

第一章概率论的基本概念

§1 随机现象与随机试验 §2 样本空间与随机事件 §3 概率及其性质

一、单项选择题

(1) 解应选 (A)。

由于 $AB \subset C$, 因此 $\bar{C} \subset \overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$, 故选 (A)。

(2) 解应选 (A)。

由事件的运算律, 得 $(A \cup B) - B = (A \cup B)\bar{B} = A\bar{B} \cup B\bar{B} = A\bar{B} = A - B$, 即

$$(A \cup B) - B = A - B$$

故选 (A)。

(3) 解应选 (D)。

由于比赛的结果有甲胜、乙胜和平局, 因此事件 A “甲胜乙负”的逆事件为“甲负或平局”, 即 \bar{A} 表示事件“甲负或平局”, 故选 (D)。

(4) 解应选 (B)。

由于 $B - A = \bar{B}$, 即 $B = \bar{A}B$, 因此 $A \cap B = A(\bar{A}B) = (\bar{A}A)B = \Phi$, 故选 (B)。

(5) 解应选 (B)。

由于 $AB = \bar{A}\bar{B} = \overline{A \cup B}$, 因此 $A \cup B = (A \cup B)(AB) = (A \cup B)\overline{(A \cup B)} = \Omega$, 故选 (B)。

(6) 解应选 (C)。

由于 $P(AB) = 0$, 因此 AB 未是不可能事件。事实上, 随机地向以 0、1 为端点的线段上投点, 设 A 表示事件“点投中以 0、 $\frac{1}{2}$ 为端点的线段”, B 表示事件“点投中以 $\frac{1}{2}$ 、1 为端点的线段”, 则 AB 表示事件“点投中 $\frac{1}{2}$ 点”, 由几何概率知, $P(AB) = 0$, 但 $AB \neq \Phi$, 故选 (C)。

(7) 解应选 (D)。

由于事件 A 、 B 互不相容, 因此 $AB = \Phi$, 从而 $\overline{AB} = \Omega$, 即 $\bar{A} \cup \bar{B} = \Omega$, 所以

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\Omega) = 1$$

故选 (D)。

(8) 解应选 (C)。

由于 A 、 B 互不相容, 即 $AB = \Phi$, 因此 $P(AB) = 0$, 从而

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = 0$$

故选 (C)。

(9) 解应选 (D)。

由 $P(B-A) = P(B) - P(AB) < P(B)$, 得 $-P(AB) < 0$, 即 $P(AB) > 0$, 从而 $AB \neq \Phi$, 即

A, B 一定相容, 故选 (D)。

(10) 解应选 (C)。

由 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = 1$, 得 $P(AB) = P(B)$, 从而 $P(B-A) = P(B) - P(AB) = 0$, 故选 (C)。

二、解 (1) 应填 \overline{ABC} 。

(2) 应填 $A \cup B \cup C$ 。

(3) 应填 ABC 。

(4) 应填 $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ 。

(5) 应填 $AB \cup BC \cup AC$ 。

三、填空题

(1) 解应填 0.7, 0.8。

由于 $P(A \cup B) = P(B) + P(A-B) = 0.4 + 0.3 = 0.7$, 故填 0.7。

又 $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - [P(A) - P(A-B)] = 1 - (0.5 - 0.3) = 0.8$, 故填 0.8。

(2) 解应填 0.3, 0.3。

由于 $0.6 = P(A \cup B) = P(B) + P(A-B)$, 因此 $P(A-B) = 0.6 - 0.3 = 0.3$, 从而

$$P(A-AB) = P(A-B) = 0.3$$

故填 0.3。又 $P(\overline{AB}) = P(A-B) = 0.3$, 故填 0.3。

(3) 解应填 $1-p$ 。

由于 $P(AB) = P(\overline{A}\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$, 因此

$$1 - P(A) - P(B) = 0$$

从而 $P(B) = 1 - P(A) = 1 - p$, 故填 $1-p$ 。

(4) 解应填 $\frac{5}{8}$ 。

由于 $ABC \subset AB$, 且 $P(AB)=0$, 因此 $0 \leq P(ABC) \leq P(AB)=0$, 从而 $P(ABC)=0$ 。由加法公式, 得

