

第三章 多维随机变量及其分布

§1 二维随机变量及其联合分布函数 §2 二维离散型随机变量及其联合分布律

§3 二维连续型随机变量及其联合概率密度

一、单项选择题

(1) 解应选 (C)。

对于选项 (C), 取四点 $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$, 则

$$F(1,1) - F(1,0) - F(0,1) + F(0,0) = 1 - 1 - 1 + 0 = -1 < 0$$

从而选项 C 给出的二元函数不能作为二维随机变量 (X, Y) 的联合分布函数, 故选 (C)。

(2) 解应选 (D)。

由 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$, 得

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-\frac{x^2+y^2}{6}} dx dy = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{6}} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{6}} dy = 6\pi A$$

或

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-\frac{x^2+y^2}{6}} dx dy = A \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\rho^2}{6}} \rho d\rho = 6\pi A \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\rho^2}{6}} d\left(\frac{\rho^2}{6}\right) = 6\pi A$$

从而 $A = \frac{1}{6\pi}$, 故选 (D)。

(3) 解应选 (D)。

由于 $(X, Y) \sim U(D)$, 因此 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$, 从

而 $P(\min\{X, Y\} \geq 0) = P(X \geq 0, Y \geq 0) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{4} dx dy = \frac{1}{4}$, 故选 (D)。

二、填空题

(1) 解应填 $\frac{1}{4}$ 。

$$P(X + Y \leq 1) = \iint_{x+y \leq 1} f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{1-x} 6x dy = \int_0^{\frac{1}{2}} 6x(1-2x) dx = \frac{1}{4}$$

故填 $\frac{1}{4}$ 。

(1) 解应填 $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$ 。

由 $a + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + b = 1$, 得 $a + b = \frac{3}{4}$, 由 $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, 得 $a = \frac{1}{4}$, 从而 $b = \frac{1}{2}$, 故填

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = \frac{1}{2}.$$

三、解 X 的可能取值为 0,1,2,3, Y 的可能取值为 0,1,2, 且

$$P(X=0, Y=0)=0, \quad P(X=0, Y=1)=0, \quad P(X=0, Y=2)=\frac{C_2^2 C_2^2}{C_7^4}=\frac{1}{35}$$

$$P(X=1, Y=0)=0, \quad P(X=1, Y=1)=\frac{C_3^1 C_2^1 C_2^2}{C_7^4}=\frac{6}{35},$$

$$P(X=1, Y=2)=\frac{C_3^1 C_2^2 C_2^1}{C_7^4}=\frac{6}{35}, \quad P(X=2, Y=0)=\frac{C_3^2 C_2^2}{C_7^4}=\frac{3}{35}$$

$$P(X=2, Y=1)=\frac{C_3^2 C_2^1 C_2^1}{C_7^4}=\frac{12}{35}, \quad P(X=2, Y=2)=\frac{C_3^2 C_2^2}{C_7^4}=\frac{3}{35}$$

$$P(X=3, Y=0)=\frac{C_3^3 C_2^1}{C_7^4}=\frac{2}{35}, \quad P(X=3, Y=1)=\frac{C_3^3 C_2^1}{C_7^4}=\frac{2}{35}, \quad P(X=3, Y=2)=0$$

即 (X, Y) 的联合分布律为

	X	0	1	2	3
Y		0	0	$\frac{3}{35}$	$\frac{2}{35}$
0	0	0	$\frac{6}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{2}{35}$
1	0	$\frac{1}{35}$	$\frac{6}{35}$	$\frac{3}{35}$	0
2					

