第二章　随机变量及其分布

§1 随机变量　§2 随机变量的分布函数　§3 离散性随机变量及其分布律

一、单项选择题

（1）解应选（B）。

方法一由于在选项（A）中，$F(+\infty)=0\neq 1$，在选项（C）中，$F(+\infty)=\frac{1}{2}\neq 1$，在选项（D）中，取 $f(x)=\begin{cases}-1, & 1\le x\le 2\\ 2, & 3\le x\le 4\\ 0, & 其他\end{cases}$，则$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，但当$1<x<2$时，$F(x)=1-x<0$，因此选项（A）、（C）、（D）都不正确，故选（B）。

方法二由于$F(x)=\frac{1}{\pi}\arctan x+\frac{1}{2}$，因此$0\le F(x)\le 1$，且$F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$；$F(x)$单调不减；$F(x)$右连续，从而$F(x)$是分布函数，故选（B）。

（2）解应选（C）。

由于$F(-a)=\int_{-\infty}^{-a}\varphi(x)dx$，令$t=-x$，则

$$
\begin{aligned}
F(-a)&=-\int_{+\infty}^{a}\varphi(-t)dt=\int_{a}^{+\infty}\varphi(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)dt-\int_{-\infty}^{a}\varphi(t)dt\\
&=1-\int_{-\infty}^{0}\varphi(t)dt-\int_{0}^{a}\varphi(t)dt=1-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)dt-\int_{0}^{a}\varphi(x)dx\\
&=1-\frac{1}{2}-\int_{0}^{a}\varphi(t)dt=\frac{1}{2}-\int_{0}^{a}\varphi(t)dt
\end{aligned}
$$

因此$F(-a)=\frac{1}{2}-\int_{0}^{a}\varphi(x)dx$，故选（C）。

（3）解应选（C）。

$$P(X=1)=F(1)-F(1-0)=1-e^{-1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-e^{-1}$$

故选（C）。

（4）解应选（C）。

由分布律的性质，得$\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}b\lambda^k=1$，由于$b\lambda^k$是概率，因此$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k$收敛于$\frac{1}{b}$，且$0<\lambda<1$。由$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k=\frac{\lambda}{1-\lambda}$，得$\frac{\lambda}{1-\lambda}=\frac{1}{b}$，从而$\lambda=\frac{1}{b+1}$，故选（C）。

（5）解应选（B）。

由于此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标，即此人第 4 次射击命中目标，其概率为p，在前三次

射击中恰好有一次命中目标，其概率为$C_3^1 p(1-p)^2$，因此由事件的相互独立性知，此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为$C_3^1 p(1-p)^2 \cdot p = 3p^2(1-p)^2$，故选（B）。

（6）解应选（A）。

由$F(-1+0)=F(-1)$，得$-a+b=\frac{1}{8}$，再由

$$\frac{5}{8}=P(-1<X<1)=F(1-0)-F(-1)=a+b-\frac{1}{8}$$

得$a+b=\frac{3}{4}$，解之得$a=\frac{5}{16}, b=\frac{7}{16}$，故选（A）。

二、填空题

（1）解应填$1-(\alpha+\beta)$。

由于$\{x_1 \le X \le x_2\}=\{X \le x_2\}-\{X<x_1\}$，因此

$$P(x_1 \le X \le x_2)=P(\{X \le x_2\}-\{X<x_1\})=P(X \le x_2)-P(X<x_1)$$

$$=P(X \le x_2)-[1-P(X \ge x_1)]=1-\beta-\alpha=1-(\alpha+\beta)$$

故填$1-(\alpha+\beta)$。

（2）解应填$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{1}{1+\alpha}, & 0 \le x<1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$。

由于 X 服从参数为 p 的 $0-1$ 分布，且 $P(X=1)=\alpha P(X=0)$，因此 $p=\alpha(1-p)$，即 $p=\frac{\alpha}{1+\alpha}$，故填$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{1}{1+\alpha}, & 0 \le x<1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$。

（3）解应填

X	3	4	5	6	7
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

X 可能的取值为 3、4、5、6、7，且$P(X=3)=\frac{1}{C_4^2}=\frac{1}{6}$，$P(X=4)=\frac{1}{C_4^2}=\frac{1}{6}$，$P(X=5)=\frac{2}{C_4^2}$

$=\frac{1}{3}$，$P(X=6)=\frac{1}{C_4^2}=\frac{1}{6}$，$P(X=7)=\frac{1}{C_4^2}=\frac{1}{6}$，故填