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \\ &= 3 \times \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

故填 $\frac{5}{8}$ 。

四、解由于 $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$, 因此当 $A \cup B = \Omega$ 时, 则 $P(A \cup B)$ 取得最大值 1, 从而 $P(AB)$ 取得最小值, 且最小值为 $P(AB) = P(A) + P(B) - 1 = 0.6 + 0.7 - 1 = 0.3$ 。

五、解由于 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} = \frac{11}{15}$, 因此

$$P(\overline{AB}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$$

又

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{15} - \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{17}{20} \end{aligned}$$

故 $P(\overline{ABC}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - \frac{17}{20} = \frac{3}{20}$, 从而

$$P(\overline{AB} \cup C) = P(C) + P(\overline{AB} \overline{C}) = \frac{1}{5} + \frac{3}{20} = \frac{7}{20}$$

§4 古典概率 §5 几何概率

一、单项选择题

(1) 解应选 (C)。

设 A 表示事件“取出的 2 件产品都是正品”, 则 $P(A) = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$, 从而所求事件的概率为

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

故选 (C)。

(2) 解应选 (D)。

设 A 表示事件“取出的 3 本书中没有硬皮书”, 则

$$P(A) = \frac{C_{10}^3}{C_{15}^3} = \frac{24}{91}$$

从而所求事件的概率为

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}$$

故选 (D)。

二、填空题

解 (1) ①应填 $\frac{1}{11}$ 。

样本空间基本事件总数 $n_1 = C_{12}^1 C_{11}^1$ ，有利于所求事件发生的基本事件数 $k_1 = C_3^1 C_4^1$ ，从而所求的概率为 $p_1 = \frac{k_1}{n_1} = \frac{C_3^1 C_4^1}{C_{12}^1 C_{11}^1} = \frac{1}{11}$ ，故填 $\frac{1}{11}$ 。

②应填 $\frac{5}{36}$ 。

样本空间基本事件总数 $n_2 = C_{12}^1 C_{12}^1$ ，有利于所求事件发生的基本事件数 $k_2 = C_5^1 C_4^1$ ，从而所求的概率为 $p_2 = \frac{k_2}{n_2} = \frac{C_5^1 C_4^1}{C_{12}^1 C_{12}^1} = \frac{5}{36}$ ，故填 $\frac{5}{36}$ 。

(2) 应填 $\frac{1}{9}$ 。

样本空间 $\Omega = \{(x, y) | 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ ，其面积为 1。

所求事件 $A = \{(x, y) | |x - y| > \frac{2}{3}\}$ ，且 $A = 2 \times \frac{1}{2} (1 - \frac{2}{3}) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ ，从而所求的概率为

$$P(A) = \frac{A \text{ 的面积}}{\Omega \text{ 的面积}} = \frac{\frac{1}{9}}{1} = \frac{1}{9}$$

故填 $\frac{1}{9}$ 。

三、解 样本空间基本事件总数 $n = C_{10}^3$ 。

(1) 有利于所求事件发生的基本事件数 $k_1 = C_1^1 C_5^2$ ，从而所求的概率为 $p_1 = \frac{k_1}{n} = \frac{C_1^1 C_5^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{12}$ 。

(2) 有利于所求事件发生的基本事件数 $k_2 = C_1^1 C_4^2$ ，从而所求的概率为 $p_2 = \frac{k_2}{n} = \frac{C_1^1 C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{20}$ 。

四、解样本空间基本事件总数 $n = C_5^1 C_4^1 C_3^1 = 60$,

(1) 有利于所求事件发生的基本事件数 $k_1 = 3 \times 3! = 18$, 从而所求的概率为 $p_1 = \frac{k_1}{n} = \frac{3}{10}$ 。

(2) 有利于所求事件发生的基本事件数 $k_2 = 4 \times 3! = 24$, 从而所求的概率为 $p_2 = \frac{k_2}{n} = \frac{2}{5}$ 。

五、解样本空间基本事件总数 $n = C_{10}^3$ 。

(1) 有利于所求事件发生的基本事件数 $k_1 = C_6^3$, 从而所求的概率为 $p_1 = \frac{k_1}{n} = \frac{1}{6}$ 。

