-10n}{\sqrt{n}}>2$，即 $n<98.0199$，所以每辆汽车最多可以装 98 箱，才能保证不超载的概率大于 0.977。

六、解 设 X 表示一年内参加保险的 10000 人中的死亡人数，则 $X\sim B(10000,0.006)$，从而 $EX=10000\times0.006=60$，$DX=10000\times0.006\times0.994=59.64$。由中心极限定理知，$X$ 近似地服从正态分布 $N(60,59.64)$，由题设知，保险公司的年利润为

$$120000-1000X=1000(120-X)$$

（1）保险公司年利润不少于 60000 元的概率为

$$P(1000(120-X)\ge 60000)=P(0\le X\le 60)\approx\Phi(\frac{60-60}{\sqrt{59.64}})-\Phi(\frac{0-60}{\sqrt{59.64}})$$

$$=\Phi(0)-\Phi(-7.77)=0.5$$

（2）保险公司亏本的概率为

$$P(1000(120-X)<0)=P(X>120)=1-P(0\le X\le 120)$$

$$\approx 1-[\Phi(\frac{120-60}{\sqrt{59.64}})-\Phi(\frac{0-60}{\sqrt{59.64}})]$$

$$=1-[\Phi(7.77)-\Phi(-7.77)]=0$$

七、解（1）由题设，得 $E\overline{X}=5,\ D\overline{X}=\frac{0.3}{80}$，由中心极限定理知，$\overline{X}$ 近似地服从正态分布 $N(5,\frac{0.3}{80})$，故

$$P(4.9<\overline{X}<5.1)\approx\Phi(\frac{5.1-5}{\sqrt{\frac{0.3}{80}}})-\Phi(\frac{4.9-5}{\sqrt{\frac{0.3}{80}}})=\Phi(1.63)-\Phi(-1.63)$$

$$=2\Phi(1.63)-1=2\times0.9484-1=0.8968$$

（2）由题设，得 $E(\overline{X}-\overline{Y})=E\overline{X}-E\overline{Y}=0,\ D(\overline{X}-\overline{Y})=D\overline{X}+D\overline{Y}=\frac{0.3}{40}$，由中心极限定理知，$\overline{X}-\overline{Y}$ 近似地服从正态分布 $N(0,\frac{0.3}{40})$，故

$$P(-0.1<\overline{X}-\overline{Y}<0.1)\approx\Phi(\frac{0.1}{\sqrt{\frac{0.3}{40}}})-\Phi(-\frac{0.1}{\sqrt{\frac{0.3}{40}}})=\Phi(1.15)-\Phi(-1.15)$$

$$=2\Phi(1.15)-1=2\times0.8749-1=0.7498$$

八、解由中心极限定理知，当 n 充分大时，$\sum_{i=1}^{n}X_i$ 近似地服从正态分布 $N(n\mu,n\sigma^2)$，从而当 n 充分大时，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 近似地服从正态分布 $N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$。由于 $\sigma^2=400$，因此 n 取决于如下条件：

$$P(\left|\overline{X}-\mu\right|<1)=P(\mu-1<\overline{X}<\mu+1)=\Phi\left(\frac{\mu+1-\mu}{\frac{20}{\sqrt{n}}}\right)-\Phi\left(\frac{\mu-1-\mu}{\frac{20}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$=2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{20}\right)-1\geq0.95$$

即 $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{20}\right) \geq 0.975 = \Phi(1.96)$，从而 $\frac{\sqrt{n}}{20} \geq 1.96$，即 $n \geq (20 \times 1,96)^2 = 1536.64$，所以 n 至少为 1537。