第七章 参数估计

§1 点估计　§4 估计量的评选标准

一、单项选择题

（1）解应选（C）。

由于 $X \sim B(1,p)$，因此 $EX = p$。又由于 $\bar{x} = \frac{1}{5}(0+1+0+1+1) = \frac{3}{5}$，故由矩估计法，得 $EX = \bar{x}$，解之得 p 的矩估计值为 $\hat{p} = \bar{x} = \frac{3}{5}$，故选（C）。

（2）解应选（A）。

由于 X_1, X_2, X_3 相互独立且与 X 同分布，因此 $EX_i = EX = \mu \ (i=1,2,3)$，从而

$$E\hat{\mu}_1 = \mu，E\hat{\mu}_2 = \frac{6}{5}\mu，E\hat{\mu}_3 = \mu，E\hat{\mu}_4 = \frac{9}{10}\mu$$

所以 $\hat{\mu}_1$、$\hat{\mu}_3$ 是 μ 的无偏估计量。又

$$D\hat{\mu}_1 = \frac{9}{100}DX_1 + \frac{16}{100}DX_2 + \frac{9}{100}DX_3 = \frac{17}{50}DX$$

$$D\hat{\mu}_3 = \frac{4}{100}DX_1 + \frac{4}{100}DX_2 + \frac{36}{100}DX_3 = \frac{22}{50}DX$$

故 $D\hat{\mu}_1 < D\hat{\mu}_2$，从而 $\hat{\mu}_1$ 是 μ 的有效估计量，故选（A）。

（3）解应选（B）。

由于 X_1, X_2, X_3 相互独立，且 $X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \ (i=1,2,3)$，因此 $EX_i = \mu, DX_i = \sigma^2 \ (i=1,2,3)$，从而 $E\hat{\mu}_1 = \mu$，$E\hat{\mu}_2 = \mu$，$E\hat{\mu}_3 = \mu$，所以 $\hat{\mu}_1$、$\hat{\mu}_2$、$\hat{\mu}_3$ 都是 μ 的无偏估计量。又由于

$$D\hat{\mu}_1 = \frac{1}{9}DX_1 + \frac{1}{9}DX_2 + \frac{1}{9}DX_3 = \frac{1}{3}\sigma^2$$

$$D\hat{\mu}_2 = \frac{4}{25}DX_1 + \frac{9}{25}DX_2 = \frac{13}{25}\sigma^2$$

$$D\hat{\mu}_3 = \frac{1}{4}DX_1 + \frac{1}{9}DX_2 + \frac{1}{36}DX_3 = \frac{7}{18}\sigma^2$$

故 $D\hat{\mu}_1 < D\hat{\mu}_2$，$D\hat{\mu}_1 < D\hat{\mu}_3$，从而 $\hat{\mu}_1$ 是 μ 的有效估计量，故选（B）。

二、填空题

（1）解应填 $\overline{X}-1$。

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{\theta}^{+\infty}xe^{-(x-\theta)}dx=e^{\theta}\int_{\theta}^{+\infty}xe^{-x}dx=-e^{\theta}\int_{\theta}^{+\infty}xde^{-x}$$

$$=-e^{\theta}xe^{-x}\Big|_{\theta}^{+\infty}+e^{\theta}\int_{\theta}^{+\infty}e^{-x}dx=\theta-e^{\theta}e^{-x}\Big|_{\theta}^{+\infty}=\theta+1$$

由矩估计法，得 $EX=\overline{X}$，即 $\theta+1=\overline{X}$，解之得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\overline{X}-1$ 或 $\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-1$，故填 $\overline{X}-1$。

（2）解应填 $\dfrac{n}{n-\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$。

由于 $Y_i=\ln X_i, i=1,2,\cdots,n$，因此对 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 的一组样本值 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，有

（i）似然函数 $L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}f(y_i)=\prod_{i=1}^{n}\lambda e^{-\lambda y_i}=\lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}y_i}, y_i>0, i=1,2,\cdots,n$；

（ii）取自然对数 $\ln L(\lambda)=n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}y_i$；