X	3	4	5	6	7
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

（4）解应填 $P(X=k)=(\frac{1}{5})^{k-1}\frac{4}{5},\ k=1,2,\cdots$。

由于 X 可能的取值为 $1,2,\cdots$，且事件 $\{X=k\}\ (k=1,2,\cdots)$ 表示第 k 次测试测得一个正品，前 $k-1$ 次测试测得的都是次品，由事件的相互独立性，得

$$P(X=k)=(\frac{1}{5})^{k-1}\frac{4}{5},\ \ k=1,2,\cdots$$

故填 $P(X=k)=(\frac{1}{5})^{k-1}\frac{4}{5},\ k=1,2,\cdots$。

（5）解应填 $\frac{4}{27}$。

由于 $P(X\le 2)=P(X=1)+P(X=2)=\theta+\theta(1-\theta)=\frac{5}{9}$，即 $9\theta^2-18\theta+5=0$，解之得 $\theta=\frac{1}{3}$，$\theta=\frac{5}{3}$（不合题意舍去），因此

$$P(X=3)=\theta(1-\theta)^2=\frac{1}{3}\times(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{27},$$

故填 $\frac{4}{27}$。

三、解由 $F(+\infty)=1$，得 $a+b=1$；再由 $F(0+0)=F(0)$，得 $b=0$，从而 $a=1$。

$$P(1\le X\le 2)=F(2)-F(1-0)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

四、解 X 的可能取值为 $0,1,2,3$，且

$P(X=0)=\frac{1}{2}$，$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2^2}$，$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2^3}$，$P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2^3}$

即 X 的分布律为

X	**0**	**1**	**2**	**3**
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^3}$

当 $x<0$ 时，$F(x)=0$；当 $0\le x<1$ 时，$F(x)=P(X=0)=\frac{1}{2}$；当 $1\le x<2$ 时，$F(x)=P(X=0)$ $+P(X=1)=\frac{3}{4}$；当 $2\le x<3$ 时，$F(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\frac{7}{8}$；当 $x\ge 3$ 时，$F(x)=1$，

即 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}, & 0\le x<1\\ \frac{3}{4}, & 1\le x<2\\ \frac{7}{8}, & 2\le x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$$

五、解 X 的可能取值为 $3,4,5$，且

$$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{10}，\quad P(X=4)=\frac{C_1^1C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}，\quad P(X=5)=\frac{C_1^1C_4^2}{C_5^3}=\frac{6}{10}$$

即 X 的分布律为

X	**3**	**4**	**5**
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

六、解设 X 表示“该运动员 5 次独立重复射击中命中目标的次数”，则 $X\sim B(5,p)$，由

$$\frac{31}{32}=P(X\ge 1)=1-P(X=0)=1-(1-p)^5$$

解之得 $p=\frac{1}{2}$，从而 $X\sim B(5,\frac{1}{2})$。

（1）所求的概率为

$$P(X=1)=C_5^1(\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})^4=\frac{5}{32}。$$

（2）所求的概率为

$$P(X\ge 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-(1-\frac{1}{2})^5-C_5^1(\frac{1}{2})(1-\frac{1}{2})^4=\frac{13}{16}$$

七、解由于 $X\sim P(\lambda t)$，因此 X 的分布律为 $P(X=k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},k=1,2,\cdots$，在一次地震后的时间 t 内无地震的事件可表示为

$$P(T>t)=P(X=0)=e^{-\lambda t}$$

（1）设 T 的分布函数为 $F_T(t)$。当 $t<0$ 时，$F_T(t)=0$；当 $t\ge 0$ 时，

$$F_T(t)=P(T\le t)=1-P(T>t)=1-e^{-\lambda t}$$

即T的分布函数为

$$F_T(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda i},t\ge 0\\0, \qquad t<0\end{cases}$$

故T服从参数为λ的指数分布，即T~$E(\lambda)$。

（2）所求的概率为$t=2$时$P(X\ge 3)$的值，即

$$P(X\ge 3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)$$

$$=1-\frac{(2\lambda)^0}{0!}e^{-2\lambda}-\frac{(2\lambda)^1}{1!}e^{-2\lambda}-\frac{(2\lambda)^2}{2!}e^{-2\lambda}=1-(1+2\lambda+2\lambda^2)e^{-2\lambda}$$

