第四章　　随机变量的数字特征

§1 数学期望

一、单项选择题

（1）解应选（C）。

设 X 表示“此人得奖金额”，则 X 为一离散型随机变量，其可能的取值为 6、9、12，且

$$P(X=6)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}，P(X=9)=\frac{C_8^2C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}，P(X=12)=\frac{C_8^1C_2^2}{C_{10}^3}=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$$

从而

$$EX=6\times\frac{7}{15}+9\times\frac{7}{15}+12\times\frac{1}{15}=7.8$$

故选（C）。

（2）解应选（B）。

由于 X 与 Y 相互独立且同在区间 $(0,\theta)$ $(\theta>0)$ 上服从均匀分布，因此其分布函数均为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{\theta}, & 0\le x<\theta\\ 1, & x\ge\theta\end{cases}$$

从而 $\min\{X,Y\}$ 的分函数为

$$F_{\min}(x)=1-[1-F(x)]^2=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-(1-\dfrac{x}{\theta})^2, & 0\le x<\theta\\ 1, & x\ge\theta\end{cases}$$

所以其概率密度为

$$f_{\min}(x)=F'_{\min}(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta}(1-\dfrac{x}{\theta}), & 0<x<\theta\\ 0, & 其他\end{cases}$$

从而

$$E[\min\{X,Y\}]=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{\min}(x)dx=\int_0^{\theta}x\cdot\frac{2}{\theta}(1-\frac{x}{\theta})dx=\frac{\theta}{3}$$

故选（B）。

（3）解应选（D）。

由于 X 的概率密度为

$$f(x)=F'(x)=0.3\Phi'(x)+\frac{1}{2}\times 0.7\Phi'(\frac{x-1}{2})=0.3\varphi(x)+\frac{1}{2}\times 0.7\varphi(\frac{x-1}{2})$$

其中 $\varphi(x)$ 为标准正态随机变量的概率密度，因此

$$\begin{aligned}EX&=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x[0.3\varphi(x)+\frac{1}{2}\times 0.7\varphi(\frac{x-1}{2})]dx\\&=0.3\times\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)dx+\frac{1}{2}\times 0.7\times\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(\frac{x-1}{2})dx\\&=\frac{1}{2}\times 0.7\times\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(\frac{x-1}{2})dx\end{aligned}$$

令 $u=\frac{x-1}{2}$，则

$$EX=0.7\times\int_{-\infty}^{+\infty}(2u+1)\varphi(u)du=0.7\times 2\times\int_{-\infty}^{+\infty}u\varphi(u)du+0.7\times\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)du=0.7$$

故选（D）。

（4）解应选（A）。

由于 $\max\{X,Y\}=\frac{1}{2}(X+Y+|X-Y|)$， $\min\{X,Y\}=\frac{1}{2}(X+Y-|X-Y|)$，因此

$$\begin{aligned}E(UV)&=E(\max\{X,Y\}\cdot\min\{X,Y\})=E[\frac{1}{2}(X+Y+|X-Y|)\cdot\frac{1}{2}(X+Y-|X-Y|)]\\&=E\{\frac{1}{4}[(X+Y)^2-(X-Y)^2]\}=E(XY)=EX\cdot EY\end{aligned}$$

故选（A）。

（5）解应选（D）。

由于

$$\begin{aligned}E(X-C)^2&=E[(X-\mu)+(\mu-C)]^2\\&=E(X-\mu)^2+(\mu-C)^2+2E[(X-\mu)(\mu-C)]\\&=E(X-\mu)^2+(\mu-C)^2\end{aligned}$$