(2) 有利于所求事件发生的基本事件数 $k_2 = C_4^1 C_6^2$, 从而所求的概率为 $p_2 = \frac{k_2}{n} = \frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{2}$ 。

(3) 由于所求事件的逆事件为“取出的 3 件产品中没有次品或恰有 1 件次品”, 因此所求的概率为 $p_3 = 1 - \frac{C_6^3}{C_{10}^3} - \frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{3}$ 。

六、解样本空间基本事件总数 $n = P_{11}^7$, 有利于所求事件发生的基本事件数

$$k = C_1^1 C_2^1 C_2^1 C_1^1 C_1^1 C_1^1 C_1^1 = 2 \times 2$$

从而所求的概率为 $p = \frac{k}{n} = \frac{2 \times 2}{P_{11}^7} = 0.0000024$ 。

七、解样本空间 $\Omega = \{(x, y) | 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, 其面积为 1。

(1) 所求事件 $A_1 = \{(x, y) | y < x^2\}$, 且 A_1 的面积为 $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$, 从而所求的概率为

$$P(A_1) = \frac{A_1 \text{ 的面积}}{\Omega \text{ 的面积}} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$$

(2) 所求事件 $A_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, (x, y) \in \Omega\}$, 且 A_2 的面积为 $\frac{\pi}{4}$, 从而所求的概率为

$$P(A_2) = \frac{A_2 \text{ 的面积}}{\Omega \text{ 的面积}} = \frac{\frac{\pi}{4}}{1} = \frac{\pi}{4}$$

(3) 所求事件 $A_3 = \{(x, y) | x^2 < y < \sqrt{x}\}$, 且 A_3 的面积为 $\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{1}{3}$, 从而所求的概率为

$$P(A_3) = \frac{A_3 \text{ 的面积}}{\Omega \text{ 的面积}} = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$$

八、解 样本空间 $\Omega = D = \{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ ，其面积为 4。不妨设方程 $t^2 + xt + y = 0$ 的两个正实根为 t_1, t_2 ，则所求事件 A 应满足：

$$x^2 - 4y \geq 0, \quad t_1 + t_2 = -x > 0, \quad \text{即 } x < 0, \quad t_1 t_2 = y > 0$$

从而 A 的面积为 $\int_{-1}^0 \frac{x^2}{4} dx = \frac{1}{12}$ ，从而所求的概率为

$$P(A) = \frac{A \text{ 的面积}}{\Omega \text{ 的面积}} = \frac{\frac{1}{12}}{4} = \frac{1}{48}$$

§6 条件概率与概率的三大公式

一、单项选择题

(1) 解 应选 (A)。

由于 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B|A)$ ，因此

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cup B) - P(A) + P(A)P(B|A) \\ &= P(A \cup B) - P(A) + P(A)(1 - P(\bar{B}|A)) \\ &= 0.84 - 0.6 + 0.6 \times (1 - 0.4) = 0.60 \end{aligned}$$

故选 (A)。

(2) 解 应选 (B)。

由于 $B \subset A$ ，因此 $\bar{A} \subset \bar{B}$ ，由减法公式，得 $P(\bar{B} - \bar{A}) = P(\bar{A}) - P(\bar{B})$ ，故选 (B)。

(3) 解 应选 (C)。

由于 $P(A|B) = 1$ ，因此

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(B)P(A|B) \\ &= P(A) + P(B) - P(B) = P(A) \end{aligned}$$

故选 (C)。

(4) 解 应选 (A)。

由于事件 A 的发生必然导致 B 的发生，因此 $A \subset B$ ，从而

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(AB)}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(A)}{P(\bar{B})} = 0$$

故选 (A)。

(5) 解应选 (D)。

方法一由于 $P(AB)=0$ 未必成立, 因此 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$ 未必成立, 从而选项 (A) 不正确; 又 $P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)=0$, 故选项 (B) 不正确; 由于没有条件 $P(A) \neq 0$, 因此条件概率 $P(B|A)$ 可能没意义, 因此选项 (C) 不正确, 故选 (D)。

方法二由于 $0 \leq P(A) < P(B) < 1$, 因此 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} \geq P(A)$, 故选 (D)。