（3）由于$T\sim E(\lambda)$，因此

$$P(T\ge 16\big|T>8)=P(T\ge 8)=1-P(T<8)=e^{-8\lambda}$$

八、解设X表示第一次抽取的 10 件产品中的次品数，Y第二次抽取的 5 件产品中的次品数，则$X\sim B(10,0.1)$，$Y\sim B(5,0.1)$。

（1）所求的概率为$P(X=0)=(1-0.1)^{10}\approx 0.3487$。

（2）需做第二次检验的概率为$P(1\le X\le 2)=C_{10}^1(0.1)(0.9)^9+C_{10}^2(0.1)^2(0.9)^8\approx 0.5811$。

（3）这批产品按第二次检验的标准被接受的概率为$P(Y=0)=(1-0.1)^5\approx 0.5905$。

（4）由于X、Y的取值可以被认为是放回抽样的结果，即随机试验的结果是相互独立的，因此事件$\{1\le X\le 2\}$与$\{Y=0\}$相互独立，从而所求的概率为

$$P(\{1\le X\le 2\}\bigcap\{Y=0\})=P(1\le X\le 2)P(Y=0)=0.5811\times 0.5905=0.3431$$

（5）这批产品被接受的概率为

$$P(\{X=0\}\bigcup(\{1\le X\le 2\}\bigcap\{Y=0\}))=P(X=0)+P(\{1\le X\le 2\}\bigcap\{Y=0\})$$

$$=0.3487+0.3431=0.6918$$

九、解（1）X可能的取值为$0,1,2,3$，设$A_i(i=1,2,3)$表示事件"取出的是第i盒"，则$P(A_i)=\frac{1}{3}$，$i=1,2,3$，由全概率公式，得

$$P(X=0)=P(A_3)P(X=0|A_3)=\frac{1}{3}\cdot\frac{C_3^3}{C_5^3}=\frac{1}{30}$$

$$P(X=1)=P(A_2)P(X=1|A_2)+P(A_3)P(X=1|A_3)=\frac{1}{3}(\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}+\frac{C_2^1C_3^2}{C_5^3})=\frac{9}{30}$$

$$P(X=2)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(X=2|A_i)=\frac{1}{3}(\frac{C_4^2C_1^1}{C_5^3}+\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}+\frac{C_2^2C_3^1}{C_5^3})=\frac{15}{30}$$

$$P(X=3)=P(A_1)P(X=3|A_1)+P(A_2)P(X=3|A_2)=\frac{1}{3}(\frac{C_4^3}{C_5^3}+\frac{C_3^3}{C_5^3})=\frac{5}{30}$$

即 X 的分布律为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{5}{30}$

（2）所求的概率为

$$P(X\ge 2)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{15}{30}+\frac{5}{30}=\frac{2}{3}$$

§4 连续型随机变量及其概率密度　§5 随机变量函数及其分布

一、单项选择题

（1）解应选（B）。

由于 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$，因此$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}ce^{-x^2}dx=c\sqrt{\pi}$，从而 $c=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$，故选（B）。

（2）解应选（C）。

由于 $P(X<1500)=\int_{1000}^{1500}\frac{1000}{x^2}dx=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$，设 Y 表示在开始使用 1500 小时内需要更换的元件个数，则 $Y\sim B(5,\frac{1}{3})$，因此所求的概率为 $P(Y=2)=C_5^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=10\times\frac{1}{9}\times\frac{8}{27}=\frac{80}{243}$，故选（C）。

（3）解应选（A）。

$$P(\text{“方程 } t^2+2Xt+4=0 \text{ 没有实根”})=P(4X^2-16<0)=P(X^2<4)=P(-2<X<2)$$

$$=\Phi(2)-\Phi(-2)=2\Phi(2)-1$$

故选（A）。

（4）解应选（D）。

由于 $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)\ge 0$，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)]dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)F_2(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(x)F_1(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}F_2(x)dF_1(x)+\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(x)dF_2(x)$$

$$=\left[F_1(x)F_2(x)\right]_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(x)dF_2(x)+\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(x)dF_2(x)$$

$$=F_1(+\infty)F_2(+\infty)-F_1(-\infty)F_2(-\infty)=1$$

因此 $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$ 为概率密度，故选（D）。

二、填空题

（1）解应填 $\dfrac{9}{64}$。

依题意，得 $Y\sim B(3,p)$，且 $p=P(X\le\frac{1}{2})=\int_0^{\frac{1}{2}}2xdx=\frac{1}{4}$，从而 $P(Y=2)=C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{64}$，故填 $\dfrac{9}{64}$。

