Разработка математической модели.

Данные[1] :

- Длина ракеты - 15.2 м
- Диаметр ракеты ~ 5.14 м
- Стартовая масса ~ 20.98 т
- Масса полезного груза ~ 1.84 т

	Два ускорителя (для 1-ого)	1 ступень	2 ступень	3 ступень (Полезная нагрузка)
Масса (т)	3.8	10.63	1.86	0.7
Двигатель	Твердотопливный ускоритель	Жидкостный ракетный двигатель	Жидкостный ракетный двигатель	Жидкостный ракетный двигатель
Масса	3.563 т	1.500 тонн	0.500 тонн	0,020 тон
Масса (сухого)	0,750 т			
Расход топлива (ω)	118.71 кг/с	68.51 кг/с	17.73 кг/с	0.65 кг/с
Удельный импульс (1 атм)	1667.1 м/с	2451.7 м/с	833.6 м/с	784.5 м/с
Удельный импульс (вакуум)	1912.3 м/с	3138.1 м/с	3383.3 м/с	3089.1 м/с
Масса топливного бака (полная)		4.5 т	2.588 т	0.225 т
Масса топливного бака (сухая)		0.5 т	0.288 т	0.025 т

[1] [1],[2],[3]

Физическая модель:

Пусть ракета - материальная точка, планета - шар, точка взлёта - точка на поверхности шара. Цель миссии вывести аппарат на низкую орбиту, вне действия сопротивления атмосферы. Рассмотрим инерциальную систему отсчёта связанную с планетой.

Второй закон Ньютона [4.1]:

$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}_{тяги} + \overrightarrow{F}_{тяж} + \overrightarrow{F}_{сопр}$ (1)

Изменение массы ракеты для 1-ой до N-ой ступени:

$m = m_0 - \sum_{j=i-1}^{0} m_j - \omega_i \cdot t_i$, (2.1)

Для нулевой ступени:

$m = m_0 - \omega_i \cdot t_i$ (2.2)

где m_0 - начальная масса ракеты, N - количество ступеней, m_j - масса j-ой ступени с топливом (предыдущие отделившиеся элементы), i - скорость истечения газов i-ой ступени, t_i - время работы i-ой ступени. За нулевую ступень возьмём твердотопливные ускорители.

Сила тяжести [4.2]:

$F_{тяж} = m \cdot g$, (3)

$g = \frac{GM}{(R+h)^2}$ [4.3], (4)

где h - текущая высота полёта.

Пусть $dt = \frac{T}{N}$, где T - время подъема, а N - количество интервалов, то есть, чем больше N, тем точнее получаются измерения. Так как мы не знаем время подъема аппарата, зададим dt в процессе вычисления высоты.

Вычислим текущую высоту полёта корабля [4.7]:

$h(dt \cdot n) = h(dt \cdot n - 1) + dt \cdot v_y(dt \cdot n)$, (5)

где $v_y = sin\alpha$.

Лобовое сопротивление [4.4]:

$F_{сопр} = \frac{1}{2} C_x S \rho_0 exp(-\frac{h(t)}{h_0}) v^2(t)$, (6)

где C_x - коэффициент лобового аэродинамического сопротивления, ρ_0 - плотность атмосферы на текущей высоте, v - текущая скорость ракеты, S - характерная площадь сечения ракеты. Так как нос ракеты представляет из себя конус, у которого угол вершины продольного сечения около 66 градусов[5], возьмем коэффициент C_x = 0.52 [6], h_0 - характерная величина, на которой плотность воздуха уменьшается в е раз.

Для минимизации силы сопротивления площадь поперечного сечения ракеты должна быть минимальна, то есть преодолевать слои атмосферы аппарат должен в горизонтальном состоянии. Так как ракета имеет цилиндрообразную форму, примем площадь поперечного сечения за круг, который вычисляется по формуле:

$S = \frac{\pi d^2}{4}$ (7)

Скорость можно расписать как $v = \frac{dh}{dt}$.