因此 $E(X-C)^2\geq E(X-\mu)^2$，故选（D）。

二、填空题

（1）解应填 18.4。

由于 $X\sim B(10,0.4)$，因此 $EX=10\times 0.4=4$， $DX=10\times 0.4\times 0.6=2.4$，从而

$$E(X^2)=DX+(EX)^2=2.4+4^2=18.4$$

故填 18.4。

（**2**）解应填$\frac{4}{3}$。

由于$X\sim E(1)$，因此$EX=1$，且X的概率密度为$f(\mathrm{x})=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，因此

$$E(X+e^{-2X})=EX+Ee^{-2X}=1+\int_0^{+\infty}e^{-2x}\cdot e^{-x}dx=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

故填$\frac{4}{3}$。

（**3**）解应填-4。

由于$X\sim N(1,3),Y\sim N(2,4)$，因此$EX=1,EY=2$，从而

$$E(Z)=E(2X-3Y)=2EX-3EY=2\times1-3\times2=-4$$

故填-4。

（**4**）解应填$2e^2$。

由于$X\sim N(0,1)$，因此X的概率密度为$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(-\infty<x<+\infty)$，从而

$$E(Xe^{2X})=\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{2x}\varphi(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{2x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=e^2\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}dx=2e^2$$

故填$2e^2$。

（**5**）解应填$Z\sim N(0,5)$。

方法一由于X与Y相互独立，且$X\sim N(-3,1)$，$Y\sim N(2,1)$，因此Z服从正态分布。因为

$$EZ=EX-2EY+7=-3-2\times2+7=0，\quad DZ=DX+4DY=1+4\times1=5$$

所以$Z\sim N(0,5)$，故填$Z\sim N(0,5)$。

（**6**）解应填$\frac{2}{3}$。

由于

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^2x\cdot\frac{x}{2}dx=\frac{4}{3}$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{4}x^2, & 0\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$$

因此

$$P(F(X)>EX-1)=P(F(X)>\frac{1}{3})$$

$$=P(\frac{X^2}{4}>\frac{1}{3})=P(X>\frac{2}{\sqrt{3}})+P(X<-\frac{2}{\sqrt{3}})=\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2}\frac{x}{2}dx+0=\frac{2}{3}$$

故填$\frac{2}{3}$。

方法二由于$F(X)\sim U(0,1)$，因此

$$P(F(X)>EX-1)=P(F(X)>\frac{1}{3})=\frac{2}{3}$$

故填$\frac{2}{3}$。

三、**解**（1）设在区间$(0,2)$上随机取一点的坐标为V，则$V\sim U(0,2)$，从而$X=\min\{V,2-V\}$，

先求X的分布函数$F_X(x)=P(X\le x)=P(\min\{V,2-V\}\le x)$。当$x<0$时，$F_X(x)=0$；当$0\le x<1$时，

$$F_X(x)=P(\min\{V,2-V\}\le x)=1-P(\min\{V,2-V\}>x)$$

$$=1-P(V>x,2-V>x)=1-P(x<V<2-x)=1-\frac{2-2x}{2}=x$$

当$x\ge 1$时，$F_X(x)=1$。

再求X的概率密度$f_X(x)$：

$$f_X(x)=F_X'(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（2）先求Z的分布函数$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(\frac{Y}{X}\le z)$。当$z<1$时，$F_Z(z)=0$；当$z\ge 1$时，

$$F_Z(z)=P\left(\frac{Y}{X}\le z\right)=P\left(\frac{2-X}{X}\le z\right)=P\left(X\ge\frac{2}{z+1}\right)=1-\frac{2}{z+1}$$

再求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$：

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\dfrac{2}{(z+1)^2}, & z>1\\ 0, & z\le 1\end{cases}$$

（3）$E\left(\dfrac{X}{Y}\right)=E\left(\dfrac{X}{2-X}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x}{2-x}f_X(x)dx=\int_0^1\dfrac{x}{2-x}dx=2\ln 2-1$

四、解（1）$EY=2EX=2\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=2\int_0^{+\infty}x\cdot e^{-x}dx=-2\int_0^{+\infty}xd(e^{-x})$

$$=\left[-2xe^{-x}\right]_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=2$$