四、解 (1) $P(X=1|Z=0)=\frac{C_1^1 C_2^1 + C_2^1 C_1^1}{C_3^1 C_3^1}=\frac{4}{9}$

(2) X, Y 的可能取值为 0,1,2, 且

$$P(X=0, Y=0) = \frac{C_3^1 C_3^1}{C_6^1 C_6^1} = \frac{1}{4}, \quad P(X=0, Y=1) = \frac{C_2^1 C_3^1 + C_3^1 C_2^1}{C_6^1 C_6^1} = \frac{1}{3}$$

$$P(X=0, Y=2) = \frac{C_2^1 C_2^1}{C_6^1 C_6^1} = \frac{1}{9}, \quad P(X=1, Y=0) = \frac{C_1^1 C_3^1 + C_3^1 C_1^1}{C_6^1 C_6^1} = \frac{1}{6}$$

$$P(X=1, Y=1) = \frac{C_1^1 C_2^1 + C_2^1 C_1^1}{C_6^1 C_6^1} = \frac{1}{9}, \quad P(X=1, Y=2) = 0$$

$$P(X=2, Y=0) = \frac{C_1^1 C_1^1}{C_6^1 C_6^1} = \frac{1}{36}, \quad P(X=2, Y=1) = 0, \quad P(X=2, Y=2) = 0$$

即 (X, Y) 的概率分布为

	$Y \backslash X$	0	1	2
0		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
1		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	0
2		$\frac{1}{36}$	0	0

$$\text{五、解 (1)} \quad P(X \leq \lambda, Y \leq 2\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \int_{-\infty}^{2\lambda} f(x, y) dx dy = \int_0^{\lambda} \int_0^{2\lambda} \frac{1}{\lambda^2} e^{-\frac{x+y}{\lambda}} dx dy$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} dx \int_0^{2\lambda} e^{-\frac{y}{\lambda}} dy = \left[-e^{-\frac{x}{\lambda}} \right]_0^{\lambda} \left[-e^{-\frac{y}{\lambda}} \right]_0^{2\lambda}$$

$$= (1 - e^{-1})(1 - e^{-2})$$

$$(2) \quad P(X + Y \leq \lambda) = \iint_{x+y \leq \lambda} f(x, y) dx dy = \int_0^{\lambda} dx \int_0^{\lambda-x} \frac{1}{\lambda^2} e^{-\frac{x+y}{\lambda}} dy$$

$$= \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \left[-e^{-\frac{y}{\lambda}} \right]_0^{\lambda-x} dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \left[1 - e^{-\frac{\lambda-x}{\lambda}} \right] dx = 1 - 2e^{-1}$$

六、解 (1) X 的可能取值为 1, 3, Y 的可能取值为 0, 1, 2, 3, 且 $Y \sim B(3, \frac{1}{2})$, 从而

$$P(X=1, Y=0) = 0,$$

$$P(X=1, Y=1) = P(Y=1)P(X=1|Y=1) = C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \times 1 = \frac{3}{8}$$

$$P(X=1, Y=2) = P(Y=2)P(X=1|Y=2) = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times 1 = \frac{3}{8}$$

$$P(X=1, Y=3) = 0$$

$$P(X=3, Y=0) = P(Y=0)P(X=3|Y=0) = C_3^0 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^3 \times 1 = \frac{1}{8}$$

$$P(X=3, Y=1) = 0, \quad P(X=3, Y=2) = 0$$

$$P(X=3, Y=3) = P(Y=3)P(X=3|Y=3) = C_3^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 1 = \frac{1}{8}$$

即 (X, Y) 的概率分布为

\backslash	0	1	2	3
X	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0
Y	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$

$$(2) \quad P(X=Y) = P(X=1, Y=1) + P(X=3, Y=3) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

七、解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$, 得

$$1 = \int_0^1 \int_0^1 (ax^2 + 2xy^2) dx dy = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3},$$

故 $a = 2$ 。

(2) 当 $x < 0$ 或 $y < 0$ 时, $F(x, y) = 0$; 当 $0 \leq x < 1, y \geq 1$ 时,

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv = \int_0^x \int_0^1 (2u^2 + 2uv^2) du dv = \frac{2x^3 + x^2}{3}$$

当 $x \geq 1, 0 \leq y < 1$ 时,

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv = \int_0^1 \int_0^y (2u^2 + 2uv^2) du dv = \frac{2y + y^3}{3}$$

当 $0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1$ 时,

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv = \int_0^x \int_0^y (2u^2 + 2uv^2) du dv = \frac{2x^3 y + x^2 y^3}{3}$$