二、填空题

(1) 解应填 0.7。

由 $0.6 = P(B|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = \frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)} = \frac{0.8-P(AB)}{0.4}$, 得 $P(AB)=0.56$, 从而

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.56}{0.8} = 0.7$$

故填 0.7。

(2) 解应填 $\frac{2}{3}$ 。

设 A_i 表示 “取出的是 i 等品”, $i=1,2,3$, 则所求的概率为

$$P(A_1|\bar{A}_3) = P(A_1|A_1 \cup A_2) = \frac{P(A_1)}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(A_1)}{P(A_1)+P(A_2)} = \frac{0.6}{0.6+0.3} = \frac{2}{3}$$

故填 $\frac{2}{3}$ 。

(3) 解应填 $\frac{1}{6}$ 。

设 A_i 表示 “第 i 次抽到次品”, $i=1,2$

方法一根据 “抽签原则” 可得 $P(A_2)=P(A_1)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$ 。

方法二由全概率公式得

$$P(A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1) = \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{11} + \frac{10}{12} \cdot \frac{2}{11} = \frac{1}{6}$$

故填 $\frac{1}{6}$ 。

(4) 解应填 $\frac{3}{4}$ 。

$$P(AB|\bar{C}) = \frac{P(AB\bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{P(AB) - P(ABC)}{P(\bar{C})} = \frac{P(AB)}{1 - P(C)} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

故填 $\frac{3}{4}$ 。

(5) 解应填 0.25。

由 $0.5 = P(A\bar{B}) = P(A - B) = P(A - AB) = P(A) - P(AB)$ ，得

$$P(AB) = P(A) - 0.5 = 0.7 - 0.5 = 0.2$$

从而

$$P(B|A\cup\bar{B}) = \frac{P(B(A\cup\bar{B}))}{P(A\cup\bar{B})} = \frac{P(AB)}{P(A) + P(\bar{B}) - P(A\bar{B})} = \frac{0.2}{0.7 + 0.6 - 0.5} = 0.25$$

故填 0.25。

(6) 解应填 0.7。

由加法公式及乘法公式，得

$$\begin{aligned} P(A\cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B|A) \\ &= 0.5 + 0.6 - 0.5 \times 0.8 = 0.7 \end{aligned}$$

故填 0.7。

(7) 解应填 $\frac{1}{3}$ 。

由于 $P(A) = \frac{P(AB)}{P(B|A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$ ， $P(B) = \frac{P(AB)}{P(A|B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$ ，因此

$$P(\overline{A\bar{B}}) = P(\overline{A\cup B}) = 1 - P(A\cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

故填 $\frac{1}{3}$ 。

三、解 设 $A = \{\text{孩子得病}\}$ ， $B = \{\text{母亲得病}\}$ ， $C = \{\text{父亲得病}\}$ ，则 $P(A) = 0.6$ ，

$P(B|A)=0.5$, $P(C|AB)=0.4$, 由乘法公式, 得所求的概率为

$$P(ABC\bar{C})=P(A)P(B|A)P(\bar{C}|AB)=0.6\times 0.5\times 0.6=0.18$$

四、解设 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 表示事件“第 i 次取到黑球”, 则

(1) 所求的概率为

$$\begin{aligned} P(A_1A_2\cdots A_n) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

(2) 所求的概率为

$$\begin{aligned} P(A_1A_2\cdots A_{n-1}\bar{A}_n) &= P(A_1)P(A_2|A_1)\cdots P(A_{n-1}|A_1A_2\cdots A_{n-2})P(\bar{A}_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

五、解设 $B_i(i=0,1,2,3)$ 表示事件“从第一箱中取出的 3 件产品中恰好有 i 件不合格品”, A 表

示事件“从第二箱中取出的产品是不合格品”, 则

$$P(B_0)=\frac{C_3^0C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}, \quad P(B_1)=\frac{C_3^1C_3^2}{C_6^3}=\frac{9}{20}$$

$$P(B_2)=\frac{C_3^2C_3^1}{C_6^3}=\frac{9}{20}, \quad P(B_3)=\frac{C_3^3C_3^0}{C_6^3}=\frac{1}{20}$$

$$P(A|B_0)=0, \quad P(A|B_1)=\frac{1}{6}, \quad P(A|B_2)=\frac{2}{6}, \quad P(A|B_3)=\frac{3}{6}$$