（2）$EY=E(e^{-2X})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x}f(x)dx=\int_0^{+\infty}e^{-2x}\cdot e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}e^{-3x}dx=\dfrac{1}{3}$

五、解（1）$EX=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}x_i p_{ij}$

$$=1\times(0.2+0.1+0.1)+2\times(0.1+0.0+0.1)+3\times(0.0+0.3+0.1)=2$$

$$EY=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}y_j p_{ij}=\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}y_j p_{ij}$$

$$=(-1)\times(0.2+0.1+0.0)+0\times(0.1+0.0+0.3)+1\times(0.1+0.1+0.1)=0$$

（2）$EZ=E(\dfrac{Y}{X})=\dfrac{-1}{1}\times0.2+\dfrac{0}{1}\times0.1+\dfrac{1}{1}\times0.1$

$$+\frac{-1}{2}\times0.1+\frac{0}{2}\times0.0+\frac{1}{2}\times0.1+\frac{-1}{3}\times0.0+\frac{0}{3}\times0.3+\frac{1}{3}\times0.1=-\frac{1}{15}$$

（3）$EZ=E(X-Y)^2=2^2\times0.2+1^2\times0.1+0^2\times0.1$

$$+3^2\times0.1+2^2\times0.0+1^2\times0.1+4^2\times0.0+3^2\times0.3+2^2\times0.1=5$$

六、解 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\iint\limits_{0\le y\le x\le 1}x\cdot12y^2dxdy=12\int_0^1xdx\int_0^x y^2dy=\dfrac{4}{5}$

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=\iint\limits_{0\le y\le x\le 1}y\cdot12y^2dxdy=12\int_0^1dx\int_0^x y^3dy=\frac{3}{5}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\iint\limits_{0\le y\le x\le 1}xy\cdot12y^2dxdy=12\int_0^1xdx\int_0^x y^3dy=\frac{1}{2}$$

$$E(X^2+Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x^2+y^2)f(x,y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{0\le y\le x\le 1}(x^2+y^2)\cdot 12y^2dxdy=12\int_0^1 dx\int_0^x(x^2y^2+y^4)dy=\frac{16}{15}$$

七、解一台设备在出售一年内调换的概率为$P(X<1)=\int_0^1\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{4}}dx=1-e^{-\frac{1}{4}}$，以$Y$记工厂售出一台设备的净赢利值，则$Y$的分布律为

Y	100	$100-300$
P	$e^{-\frac{1}{4}}$	$1-e^{-\frac{1}{4}}$

从而$EY=100\times e^{-\frac{1}{4}}-200(1-e^{-\frac{1}{4}})=300e^{-\frac{1}{4}}-200=33.64$。

八、解由于$X_i\sim U(0,1)\ (i=1,2,\cdots,n)$，因此$X_i$的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

（1）由于$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，因此$U=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$的分布函数为

$$F_U(u)=[F(u)]^n=\begin{cases}0, & u<0\\ u^n, & 0\le u<1\\ 1, & u\ge 1\end{cases}$$

从而U的概率密度为$f_U(u)=F_U'(u)=\begin{cases}nu^{n-1}, & 0<u<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，故

$$EU=\int_{-\infty}^{+\infty}uf_U(u)du=\int_0^1 u\cdot nu^{n-1}du=n\int_0^1 u^n du=\frac{n}{n+1}$$

（2）由于$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，因此$V=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$的分布函数为

$$F_V(v)=1-[1-F(v)]^n=\begin{cases}0, & v<0\\ 1-(1-v)^n, & 0\le v<1\\ 1, & v\ge 1\end{cases}$$

从而V的概率密度为$f_V(v)=F_V'(v)=\begin{cases}n(1-v)^{n-1}, & 0<v<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，故

$$EV=\int_{-\infty}^{+\infty}vf_V(v)dv=\int_0^1 v\cdot n(1-v)^{n-1}dv=\frac{1}{n+1}$$