当 $x \geq 1, y \geq 1$ 时, $F(x, y) = 1$, 即 (X, Y) 的联合分布函数为

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ 或 } y < 0 \\ \frac{2x^3 + x^2}{3}, & 0 \leq x < 1, y \geq 1 \\ \frac{2y + y^3}{3}, & x \geq 1, 0 \leq y < 1 \\ \frac{2x^3 y + x^2 y^3}{3}, & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \\ 1, & x \geq 1, y \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad P(X < Y) &= \iint_{x < y} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_0^y (2x^2 + 2xy^2) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{2}{3} y^3 + y^4 \right) dy = \frac{11}{30} \end{aligned}$$

§4 边缘分布 §5 条件分布

一、单项选择题

(1) 解应选 (A)。

设 (X_1, X_2) 的联合分布律为

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1	$p_{i \cdot}$
-1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$\frac{1}{4}$
0	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$\frac{1}{2}$
1	p_{31}	p_{32}	p_{33}	$\frac{1}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

则由 $P(X_1 X_2 = 0) = 1$, 得

$$p_{12} + p_{22} + p_{32} + p_{21} + p_{23} = 1$$

$$p_{11} = 0, p_{13} = 0, p_{31} = 0, p_{33} = 0$$

再由联合分布律和边缘分布律的关系，得

$$p_{12} = \frac{1}{4}, p_{32} = \frac{1}{4}, p_{21} = \frac{1}{4}, p_{23} = \frac{1}{4},$$

所以 $p_{22} = 0$ ，从而

$$\begin{aligned} P(X_1 = X_2) &= P(X_1 = -1, X_2 = -1) + P(X_1 = 0, X_2 = 0)P(X_1 = 1, X_2 = 1) \\ &= p_{11} + p_{22} + p_{33} = 0 \end{aligned}$$

故选 (A)。

(2) 解应选 (C)。

设 (X, Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	$p_{\cdot j}$
0	p_{11}	p_{12}	$\frac{1}{2}$
1	p_{21}	p_{22}	$\frac{1}{2}$
$p_{\cdot i}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

则由 $P(XY = 1) = \frac{1}{2}$ ，得 $P(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{2}$ ，即 $p_{22} = \frac{1}{2}$ ，再由联合分布律和边缘分布律

的关系，得 $p_{21} = \frac{1}{2} - p_{22} = 0$ ， $p_{11} = \frac{1}{4} - p_{21} = \frac{1}{4}$ ，从而

$$P(X = Y) = P(X = 0, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) = p_{11} + p_{22} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

故选 (C)。

(3) 解应选 (C)。

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h(y) dy = g(x) \int_{-\infty}^{+\infty} h(y) dy = bg(x)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h(y) dx = h(y) \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = ah(y)$$

故应选 (C)。

二、填空题

(1) 解应填 $\frac{13}{48}$ 。

由全概率公式, 得

$$\begin{aligned} P(Y=2) &= \sum_{i=1}^4 P(X=i, Y=2) = \sum_{i=1}^4 P(X=i)P(Y=2|X=i) \\ &= \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{13}{48} \end{aligned}$$

故填 $\frac{13}{48}$ 。

(2) 解应填 $\frac{1}{4}$ 。

由于区域 D 的面积为 $A = \int_1^{e^2} \frac{1}{x} dx = 2$, 因此 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

从而 (X, Y) 关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2x}, & 1 \leq x \leq e^2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

所以 (X, Y) 关于 X 的边缘概率密度在 $x=2$ 处的值为 $f_X(2) = \frac{1}{4}$, 故填 $\frac{1}{4}$ 。

(3) 解由联合分布律与边缘分布律的关系得 X, Y 的边缘分布律分别为

X	1	3
$P_{i\cdot}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1	2	3
$P_{\cdot j}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

三、解 (1) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_x^{+\infty} e^{-y} dy = e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^y e^{-y} dx = ye^{-y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