（iii）令 $\dfrac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=\dfrac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}y_i=0$，解之得 λ 的最大似然估计值为 $\hat{\lambda}=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}y_i}=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$，从而 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}=\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$。又 $\mu=EX=E(e^Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^y f_Y(y)dy=\int_0^{+\infty}e^y\cdot\lambda e^{-\lambda y}dy=\dfrac{\lambda}{\lambda-1}$，故由最大似然估计的不变性知 EX 的最大似然估计量为 $\hat{\mu}=\dfrac{\hat{\lambda}}{\hat{\lambda}-1}=\dfrac{n}{n-\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$，故填 $\dfrac{n}{n-\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$。

（3）解　应填 $2\overline{X}-1$，$\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$。

由于 $X\sim U(1,\theta)$，因此 $EX=\dfrac{\theta+1}{2}$，由矩估计法，得 $\dfrac{\theta+1}{2}=\overline{X}$，　解之得 θ 的矩估计量为

$\hat{\theta}=2\overline{X}-1$，故填$2\overline{X}-1$。

由于$X\sim U(1,\theta)$，因此X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta-1}, & 1<x<\theta\\ 0, & 其他\end{cases}$$

对于样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$的一组样本值$x_1,x_2,\cdots,x_n$，有

（i）似然函数：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\theta-1}=\dfrac{1}{(\theta-1)^n}\ (1<x_i<\theta;\ i=1,2,\cdots,n)$；

（ii）取自然对数：$\ln L(\theta)=-n\ln(\theta-1)$；

（iii）由于$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\dfrac{n}{\theta-1}<0$，因此$L(\theta)$关于$\theta$单调递减。又$1<x_i<\theta\ (i=1,2,\cdots,n)$，故由最大似然估计的定义知，$\theta$的最大似然估计值为$\hat{\theta}=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，故填$\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$。

（4）解　应填$2+\overline{X}$。

由于$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，因此X的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<+\infty$$

对于样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$的一组样本值$x_1,x_2,\cdots,x_n$，有

（i）似然函数：$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}})^n(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$；

（ii）取自然对数：$\ln L(\mu,\sigma^2)=n\ln\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}-\dfrac{n}{2}\ln\sigma^2-\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$；

（iii）令$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)}{\sigma^2}=0\\ \dfrac{\partial\ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}=0\end{cases}$，解之得$\mu$的最大似然估计值为

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\overline{x}$$

从而 μ 的最大似然估计量为

$$\hat{\mu}=\bar{X}$$

由于函数 $u=2+\mu$ 具有单值反函数 $\mu=u-2$，由最大似然估计的不变性，得 $2+\mu$ 的最大似然估计量为 $2+\bar{X}$ ，故填 $2+\bar{X}$ 。

三、**解**先求 θ 的矩估计值。

$$EX=1\times\theta^2+2\times2\theta(1-\theta)+3\times(1-\theta)^2=3-2\theta，\quad \bar{x}=\frac{1}{3}(1+2+1)=\frac{4}{3}$$

由矩估计法，得 $3-2\theta=\frac{4}{3}$，解之得 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\frac{5}{6}$。

再求 θ 的最大似然估计值。对给定的样本值，有

（i）似然函数：$L(\theta)=(\theta^2)^2 2\theta(1-\theta)=2\theta^5(1-\theta)$；

（ii）取自然对数：$\ln L(\theta)=\ln 2+5\ln\theta+\ln(1-\theta)$

（iii）令 $\frac{\partial\ln L(\theta)}{\partial\theta}=\frac{5}{\theta}-\frac{1}{1-\theta}=\frac{5-6\theta}{\theta(1-\theta)}=0$，解之得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\frac{5}{6}$。

四、解（1）由于

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\theta^2}xe^{-\frac{x}{\theta}}dx=\frac{1}{\theta^2}\int_0^{+\infty}x^2e^{-\frac{x}{\theta}}dx=2\theta$$

因此由矩估计法，得 $2\theta=\bar{X}$ ，解之得参数 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{\bar{X}}{2}$ 。

（2）对于样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的一组样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ ，有

（i）似然函数：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta^2}x_ie^{-\frac{x_i}{\theta}}=\frac{1}{\theta^{2n}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}}\prod_{i=1}^{n}x_i\ (x_i>0;\ i=1,2,\cdots,n)$；

（ii）取自然对数：$\ln L(\theta)=-2n\ln\theta-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$ ；