由全概率公式, 得

$$P(A)=\sum_{i=0}^3 P(B_i)P(A|B_i)=\frac{1}{20}\times 0+\frac{9}{20}\times\frac{1}{6}+\frac{9}{20}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{20}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$$

由 Bayes 公式, 得

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{\frac{9}{20}\times\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}=\frac{3}{10}$$

六、解(1) 设 B_1, B_2 分别表示事件取到甲、乙厂的产品, A 表示取到正品, 则 $P(B_1)=\frac{2}{3}$, $P(B_2)=\frac{1}{3}$,

$P(A|B_1)=0.9$, $P(A|B_2)=0.75$, 则由全概率公式, 得

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) = \frac{2}{3} \times 0.9 + \frac{1}{3} \times 0.75 = 0.85$$

(2) 设 A 表示“抽得 A 厂生产的产品”， B 表示“抽得的产品是次品”，则由 Bayes 公式，得

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})} = \frac{0.6 \times 0.01}{0.6 \times 0.01 + 0.4 \times 0.02} = \frac{3}{7}$$

七、解设 $H_i (i=1, 2, 3)$ 表示事件“抽到的报名表是第 i 地区的”， $A_j (j=1, 2)$ 表示事件“第 j 次

抽到的是男生表”，则

$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}, P(A_1|H_1) = \frac{7}{10}, P(A_1|H_2) = \frac{8}{15}, P(A_1|H_3) = \frac{20}{25}$$

(1) 由全概率公式，得

$$P(\bar{A}_1) = \sum_{i=1}^3 P(H_i)P(\bar{A}_1|H_i) = \frac{1}{3} \left(\frac{3}{10} + \frac{7}{15} + \frac{5}{25} \right) = \frac{29}{90}$$

(2) 由“抽签原则”知

$$P(A_2|H_1) = \frac{7}{10}, P(A_2|H_2) = \frac{8}{15}, P(A_2|H_3) = \frac{20}{25}$$

由全概率公式，得

$$P(A_2) = \sum_{i=1}^3 P(H_i)P(A_2|H_i) = \frac{1}{3} \left(\frac{7}{10} + \frac{8}{15} + \frac{20}{25} \right) = \frac{61}{90}$$

所以

$$\begin{aligned} P(\bar{A}_1|A_2) &= \frac{P(\bar{A}_1 A_2)}{P(A_2)} \\ &= \frac{1}{P(A_2)} [P(H_1)P(\bar{A}_1 A_2|H_1) + P(H_2)P(\bar{A}_1 A_2|H_2) + P(H_3)P(\bar{A}_1 A_2|H_3)] \\ &= \frac{90}{61} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3 \times 7}{10 \times 9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7 \times 8}{15 \times 14} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \times 20}{25 \times 24} \right) \\ &= \frac{90}{61} \cdot \frac{2}{9} = \frac{20}{61} \end{aligned}$$

$$(3) P(H_2|\bar{A}_1 A_2) = \frac{P(H_2)P(\bar{A}_1 A_2|H_2)}{P(\bar{A}_1 A_2)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{7 \times 8}{15 \times 14}}{\frac{2}{9}} = \frac{2}{5}$$

§7 事件的独立性

一、单项选择题

(1) 解应选 (B)。

由于 A 、 B 相互对立, 因此 $A \cap B = \Phi, A \cup B = \Omega$, 从而 A 与 B 互不相容, 故选 (B)。

(2) 解应选 (D)。

由于 A 、 B 相互独立, 因此所求的概率为

$$\begin{aligned} P(\overline{A}B \cup A\overline{B}) &= P(\overline{A}B) + P(A\overline{B}) = P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) \\ &= p(1-q) + q(1-p) \end{aligned}$$

故选 (D)。

(3) 解应选 (B)。

方法一由于 A 、 B 、 C 相互独立, 且 $P(A) \neq 0, 0 < P(C) < 1$, 因此

$$\begin{aligned} P((\overline{AC})\overline{C}) &= P(\overline{AC \cup C}) = P(\overline{C}) \\ P(\overline{AC}) &= 1 - P(AC) = 1 - P(A)P(C) < 1 \end{aligned}$$