(2) $\forall y > 0, f_Y(y) \neq 0$, X 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{y}, & 0 < x < y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$\forall x > 0, f_X(x) \neq 0$, Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} e^{x-y}, & y > x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(3) P(X > 2 | Y < 4) = \frac{P(X > 2, Y < 4)}{P(Y < 4)} = \frac{\int_2^4 dx \int_x^4 e^{-y} dy}{\int_0^4 ye^{-y} dy} = \frac{e^{-2} - 3e^{-4}}{1 - 5e^{-4}}$$

四、解(1) 由于 $F(+\infty, +\infty) = A(B + \frac{\pi}{2})(C + \frac{\pi}{2}) = 1$, $F(-\infty, +\infty) = A(B - \frac{\pi}{2})(C + \frac{\pi}{2}) = 0$,

$F(+\infty, -\infty) = A(B + \frac{\pi}{2})(C - \frac{\pi}{2}) = 0$, 因此 $A = \frac{1}{\pi^2}$, $B = \frac{\pi}{2}$, $C = \frac{\pi}{2}$ 。

(2) 由于 (X, Y) 的联合分布函数为 $F(x, y) = \frac{1}{\pi^2} (\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{x}{2})(\frac{\pi}{2} + \arctan \frac{y}{3})$, 因

此 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y) = \frac{6}{\pi^2 (x^2 + 4)(y^2 + 9)}$$

$$(3) f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{6}{\pi^2 (x^2 + 4)(y^2 + 9)} dy = \frac{2}{\pi(x^2 + 4)}, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{6}{\pi^2 (x^2 + 4)(y^2 + 9)} dx = \frac{3}{\pi(y^2 + 9)}, \quad -\infty < y < +\infty$$

$$\begin{aligned} \text{五、解} \quad \text{由于 } f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2 + 2xy - y^2} dy = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2 - x^2} dy \\ &= Ae^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} dy = A\sqrt{\pi}e^{-x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \end{aligned}$$

$$\text{因此 } 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = A\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = A\pi, \quad \text{从而 } A = \frac{1}{\pi}.$$

$\forall -\infty < x < +\infty$, $f_X(x) > 0$, Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{\pi} e^{-2x^2 + 2xy - y^2}}{\frac{1}{\pi} e^{-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2 + 2xy - y^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-y)^2}, \quad -\infty < y < +\infty$$

六、解 (1) 先求 $f_{X|Y}(x|y)$ 。由于

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_{-y}^1 1 dx = 1 + y, & -1 < y < 0 \\ \int_y^1 1 dx = 1 - y, & 0 \leq y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - |y|, & -1 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因此 $\forall -1 < y < 1, f_Y(y) > 0, X$ 的条件概率密度为

$$f_{x|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{1 - |y|}, & |y| < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

再求 $f_{Y|X}(y|x)$ 。

由于

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_{-x}^x 1 dy = 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因此 $\forall 0 < x < 1, f_X(x) > 0, Y$ 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{2x}, & |y| < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(2) P(X > \frac{1}{2} | Y > 0) = \frac{P(X > \frac{1}{2}, Y > 0)}{P(Y > 0)} = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(x, y) dx dy}{\int_0^{+\infty} f_Y(y) dy} = \frac{\int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_0^x 1 dy}{\int_0^1 (1-y) dy} = \frac{3}{4}$$

(3) 由 (1) 得, 当 $y = \frac{1}{2}$ 时, X 的条件概率密度为

$$f_{x|Y}(x \Big| y = \frac{1}{2}) = \begin{cases} 2, & \frac{1}{2} < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\text{从而 } P(X > \frac{2}{3} \Big| Y = \frac{1}{2}) = \int_{\frac{2}{3}}^{+\infty} f_{x|Y}(x \Big| y = \frac{1}{2}) dx = \int_{\frac{2}{3}}^1 2 dx = \frac{2}{3}.$$

七、解 (1) 由题设 X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 在 $X = x (0 < x < 1)$ 条件

下, Y 的概率密度为 $f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 从而当 $0 < y < x < 1$ 时, (X, Y) 的联合

概率密度为 $f(x, y) = f_X(x)f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x}$, 在其它点 (x, y) 处, $f(x, y) = 0$, 即