（iii）令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{2n}{\theta}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\theta^2}=0$，解之得参数 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{\bar{x}}{2}$ ，从而参数 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\frac{\bar{X}}{2}$ 。

五、解设期望为θ的指数分布的总体为X，期望为2θ的指数分布的总体为Y，则$X\sim E\left(\frac{1}{\theta}\right)$，

$Y\sim E\left(\frac{1}{2\theta}\right)$。对于样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$与$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$的样本值$x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_m$，有

（i）似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x_i}{\theta}}\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{y_j}{2\theta}}=\frac{1}{2^m\theta^{m+n}}e^{-\frac{2\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+\sum\limits_{j=1}^{m}y_j}{2\theta}}(x_i>0;\ i=1,2,\cdots,n,y_j>0;\ j=1,2,\cdots,m)；$$

（ii）取自然对数：$\ln L(\theta)=-m\ln 2-(m+n)\ln\theta-\dfrac{2\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+\sum\limits_{j=1}^{n}y_j}{2\theta}$；

（iii）令$\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\dfrac{m+n}{\theta}+\dfrac{2\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+\sum\limits_{j=1}^{m}y_j}{2\theta^2}=0$，解之得参数$\theta$的最大似然估计值为

$$\hat{\theta}=\frac{1}{m+n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}y_j\right),$$

从而参数θ的最大似然估计量为$\hat{\theta}=\dfrac{1}{m+n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{m}Y_j\right)$。

由于$DX=\theta^2$，$DY=4\theta^2$，因此

$$D\hat{\theta}=\frac{1}{(m+n)^2}\left[D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)+\frac{1}{4}D\left(\sum_{j=1}^{m}Y_j\right)\right]=\frac{1}{(m+n)^2}(n\theta^2+m\theta^2)=\frac{\theta^2}{m+n}$$

六、解（1）由于

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{\theta}^{+\infty}x\cdot 2e^{-2(x-\theta)}dx=\theta+\frac{1}{2}$$

因此由矩估计法，得$\theta+\frac{1}{2}=\bar{X}$，解之得参数$\theta$的矩估计量为$\hat{\theta}=\bar{X}-\frac{1}{2}$。

又由于

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{\theta}^{+\infty}x^2\cdot 2e^{-2(x-\theta)}dx=\theta^2+\theta+\frac{1}{2}$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\theta^2+\theta+\frac{1}{2}-(\theta+\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$$

故参数θ的矩估计量$\hat{\theta}$的方差为

$$D\hat{\theta}=D(\bar{X}-\frac{1}{2})=D\bar{X}=\frac{DX}{n}=\frac{1}{4n}$$

（2）对于样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$的一组样本值$x_1,x_2,\cdots,x_n$，有

（i）似然函数：$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod_{i=1}^{n}2e^{-2(x_i-\theta)}=2^n e^{-2\sum_{i=1}^{n}x_i+2n\theta}$ $(x_i\geq\theta$；$i=1,2,\cdots,n)$；

（ii）取自然对数：$\ln L(\theta)=n\ln 2-2\sum_{i=1}^{n}x_i+2n\theta$；

（iii）由于$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=2n>0$，因此$\ln L(\theta)$关于$\theta$单调增加，从而$L(\theta)$关于$\theta$单调增加。又$x_i\geq\theta$ $(i=1,2,\cdots,n)$，故由最大似然估计的定义知，参数θ的最大似然估计值为

$$\hat{\theta}=\min(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

从而参数θ的最大似然估计量为

$$\hat{\theta}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$$

由于X的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}1-e^{-2(x-\theta)}, & x\geq\theta\\ 0, & x<\theta\end{cases}$$

因此$\hat{\theta}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的概率密度为

$$f_{\hat{\theta}}(x)=n[1-F(x)]^{n-1}f(x)=\begin{cases}2ne^{-2n(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\leq\theta\end{cases}$$

又由于

$$E\hat{\theta}=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{\hat{\theta}}(x)dx=\int_{\theta}^{+\infty}x\cdot 2ne^{-2n(x-\theta)}dx=\int_{\theta}^{+\infty}2nxe^{-2n(x-\theta)}dx$$