从而 $P((\overline{AC})\overline{C}) \neq P(\overline{AC})P(\overline{C})$, 即 \overline{AC} 与 \overline{C} 不相互独立, 故选 (B)。

方法二由于 A 、 B 、 C 相互独立, 因此 $\overline{A \cup B}$ 与 C 、 $\overline{A-B}$ 与 \overline{C} 、 \overline{AB} 与 \overline{C} 相互独立, 从而就不相互独立而言, 选项 (A)、(C)、(D) 均不正确, 故选 (B)。

(4) 解选 (A)。

由于 A 、 B 、 C 三个事件两两独立, 因此

$$P(AB) = P(A)P(B), \quad P(AC) = P(A)P(C), \quad P(BC) = P(B)P(C)$$

从而 A 、 B 、 C 相互独立的充分必要条件是 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ 。

若 A 与 BC 相互独立, 则

$$P(ABC) = P(A(BC)) = P(A)P(BC) = P(A)P(B)P(C)$$

反过来, 若 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$, 则

$$P(A(BC)) = P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = P(A)(P(B)P(C)) = P(A)P(BC)$$

即 A 与 BC 相互独立, 从而 A 、 B 、 C 相互独立的充分必要条件 A 与 BC 相互独立, 故选 (A)。

二、填空题

(1) 解应填 $\frac{1}{3}$ 。

由于 A, B 相互独立, 因此 $0.6 = P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B})$, 由 $P(A) = 0.4$, 得 $P(B) = \frac{1}{3}$, 故填 $\frac{1}{3}$ 。

(2) 解应填 0.28, 0.30。

由于 A, B 相互独立, 因此 $P(A - B) = P(A\bar{B}) = P(A)P(\bar{B}) = 0.4 \times 0.7 = 0.28$, 故填 0.28。

由于 $P(A \cup B) = P(B) + P(A\bar{B}) = P(B) + P(A - B)$, 因此 $P(A - B) = P(A \cup B) - P(B) = 0.6 - 0.3 = 0.30$, 故填 0.30。

(3) 解应填 0。

由于 A, B 相互独立且互不相容, 因此 $P(A), P(B)$ 至少有一个等于零, 否则 A, B 相互独立与互不相容不能同时成立, 从而 $\min\{P(A), P(B)\} = 0$, 故填 0。

(4) 解应填 $\frac{4}{3}$ 或 $\frac{5}{3}$ 。

由 $\frac{7}{9} = P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) = 1 - (2 - a)(a - 1)$, 得 $9a^2 - 27a + 20 = 0$, 解之得 $a = \frac{4}{3}$ 或 $a = \frac{5}{3}$, 故填 $\frac{4}{3}$ 或 $\frac{5}{3}$ 。

三、解设 A, B, C 分别表示事件“第一个, 第二个, 第三个人独立译出密码”, 则 A, B, C 相互独立, 且 $P(A) = \frac{1}{5}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(C) = \frac{1}{4}$, 从而所求的概率为

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = 1 - \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = 0.6$$

四、解设 B_i 表示事件“仪器上有 i 个部件不是优质品”, $i = 0, 1, 2, 3$, A 表示事件“仪器不合格”, 则

$$P(B_0) = 0.8 \times 0.7 \times 0.9 = 0.504$$

$$P(B_1) = 0.2 \times 0.7 \times 0.9 + 0.8 \times 0.3 \times 0.9 + 0.8 \times 0.7 \times 0.1 = 0.398$$

$$P(B_3) = 0.2 \times 0.3 \times 0.1 = 0.006, \quad P(B_2) = 1 - P(B_0) - P(B_1) - P(B_3) = 0.092$$

$$P(A|B_0) = 0, \quad P(A|B_1) = 0.2, \quad P(A|B_2) = 0.6, \quad P(A|B_3) = 0.9$$

(1) 由全概率公式, 得

$$\begin{aligned}P(A) &= \sum_{i=0}^3 P(B_i)P(A|B_i) \\&= 0.504 \times 0 + 0.398 \times 0.2 + 0.092 \times 0.6 + 0.006 \times 0.9 = 0.1402\end{aligned}$$