九、解（1）由于X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

因此

$$P(X>3)=\int_3^{+\infty}2^{-x}\ln 2dx=\left[-2^{-x}\right]_3^{+\infty}=\frac{1}{8}$$

Y 可能的取值为$2,3,\cdots$，且

$$P(Y=k)=C_{k-1}^1\frac{1}{8}(1-\frac{1}{8})^{k-2}\cdot\frac{1}{8}=(k-1)(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^{k-2}$$

即Y 的分布律为

$$P(Y=k)=(k-1)(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^{k-2},\quad k=2,3,\cdots$$

（2）由于Y 的分布律为

$$P(Y=k)=(k-1)(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^{k-2},\quad k=2,3,\cdots$$

因此

$$EY=\sum_{k=2}^{\infty}kP(Y=k)=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^{k-2}=(\frac{1}{8})^2\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)(\frac{7}{8})^{k-2}$$

又由于

$$s(x)=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)x^{k-2}=(\sum_{k=2}^{\infty}x^k)''=\frac{2}{(1-x)^3},\quad -1<x<1$$

故

$$EY=(\frac{1}{8})^2 s(\frac{7}{8})=(\frac{1}{8})^2\frac{2}{(1-\frac{7}{8})^3}=16$$

§2 方差

一、单项选择题

（1）解应选（D）。

由于$X\sim P(\lambda)$，因此$EX=DX=\lambda$，从而

$$(D(kX))^2EX=(k^2DX)^2EX=k^4\lambda^2\cdot\lambda=k^4\lambda^3$$

故选（D）。

（2）解应选（A）。

由于 $X\sim E(3)$，$Y\sim E(\lambda)$，因此 $DX=\frac{1}{3^2}$，$DY=\frac{1}{\lambda^2}$。又由于 X 、Y 相互独立，故

$$D(X+Y)=DX+DY=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{\lambda^2}=\frac{25}{144}$$

解之得 $\lambda=4$，$\lambda=-4$（不合题意舍去），从而 $P(Y\le 2)=\int_0^2 4e^{-4y}dy=1-e^{-8}$，故选（A）。

（3）解应选（D）。

由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，得 $1=\int_0^1(a+bx)dx=a+\frac{b}{2}$，即 $2a+b=2$，再由

$$0.5=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 x(a+bx)dx=\frac{a}{2}+\frac{b}{3}$$

得 $3a+2b=3$。解之得 $a=1,b=0$，因此 $X\sim U(0,1)$，从而 $DX=\frac{1}{12}$，故选（D）。

（4）解应选（A）。

由于 X 与 Y 独立，且 $X\sim N(\mu,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu,\sigma_2^2)$，因此 $X-Y\sim N(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$，从而 $E(X-Y)=0,D(X-Y)=\sigma_1^2+\sigma_2^2$，故

$$E(|X-Y|^2)=E(X-Y)^2=D(X-Y)-[E(X-Y)]^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2$$

因为

$$E(|X-Y|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|t|\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}e^{-\frac{t^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}dt=\frac{2}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\int_0^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}dt$$

$$=-\frac{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}d(-\frac{t^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)})$$

$$=-\frac{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\left[e^{-\frac{t^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}\right]_0^{+\infty}=\frac{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}$$

所以

$$D(|X-Y|)=E(|X-Y|^2)-[E(|X-Y|]^2$$

$$=\sigma_1^2+\sigma_2^2-(\frac{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}})^2=(\sigma_1^2+\sigma_2^2)(1-\frac{2}{\pi})$$

故选（A）。

二、填空题

（1）解应填 0，$\frac{4}{\pi}-1$。

$$E[\sin X]=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin xf(x)dx=\int_{-1}^{1}\sin x\cdot\frac{2}{\pi(1+x^2)}dx=0$$

故填0。由于

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}x\cdot\frac{2}{\pi(1+x^2)}dx=0$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{-1}^{1}x^2\cdot\frac{2}{\pi(1+x^2)}dx=\frac{4}{\pi}-1$$