令$t=2n(x-\theta)$，则

$$E\hat{\theta}=\int_{\theta}^{+\infty}2nxe^{-2n(x-\theta)}dx=\int_{0}^{+\infty}(t+2n\theta)e^{-t}\frac{1}{2n}dt=\theta+\frac{1}{2n}$$

$$E\hat{\theta}^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_{\hat{\theta}}(x)dx=\int_{\theta}^{+\infty}x^2\cdot 2ne^{-2n(x-\theta)}dx=\int_{\theta}^{+\infty}2nx^2e^{-2n(x-\theta)}dx$$

令$t=2n(x-\theta)$，则

$$E\hat{\theta}^2=\int_{\theta}^{+\infty}2nx^2e^{-2n(x-\theta)}dx=\int_0^{+\infty}2n(\frac{t+2n\theta}{2n})^2e^{-t}\frac{1}{2n}dt$$

$$=\frac{1}{4n^2}\int_0^{+\infty}(t+2n\theta)^2e^{-t}dt=\theta^2+\frac{\theta}{n}+\frac{1}{2n^2}$$

故参数θ的最大似然估计量$\hat{\theta}$的方差为

$$D\hat{\theta}=E\hat{\theta}^2-(E\hat{\theta})^2=\theta^2+\frac{\theta}{n}+\frac{1}{2n^2}-(\theta+\frac{1}{2n})^2=\frac{1}{4n^2}$$

七、解（1）$E\left[c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right]=c\sum_{i=1}^{n-1}E\left[(X_{i+1}-X_i)^2\right]$

$$=c\sum_{i=1}^{n-1}\left\{D(X_{i+1}-X_i)+\left[E(X_{i+1}-X_i)\right]^2\right\}$$

$$=c\sum_{i=1}^{n-1}\left[D(X_{i+1})+D(X_i)\right]=2\sigma^2(n-1)c$$

由$E\left[c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right]=\sigma^2$，得$c=\frac{1}{2(n-1)}$。

（2）由于$E\overline{X}=\mu$，$D\overline{X}=\frac{\sigma^2}{n}$，$ES^2=\sigma^2$，因此

$$E\left[(\overline{X})^2-cS^2\right]=E\left[(\overline{X})^2\right]-cES^2=D\overline{X}+(E\overline{X})^2-cES^2=\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2-c\sigma^2$$

由$E\left[(\overline{X})^2-cS^2\right]=\mu^2$，得$c=\frac{1}{n}$。

八、解由于$E\overline{X}_1=E\overline{X}_2=\mu$，因此

$$E\hat{\mu}=a\cdot E\overline{X}_1+b\cdot E\overline{X}_2=a\mu+b\mu=(a+b)\mu=\mu$$

从而对于任意常数$a,b(a+b=1)$，$\hat{\mu}=a\overline{X}_1+b\overline{X}_2$都是$\mu$的无偏估计量。

又由于$\overline{X}_1$与$\overline{X}_2$相互独立，且$D\overline{X}_1=\frac{\sigma^2}{n_1}$，$D\overline{X}_2=\frac{\sigma^2}{n_2}$，故

$$D(\hat{\mu})=D(a\overline{X}_1+b\overline{X}_2)=a^2D\overline{X}_1+b^2D\overline{X}_2=\frac{a^2\sigma^2}{n_1}+\frac{b^2\sigma^2}{n_2}$$

利用拉格朗日乘数法，作函数

$$G(a,b,\lambda)=\frac{a^2\sigma^2}{n_1}+\frac{b^2\sigma^2}{n_2}+\lambda(a+b-1)$$

令 $\frac{\partial G}{\partial a}=\frac{2a\sigma^2}{n_1}+\lambda=0$，$\frac{\partial G}{\partial b}=\frac{2b\sigma^2}{n_2}+\lambda=0$，$\frac{\partial G}{\partial \lambda}=a+b-1=0$，解之得

$$a=\frac{n_1}{n_1+n_2}，\ b=\frac{n_2}{n_1+n_2}$$

所以当 $a=\frac{n_1}{n_1+n_2}$，$b=\frac{n_2}{n_1+n_2}$ 时，$D(\hat{\mu})$ 达到最小。

九、**解**（1）因为 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 与 $N(\mu,2\sigma^2)$，所以 $Z=X-Y$ 服从正态分布，且

$$EZ=E(X-Y)=EX-EY=\mu-\mu=0，\ DZ=D(X-Y)=DX+DY=\sigma^2+2\sigma^2=3\sigma^2$$

因此 Z 的概率密度为

$$f(z;\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}},\ -\infty<z<+\infty$$