（2）解应填 e^{-8}。

由于 $\xi\sim E(2)$，因此 ξ 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$，从而

$$P(\text{“方程}\ x^2+\xi x+4=0\ \text{有实根”})=P(\xi^2-4\cdot4\ge0)$$

$$=P(\xi\le-4)+P(\xi\ge4)=\int_4^{+\infty}2e^{-2x}dx=e^{-8}$$

故填 e^{-8}。

三、解（1）由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$，得 $1=\int_0^{2\sqrt{3}}3Cxdx=18C$，故 $C=\dfrac{1}{18}$。

（2）由（1）知 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{6}x, & 0<x<2\sqrt{3}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，由于 X 是连续型随机变量，因此所求的概率为

$$P\left(\frac{1}{2}<X<2\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{6}xdx=\frac{5}{16}$$

（3）当 $x<0$ 时，$F(x)=0$；当 $0\le x<2\sqrt{3}$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_0^x\frac{1}{6}xdx=\frac{x^2}{12}$；当

$x \geq 2\sqrt{3}$ 时，$F(x)=1$，即 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0 \\ \dfrac{1}{12}x^2, & 0 \leq x < 2\sqrt{3} \\ 1, & x \geq 2\sqrt{3}\end{cases}$$

四、解（1）由于 $X \sim N(3,2^2)$，因此

$$P(2<X\leq 5)=\Phi(\frac{5-3}{2})-\Phi(\frac{2-3}{2})$$

$$=\Phi(1)-\Phi(-0.5)=\Phi(1)-[1-\Phi(0.5)]=0.8413-1+0.6915=0.5328$$

$$P(-4<X\leq 10)=\Phi(\frac{10-3}{2})-\Phi(\frac{-4-3}{2})=\Phi(3.5)-\Phi(-3.5)=2\Phi(3.5)-1$$

$$=2\times 0.9998-1=0.9996$$

$$P(|X|>2)=1-P(|X|\leq 2)=1-[\Phi(\frac{2-3}{2})-\Phi(\frac{-2-3}{2})]$$

$$=1-\Phi(-0.5)+\Phi(-2.5)=\Phi(0.5)+1-\Phi(2.5)$$

$$=0.6915+1-0.9938=0.6977$$

$$P(X>3)=1-P(X\leq 3)=1-\Phi(\frac{3-3}{2})=1-\Phi(0)=1-0.5=0.5$$

（2）由 $P(X>c)=P(X\leq c)$，得 $1-P(X\leq c)=P(X\leq c)$，即 $P(X\leq c)=\frac{1}{2}$。由于 $X \sim N(3,2^2)$，因此 $P(X\leq 3)=\frac{1}{2}$，从而 $c=3$。

（3）由于 $X \sim N(3,2^2)$，因此 $P(X>d)=1-P(X\leq d)=1-\Phi(\frac{d-3}{2})$，从而 d 取决于如下条件：$1-\Phi(\frac{d-3}{2})\geq 0.9$，即

$$\Phi(-\frac{d-3}{2})\geq 0.9=\Phi(1.282)$$

所以 $-\frac{d-3}{2}\geq 1.282$，从而 $d\leq 0.436$，即 d 至多为 0.436。

五、解（1）方法一（分布函数法）：由于 $X \sim U(0,1)$，因此 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，则 $F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(e^X\leq y)$。当 $y<1$ 时，$F_Y(y)=0$；

当$1 \le y < e$时，$F_Y(y) = P(e^X \le y) = P(X \le \ln y) = \int_{-\infty}^{\ln y} f_X(x)dx = \int_0^{\ln y} 1dx = \ln y$；当$y \ge e$时，$F_Y(y) = 1$，从而$Y$的概率密度为

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y}, & 1 < y < e \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

方法二（公式法）：由于$X \sim U(0,1)$，因此X的概率密度为$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$。由于函数$y = e^x$严格单调可微，其反函数为$x = h(y) = \ln y\ (y > 0)$，$h'(y) = \dfrac{1}{y}\ (y \ne 0)$。由$f_X(h(y)) > 0$，即$0 < \ln y < 1$，得$1 < y < e$，因此$Y$的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(\ln y)\left|\dfrac{1}{y}\right| = \dfrac{1}{y}, & 1 < y < e \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