因此$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{4}{\pi}-1$，故填$\frac{4}{\pi}-1$。

（**2**）**解**应填1，$\frac{1}{2}$。

由于 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}}$，因此 $X\sim N(1,(\frac{1}{\sqrt{2}})^2)$，即 $X\sim N(1,\frac{1}{2})$，从而$EX=1$，$DX=\frac{1}{2}$，故填1，$\frac{1}{2}$。

（**3**）**解**应填$\frac{1}{e}$。

由于$X\sim E(\lambda)$，因此$DX=\frac{1}{\lambda^2}$，因为X的概率密度为$f(\mathrm{x})=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，所以

$$P(X>\sqrt{DX})=P(X>\frac{1}{\lambda})=\int_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{e}$$

故填$\frac{1}{e}$。

（**4**）**解**应填$\frac{8}{9}$。

由于$X\sim U(-1,2)$，因此X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1<x<2\\ 0, & 其他\end{cases}$，从而

$$EY=1\times P(Y=1)+0\times P(Y=0)+(-1)\times P(Y=-1)=P(X>0)-P(X<0)$$

$$=\int_0^2\frac{1}{3}dx-\int_{-1}^0\frac{1}{3}dx=\frac{1}{3}$$

$$EY^2=1^2\times P(Y=1)+0^2\times P(Y=0)+(-1)^2\times P(Y=-1)=P(X>0)+P(X<0)$$

$$=\int_0^2\frac{1}{3}dx+\int_{-1}^0\frac{1}{3}dx=1$$

所以$DY=EY^2-(EY)^2=1-(\frac{1}{3})^2=\frac{8}{9}$，故填$\frac{8}{9}$。

三、**解**由$F(-1+0)=F(-1)$，$F(1+0)=F(1)$，得$a+b\arcsin(-1)=0$，$a+b\arcsin 1=1$，

即$a-\frac{\pi}{2}b=0$，$a+\frac{\pi}{2}b=1$，解之得$a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{\pi}$。

由于X为连续型随机变量，因此X的概率密度为

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & -1<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

从而

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}x\cdot\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=0$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{-1}^{1}x^2\cdot\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{2}{\pi}\int_0^1x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{2}$$

四、解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-x}^{x}1dy=2x, & 0<x<1\\ 0, & 其他\end{cases}$

方法一 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\iint\limits_D xdxdy=\int_0^1dx\int_{-x}^{x}xdy=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)dxdy=\iint\limits_D x^2dxdy=\int_0^1dx\int_{-x}^{x}x^2dy=\int_0^1 2x^3dx=\frac{1}{2}$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$$

故$D(2X+1)=4DX=4\times\frac{1}{18}=\frac{2}{9}$。

方法二 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_0^1x\cdot 2xdx=\frac{2}{3}$，$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)dx=\int_0^1x^2\cdot 2xdx=\frac{1}{2}$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$$

故$D(2X+1)=4DX=4\times\frac{1}{18}=\frac{2}{9}$。

五、**解**设$G=\{(x,y)\big|0\le x\le 1,0\le y\le 1,x+y\ge 1\}$，依题设$(X,Y)$的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2,(x,y)\in G\\0,(x,y)\in G\end{cases}$$

由于

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{1-x}^1 2xdy=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_{1-x}^1 2x^2dy=\int_0^1 2x^3dx=\frac{1}{2}$$

因此$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$。同理可得$EY=\frac{2}{3},DY=\frac{1}{18}$。

又由于

$$EXY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 xdx\int_{1-x}^1 2ydy$$

$$=\int_0^1 x(1-(1-x)^2)dx=\int_0^1 x(2x-x^2)dx=\frac{2}{3}-\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

故

$$\mathrm{cov}(X,Y)=EXY-EXEY=\frac{5}{12}-\frac{4}{9}=-\frac{1}{36}$$

从而

$$DU=D(X+Y)=DX+DY+2\mathrm{cov}(X,Y)=\frac{1}{18}+\frac{1}{18}-\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$$