（2）对于样本 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 的一组样本值 $z_1,z_2,\cdots,z_n$，有

（i）似然函数 $L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(z_i;\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}e^{-\frac{z_i^2}{6\sigma^2}}=\frac{1}{(\sqrt{6\pi})^n}(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2}$；

（ii）取自然对数 $\ln L(\sigma^2)=-n\ln\sqrt{6\pi}-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$；

（iii）令 $\frac{d\ln L(\sigma^2)}{d\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{6\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2=0$，解之得 σ^2 的最大似然估计值为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$，从而 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$。

（3）方法一因为

$$E\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}EZ_i^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}EZ^2=\frac{1}{3}EZ^2=\frac{1}{3}(DZ+(EZ)^2)=\frac{1}{3}DZ=\sigma^2$$

所以 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量。

方法二由于 $\dfrac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}Z_i^2}{3\sigma^2}\sim\chi^2(n)$，因此

$$E\hat{\sigma}^2=E(\frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2})=\frac{\sigma^2}{n}E(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2})=\frac{\sigma^2}{n}\cdot n=\sigma^2$$

所以 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量。

十、解 由于 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

因此 X 的概率密度为

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

（1） $$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\frac{2}{\theta}\int_0^{+\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx$$

$$=-\int_0^{+\infty}xd(e^{-\frac{x^2}{\theta}})=[-xe^{-\frac{x^2}{\theta}}]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{\theta}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{\theta}{2}}}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2}$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\frac{2}{\theta}\int_0^{+\infty}x^3e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx$$

$$=-\int_0^{+\infty}x^2d(e^{-\frac{x^2}{\theta}})=[-x^2e^{-\frac{x^2}{\theta}}]_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{\theta}}dx$$

$$=-\theta\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{\theta}}d(-\frac{x^2}{\theta})=[-\theta e^{-\frac{x^2}{\theta}}]_0^{+\infty}=\theta$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\theta-(\frac{\sqrt{\pi\theta}}{2})^2=(1-\frac{\pi}{4})\theta$$

（2）对于样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的一组样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，有

（i）似然函数：$L(\theta)=\prod\limits_{i=1}^{n}f(x_i)=\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{2x_i}{\theta}e^{-\frac{x_i^2}{\theta}}=2^n\theta^{-n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{\theta}}\prod\limits_{i=1}^{n}x_i$， $x_i>0$； $i=1,2,\cdots,n$；

（ii）取自然对数：$\ln L(\theta)=n\ln 2-n\ln\theta-\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}{\theta}+\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i$；

（iii）令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{\theta^2}=0$，解之得 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$，从而 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$。

（3）由于

$$E\hat{\theta}_n=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX^2=EX^2=\theta$$

$$EX^4=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4f(x)dx=\int_0^{+\infty}x^4\cdot\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx=\frac{2}{\theta}\int_0^{+\infty}x^5e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx$$

$$=-\int_0^{+\infty}x^4d(e^{-\frac{x^2}{\theta}})=[-x^4e^{-\frac{x^2}{\theta}}]_0^{+\infty}+4\int_0^{+\infty}x^3e^{-\frac{x^2}{\theta}}dx$$

$$=-2\theta\int_0^{+\infty}x^2d(e^{-\frac{x^2}{\theta}})=[-2\theta x^2e^{-\frac{x^2}{\theta}}]_0^{+\infty}+4\theta\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{\theta}}dx$$

$$=-2\theta^2\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{\theta}}d(-\frac{x^2}{\theta})=[-2\theta^2e^{-\frac{x^2}{\theta}}]_0^{+\infty}=2\theta^2$$

因此

$$D\hat{\theta}_n=D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DX_i^2=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DX^2=\frac{1}{n}DX^2$$

$$=\frac{1}{n}[EX^4-(EX^2)^2]=\frac{1}{n}(2\theta^2-\theta^2)=\frac{\theta^2}{n}$$