Сила тяги [4.5]:

$\overrightarrow{F}_{тяги} = \overrightarrow{q} \cdot \omega$ (8)

где ω - массовый расход рабочего тела, q - расчетный удельный импульс двигателя, равный скорости выбрасывания рабочего тела двигателем.

Так как ракета поднимается от 1 атм. до вакуума на низкую орбиту, положим, что удельный импульс изменяется линейно, то есть от значения при 1 атм. до вакуума. Тогда формула будет иметь следующий вид:

$q = q_a + t\frac{q_v - q_a}{N}$, (9)

где q_a - значение удельного импульса при 1 атм., q_v - значение удельного импульса при вакууме, N - количество интервалов, t - текущее время полёта.

Ускорение:

a = $\frac{dv}{dt}$

Ракета летит под оптимальному углом к горизонту [4.6]:

$\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot exp(\frac{-t}{\tau})$, (10)

где $\tau \approx 170$ с.

Пусть прямоугольная система координат привязана к плоскости, касательной к в точке запуска с началом координат в точке запуска (далее - плоскость запуска) [8]. Также примем, что траектория полёта есть плоская кривая, поэтому для расчётов будут использованы только две координаты: горизонтальная координата X - дальность, вертикальная координата Y - высота полёта относительно плоскости запуска.

Тогда проецируя на оси Ох и Оу систему получим (12):

$$\begin{cases} m\frac{dv}{dt}cos\alpha = -\ \omega \cdot q\ cos\alpha\ -\ \frac{1}{2}C_x S\rho_0 exp(-\ \frac{h(t)}{h_0})v^2(t)cos\alpha \ (11) \\ m\frac{dv}{dt}\ sin\alpha = -\ \omega \cdot q\ sin\alpha\ - mg - \frac{1}{2}C_x S\rho_0 exp(-\ \frac{h(t)}{h_0})v^2(t)sin\alpha \\ \left[\begin{array}{l} m = m_0 - \sum\limits_{j=i-1}^{0} m_j - \omega_i \cdot t_i\ ,\ (\\ m = m_0 - \omega_i \cdot t_i \end{array} \right. \\ g(h) = \frac{G\,M}{(R+h)^2} \\ h(dt\cdot n) = h(dt\cdot(n - 1)) + dt\cdot v_y(dt\cdot n) \\ S = \frac{\pi\, d^2}{4} \\ \alpha(t) = \frac{\pi}{2} \cdot exp(\frac{-t}{\tau}) \\ q(t) = q_a + t\,\frac{q_v - q_a}{N} \end{cases}$$

Система описывает взлет ракеты с поверхности планеты. В ней учитывается аэродинамическое сопротивление, но опускается скорость собственного движения планеты, как и сила давления стремящегося расшириться газа при подсчете тяги. Для упрощения расчётов пренебрежём лобовым сопротивлением.

Полёт на ракете - передвижение под действием силы тяги вверх. Давайте представим, что в конце каждого dt полёта тело имеет некую скорость v. Зная, как описать движения тела, брошенного вверх в поле тяготения земли, пренебрегая аэродинамическим сопротивлением, запишем формулу для определения текущего апогея.

Сначала выразим время T всего полёта:

$h(t_h) = h$

Пусть $v_y = sin\alpha$, тогда из основного уравнения кинематики [7.1]:

$v\, sin\alpha\, T - \frac{g\,T^2}{2} = 0$, откуда

$T = \frac{2\,v\,sin\alpha}{g}$.

За промежуток $\frac{T}{2}$ тело достигнет апогея, как как v_x = const. Вновь воспользовавшись основным уравнением кинематики вычислим:

H = h + $v\, sin\alpha\, \frac{T}{2}$ - $\frac{g\, \frac{T}{2}^2}{2}$, откуда, если подставить T,

H = h + $\frac{v^2\, sin^2\alpha}{2\frac{G\,M}{(R+h)^2}}$

Эта формула позволяет узнать, когда ракета станет больше H_a, при известном значении скорости и высоты полёта.