（2）方法一（分布函数法）：由于$X \sim U(0,1)$，因此X的概率密度为$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$。设$Y$的分布函数为$F_Y(y)$，则$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(-2\ln X \le y)$。当$y < 0$时，$F_Y(y) = 0$；当$y \ge 0$时，$F_Y(y) = P(-2\ln X \le y) = P(X \ge e^{-\frac{y}{2}}) = \int_{e^{-\frac{y}{2}}}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{e^{-\frac{y}{2}}}^{1} 1dx = 1 - e^{-\frac{y}{2}}$，从而$Y$的概率密度为

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

方法二（公式法）：由于$X \sim U(0,1)$，因此X的概率密度为$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，由于函数$y = -2\ln x$严格单调可微，其反函数为$x = h(y) = e^{-\frac{y}{2}}\ (-\infty < y < +\infty)$，$h'(y) = -\dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\ (-\infty < y < +\infty)$。由$f_X(h(y)) > 0$，即$0 < e^{-\frac{y}{2}} < 1$，得$y > 0$，因此$Y$的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(e^{-\frac{y}{2}})\left|-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}\right| = \dfrac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

六、解由于 $F(x)$ 是严格单调上升且连续的分布函数，故 $F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$，$0\le F(x)\le 1$，因此 $Y=F(X)$ 取值于 $[0,1]$，当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=0$；

当 $0\le y<1$ 时，$F(y)=P(Y\le y)=P(F(X)\le y)=P(X\le F(F^{-1}(y))=y$（反函数存在）

当 $y\ge 1$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=1$；即

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ y, & 0\le y<1\\ 1, & y\ge 1\end{cases}。$$

故 Y 在 $[0,1]$ 上服从均匀分布，即 $Y=F(X)\sim U[0,1]$。

七、解（1）设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$。当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $0\le y<16$ 时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^4\le y)=P(X^4<0)+P(0\le X^4\le y)=P(-\sqrt[4]{y}\le X\le \sqrt[4]{y})$$
$$=P(-\sqrt[4]{y}\le X<0)+P(0\le X<\sqrt[4]{y})=\int_{-\sqrt[4]{y}}^{0}\frac{1}{3}dx+\int_{0}^{\sqrt[4]{y}}\frac{1}{9}dx=\frac{4}{9}\sqrt[4]{y}$$

当 $16\le y<81$ 时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^4\le y)=P(X^4<0)+P(0\le X^4\le 16)+P(16<X^4\le y)$$
$$=P(-2\le X\le 2)+P(2<X\le \sqrt[4]{y})=P(-2\le X<0)+P(0\le X\le \sqrt[4]{y})$$
$$=\int_{-2}^{0}\frac{1}{3}dx+\int_{0}^{\sqrt[4]{y}}\frac{1}{9}dx=\frac{2}{3}+\frac{1}{9}\sqrt[4]{y}$$

当 $y\ge 81$ 时，当 $F_Y(y)=1$。

从而 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{1}{9}y^{-\frac{3}{4}}, & 0<y<16\\ \frac{1}{36}y^{-\frac{3}{4}}, & 16\le y<81\\ 0, & 其他\end{cases}$$

（2）$P(X\le -\frac{1}{2},Y\le 1)=P(X\le -\frac{1}{2},X^4\le 1)=P(X\le -\frac{1}{2},-1\le X\le 1)$

$$=P(-1\le X\le -\frac{1}{2})=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{3}dx=\frac{1}{6}$$

八、解（1）设 Y 的分布函数为 $F(y)$，则当 $y<1$ 时，$F(y)=0$；当 $1\le y<2$ 时，

$$F(y)=P(Y\le y)=P(Y<1)+P(Y=1)+P(1<Y\le y)$$

$$=P(X\ge 2)+P(1<X\le y)$$

$$=\int_2^3\frac{1}{9}x^2dx+\int_1^y\frac{1}{9}x^2dx=\frac{2}{3}+\frac{1}{27}y^3$$

当 $y\ge 2$ 时，$F(y)=1$。或当 $y\ge 2$ 时，

$$F(y)=P(Y\le y)=P(Y<1)+P(Y=1)+P(1<Y<2)+(Y=2)+P(2<Y\le y)$$

$$=P(X\ge 2)+P(1<X<2)+P(X\le 1)=1$$

从而 Y 的分布函数为

$$F(y)=\begin{cases}0, & y<1\\ \dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{27}y^3, & 1\le y<2\\ 1, & y\ge 2\end{cases}$$

（2）$P(X\le Y)=P(X\le 1)+P(1<X<2)=P(X\le 2)=\int_0^2\frac{1}{9}x^2dx=\frac{8}{27}$