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < y < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(2) \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^1 \frac{1}{x} dx = -\ln y, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(3) \quad P(X + Y > 1) = \iint_{x+y>1} f(x, y) dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{1-x}^x \frac{1}{x} dy = 1 - \ln 2$$

八、解 由题设知 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in G \\ 0, & (x, y) \notin G \end{cases}$

$$(1) \quad X \text{ 的边缘概率密度为 } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^x dy = x, & 0 < x < 1 \\ \int_0^{2-x} dy = 2 - x, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(2) \quad Y \text{ 的边缘概率密度为 } f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^{2-y} dx = 2(1 - y), & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$\forall 0 < y < 1, f_Y(y) > 0$, X 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1}{2(1-y)}, & y < x < 2 - y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(3) \quad P(X - Y \leq 1) = 1 - P(X - Y > 1) = 1 - \iint_{x-y>1} f(x, y) dxdy = 1 - \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{1+y}^{2-y} dx = \frac{3}{4}$$

§6 随机变量的独立性 §7 二维随机变量函数及其分布

一、单项选择题

(1) 解应选 (A)。

由于 $X \sim E(1)$, $Y \sim E(4)$, 因此 X 与 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} 4e^{-4y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

又由于 X 与 Y 相互独立, 故 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} 4e^{-(x+4y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

从而 $P(X < Y) = \iint_{x < y} f(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \int_x^{+\infty} 4e^{-4y} dy = \int_0^{+\infty} e^{-5x} dx = \frac{1}{5}$, 故选 (A)。

(2) 解应选 (B)。

方法一由于 $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(1,1)$, 因此 X 与 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-1)^2}{2}}, \quad -\infty < y < +\infty$$

又由于 X 与 Y 相互独立, 故 $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z-y)^2}{2}} \cdot e^{-\frac{(y-1)^2}{2}} dy = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(z-1)^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-\frac{z+1}{2})^2}{2}} dy$$

令 $t = y - \frac{z+1}{2}$, 则

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(z-1)^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(z-1)^2}{4}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(z-1)^2}{4}}, \quad -\infty < z < +\infty$$

即 $Z = X + Y \sim N(1, 2)$, 从而 $P(X + Y \leq 1) = \frac{1}{2}$, 故选 (B)。

方法二由于 $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(1,1)$, 且 X 与 Y 相互独立, 因此 $X + Y \sim N(1, 2)$,

从而 $P(X + Y \leq 1) = \frac{1}{2}$, 故选 (B)。

(3) 解应选 (D)。

由于 $X \sim U(0,1)$, $Y \sim U(0,1)$, 因此 X 与 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

又由于 X 与 Y 相互独立, 故 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

从而 $P(X^2 + Y^2 \leq 1) = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} f(x, y) dx dy = \iint_D 1 dx dy = \frac{\pi}{4}$ (其中 D 为 $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$

含在区域 $\{(x, y) | 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ 中的部分), 故选 (D)。

(4) 解应选 (B)。

由全概率公式及 X 与 Y 相互独立, 得

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(XY \leq z) \\ &= P(Y=0)P(XY \leq z | Y=0) + P(Y=1)P(XY \leq z | Y=1) \\ &= \frac{1}{2}[P(X \cdot 0 \leq z | Y=0) + P(X \leq z | Y=1)] \\ &= \frac{1}{2}[P(X \cdot 0 \leq z) + P(X \leq z)] \end{aligned}$$

从而 Z 的分布函数为

$$F_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}\Phi(z), & z < 0 \\ \frac{1}{2}[1 + \Phi(z)], & z \geq 0 \end{cases}$$

其中 $\Phi(x)$ 是 X 的分布函数。由于

$$F_Z(0-0) = \frac{1}{2}\Phi(0) = \frac{1}{4} \neq \frac{3}{4} = \frac{1}{2}[1 + \Phi(0)] = F_Z(0)$$

因此 $z=0$ 是函数 $F_Z(z)$ 的唯一间断点, 即 $F_Z(z)$ 只有一个间断点, 故选 (B)。

(5) 解应选 (D)。

不妨设 $X \sim E(\lambda)$, 则 X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, 设 Y 的分布函数为