由 Chebyshev 不等式，得

$$\forall\varepsilon>0,\quad 0\le P(\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|\ge\varepsilon)=P(\left|\hat{\theta}_n-E\hat{\theta}_n\right|\ge\varepsilon)\le\frac{D\hat{\theta}_n}{\varepsilon^2}=\frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}\to 0,n\to\infty$$

所以取 $a=\theta$，可使 $\forall\varepsilon>0$，均有

$$\lim_{n\to\infty}P(\left|\hat{\theta}_n-a\right|\ge\varepsilon)=0$$

§2 区间估计　　§3 单侧置信区间

一、单项选择题

（1）解应选（A）。

由于 σ^2 未知，因此参数 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$$

又$1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$，$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(n-1)$，故$\mu$的置信水平为95%的置信区间为

$$(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1),\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1))$$

即$(\bar{X}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1))$，故选（A）。

（2）解应选（C）。

由于σ^2未知，因此参数μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$$

又$n=16$，$\bar{x}=20$，$s=1$，$1-\alpha=0.90$，$\alpha=0.10$，$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.05}(15)$，故

$$\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=20-\frac{1}{4}t_{0.05}(15)，\quad \bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=20+\frac{1}{4}t_{0.05}(15)$$

从而参数μ的置信水平为0.90的置信区间为

$$(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(15),\ 20+\frac{1}{4}t_{0.05}(15))$$

故选（C）。

（3）解应选（C）。

由于当σ^2已知时，总体均值μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}})$$

当σ^2未知时，总体均值μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$$

因此无论σ^2是否已知，μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间都是以$\bar{X}$为中心的区间，故选（C）。

（4）解应选（A）。

由于σ^2已知，因此总体均值μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}})$$

从而其长度为$L=\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}$。因为当样本容量$n$不变，置信水平$1-\alpha$变大，即$\alpha$变小时，由上$\alpha$分位点的定义，知$z_{\frac{\alpha}{2}}$变大，所以置信区间长度$L$变长，故选（A）。

二、填空题

（1）解应填$(4.412, 5.588)$。

由于$\sigma^2=0.9^2$已知，因此参数μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}})$$

又$n=9$，$\bar{x}=5$，$\sigma=0.9$，$1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$，$z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96$，故

$$\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}=5-\frac{0.9}{\sqrt{9}}\times 1.96=4.412,\quad \bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}=5+\frac{0.9}{\sqrt{9}}\times 1.96=5.588$$

从而参数μ的置信水平为0.95的置信区间为$(4.412,\ 5.588)$，故填$(4.412,\ 5.588)$。

（2）解　应填$z_{\frac{\alpha}{2}}$。

由于σ^2已知，因此参数μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}})$$

从而$\lambda=z_{\frac{\alpha}{2}}$，故填$z_{\frac{\alpha}{2}}$。

（3）解应填$(5.616, 6.384)$。

由于σ^2未知，因此参数μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$$

又$n=9$，$\bar{x}=6$，$s=0.5$，$1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$，$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(8)=2.306$，故

$$\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=6-\frac{0.5}{\sqrt{9}}\times 2.306=5.616$$

$$\bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=6+\frac{0.5}{\sqrt{9}}\times 2.306=6.384$$

从而参数μ的置信水平为0.95的置信区间为$(5.616,\ 6.384)$，故填$(5.616,\ 6.384)$。

三、解（1）由于σ^2已知，因此参数μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}})$$

又$n=9$，$\sigma=0.6$，$1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$，$z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96$，经计算得$\bar{x}=6$，故

$$\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}=6-\frac{0.6}{\sqrt{9}}\times 1.96=5.608，\quad \bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}=6+\frac{0.6}{\sqrt{9}}\times 1.96=6.392$$

从而参数μ的置信水平为0.95的置信区间为$(5.608,\ 6.392)$。

（2）由于σ^2未知，因此参数μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$$

又$n=9$，$1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$，$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(8)=2.306$，经计算得$\bar{x}=6$，$s^2=0.33$，故

$$\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=6-\frac{\sqrt{0.33}}{\sqrt{9}}\times 2.306=5.558$$

$$\bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=6+\frac{\sqrt{0.33}}{\sqrt{9}}\times 2.306=6.442$$