(2) 由 Bayes 公式, 得

$$\begin{aligned}P(B_0|A) &= 0 \\P(B_1|A) &= \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{0.398 \times 0.2}{0.1402} = \frac{796}{1402} \\P(B_2|A) &= \frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)} = \frac{0.092 \times 0.6}{0.1402} = \frac{552}{1402} \\P(B_3|A) &= \frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(A)} = \frac{0.006 \times 0.9}{0.1402} = \frac{54}{1402}\end{aligned}$$

从计算的结果知, 一台不合格的仪器中有一个部件不是优质品的概率最大。

或者, 由于 $\sum_{i=0}^3 P(B_i|A) = 1$, 因此当计算 $P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{796}{1402} > 0.5$ 后就可以确定

$P(B_i|A) < 0.5$ ($i = 2, 3$), 从而可知一台不合格的仪器中有一个部件不是优质品的概率最大。

$$\begin{aligned}\text{五、解 (1)} \quad \frac{1}{4} &= P(AC|AB \cup C) = \frac{P(AC(AB \cup C))}{P(AB \cup C)} = \frac{P(ABC \cup AC)}{P(AB \cup C)} = \frac{P(AC)}{P(AB \cup C)} \\&= \frac{P(A)P(C)}{P(AB) + P(C) - P(ABC)} = \frac{P(A)P(C)}{P(A)P(B) + P(C)} = \frac{\frac{1}{2}P(C)}{\frac{1}{4} + P(C)}\end{aligned}$$

解之得 $P(C) = \frac{1}{4}$ 。

$$\begin{aligned}(2) \quad \frac{7}{9} &= P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \\&= P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(B) - P(A)P(C) = 3p - 2p^2\end{aligned}$$

解之得 $p = \frac{1}{3}$ 。从而所求的概率为

$$P(AB \cup AC \cup BC) = P(AB \cup AC) = P(AB) + P(AC) - P(ABC)$$

$$= P(A)P(B) + P(A)P(C) - 0 = 2p^2 = \frac{2}{9}$$

六、解 A 表示事件“甲击中目标”， B 表示事件“乙击中目标”，则 A 、 B 相互独立，且 $P(A) = 0.7$ ， $P(B) = 0.6$ 。

(1) 所求的概率为 $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = [1 - P(A)][1 - P(B)] = 0.3 \times 0.4 = 0.12$ 。

(2) 所求的概率为

$$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) = 1 - [1 - P(A)][1 - P(B)] = 1 - 0.3 \times 0.4 = 0.88$$

(3) 所求的概率为 $P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - P(A)P(B) = 1 - 0.7 \times 0.6 = 0.58$ 。

七、解 设 A_i 表示“前 $i-1$ 次试验中没有出现点数和为 5 点或 7 点的结果，而第 i 次试验出现点数和为 5 点的结果”， $i = 1, 2, \dots$ ， A 表示“两枚骰子点数和为 5 的结果出现在点数和为 7 的结果之前”，则 $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 。又在一次试验中，事件“两枚骰子的点数和为 5”出现的概率为 $\frac{4}{36}$ ，“两枚骰子

的点数和为 7”出现的概率为 $\frac{6}{36}$ ，从而“两枚骰子的点数和为 5 或为 7”出现的概率为 $\frac{10}{36}$

$\left(\frac{4}{36} + \frac{6}{36} = \frac{10}{36}\right)$ ，于是 $P(A_i) = \left(1 - \frac{10}{36}\right)^{i-1} \times \frac{4}{36}$ ， $i = 1, 2, \dots$ ，故

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{10}{36}\right)^{i-1} \times \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \times \frac{1}{1 - \frac{10}{36}} = \frac{2}{5}$$

八、解 由题设得 $P(A\bar{B}) = P(\bar{A}B)$ ，即 $P(A) - P(AB) = P(B) - P(AB)$ ，从而 $P(A) = P(B)$ 。

由于 A 与 B 相互独立，因此 \bar{A} 与 \bar{B} 相互独立，从而由 $\frac{1}{9} = P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = [P(\bar{A})]^2$ ，得

$P(\bar{A}) = \frac{1}{3}$ ，从而 $P(A) = \frac{2}{3}$ 。