$F_Y(y)$, 则 $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\min\{X, 2\} \leq y)$ 。当 $y < 0$ 时, $F_Y(y) = 0$; 当 $0 \leq y < 2$ 时,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(\min\{X, 2\} \leq y) = 1 - P(\min\{X, 2\} > y) \\ &= 1 - P(X > y) = 1 - \int_y^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda y} \end{aligned}$$

当 $y \geq 2$ 时, $F_Y(y) = 1$, 即 Y 的分布函数为

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1 - e^{-\lambda y}, & 0 \leq y < 2 \\ 1, & y \geq 2 \end{cases}$$

由于

$$F_Y(0-0) = 0 = F_Y(0+0), \quad F_Y(2-0) = 1 - e^{-2\lambda} \neq 1 = F_Y(2)$$

因此 $F_Y(y)$ 恰好有一个间断点，故选 (D)。

二、填空题

(1) 解应填 $\alpha + \beta = \frac{1}{3}$, $\alpha = \frac{2}{9}$, $\beta = \frac{1}{9}$ 。

由于 $\frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{3} + \alpha + \beta = 1$, 因此 $\alpha + \beta = \frac{1}{3}$, 故填 $\alpha + \beta = \frac{1}{3}$ 。

若 X 、 Y 相互独立，则

$$\alpha = P(X=2, Y=2) = P(X=2)P(Y=2) = \left(\frac{1}{3} + \alpha + \beta\right)\left(\frac{1}{9} + \alpha\right)$$

从而 $\alpha = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{9} + \alpha\right)$, 解之得 $\alpha = \frac{2}{9}$, 从而 $\beta = \frac{1}{9}$, 故填 $\alpha = \frac{2}{9}$, $\beta = \frac{1}{9}$ 。

(2) 解应填 $\frac{1}{9}$ 。

方法一由于 $X \sim U[0, 3]$, $Y \sim U[0, 3]$, 因此 X 与 Y 的分布函数分别为

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{3}, & 0 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \frac{y}{3}, & 0 \leq y < 3 \\ 1, & y \geq 3 \end{cases}$$

又由于 X 与 Y 相互独立，故 $Z = \max\{X, Y\}$ 分布函数为

$$F_{\max}(z) = F_X(z)F_Y(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{z^2}{9}, & 0 \leq z < 3 \\ 1, & z \geq 3 \end{cases}$$

所以 $P(\max\{X, Y\} \leq 1) = F_{\max}(1) = \frac{1}{9}$, 故填 $\frac{1}{9}$ 。

方法二由于 X 与 Y 相互独立，且 $X \sim U[0,3], Y \sim U[0,3]$ ，因此 $(X,Y) \sim U[0,3;0,3]$ 。

从而由几何概率，得

$$P(\max\{X,Y\} \leq 1) = P(X \leq 1, Y \leq 1) = \frac{1}{9}$$

故填 $\frac{1}{9}$ 。

(3) 解应填 $\sqrt[3]{4}$ 。

由于 $P(A) = P(X > a) = P(Y > a) = \int_a^2 \frac{3}{8} x^2 dx = 1 - \frac{a^3}{8}$ ，因此

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} &= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(X > a) + P(Y > a) - P(X > a, Y > a) \\ &= P(X > a) + P(Y > a) - P(X > a)P(Y > a) \\ &= 1 - \frac{a^3}{8} + 1 - \frac{a^3}{8} - (1 - \frac{a^3}{8})(1 - \frac{a^3}{8}) = 1 - \frac{a^6}{64} \end{aligned}$$

解之得 $a = \sqrt[3]{4}$ ，故填 $\sqrt[3]{4}$ 。

(4) 解应填 $\frac{3}{4}$ 。

由于 $X \sim E(2)$ ， $Y \sim E(3)$ ，因此 X 与 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} 3e^{-3y}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

又由于 X 与 Y 相互独立，故 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} 6e^{-(2x+3y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

从而

$$P(Y < 2X) = \iint_{y < 2x} f(x,y) dx dy = 3 \int_0^{+\infty} e^{-3y} dy \int_{\frac{y}{2}}^{+\infty} 2e^{-2x} dx = 3 \int_0^{+\infty} e^{-4y} dy = \frac{3}{4}$$