§3 协方差及相关系数　§4 n维正态随机变量

一、单项选择题

（1）解应选（A）。

由于$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，因此$\mathrm{cov}(X_i,X_j)=0\ (i\neq j;\ i,j=1,2,\cdots,n)$，从而

$$\mathrm{cov}(X_1,Y)=\mathrm{cov}(X_1,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i)=\frac{1}{n}\mathrm{cov}(X_1,X_1)=\frac{1}{n}DX_1=\frac{\sigma^2}{n}$$

故选（A）。

（2）解应选（B）。

由于

$$D(X+Y)=DX+DY+2\mathrm{cov}(X,Y)$$

$$D(X-Y)=DX+DY-2\operatorname{cov}(X,Y)$$

若 $D(X+Y)=D(X-Y)$，则

$$DX+DY+2\operatorname{cov}(X,Y)=DX+DY-2\operatorname{cov}(X,Y)$$

从而 $\operatorname{cov}(X,Y)=0$，故选（B）。

（3）**解**应选（A）。

由于 $D(2X+Y)=0$，因此 $P(2X+Y=C)=1$，即 $P(Y=-2X+C)=1$，其中 C 为常数，从而 $\rho_{XY}=-1$，故选（A）。

（4）**解**应选（D）。

设 X 、Y 分别表示所截成两段木棒的长度，则 $P(X+Y=1)=1$，即 $P(Y=-X+1)=1$，从而 $\rho_{XY}=-1$，故选（D）。

二、填空题

（1）**解**应填 28.8 。

$$\begin{aligned}D(3X-2Y)&=9DX+4DY-2\times3\times2\operatorname{cov}(X,Y)\\&=9DX+4DY-2\times3\times2\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}\\&=9\times4+4\times9-2\times3\times2\times0.6\times2\times3=28.8\end{aligned}$$

故填 28.8 。

（2）**解**应填 $(\alpha^2-\beta^2)(\sigma^2+\mu^2)$ 。

由于 X 与 Y 相互独立，且同服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，因此

$$\begin{aligned}E(\xi\eta)&=E[(\alpha X+\beta Y)(\alpha X-\beta Y)]=\alpha^2EX^2-\beta^2EY^2=(\alpha^2-\beta^2)[DX+(EX)^2]\\&=(\alpha^2-\beta^2)(\sigma^2+\mu^2)\end{aligned}$$

故填 $(\alpha^2-\beta^2)(\sigma^2+\mu^2)$ 。

三、证明由于

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le1}x\cdot\frac{1}{\pi}dxdy=0$$

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}y\cdot\frac{1}{\pi}dxdy=0$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}xy\cdot\frac{1}{\pi}dxdy=0$$

因此$E(XY)=EX\cdot EY$，从而X与Y不相关．又由于

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx=\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

故

$$f(0,0)=\frac{1}{\pi}\neq\frac{4}{\pi^2}=\frac{2}{\pi}\times\frac{2}{\pi}=f_X(0)f_Y(0)$$

从而X与Y不相互独立。

四、证明 X，Y的分布律分别为

X	0	1
P	$P(\bar{A})$	$P(A)$

Y	0	1
P	$P(\bar{B})$	$P(B)$

$EX=P(X=1)=P(A)$，$EY=P(Y=1)=P(B)$，$E(XY)=P(X=1,Y=1)=P(AB)$

若$\rho_{XY}=0$，即$E(XY)=EX\cdot EY$，则$P(AB)=P(A)P(B)$，即A与B相互独立，从而A与$\bar{B}$，$\bar{A}$与B，$\bar{A}$与$\bar{B}$，所以

$$P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1)，\quad P(X=1,Y=0)=P(X=1)P(Y=0)$$

$$P(X=0,Y=1)=P(X=0)P(Y=1)，\quad P(X=0,Y=0)=P(X=0)P(Y=0)$$

故X与Y相互独立。

五、解（1）$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=0$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx$$

$$=-\int_0^{+\infty}x^2d(e^{-x})=\left[-x^2e^{-x}\right]_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=-2\int_0^{+\infty}xd(e^{-x})$$

$$=\left[-2xe^{-x}\right]_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=2$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=2$$