Так как цель нашей миссии - вывести спутник на круговую орбиту, запишем формулу первой космической скорости [7.2], которую необходимо сообщить телу в горизонтальном направлении, чтобы оно двигалось по круговой орбите на небольшой высоте над поверхностью планеты:

$v^* = \sqrt{\frac{G\,M}{(R+H)}}$,

где H - текущая высота орбиты.

При выведении спутника на орбиту зададим баллистическую траекторию[9]. То есть поднимим ракету на необходимую высоту, после чего отключим двигатель, позволив аппарату двигаться по баллистической траектории до достижения положения на некоторой эллиптической орбиты.

Так как для округления орбиты, мы её поднимем, воспользуемся импульсным маневром в апогее [10.1].

Пусть v^* - скорость спутника на круговой орбите, v_a- скорость спутника в апогее эллиптической орбиты, тогда

$$\Delta v \; = \; v^* - v_a$$

Для совершения импульсного маневра необходимо рассчитать время включения двигателя:

Пусть m_0 - начальная масса, а $m_1 = \frac{m_0}{exp[\frac{\Delta v}{q}]}$.

Использование экспоненты в формуле необходимо для описания экспоненциального уменьшения массы топлива при увеличении скорости [11].

Тогда время, на которое необходимо включить двигатель, чтобы совершить орбитальный маневр:

$$t = \frac{(m_0 - m_1)}{\omega},$$

где ω - массовый расход рабочего тела.

Решим следующие дифференциальное уравнение, заменив в формуле (11) ω на $\frac{dm}{dt}$, а также опустив аэродинамическое сопротивление.

$m\frac{dv}{dt}cos\alpha = -\frac{dm}{dt} \cdot q\, cos\alpha$, поделим обе части на dt и m.

$cos\alpha\, dv = -\frac{dm}{m} q\, cos\alpha$, проинтегрируем обе части.

$cos\alpha \int\limits_{v_0}^{v} dv = -q\, cos\alpha \int\limits_{m_0}^{m} \frac{dm}{m}$, продолжим преобразования.

$$cos\alpha \cdot 1 \Big|_{v_0}^{v} = -q\, cos\alpha \cdot ln(x)\Big|_{m_0}^{m} \Rightarrow cos\alpha(v - v_0) = -q\, cos\alpha\, ln\frac{m}{m_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{v_0 cos\alpha - q\, cos\alpha\, ln\frac{m}{m_0}}{cos\alpha} \Rightarrow v = v_0 - q\, ln\frac{m}{m_0}$$

Так как начальная скорость ракеты до начала истечения газов равна нулю, сократим до:

$v = -q\, ln\frac{m}{m_0} \Rightarrow v = q\, ln\frac{m_0}{m}$.

В итоге вычислений мы получили формулу Циолковского движения скорости ракеты в вакууме [4.8], что говорит о верности рассуждений.

Система (12) приобретает вид (13):

$$\begin{cases} v(t) = q\, ln\frac{m_0}{m(t)} \\ \left[\begin{array}{l} m = m_0 - \sum\limits_{j=i-1}^{0} m_j - \omega_i \cdot t_i, \ (\\ m = m_0 - \omega_i \cdot t_i \end{array}\right. \\ h(dt\cdot n) = h(dt\cdot(n-1)) + dt\cdot v(dt\cdot n)\, sin\alpha \\ \alpha(t) = \frac{\pi}{2} \cdot exp(\frac{-t}{\tau}) \\ q(t) = q_a + t\frac{q_v - q_a}{N} \\ H(t) = h(t) + \frac{v^2 sin^2\alpha}{2\frac{GM}{(R+h(t))^2}} \end{cases}$$

Система (13) даёт приблизительные значения характеристик полёта: скорость ракеты, её массу, высоту полёта. Также можно вычислить текущую вершину траектории, что ограничивает движение летательного аппарата.