从而参数μ的置信水平为0.95的置信区间为$(5.558,\ 6.442)$。

四、解由于μ已知，因此参数σ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$(\frac{\sqrt{(n-1)S^2}}{\sqrt{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}},\frac{\sqrt{(n-1)S^2}}{\sqrt{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}})$$

又$n=9$，$s=11$，$1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$，$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.975}(8)=2.180$，$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ $=\chi^2_{0.025}(8)=17.535$，故

$$\frac{\sqrt{(n-1)S^2}}{\sqrt{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}=\frac{\sqrt{(9-1)\times 11^2}}{\sqrt{17.535}}=7.4，\quad \frac{\sqrt{(n-1)S^2}}{\sqrt{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}==\frac{\sqrt{(9-1)\times 11^2}}{\sqrt{2.180}}=21.1$$

从而参数σ的置信水平为0.95的置信区间为$(7.4,21.1)$。

五、解设两总体分别为$X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$，则

$$\bar{x}=\frac{1}{4}(0.143+0.142+0.143+0.137)=0.14125$$

$$s_1^2=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2=[(0.143-0.14125)^2+(0.142-0.14125)^2$$

$$+(0.143-0.14125)^2+(0.137-0.14125)^2]=0.00000825$$

$$\bar{y}=\frac{1}{5}(0.140+0.142+0.136+0.138+0.140)=0.1392$$

$$s_2^2=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2=[(0.140-0.1392)^2+(0.142-0.1392)^2$$

$$+(0.136-0.1392)^2+(0.138-0.1392)^2+(0.140-0.1392)^2]=0.0000052$$

由于$\sigma_1^2=\sigma_2^2$未知，因此两总体均值之差$\mu_1-\mu_2$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$(\bar{X}-\bar{Y}-S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2),\ \bar{X}-\bar{Y}+S_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2))$$

又$n_1=4$，$n_2=5$，$\bar{x}=0.14125$，$\bar{y}=0.1392$，$s_1^2=0.00000825$，$s_2^2=0.0000052$，$1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$，$t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)=t_{0.025}(7)=2.3646$，$s_\omega=\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}$

$=\sqrt{\frac{3\times 0.00000825+4\times 0.0000052}{7}}=0.00255$，故

$$\bar{x}-\bar{y}-s_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)=0.14125-0.1392-0.00255\times\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}\times 2.3646=-0.002$$

$$\bar{x}-\bar{y}+s_\omega\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)=0.14125-0.1392+0.00255\times\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}\times 2.3646=0.006$$

从而两总体均值之差$\mu_1-\mu_2$的置信水平为0.95的置信区间为$(-0.002,\ 0.006)$。

六、解由于μ_1、μ_2未知，因此两总体方差之比$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2-1,n_1-1)\right)$$

又$n_1=18$，$n_2=13$，$s_1^2=0.34$，$s_2^2=0.29$，$1-\alpha=0.90$，$\alpha=0.10$，$F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$ $=F_{0.05}(17,12)=2.59$，$F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2-1,n_1-1)=F_{0.05}(12,17)=2.38$，故

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}=\frac{0.34}{0.29\times 2.59}=0.45,\quad \frac{s_1^2}{s_2^2}F_{\frac{\alpha}{2}}(n_2-1,n_1-1)=\frac{0.34\times 2.38}{0.29}=2.79$$

从而两总体方差之比$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信水平为$0.95$的置信区间为$(0.45,\ 2.79)$。

七、解由中心极限定理知，样本均值$\bar{\xi}$近似地服从正态分布$N(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n})$，其中$\mu=E\xi$，由于$\sigma^2$已知，因此总体数学期望$\mu$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{\xi}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\ \bar{\xi}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

又$n=100$，$\bar{\xi}=5$，$\sigma=1$，$1-\alpha=0.95$，$\alpha=0.05$，$z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96$，故

$$\bar{\xi}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}=5-\frac{1}{\sqrt{100}}\times 1.96=4.804,\quad \bar{\xi}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}=5+\frac{1}{\sqrt{100}}\times 1.96=5.196$$

从而总体ξ的数学期望的置信水平为0.95的置信区间为$(4.804,\ 5.196)$。