故填 $\frac{3}{4}$ 。

三、解 (1) 由于 X 与 Y 相互独立，因此

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} \lambda\mu e^{-(\lambda x + \mu y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$\forall y > 0, f_Y(y) > 0$, X 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

(2) 由于 Z 的可能取值为 0, 1, 且

$$\begin{aligned} P(Z=1) &= P(X \leq Y) = \iint_{x \leq y} f(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} \lambda\mu e^{-(\lambda x + \mu y)} dy \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-(\lambda + \mu)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \end{aligned}$$

$$P(Z=0) = 1 - P(Z=1) = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

即 Z 的分布律为

Z	0	1
P	$\frac{\mu}{\lambda + \mu}$	$\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$

Z 的分布函数为

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{\mu}{\lambda + \mu}, & 0 \leq z < 1 \\ 1, & z \geq 1 \end{cases}$$

四、解 (1) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_0^{2x} dy = 2x, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_{\frac{y}{2}}^1 dx = 1 - \frac{y}{2}, & 0 < y < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 方法一先求 Z 的分布函数 $F_Z(z)$ 。当 $\frac{z}{2} < 0$, 即 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = 0$;

当 $0 \leq \frac{z}{2} < 1$, 即 $0 \leq z < 2$ 时,

$$F_z(z) = P(Z \leq z) = P(2X - Y \leq z) = \iint_{2x-y \leq z} f(x, y) dx dy = z - \frac{z^2}{4}$$

当 $\frac{z}{2} \geq 1$, 即 $z \geq 2$ 时, $F_z(z) = 1$, 即 Z 的分布函数为

$$F_z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ z - \frac{z^2}{4}, & 0 \leq z < 2 \\ 1, & z \geq 2 \end{cases}$$

再求 Z 的概率密度 $f_z(z)$ 。

$$f_z(z) = F'_z(z) = \begin{cases} 1 - \frac{z}{2}, & 0 < z < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\text{方法二 } f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, 2x - z) dx.$$

由 $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < 2x - z < 2x \end{cases}$, 得 $0 < z < 2x$, 从而 $0 < z < 2$ 。故当 $0 < z < 2$ 时, $f_z(z) > 0$,

在其他点, $f_z(z) = 0$ 。

再由 $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < 2x - z < 2x \end{cases}$, 得 $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ \frac{z}{2} < x \end{cases}$, 即 $\frac{z}{2} < x < 1$, 从而 Z 的概率密度为

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx = \begin{cases} \int_{\frac{z}{2}}^1 1 dx = 1 - \frac{z}{2}, & 0 < z < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$(3) \quad P(Y \leq \frac{1}{2} \mid X \leq \frac{1}{2}) = \frac{P(X \leq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2})}{P(X \leq \frac{1}{2})} = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{1}{2}} dx}{\int_0^{\frac{1}{2}} 2x dx} = \frac{3}{4}$$

五、解区域 D 的面积为 $A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{1}{3}$, 由于 $(X, Y) \sim U(D)$, 因此 (X, Y) 的

联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 3, & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

(1) 由于

$$P(U=0) = P(X > Y) = \iint_{x>y} f(x,y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x 3dy = 3 \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{2}$$

$$P(U=0) = P(X \leq \frac{1}{4}) = \iint_{x \leq \frac{1}{4}} f(x,y) dx dy = \int_0^{\frac{1}{4}} dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 3dy = 3 \int_0^{\frac{1}{4}} (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{15}{64}$$

$$\text{且 } P(U=0, X \leq \frac{1}{4}) = P(X > Y, X \leq \frac{1}{4}) = \iint_{x>y, x \leq \frac{1}{4}} f(x,y) dx dy = \int_0^{\frac{1}{4}} dx \int_{x^2}^x 3dy$$

$$= 3 \int_0^{\frac{1}{4}} (x - x^2) dx = \frac{5}{64}$$

因此 $P(U=0, X \leq \frac{1}{4}) = \frac{5}{64} \neq \frac{1}{2} \times \frac{15}{64} = P(U=0)P(X \leq \frac{1}{4})$, 从而 U 与 X 不相互独立。