（2）由于 $E(X|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}x|x|f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x|x|\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=0$，因此

$$\mathrm{cov}(X,|X|)=E(X|X|)-EX\cdot E(|X|)=0$$

从而 X 与 $|X|$ 不相关。

（3）由于

$$E|X|=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=1$$

$$D(|X|)=E(|X|)^2-(E|X|)^2=EX^2-(E|X|)^2=2-1=1$$

因此 $D(X+|X|)=DX+D|X|+2\mathrm{cov}(X,|X|)=2+1+2\times0=3$。

又 $P(X<-2)>0,P(|X|\le1)>0$，但

$$P(X<-2,|X|\le1)=0<P(X<-2)P(|X|\le1)$$

即 $P(X<-2,|X|\le1)\ne P(X<-2)P(|X|\le1)$，故随机事件 $\{X<-2\}$ 与 $\{|X|\le1\}$ 不相互独立，从而 X 与 $|X|$ 不相互独立。

六、解 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\frac{1}{8}\int_0^2xdx\int_0^2(x+y)dy=\frac{1}{8}\int_0^2x\left[\frac{(x+y)^2}{2}\right]_0^2dx$

$$=\frac{1}{4}\int_0^2x(x+1)dx=\frac{7}{6}$$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)dxdy=\frac{1}{8}\int_0^2x^2dx\int_0^2(x+y)dy=\frac{1}{8}\int_0^2x^2\left[\frac{(x+y)^2}{2}\right]_0^2dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^2x^2(x+1)dx=\frac{5}{3}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\frac{1}{8}\int_0^2xdx\int_0^2y(x+y)dy=\frac{1}{8}\int_0^2x\left[\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right]_0^2dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^2(x^2+\frac{4}{3}x)dx=\frac{4}{3}$$

$$DX=EX^2-(EX)^2=\frac{5}{3}-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$$

由对称性，得 $EY=EX=\frac{7}{6}, DY=DX=\frac{11}{36}$，从而

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=\frac{4}{3}-\frac{7}{6}\times\frac{7}{6}=-\frac{1}{36}$$

故

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{-\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{11}{36}}\sqrt{\frac{11}{36}}}=-\frac{1}{11}$$

$$D(X+Y)=DX+DY+2\operatorname{cov}(X,Y)=\frac{11}{36}+\frac{11}{36}+2\times\left(-\frac{1}{36}\right)=\frac{5}{9}$$

七、解（1）由于

$EX^2=DX+(EX)^2=4$，$EY^2=DY+(EY)^2=16$

$$E(XY)=\operatorname{cov}(X,Y)+EX\cdot EY=\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}=(-0.5)\times 2\times 4=-4$$

因此

$$EW=E(aX+3Y)^2=a^2EX^2+6aE(XY)+9EY^2$$

$$=4a^2-24a+144=4(a-3)^2+108$$

从而当 $a=3$ 时，EW 取得最小值，且最小值为 108。

（2）设 $a^2=\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$，则

$$\operatorname{cov}(U,V)=\operatorname{cov}(X-aY,X+aY)=\operatorname{cov}(X,X)-a^2\operatorname{cov}(Y,Y)$$

$$=\sigma_X^2-a^2\sigma_Y^2=0$$

从而 U 与 V 不相关。又由于 (X,Y) 服从二维正态分布，且 U、V 可由 X、Y 线性表示，即 (U,V) 是 (X,Y) 的线性变换，故 (U,V) 服从二维正态分布，从而 U 与 V 相互独立。