Система (14) характеризует импульсный манёвр по округлению орбиты по достижении апогея:

$$\begin{cases} v^{*} = \sqrt{\frac{G\,M}{(R+H))}} \\ \Delta v \; = \; v^{*} - v_{a} \\ m_{1} = \frac{m_{0}}{exp[\frac{\Delta v}{q}]} \\ \mathrm{t} = \frac{(\,m_{0} - m_{1})}{\omega} \end{cases}$$

Глобальные константы:

$G = 6.6 \cdot 10^{-11}$ - гравитационная постоянная

R = 600 км - радиус планеты

M = 5.292E+22 кг - масса планеты

$p_{0} = 10^{5}$ Па - атмосферное давление на уровне моря

h_{0} = 0 м - высота точки старта ракеты

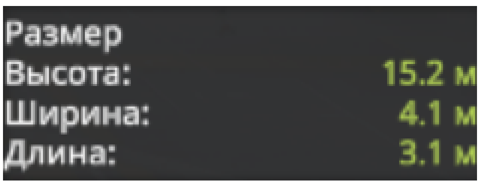
$\rho_{0} = 1,3$ кг/м^{3} - плотность на уровне моря при T = 273 K

h_{0} = 7600 м

$H_{a} = 70 \cdot 10^{3}$ м - высота атмосферы планеты

---

[1] Данные получены из Kerbal Space Program:



[2] https://wiki.kerbalspaceprogram.com/wiki/Z-MAP_Satellite_Launch_Kit

[3] https://wiki.kerbalspaceprogram.com/wiki/Parts/ru

[4] Университетский курс общей физики. Механика. В.А Алешкевич, Л.Г. Деденко, В.А. Караваев.

[4.1] Формула 3.21

[4.2] Формула 3.35

[4.3] Формула 3.32

[4.4] Формула 4.55

[4.5] Формула 4.3

[4.6] Формула 4.48

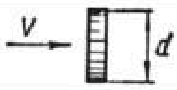
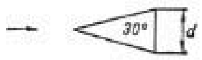
[4.7] Формула 2.26

[4.8] Формула 4.40

[5] Данные получены из анализа следующего изображения:

[6] Коэффициенты лобового сопротивления Сх:

Коэффициенты лобового сопротивления C_x для различных тел

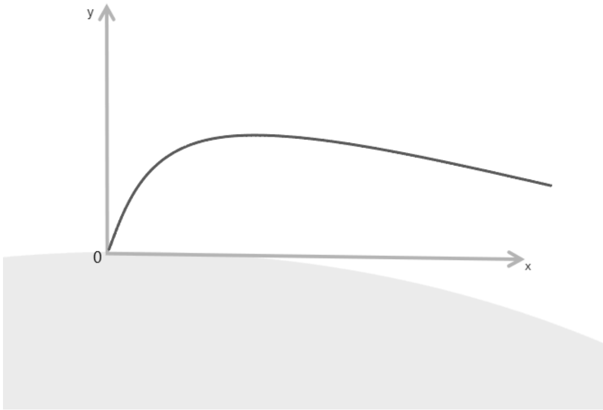
Название тела	Форма тела	Отношение линейных размеров тела	Скорость опыта υ, м/сек	Число Рейнольдса Re	Коэффициент C_x
Круглая пластинка		–	–	$10{,}7\cdot10^4$–$227\cdot10^4$	1,06–1,28
Конус		–	10	$2{,}7\cdot10^5$	0,34

[7] Классический курс. Физика. 10 класс. Г.Я. Мякишев. Б.Б.Буховцев. Н.Н. Сотский.

[7.1] Формула 1.15

[7.2] Формула 4.7

[8] Визуализация системы координат:



[9] ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫВЕДЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НА ОРБИТУ И.Е. Горохов
[10] Bate, Mueller, And White Fundamentals Of Astrodynamics
[10.1] Формула 3.3-10
[11] https://en.wikipedia.org/wiki/Tsiolkovsky_rocket_equation