(2) 由全概率公式, 得

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(U + X \leq z) = P(U + X \leq z, U = 0) + P(U + X \leq z, U = 1) \\ &= P(X \leq z, X > Y) + P(X \leq z - 1, X \leq Y) \end{aligned}$$

先求 $P(X \leq z, X > Y)$ 。当 $z < 0$ 时, $P(X \leq z, X > Y) = 0$; 当 $0 \leq z < 1$ 时,

$$P(X \leq z, X > Y) = P(Y < X \leq z) = \iint_{y < x \leq z} f(x,y) dx dy = \int_0^z dx \int_{x^2}^x 3dy = \frac{3}{2}z^2 - z^3$$

$$\text{当 } z \geq 1 \text{ 时, } P(X \leq z, X > Y) = P(Y < X \leq z) = \iint_{y < x \leq z} f(x,y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x 3dy = \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } P(X \leq z, X > Y) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{3}{2}z^2 - z^3, & 0 \leq z < 1 \\ \frac{1}{2}, & z \geq 1 \end{cases}$$

再求 $P(X \leq z - 1, X \leq Y)$ 。当 $z - 1 < 0$, 即 $z < 1$ 时, $P(X \leq z - 1, X \leq Y) = 0$; 当 $0 \leq z - 1 < 1$, 即 $1 \leq z < 2$ 时,

$$P(X \leq z - 1, X \leq Y) = \iint_{x \leq z - 1, x \leq y} f(x,y) dx dy = \int_0^{z-1} dx \int_x^{\sqrt{x}} 3dy = 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2$$

$$\text{当 } z - 1 \geq 1, \text{ 即 } z \geq 2 \text{ 时, } P(X \leq z - 1, X \leq Y) = \iint_{x \leq z - 1, x \leq y} f(x,y) dx dy = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} 3dy = \frac{1}{2},$$

即

$$P(X \leq z-1, X \leq Y) = \begin{cases} 0, & z < 1 \\ 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2, & 1 \leq z < 2 \\ \frac{1}{2}, & z \geq 2 \end{cases}$$

从而

$$F_Z(z) = P(X \leq z, X > Y) + P(X \leq z-1, X \leq Y) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \frac{3}{2}z^2 - z^3, & 0 \leq z < 1 \\ \frac{1}{2} + 2(z-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(z-1)^2, & 1 \leq z < 2 \\ 1, & z \geq 2 \end{cases}$$

六、解 (1) $P(Z \leq \frac{1}{2} | X = 0) = P(X + Y \leq \frac{1}{2} | X = 0) = P(Y \leq \frac{1}{2} | X = 0)$, 由于 X 与 Y

相互独立, 因此

$$P(Z \leq \frac{1}{2} | X = 0) = P(Y \leq \frac{1}{2} | X = 0) = P(Y \leq \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 dy = \frac{1}{2}$$

(2) 设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$, Z 的分布函数和概率密度分别为 $F_Z(z), f_Z(z)$, 根据

题设由全概率公式及 X 与 Y 相互独立, 得

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) \\ &= P(X = -1)P(X + Y \leq z | X = -1) + P(X = 0)P(X + Y \leq z | X = 0) \\ &\quad + P(X = 1)P(X + Y \leq z | X = 1) \\ &= \frac{1}{3}(P(Y \leq z+1 | X = -1) + P(Y \leq z | X = 0) + P(Y \leq z-1 | X = 1)) \\ &= \frac{1}{3}(P(Y \leq z+1) + P(Y \leq z) + P(Y \leq z-1)) \\ &= \frac{1}{3}(F_Y(z+1) + F_Y(z) + F_Y(z-1)) \end{aligned}$$

从而 Z 的概率密度为

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= F'_Z(z) = \frac{1}{3}(F'_Y(z+1) + F'_Y(z) + F'_Y(z-1)) \\ &= \frac{1}{3}(f_Y(z+1) + f_Y(z) + f_Y(z-1)) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & -1 < z < 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$